Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

SOBRE JB*-TRIPLES REALES

Antonio Miguel Peralta Pereira

Tesis Doctoral

Universidad de Granada

2000

Tesis doctoral dirigida por el Prof. Dr. D. Juan Martínez Moreno, Catedrático de Análisis Matemático, de la Universidad de Granada. Fue leída el 19 de septiembre de 2000, ante el tribunal formado por los profesores: W. Kaup, A. Rodríguez Palacios, J. M. Isidro Gómez, C. Martínez López y M. Cabrera García. Obtuvo la calificación de "apto cum laude".

A mis padres y hermanos

A Esther

Índice General

Introducción

En los últimos veinte años, una clase importante de espacios de Banach, conocidos con el nombre genérico de JB*-triples, ha sido objeto de un intensivo estudio, tanto desde el punto de vista algebraico como analítico. La clase de los JB*-triples complejos engloba a los espacios de operadores, lineales y acotados entre espacios de Hilbert complejos, en particular a los espacios de Hilbert complejos y a las bien estudiadas C*-álgebras. Ejemplos de JB*-triples son también las JB*-álgebras y los espacios de Banach complejos cuya bola unidad es un dominio simétrico acotado (dominios que, en dimensión mayor que uno, juegan el papel análogo a los dominios simplemente conexos de $\mathbb{C}$). De hecho, W. Kaup, en 1983, probó que la categoría de los espacios de Banach complejos cuya bola unidad sea un dominio simétrico acotado, es equivalente a la categoría de los JB*-triples complejos, culminando así una serie de trabajos, de clasificación de los dominios simétricos acotados, que comienza con E. Cartan en 1935, para el caso finito dimensional, y continúa con L. Harris en 1974.

Los JB*-triples complejos son espacios de Banach complejos, provistos de un producto ternario, donde los isomorfismos son precisamente las aplicaciones isométricas sobreyectivas. Esto hace posible aplicar argumentos geométricos, así como técnicas estándard del Análisis Funcional, al estudio de tales objetos matemáticos. En particular, a lo largo del tiempo, ha sido desarrollada una elaborada teoría geométrica de aquellos JB*-triples complejos que son espacios de Banach duales, conocidos con el nombre de JBW*-triples complejos. Esta teoría geométrica ha permitido obtener, entre otros, un teorema de tipo Gelfand-Naimark para JB*-triples complejos.

Por otra parte, el hecho de que las isometrías sobreyectivas coincidan con los isomorfismos da especial relevancia al estudio de las derivaciones en JB*-triples complejos, ya que, si δ es una derivación en un tal JB*-triple complejo, entonces la aplicación que a cada t real le hace corresponder $\exp(t\delta)$ es un grupo uniparamétrico de automorfismos del JB*-triple complejo. Por tanto, estudiar las derivaciones de un JB*-triple complejo es estudiar los generadores de grupos uniparamétricos de isometrías.

Recientemente, se ha desarrollado una teoría para JB*-triples "reales", extendiendo, al contexto real, resultados conocidos para el caso de JB*-triples complejos (véanse por ejemplo los trabajos [13], [10], [15], [9] , [33], [38], [11], [21] y [25]).

Hay que hacer notar que en la literatura aparecen tres nociones de JB*-triples sobre el cuerpo de los números reales, introducidas por H. Upmeier [57], T. Dang y B. Russo [15] y J. M. Isidro, W. Kaup y A. Rodríguez [33], respectivamente.

De entre las tres nociones, la que más desarrollo ha tenido, hasta ahora, es la introducida por Isidro, Kaup y Rodríguez. Para dichos autores (y para nosotros) un JB*-triple real no es otra cosa que una copia isométrica de un subtriple real cerrado de un JB*-triple complejo.

Isidro, Kaup y Rodríguez, [33, Proposition 2.2], probaron que es posible dotar de estructura de JB*-triple complejo a la complexificación de cualquier JB*-triple real. Concretamente, dado un JB*-triple real, E, existe una única estructura de JB*-triple complejo en su complexificación $\widehat{E} := E \oplus iE$ y una única conjugación (aplicación conjugado lineal e isométrica de periodo dos) τ, en $\widehat{E}$, tal que

$$E = \widehat{E}^{\tau} := \{x \in \widehat{E} : \tau(x) = x\}.$$

Evidentemente, todo JB*-triple complejo es un JB*-triple real si consideramos su estructura real subyacente. Ejemplos de JB*-triples reales son también las JB-álgebras, las C*-álgebras reales y las J*B-álgebras introducidas por K. Alvermann en 1986 [4]. En particular, los espacios de operadores lineales y acotados entre espacios de Hilbert reales y los espacios de Hilbert reales son JB*-triples reales (ver Capítulo 1).

El objetivo de esta tesis es avanzar en la teoría de los JB*-triples reales que, como hemos visto, tiene el atractivo adicional de estudiar, desde el punto de vista real, una serie de modelos matemáticos más o menos clásicos.

La memoria está estructurada en cuatro capítulos con sus respectivas secciones.

El capítulo 1 es un obligado capítulo introductorio, en donde, tras presentar los conceptos de C*-álgebra real y compleja, JB- y JB*-álgebra, así como sus teoremas de representación, nos ocupamos de la presentación de los JB*-triples tanto reales como complejos. Como es natural, presentamos la conocida descomposición de Peirce, que será decisiva para el desarrollo de la teoría. Dedicamos una atención especial a los factores de Cartan complejos clásicos así como a sus formas reales, también conocidos como factores de

Cartan reales. Concluimos el capítulo con una sección dedicada a presentar algunos resultados clásicos sobre los elementos tripotentes de un JB*-triple real o complejo.

El capítulo 2 lo dedicamos a un estudio profundo de las derivaciones, tanto en JB*-triples reales como complejos. Nuestro estudio está influenciado por los trabajos de T. Barton - Y. Friedman, [5], y T. Ho, [30].

Recordemos que una derivación sobre un JB*-triple real o complejo, U, es una aplicación lineal

$$\delta : U \to U$$

que verifica la identidad

$$\delta\{a,b,c\} = \{\delta a,b,c\} + \{a,\delta b,c\} + \{a,b,\delta c\}$$

para cualesquiera $a,b,c \in U$, donde $\{.,.,.\}$ denota al producto triple en U.

Si a y b son dos elementos de U, usando la identidad de Jordan, es fácil ver que la aplicación

$$\delta(a,b) : U \to U$$

dada por

$$\delta(a,b)x = \{a,b,x\} - \{b,a,x\}$$

es una derivación en U. Las derivaciones del tipo $\delta(a,b)$ se llaman derivaciones internas simples en U. Las derivaciones que se pueden expresar como una suma finita de derivaciones internas simples se llaman derivaciones internas. Llamamos grado de una derivación interna al menor número de derivaciones internas simples que la expresan como suma.

En 1985, H. Upmeier trasladó al ambiente de los JB*-triples complejos una serie de preguntas clásicas en el contexto de las álgebras de Banach. Concretamente, Upmeier planteó las siguientes cuestiones:

1. ¿Es toda derivación continua?

   Ya que el triple producto de un JB*-triple es continuo, se tiene que las derivaciones internas son continuas y por tanto, es lógico plantearse la siguiente cuestión.

2. ¿Cuándo toda derivación continua es interna?

   Si la respuesta a la anterior pregunta es negativa, surge, de manera natural, la tercera cuestión de Upmeier.

3. ¿Cuándo toda derivación continua puede ser aproximada (en conveniente topología) mediante derivaciones internas?

La pregunta número 1 fue contestada afirmativamente por Barton y Friedman en [5]. Nosotros, utilizando el hecho de que toda derivación en un JB*-triple real puede ser extendida, de forma natural, a una derivación en su complexificación, establecemos que toda derivación en un JB*-triple real es automáticamente continua.

Una vez visto que toda derivación en un JB*-triple real o complejo es continua, abordamos la cuestión de ver cuándo toda derivación es interna. La respuesta a esta pregunta es no, en general, hecho que se pone de manifiesto en el estudio pormenorizado que hacemos de los factores de Cartan. En este momento, nos gustaría hacer notar que la mencionada cuestión fue también abordada, para el caso de JB*-triples complejos, por T. Ho en su tesis doctoral. Dado que en el caso particular de JB*-triples reales o complejos y finito dimensionales se tiene asegurado que toda derivación es interna (ver [40, Chapter 8]), nuestra atención debe dirigirse al caso infinito dimensional. En primer lugar probamos que si la complexificación de un JB*-triple real posee la propiedad de que toda derivación es interna, entonces dicho JB*-triple real posee la misma propiedad. Además si M es una cota uniforme del grado de las derivaciones internas en la complexificación, entonces $2M$ es una cota uniforme del grado de las derivaciones internas del JB*-triple real de partida (ver **Proposición 2.1.2**).

Utilizando ideas de T. Ho y el hecho, probado por H. Upmeier, [56, Theorem 3.10], que asegura que toda derivación de una JW-álgebra reversible es interna, nosotros probamos el siguiente teorema.

Teorema 2.1.9 *Los factores de Cartan complejos de Tipo 1, con* $dim(H) = dim(K)$, *de Tipo 2, con dimensión de H par ó infinita y todos los de Tipo 3, tienen la propiedad P.D.I.. De hecho, toda derivación en dichos factores tiene grado 153 a lo sumo.*

Debemos notar que este teorema era también obtenido por T. Ho en su tesis doctoral, pero la prueba contenía un error en la determinación de la cota uniforme del grado de las derivaciones internas.

Como consecuencia del teorema anterior y de la Proposición 2.1.2, establecemos que toda derivación, en cualquier forma real de los factores de Cartan mencionados en el teorema, es interna de grado 306, a lo sumo (**Corolario 2.1.10**).

En [30, Proposition 2.3.1], T. Ho prueba, utilizando, como herramienta fundamental, la teoría de "grid" desarrollada por Dang y Friedman en [14], que en todo factor de Tipo Spin complejo de dimensión finita n, existen derivaciones internas de grado mayor o igual que n. Siguiendo ideas contenidas en la prueba de este resultado y aplicando el teorema de estructura de las formas reales de un factor de Tipo Spin, dado por Kaup en [38], nosotros probamos (**Teorema 2.1.11**) que en todo factor de Cartan de Tipo Spin real o complejo e infinito dimensional existen derivaciones no internas.

También probamos la existencia de derivaciones no internas en los factores de Cartan de Tipo 1 no cuadrados e infinito dimensionales, así como en todas sus formas reales (**Corolario 2.1.18**).

A este respecto, nos gustaría resaltar que en [30, Section 2], aparece enunciado que todo factor de Cartan complejo de Tipo 1 no cuadrado, de dimensión numerable admite derivaciones no internas. La pretendida prueba de este resultado utiliza la existencia de "rectangular grids" en tales factores, si embargo, contiene errores de cálculo en la computación de los triples productos entre elementos del "grid" (véase [30, página 32 (2.10)]). Estos errores de cálculo fueron subsanados en [44, pág. 71-72]. En el caso de dimensión no numerable, los errores antes comentados, no son subsanables a nuestro juicio, por lo que no se podía afirmar (a partir de los resultados de T. Ho) que el factor $BL(H, K)$, con $dim(H) > \aleph_0$ y $dim(H) > dim(K)$, admitiese derivaciones no internas.

Nuestra prueba de la existencia de derivaciones no internas en el mencionado factor de Cartan, sigue caminos distintos a los usados por T. Ho. Concretamente, nosotros, utilizando técnicas del Análisis Funcional y obviando la existencia de "grids", establecemos, como resultado principal, que si X un espacio de Hilbert real infinito dimensional e Y es otro espacio de Hilbert real de dimensión Hilbertiana menor estricta que la de X, entonces en $BL(X, Y)$ hay derivaciones no internas (**Teorema 2.1.17**). Este resultado, unido a la Proposición 2.1.2, da el Corolario 2.1.18, anteriormente mencionado.

Una vez vista la existencia de JB*-triples reales y complejos con derivaciones no internas, la última sección del capítulo la dedicamos a mostrar que el conjunto de las derivaciones internas de un JB*-triple real o complejo es denso, en la topología de la convergencia puntual, en el conjunto de todas las derivaciones. Este resultado tiene como precedente el artículo de Upmeier, [56], donde se establecía que para el caso de JB-álgebras, toda derivación puede ser aproximada por derivaciones internas en la topología de la convergencia puntual. En el mencionado artículo, Upmeier también mostraba la existencia de JB-álgebras (unitales) tales que el conjunto de las derivaciones internas no es norma denso en el conjunto de todas las derivaciones. Utilizando este hecho, nosotros probamos la existencia de derivaciones en JB*-triples reales y complejos que no son aproximables, en la topología de la norma, mediante derivaciones internas. Dado que Barton y Friedman tenían probado que en el caso de JB*-triples complejos, toda derivación es aproximable, en la topología de la convergencia puntual, mediante derivaciones internas, nuestra aportación consiste en extender esta propiedad al caso de JB*-triples reales (**Teorema 2.2.2**).

En el Capítulo 3 entramos, de lleno, en el estudio de aquellos JB*-triples reales que son además espacios de Banach duales. En el caso de los JB*-triples complejos que son espacios de Banach duales, la teoría ha tenido un amplio desarrollo, una vez probado que el bidual de todo JB*-triple complejo vuelve a ser un JB*-triple complejo, cuyo producto triple extiende al producto triple del JB*-triple de partida (véase [16]). Permitiendo así que la teoría de dualidad juegue su papel en el desarrollo de la teoría de los JB*-triples.

Es bien conocido, [49], que en el caso de C*-álgebras que son espacios de Banach duales, el predual es único y el producto es separadamente débil$*$-continuo. También es conocido el papel decisivo de este resultado en el desarrollo de la teoría de tales álgebras.

En el año 1986, T. Barton y R. Timoney, [6], extendían el resultado anterior al caso de JB*-triples complejos que son espacios de Banach duales, obteniendo así la unicidad del predual y la débil$*$-continuidad separada del producto triple en dichos JB*-triples complejos. Estos JB*-triples complejos que son espacios de Banach duales son conocidos en la literatura con el nombre de JBW*-triples (complejos).

En 1995, Isidro, Kaup y Rodríguez, [33], introducen los JBW*-triples reales como aquellos JB*-triples reales que son formas reales de JBW*-triples complejos, obteniendo además la siguiente clasificación: "Dado un JB*-triple real E, entonces E es un JBW*-triple real si y solo si E posee un predual, E_*, para el cual el producto triple en E es separadamente $\sigma(E, E_*)$-continuo".

De modo natural, surge el problema de demostrar si la débil$*$-continuidad separada del producto triple es automática, en aquellos JB*-triples reales que son espacios de Banach duales. También es natural preguntarse si un tal JB*-triple real tiene un único predual. Ambas cuestiones ya eran planteadas en el trabajo original de Isidro, Kaup y Rodríguez y en algún otro, como por ejemplo [11]. Una respuesta afirmativa a la débil$*$-continuidad separada del producto triple tendría como consecuencia que, los JB*-triples reales que son espacios de Banach duales son automáticamente JBW*-triples reales.

En el capítulo tercero damos una respuesta afirmativa a ambos problemas. Nuestra prueba de la débil$*$-continuidad separada del producto triple en JB*-triples reales que son espacios de Banach duales, aparte de utilizar técnicas distintas a las aplicadas por Barton y Timoney, en el caso complejo, no se apoya en el mencionado resultado de Barton y Timoney. En consecuencia, ya que todo JBW*-triple complejo, puede ser visto como JB*-triple real (el cual es un espacio de Banach dual), nosotros reencontramos el resultado de Barton y Timoney.

El hecho de que todo JB*-triple real que sea un espacio de Banach dual (desde ahora en adelante lo llamaremos JB*-triple real dual), tenga un único predual, nosotros lo obtenemos apoyándonos en que el dual de todo JB*-triple complejo está "bien enmarcado", así como en los trabajos de G. Godefroy, [26], e Isidro y Rodríguez, [34], donde se demuestra que:

1. Si X es un espacio de Banach que está bien enmarcado, entonces X es el único predual de X^*. Además toda biyección isométrica en X^* es débil*-continua.

2. Si X es un espacio de Banach bien enmarcado, entonces también está bien enmarcado cualquier subespacio cerrado de X.

3. Si X es un espacio de Banach complejo que está bien enmarcado, entonces su espacio de Banach real subyacente, $X_{\mathbb{R}}$, también está bien enmarcado.

Con la misma técnica, también probamos que toda biyección isométrica sobre un JB*-triple real dual, así como toda derivación interna simple, es automáticamente débil$*$-continua (**Proposición 3.1.4**).

La estrategia, para conseguir la prueba de la débil*- continuidad separada del producto triple de un JB*-triple real dual, consiste en obtener dicha propiedad en una serie de casos particulares, mediante los cuales, nos vamos aproximando al teorema general.

La primera aproximación (**Proposición 3.2.1**) nos asegura la débil*-continuidad separada del producto triple, en aquellos JB*-triples reales duales, que verifican que todo elemento se puede aproximar, en norma, por combinaciones lineales finitas de tripotentes ortogonales dos a dos. En una segunda etapa (**Proposición 3.2.4**) probamos la débil*-continuidad separada del producto triple en aquellos JB*-triples reales duales que posean un elemento unitario. Por último, establecemos el teorema principal del capítulo (**Teorema 3.2.6**), donde aseguramos la débil$*$-continuidad separada del producto triple en cualquier JB*-triple real dual. En la prueba juega un papel fundamental la descomposición de Peirce, asociada a un tripotente en un sistema triple de Jordan, así como una serie de profundos lemas técnicos.

Entre las consecuencias, que obtenemos de nuestro teorema principal, nos gustaría destacar las siguientes: La primera es el siguiente útil corolario.

Corolario 3.2.8 *Sea E un JB^*-triple real, entonces E es un JBW^*-triple real si y solo si su complexificación, $\widehat{E}$, es un JBW^*-triple complejo.*

La segunda (**Corolario 3.2.9**) prueba la conocida débil$*$- continuidad separada del producto en el caso de JB-álgebras que son espacios de Banach duales ([28], [51]). Como consecuencia final obtenemos el resultado de C. M. Edwards, [19, Theorems 3.2, 3.4], que asegura que la complexificación de una JB-álgebra, J, es una JBW*-álgebra si y solo si J es una JBW-álgebra.

En el capítulo cuarto nos ocupamos de elaborar una teoría geométrica de los JBW*-triples reales, en paralelismo con la desarrollada por C. M. Edwards y G. T. Rüttimann [20]. Más concretamente, nos proponemos estudiar la bola unidad del predual de cualquier JBW*-triple, en orden a extraer relaciones entre propiedades geométricas de la misma y el conjunto de los elementos tripotentes de un tal JBW*-triple real. Merece la pena recordar que, como los puntos extremos de la bola unidad de un JB*-triple real o complejo coinciden con los elementos tripotentes completos del mismo (ver [39, Proposition 3.5] para la prueba del caso complejo y [33, Lemma 3.3] para el caso real), los Teoremas de Banach-Alaoglu y Kreim-Milman, nos aseguran la abundancia de tripotentes en JBW*-triples reales.

En una primera sección estudiamos el orden existente dentro del conjunto de los elementos tripotentes de un JB*-triple real, obteniendo que para JBW*-triples reales, los tripotentes minimales para dicho orden, no son otra cosa que aquellos tripotentes e, tales que el subespacio propio asociado al valor propio 1 del operador $x \mapsto \{e,x,e\}$, coincide con $\mathbb{R}e$. Para un tal tripotente, se obtiene además que el subespacio de Peirce asociado al valor propio uno del operador, $x \mapsto \{e,e,x\}$, es un espacio de Hilbert (**Proposición 4.1.5**).

En una segunda etapa, probamos que cada tripotente minimal de un JBW*-triple real, E, es un funcional de soporte de un punto extremo de la bola unidad de su predual. Una vez caracterizados los puntos extremos de la bola unidad del predual de E, como los elementos de la misma que toman el valor uno en algún tripotente minimal, obtenemos, como consecuencia, una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad del predual de E y el conjunto de los tripotentes minimales de E (**Teorema 4.2.6 y Corolario 4.2.7**).

La sección final del capítulo tiene por objetivo fundamental la presentación del **Teorema 4.3.8**, el cual, hablando coloquialmente, afirma que todo JBW*-triple real descompone en suma directa ortogonal de dos ideales débil$*$-cerrados. Uno de dichos ideales carece de tripotentes minimales, mientras que el otro está generado por todos sus elementos tripotentes minimales. Extendemos así el bien conocido Teorema de Descomposición Atómica, establecido por Y. Friedman y B. Russo, [23], para el caso de JBW*-triples complejos. La prueba de nuestro resultado es especialmente técnica y utiliza, aparte del mencionado resultado de Friedman y Russo, muchos de los resultados obtenidos en la presente memoria. Como colofón final, obtenemos un teorema de tipo Gelfand-Naimark para JB*-triples reales.

Teorema 4.3.10 *Todo JB*-triple real se puede embeber, de forma isométrica, en una ℓ_∞-suma de factores de Cartan reales y factores de Cartan* *complejos vistos como reales.*

Agradecimientos

Me gustaría terminar esta introducción agradeciendo, explícitamente, la colaboración y el apoyo de aquellos que, de algún modo, han tenido algo que ver en el desarrollo de este trabajo. Vaya mi agradecimiento al profesor Juan Martínez Moreno, quien, a parte de dirigir esta memoria, dejando un poco de si mismo en el trabajo, dedicó un importante esfuerzo en mi formación como investigador.

Quisiera también expresar mi agradecimiento al profesor Laszlo Stachó, de la Universidad József Attila (Hungría), por su inestimable colaboración en algunos de los resultados contenidos en el capítulo cuarto de esta memoria.

Gracias igualmente al director del departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada así como a los restantes compañeros y amigos del mismo, por la ayuda y el apoyo que de ellos he recibido durante la realización de esta memoria.

Gracias también a todas las personas que, sin aportar matemáticas a este trabajo, han sido parte imprescindible del mismo, gracias a mi familia, a Esther y a todas las personas que, por limitaciones de espacio u olvido, no quedaron incluidas en las líneas anteriores.

Antonio Miguel Peralta.

Capítulo 1

Preliminares

Comenzamos este capítulo presentando unos objetos matemáticos, que hoy día se consideran clásicos y que, a posteriori, veremos incluidos dentro de la clase de los espacios conocidos como JB*-triples reales o complejos. Tales objetos matemáticos se conocen con el nombre de C*-álgebras, C*-álgebras reales, JB-álgebras y JB*-álgebras. Nos limitaremos a presentar los axiomas que las definen junto con algunos resultados básicos sobre ellas.

Recordemos que un **álgebra asociativa** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial A sobre $\mathbb{K}$ dotado de una aplicación bilineal de $A \times A$ en A, llamada producto, y que notaremos por simple yuxtaposición, verificando los siguientes axiomas:

1. $x\ (y\ z) = (x\ y)\ z$,
2. $x(y + z) = x\ y + x\ z$, $(x + y)z = x\ z + y\ z$,
3. $(\alpha\ x)y = \alpha(x\ y) = x(\alpha\ y)$,

para cualesquiera x, y, z pertenecientes a A y para todo α en el cuerpo $\mathbb{K}$. Si además A es un espacio de Banach verificando $\|xy\| \leq \|x\|\ \|y\|$, para cualesquiera x, y en A, diremos que A es un **álgebra de Banach**.

Una **C*-álgebra** es un álgebra de Banach compleja, A, junto con una involución (aplicación conjugado lineal e isométrica de cuadrado la identidad) notada por, $*$, que además es involución de álgebra ($(xy)^* = y^*x^*$) y verifica el conocido Axioma de Gelfand-Naimark: $\|x^*\ x\| = \|x\|^2$, para todo x en A.

Es bien conocido que toda C*-álgebra es esencialmente una subálgebra cerrada y autoadjunta de la C*-álgebra de los operadores lineales y acotados de un espacio de Hilbert, complejo, en si mismo. Resultado que se conoce como Teorema de Gelfand-Naimark para C*-álgebras.

En este momento es propicio recordar que un álgebra de von Neumann es una C*-álgebra que es además un espacio de Banach dual. Sobre la teoría clásica de C*-álgebras el lector puede consultar los conocidos textos [8], [17] y [18].

Una **C*-álgebra real** A es un álgebra de Banach real equipada con una involución de álgebra, $*$, verificando que para todo x en A, $1 + x^*x$ es un elemento inversible en A y $\|xx^*\| = \|x\|^2$; en el caso en el que A tenga unidad. Si A no tiene unidad, se exige que para todo x en A, el elemento $1 + x^*x$ sea inversible en la unitización, A_1, de A y además $\|xx^*\| = \|x\|^2$ [27].

Es bien conocido [42] que la unitización de una C*-álgebra, vuelve a ser una C*-álgebra, por lo que cualquier C*-álgebra puede ser dotada de estructura de C*-álgebra real sin más que considerar el álgebra real subyacente. Es también sencillo comprobar que el álgebra, $BL(H)$, de los operadores lineales y acotados de un espacio de Hilbert real H en si mismo, puede ser dotada de estructura de C*-algebra real. En consecuencia, dado un espacio de Hilbert real H, cualquier subálgebra real, cerrada y autoadjunta de $BL(H)$ es una C*-álgebra real. El Teorema de Gelfand-Naimark para C*-álgebras reales asegura que, esencialmente, no hay más ejemplos. Es decir, toda C*-álgebra real es isomorfa a una subálgebra real, cerrada y auto-adjunta de $BL(H)$, para conveniente espacio de Hilbert real H (véase [27, Theorem 15.3] o [32]).

Finalmente nos gustaría destacar el siguiente hecho. Si A es una C*-álgebra real, entonces existe una C*-álgebra B junto con un $*$-automorfismo, conjugado lineal, isométrico e involutivo τ, verificando que $A = \{x \in B : \tau(x) = x\}$ ([46, 4.1.13], [27, 15.4]).

A continuación presentamos unas álgebras no asociativas conocidas con los nombres de JB-álgebras y JB*-álgebras.

Recordamos que un **álgebra de Jordan**, es un espacio vectorial J provisto de una aplicación bilineal y simétrica (no necesariamente asociativa) de $J \times J$ en J, que notaremos por $\circ$, verificando la identidad

$$x \circ (y \circ x^2) = (x \circ y) \circ x^2$$

para cualesquiera x e y en J. La citada aplicación bilineal se conoce con el nombre de producto de Jordan, y la identidad anterior como identidad de Jordan. Es evidente que si tenemos un álgebra asociativa A, podemos definir en A un producto conmutativo, $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$, con el que A resulta ser un álgebra de Jordan, a la que llamaremos álgebra de Jordan subyacente al álgebra A y notaremos por A^+. Las álgebras que son isomorfas a una subálgebra de Jordan subyacente a un álgebra asociativa son llamadas **especiales**. Es bien conocido que no toda álgebra de Jordan es especial (ver [28]). Las álgebras de Jordan que no son especiales son llamadas **excepcionales**.

Uno de los ejemplos más conocidos de álgebra de Jordan excepcional es el álgebra $H_3(\mathbb{O})$, de las matrices, simétricas para cierta involución lineal, de orden 3×3 con entradas en el álgebra de los **Octoniones complejos**, $\mathbb{O}$, que presentamos a continuación.

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, es conocido, [60, Theorem 2.7], que las **álgebras de Cayley-Dickson "split"** (con divisores de cero) $C(\mathbb{K})$, sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, pueden ser representadas en la siguiente forma matricial:

Matrices de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y x e y están en $\mathbb{K}^3$. La suma y el producto por escalares son los usuales para matrices y el producto viene dado por :

$$\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & z \\ t & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + (x \mid t) & \alpha z + \delta x - y \times t \\ \gamma y + \beta t + x \times z & \beta\delta + (y \mid z) \end{pmatrix}$$

donde

$$((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) := x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

El álgebra de los **Octoniones complejos**, notada por $\mathbb{O}$, es el álgebra de Cayley Dickson "split" sobre el cuerpo de los números complejos, mientras que el álgebra de los **Octoniones reales**, notada por $\mathbb{O}_{\mathbb{R}}$, es el álgebra de Cayley Dickson split sobre el cuerpo de los números reales.

En $C(\mathbb{K})$ tenemos una involución, $-$, conocida como **involución cayleyana**, dada por

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \beta & -x \\ -y & \alpha \end{pmatrix}$$

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, disponemos de otra involución en $C(\mathbb{K})$ dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{y} \\ \overline{x} & \overline{\beta} \end{pmatrix}$$

donde por $\overline{x}$ estamos denotando a la aplicación que consiste en conjugar cada componente si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o el mismo vector si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

El conjunto, $(\mathbb{O}_{\mathbb{R}})_0$, formado por los elementos a de $C(\mathbb{C})$ que verifican la igualdad

$$\overline{a} = a^*,$$

se conoce con el nombre de **álgebra de Cayley real de división** o también como álgebra de los **Octoniones reales de división**.

El álgebra $H_3(\mathbb{O})$ es el subespacio de las matrices de orden 3×3 con entradas en $\mathbb{O}$ que son simétricas con respecto a la involución (lineal) $(a_{i,j})^t := (\overline{a_{j,i}})$, y donde el producto considerado está dado por $a \circ b := \frac{1}{2}(ab + ba)$.

Si un álgebra de Jordan J es además un espacio normado que verifica

$$\|x \circ y\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

para cualesquiera x, y en J, se denomina **álgebra de Jordan normada.** Si además la norma es completa, J recibe el nombre de **álgebra de Jordan-Banach.**

Una **JB-álgebra** es un álgebra de Jordan-Banach real J, cuya norma satisface la siguiente propiedad:

$$\|x\|^2 \leq \|x^2 + y^2\|,$$

para cualesquiera x e y en J.

Una **JB*-álgebra** es un álgebra de Jordan Banach compleja $\mathcal{J}$, provista de una involución, $*$, verificando la siguiente condición:

$$\|U_x(x^*)\| = \|x\|^3,$$

para todo elemento x de $\mathcal{J}$, donde U_x es el operador lineal de $\mathcal{J}$ en $\mathcal{J}$ dado por $U_x(y) = 2\, x \circ (x \circ y) - y \circ x^2$.

Es fácil ver que si A es una C*-álgebra, entonces el Axioma de Gelfand-Naimark es equivalente a la propiedad $\|xx^*x\| = \|x\|^3$, obteniendo por consiguiente que A^+ es una JB*-álgebra.

El álgebra $H_3(\mathbb{O})$ puede ser dotada de estructura de JB*-álgebra unital con producto $x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$ e involución $(a_{i,j})^* := (a^*_{j,i})$ (ver [28, Remark 3.1.8], [3], [50], [59]).

Un ejemplo de JB-álgebra se puede construir de la manera que exponemos a continuación. Tomemos un espacio de Hilbert complejo H, y notemos por $\mathcal{H}(H)$ al conjunto de todos los operadores hermíticos en H, es decir,

$$\mathcal{H}(H) := \{T \in BL(H) : T^* = T\}.$$

Es bien sabido (ver si acaso [28]) que, $\mathcal{H}(H)$ dotado con el producto de Jordan $x \circ y := \dfrac{1}{2}(xy + yx)$ es una JB-álgebra.

Llamaremos **JC-álgebra** (respectivamente, **JW-álgebra**) a cualquier subálgebra de Jordan real y uniformemente cerrada (débilmente cerrada, respectivamente) de $\mathcal{H}(H)$. Claramente las JC-álgebras y las JW-álgebras son JB-álgebras. En general, toda subálgebra de Jordan real y cerrada de la parte simétrica de una C*-álgebra, es una JB-álgebra.

El concepto de JB*-álgebra fue introducido por Kaplansky en 1976. Un año más tarde Wright, [59], demostró que toda JB*-álgebra es la complexificación de una JB-álgebra y que recíproca-mente, toda JB-álgebra es la parte simétrica o hermítica de una JB*-álgebra. De este modo, las categorías de las JB*-álgebras y de las JB-álgebras están en correspondencia uno a uno y por tanto, el estudio de una de estas categorías está directamente relacionado con la otra. Alfsen, Shultz y Stormer [3], establecieron un teorema de representación de tipo Gelfand-Naimark para JB-álgebras, asegurando que toda JB-álgebra J contiene un ideal "puramente excepcional", I, verificando que J/I es totalmente isomorfo a una JC-álgebra. El lector interesado en profundizar en la teoría de las JB-álgebras puede consultar el libro de Hanche-Olsen y Stormer [28].

Finalmente, recordamos que una **JC*-álgebra** (respectivamente, **JW*-álgebra**) es una $*$-subálgebra de Jordan cerrada (débilmente cerrada, respectivamente) de un $BL(H)$.

Después de la presentación de las distintas álgebras que aparecerán a lo largo de la Tesis, podemos dirigir nuestra atención a los JB*-triples. Comenzamos por la definición de la parte puramente algebraica de estas estructuras, presentando así los conocidos sistemas triples de Jordan.

1.1 JB*-triples complejos

Definición 1.1.1 *Un **Sistema triple de Jordan complejo (resp. real)** es un espacio vectorial complejo (resp. real) V, junto con una aplicación*

$$\{.,.,.\} : V \times V \times V \to V$$

$$(x, y, z) \mapsto \{x, y, z\}$$

*llamada **triple producto**, que es bilineal y simétrica en las variables exteriores y conjugada lineal en la central (resp. trilineal y simétrica en las variables exteriores) verificando la identidad de Jordan:*

$$\{x, y, \{a, b, c\}\} = \{\{x, y, a\}, b, c\} - \{a, \{y, x, b\}, c\} + \{a, b, \{x, y, c\}\}$$

para cualesquiera x, y, a, b, c en V.

Dado un sistema triple de Jordan real (resp. complejo) V y dos elementos a, b de V, notaremos por $L(a, b)$ al operador lineal de V en V que aplica cada x en $\{a, b, x\}$ y mediante $Q(a, b)$ al operador lineal (resp. conjugado lineal) dado por $Q(a, b)x := \{a, x, b\}$ $(x \in V)$. Para simplificar la notación usaremos $Q(a)$ en lugar de $Q(a, a)$.

Un elemento e de un sistema triple de Jordan, real o complejo, V se dice **tripotente** si $\{e, e, e\} = e$. Es bien conocido (ver por ejemplo [43,

p. 7]) que dado un tripotente, e, en un sistema triple de Jordan V, existe una descomposición algebraica de V como suma directa de los subespacios asociados a los valores propios de $L(e,e)$:

$$V = V_0(e) \oplus V_1(e) \oplus V_2(e)$$

donde $V_k(e) = \{x \in V : L(e,e)x = \frac{k}{2}x\}$ para $k = 0,1,2$. Esta descomposición se conoce con el nombre de **Descomposición de Peirce**. Las proyecciones naturales de V sobre $V_k(e)$ serán notadas por $P_k \equiv P_k(e)$ $(k = 0,1,2)$ y pueden ser representadas por:

$$\begin{aligned} P_2(e) &= Q(e)^2, \\ P_1(e) &= 2(L(e,e) - Q(e)^2), \\ P_0(e) &= Id_A - 2L(e,e) + Q(e)^2. \end{aligned}$$

Es parte del folklore de la teoría (ver [43]) que los subespacios asociados a una descomposición de Peirce satisfacen las reglas de multiplicación conocidas como **aritmética de Peirce**, que no son otras que las que siguen:

1. $\{V_i(e), V_j(e), V_k(e)\} \subseteq V_{i-j+k}(e)$, donde $i,j,k \in \{0,1,2\}$ y $V_l(e) = 0$ para $l \neq 0,1,2$;

2. $\{V_0(e), V_2(e), V\} = \{V_2(e), V_0(e), V\} = 0$.

A continuación definimos los conceptos de subtriple e ideal de un sistema triple de Jordan.

Definición 1.1.2 *Un **subtriple** de un sistema triple de Jordan V, es un subespacio cerrado para el triple producto. Llamaremos **ideal o triple ideal** de V a cualquier subtriple I que verifique $\{V,V,I\} + \{V,I,V\} \subseteq I$.*

Después de la introducción, puramente algebraica, de los sistemas triples de Jordan, se añade la parte analítica a dicha estructura, obteniendo los conocidos JB*-triples (complejos). A tal efecto, recordamos que un operador T sobre un espacio de Banach se llama hermitiano si $\| exp(i\alpha T)\| = 1$ para todo α real.

Definición 1.1.3 *Un **JB*-triple** o **JB*-triple complejo** es un espacio de Banach complejo, $\mathcal{E}$, que tiene estructura de sistema triple de Jordan complejo y además verifica las siguientes propiedades:*

1. *Para cada elemento a de $\mathcal{E}$, el operador $L(a,a)$ es hermitiano con espectro no negativo;*

2. Para todo a en $\mathcal{E}$, $\| \{a, a, a\} \| = \|a\|^3$.

Referimos los trabajos [47], [48] y [12] como excelentes surveys sobre la teoría de los JB*-triples.

Este es un buen momento para introducir algunos ejemplos de JB*-triples que involucran algunas de las álgebras presentadas. Por ejemplo, es fácil ver que toda C*-álgebra puede ser dotada de estructura de JB*-triple con triple producto dado por

$$\{x, y, z\} := \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x).$$

Otro ejemplo importante lo constituyen las JB*-álgebras. Todas ellas son JB*-triples con triple producto dado por

$$\{x, y, z\} := (x \circ y^*) \circ z - (x \circ z) \circ y^* + (z \circ y^*) \circ x$$

[57, Prop. 20.35].

Un **morfismo de triples**, entre dos JB*-triples, es una aplicación lineal que conserva el producto triple. Un **isomorfismo de triples** es un morfismo de triples que es además biyectivo.

Los JB*-triples (complejos) tienen la propiedad de que sus isomorfismos coinciden con las aplicaciones isométricas sobreyectivas [37, Proposition 5.5].

Entre los ejemplos más clásicos y que a posteriori serán la herramienta para dar una descripción de los JB*-triples, se encuentran los conocidos con el nombre de **Factores de Cartan**, que presentamos a continuación.

Los factores de Cartan clásicos están clasificados en seis tipos. El conocido como factor de **Tipo 1** es el espacio de Banach complejo, $BL(H, K)$, de los operadores lineales y acotados entre dos espacios de Hilbert complejos H y K, donde el producto triple está definido por $\{x, y, z\} := \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x)$.

Los factores de Cartan de **Tipo 2** y **Tipo 3** son subtriples de factores de Tipo 1. Para definirlos recordamos que dada una **conjugación** j (operador conjugado lineal, isométrico y de cuadrado la identidad) sobre un espacio de Hilbert complejo H, podemos definir la siguiente **involución** lineal $x \mapsto x^t := jx^*j$ de $BL(H)$ en sí mismo. El factor de Tipo 2 (respectivamente el Tipo 3) es el subespacio de $BL(H)$ formado por todos los operadores anti-simétricos (resp. simétricos) para dicha involución.

Se denomina factor de Cartan de **Tipo 4** o factor de **Tipo Spin** a cualquier espacio de Hilbert complejo H provisto con una involución $x \mapsto \overline{x}$, producto triple

$$\{x, y, z\} := (x|y)z + (z|y)x - (x|\overline{z})\overline{y}$$

y norma dada por

$$\|x\|_1^2 := (x|x) + \sqrt{(x|x)^2 - |(x|\overline{x})|^2}.$$

Todo factor de Tipo Spin se puede ver como un subespacio cerrado y autoadjunto de un $BL(K)$ con la propiedad de que el cuadrado de cada uno de sus elementos sea un múltiplo de la identidad [29].

El factor de Cartan conocido como factor de **Tipo 6** no es otra cosa que la JB*-álgebra $H_3(\mathbb{O})$ anteriormente presentada.

Por último, el factor de **Tipo 5** es el subtriple, $M_{1,2}(\mathbb{O})$, del factor de Tipo 6 formado por las matrices 1x2 con entradas en $\mathbb{O}$.

Una presentación más detallada de estos factores de Cartan se puede encontrar en [44] (o bien en [29], [57], [40]). Nos referimos también al texto [35], como una guia para la teoría de operadores.

Los factores de Cartan son los elementos básicos para la descripción de los JB*-triples (complejos). Concretamente, por un Teorema de tipo Gelfand-Naimark, sabemos que todo JB*-triple (complejo) se puede ver como subtriple de una l_∞-suma de una familia arbitraria de Factores de Cartan. Este resultado, debido a Friedman y Russo [24], se puede enunciar como sigue.

Teorema 1.1.4 *Todo JB*-triple se puede embeber isométrica-mente en una ℓ_∞-suma de alguna colección de factores de Cartan.*

1.2 JB*-Triples Reales

En 1995, J.M. Isidro, W. Kaup y A. Rodríguez, introdujeron una versión real de los JB*-triples (complejos) conocida como JB*-triples reales (ver [33]). La definición original se establecía como sigue.

Definición 1.2.1 *Un espacio de Banach real E, junto con una aplicación trilineal*

$$\{.,.,.\} : E \times E \times E \to E$$

*es un **JB*-triple real** si existe un JB*-triple complejo $\mathcal{E}$ y una isometría lineal $\lambda : E \to \mathcal{E}$ verificando que $\lambda\{x,y,z\} = \{\lambda x, \lambda y, \lambda z\}$ para cualesquiera $x, y, z \in E$.*

Claramente, los JB*-triples reales son, salvo isomorfismos, los subtriples reales cerrados de los JB*-triples (complejos).

Una vez vista la definición de JB*-triple real, hay una pregunta que aparece de manera natural. ¿Es posible dotar de estructura de JB*-triple (complejo) a la complexificación de un JB*-triple real?. Esta pregunta tiene una respuesta afirmativa, dada por Isidro, Kaup y Rodríguez en [33, Proposition 2.2] y además nos proporciona una de las caracterizaciones más útiles de los JB*-triples reales. Concretamente, dado un JB*-triple real E, existe una única estructura de JB*-triple complejo en su complexificación $\widehat{E} := E \oplus iE$ y una única conjugación (aplicación conjugado lineal, isométrica y de periodo dos) τ, en $\widehat{E}$, tal que

$$E = \widehat{E}^{\tau} := \{x \in \widehat{E} : \tau(x) = x\}.$$

Dado un espacio de Banach complejo X y una conjugación τ en X, al espacio de Banach real

$$X^{\tau} := \{x \in X : \tau(x) = x\}$$

se le llama **forma real** de X. Desde este punto de vista, los JB*-triples reales no son otra cosa que formas reales de JB*-triples complejos (téngase en cuenta que si τ es una conjugación sobre un JB*-triple complejo, entonces τ conserva el triple producto [37, Proposition 5.5]).

Desde ahora en adelante, dado un JB*-triple real E, notaremos por $\widehat{E}$ a su complexificación. Además llamaremos **conjugación canónica** a la conjugación, τ, que verifica que $E = \widehat{E}^{\tau}$.

Nos referiremos al trabajo [33] como referencia básica de la teoría de los JB*-triples reales.

Es claro que todo JB*-triple real es un sistema triple de Jordan real y que por tanto dado un elemento tripotente e, tenemos una descomposición y una aritmética de Peirce asociada a dicho tripotente.

Evidentemente, todo JB*-triple complejo es un JB*-triple real si consideramos su estructura real subyacente.

Toda JB-álgebra es un JB*-triple real. En efecto, la complexificación de una JB-álgebra es una JB*-álgebra y por tanto un JB*-triple complejo. Además la conjugación canónica no es otra que la involución natural de la JB*-álgebra ($\tau = *$). En consecuencia el producto triple, como JB*-triple real, de cualquier JB-álgebra, está dado por

$$\{a, b, c\} := (a \circ b) \circ c + (c \circ b) \circ a - (a \circ c) \circ b.$$

Otros ejemplos de JB*-triples reales son las C*-álgebras reales [27] o las J*B-álgebras introducidas por Alvermann [4], ya que ambas son formas reales de C*-álgebras y JB*-álgebras, respectivamente.

Por analogía con el caso complejo, llamaremos **factores de Cartan reales** a las formas reales de los factores de Cartan (complejos). Estos factores han sido recientemente estudiados y clasificados por W. Kaup.

Notaremos por X e Y a dos espacios de Hilbert reales de dimensiones n y m respectivamente, P y Q representarán a dos espacios de Hilbert de dimensiones p y q, respectivamente, sobre el cuerpo de los cuaternios $\mathbb{H}$ y H denotará a un espacio de Hilbert complejo n dimensional.

En [38, Section 4], se establece que todos los factores de Cartan reales son, salvo isomorfismos, los que vamos a presentar a continuación:

1. $I_{n,m}^{\mathbb{R}} := BL(X,Y)$
2. $I_{2p,2q}^{\mathbb{H}} := BL(P,Q)$
3. $I_n^{\mathbb{C}} := \{z \in BL(H) : z^* = z\}$
4. $II_n^{\mathbb{R}} := \{x \in BL(X) : x^* = -x\}$
5. $II_{2p}^{\mathbb{H}} := \{w \in BL(P) : w^* = w\}$
6. $III_n^{\mathbb{R}} := \{x \in BL(X) : x^* = x\}$
7. $III_{2p}^{\mathbb{H}} := \{w \in BL(P) : w^* = -w\}$
8. $IV_n^{r,s} := E$, donde E es la l^1-suma $E = X_1 \oplus^1 X_2$, de dos subespacios cerrados X_1, X_2 de X de dimensiones r y s, con $X_2 = X_1^\perp$. En este caso, notando por $(.|.)$ al producto escalar de X y por $-$ a la involución dada por $x = (x_1, x_2) \mapsto \overline{x} = (x_1, -x_2)$, el producto triple viene dado por
$$\{x, y, z\} = (x|y)z + (z|y)x - (x|\overline{z})\overline{y}$$
para cualesquiera $x, y, z \in E$.
9. $V^{\mathbb{O}_\mathbb{R}} := M_{1,2}(\mathbb{O}_\mathbb{R})$
10. $V^{(\mathbb{O}_\mathbb{R})_0} := M_{1,2}((\mathbb{O}_\mathbb{R})_0)$
11. $VI^{\mathbb{O}_\mathbb{R}} := H_3(\mathbb{O}_\mathbb{R})$
12. $VI^{(\mathbb{O}_\mathbb{R})_0} := H_3((\mathbb{O}_\mathbb{R})_0)$

Donde $(\mathbb{O}_\mathbb{R})_0$ es el álgebra de Cayley real de división o álgebra de los Octoniones reales de división y $\mathbb{O}_\mathbb{R}$ es el álgebra de Cayley real split. $H_3(\mathbb{O}_\mathbb{R})$ y $H_3((\mathbb{O}_\mathbb{R})_0)$ son las matrices de orden 3×3 con entradas en $\mathbb{O}_\mathbb{R}$ y $(\mathbb{O}_\mathbb{R})_0$ respectivamente, simétricas para la involución canónica y con producto triple inducido por el producto triple del JB*-triple $H_3(\mathbb{O})$.

La notación empleada en la descripción anterior tiene la ventaja de que al quitar los superíndices, obtenemos el factor de Cartan complejo que coincide con la complexificación de nuestro factor de Cartan real.

Debemos reseñar que la clasificación de los factores de Cartan reales finito dimensionales fue realizada anteriormente por Loos [40, Subsection 11.4].

Una vez presentados los factores de Cartan reales, como nuevos ejemplos de JB*-triples reales, concluimos con la presentación de una proposición que recoge algunos hechos, básicos en la categoría de los JB*-triples reales, que serán utilizados en el futuro.

Proposición 1.2.2 *[33, Proposition 2.5] Sean x, y elementos de un JB*-triple real E, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\exp(L(x, y) - L(y, x))$ *es una aplicación isométrica y biyectiva de E en si mismo,*

2. $L(x, y) + L(y, x)$ *tiene espectro real,*

3. $L(x, x)$ *tiene espectro positivo,*

Nos gustaría destacar que la teoría de los JB*-triples reales ha tenido un rápido y gran desarrollo en estos últimos años. Una buena prueba de este hecho, es el gran número de trabajos de investigadores que recientemente se han publicado sobre esta teoría. Como ejemplos podríamos citar los siguientes autores, Dang [13], Chu, Dang, Russo y Ventura [10], Dang y Russo [15], Bunce y Chu [9], Isidro, Kaup y Rodríguez [33], Kaup [38], Chu, Galindo y Rodríguez [11] y Galindo y Rodríguez [25].

1.3 Tripotentes

Parece obligatorio, no terminar este capítulo sin dedicar algunas líneas a presentar los resultados más clásicos sobre los elementos tripotentes de un JB*-triple real o complejo. Recordamos que un elemento e de un JB*-triple real o complejo U, se denomina tripotente cuando $\{e, e, e\} = e$. Vamos a notar mediante $Tri(U)$, al conjunto formado por todos los elementos tripotentes de U.

Es fácil ver que los tripotentes de un JB*-triple real E son exactamente aquellos tripotentes de su complexificación $\widehat{E}$, que son simétricos para la conjugación canónica. Además dado un tripotente e de U, entonces U admite la ya presentada descomposición de Peirce

$$U = U_0(e) \oplus U_1(e) \oplus U_2(e)$$

donde $U_k(e) := \{x \in U : L(e, e)x = \frac{k}{2}x\}$. Esta descomposición da lugar a diferentes subclasificaciones, más especializadas, de los elementos tripotentes. Así un elemento e perteneciente a $Tri(U)$ es llamado **tripotente completo** si $U_0(e) = 0$, y es llamado **tripotente unitario** o simplemente **unitario**, si $U_2(e) = U$.

Finalmente introducimos la definición de ortogonalidad para tripotentes.

Definición 1.3.1 *Dados dos tripotentes e, f de un JB*-triple real o complejo, diremos que e es* ***ortogonal*** *a f si $L(e, f) = 0$. Esta situación la denotaremos por $e \perp f$.*

Usando la aritmética de Peirce, no es difícil probar que, si $e \perp f$ entonces $f \perp e$. Resultado que recogemos en el siguiente lema.

Lema 1.3.2 *Sea U un JB*-triple real o complejo, y sean e, f dos elementos tripotentes de U. Entonces las afirmaciones que siguen son equivalentes.*

1. $e \perp f$
2. $\{f, f, e\} = 0$
3. $e \in U_0(f)$
4. $\{e, e, f\} = 0$
5. $f \in U_0(e)$
6. $L(f, e) = 0$

En cualesquiera de las condiciones anteriores

$$L(e+f, e+f) = L(e,e) + L(f,f).$$

Demostración.- $e \perp f$ si y solo si $L(e,f) = 0$, en particular $L(e,f)f = \{f,f,e\} = 0$ lo que equivale a que $e \in U_0(f)$. Si $e \in U_0(f)$, usando la aritmética de Peirce, podemos asegurar que $L(f,e) = 0$. Repitiendo este mismo proceso terminamos la prueba. □

Volviendo a los subespacios de la descomposición de Peirce de un JB*-triple real o complejo U, es claro que, por la aritmética de Peirce, cada $U_k(e)$ es un subtriple de U. Ahora nos proponemos decir algo más sobre la estructura de $U_2(e)$.

Si $\mathcal{E}$ es un JB*-triple complejo y e es un tripotente de $\mathcal{E}$, es bien conocido, [57, Propositions 19.7, 19.13], que $\mathcal{E}_2(e)$ tiene estructura de JB*-álgebra unital, con unidad e, y producto e involución dados por

$$x \circ y := \{x, e, y\},$$

$$x^* := \{e, x, e\} = Q(e)x$$

para cualesquiera x, y pertenecientes a $\mathcal{E}_2(e)$. Recíprocamente, [57, Proposition 20.35], el triple producto en $\mathcal{E}_2(e)$, puede ser expresado mediante la involución y el producto de Jordan en la forma:

$$\{a, b, c\} := (a \circ b^*) \circ c - (a \circ c) \circ b^* + (c \circ b^*) \circ a.$$

En el caso particular en el que e es un elemento unitario, tenemos que $\mathcal{E}$ es una JB*-álgebra. Como consecuencia se tiene la equivalencia entre la categoría de las JB*-álgebras unitales y la de los JB*-triples que poseen un elemento unitario.

Si E es un JB*-triple real y e es un elemento tripotente de E, no podemos asegurar que $E_2(e)$ sea una JB-álgebra con el producto dado anteriormente.

Para obtener un resultado parecido al del caso complejo, vamos a introducir otra conocida descomposición, asociada al tripotente e, para la cual si podemos decir algo más sobre la estructura que tiene alguno de los subespacios.

Sea U un JB*-triple real o complejo y sea e un tripotente de U. Utilizando que $Q(e)$ es una involución en $U_2(e)$ y que el núcleo de $Q(e)$ es exactamente $U_0(e) \oplus U_1(e)$, tenemos que U admite una descomposición como suma directa de los subespacios asociados a los valores propios de $Q(e)$, concretamente,

$$U = U^0(e) \oplus U^1(e) \oplus U^{-1}(e)$$

donde $U^k(e) := \{x \in U : Q(e)x = kx\}$. Esta descomposición, al igual que la descomposición de Peirce, tiene asociada la siguiente aritmética

$$\{U^i(e), U^j(e), U^k(e)\} \subseteq U^{ijk}(e) \quad si \quad ijk \neq 0.$$

Además, no es complicado obtener las siguientes relaciones entre los subespacios asociados a las descomposiciones presentadas:

$$U_2(e) = U^{-1}(e) \oplus U^1(e),$$

$$U^0(e) = U_0(e) \oplus U_1(e).$$

Desde ahora en adelante, notaremos mediante $P^k(e)$ a la proyección natural de U sobre $U^k(e)$ $(k : 0, -1, 1)$.

Diremos que un tripotente e es **minimal** si $U^1(e)$ coincide con $\mathbb{R}e$. Notaremos mediante $minTri(U)$ al conjunto formado por todos los elementos tripotentes minimales de U.

Dado que para cualquier tripotente e perteneciente a un JB*-triple complejo $\mathcal{E}$, el subtriple $\mathcal{E}_2(e)$ es una JB*-álgebra, obtenemos que $\mathcal{E}^1(e)$ es una JB-álgebra ya que es la parte $* \equiv Q(e)$-simétrica de $\mathcal{E}_2(e)$. Siguiendo este mismo razonamiento, es fácil ver que dado un JB*-triple real E y un tripotente e en E, $E^1(e)$ es una JB-álgebra, con producto dado por $x \circ y := \{x, e, y\}$, ya que $E^1(e)$ es una sub-JB-álgebra de $\widehat{E}^1(e)$, donde $\widehat{E}$ denota a la complexificación de E. En consecuencia, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3 *Para todo tripotente e de un JB*-triple real o complejo U, tenemos que $U^1(e)$ es una JB-álgebra unital, con unidad e. Además si U es un JB*-triple complejo, $U_2(e)$ es una JB*-álgebra unital.*

Para concluir este capítulo recordamos que dado un JB*-triple real o complejo U, es sabido que sus tripotentes completos son exactamente los puntos extremos de su bola unidad (ver [39, Proposition 3.5] para la prueba del caso complejo y [33, Lemma 3.3] para el caso real). En general, un JB*-triple real o complejo, no tiene por que tener elementos tripotentes; pero en virtud de los resultados que acabamos de ver, unidos a los Teoremas de Banach-Alaoglu y Kreim-Milman, podemos asegurar que, todo JB*-triple real o complejo que además sea un espacio de Banach dual, posee una gran cantidad de tripotentes.

Capítulo 2

Derivaciones

Este capítulo va a estar dedicado al estudio sistemático de las derivaciones en los JB*-triples reales ó complejos. Nuestro estudio está influenciado por los trabajos de T. Barton y Y. Friedman [5] y T. Ho [30]. Como consecuencia de la continuidad automática de las derivaciones y de la densidad, en la topología fuerte de operadores, de las derivaciones internas, probada por Barton y Friedman en el caso de JB*-triples complejos, nosotros probamos que los JB*-triples reales gozan de las mismas propiedades. También estudiamos en profundidad las derivaciones en los factores de Cartan reales y complejos, con objeto de dar respuesta a algunas preguntas interesantes, que veremos a continuación.

Comenzamos incluyendo la definición formal de derivación en un JB*-triple real ó complejo.

Definición 2.0.4 *Sea U un JB*-triple real ó complejo, por una* ***derivación*** *en U denotamos a toda aplicación lineal*

$$\delta : U \to U$$

que además verifica que

$$\delta\{a,b,c\} = \{\delta a, b, c\} + \{a, \delta b, c\} + \{a, b, \delta c\}$$

para cualesquiera $a, b, c \in U$.

Si a y b son dos elementos de U, usando la identidad de Jordan, es fácil ver que la aplicación

$$\delta(a,b) : U \to U$$

dada por

$$\delta(a,b)x = (L(a,b) - L(b,a))x = \{a,b,x\} - \{b,a,x\}$$

es una derivación en U. Las derivaciones del tipo $\delta(a,b)$ se llaman ***derivaciones internas simples****. Es evidente que, las sumas finitas de derivaciones internas simples vuelven a ser derivaciones. Llamaremos* ***derivación interna*** *a toda derivación que se pueda expresar como una suma finita de derivaciones internas simples. Llamamos* ***grado de una derivación interna*** *al menor número de derivaciones internas simples que la expresan como suma.*

Llamamos ***derivación externa*** *a toda derivación que no es expresable mediante una suma de derivaciones internas simples.*

Si $\mathcal{E}$ es un JB*-triple complejo y a es un elemento de $\mathcal{E}$, usando de nuevo la identidad de Jordan, es fácil comprobar que la aplicación $iL(a,a)$ es una derivación en $\mathcal{E}$. Además, todas las derivaciones internas simples de $\mathcal{E}$ pueden ser expresadas mediante combinaciones lineales de derivaciones de la forma anterior. En efecto:

$$iL(a+ib,a+ib) = iL(a,a) + iL(b,b) + L(a,b) - L(b,a) =$$

$$= iL(a,a) + iL(b,b) + \delta(a,b)$$

por tanto

$$\delta(a,b) = iL(a+ib,a+ib) - iL(a,a) - iL(b,b).$$

Además

$$\delta(ia,a) = L(ia,a) - L(a,ia) = iL(a,a) + iL(a,a) =$$

$$= 2iL(a,a) = iL(\sqrt{2}\,a, \sqrt{2}\,a).$$

En 1985, H. Upmeier, planteó las siguientes preguntas sobre las derivaciones de un JB*-triple complejo.

1. ¿Es toda derivación continua?

   De manera evidente todas las derivaciones internas son continuas, es por tanto lógico plantear la siguiente pregunta.

2. ¿Cuando toda derivación continua es interna?

   Si la respuesta a la anterior pregunta es negativa, surge de manera natural la tercera cuestión.

3. ¿Cuando toda derivación continua puede ser aproximada (en conveniente topología) mediante derivaciones internas?

Es claro que cuando Upmeier realizó estas preguntas aún faltaban diez años para el nacimiento de los JB*-triples reales y no fueron formuladas para estos últimos, pero su validez en el caso de los JB*-triples reales es claramente incuestionable.

La primera de las preguntas anteriores fue contestada afirmativamente por Barton y Friedman, [5, Corollary 2.2], demostrando que toda derivación en un JB*-triple complejo es automáticamente continua. A continuación veremos que a partir de este resultado podemos deducir fácilmente la continuidad automática de cualquier derivación en un JB*-triple real. El resto de este capítulo lo vamos a dedicar a dar respuesta a las restantes preguntas tanto para JB*-triples reales como complejos. En el caso complejo, las preguntas segunda y tercera tienen precedentes en [30] y [5] respectivamente.

Comenzamos construyendo una relación entre el conjunto de las derivaciones de un JB*-triple real E y el conjunto de las derivaciones de su complexificación. Esta relación nos va a facilitar el trabajo para dar respuesta a las preguntas anteriores. En algunos casos nos servirá para deducir la respuesta del caso real a partir de la del caso complejo y otras veces, hará justamente el servicio contrario.

Nota 2.0.5 *Sea E un JB*-triple real y δ una derivación en E. Podemos definir una derivación en su complexificación de la siguiente manera:*

$$\widehat{\delta} : \widehat{E} \to \widehat{E}$$

$$\widehat{\delta}(x + iy) := \delta(x) + i\delta(y)$$

para todo $x + iy \in \widehat{E}$. El comprobar que $\widehat{\delta}$ es una derivación en $\widehat{E}$ es un ejercicio de paciencia, sin ninguna dificultad, que dejamos para el lector. Desde ahora en adelante, dada una derivación δ en un JB-triple real, notaremos por $\widehat{\delta}$ a la derivación sobre su complexificación que acabamos de construir.*

Si E es un JB*-triple real, δ es una derivación en E y consideramos la extensión, $\widehat{\delta}$, de δ a $\widehat{E}$, tenemos que, en virtud del resultado de Barton y Friedman, $\widehat{\delta}$ (y por tanto δ) es automáticamente continua. Por consiguiente podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 2.0.6 *Toda derivación en un JB*-triple real ó complejo es automáticamente continua.*

Una vez visto que todas las derivaciones, tanto en JB*-triples reales como complejos son continuas, podemos sacar alguna relación entre la norma de una derivación, δ, en un JB*-triple real y la norma de su extensión a la complexificación del triple. Es claro que $\|\delta\| \leq \|\widehat{\delta}\|$ pero además, por la propia construcción de $\widehat{\delta}$, tenemos que $\|\delta\| \leq \|\widehat{\delta}\| \leq 2\|\delta\|$.

El siguiente paso de este capítulo nos dirige al estudio de la respuesta a la segunda de las preguntas formuladas por Upmeier. A dicho fin dedicamos la siguiente sección.

2.1 Propiedad de Derivaciones Internas

Una vez visto que toda derivación de un JB*-triple real o complejo es continua, la segunda pregunta se puede formular como sigue: ¿Son todas las derivaciones de un JB*-triple, real ó complejo, internas?. La respuesta a esta pregunta es no en general. Este hecho se pondrá de manifiesto en el estudio pormenorizado que hacemos en el caso de los factores de Cartan.

Al objeto de simplificar la redacción introducimos la siguiente definición.

Definición 2.1.1 *Sea U un JB*-triple real ó complejo, diremos que U tiene la* ***propiedad de derivaciones internas*** *ó simplemente* ***la propiedad P.D.I.****, si toda derivación en U es interna.*

En el caso particular de los JB*-triples reales o complejos finito dimensionales, tenemos asegurado que toda derivación es interna [40, Chapter 8]. La siguiente Proposición nos asegura que un JB*-triple real posee la propiedad P.D.I. cuando su complexificación también la posee.

Proposición 2.1.2 *Sea E un JB*-triple real. Supongamos que su complexificación, $\widehat{E}$, posee la propiedad P.D.I., entonces E posee la propiedad P.D.I.. Además, si podemos dar una cota uniforme, M, del grado de las derivaciones internas de $\widehat{E}$, entonces $2M$ es una cota uniforme del grado de las derivaciones internas de E.*

Demostración.- Supongamos que E es un JB*-triple real tal que su complexificación $\widehat{E}$ tiene la propiedad P.D.I. y tomemos δ una derivación en E. Notamos por $\widehat{\delta}$ a la derivación en $\widehat{E}$, que extiende a δ. Como $\widehat{E}$ tiene la propiedad P.D.I., $\widehat{\delta}$ es una derivación interna de grado n, es decir,

$$\widehat{\delta} = \sum_{k=1}^{k=n} \delta(a_k, b_k)$$

donde $a_k, b_k \in \widehat{E}$. En consecuencia, $a_k = a_{k,1} + ia_{k,2}$ y $b_k = b_{k,1} + ib_{k,2}$ con $a_{k,l}, b_{k,l} \in E$ para $l : 1, 2$ y $k : 1, \ldots, n$.

Sea ahora $x \in E$ y calculemos

$$\delta(a_k, b_k)x = \delta(a_{k,1} + ia_{k,2}, b_{k,1} + ib_{k,2})x =$$
$$\{a_{k,1} + ia_{k,2}, b_{k,1} + ib_{k,2}, x\} - \{b_{k,1} + ib_{k,2}, a_{k,1} + ia_{k,2}, x\} =$$
$$\{a_{k,1}, b_{k,1}, x\} + \{a_{k,2}, b_{k,2}, x\} + i(\{a_{k,2}, b_{k,1}, x\} - \{a_{k,1}, b_{k,2}, x\})-$$
$$- \{b_{k,1}, a_{k,1}, x\} - \{b_{k,2}, a_{k,2}, x\} - i(\{b_{k,2}, a_{k,1}, x\} - \{b_{k,1}, a_{k,2}, x\}) =$$
$$= \delta(a_{k,1}, b_{k,1})(x) + \delta(a_{k,2}, b_{k,2})(x)+$$
$$+i(\{a_{k,2}, b_{k,1}, x\} - \{a_{k,1}, b_{k,2}, x\} - \{b_{k,2}, a_{k,1}, x\} + \{b_{k,1}, a_{k,2}, x\}).$$

Por tanto,

$$E \ni \delta(x) = \widehat{\delta}(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \delta(a_{k,1} + ia_{k,2}, b_{k,1} + ib_{k,2})x =$$
$$= (\sum_{k=1}^{k=n}(\delta(a_{k,1}, b_{k,1}) + \delta(a_{k,2}, b_{k,2}))+$$
$$+i\sum_{k=1}^{k=n}(L(a_{k,2}, b_{k,1}) - L(a_{k,1}, b_{k,2}) - L(b_{k,2}, a_{k,1}) + L(b_{k,1}, a_{k,2})))(x)$$

Como los elementos $a_{k,l}, b_{k,l} \in E$, es claro que

$$(\sum_{k=1}^{k=n}(\delta(a_{k,1}, b_{k,1}) + \delta(a_{k,2}, b_{k,2})))(E) \subset E$$

y que

$$i\sum_{k=1}^{k=n}(L(a_{k,2}, b_{k,1}) - L(a_{k,1}, b_{k,2}) - L(b_{k,2}, a_{k,1}) + L(b_{k,1}, a_{k,1}))(E) \subset iE.$$

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{k=n}(L(a_{k,2}, b_{k,1}) - L(a_{k,1}, b_{k,2}) - L(b_{k,2}, a_{k,1}) + L(b_{k,1}, a_{k,1}))(x) = 0$$

para todo $x \in E$. En consecuencia,

$$\delta(x) = \widehat{\delta}(x) = \sum_{k=1}^{k=n}(\delta(a_{k,1}, b_{k,1}) + \delta(a_{k,2}, b_{k,2}))(x)$$

para todo $x \in E$. Hecho que nos asegura que, δ es una derivación interna de grado menor o igual que $2n$. □

A partir de la proposición anterior, es claro que si un JB*-triple real no posee la propiedad P.D.I., su complexificación tampoco puede tener dicha propiedad.

2.1.1 Factores que pueden ser vistos como álgebras

Dentro de este grupo incluimos a los factores de Cartan complejos de Tipo 1 con la dimensión de H igual a la dimensión de K, a los de Tipo 2 con dimensión de H par ó infinita y a todos los de Tipo 3, así como a todas sus formas reales, es decir, a todos los factores de Cartan reales que son formas reales de los anteriores factores de Cartan complejos. El motivo de agrupar a estos factores, bajo el epígrafe que hemos seleccionado, se va a comprender fácilmente después de la siguiente Proposición. Previamente recordamos que una JC*-álgebra (respectivamente, JC-álgebra) J, se dice **Reversible** si y solo si para todo n natural y para cualesquiera elementos $x_1, ..., x_n$ en J, se verifica que $x_1...x_n + x_n...x_1$ es de nuevo un elemento de J.

Proposición 2.1.3 *Los factores de Cartan complejos de Tipo 1 cuadrado ($dimH = dimK$), de Tipo 2 con $dim(H)$ par o infinita y todos los factores de Cartan complejos de Tipo 3, son JC*-álgebras reversibles, más aún, son JW*-álgebras reversibles.*

Demostración.- El Tipo 1 cuadrado lo es de manera evidente. El Tipo 3, lo constituyen los operadores t-simétricos en $\mathcal{BL}(\mathcal{H})$ y por tanto si $x_1, ..., x_n$ son elementos t-simétricos en $\mathcal{BL}(\mathcal{H})$, se tiene que:

$$(x_1...x_n + x_n...x_1)^t = x_n...x_1 + x_1...x_n$$

lo que nos dice que un tal factor de Cartan es una JC*-álgebra reversible.

En un factor C de Tipo 2 con $dim(H)$ par o infinita, elegido como elemento unitario distinguido u, cuya expresión en forma matricial es:

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

(cuando en origen se toma una base $\{e_i\}$ de H y en llegada la base $\{j(e_i)\}$, donde j es la conjugación en H que define a dicho factor), podemos definir un producto asociativo $\cdot_u$ dado por $x \cdot_u y = xuy$. Ahora bien, visto C como JB*-álgebra y dado que el producto de Jordan viene dado por $z \circ w = \{z, u, w\} = \frac{1}{2}(zu^*w + wu^*z) = -\frac{1}{2}(zuw + wuz) = -\frac{1}{2}\,(z \cdot_u w + w \cdot_u z)$, tenemos que el producto que dota a dicho factor como JC*-álgebra no es otro que el simetrizado del que acabamos de definir, salvo el signo. Así pués, para ver la reversibilidad de la JC*-álgebra C bastará probar la reversibilidad para el producto x $\cdot_u$y . En efecto:

$$(x_1 \cdot_u \ldots \cdot_u x_n + x_n \cdot_u \ldots \cdot_u x_1)^t =$$

$$(-1)^{n+(n-1)}(x_n u x_{n-1} \ldots x_2 u x_1 + x_1 u x_2 \ldots x_{n-1} u x_n) =$$

$$-(x_1 \cdot_u \ldots \cdot_u x_n + x_n \cdot_u \ldots \cdot_u x_1).$$

Lo que prueba la reversibilidad.

Veamos por último que todos ellos son JW*-álgebras. Para ello bastará probar que las aplicaciones :

$$T \longrightarrow T^*$$

$$T \longrightarrow T \circ j$$

$$T \longrightarrow j \circ T$$

son débil-continuas, lo cual es fácil de comprobar si se recuerda que T_λ converge a T en la topología débil si y solo si $(T_\lambda(x) \mid y)$ converge a $(T(x) \mid y)$ cualesquiera que sean x, y en H.□

Ahora nos proponemos probar que, para estos factores complejos, toda derivación es interna de grado 153 a lo sumo (Teorema 2.1.9). La idea de la demostración de la propiedad P.D.I. para estos factores de Cartan complejos corresponde a T. Ho [30]. Una vez probado el resultado anterior, aplicamos la Proposición 2.1.2, para obtener que, en las respectivas formas reales de estos factores, toda derivación es interna de grado 306 a lo sumo.

Una vez visto en la proposición anterior que los factores referidos son JW*-álgebras reversibles, la clave de la demostración consiste en relacionar las derivaciones como álgebras con las derivaciones como triples y a partir de aquí, poder aplicar los resultados que Upmeier tiene probados, para el caso de JW-álgebras. Con este objetivo introducimos las conocidas siguientes definiciones.

Definición 2.1.4 *Si A es un álgebra, una* ***derivación*** *en A es una aplicación lineal*

$$D : A \longrightarrow A$$

verificando:

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

para cualesquiera $a, b \in A$.

*Una derivación D en un álgebra de Jordan se dice **interna** si y solo si $D = \sum_{i=1}^{n}[L_{a_i}, L_{b_i}]$, donde L_a representa al operador de multiplicación y $[T, S] := TS - ST$. Llamamos grado de una derivación interna al número mínimo de conmutadores, de la forma $[L_a, L_b]$, que la expresan como suma.*

Lema 2.1.5 *Sea Z un JB^*-triple que proviene de una JB^*-álgebra con unidad u y sea δ una derivación en Z. Entonces $L_{\delta u}$ es una derivación interna en Z de grado uno.*

Demostración.- Si empezamos por aplicar δ a la unidad, u, de Z, tenemos :

$$\delta u = \delta\{u, u, u\} = \{\delta u, u, u\} + \{u, \delta u, u\} + \{u, u, \delta u\} =$$

$$= 2\{\delta u, u, u\} + \{u, \delta u, u\} = 2\delta u \circ u + (\delta u)^*$$

lo que implica que

$$(\delta u)^* = -\delta u.$$

Ahora si consideramos :

$$L_{\delta u} z = \delta u \circ z = \frac{1}{2}(\delta u \circ z - (-\delta u) \circ z) =$$

$$\frac{1}{2}(\delta u \circ z - (\delta u)^* \circ z) = \frac{1}{2}(\{\delta u, u, z\} - \{u, \delta u, z\}),$$

tenemos que $L_{\delta u}$ es una derivación interna en Z de grado uno.□

Nuestro siguiente lema prueba que toda derivación de una JB*-álgebra unital que conserve la involución es una derivación como JB*-triple. Recíprocamente, toda derivación de un JB*-triple con un elemento unitario distinguido induce una derivación en dicho JB*-triple visto como JB*-álgebra.

Lema 2.1.6 *[5]*
Sean Z una JB^*-álgebra unital y D una derivación en Z que conmuta con la involución, entonces D es una derivación de Z visto como JB^*-triple. Reciprocamente si Z es un JB^*-triple con elemento unital distinguido u y δ es una derivación en Z, entonces $\delta - L_{\delta u}$ es una derivación en Z, visto como JB^*-álgebra, que conmuta con la involución. En particular si δ es una derivación interna simple $\delta(x, y)$, entonces :

$$\delta - L_{\delta(u)} = \frac{1}{2}([L_{x+x^*}, L_{y+y^*}] + [L_{-i(x-x^*)}, L_{-i(y-y^*)}]).$$

Demostración.- La primera afirmación es de cálculo directo. Probamos la segunda :

$$\begin{aligned}(\delta - L_{\delta u})(x \circ y) &= \delta\{x,u,y\} - \{\delta u, u, \{x,u,y\}\} = \\ = \{\delta x, u, y\} + \{x, \delta u, y\} &+ \{x,u,\delta y\} - \{\delta u, u, \{x,u,y\}\} = \\ &= \{\delta x, u, y\} + \{x, \delta u, y\} + \{x, u, \delta y\} - \\ -\{\{\delta u, u, x\}, u, y\} &+ \{x, \{u, \delta u, u\}, y\} - \{x, u, \{\delta u, u, y\}\} = \\ &= \delta x \circ y + \{x, \delta u, y\} + x \circ \delta y - \\ -(\delta u \circ x) \circ y &+ \{x, (\delta u)^*, y\} - x \circ (\delta u \circ y) =\end{aligned}$$

(aplicando que $(\delta u)^* = -\delta u$)

$$\begin{aligned}&= (\delta - L_{\delta u})(x) \circ y + \{x, \delta u, y\} + x \circ (\delta - L_{\delta u})(y) - \{x, \delta u, y\} = \\ &= (\delta - L_{\delta u})(x) \circ y + x \circ (\delta - L_{\delta u})(y).\end{aligned}$$

Lo que prueba que $\delta - L_{\delta u}$ es una derivación. El resto es de comprobación directa. □

Ahora nos proponemos demostrar que todas las derivaciones de una JW-álgebra reversible son internas de grado 151 a lo sumo.

Es conocido [55, Theorem 13] que cada JW-álgebra A, admite una descomposición en suma directa de cinco JW-álgebras que notaremos en la forma

$$A = I_{fin} \oplus I_{\infty} \oplus II_1 \oplus II_{\infty} \oplus III.$$

(Ver también [1, página 255]). Siguiendo la notación de Upmeier, [56], llamaremos JW-álgebra propiamente no modular, a toda JW-álgebra A, cuya parte modular, $I_{fin} \oplus II_1$, sea cero. Para JW-álgebras propiamente no modulares, Upmeier, [56, Theorem 3.8], demostró que toda derivación puede ser expresada como suma de seis conmutadores de la forma $[L_a, L_b]$. En el mismo trabajo, también se probaba que cada derivación de una JW-álgebra reversible de tipo I_{fin}, puede ser expresada como suma de cinco conmutadores de operadores de multiplicación [56, Theorem 3.9]. Por tanto, para describir las derivaciones de una JW-álgebra bastará con centrarse en el caso de una JW-álgebra de tipo II_1. En el caso particular de JW-álgebras reversibles de tipo II_1, Upmeier, [56, Theorem 3.10], probó que toda derivación es interna. De hecho, de la prueba de Upmeier, se puede extraer que una tal derivación es expresable como suma de a lo más 140 conmutadores.

Teorema 2.1.7 *Sea A una JW-álgebra reversible de tipo II_1. Entonces toda derivación de A se puede expresar como suma de, a lo sumo, 140 conmutadores de la forma $[L_a, L_b]$.*

Demostración.- Si A es una JW-álgebra reversible de tipo II_1 y notamos por $\mathcal{U}(A)$ a su envolvente de von Neumann compleja (es decir a la menor álgebra de von Neumann que contiene a A), se tiene que $\mathcal{U}(A)^+$ es también de tipo II_1 (ver [1, Theorem 8]). Por tanto, por los argumentos de la prueba del Teorema 3.10 en [56], podemos asegurar que cada derivación en A tiene la forma $D(x) = ad(w)(x) := [w, x]$ $(x \in A)$, donde $w = -w^* \in \mathcal{U}(A)$. Como además sabemos que $\mathcal{U}(A)^+$ es de tipo II_1, w es expresable como suma de diez conmutadores en $\mathcal{U}(A)$ (ver [22, Theorem 2.3]). En consecuencia, cada derivación en A es de la forma

$$D = \sum_{j=1}^{10} ad([w_{1,j}, w_{2,j}]).$$

Ahora teniendo en cuenta que $A = \mathcal{R}(A)_{sa}$, [52], donde $\mathcal{R}(A)$ es la envolvente asociativa real de A, podemos asegurar que, en virtud de [53, Lemma 6.1] y [54, Lemma 2.3 y Theorem 2.4],

$$\mathcal{U}(A) = \mathcal{R}(A) + i\,\mathcal{R}(A).$$

Por consiguiente, cada elemento $w_{l,j}$ se puede expresar, $w_{l,j} = u_{l,j} + iv_{l,j}$, donde $u_{l,j}, v_{l,j} \in \mathcal{R}(A)$.

Como para cualesquiera elementos, $u_l, v_l \in \mathcal{R}(A)$, se verifican las igualdades:

$$[u_1 + iv_1, u_2 + iv_2] = [u_1, u_2] - [v_1, v_2] + i([u_1, v_2] + [v_1, u_2]),$$

$$[u_1 + iu_2, x] = [u_1, x] + i[u_2, x], \quad \text{para todo } x \in A,$$

y teniendo en cuenta que D aplica A en A, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{10} [[u_{1,j}, v_{2,j}] + [v_{1,j}, u_{2,j}], x] = 0$$

para todo $x \in A$. En consecuencia

$$D = ad(w) = \sum_{j=1}^{10} ad([u_{1,j}, u_{2,j}] - [v_{1,j}, v_{2,j}]) = \sum_{j=1}^{20} ad([z_{1,j}, z_{2,j}])$$

donde $z_{i,j} \in \mathcal{R}(A)$ y $w = \sum_{j=1}^{20} [z_{1,j}, z_{2,j}]$.

Nuestro próximo objetivo es probar que los elementos $[z_{1,j}, z_{2,j}]$ se pueden expresar como suma de conmutadores con elementos en A. Sean pues $z_{1,j}, z_{2,j} \in \mathcal{R}(A)$, para $l = 1, 2$ notaremos por $z_{l,j}^s$ (respectivamente $z_{l,j}^a$) a la parte simétrica (respectivamente anti-simétrica) de $z_{l,j}$. Ya que para todo j, $[z^a_{1,j}, z^s_{2,j}]$ y $[z^s_{1,j}, z^a_{2,j}]$ son elementos simétricos y $w^* = -w$, se tiene que

$$w = \sum_{j=1}^{20} [z^s_{1,j}, z^s_{2,j}] + [z^a_{1,j}, z^a_{2,j}].$$

Ahora bien, como $A = \mathcal{R}(A)_{sa}$, tenemos que $z^s_{1,j}, z^s_{2,j} \in A$. Centramos ahora nuestra atención en los conmutadores $[z^a_{1,j}, z^a_{2,j}]$.

Por [7, pág. 121], podemos asegurar que $\mathcal{R}(A)$ es isomorfa al álgebra $M_2(B)$ de las matrices dos por dos sobre una determinada $*$-álgebra asociativa real B.

Siguiendo la prueba del Lemma 3.11 en [56], tenemos que cada conmutador de elementos anti-simétricos de $M_2(B)$ es de la forma $\begin{pmatrix} a & -c^* \\ c & b \end{pmatrix}$, con

$$a + b = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] + [c_1, c_2] + [d_1, d_2]$$

y donde a_j, b_j y c_j son elementos anti-simétricos de B mientras que d_1 y d_2 son elementos simétricos de B. Por otra parte, teniendo en cuenta que para a, b, c, α_j y $\beta_j \in B$, con $a^* = -a$, $b^* = -b$, $\alpha_j^* = \alpha_j$ y $\beta_j^* = -\beta_j$, se verifican las siguientes identidades

$$\begin{pmatrix} 0 & -c^* \\ c & 0 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c^* \\ c & 0 \end{pmatrix}],$$

$$2\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 0 & a-b \\ b-a & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}],$$

$$\begin{pmatrix} [\alpha_1, \alpha_2] & 0 \\ 0 & [\alpha_1, \alpha_2] \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}],$$

$$\begin{pmatrix} [\beta_1, \beta_2] & 0 \\ 0 & [\beta_1, \beta_2] \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 0 & -\beta_2 \\ \beta_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix}],$$

y que

$$\begin{pmatrix} a & -c^* \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c^* \\ c & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix},$$

obtenemos que cada conmutador $[z^a_{1,j}, z^a_{2,j}]$, se puede expresar como suma de seis conmutadores con elementos en A. Por consiguiente, hemos probado que

$$w = \sum_{j=1}^{140} [x_{1,j}, x_{2,j}]$$

donde $x_{l,j} \in A$, para cualesquiera l, j. Hecho que nos demuestra que

$$D = \sum_{j=1}^{140} ad([x_{1,j}, x_{2,j}]) = \sum_{j=1}^{140} [L_{x_{1,j}}, L_{x_{2,j}}].$$

□

Como consecuencia de todos estos resultados tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.8 *En una JW-álgebra reversible, todas las derivaciones son internas, es más, toda derivación se puede expresar como suma de 151 conmutadores de la forma* $[L_a, L_b]$.

El siguiente teorema constituye el principal resultado de esta subsección.

Teorema 2.1.9 *Los factores de Cartan complejos de Tipo 1, con* $dim(H) = dim(K)$, *de Tipo 2, con dimensión de H par ó infinita y todos los de Tipo 3, tienen la propiedad P.D.I. De hecho, toda derivación en dichos factores tiene grado 153 a lo sumo.*

Demostración.- Por la Proposición 2.1.3, todos estos factores pueden ser vistos como JW*-álgebras reversibles y unitales. Por tanto, es suficiente probar que una JW*-álgebra reversible y unital Z, verifica el teorema.

Es conocido que Z descompone $Z = X + iX$, donde X es la parte simétrica de Z y por tanto, X es una JW-álgebra reversible.

Si δ es una derivación de Z como JB*-triple, por el Lema 2.1.6, $\delta - L_{\delta u}$ es una derivación de la JB*-álgebra Z que respeta la involución y por tanto su restricción a X es una derivación. Por la identidad:

$$(\delta - L_{\delta u})(z) = (\delta - L_{\delta u})(x + iy) = (\delta - L_{\delta u}) |_X (x) + i(\delta - L_{\delta u}) |_X (y),$$

se tiene que $(\delta - L_{\delta u}) |_X$ determina a $(\delta - L_{\delta u})$. Ahora, por el Corolario 2.1.8 (salvo añadir el conmutador 0), tenemos que

$$(\delta - L_{\delta u})(z) = \sum_{j=1}^{152} [L_{a_j}, L_{b_j}](x) + i \sum_{j=1}^{152} [L_{a_j}, L_{b_j}](y) =$$

$$= \sum_{j=1}^{152} [L_{a_j}, L_{b_j}](x + iy) = \sum_{j=1}^{152} [L_{a_j}, L_{b_j}](z).$$

Ahora utilizando la igualdad:

$$[L_a, L_b] + [L_c, L_d] = 2(\tilde{\delta} - L_{\tilde{\delta} u}),$$

para cualesquiera a, b, c y d pertenecientes a X y donde

$$\widetilde{\delta} = \delta(\frac{a+ic}{2}, \frac{b+id}{2}),$$

obtenemos que :

$$(\delta - L_{\delta u})(z) = \sum_{j=1}^{152}[L_{a_j}, L_{b_j}](z) = 2\sum_{j=1}^{76}(\delta(c_j, d_j) - L_{\delta(c_j,d_j)u})(z).$$

De donde despejando δ y aplicando el Lema 2.1.5 se obtiene que

$$\delta = 2\sum_{j=1}^{76}(\delta(c_j, d_j) - L_{\delta(c_j,d_j)u}\ ) + L_{\delta u},$$

es una derivación interna y de grado menor o igual que 153.□

Corolario 2.1.10 *Si E es cualquier forma real de los factores de Cartan complejos incluidos en el teorema anterior, entonces E verifica la propiedad P.D.I. y toda derivación en E tiene grado 306 a lo sumo. Concretamente, los factores de Cartan reales $I^{\mathbb{R}}_{n,n}$, $I^{\mathbb{H}}_{2p,2p}$, $I^{\mathbb{C}}_{n}$, $II^{\mathbb{R}}_{2n}$, $II^{\mathbb{H}}_{2p}$, $III^{\mathbb{R}}_{n}$ y $III^{\mathbb{H}}_{2p}$ verifican la propiedad P.D.I. y cada una de sus derivaciones tiene grado menor o igual que 306.*

Demostración.- Usar el Teorema 2.1.9 y la Proposición 2.1.2. □

2.1.2 Factor de tipo Spin real y complejo

Recordamos que llamamos factor de tipo Spin real a cualquier forma real de un factor de Tipo 4 o Spin complejo. Vamos a demostrar que los factores de tipo Spin real, infinito dimensionales, no verifican la propiedad P.D.I., resultado que, gracias a la Proposición 2.1.2, nos permite afirmar que tampoco los factores de tipo Spin complejos, infinito dimensionales, verifican la propiedad P.D.I.

Para alcanzar nuestro objetivo, vamos a construir una derivación externa en un factor de tipo Spin real. En [30, Proposition 2.3.1], T. Ho prueba, utilizando un "spin grid", que dado un factor de Tipo Spin complejo S de dimensión finita n, entonces existe una derivación interna de S con grado mayor o igual que n. Siguiendo las ideas de la prueba de este resultado, nosotros probamos en [44, Teorema 31], que todo factor Spin complejo de dimensión infinita admite derivaciones externas. Ahora presentamos una prueba más novedosa, en la que se elimina la utilización de los "spin grid" y que simplifica enormemente los cálculos que presentábamos en [44].

Es conocido, [38, Theorem 4.1] (ver pág. 9), que todo factor Spin real E puede ser visto como una l^1-suma,

$$E = X_1 \oplus^1 X_2$$

de dos subespacios cerrados X_1 y X_2 de un espacio de Hilbert real X, que además verifican que $X_2 = X_1^{\perp}$. También sabemos la expresión que tiene el triple producto en este caso,

$$\{x, y, z\} = (x|y)z + (z|y)x - (x|\overline{z})\overline{y}$$

donde $(.|.)$ es el producto escalar de X y la involución $x \mapsto \overline{x}$ viene dada por $\overline{x} = (x_1, -x_2)$, para todo $x = (x_1, x_2) \in E$.

Como estamos en el caso en que la dimensión de E es infinita, podemos suponer que la dimensión de X_1 también es infinita. Supongamos primero que X_1 es separable. Por tanto podemos tomar una base ortonormal y numerable de X_1, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En particular $\overline{e_n} = e_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. A partir de la expresión del producto triple, es fácil comprobar que $\{e_n, e_n, e_n\} = e_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. También es sencillo de comprobar que para cada $k \in \mathbb{N}$, la norma de $\delta(e_{2k-1}, e_{2k})$ es menor ó igual que dos. Por tanto, el operador

$$\delta_0 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta(e_{2k-1}, e_{2k})$$

está bien definido y es una derivación en E. El objetivo ahora es comprobar que no puede ser interna.

Veamos primero como se comporta esta derivación sobre el subespacio $X_2 = X_1^{\perp}$. Sea $x_2 \in X_2$, entonces

$$\begin{aligned}\delta(e_{2k-1}, e_{2k})(x_2) &= \{e_{2k-1}, e_{2k}, x_2\} - \{e_{2k}, e_{2k-1}, x_2\} = \\ &= (e_{2k-1}|e_{2k})x_2 + (x_2|e_{2k})e_{2k-1} + (e_{2k-1}|x_2)e_{2k} - \\ &\quad -(e_{2k}|e_{2k-1})x_2 - (x_2|e_{2k-1})e_{2k} - (e_{2k}|x_2)e_{2k-1} = 0,\end{aligned}$$

lo que nos muestra que $\delta_0(X_2) = 0$.

Supongamos ahora que δ_0 fuese interna, en ese caso,

$$\delta_0 = \sum_{j=1}^{p} \delta(a_j, b_j)$$

para ciertos $a_j, b_j \in E$. Como $E = X_1 \oplus^1 X_2$, $a_j = a_{j,1} + a_{j,2}$ y $b_j = b_{j,1} + b_{j,2}$ donde cada $a_{j,i}$ y cada $b_{j,i}$ pertenecen a X_i $(j : 1, \dots, P)$. En consecuencia

$$\delta_0 = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_j, b_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{P} \left(\delta(a_{j,1}, b_{j,1}) + \delta(a_{j,1}, b_{j,2}) + \delta(a_{j,2}, b_{j,1}) + \delta(a_{j,2}, b_{j,2})\right).$$

Es fácil comprobar que, para todo $x_1 \in X_1$,

$$\delta(a_{j,2}, b_{j,2})(x_1) = \delta(a_{j,1}, b_{j,2})(x_1) = \delta(a_{j,2}, b_{j,1})(x_1) = 0.$$

En consecuencia

$$\delta_0(x_1) = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_{j,1}, b_{j,1})(x_1)$$

para todo $x_1 \in X_1$.

En este momento definimos K como el subespacio de X_1 generado por los $a_{j,1}$ y los $b_{j,1}$, $K = Span\{a_{j,1}, b_{j,1}\}$. Claramente, K tiene dimension finita. Sea $x_1 \in K^\perp \cap X_1$, entonces

$$0 = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_{j,1}, b_{j,1})(x_1) = \delta_0(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta(e_{2k-1}, e_{2k})(x_1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} (\{e_{2k-1}, e_{2k}, x_1\} - \{e_{2k}, e_{2k-1}, x_1\}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} ((e_{2k-1}|e_{2k})x_1 + (x_1|e_{2k})e_{2k-1} - (e_{2k-1}|x_1)e_{2k} -$$

$$-(e_{2k}|e_{2k-1})x_1 - (x_1|e_{2k-1})e_{2k} + (e_{2k}|x_1)e_{2k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} ((x_1|e_{2k})e_{2k-1} - (e_{2k-1}|x_1)e_{2k}).$$

En consecuencia $(x_1|e_{2k}) = (e_{2k-1}|x_1) = 0$ para todo $k \in \mathbf{N}$ y por tanto $x_1 = 0$ ya que $\{e_n\}$ es una base de X_1. Tenemos por tanto que $K^\perp \cap X_1 = 0$ y por tanto $X_1 = K$ finito dimensional, lo que constituye una contradicción y nos demuestra que en este caso δ_0 es externa.

Nos queda el caso en que X_1 tiene dimensión infinita pero no numerable. Este caso lo vamos a deducir del ya probado para X_1 separable.

Ya que X_1 es infinito dimensional, puedo tomar un conjunto numerable de vectores ortonormales de X_1 al que denoto por $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Notaremos por H al espacio de Hilbert (real) separable que generan estos vectores y mediante δ_0 a la derivación en E dada por

$$\delta_0 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\delta(e_{2k-1}, e_{2k}).$$

Es claro que $\delta_0(H) \subseteq H$, por lo que $\delta_0|_H$ es una derivación en H, que además tiene que ser externa, por lo probado en el caso separable. Dicho de otro modo, δ_0 no se puede expresar mediante una suma de derivaciones internas simples con elementos en H.

Veamos que tampoco es interna en E. Si lo fuese,

$$\delta_0 = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_j, b_j)$$

con $a_j, b_j \in E$. Ya que E admite una descomposición

$$E = (H \oplus^{\ell_2} H^\perp) \oplus^{\ell_1} X_2,$$

los elementos, a_j y b_j, se pueden expresar $a_j = h_j + x_{j,3}$ y $b_j = k_j + y_{j,3}$ donde h_j y k_j pertenecen a H y $x_{j,3}, y_{j,3} \in H^\perp \oplus^1 X_2$ $(j : 1, \ldots, P)$. La expresión de δ_0 queda por tanto de la siguiente manera:

$$\delta_0 = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_j, b_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{P} \left(\delta(h_j, k_j) + \delta(h_j, y_{j,3}) + \delta(x_{j,3}, k_j) + \delta(x_{j,3}, y_{j,3})\right).$$

Es fácil comprobar que para cada elemento $h \in H$,

$$\delta(h_j, y_{j,3})h = -(h_j|h)\overline{y_{j,3}} - (h|h_j)y_{j,3} \in H^\perp \oplus^1 X_2,$$

$$\delta(x_{j,3}, k_j)h = (h|k_j)x_{j,3} + (k_j|h)\overline{x_{j,3}} \in H^\perp \oplus^1 X_2$$

y que

$$\delta(x_{j,3}, y_{j,3})(h) = 0.$$

Por la última igualdad, la expresión de δ_0 sobre un elemento $h \in H$ queda,

$$\delta_0(h) = \sum_{j=1}^{P} \delta(h_j, k_j)(h) + \sum_{j=1}^{P}(\delta(h_j, y_{j,3}) + \delta(x_{j,3}, k_j))(h).$$

Ya que $\delta_0(H) \subseteq H$ y $\sum_{j=1}^{P}(\delta(h_j, y_{j,3}) + \delta(x_{j,3}, k_j))(H) \subseteq H^{\perp} \oplus^1 X_2$, de hecho, podemos afirmar que

$$\delta_0(h) = \sum_{j=1}^{P} \delta(h_j, k_j)(h)$$

para todo $h \in H$. De este modo, $\delta_0|_H$ es expresable como una suma finita de derivaciones internas simples en H, hecho que es imposible. Por tanto δ_0 es externa en E.

Estamos pues en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.1.11 *En todo factor de Cartan de tipo Spin real ó complejo e infinito dimensional, podemos encontrar un derivación externa, o equivalentemente, ningún factor de Cartan de tipo Spin real ó complejo e infinito dimensional, verifica la propiedad P.D.I.*

Una vez terminado el factor de tipo Spin, solo nos queda por estudiar el factor de Cartan de Tipo 1 con $dim(H) \neq dim(K)$ y todas sus formas reales. Este factor será tratado en la siguiente subsección.

2.1.3 Factor de tipo I, no cuadrado

Consideraremos un factor de Cartan complejo de Tipo 1, con $dim(H) \neq dim(K)$ o cualquier forma real suya. En este caso, al igual que en el caso del factor Spin, vamos a poder construir derivaciones externas, en las formas reales, cuando la dimensión sea infinita. Por tanto, podremos concluir que ni el factor de Cartan de Tipo 1 complejo con $dim(H) \neq dim(K)$, ni ninguna de sus formas reales, verifica la propiedad P.D.I.

Usando [38, Theorem 4.1] (ver pág. 9), sabemos que las formas reales del factor de Tipo 1 complejo, pueden ser vistas como el espacio, $BL(X,Y)$, de los operadores lineales y acotados entre espacios de Hilbert reales X e Y o como el espacio, $BL(P,Q)$, de los operadores lineales y acotados entre dos espacios de Hilbert P y Q sobre el cuerpo de los cuaternios $\mathbb{H}$. En esta subsección vamos a construir una derivación externa en $BL(X,Y)$ para X e Y espacios de Hilbert reales con $+\infty = dim(X) > dim(Y)$, cuyo proceso de construcción puede ser llevado a la otra forma real $BL(P,Q)$ de manera obvia. Nos gustaría hacer notar que, como $BL(X,Y)$ y $BL(Y,X)$ son isométricamente isomorfos como triples, la condición $dim(X) > dim(Y)$ no supone restricción alguna.

Durante toda la subsección, vamos a denotar por X e Y a dos espacios de Hilbert reales con $+\infty = dim(X)$ y $dim(X) > dim(Y)$. Vamos a comenzar por estudiar las derivaciones en el caso en que $Y = \mathbb{R}$. En este caso, $BL(X, \mathbb{R})$ es identificable con X cuando este último está equipado con el producto triple

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}((x|y)z + (z|y)x)$$

para cualesquiera $x, y, z \in X$.

Si $\delta : X \to X$, es una derivación en X, tenemos que

$$\delta\{x, y, z\} = \{\delta x, y, z\} + \{x, \delta y, z\} + \{x, y, \delta z\} \quad (1.1)$$

para cualesquiera $x, y, z \in X$. Estudiemos primero el término de la izquierda

$$\delta\{x, y, z\} = \delta\frac{1}{2}((x|y)z + (z|y)x) = \frac{1}{2}((x|y)\delta z + (z|y)\delta x).$$

Veamos ahora los términos de la derecha

$$\{\delta x, y, z\} = \frac{1}{2}((\delta x|y)z + (z|y)\delta x)),$$

$$\{x, \delta y, z\} = \frac{1}{2}((x|\delta y)z + (z|\delta y)x)),$$

$$\{x, y, \delta z\} = \frac{1}{2}((x|y)\delta z + (\delta z|y)x)).$$

Sumando estas tres expresiones e igualando al término de la izquierda, tenemos que

$$\frac{1}{2}(((\delta x|y) + (x|\delta y))z + ((z|\delta y) + (\delta z|y))x) = 0$$

para cualesquiera $x, y, z \in X$. En el caso particular de que $x = z$, obtenemos que

$$((x|\delta y) + (\delta x|y))x = 0$$

para cualesquiera $x, y \in X$, lo que es equivalente a que

$$(x|\delta y) = -(\delta x|y)$$

para todo $x, y \in X$, es decir, $\delta^* = -\delta$. Estos nos demuestra que toda derivación en X, visto como factor de Tipo 1, es un operador lineal anti-simétrico en X. Veamos que, de hecho, esto es una equivalencia.

Lema 2.1.12 *Si X es un espacio de Hilbert real, considerado como forma real de un factor de Tipo 1, entonces las derivaciones en X son exactamente los operadores lineales continuos y anti-simétricos en X.*

Demostración.- Acabamos de ver que si δ es una derivación en X, entonces $\delta^* = -\delta$. Por tanto, supongamos que T es un operador lineal y continuo con $T^* = -T$, veamos que T es una derivación. Las identidades

$$T\{x,y,z\} = T\frac{1}{2}((x|y)z + (z|y)x) = \frac{1}{2}((x|y)Tz + (z|y)Tx),$$

$$\{Tx,y,z\} = \frac{1}{2}((Tx|y)z + (z|y)Tx)),$$

$$\{x,Ty,z\} = \frac{1}{2}((x|Ty)z + (z|Ty)x)) =$$

$$= \frac{1}{2}((T^*x|y)z + (T^*z|y)x)) = -\frac{1}{2}((Tx|y)z + (Tz|y)x)),$$

$$\{x,y,Tz\} = \frac{1}{2}((x|y)Tz + (Tz|y)x)),$$

nos muestran que

$$T\{x,y,z\} = \{Tx,y,z\} + \{x,Ty,z\} + \{x,y,Tz\},$$

y por tanto que T es una derivación. □

Una vez probado que las derivaciones en X son exactamente los operadores lineales, continuos y anti-simétricos en X. El siguiente paso, tiene como objetivo el describir las derivaciones internas en X.

Lema 2.1.13 *Toda derivación interna en X, considerado como forma real del factor de Tipo 1, es un operador de rango finito.*

Demostración.- Tomemos

$$\delta = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_j, b_j)$$

una derivación interna en X. La expresión de cada sumando,

$$\delta(a_j, b_j)(x) = \frac{1}{2}((x|b_j)a_j - (x|a_j)b_j),$$

nos asegura que es finito dimensional y por tanto δ es suma finita de operadores de rango finito. □

Es bien conocido [28, Lemma 7.5.6], que en todo espacio de Hilbert real e infinito dimensional X, existe un operador sobreyectivo T, con $T^* = -T$ (en realidad podemos obtener un T con $T^2 = -Id_X$ y $T^* = -T$), en particular dicho T, tiene rango igual a la dimensión de X. Usando el lema 2.1.12, tenemos que cualquier operador lineal, continuo y anti-simétrico en X que no tenga rango finito es una derivación en $X \equiv BL(X, \mathbb{R})$, que debe de ser externa por el lema 2.1.13. Esto nos asegura que $BL(X, \mathbb{R})$ no verifica la propiedad P.D.I., para cualquier Hilbert real e infinito dimensional X.

Proposición 2.1.14 *$BL(X, \mathbb{R})$ no verifica la propiedad P.D.I.*

Abordamos ahora el caso general. Vamos a comenzar viendo como podemos obtener derivaciones en $BL(X, Y)$, a partir de derivaciones en X.

Lema 2.1.15 *Sea δ una derivación en un espacio de Hilbert real X (visto como forma real del factor de Tipo 1) y sea Y otro espacio de Hilbert real, entonces la aplicación*

$$\widetilde{\delta} : BL(X, Y) \to BL(X, Y)$$

$$a \mapsto a\delta$$

es una derivación en $BL(X, Y)$.

Demostración.- Por ser δ una derivación en X, $\delta^* = -\delta$ (Lema 2.1.12). Dados $a, b, c \in BL(X, Y)$, tenemos que

$$\left\{\widetilde{\delta}a, b, c\right\} + \left\{a, \widetilde{\delta}b, c\right\} + \left\{a, b, \widetilde{\delta}c\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(a\delta b^* c + cb^* a\delta + a\delta^* b^* c + c\delta^* b^* a + ab^* c\delta + c\delta b^* a) =$$

$$= \frac{1}{2}(a\delta b^* c + cb^* a\delta - a\delta b^* c - c\delta b^* a + ab^* c\delta + c\delta b^* a) =$$

$$= \frac{1}{2}(cb^* a\delta + ab^* c\delta) = \{a, b, c\}\,\delta = \widetilde{\delta}\,\{a, b, c\}\,.$$

□

Veamos que la derivación $\widetilde{\delta}$, construida en el lema anterior a partir de una derivación δ en X, aplica X en X, bajo cierta identificación previa. En efecto: fijemos un elemento $y_0 \in Y$ de norma uno. Identificamos cada elemento $h \in X$, con el operador

$$f_h : X \to Y$$

$$f_h(x) := (x|h)y_0 \quad (x \in X)$$

Bajo esta identificación, X se puede ver como el subespacio de $BL(X,Y)$, formado por todos los elementos de la forma f_h con $h \in X$.

Veamos como actúa $\widetilde{\delta}$ sobre estos f_h,

$$\widetilde{\delta}(f_h)(x) = f_h(\delta x) = (\delta x|h)y_0 =$$

$$= (x|\delta^* h)y_0 = (x| - \delta h)y_0 = f_{-\delta h}(x).$$

En consecuencia $\widetilde{\delta}(X) \subseteq X$.

En el lema que exponemos a continuación demostramos que si $\widetilde{\delta}$ es interna, entonces δ tiene rango menor o igual que la dimensión Hilbertiana de Y.

Lema 2.1.16 *Sean δ y $\widetilde{\delta}$ como en el Lema 2.1.15. Supongamos que $\widetilde{\delta}$ es interna, entonces δ tiene rango menor o igual que la dimensión Hilbertiana de Y.*

Demostración.- Si $\widetilde{\delta}$ es interna en $BL(X,Y)$, entonces $\widetilde{\delta}$ se puede expresar

$$\widetilde{\delta} = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_j, b_j)$$

para ciertos $a_j, b_j \in BL(X,Y)$. Por lo visto anteriormente, sabemos que para cada $h \in X$, $\widetilde{\delta} f_h = f_{-\delta h} \in X$. Por otro lado, usando la expresión de $\widetilde{\delta}$ como derivación interna, tenemos

$$f_{-\delta h} = \widetilde{\delta}(f_h) = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_j, b_j)(f_h) =$$

$$= \sum_{j=1}^{P} \frac{1}{2}(a_j b_j^* f_h + f_h b_j^* a_j - b_j a_j^* f_h - f_h a_j^* b_j) =$$

$$= (\sum_{j=1}^{P} \frac{1}{2}(a_j b_j^* - b_j a_j^*))f_h + f_h(\sum_{j=1}^{P} \frac{1}{2}(b_j^* a_j - a_j^* b_j)) =$$

$$= Rf_h + f_h T,$$

donde

$$R = \sum_{j=1}^{P} \frac{1}{2}(a_j b_j^* - b_j a_j^*) : Y \to Y$$

$$T = \sum_{j=1}^{P} \frac{1}{2}(b_j^* a_j - a_j^* b_j) : X \to X$$

son dos operadores anti-simétricos. Además

$$f_h T(x) = (Tx|h)y_0 = (x| - Th)y_0 = f_{-Th}(x)$$

para todo $x \in X$ y por tanto $f_h T = f_{-Th}$. En consecuencia

$$R f_h = \widetilde{\delta} f_h - f_h T = f_{-\delta h - Th} = f_{h'} \in X.$$

Por tanto, para cualesquiera $x, h \in X$, se verifica la igualdad

$$R f_h(x) = (x|h)R(y_0) = (x|h')y_0 = f_{h'}(x).$$

En consecuencia, tenemos que $R(y_0) = \lambda y_0$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Veamos que dicho λ es cero

$$\lambda = (Ry_0|y_0) = (y_0|R^* y_0) = (y_0| - Ry_0) = -\lambda$$

y por tanto $\lambda = 0$. De este modo, ya que $Rf_h = 0$, la expresión de $\widetilde{\delta}$ sobre f_h queda

$$f_{-\delta h} = \widetilde{\delta}(f_h) = f_h T = f_{-Th}$$

para todo $h \in X$, de donde deducimos que $T = \delta$. Pero observemos con mas detenimiento la expresión

$$T = \sum_{j=1}^{P} \frac{1}{2}(b_j^* a_j - a_j^* b_j).$$

Cada $b_j^* a_j$ y cada $a_j^* b_j$ son operadores que factorizan a través de Y, por tanto tienen rango menor ó igual que la dimensión Hilbertiana de Y. En consecuencia $\delta = T$ es suma finita de operadores de rango menor ó igual a la dimensión Hilbertiana de Y, con lo que tenemos probado el lema.□

Teorema 2.1.17 *Sea X un espacio de Hilbert real infinito dimensional e Y otro espacio de Hilbert real, de dimensión Hilbertiana menor estricta que la de X. Entonces en $BL(X,Y)$ hay derivaciones externas, es decir $BL(X,Y)$ no verifica la propiedad P.D.I.*

Demostración.- Recordamos que, como X es infinito dimensional, existe un operador lineal y acotado T en X, con $T^2 = -Id_X$ y $T^* = -T$. Por tanto T tiene rango igual a la dimensión Hilbertiana de X. Como $T^* = -T$ el Lema 2.1.12, nos asegura que es una derivación en X, además, por el Lema 2.1.15, la aplicación, $\widetilde{T}$, dada por, $\widetilde{T}a = aT$ $(a \in BL(X,Y))$, es una derivación en $BL(X,Y)$. Si $\widetilde{T}$ fuese interna, el Lema 2.1.16, nos aseguraría que T tiene rango menor ó igual que la dimensión Hilbertiana de Y, lo que es una contradicción ya que $dim(X) > dim(Y)$. □

A partir de este Teorema y de la Proposición 2.1.2, obtenemos que el factor de Cartan complejo de Tipo 1 no cuadrado infinito dimensional y cualquier forma real suya, tiene siempre una derivación externa, es decir, no posee la propiedad P.D.I.

Corolario 2.1.18 *El factor de Cartan complejo de Tipo 1 no cuadrado e infinito dimensional y todas sus formas reales, poseen derivaciones externas, y por tanto, no verifican la propiedad P.D.I.*

Nota: T. Ho, [30, Section 2.2], enunció que todo factor de Cartan complejo de Tipo 1 no cuadrado con $\aleph_0 = dim(H) > dim(K)$ admite derivaciones externas. La pretendida prueba de este resultado utilizaba la existencia de "rectangular grids" en tales factores. Sin embargo, en la demostración aparecen errores de cálculo en la computación de los triples productos entre elementos del "grid" (véase [30, pág. 32, (2.10)]). Estos errores de cálculo fueron subsanados en [44, pág. 71-72]. Finalmente, debemos comentar que los mencionados errores de cálculo fueron trasladados al caso de dimensión no numerable, por lo que no se podía afirmar que $BL(H,K)$, con $dim(H) > \aleph_0$ y $dim(H) > dim(K)$, admita derivaciones externas.

2.2 Aproximación por Derivaciones Internas

A la luz de los resultados de la sección anterior, sabemos que existen JB*-triples reales y complejos que no poseen la propiedad P.D.I., es decir, no todas sus derivaciones son internas (ver Teorema 2.1.11 y Corolario 2.1.18). De este modo, es natural plantearse la posibilidad de aproximar, en una conveniente topología, cada derivación en un JB*-triple, mediante derivaciones internas. En vista de que el límite puntual de una sucesión de derivaciones es una derivación y de que, para el caso de JB-álgebras, Upmeier [56, Teorema 4.2] tiene probado que toda derivación puede ser aproximada por una derivación interna en la topología de la convergencia puntual, es decir, en la topología fuerte de operadores, uno está animado a trasladar esta propiedad de las derivaciones en JB-álgebras al caso de los JB*-triples reales ó complejos.

El lector puede preguntarse si cabe esperar este mismo resultado para la topología de la norma. La respuesta es no. En efecto: Upmeier, [56, pág. 18], tiene probado la existencia de JB-álgebras (unitales), tales que, el conjunto de las derivaciones internas no es norma denso en el conjunto de todas las derivaciones. Sea pués X una tal álgebra con unidad u, sea $\widehat{X}$ el JB*-triple

$X + iX$, obtenido vía la complexificación de X y sea D una derivación en X, que no pertenezca al cierre en norma de las derivaciones internas de X. La extensión natural de D a $\widehat{X}$, que notaremos por $\widehat{D}$, conserva la involución y es por tanto una derivación en $\widehat{X}$ como JB*-triple (ver Lema 2.1.6).

Supongamos que para cada ε mayor que cero, existe δ una derivación interna en $\widehat{X}$ tal que

$$\left\|\widehat{D} - \delta\right\| < \varepsilon.$$

Según ya conocemos (Lema 2.1.6), si

$$\delta = \sum_{j=1}^{p} \delta(e_j, f_j)$$

con e_j, f_j en la JB*-álgebra $\widehat{X}$, entonces

$$\delta - L_{\delta(u)} = \sum_{j=1}^{p} \delta(e_j, f_j) - L_{\delta(e_j,f_j)(u)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}[L_{a_j}, L_{c_j}] + [L_{b_j}, L_{d_j}]$$

donde

$$e_j = \frac{a_j + ib_j}{2},$$

$$f_j = \frac{c_j + id_j}{2}$$

con a_j, b_j, c_j, d_j en X. Por consiguiente $\delta - L_{\delta(u)}$ es una derivación interna en X tal que

$$\left\|D - (\delta - L_{\delta(u)})\right\| = \left\|D - L_{D(u)} - (\delta - L_{\delta(u)})\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\widehat{D} - \delta\right\| + \left\|L_{D(u)} - L_{\delta(u)}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\widehat{D} - \delta\right\| + \left\|L_{D(u)-\delta(u)}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\widehat{D} - \delta\right\| + \left\|(\widehat{D} - \delta)(u)\right\| \leq 2\varepsilon$$

lo que es una contradicción, ya que D no pertenece al cierre en norma de las derivaciones internas de X.

Tenemos por tanto que $\widehat{D}$ es una derivación en el JB*-triple complejo $\widehat{X}$, no aproximable, en la topología de la norma, mediante derivaciones internas.

Por otra parte, ya que D es la restricción de $\widehat{D}$ a X, se tiene que D es una derivación del JB*-triple real X. Si D fuese aproximable por internas en X, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existiría

$$\delta = \sum_{j=1}^{P} \delta(e_j, f_j)$$

con $e_j, f_j \in X$ tal que $\|D - \delta\| \leq \varepsilon$. En este caso,

$$\delta = \sum_{j=1}^{P} \delta(e_j, f_j),$$

es una derivación interna en $\widehat{X}$ perfectamente definida y

$$\|(\widehat{D} - \delta)\| \leq 2\varepsilon.$$

Hecho que implicaría que $\widehat{D}$ es aproximable, en la topología de la norma, mediante derivaciones internas en $\widehat{X}$, afirmación que es totalmente imposible como hemos visto.

Una vez descartada la topología de la norma de operadores para "aproximar" derivaciones mediante derivaciones internas, nuestro objetivo es establecer que en todo JB*-triple complejo ó real, el conjunto de todas las derivaciones coincide con el cierre, en la topología fuerte de operadores, del conjunto de todas las derivaciones internas.

Como ya conocemos, el cierre de las derivaciones internas en U en la topología fuerte de operadores está contenido en el conjunto de las derivaciones en U. El caso en el que se verifica la otra inclusión dá lugar a la siguiente definición.

Definición 2.2.1 *Diremos que un JB*-triple real ó complejo, U, tiene la* ***propiedad de aproximación por internas****, ó simplemente que tiene la propiedad* ***P.A.I.****, si el cierre, en la topología fuerte de operadores, de las derivaciones internas en U coincide con el conjunto de las derivaciones en U.*

En el caso complejo, Barton y Friedman [5, Theorem 4.6], tienen probado que todo JB*-triple complejo verifica la propiedad P.A.I. A partir de este resultado, nosotros vamos a demostrar que todo JB*-triple real también verifica la propiedad P.A.I.

Teorema 2.2.2 *Todo JB*-triple real ó complejo verifica la propiedad P.A.I.*

Demostración.- El caso de un JB*-triple complejo está demostrado en [5, Theorem 4.6]. Sea pues, E, un JB*-triple real y sea δ una derivación en E. Consideramos

$$\widehat{\delta} : \widehat{E} \to \widehat{E}$$

$$\widehat{\delta}(x+iy) := \delta(x) + i\delta(y)$$

la derivación en la complexificación $\widehat{E}$, de E, que extiende a δ (ver Nota 2.0.5). Como $\widehat{E}$ es un JB*-triple complejo (verifica la propiedad PAI), tenemos que para cada $x_1, \ldots, x_n \in E \subset \widehat{E}$ y para cada $\varepsilon > 0$, existe una derivación interna δ_1 en $\widehat{E}$, tal que

$$\delta_1 = \sum_{j=1}^{P} \delta(a_j, b_j)$$

y $\|\widehat{\delta}(x_l) - \delta_1(x_l)\| \leq \varepsilon$ para todo $l : 1, \ldots, n$.

Cada elemento $a_j, b_j \in \widehat{E}$ se puede expresar $a_j = a_{j,1} + ia_{j,2}$ y $b_j = b_{j,1} + ib_{j,2}$, donde cada $a_{j,k}$ y cada $b_{j,k}$ son elementos de E. Ahora es fácil ver que

$$\delta_1(x_l) = \sum_{j=1}^{P} (\delta(a_{j,1}, b_{j,1}) + \delta(a_{j,2}, b_{j,2}) +$$

$$+ i(L(a_{j,2}, b_{j,1}) + L(b_{j,1}, a_{j,2}) - L(a_{j,1}, b_{j,2}) - L(b_{j,2}, a_{j,1})))x_l.$$

Como $a_{j,k}, b_{j,k}$ y x_l son elementos de E, es evidente que

$$\sum_{j=1}^{P} i(L(a_{j,2}, b_{j,1}) + L(b_{j,1}, a_{j,2}) - L(a_{j,1}, b_{j,2}) - L(b_{j,2}, a_{j,1}))x_l \in i\,E.$$

En consecuencia

$$\|\delta(x_l) - \sum_{j=1}^{P} (\delta(a_{j,1}, b_{j,1}) + \delta(a_{j,2}, b_{j,2}))(x_l)\| \leq$$

$$\leq \|\delta(x_l) - \sum_{j=1}^{P} (\delta(a_{j,1}, b_{j,1}) + \delta(a_{j,2}, b_{j,2}))(x_l) -$$

$$-i \sum_{j=1}^{P} (L(a_{j,2}, b_{j,1}) + L(b_{j,1}, a_{j,2}) - L(a_{j,1}, b_{j,2}) - L(b_{j,2}, a_{j,1}))(x_l)\| =$$

$$= \|\widehat{\delta}(x_l) - \sum_{j=1}^{P} (\delta(a_{j,1}, b_{j,1}) + \delta(a_{j,2}, b_{j,2}) +$$

$$+i(L(a_{j,2}, b_{j,1}) + L(b_{j,1}, a_{j,2}) - L(a_{j,1}, b_{j,2}) - L(b_{j,2}, a_{j,1})))\, x_l\| =$$

$$= \|\widehat{\delta}(x_l) - \delta_1(x_l)\| \leq \varepsilon$$

para todo $l : 1, \ldots, n$. Ya que $\sum_{j=1}^{P}(\delta(a_{j,1}, b_{j,1}) + \delta(a_{j,2}, b_{j,2}))$ es una derivación interna en E, tenemos probado el teorema. □

Capítulo 3

JB*-Triples Duales

Este capítulo está dedicado al estudio de aquellos JB*-triples reales que además son espacios de Banach duales.

En el caso de JB*-triples complejos, Barton y Timoney [6], probaron que todo JB*-triple, $\mathcal{E}$, que además sea un espacio de Banach dual, tiene un único predual, que notaremos por $\mathcal{E}_*$. Además, el triple producto en $\mathcal{E}$ es separadamente $\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$- continuo. Los JB*-triples complejos que son espacios de Banach duales reciben el nombre de **JBW*-triples complejos** ó simplemente **JBW*-triples**.

Los **JBW*-triples reales** fueron originariamente introducidos como formas reales de JBW*-triples complejos por Isidro, Kaup y Rodríguez [33]. Estos mismos autores caracterizaron los JBW*-triples reales (ver [33, Theorem 4.4]) en los términos siguientes.

Teorema 3.0.3 *Sea E un JB*-triple real. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes,*

1. *E es un JBW*-triple real.*
2. *E es un subtriple real débil*-cerrado de algún JBW*-triple complejo.*
3. *E posee un predual, E_*, para el cual el producto triple en E es separadamente $\sigma(E, E_*)$-continuo.*

A la luz de este resultado, y especialmente a partir de la última de las caracterizaciones inmersas en el mismo, surge el problema de demostrar si la débil*-continuidad separada del producto triple es automática para cualquier JB*-triple real, que además sea espacio de Banach dual. Por otra parte, dado un JB*-triple real E, que sea espacio de Banach dual, es natural preguntarse si E tiene un único predual.

La respuesta afirmativa a la débil*-continuidad separada del producto triple nos diría que, los JBW*-triples reales son exactamente los JB*-triples reales que son espacios de Banach duales. Este problema ha aparecido enunciado en algunos trabajos de investigación recientes como [33] ó [11]. En este capítulo nosotros probamos la unicidad del predual y la débil*-continuidad separada del producto triple en aquellos JB*-triples reales que son espacios de Banach duales.

Nuestra prueba de la débil*-continuidad separada del producto triple, se apoya en técnicas distintas a las utilizadas por Barton y Timoney para el caso complejo. En consecuencia, ya que todo JBW*-triple puede ser visto como JB*-triple real (el cual es un espacio de Banach dual), nosotros reencontramos el mencionado resultado de Barton y Timoney.

Para comenzar vamos a estudiar la relación existente entre el dual de un JB*-triple real E y el dual de su complexificación $\widehat{E}$. Supongamos que E es un JB*-triple real, denotemos por $\widehat{E}$ a su complexificación y por τ a la conjugación canónica en $\widehat{E}$ que verifica que $E = \widehat{E}^{\tau} = \{x \in \widehat{E} : \tau(x) = x\}$. Mediante τ, podemos definir una conjugación en el dual de $\widehat{E}$ de la siguiente manera:

$$\tau^* : \widehat{E}^* \to \widehat{E}^*$$

$$\tau^*(f)(x) := \overline{f(\tau(x))} \quad (x \in \widehat{E}).$$

Es fácil comprobar que τ^* es una aplicación conjugado lineal, isométrica e involutiva, puesto que τ también lo es. Lo interesante de esta nueva conjugación es que nos permite identificar el dual de E, con los elementos τ^*-simétricos de $\widehat{E}^*$, mediante la siguiente biyección isométrica;

$$(\widehat{E}^*)^{\tau^*} := \{f \in \widehat{E}^* : \tau^*(f) = f\} \to E^*$$

$$f \mapsto f|_E$$

En efecto: Si $f \in (\widehat{E}^*)^{\tau^*}$ y $x \in E = \widehat{E}^{\tau}$, entonces $f(x) = \overline{f(\tau(x))} = \overline{f(x)}$ y en consecuencia, $f(x) \in \mathbb{R}$. Por tanto la aplicación está bien definida y es biyectiva de manera evidente. Para comprobar que es isométrica hacemos lo siguiente. Sea $f \in (\widehat{E}^*)^{\tau^*}$ y $\varepsilon > 0$, sabemos que existe un elemento $z \in \widehat{E}$ de norma menor ó igual a uno tal que $|f(z)| \geq \|f\| - \varepsilon$. Ahora tomamos un complejo de módulo uno, $e^{i\theta}$, tal que $e^{i\theta} f(z) \in \mathbb{R}^+$. Por la linealidad de f,

$$f(e^{i\theta} z) = f(x + iy) \geq \|f\| - \varepsilon,$$

donde hemos identificado $e^{i\theta} z = x + iy$ para ciertos $x, y \in E$. Además sabemos que $f(E) \subseteq \mathbb{R}$ y por tanto

$$f(x) \geq \|f\| - \varepsilon.$$

Como $x = \frac{1}{2}(Id + \tau)(e^{i\theta}z) \in E$, podemos asegurar que x tiene norma menor o igual que uno. Hecho que nos demuestra que $\|f\| = \|f|_E\|$.

Desde ahora en adelante, dado un JB*-triple real E, identificaremos los elementos del dual de E, con los elementos del dual de su complexificación que son τ^* simétricos.

3.1 Unicidad del Predual

Comenzamos esta sección probando que el dual de todo JB*-triple real está "bien enmarcado". Como consecuencia, obtenemos la unicidad del predual de aquellos JB*-triples reales que además son espacios de Banach duales. Para tales JB*-triples, obtenemos también una serie de resultados técnicos que serán usados en la prueba de la débil*-continuidad separada del producto triple.

Si X es un espacio de Banach y S es un subconjunto de X, entonces notaremos mediante X^* al dual de X y mediante S° al polar de S en X^*. Si además X es un espacio de Banach dual, X_* denotará un predual de X y si $S \subseteq X$, $S_\circ$ denotará al prepolar de S en X_*. Vamos a notar mediante $J : X \to X^{**}$ a la inclusión canónica de X en su bidual, y si $S \subseteq X$, $\widetilde{S}$ denotará el cierre en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ de $J(S)$.

Finalmente, si X es un espacio de Banach complejo, X puede ser considerado como espacio de Banach real de manera evidente. En este caso vamos a denotar mediante $X_{\mathbb{R}}$ al espacio de Banach X considerado como real.

Recordamos que si Y es un subespacio débil*-cerrado de un espacio de Banach dual X, entonces Y es un espacio de Banach dual y uno de sus preduales es $X_*/Y_\circ$. Además las topologías $\sigma(Y, Y_*)$ y $\sigma(X, X_*)|_Y$ son la misma sobre Y.

Una vez introducidas estas notaciones, vamos a presentar algunas nociones básicas acerca de la propiedad "well framed" ó "buena enmarcación" para espacios de Banach.

Definición 3.1.1 *Si X es un espacio de Banach sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, se define $\mathcal{B}(X)$ como el conjunto de todos los funcionales $\varphi \in X^{***}$ tales que para cada subconjunto convexo, cerrado y no vacío $C \subseteq X$, la aplicación*

$$\varphi|_{\widetilde{C}} : (\widetilde{C}, \sigma(X^{**}, X^*)) \to \mathbb{K}$$

tiene al menos un punto de continuidad en $\widetilde{C}$.

Para este espacio de Banach X, se define su ***"universal frame"*** *ó* ***"marco universal"*** *mediante*

$$\gamma(X) := (\mathcal{B}(X) \cap J(X)^\circ)_\circ.$$

*X se dice **"well framed"** ó **"bien enmarcado"** cuando $\gamma(X) = X$.*

Referimos al trabajo de Godefroy [26], como referencia básica para una presentación detallada de la propiedad de la "buena enmarcación" en espacios de Banach, así como para la prueba de los dos primeros apartados del siguiente lema. La demostración del tercer apartado del lema se puede encontrar en [34, Lemma 1.4].

Lema 3.1.2 *Sea X un espacio de Banach real ó complejo, entonces*

1. *Si X está bien enmarcado, entonces X es el único predual de X^*. Además toda biyección isométrica en X^* es débil*-continua.*

2. *Si X está bien enmarcado, también está bien enmarcado cualquier subespacio cerrado de X.*

3. *Si X es un espacio de Banach complejo que está bien enmarcado, entonces $X_{\mathbb{R}}$ también está bien enmarcado.*

Volviendo a los JB*-triples, Barton y Timoney tienen probado [6, Theorem 2.1], que el dual de todo JB*-triple complejo está bien enmarcado. Nosotros vamos a demostrar que este resultado sigue siendo cierto para JB*-triples reales.

Lema 3.1.3 *El dual de todo JB*-triple real está bien enmarcado.*

Demostración.- Sea E un JB*-triple real, según hemos visto al principio de este capítulo, el dual de E puede ser identificado como una forma real del dual de $\widehat{E}$,

$$E^* = (\widehat{E}^*)^{\tau^*} := \{f \in \widehat{E}^* : \tau^*(f) = f\}$$

donde $\tau^*(f)(x) = \overline{f(\tau(x))}$ y τ es la conjugación canónica en $\widehat{E}$. Por tanto E^* es un subespacio real cerrado de $\widehat{E}^*$. Ya que $\widehat{E}$ es un JB*-triple complejo, $\widehat{E}^*$ está bien enmarcado [6, Theorem 2.1]. Ahora usando el Lema 3.1.2 [apartados 3. y 2.] obtenemos lo que queríamos probar. □

Como consecuencia de este primer resultado técnico obtenemos que todo JB*-triple real que además es un espacio de Banach dual posee un único predual.

Proposición 3.1.4 *Sea E un JB*-triple real, supongamos que E es además un espacio de Banach dual. Entonces,*

1. *E tiene un único predual E_*. Además toda biyección isomé-trica en E es $\sigma(E, E_*)$-continua.*

2. *El operador $\delta(a, b) := L(a, b) - L(b, a)$ es $\sigma(E, E_*)$-continuo para cualesquiera $a, b \in E$.*

Demostración.-
1. Notemos por E_* a un predual de E. Por el Lemma 3.1.3, E^* está bien enmarcado. Como E_* es un subespacio cerrado de E^*, el Lemma 3.1.2 [apartados 1 y 2] nos asegura la primera afirmación.

2. Es conocido (ver Proposición 1.2.2) que, para cualesquiera $a, b \in E$, $\exp(t\ \delta(a, b))$ es una biyección isométrica para todo t real. En consecuencia, $\exp(t\ \delta(a, b))$ es $\sigma(E, E_*)$-continua por el primer apartado de esta Proposición. Ahora bien, el operador

$$\delta(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(t\ \delta(a, b)) - Id}{t}$$

es límite, en la topología de la norma de operadores de una red de operadores débil*-continuos, por tanto es $\sigma(E, E_*)$-continuo, ya que, el conjunto de todos los operadores débil*-continuos es norma cerrado en el espacio de los operadores lineales acotados. □

Desde ahora en adelante, llamaremos **JB*-triple real dual**, a cualquier JB*-triple real que además sea un espacio de Banach dual. Dado un JB*-triple real dual E, vamos a notar por w^* a la topología $\sigma(E, E_*)$ en E.

A continuación damos alguna consecuencia de la Proposición 3.1.4 dedicando un tiempo al estudio de algunas biyecciones isométricas especiales en JB*-triples reales duales. Gracias a este estudio, vamos a demostrar que las aplicaciones que se obtienen fijando un mismo tripotente en dos de las variables del triple producto, son todas w^*-continuas.

Proposición 3.1.5 *Sea E un JB*-triple real dual y sea e un elemento tripotente en E. Entonces las proyecciones de Peirce $P_k(e)$ ($k : 0, 1, 2$), $L(e, e)$ y $Q(e)$ son operadores w^*-continuos en E. En particular, los subespacios $E_k(e)$ son JB*-triples reales duales.*

Demostración.- Es claro que, como e es un tripotente de E también lo es de su complexificación $\widehat{E}$. Además las proyecciones de Peirce, $P_k(e)$, en E no son otra cosa que las restricciones a E de las respectivas proyecciones de Peirce sobre $\widehat{E}$.

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos

$$S_\lambda := S_\lambda(e) = \sum_{k=0}^{2} \lambda^k P_k(e).$$

Es conocido, [23, Lemma 1.1], que S_λ es un automorfismo isométrico de $\widehat{E}$ para cada $|\lambda| = 1$. En consecuencia, $S_{\pm 1}$ son isometrías biyectivas en E y por tanto w^*-continuas, por la Proposición 3.1.4. Ahora bien, $P_1(e)$ y $P_2(e) + P_0(e)$ se pueden expresar como combinaciones lineales de $S_{\pm 1}$:

$$P_1(e) = \frac{1}{2}(S_1(e) - S_{-1}(e)) \text{ y}$$

$$P_2(e) + P_0(e) = \frac{1}{2}(S_1(e) + S_{-1}(e)),$$

lo que nos asegura que son w^*-continuas y que además $E_1(e)$ y $E_2(e) \oplus E_0(e)$ son subtriples w^*-cerrados. Pero S_i y $P_0(e) - P_2(e)$ tienen exactamente la misma restricción sobre $E_2(e) \oplus E_0(e)$, lo que implica que $P_0(e) - P_2(e)$ es una biyección isométrica sobre $E_0(e) \oplus E_2(e)$ y por tanto es w^*-continua. En consecuencia, $P_0(e)$, $P_2(e)$ y $L(e,e) = P_2(e) + \frac{1}{2}P_1(e)$ son w^*-continuos. Finalmente, $Q(e)$ es una biyección isométrica al restringirla a $E_2(e)$ y por tanto es w^*-continua en $E_2(e)$. Usando la aritmética de Peirce, tenemos que $Q(e) = Q(e)P_2(e)$ es w^*-continua. $\square$

Para terminar esta sección vamos a demostrar dos resultados técnicos que utilizaremos en la sección siguiente.

La demostración del Lema que sigue a continuación está inspirada en una serie de resultados que, en el caso de JB*-triples complejos, tienen establecidos Friedman y Russo [23, Lemma 1.3, Lemma 1.4 y Proposition 1].

Lema 3.1.6 *Sea E un JB*-triple real, sea f perteneciente a E^* y sea e un elemento tripotente en E tal que $\|fP_2(e)\| = \|f\|$. Entonces $f = fP_2(e)$.*

Demostración.- Como e es un tripotente de E también lo es de su complexificación $\widehat{E}$. Friedman y Russo [23, Corollary 1.2] tienen probado que las proyecciones de Peirce en $\widehat{E}$ son contractivas. En consecuencia, ya que las proyecciones de Peirce $P_k(e)$ en E no son otra cosa que las restricciones a E de las respectivas proyecciones de Peirce sobre $\widehat{E}$, es claro que las proyecciones de Peirce en E son también contractivas.

Demostremos ahora que

$$\|P_2(e)(x) + P_0(e)(x)\| = max\{\|P_2(e)(x)\|, \|P_0(e)(x)\|\}$$

para todo $x \in E$.

Ya que, para $j : 0, 2$, $P_j(e)\ (P_0(e) + P_2(e)) = P_j(e)$, es claro que, por la contractividad de las proyecciones de Peirce, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|P_2(e)(x) + P_0(e)(x)\| \geq max\{\|P_2(e)(x)\|, \|P_0(e)(x)\|\}.$$

Para demostrar la otra desigualdad, supongamos que

$$max\{\|P_2(e)(x)\|, \|P_0(e)(x)\|\} = 1,$$

y notemos por $x^1 := x$, $x^3 := \{x, x, x\}$,

$$x^{3^n} := \left\{x^{3^{n-1}}, x^{3^{n-1}}, x^{3^{n-1}}\right\}.$$

Teniendo en cuenta la propiedad $\|a^3\| = \|a\|^3$, para todo $a \in E$ y usando la aritmética de Peirce, es fácil ver que

$$\|P_2(e)(x) + P_0(e)(x)\| = \|(P_2(e)(x) + P_0(e)(x))^{3^n}\|^{3^{-n}} =$$
$$= \|(P_2(e)(x))^{3^n} + (P_0(e)(x))^{3^n}\|^{3^{-n}} \leq (2)^{3^{-n}} \to 1,$$

lo que prueba lo que queríamos.

Como consecuencia, es fácil ver que

$$\|fP_2(e) + fP_0(e)\| = \|fP_2(e)\| + \|fP_0(e)\|$$

y por tanto $fP_0(e) = 0$.

De este modo, solo nos resta probar que $fP_1(e) = 0$. Para tal fin, tomemos $x \in E_2(e) \cup E_0(e)$, $y \in E_1(e)$ y $t \in \mathbb{R}$. Usando la aritmética de Peirce y mediante inducción no es difícil probar que

$$(x + ty)^{3^n} = x^{3^n} + t2^n L(x^{3^{n-1}}, x^{3^{n-1}}) \dots L(x^3, x^3)L(x, x)y + O(|t|^2) \quad (*)$$

Supongamos ahora que $\|f\| = 1$ y que $y \in E_1(e)$ es tal que $f(y) \geq 0$ y $\|y\| \leq 1$. Ya que $\|f\| = \|fP_2(e)\|$, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $x \in E_2(e)$ tal que $\|x\| = 1$ y $f(x) \geq 1 - \varepsilon$. De este modo, para cada $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|x + ty\| \geq f(x + ty) = f(x) + tf(y) \geq 1 - \varepsilon + tf(y).$$

Ahora usando la fórmula $(*)$, tenemos que

$$(1 - \varepsilon + tf(y))^{3^n} \leq \|x + ty\|^{3^n} = \|(x + ty)^{3^n}\| \leq$$
$$\leq \|x^{3^n}\| + t2^n\|y\| + O(|t|^2).$$

De donde obtenemos que

$$(1 - \varepsilon)^{3^n} + 3^n tf(y)(1 - \varepsilon)^{3^n - 1} + O(|t|^2) \leq 1 + t2^n\|y\| + O(|t|^2),$$

y por tanto, haciendo tender ε a cero y dividiendo por $|t|$ tenemos que

$$f(y) + O(|t|) \leq (\frac{2}{3})^n\|y\| + O(|t|).$$

Finalmente haciendo tender t a cero y n a infinito obtenemos que $f(y) = 0$. Hecho que prueba que $fP_1(e) = 0$. □

Nota 3.1.7 *Según hemos visto en el lema anterior, dado un tripotente e en un JB*-triple real o complejo U, las proyecciones de Peirce son contractivas y para todo $x \in U$, se satisface la siguiente identidad:*

$$\|P_2(e)(x) + P_0(e)(x)\| = max\{\|P_2(e)(x)\|, \|P_0(e)(x)\|\}.$$

Además como

$$P^1(e) := \frac{1}{2}(Id_U + Q(e))P_2(e) \text{ y}$$
$$P^{-1}(e) := \frac{1}{2}(Id_U - Q(e))P_2(e),$$

podemos asegurar que también $P^1(e)$ y $P^{-1}(e)$ son proyecciones contractivas.

La siguiente proposición nos dice que si E es un JB*-triple real dual y f es un elemento de su predual, entonces existe un elemento tripotente en E que hace cierta la tesis del lema anterior.

Proposición 3.1.8 *Si E es un JB*-triple real dual y f es un elemento en su predual, entonces existe un tripotente e en E tal que $f = fP_2(e)$.*

Demostración.- Supongamos que $\|f\| = 1$. Por el Teorema de Banach-Alaoglu, el conjunto

$$S = \{x \in E : f(x) = \|x\| = 1\}$$

es no vacío, convexo y w^*-compacto. Por tanto, usando el Teorema de Kreim-Milman, existe $e \in S$, punto extremo de la bola unidad de E, que como ya conocemos (ver, si acaso, página 14) es un tripotente de E. Ahora, para terminar la prueba, solo nos resta comprobar que estamos en condiciones de aplicar el Lema anterior.□

El último resultado técnico que vamos a enunciar caracteriza la convergencia en la topología w^* en JB*-triples reales duales.

Proposición 3.1.9 *Para todo JB*-triple real dual E, se verifica que, una red $\{x_\alpha\}$ converge a cero en la topología w^* si y solo si $\{P_2(u)(x_\alpha)\}$ converge a cero con la topología w^* para cada tripotente u en E.*

Demostración.- ($\Rightarrow$) Por la Proposición 3.1.5, sabemos que $P_2(u)$ es w^*-continua para cada u tripotente de E y por tanto $\{P_2(u)(x_\alpha)\}$ converge a cero con la topología w^* para cada tripotente $u \in E$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $P_2(u)(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} 0$ para cada tripotente $u \in E$. Sea $f \in E_*$, en virtud de la proposición anterior, existe e tripotente en E tal que $f = fP_2(e)$. Ahora, ya que $P_2(e)(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} 0$, se tiene que $fP_2(u)(x_\alpha) = f(x_\alpha) \to 0$. □

3.2 Débil*-continuidad separada del Producto Triple

En la sección anterior hemos probado que, al igual que pasa con los JBW*-triples complejos, el predual de todo JB*-triple real dual es único. El objetivo fundamental de esta sección es probar la débil*-continuidad separada del producto triple, en el caso de JB*-triples reales duales. Para tal fin, vamos a ir demostrando ciertas aproximaciones en las que, de alguna manera, hemos incluido más hipótesis de las necesarias. La finalidad de dichas aproximaciones, no es otra que la de servir de herramienta en la demostración del Teorema Principal del capítulo.

El primer resultado que vamos a obtener nos asegura la w^*-continuidad separada del producto triple, en aquellos JB*-triples reales duales, que verifican que todo elemento se puede aproximar, en norma, por combinaciones lineales finitas de tripotentes ortogonales dos a dos.

Proposición 3.2.1 *Sea E un JB*-triple real dual. Supongamos que para cada elemento a de E y para cada $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de tripotentes ortogonales dos a dos $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $\|a - \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\| < \varepsilon$. Entonces el triple producto de E es separadamente w^*-continuo.*

Demostración.- Sea $a \in E$ y $\varepsilon \in (0,1)$. Por hipótesis, existen $e_1, \dots, e_n$ tripotentes ortogonales dos a dos y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|a - a_n\| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|a\|)}$$

donde $a_n := \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. En particular $\|a_n\| < \varepsilon + \|a\| < 1 + \|a\|$.

Como los tripotentes $\{e_1, \dots, e_n\}$ son ortogonales dos a dos $L(a_n, a_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 L(e_i, e_i)$. Por tanto, $L(a_n, a_n)$ es w^*-continuo ya que cada $L(e_i, e_i)$ es w^*-continuo, en virtud de la Proposición 3.1.5. Ahora bien, como

$$\|L(a,a) - L(a_n, a)\| = \|L(a - a_n, a)\| \leq$$

$$\leq \|a - a_n\| \, \|a\| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|a\|)}(1 + \|a\|)$$

y

$$\|L(a_n, a_n) - L(a_n, a)\| = \|L(a_n, a_n - a)\| \leq$$

$$\leq \|a - a_n\| \, \|a_n\| < \frac{\varepsilon}{2(1 + \|a\|)}(1 + \|a\|),$$

podemos afirmar que

$$\|L(a,a) - L(a_n,a_n)\| \leq \|L(a,a) - L(a_n,a)\| +$$

$$+ \|L(a_n,a_n) - L(a_n,a)\| < \varepsilon.$$

En consecuencia, hemos probado que $L(a,a)$ pertenece al cierre (en norma) del conjunto de los operadores w^*-continuos en E y por tanto es w^*-continuo, ya que dicho conjunto es norma cerrado. En particular, el operador $L(a,b)+L(b,a) = L(a+b,a+b) - L(a,a) - L(b,b)$ es también w^*-continuo para cualesquiera $a,b \in E$. Como $L(a,b) - L(b,a)$ es w^*-continuo (Proposición 3.1.4), obtenemos que el operador $L(a,b)$ es w^*-continuo para todo $a,b \in E$.

Para terminar la prueba, bastará demostrar la w^*-continuidad del operador $Q(a)$ ($a \in E$). A tal efecto, procedemos de la siguiente manera: Ya que para $i \neq j$, e_i y e_j son tripotentes ortogonales, tenemos que $e_i + e_j$ es de nuevo un tripotente, ello unido a la Proposición 3.1.5, nos asegura que $Q(e_i + e_j)$ es w^*-continuo. Como consecuencia tenemos que

$$Q(a_n,a_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j Q(e_i,e_j) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j (Q(e_i + e_j) - Q(e_i) - Q(e_j))$$

es un operador w^*-continuo.

Ahora, repitiendo el mismo proceso que hacíamos para $L(a,a)$, concluimos que $Q(a)$ está en el cierre en norma del conjunto de los operadores w^*-continuos en E y por tanto es w^*-continuo.

Finalmente, la igualdad

$$Q(a,b) = \frac{1}{2}(Q(a+b) - Q(a) - Q(b))$$

nos asegura que $Q(a,b)$ es w^*-continuo para cualesquiera $a,b \in E$, con lo que acabamos la demostración. □

Los elementos que son combinaciones lineales finitas de tripotentes ortogonales dos a dos son llamados **algebraicos**. En vista la demostración de la proposición anterior, podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2 *Sea E un JB^*-triple real dual. Supongamos que a y b son dos elementos de E aproximables en norma mediante elementos algebraicos, entonces los operadores $Q(a,b)$ y $L(a,b)$ son w^*-continuos.*

El objetivo ahora consiste en descubrir què elementos de un JB*-triple real dual podemos aproximar mediante elementos algebraicos.

Recordamos (ver Proposición 1.3.3) que si E es un JB*-triple real y $e \in E$ es un tripotente, entonces $E^1(e) = \{x \in E : Q(e)x = x\}$ es una JB-álgebra con producto $x \circ y := \{x, e, y\}$. Cuando además E es un JB*-triple real dual, podemos asegurar que todos los elementos de $E^1(e)$ se pueden aproximar, en norma, mediante combinaciones lineales finitas de tripotentes ortogonales dos a dos. De este modo, aplicando el Corolario anterior, obtendremos que $L(a,b)$ y $Q(a,b)$ son operadores w^*-continuos en E, para cualesquiera $a, b \in E^1(e)$.

Proposición 3.2.3 *Sea E un JB*-triple real dual y $e \in E$ un elemento tripotente. Entonces $L(a,b)$ y $Q(a,b)$ son operadores w^*-continuos para cualesquiera $a, b \in E^1(e)$.*

Demostración.- Como ya conocemos $E^1(e)$ es una JB-álgebra. Además, la Proposición 3.1.5 asegura que el operador $Q(e)$ es w^*-continuo, por tanto $E^1(e)$ es un subespacio w^*-cerrado de E y en consecuencia, $E^1(e)$ es una JBW-álgebra.

Ahora, utilizando que para cada $a \in E^1(e)$ la subálgebra w^*-cerrada de $E^1(e)$ generada por a, $W(a)$, es un álgebra de von Neumann conmutativa real (ver [28, Lemma 4.1.11]) y que por [28, Proposition 4.2.3], para cada $\varepsilon > 0$, existe una familia finita de idempotentes (de hecho tripotentes), ortogonales dos a dos, $e_1, \ldots, e_n$ en $W(a)$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|a - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\| < \varepsilon,$$

tenemos que cada elemento de $E^1(e)$ es aproximable en norma por elementos algebraicos. Hecho que unido al Corolario 3.2.2, nos permite concluir la prueba. □

Nuestro próximo objetivo va a consistir en probar que, para cualquier JB*-triple real dual que posea un elemento unitario, se tiene asegurada la w^*-continuidad separada del producto triple.

Proposición 3.2.4 *Sea E un JB*-triple real dual. Supongamos que E tiene un elemento unitario, u, entonces el triple producto de E es separadamente w^*-continuo.*

Demostración.- Como u es un elemento unitario de E, tenemos que

$$E = E_2(u) = E^1(u) \oplus E^{-1}(u).$$

Es fácil ver que u es también un elemento unitario en la complexificación, $\widehat{E}$, de E. Por tanto $\widehat{E}$ es una JB*-álgebra unital, con producto $x \circ y := \{x, u, y\}$, involución $x^* := \{u, x, u\}$ y unidad u. Recordamos también, que el producto triple puede recuperarse a partir del producto de Jordan mediante la expresión $\{a, b, c\} = (a \circ b^*) \circ c - (a \circ c) \circ b^* + (c \circ b^*) \circ a$ (ver página 12).

Ahora si denotamos por M_a al operador $L(a, u)$, las identidades

$$L(a, b) = M_a M_{b^*} - M_{b^*} M_a + M_{a \circ b^*},$$

$$Q(a, b) = (M_a M_b + M_b M_a - M_{a \circ b}) Q(u)$$

para cualesquiera $a, b \in E$, implican que solo tenemos que demostrar la w^*- continuidad de cada M_a para obtener la w^*-continuidad separada del producto triple.

Supongamos en primer lugar que $a \in E^1(u)$, entonces $M_a = L(a, u)$ es w^*-continuo, en virtud de la Proposición 3.2.3.

Si $a \in E^{-1}(u)$, es decir, $Q(u)a = a^* = -a$, tenemos que M_a se puede expresar de la siguiente forma:

$$2M_a = L(a, u) - L(u, a).$$

Ahora basta aplicar la Proposición 3.1.4 para concluir que M_a es w^*-continuo. Finalmente, como $E = E^1(u) \oplus E^{-1}(u)$, la linealidad de la aplicación $a \mapsto M_a$, nos permite concluir la prueba. □

Nuestro último resultado parcial, antes de abordar el resultado general, asegura que si e es un tripotente en un JB*-triple real dual, entonces podemos asegurar la w^*-continuidad de los operadores resultantes al fijar dos elementos de $E_2(e)$ en el producto triple.

Proposición 3.2.5 *Sea E un JB*-triple real dual y e un tripotente de E. Entonces $L(a, b)$ y $Q(a, b)$ son operadores w^*-continuos para cualesquiera $a, b \in E_2(e)$.*

Demostración.- Es claro que $E_2(e)$ es un JB*-triple real dual con elemento unitario e, luego, por la Proposición 3.2.4, podemos asegurar que el producto triple en $E_2(e)$ es separadamente w^*-continuo. En consecuencia, el Teorema 3.0.3 nos asegura que $E_2(e)$ es un JBW*-triple real.

Ahora bien, es conocido (ver [33, prueba del Theorem 4.8]) que todo elemento de un JBW*-triple real puede ser aproximado en norma por elementos algebraicos, por tanto, el Corolario 3.2.2 nos da el resultado deseado. □

Una vez que hemos obtenido los resultados previos necesarios, nos disponemos a abordar el Teorema Principal del capítulo, probando la w^*-continuidad separada del producto triple en cualquier JB*-triple real dual.

Teorema 3.2.6 *El producto triple de cualquier JB*-triple real dual es separadamente w^*-continuo. En particular, todo JB*-triple real dual es un JBW*-triple real.*

Demostración.- Sea E un JB*-triple real dual. Vamos a comenzar la demostración probando que $L(a,b)$ es un operador w^*-continuo para cualesquiera $a, b \in E$.

Como ya hemos comentado en la página 14, tenemos asegurada la existencia de una gran cantidad de tripotentes completos en E. Sea pues $e \in E$ un elemento tripotente completo ($E_0(e) = 0$).

Para $a \in E_1(e)$ y $b \in E_2(e)$, usando la aritmética de Peirce, es fácil ver que

$$L(a,b) = L(a,b) P_2(e)$$

y que

$$L(b,a) = L(b,a) P_1(e).$$

Por el apartado 2 de la Proposición 3.1.4, sabemos que $L(a,b) - L(b,a)$ es un operador w^*-continuo. Como además la Proposición 3.1.5, nos asegura que las proyecciones de Peirce son también w^*-continuas, tenemos que

$$L(a,b) = L(a,b) P_2(e) - L(b,a) P_1(e) P_2(e) =$$

$$= (L(a,b) - L(b,a)) P_2(e)$$

y

$$L(b,a) = -(L(a,b) - L(b,a)) P_1(e)$$

son operadores w^*-continuos.

Hemos probado pues que para cualesquiera $a \in E_1(e)$, $b \in E_2(e)$, $L(a,b)$ y $L(b,a)$ son w^*-continuos. *(t.1)*

Tomemos ahora $a \in E$ y $b \in E_2(e)$, en este caso, utilizando la descomposición de Peirce, a puede ser expresado como suma de dos elementos, $a = a_1 + a_2$, donde $a_i \in E_i(e)$ $(i = 1, 2)$. Como

$$L(a,b) = L(a_1,b) + L(a_2,b)$$

$$L(b,a) = L(b,a_1) + L(b,a_2)$$

podemos concluir, usando *(t.1)* y la Proposición 3.2.5 que

$L(a,b)$ y $L(b,a)$ son operadores w^*-continuos,

para cualesquiera $a \in E$ y $b \in E_2(e)$ *(t.2)*

Sean $a, b \in E$, a partir de la identidad de Jordan, obtenemos la siguiente igualdad

$$L(a, L(e,e)b)(x) = \{a, \{e,e,b\}, x\} = \{a, \{b,e,e\}, x\} =$$

$$= -\{e,b,\{a,e,x\}\} + \{\{e,b,a\},e,x\} + \{a,e,\{e,b,x\}\} =$$

$$= (-L(e,b)L(a,e) + L(\{e,b,a\},e) + L(a,e)L(e,b))(x),$$

la cual, junto con *(t.2)*, nos asegura que

$L(a, L(e,e)b)$ es w^*-continuo, para cualesquiera $a, b \in E$. *(t.3)*

Si ahora expresamos $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ con $a_i, b_i \in E_i(e)$, obtenemos que

$$L(a, L(e,e)b) = L(a_1 + a_2, L(e,e)(b_1 + b_2)) = L(a_1 + a_2, \frac{1}{2}b_1 + b_2) =$$

$$= \frac{1}{2}L(a_1, b_1) + \frac{1}{2}L(a_2, b_1) + L(a_1, b_2) + L(a_2, b_2),$$

de donde

$$L(a_1, b_1) = 2(L(a, L(e,e)b) - \frac{1}{2}L(a_2, b_1) - L(a_1, b_2) - L(a_2, b_2))$$

es w^*-continuo, por lo probado en *(t.3)* y *(t.2)*. En consecuencia, hemos probamos que

$L(a_1, b_1)$ es w^*-continuo para cualesquiera $a_1, b_1 \in E_1(e)$. *(t.4)*

Finalmente, aplicando *(t.2)*, *(t.4)* y el hecho de que $L(.,.)$ es un operador bilineal, tenemos que

$L(a, b)$ es un operador w^*-continuo para cualesquiera $a, b \in E$. *(t.5)*

Para concluir la prueba, solo nos resta probar la w^*- continuidad de los operadores de la forma $Q(a, b)$. Para tal objetivo tomemos $a, b \in E$. Usando la identidad de Jordan, podemos expresar

$$Q(b)Q(a)(x) = \{b, \{a,x,a\}, b\} =$$

$$= -\{x,a,\{b,a,b\}\} + \{\{x,a,b\},a,b\} + \{b,a,\{x,a,b\}\} =$$

$$= (-L(\{b,a,b\},a) + L(b,a)L(b,a) + L(b,a)L(b,a))(x) =$$

$$= (-L(\{b,a,b\},a) + 2L(b,a)L(b,a))(x).$$

Ahora, la identidad anterior nos asegura, aplicando (t.5), que $Q(b)Q(a)$ es un operador w^*-continuo para cualesquiera $a, b \in E$. Una vez más, la Proposición 3.1.5, nos permite afirmar que

$$P_2(u)Q(a) = Q(u)Q(u)Q(a)$$

es un operador w^*-continuo para cada tripotente $u \in E$ y para cada $a \in E$. Ahora, aplicando la caracterización de la w^*-continuidad, obtenida en la Proposición 3.1.9, concluimos que $Q(a)$ es w^*-continuo para todo $a \in E$. Finalmente, la igualdad

$$Q(a, b) = \frac{1}{2}(Q(a+b) - Q(a) - Q(b)),$$

nos asegura la w^*-continuidad de $Q(a, b)$ para cualesquiera $a, b \in E$.□

Para concluir con este capítulo vamos a extraer algunas consecuencias del teorema anterior. Si se tiene en cuenta que todo JBW*-triple complejo puede ser visto como JB*-triple real dual, el Teorema 3.2.6 proporciona una nueva prueba del Teorema de Barton y Timoney.

Corolario 3.2.7 (Barton-Timoney) *El producto triple de cualquier JBW*-triple complejo es separadamente w^*-continuo.*

La segunda consecuencia nos proporciona una relación entre la estructura dual de un JB*-triple real y la estructura dual de su complexificación, que se obtiene directamente del Teorema principal y del Teorema 3.0.3.

Corolario 3.2.8 *Sea E un JB*-triple real. Entonces E es un JBW*-triple real si y solo si su complexificación, $\widehat{E}$, es un JBW*-triple complejo.*

Recordamos que toda JB*-algebra y toda JB-álgebra tiene estructura de JB*-triple real. Si además tienen unidad, el producto de Jordan queda determinado por el producto triple y la unidad como hemos visto. Por tanto, nuestro resultado también demuestra la conocida débil*-continuidad separada del producto de Jordan en JB y JB*-álgebras que sean espacios de Banach duales ([28, Section 4], [51]).

Corolario 3.2.9 *El producto de Jordan de cualquier JB-álgebra que además sea un espacio de Banach dual, es separadamente débil*-continuo.*

Como consecuencia final extraemos el siguiente resultado de C. M. Edwards (ver [19, Theorems 3.2 and 3.4]).

Corolario 3.2.10 *La complexificación de una JB-álgebra J es una JBW*-álgebra si y solo si J es una JBW-álgebra.*

Capítulo 4

Estudio del Predual

En este capítulo continuamos con el estudio de aquellos JB*-triples reales que son espacios de Banach duales, es decir, JBW*-triples reales. En el capítulo anterior vimos que tales JB*-triples reales tenían un único predual. Ahora nos proponemos estudiar la bola unidad del predual de cualquier JBW*-triple real, en orden a extraer relaciones entre propiedades geométricas de la misma y el conjunto de los elementos tripotentes de un tal JBW*-triple real.

Nuestro primer objetivo va a consistir en probar que cada tripotente minimal de un JBW*-triple real, E, es un funcional de soporte de un punto extremo de la bola unidad de su predual. Caracterizaremos los puntos extremos de la bola unidad del predual, como los elementos de la misma que toman el valor uno en algún tripotente minimal de E. Como consecuencia, obtendremos una correspondencia biyectiva, entre el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad del predual de E y el conjunto de los tripotentes minimales de E.

Utilizando estos resultados, junto con el hecho probado por Friedman y Russo, [24], que asegura que todo JBW*-triple complejo, $\mathcal{E}$, descompone en suma directa ortogonal de dos ideales w^*-cerrados, uno de los cuales está generado por todos los elementos tripotentes minimales de $\mathcal{E}$, mientras que el otro carece de dichos tripotentes; obtenemos un resultado análogo al de Friedman y Russo para JBW*-triples reales.

Finalmente, como consecuencia, casi inmediata, del resultado anterior, obtenemos un teorema de Gelfand-Naimark para JB*-triples reales. Concretamente, probamos que todo JB*-tiple real se puede embeber, de forma isométrica, en una ℓ_∞-suma de factores de Cartan reales y factores de Cartan complejos vistos como reales.

4.1 Orden en el conjunto de los tripotentes

Comenzamos esta sección introduciendo un orden dentro del conjunto de todos los elementos tripotentes de un JB*-triple real o complejo.

Definición 4.1.1 *Dado un JB*-triple real ó complejo U y dos elementos tripotentes u, v en U, decimos que u es* ***mayor que*** *v, y lo notamos por $u \geq v$, si $u - v$ es otro elemento tripotente de U que además es ortogonal a v.*

El siguiente lema, recoge una serie de caracterizaciones de la relación de orden parcial inducida en el conjunto de los tripotentes.

Lema 4.1.2 *Sea U un JB*-triple real o complejo, entonces la relación, $\leq$, definida anteriormente en $Tri(U)$, es una relación de orden parcial. Además, dados dos elementos u, v pertenecientes a $Tri(U)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

1. $u \geq v$,
2. $Q(u)v = Q(v)u = v$,
3. $U^1(v) \subseteq U^1(u)$ *y* $Q(v)u = v$

Demostración.- El comprobar que $\leq$ es una relación de orden parcial es inmediato. Probamos ahora las equivalencias.

($1 \Rightarrow 2$) $u \geq v$ si y solo si $u - v \in Tri(U)$ y $u - v \perp v$, en consecuencia, utilizando la caracterización de la ortogonalidad dada en el Lema 1.3.2, obtenemos:

$$\begin{aligned} Q(u)v = \{u, v, u\} &= \{u - v + v, v, u\} = \\ &= \{u - v, v, u\} + \{v, v, u - v + v\} = \\ &= \{v, v, u - v\} + \{v, v, v\} = v. \end{aligned}$$

Análogamente, se puede comprobar que $Q(v)u = v$.

($2 \Rightarrow 3$) Utilizando las hipótesis ($Q(u)v = Q(v)u = v$) junto con la identidad de Jordan, obtenemos:

$$L(v, v)u = \{v, v, u\} = \{v, \{v, u, v\}, u\} =$$

$$\begin{aligned} &= - \{u, v, \{v, v, u\}\} + \{\{u, v, v\}, v, u\} + \{v, v, \{u, v, u\}\} = \\ &= \{v, v, \{u, v, u\}\} = \{v, v, v\} = v, \end{aligned}$$

lo que nos dice que $u = v + u_0$, donde $u_0 \in U_0(v)$.

Tomemos ahora un elemento $x \in U^1(v)$ ($\Leftrightarrow Q(v)x = x$), utilizando la aritmética de Peirce, evaluamos $Q(u)$ en x.

$$Q(u)x = \{u, x, u\} = \{v + u_0, x, v + u_0\} = \{v, x, v\} = x.$$

Lo que equivale a que $x \in U^1(u)$.

($3 \Rightarrow 1$) Supongamos que $U^1(v) \subseteq U^1(u)$ y $Q(v)u = v$. Como $v \in U^1(v) \subseteq U^1(u)$, obtenemos la siguiente identidad

$$\begin{aligned}\{v, v, u\} &= \{v, \{v, u, v\}, u\} = \\ &= -\{u, v, \{v, v, u\}\} + \{\{u, v, v\}, v, u\} + \{v, v, \{u, v, u\}\} = \\ &= \{v, v, \{u, v, u\}\} = \{v, v, v\} = v.\end{aligned}$$

Finalmente, la igualdad anterior, unida al hecho de que $U^1(u) \subseteq U_2(u)$, nos permite calcular los siguientes triples productos

$$\begin{aligned}\{u - v, u - v, u - v\} &= \{u, u, u\} - \{u, u, v\} - \{u, v, u\} - \{v, u, u\} + \\ &+ \{v, v, u\} + \{v, u, v\} + \{u, v, v\} - \{v, v, v\} = \\ &= u - v - v - v + v + v + v - v = u - v, \\ \{v, v, u - v\} &= \{v, v, u\} - \{v, v, v\} = 0.\end{aligned}$$

Ello demuestra que $u - v \in Tri(U)$ y $u - v \perp v$, es decir, $u \geq v$. $\square$

Una vez visto que $\leq$ es una relación de orden parcial en el conjunto de los elementos tripotentes, nos disponemos a estudiar los elementos que son minimales para dicho orden. A tal efecto introducimos la siguiente definición.

Definición 4.1.3 *Decimos que un elemento tripotente u, no cero, es* ***simple*** *si es un elemento minimal para el orden $\leq$, es decir, u es tal que, para cualquier v en $Tri(U)$ con $0 \neq v \leq u$, se tiene que $u = v$. Notaremos por $SimpTri(U)$ al conjunto formado por todos los tripotentes simples de U.*

Recordamos que un tripotente no cero e, en un JB*-triple real o complejo U, se llama minimal si $U^1(e) = \mathbb{R}\, e$. Es ahora natural preguntarse en qué condiciones, los tripotentes minimales son exactamente los tripotentes simples. El siguiente corolario se deduce directamente del Lema 4.1.2, y muestra que todo tripotente minimal es un tripotente simple.

Corolario 4.1.4 *Dado un JB*-triple real ó complejo U, la aplicación*

$$Tri(U) \longrightarrow \{\textit{subespacios reales de } U\}$$

$$u \mapsto U^1(u)$$

es estrictamente monótona. En particular, si $U^1(u) = \mathbb{R}u$, entonces $u \in SimpTri(U)$.

Según acabamos de ver, todo tripotente minimal es simple. Sin embargo, según muestra el siguiente ejemplo, la afirmación recíproca no tiene por que ser cierta. Consideremos el espacio de Banach de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ con valores reales, $E = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$, con triple producto dado por

$$\{f,g,h\}(t) := f(t)\, g(t)\, h(t) \quad (t \in [0,1]).$$

Es claro que las funciones constantes igual a 1 y a -1, denotadas por f_1 y f_{-1}, son los únicos tripotentes en E y que además son tripotentes simples. Como en los dos casos $E^1(f_1) = E^1(f_{-1}) = F = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$, podemos asegurar que no son tripotentes minimales.

El anterior ejemplo nos muestra que el concepto de tripotente simple es más general que el concepto de tripotente minimal. No obstante, los tripotentes minimales y los tripotentes simples van a ser exactamente los mismos en el caso de JBW*-triples reales y complejos, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.1.5 *Dado un JBW*-triple real E y un tripotente e en E, entonces e es minimal si y solo si es simple. Además, en el caso en que e sea minimal, $E_2(e)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración.- En vista del corolario anterior, bastará probar que todo elemento simple es minimal.

Sea pues $e \in SimpTri(E)$. En primer lugar observamos que e no se puede expresar como suma de dos tripotentes ortogonales no cero. Demostramos ahora que $E^1(e) = \mathbb{R}\, e$. En caso contrario, existe $x \in E^1(e) \setminus \mathbb{R}e$. Es bien conocido, [28, Lemma 4.1.11], que el subtriple w^*-cerrado de E generado por $\{e,x\}$ es una W*-álgebra conmutativa real con unidad e, que notaremos por A. Por tanto, existe un espacio topológico compacto Hausdorff totalmente disconexo Ω y una isometría $\mathbb{R}$-lineal y sobreyectiva

$$\phi : C_{\mathbb{R}}(\Omega) \to A$$

tal que $\phi(fg) = \{\phi(f), e, \phi(g)\}$ y $\phi(\chi_\Omega) = e$.

Ya que $\phi^{-1}x \notin \mathbb{R}\chi_\Omega = \phi^{-1}\mathbb{R}e$, existe un subconjunto propio, abierto y no vacío S en Ω. Denotemos por g_1 y g_2 a las funciones características de S y $\Omega \setminus S$, respectivamente. Es claro que si notamos por e_1 y e_2 a las imágenes por ϕ de g_1 y g_2, respectivamente, obtenemos que e_1 y e_2 son dos tripotentes ortogonales no nulos en E tales que $e = \phi(\chi_\Omega) = \phi(g_1 + g_2) = e_1 + e_2$, lo cual contradice nuestra primera observación. En consecuencia $E^1(e) = \mathbb{R}e$.

Para probar que $E_2(e)$ es un espacio de Hilbert, no es necesario suponer que E tenga predual. Concretamente, si E es un JB*-triple real y $0 \neq e \in E$

es un tripotente minimal, entonces $E_2(e)$ es un JB*-triple real de categoría 1, según la terminología usada por Kaup en [38, pág. 196], es decir, el cardinal del mayor subconjunto, de elementos ortogonales dos a dos y no nulos, contenido en $E_2(e)$, es uno. En efecto: si u y v son dos tripotentes ortogonales en $E_2(e) = \mathbb{R}e \oplus E^{-1}(e)$, las igualdades $\{u, u, u\} = u$, $\{v, v, v\} = v$ y $\{u, u, v\} = \{v, v, u\} = 0$, fuerzan que o bien u, o bien v sea cero. Ahora podemos aplicar [38, Proposition 5.4] para concluir que $E_2(e)$ es un espacio de Hilbert real. □

Dado que, ni el concepto de tripotente minimal, ni el concepto de tripotente simple depende del cuerpo y ya que todo JBW*-triple complejo es un JBW*-tripe real, tenemos que la equivalencia dada por el teorema anterior se verifica también para JBW*-triples complejos.

4.2 Caracterización Geométrica

En 1988, Edwards y Rüttimann, [20], dieron una caracterización geométrica de los elementos tripotentes en el caso de JBW*-triples complejos. Concretamente, probaron que, dado un JBW*-triple complejo, $\mathcal{E}$, existe un isomorfismo, que preserva el orden, entre el conjunto de los elementos tripotentes de $\mathcal{E}$ y el conjunto formado por todas las caras norma cerradas de la bola unidad de su predual; dotando a este último con la relación de inclusión. Más aún, Edwards y Rüttimann probaron la existencia de un isomorfismo, que invierte el orden, entre el conjunto de los elementos tripotentes de $\mathcal{E}$ y el conjunto de todas las caras w^*-cerradas de la bola unidad de $\mathcal{E}$.

En esta sección, además de extender los resultados anteriormente mencionados al caso de JBW*-triples reales, damos una caracterización geométrica de los tripotentes minimales. Comenzamos con la introducción de los conceptos básicos que utilizaremos en la misma.

Dado un espacio de Banach real ó complejo X, con norma $\|.\|$, notaremos por $B(X)$ a su bola unidad. Dados dos subconjuntos $S \subset B(X)$ y $K \subset B(X^*)$, notaremos por

$$S' := \{f \in B(X^*) \ : \ f(x) = 1 \ \ (x \in S)\},$$

$$K_\prime := \{x \in B(X) \ : \ f(x) = 1 \ \ (f \in K)\}.$$

Definición 4.2.1 *Se dice que un subconjunto $F \subseteq B(X)$ es una* ***cara norma-semi-expuesta*** *de $B(X)$ si $F = K_\prime$, para algún $K \subset B(X^*)$.*

En el caso en que X tenga un único predual, X_*, se dice que F es una ***cara w^*-semi-expuesta*** *de $B(X)$ si $F = S'$ para algún subconjunto $S \subset B(X_*)$.*

Denotaremos por $\mathcal{S}_n(B(X))$ ($\mathcal{S}_{w^*}(B(X))$ respectivamente) al conjunto formado por todas las caras norma-semi-expuestas de $B(X)$ (todas las caras w^*-semi-expuestas de $B(X)$, respectivamente).

Tomando como punto de partida la conocida existencia de una aplicación biyectiva entre el conjunto de los elementos tripotentes y las caras w^*-semi-expuestas, probada en [33, Proposition 4.6], para el caso de un JBW*-triple real, el siguiente teorema extiende, al caso real, la versión obtenida por Edwards y Rüttimann, [20], para JBW*-triples complejos.

Teorema 4.2.2 *Sea E un JBW^*-triple real. Entonces la aplicación*

$$\Phi : Tri(E) \to \mathcal{S}_{w*}(B(E))$$

$$\Phi(e) := e + [B(E) \cap E_0(e)]$$

es un isomorfismo, que invierte el orden, cuando consideramos en $\mathcal{S}_{w*}(B(E))$ el orden dado por la inclusión. Además $\Phi(e) = (\{e\}_{\prime})'$ y la aplicación

$$\Phi_*(e) := \{e\}_{\prime} \qquad (e \in Tri(E))$$

es un isomorfismo sobreyectivo, que conserva el orden, entre el conjunto de los elementos tripotentes de E y el de las caras norma-semi-expuestas de la bola unidad de su predual.

Demostración.- Por [33, Proposition 4.6], sabemos que la aplicación Φ es una biyección. Con objeto de probar que Φ invierte el orden, tomamos $u, v \in Tri(E)$ con $0 \neq u \leq v$. Ya que en la complexificación, $\widehat{E}$, de E también se verifica que $0 \neq u \leq v$ y como $\widehat{E}$ es un JBW*-triple complejo (ver Corolario 3.2.8), podemos aplicar el resultado complejo, [20, Theorem 4.6], para asegurar que

$$\widehat{\Phi}(u) := u + (B(\widehat{E}) \cap \widehat{E}_0(u)) \supseteq \widehat{\Phi}(v) := v + (B(\widehat{E}) \cap \widehat{E}_0(v)). \quad (c.1)$$

Sea ahora $x \in E \cap \widehat{\Phi}(v)$, por tanto $x = v + y$ para algún $y \in B(\widehat{E}) \cap \widehat{E}_0(v)$. Ya que x y v son τ-simétricos, tenemos que

$$v + y = x = \tau(x) = \tau(v) + \tau(y) = v + \tau(y).$$

Igualdad que demuestra que $\tau(y) = y \in B(E) \cap E_0(v)$ y por consiguiente que $E \cap \widehat{\Phi}(v) \subseteq \Phi(v)$. Como trivialmente $E \cap \widehat{\Phi}(v) \supseteq \Phi(v)$, se tiene que

$E \cap \widehat{\Phi}(v) = \Phi(v)$. Igualdad que también se verifica substituyendo v por u. Ello unido a (c.1), asegura que, $\Phi(u) = E \cap \widehat{\Phi}(u) \supseteq E \cap \widehat{\Phi}(v) = \Phi(v)$.

Probamos ahora que Φ es un isomorfismo. Sean pues $u, v \in Tri(E)$, tales que $\Phi(v) \subseteq \Phi(u)$. Entonces tenemos que

$$v \in \Phi(v) \subseteq \Phi(u) = u + (B(E) \cap E_0(u)) .$$

En consecuencia $v = u + x$ para algún $x \in E_0(u)$, lo que nos da que $u \leq v$.

Nuestro próximo objetivo es probar que $\Phi(e) = (\{e\}_,)'$.

Dado un $e \in Tri(E)$, el conjunto $(\{e\}_,)'$ es la menor cara w*-semi-expuesta de $B(E)$ que contiene al tripotente e. Probamos ahora que $\Phi(e)$ está contenida en cualquier cara w^*-semi-expuesta que contenga a e. Si $e \in F \in \mathcal{S}_{w*}(B(E))$ entonces $F = \Phi(u)$, para conveniente $u \in Tri(E)$ y por tanto $e \in \Phi(u)$; de donde se sigue que $u \leq e$ y por tanto $\Phi(e) \subseteq \Phi(u) = F$.

Ahora procedemos a la prueba de la tesis concerniente a Φ_*.

Recordamos que, para cualquier espacio de Banach X que posea un único predual, tenemos que $S_, = ((S_,)')_,$ y $K' = ((K')_,)'$ para cada $S \subseteq B(X)$ y para cada $K \subseteq B(X_*)$. Por tanto, $\Phi(e) = (\{e\}_,)' = [\Phi_*(e)]'$ y en consecuencia $\Phi_*(e) = \{e\}_, = [(\{e\}_,)']_, = [\Phi(e)]_, \in \mathcal{S}_n(B(E_*))$, para cada $e \in Tri(E)$. Lo que prueba que Φ_* está bien definida.

Al objeto de ver que se respeta el orden, consideramos $u \leq v$ en $Tri(E)$. Según hemos visto, $\Phi(u) \supseteq \Phi(v)$ y por tanto $\Phi_*(u) = [\Phi(u)]_, \subseteq [\Phi(v)]_, = \Phi_*(v)$. Recíprocamente, si $\Phi_*(u) \subseteq \Phi_*(v)$, entonces $\Phi(u) = [\Phi_*(u)]' \supseteq [\Phi_*(v)]' = \Phi(v)$. Lo que implica que $u \leq v$.

Para concluir la prueba basta ver que el rango de Φ_* es exactamente todo $\mathcal{S}_n(B(E_*))$.

Sea $K \in \mathcal{S}_n(B(E_*))$ fijo pero arbitrario. Por definición $K = S_,$, para cierto $S \subseteq B(E)$. Como $K' = (S_,)' \in \mathcal{S}_{w*}(B(E))$, tenemos que $K' = \Phi(u)$, para conveniente $u \in Tri(E)$. De donde se sigue que $\Phi_*(u) = [\Phi(u)]_, = (K')_, = [(S_,)']_, = S_, = K$, o lo que es lo mismo, K está en la imagen de Φ_*. $\square$

Nos gustaría hacer notar que el teorema anterior puede obtenerse también utilizando el Corolario 3.2.8 y [21, Theorems 3.7, 3.9]. No obstante, el lector puede comprobar que nuestra prueba es directa.

Dado un espacio de Banach dual X, con predual X_*, recordamos que un elemento $f \in B(X_*)$ es llamado norma-expuesto si existe un $x \in B(X)$ verificando que $f(x) = 1$ y $g(x) < 1$, para todo $g \in B(X_*) \setminus \{f\}$. En 1978, E.M. Alfsen y F. W. Shultz probarón, [2, Proposition 3.3], que cada punto extremo del conjunto de los estados w^*-continuos de una JBW-álgebra es norma-expuesto. En el caso de un JBW*-triple complejo, $\mathcal{E}$, Friedman y Russo establecían, [23], que cada punto extremo de la bola unidad del predual de $\mathcal{E}$ es norma-expuesto. Nuestro próximo objetivo va a consistir en extender el mencionado resultado de Friedman y Russo al caso de JBW*-triples reales, lo que a su vez nos permitirá extender también el resultado de Alfsen y Shultz.

En el Lema 3.1.6, demostrábamos que si E es un JB*-triple real, $e \in Tri(E)$ y $f \in E^*$ con $\|f\| = \|fP_2(e)\|$, entonces $f = f\ P_2(e)$, lo que en particular nos asegura que f es cero en $E_0(e) \oplus E_1(e) = E^0(e)$. El siguiente lema, afirma que si $f(e) = \|f\| = 1$, entonces f es cero en $E^0(e) \oplus E^{-1}(e)$.

Lema 4.2.3 *Sea E un JB*-triple real, sea $e \in Tri(U)$ y sea $f \in E^*$ tal que $f(e) = \|f\| = 1$, entonces $f = f\ P^1(e)$.*

Demostración.- Ya que $f(e) = 1 = \|f\|$, se tiene que $\|f\| = \|fP_2(e)\|$ y por el Lema 3.1.6, tenemos que $f = fP_2(e)$. Como $E^1(e) \oplus E^{-1}(e) = E_2(e)$, solo nos hace falta comprobar que $f(y) = 0$, para todo $y \in E^{-1}(e)$. Tomemos pues $y \in E^{-1}(e)$ fijo, pero arbitrario. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(y) \geq 0$. Como $y \in E^{-1}(e)$, tenemos que $\{e,e,y\} = y$, $\{e,y,e\} = -y$. Además, para cada $0 < t \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\{e+ty, e+ty, e+ty\} = \{e,e,e\} + 2t\{e,e,y\} + t\{e,y,e\} + O(|t|^2) =$$

$$= e + ty + O(|t|^2).$$

Ahora, por inducción, podemos afirmar que

$$(e+ty)^{3^n} = e + ty + O(|t|^2),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, ya que para $t > 0$, tenemos que

$$\|e+ty\| \geq f(e+ty) = 1 + tf(y),$$

deducimos que

$$(1+tf(y))^{3^n} \leq \|e+ty\|^{3^n} = \|(e+ty)^{3^n}\| = \|e+ty+O(|t|^2)\| \leq$$

$$\leq 1 + t\|y\| + O(|t|^2).$$

Ahora, la desigualdad anterior nos lleva a la siguiente:

$$3^n f(y) + O(|t|) \leq \|y\| + O(|t|).$$

Finalmente, haciendo tender t a cero, obtenemos que

$$f(y) \leq \frac{1}{3^n}\|y\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De donde se sigue que $f(y) = 0$. □

Desde ahora en adelante, dado un espacio de Banach real ó complejo X, denotaremos por $ext(B(X))$ al conjunto formado por todos los puntos extremos (reales) de la bola unidad de X. El siguiente lema técnico nos proporciona una relación entre los puntos extremos de la bola unidad del predual de X y los puntos extremos de la bola del predual de un subespacio w^*-cerrado, en el caso en el que X es un espacio de Banach con un único predual.

Lema 4.2.4 *Sea X un espacio de Banach con un único predual X_*. Sea M un subespacio w^*-cerrado de X y sea f un punto extremo de la bola unidad de X_*. Supongamos que la proyección natural, P, de X sobre M es w^*-continua y contractiva. Si además f coincide con fP, entonces $f|_M$ es un punto extremo de la bola unidad de M_*.*

Demostración.- Supongamos que $f|_M = \frac{1}{2}(g+h)$ donde $g, h \in B(M_*)$, esto es, $g, h : M \to \mathbb{R}$ son funcionales w^*-continuos. Consideramos los funcionales $\widetilde{g} := g \circ P$ y $\widetilde{h} := h \circ P$. Ya que P es w^*-continua con $\|P\| \leq 1$ y $g, h \in B(M_*)$, tenemos que $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in B(X_*)$. Por otra parte

$$f = f \circ P = (f|_M) \circ P = \frac{1}{2}(g+h) \circ P = \frac{1}{2}(\widetilde{g} + \widetilde{h}) .$$

Como $f \in ext(B(X_*))$, podemos asegurar que $f = \widetilde{g} = \widetilde{h}$, lo que implica que $g = h = f|_M$ y por tanto que $f|_M \in ext(B(M_*))$. □

La proposición que enunciamos a continuación contiene el resultado que nos va a permitir obtener la caracterización de los tripotentes minimales, como los funcionales de soporte de los puntos extremos de la bola unidad del predual, en el caso de un JBW*-triple real.

Con dicha proposición probamos que todo punto extremo de la bola unidad del predual de un JBW*-triple real es una cara norma-semi-expuesta de la bola unidad del predual.

Proposición 4.2.5 *Sea E un JBW*-triple real con predual E_* y sea f un punto extremo de la bola unidad de E_*, entonces f es un punto norma-expuesto de $B(E_*)$. En particular $\{f\}$ es una cara norma-semi-expuesta de $B(E_*)$.*

Demostración.- Sea $f \in ext(B(E_*))$, utilizando el mismo argumento que en la prueba de la Proposición 3.1.8, podemos asegurar la existencia de un tripotente $e \in E$ tal que $f(e) = 1$. Aplicando el Lema 4.2.3 podemos afirmar que $f = fP^1(e)$. Ya que los subespacios $E^1(e)$ y $ker P^1(e) (= E^0(e) \oplus E^{-1}(e))$

son w^*-cerrados en E y $P^1(e)$ es una proyección contractiva (ver Nota 3.1.7 y Teorema 3.2.6), podemos aplicar el Lema 4.2.4 a $E^1(e)$ y $P^1(e)$, para concluir que $f|_{E^1(e)} \in \text{ext}(B((E^1(e))_*))$. Esta cualidad, unida al hecho de que $f(e) = 1$, nos dice que $f|_{E^1(e)}$ es un punto extremo del conjunto de los estados w^*-continuos de la JBW-álgebra $E^1(e)$. En consecuencia, aplicando [2, Proposition 3.3], se tiene que $f|_{E^1(e)}$ es un punto norma-expuesto de $B((E^1(e))_*)$, es decir, existe $a \in E^1(e)$ tal que $f(a) = 1$ y $g(a) < 1$ para todo $g \in B((E^1(e))_*) \setminus \{f|_{E^1(e)}\}$.

Ahora estamos en condiciones de probar que f es un punto norma-expuesto de $B(E_*)$. Consideremos cualquier $h \in B(E_*)$, entonces $h|_{E^1(e)}$ pertenece a la bola unidad de $(E^1(e))_*$ y según acabamos de ver, tiene que verificarse una de las siguientes alternativas, $h(a) < 1$ ó $h|_{E^1(e)} = f|_{E^1(e)}$. Si $h|_{E^1(e)} = f|_{E^1(e)}$, entonces $h(e) = f(e) = 1$ y el Lemma 4.2.3 permite afirmar que $h = hP^1(e)$, lo que implica que

$$h = hP^1(e) = [h|_{E^1(e)}]P^1(e) = [f|_{E^1(e)}]P^1(e) = fP^1(e) = f.$$

Hemos probado que para todo h perteneciente a la bola unidad de E_* y distinto de f, se verifica que $h(a) < 1$, por consiguiente f es un punto norma-expuesto de la bola unidad de E_*. En particular, $\{f\} = (\{f\}')_'$ es una cara norma-semi-expuesta de $B(E_*)$. □

En este momento, estamos preparados para dar la prometida caracterización geométrica de los tripotentes minimales de un JBW*-triple real.

Teorema 4.2.6 *Cada tripotente minimal de un JBW*-triple real, E, es un funcional de soporte de un punto extremo de la bola unidad del predual de E. Un elemento f, perteneciente a la bola unidad de E_*, es un punto extremo de $B(E_*)$, si y solo si, existe un tripotente minimal e en E tal que $f(e) = 1$.*

Demostración.- Comenzamos probando la segunda afirmación. Sea pues $f \in \text{ext}(B(E_*))$, por la proposición anterior, sabemos que el conjunto $\{f\}$ es una cara norma-semi-expuesta minimal de $B(E_*)$. En consecuencia, el Teorema 4.2.2, nos asegura que $\{f\} = \Phi_*(e) = \{e\}_'$ y por tanto que $f(e) = 1$, para algún tripotente minimal e de E.

Supongamos ahora que $f \in B(E_*)$ y que existe un tripotente minimal $e \in E$ tal que $f(e) = 1$. Veamos que $f \in extB(E_*)$. En efecto: si $f = (f_1 + f_2)/2$ para ciertos $f_1, f_2 \in B(E_*)$, como $\|f_k\| \leq 1$ y $\|e\| = 1$, tenemos que $f_k(e) \leq 1$ $(k = 1, 2)$. En consecuencia,

$$1 = f(e) = f_1(e) = f_2(e) \ \text{ y}$$

$$\|f|E_2(e)\| = \|f_1|E_2(e)\| = \|f_2|E_2(e)\| = 1.$$

Lo que, en virtud del Lema 4.2.3, nos permite asegurar que $f = fP^1(e)$ y que $f_i = f_iP^1(e)$ $(i = 1, 2)$. Igualdades que, unidas al hecho de ser e minimal $(E^1(e) = \mathbb{R}e)$, nos dan que $f_1 = f_2 = f$.

Al objeto de probar la primera afirmación, consideremos $e \in minTri(E)$. Ya que $E^1(e) = \mathbb{R}e$, el operador

$$P^1(e) : E \to E^1(e) = \mathbb{R}e$$

puede ser considerado como un funcional w^*-continuo de norma uno en E. Como además $P^1(e)$ toma el valor uno en e, tenemos, en función de lo ya probado, que $P^1(e)$ es un punto extremo de la bola unidad del predual de E. □

El teorema anterior permite afirmar que la aplicación $e \mapsto P^1(e)$ es una correspondencia inyectiva entre el conjunto de los tripotentes minimales de un JBW*-triple real E y el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad del predual de E. Además dicha correspondencia es biyectiva, ya que si $f \in ext(B(E_*))$, entonces existe $e \in minTri(E)$, tal que $f(e) = 1$. Por tanto, en virtud del Lema 4.2.3, $f = fP^1(e)$. Lo que implica que, salvo identificar $E^1(e) = \mathbb{R}e$ con $\mathbb{R}$, $f = P^1(e)$. Esta observación, unida al hecho de que todo JBW*-triple complejo puede ser considerado como JBW*-triple real, nos permite enunciar el siguiente corolario.

Corolario 4.2.7 *Dado un JBW*-triple real o complejo, U, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los tripotentes minimales de U y el conjunto formado por todos los puntos extremos de la bola unidad de su predual.*

En [23, pág. 79] se definen los elementos tripotentes minimales de un JB*-triple complejo $\mathcal{E}$, como los tripotentes $e \in \mathcal{E}$ tales que $\mathcal{E}_2(e) = \mathbb{C}e$. Ahora bien, teniendo en cuenta las identidades:

$$\mathcal{E}^{-1}(e) = i\,\mathcal{E}^1(e),$$

$$\mathcal{E}_2(e) = \mathcal{E}^1(e) \oplus \mathcal{E}^{-1}(e),$$

podemos asegurar la equivalencia entre la definición usada por Friedman y Russo y la que seguimos nosotros.

Si se tiene en cuenta que el concepto de **átomo**, introducido por Friedman y Russo en el mencionado trabajo, coincide con el concepto de punto extremo (real) de la bola unidad del predual, nuestros resultados engloban los contenidos en [23, Proposition 4].

4.3 Descomposición Atómica

Esta sección la vamos a dedicar a presentar el resultado principal del capítulo, el cual afirma que todo JBW*-triple real descompone en suma directa ortogonal de dos ideales w^*-cerrados. Uno de dichos ideales carece de tripotentes minimales, mientras que el otro está generado por todos sus elementos tripotentes minimales. Como tantos otros resultados, que hemos venido estudiando, este teorema de descomposición tiene su precedente en el caso de JBW*-triples complejos. Concretamente, Friedman y Russo, [23, Theorem 2], probaron el siguiente teorema de descomposición atómica.

Teorema 4.3.1 *Todo JBW*-triple complejo $\mathcal{E}$ descompone como suma ortogonal directa de dos ideales débil*-cerrados A y N, donde A es la expansión lineal débil*-cerrada de sus tripotentes minimales y N carece de elementos tripotentes minimales.*

Supongamos que E es un JBW*-triple real con predual E_*. Por el Corolario 3.2.8, su complexificación, $\widehat{E}$, es un JBW*-triple complejo. Aplicando el teorema anterior, sabemos que $\widehat{E}$ descompone como suma de los ideales w^*-cerrados

$$\widehat{A} := \overline{\mathrm{Span}}^{w^*} \min Tri(\widehat{E})$$

y

$$\widehat{N} := \{x \in \widehat{E} : \ L(a,a)x = 0 \ \ (a \in \widehat{A})\} .$$

Además $\widehat{N}$ carece de elementos tripotentes minimales.

Por otra parte, tenemos que la conjugación canónica, τ, en $\widehat{E}$, conserva el triple producto y por tanto preserva el conjunto de los elementos tripotente minimales de $\widehat{E}$. Además, ya que $\widehat{E}^*$ está bien enmarcado [6, Theorem 2.1], el Lema 3.1.2 nos asegura que τ es w^*-continua. Todo ello nos permite afirmar que:

$$\tau(\widehat{A}) = \widehat{A},$$

y

$$\tau(\widehat{N}) = \widehat{N}.$$

En consecuencia, E descompone como suma directa ortogonal

$$E = \widehat{A}^\tau \oplus^\infty \widehat{N}^\tau ,$$

donde $\widehat{A}^\tau := \{x \in \widehat{A} : \ \tau(x) = x\}$ y $\widehat{N}^\tau := \{x \in \widehat{N} : \ \tau(x) = x\}$.

El objetivo, consiste en probar que esta descomposición que acabamos de encontrar es la descomposición atómica que buscamos para el caso real. Por

tanto, solo nos faltará comprobar que $\widehat{A}^\tau$ está generado por los elementos tripotentes minimales de E y que $\widehat{N}^\tau$ carece de ellos.

Es claro que todo tripotente minimal y τ-simétrico en $\widehat{E}$ es un tripotente minimal en E. Sin embargo, según muestra el siguiente contraejemplo, el recíproco no tiene por que ser cierto. Considérese $E = \mathbb{R}^2$ con el producto triple dado por

$$\{x, y, z\} := (x|y)z + (z|y)x - (x|z)y.$$

Es fácil ver que $e = (1, 0)$ es un tripotente minimal en E y que en $\widehat{E}$ no es minimal.

El siguiente lema clarifica la relación entre los tripotentes minimales de E y de su complexificación. Para su mejor comprensión, recordemos que un JBW*-triple real o complejo se llama factor si no se puede descomponer como suma ortogonal de ideales w^*-cerrados no triviales. Es claro que si e es un tripotente minimal en un JBW*-triple real E, entonces $E_2(e)$ es un factor.

Lema 4.3.2 *Sea E un JBW*-triple real y sea e un tripotente minimal en E. Entonces e se puede expresar como suma de a lo sumo dos tripotentes minimales ortogonales en $\widehat{E}$.*

Demostración.- Si e es minimal en $\widehat{E}$, no tenemos nada que probar. Supongamos ahora que e no es minimal en $\widehat{E}$. Aplicando la Proposición 4.1.5, podemos asegurar que $E_2(e)$ es un Hilbert real. En virtud de la clasificación de los factores de Cartan reales (ver página 10), podemos asegurar que el producto triple en $E_2(e)$ responde a una de las siguientes expresiones:

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}((x|y)z + (z|y)x),$$

$$\{x, y, z\} = (x|y)z + (z|y)x - (x|z)y.$$

Es fácil ver que, si se elige como producto triple la primera de las expresiones, entonces todo tripotente minimal de E es de nuevo un tripotente minimal en $\widehat{E}$. Por consiguiente, obligatoriamente el producto triple en $E_2(e)$ responde a la segunda de las expresiones anteriores.

Por otra parte, ya que $\widehat{E}^1(e) = E^1(e) \oplus i\ E^{-1}(e)$ y e no es tripotente minimal en $\widehat{E}$, sabemos que necesariamente existe $u \in E^{-1}(e)$ con $\|u\| = 1$. Definamos ahora $v := \frac{1}{2}(e + iu)$. Utilizando el hecho de que, por pertenecer u a $E^{-1}(e)$, $(e|u) = 0$, se puede comprobar que v es un tripotente minimal en $\widehat{E}_2(e)$ y que $v \perp \tau(v)$. Además, claramente $e = v + \tau(v)$.

Para finalizar, solo nos queda demostrar que v es minimal en $\widehat{E}$. Es fácil ver que $v \leq e$ en el conjunto de los tripotentes de $\widehat{E}$ y por tanto que

$\widehat{E}_2(v) \subseteq \widehat{E}_2(e)$. En consecuencia $\widehat{E}_2(v) = (\widehat{E}_2(e))_2(v) = \mathbb{C}v$, y por tanto v es un tripotente minimal de $\widehat{E}$ (ver, si acaso la página 69). □

Nota 4.3.3 *Sea E un JBW^*-triple real. Por el Lema 4.3.2, sabemos que cualquier tripotente minimal $e \in E$, o bien es minimal en $\widehat{E}$, o bien se puede expresar en la forma $e = v + \tau v$, donde $v \in \widehat{E}$ es un tripotente minimal y $v \perp \tau v$. En el trabajo [24, Proof of Proposition 2], se asegura que cada tripotente minimal está contenido en un único (factor de Cartan complejo) ideal w^*-cerrado minimal de $\widehat{E}$, por tanto, dado un tripotente minimal $e \in E$, existe un factor de Cartan complejo F perteneciente al conjunto de los ideales w^*-cerrados minimales de $\widehat{E}$ y un tripotente minimal $v \in F$ tal que, o bien $e = v \in F$, o bien*

$$F = \tau(F),\ e = v + \tau(v),\ v \perp \tau(v),$$

o bien

$$F \perp \tau(F),\ e = v + \tau(v).$$

Nota 4.3.4 *Los factores de Cartan complejos de tipo 1,2 y 3, admiten una representación como subespacio del espacio de los operadores lineales y acotados entre los espacios de Hilbert complejos H y K, de la forma*

$$\{x \in BL(H,K) :\ \theta(x) = x\}$$

con $\theta \in BL\big(BL(H,K), BL(H,K)\big)$, $\theta^2 = Id$. Además θ es w^*-continua (ver Lema 3.1.2 y [6, Theorem 2.1]) y aplica operadores de rango finito sobre operadores de rango finito.

Ahora teniendo en cuenta la descripción del conjunto de todas las conjugaciones de los factores anteriormente referidos, dada por Kaup en [38, Theorem 4.1], sabemos que cada forma real de un factor de Cartan complejo de tipo 1, 2 y 3 puede ser presentada como

$$\{x \in BL(H,K) :\ Px = x\}$$

donde $P \in BL_{\mathbb{R}}\big(BL(H,K), BL(H,K)\big)$ es tal que $P^2 = Id$. Además, P es $w*$-continua y aplica operadores de rango finito sobre operadores de rango finito.

El siguiente lema es clave en la prueba de nuestro resultado principal.

Lema 4.3.5 *Sean H y K dos espacios de Hilbert complejos, H_1 y K_1 dos subespacios de H y K respectivamente y sea Z un subtriple real de $BL(H,K)$. Entonces*

$$W := \{z \in Z :\ z(H) \subset K_1,\ z^*(K) \subset H_1\}$$

es un subtriple de Z y los tripotentes minimales de W son tripotentes minimales de Z.

Demostración.- La comprobación de que W es un subtriple de Z es trivial. Sea pues e un tripotente minimal de W. La segunda proyección de Peirce $P_2(e)$ en Z, tiene la forma

$$P_2(e)z = Q(e)^2 z = ee^* ze^* e \qquad (z \in Z) .$$

En consecuencia, dado un elemento $z \in Z_2(e)$, existe $x \in Z$ tal que

$$z = ee^* xe^* e.$$

Ya que por hipótesis $e \in W$, y por tanto $ee^*(K) \subset e(H) \subset K_1$ y $e^*e(H) \subset e^*(K) \subset H_1$, deducimos que, para cada $z \in Z_2(e)$, se tiene que

$$z(H) = ee^* xe^* e(H) \subset K_1$$

$$z^*(K) = e^* ex^* ee^*(K) \subset H_1.$$

Identidades que nos muestran que $z \in W$ y por tanto que $Z_2(e) \subset W$.

Supongamos que $e = e_1 + e_2$ para ciertos e_1, e_2 tripotentes ortogonales de Z. Ya que $e_1, e_2 \in Z_2(e)$ y como acabamos de ver $Z_2(e) \subset W$, tendríamos, por la minimalidad de e en W, que o bien $e_1 = 0$, o bien $e_2 = 0$. Ahora la Proposición 4.1.5, nos asegura que e es minimal en Z. □

Del anterior Lema, podemos sacar una consecuencia más importante, cuando estamos en el caso en el que los subespacios H_1 y K_1, son finito dimensionales.

Corolario 4.3.6 *Bajo las condiciones del lema anterior, si las dimensiones de H_1 y de K_1 son finitas, entonces cualquier elemento de W es expresable como una combinación, lineal, real, finita de tripotentes minimales de Z que además son elementos de W.*

Demostración.- Como las dimensiones de H_1 y de K_1 son finitas, entonces la dimensión de W también lo es (basta identificar W con $BL(H_1, K_1)$). Consideremos ahora $\{h_1, \ldots, h_n\}$ y $\{k_1, \ldots, k_p\}$ bases ortonormales de H_1 y K_1 respectivamente. Es conocido que el conjunto

$$\{k_j \otimes h_i : x \mapsto (x|h_i)k_j \ / \ i : 1, \ldots, n, \ j : 1, \ldots, p\}$$

constituye una base de W formada por elementos tripotentes minimales en W. Por el lema anterior podemos asegurar que dichos elementos son tripotentes minimales en Z, lo que concluye la prueba. □

Nota 4.3.7 *Si U es un JB^*-triple real o complejo finito dimensional, entonces es fácil comprobar que existe un conjunto finito de puntos extremos de la bola unidad de U que genera todo el espacio U. Ahora bien, considerando U como predual de si mismo, el Teorema 4.2.6, nos permite afirmar que U está generado por un conjunto finito de tripotentes minimales.*

Como ya conocemos (ver página 10), si E es un factor spin real, entonces existe un espacio de Hilbert real X y dos subespacios cerrados X_1 y X_2 de X verificando que $X_2 = X_1^{\perp}$ y $E = X_1 \oplus^1 X_2$. Además, notando por $(.|.)$ al producto escalar de X y por $-$ a la involución dada por $x = (x_1, x_2) \mapsto \overline{x} = (x_1, -x_2)$, el producto triple viene dado por

$$\{x, y, z\} = (x|y)z + (z|y)x - (x|\overline{z})\overline{y}$$

para cualesquiera $x, y, z \in E$. Tomemos un elemento $x = x_1 + x_2 \in X_1 \oplus^{\ell_1} X_2 = E$ y fijemos dos elementos de norma uno, $e_1 \in X_1$ y $e_2 \in X_2$. Si x_1 es cero, entonces x_1 se puede expresar como un múltiplo de un tripotente minimal (basta tomar como tripotente minimal $\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$). Si $x_1 \neq 0$, entonces, es fácil comprobar que, $v = \frac{1}{2\|x_1\|}x_1 + \frac{1}{2}e_2$ y $\overline{v} = \frac{1}{2\|x_1\|}x_1 - \frac{1}{2}e_2$ son dos elementos tripotentes minimales de E y $x_1 = \|x_1\|(v + \overline{v})$. De forma análoga se puede probar que x_2 es combinación lineal de otros dos tripotentes minimales de E y por tanto que todo elemento de E se puede expresar como combinación lineal de, a lo sumo, cuatro elementos tripotentes minimales de E.

Como hemos visto anteriormente, si E es un JBW*-triple real, entonces su complexificación, $\widehat{E}$, admite una descomposición atómica: $\widehat{E} = \widehat{A} \oplus^{\ell_\infty} \widehat{N}$. Siguiendo el trabajo de Friedman y Russo, [23], sabemos que $\widehat{A}$ admite una descomposición

$$\widehat{A} = \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}}^{w^*} \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F,$$

donde $\mathcal{F}$ es el conjunto formado por todos los ideales $w*$-cerrados minimales de $\widehat{E}$.

Notaremos por $\mathcal{F}_0$ al conjunto de los elementos F en $\mathcal{F}$ tales que $\tau(F) = F$. $\mathcal{F}_1$ denotará a cualquier subconjunto de $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$ que sea maximal entre aquellos subconjuntos, $\mathcal{F}^*$, que verifican la propiedad $\tau(F) \perp F$ para todo $F \in \mathcal{F}^*$. Finalmente, notaremos por $\mathcal{F}_{-1}$ al subconjunto $\{\tau(F) : F \in \mathcal{F}_1\}$. Con esta notación, teniendo en cuenta que por [38, Lemma 6.2], $\widehat{A} = I \oplus J \oplus K$, donde I, J, K son ideales w^*-cerrados verificando que $\tau(J) = K$ y que cada ideal w^*-cerrado de I es τ-invariante; podemos asegurar que $\widehat{A}$ descompone en la forma siguiente:

$$\widehat{A} = (\oplus^{\infty}_{F\in\mathcal{F}_{-1}} F) \oplus^{\infty} (\oplus^{\infty}_{F\in\mathcal{F}_0} F) \oplus^{\infty} (\oplus^{\infty}_{F\in\mathcal{F}_1} F).$$

Esta descomposición nos será de suma utilidad para cumplir nuestro objetivo.

Tenemos ya preparada toda la maquinaria necesaria para obtener un Teorema de descomposición atómica para JBW*-triples reales. Recordemos que, como vimos al principio de la sección, la clave de la prueba se centraba en demostrar que $\widehat{A}^{\tau}$ está generado por los tripotentes minimales de E y $\widehat{N}^{\tau}$ carece de tripotentes minimales.

Teorema 4.3.8 *Sea E un JBW*-triple real. Entonces*

$$E = A \oplus^{\ell_\infty} N,$$

donde

$$A := \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}}^{w^*} minTri(E) \ \ y$$

$$N := \{x \in E : \ L(a,a)x = 0 \ \ (a \in A)\}$$

son ideales w^*-cerrados de E y N carece de tripotentes minimales.

Demostración.- Comenzamos probando que $A = \widehat{A}^{\tau}$. De acuerdo con el Lema 4.3.2, $A \subseteq \widehat{A}^{\tau} := \{x \in \widehat{A} : \ \tau(x) = x\}$. Al objeto de demostrar la otra inclusión, recordamos que

$$\widehat{A} = (\oplus^{\infty}_{F\in\mathcal{F}_{-1}} F) \oplus^{\infty} (\oplus^{\infty}_{F\in\mathcal{F}_0} F) \oplus^{\infty} (\oplus^{\infty}_{F\in\mathcal{F}_1} F),$$

y por tanto

$$\widehat{A}^{\tau} = (\oplus^{\infty}_{F\in\mathcal{F}_0} F^{\tau}) \oplus^{\infty} (\oplus^{\infty}_{F\in\mathcal{F}_1} \{x + \tau(x) : x \in F\}).$$

En consecuencia, para probar que $A = \widehat{A}^{\tau}$, es suficiente comprobar que

$$J := \{x + \tau(x) : x \in F\} = \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}}^{w^*} minTri(J) \ \ (F \in \mathcal{F}_1) \qquad (4.1)$$

$$F^{\tau} = \{x \in F : \ \tau(x) = x\} = \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}}^{w^*} minTri(F^{\tau}) \ (F \in \mathcal{F}_0). \qquad (4.2)$$

Comencemos probando (4.1). Es fácil comprobar que $e+\tau(e) \in minTri(J)$ siempre que $F \in \mathcal{F}_1$ y $e \in minTri(F)$. Además, como cualquier factor de Cartan $F \in \mathcal{F}$ se expresa

$$F = \overline{\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}}^{w^*} minTri(F)$$

(ver [24]) y la conjugación τ es w^*-continua, tenemos que (4.1) es inmediato.

Seguidamente, procedemos a la prueba de (4.2). Sea $F \in \mathcal{F}_0$. Si F es un factor de tipo spin o finito dimensional, la Nota 4.3.7 asegura que (4.2) es cierto. Supongamos ahora que F es un factor de tipo ≤ 3. Entonces, por la Nota 4.3.4, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que F es un subtriple w^*-cerrado de la forma

$$F = \{x \in BL(H,K) : \theta(x) = x\}$$

para ciertos espacios de Hilbert complejos H, K y una conjugación, lineal y w^*-continua θ, que aplica operadores de rango finito en operadores de rango finito. También la conjugación τ aplica operadores de rango finito en operadores de rango finito. Claramente

$$F^\tau := \{z \in F : \tau(z) = z\}$$

es un subtriple real y w^*-cerrado de $BL(H,K)$. Por otra parte, dado un elemento z de F^τ, existe una red, de operadores de rango finito, $\{z_i : i \in I\}$ que converge a z en la topología w^* de $BL(H,K)$. Teniendo en cuenta todo ello, obtenemos que

$$f_i := (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta)z_i \overset{w*}{\to} z,$$

además, cada f_i tiene rango finito y pertenece a F^τ.

Aplicando el Corolario 4.3.6, a los espacios de Hilbert, finito dimensionales, $H_i := f_i(H)$ y $K_i := f_i^*(K)$ en lugar de H_1 y K_1, y tomando $Z = F^\tau$, podemos asegurar que cada f_i es una combinación lineal real y finita de tripotentes minimales de F^τ. De esta forma tenemos probado (4.2).

Hemos probado pues que $E = A \oplus^{\ell_\infty} \widehat{N}^\tau$. Ya que N es el complemento ortogonal en E de A, deducimos que $N = \widehat{N}^\tau$. Para concluir la prueba bastará probar que N carece de tripotentes minimales, hecho que es evidente, ya que todo tripotente minimal de N es tripotente minimal de E y por tanto estaría en A, lo cual es imposible. □

Por analogía con el caso complejo, dado un JBW*-triple real, E, llamaremos parte atómica de E al ideal w^*-cerrado que está generado por todos los tripotentes minimales de E. Llamaremos parte no atómica de E al ideal $N := \{x \in E : L(a,a)x = 0 \ (a \in A)\}$, donde A es la parte atómica de E. El teorema anterior nos asegura que todo JBW*-triple descompone como ℓ_∞-suma de sus partes atómica y no atómica.

Según acabamos de ver, en la prueba del Teorema 4.3.8, dado un JBW*-triple real, E, entonces su parte atómica puede ser expresada como la siguiente ℓ_∞-suma

$$A = (\oplus^\infty_{F \in \mathcal{F}_0} F^\tau) \oplus^\infty (\oplus^\infty_{F \in \mathcal{F}_1} \{x + \tau(x) : x \in F\}),$$

donde $\mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_1$ son dos familias de factores de Cartan complejos verificando que $\tau(F) = F$ para todo $F \in \mathcal{F}_0$ y $F \perp \tau(F)$ para todo $F \in \mathcal{F}_1$, donde τ es la conjugación canónica en la complexificación de E. Si $F \in \mathcal{F}_0$ entonces F^τ es una forma real del factor de Cartan F y por tanto un factor de Cartan real. Por otro lado, si $F \in \mathcal{F}_1$, entonces $J := \{x+\tau(x) : x \in F\}$ es isométricamente isomorfo al factor de Cartan F considerado como espacio de Banach real, es decir, J es isométricamente isomorfo a la realificación de un factor de Cartan complejo. Tenemos por tanto probado el siguiente corolario.

Corolario 4.3.9 *Sea E un JBW^*-triple real, entonces la parte atómica de E es isométricamente isomorfa a una ℓ_∞-suma de factores de Cartan reales y de realificaciones de factores de Cartan complejos.*

Con la ayuda del corolario anterior podemos obtener el siguiente teorema de tipo Gelfand-Naimark para JB*-triples reales. El lector puede comprobar que, al igual que en el caso complejo, [24], dicho teorema se sigue de la descomposición atómica obtenida anteriormente.

Teorema 4.3.10 *Todo JB^*-triple real se puede embeber, de forma isométrica, en una ℓ_∞-suma de factores de Cartan reales y realificaciones de factores de Cartan complejos.*

Demostración.- Supongamos que E es un JB*-triple real, entonces E^{**} es un JBW*-triple real cuyo producto triple extiende al de E (ver [33, Lemma 4.2]). En consecuencia, el Teorema 4.3.8 nos asegura que

$$E^{**} = A \oplus^{\ell_\infty} N,$$

donde A (respectivamente, N) es la parte atómica (respectivamente no atómica) de E^{**}. Si notamos mediante j a la inyección canónica de E en su bidual y mediante P a la proyección natural de E^{**} sobre su parte atómica, tenemos que Pj es un homomorfismo de triples de E en A. Además se verifica que $\|Pj(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$. Para demostrar que Pj es una isometría, tomamos $x \in E$ con $\|x\| = 1$. Ya que los Teoremas de Hahn-Banach y Banach-Alaoglu nos aseguran que el conjunto

$$C = \{f \in E^* : \|f\| = 1 = f(x)\}$$

es convexo, w^*-compacto y no vacío, el Teorema de Kreim- Milman nos permite afirmar que existe g, punto extremo de la bola unidad de E^*, que además está en el conjunto C. Como g es un punto extremo de la bola unidad de E^*, el Teorema 4.2.6, nos asegura que existe un tripotente minimal $e \in E^{**}$

tal que $g = gP^1(e)$, en particular $g(N) = 0$ y por tanto $g = gP$. Ahora la desigualdad

$$1 = \|x\| = \|j(x)\| \geq \|Pj(x)\| \geq |g(Pj(x))| = |g(x)| = 1,$$

nos asegura que Pj es una isometría. Finalmente el Corolario 4.3.9 nos permite concluir la prueba. □

Nuestro corolario final asegura que los factores de Cartan reales carecen de parte no atómica.

Corolario 4.3.11 *Todo factor de Cartan real es la envolvente lineal w^*-cerrada de sus tripotentes minimales.*

Demostración.- Es bien conocido (ver [38, Lemma 4.5]) que cualquier factor de Cartan real, E, posee tripotentes minimales. En consecuencia, la parte atómica de E es distinta de cero. Como además todo factor de Cartan real es un JBW*-triple real factor, tenemos que su parte no atómica debe de ser cero. □

Bibliografía

[1] Ajupov, S. A.: Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators, Math. Z. **181**, 253-268 (1982).

[2] Alfsen, E. and Shultz, F. W.: State spaces of Jordan algebras, Acta Math., **140**, 155-190 (1978).

[3] Alfsen, E., Shultz, F. W. and Störmer, E.: A Gelfand Neumark theorem for Jordan algebras, Adv. in Math., **28**, 11-56 (1978).

[4] Alvermann, K.: Real normed Jordan algebras with involution, Arch. Math. **47**, 135-150 (1986).

[5] Barton, T. and Friedman, Y.: Bounded derivations of JB*-triples, Quart. J. Math. Oxford (2), **41**, 255-268 (1990).

[6] Barton, T. and Timoney, R. M.: Weak*-continuity of Jordan triple products and its applications, Math. Scand. **59**, 177-191 (1986).

[7] Berberian, S. K.: Baer *-rings, Grundlehren der mathematishen Wissenschaften, **195**, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1972.

[8] Bonsall, F. F. and Duncan, J.: Complete Normed Algebras, Springer-Verlag, New York, 1973.

[9] Bunce, L. J. and Chu, C-H.: Real contractive projections on commutative C*-algebras, Math. Z. **226**, 85-101 (1997).

[10] Chu, C-H., Dang, T., Russo, B., and Ventura, B.: Surjective isometries of real C*-algebras, J. London Math. Soc. **47**, 97-118 (1993).

[11] Chu, C-H., Galindo, A. M., and Rodríguez, A.: On prime real JB*-triples, Contemporary Math. **232**, 105-109 (1999).

[12] Chu, C-H. and Mellon, P.: Jordan structures in Banach spaces and symmetric manifolds, Expo. Math. **16**, 157-180 (1998).

[13] Dang, T.: Real isometries between JB*-triples, Proc. Amer. Math. Soc. **114**, 971-980 (1992).

[14] Dang, T. and Friedman, Y.: Classification of JBW*-Triple factors and applications, Math. Scand. **61**, 292-330 (1987).

[15] Dang, T. and Russo, B.: Real Banach Jordan triples, Proc. Amer. Math. Soc. **122**, 135-145 (1994).

[16] Dineen, S.: Complete holomorphic vector fields on the second dual of a Banach space, Math. Scand. **59**, 131-142 (1986).

[17] Dixmier, J.: Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1969.

[18] Doran R. S. and Belfi V. A.: Characterizations of C*-algebras. The Gelfand-Naimark theorems. Marcel Dekker, Inc. 1986.

[19] Edwards, C. M.: On Jordan W*-algebras, Bull. Sc. Math., 2^a serie, **104**, 393-403 (1980).

[20] Edwards, C. M. and Rüttimann, G. T.: On the facial structure of the unit balls in a JBW*-triple and its predual, J. London Math. Soc. Ser.(2), **38**, 317-332 (1988).

[21] Edwards, C. M. and Rüttimann, G. T.: The facial and inner ideal structures of a real JBW*-triple, Math. Nachrichten, to appear.

[22] Fack, Th. et de la Harpe, P.: Sommes de commutateurs dans les algèbres de von Neumann finies continues, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **30**, 3, 49-73 (1980).

[23] Friedman, Y. and Russo, B.: Structure of the predual of a JBW*-triple, J. Reine u. Angew. Math. **356**, 67-89 (1985).

[24] Friedman, Y. and Russo, B.: The Gelfand-Naimark Theorem for JB*-triples, Duke Math. J. **53**, 139-148 (1989).

[25] Galindo, A. M. and Rodríguez A.: On the Zelmanovian classification of prime JB*-triples, to appear

[26] Godefroy, G.: Parties admissibles d´un espace de Banach. Applications, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^a série, **16**, 109-122 (1983).

[27] Goodearl, K. R.: Notes on real and complex C*-algebras, Shiva Publ., Nantwich, Cheshire, England 1982.

[28] Hanche-Olsen, H. and Størmer, E.: Jordan operator algebras, Monographs and Studies in Mathematics 21, Pitman, London-Boston-Melbourne, 1984.

[29] Harris, L. A.: Bounded Symmetric Homogeneous Domains in infinite dimensional spaces, In: Proceedings on infinite dimensional Holomorphy (Kentucky 1973), pp. 13-40, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1974.

[30] Ho, T.: Derivations of Jordan Banach Triples, University of California, Irvine, (tésis doctoral), 1992.

[31] Horn, G.: Klassifikation der JBW*-Tripel vom Typ I, Ph. D. Thesis, Tübingen, 1984.

[32] Ingelstam, L.: Real Banach algebras, Arkiv. för Mat. **5**, 239-270 (1964).

[33] Isidro, J. M., Kaup, W. and Rodríguez, A.: On real forms of JB*-triples, Manuscripta Math. **86**, 311-335 (1995).

[34] Isidro, J. M. and Rodríguez, A.: On the definition of real W*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **124**, 3407-3410 (1996).

[35] Kadison, R. V. and Ringrose, J. R.: Fundamentals of the theory of operator algebras, vol I, Academic Press 1983.

[36] Kaup, W.: Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds, Math. Ann. **228**, 39-64 (1977).

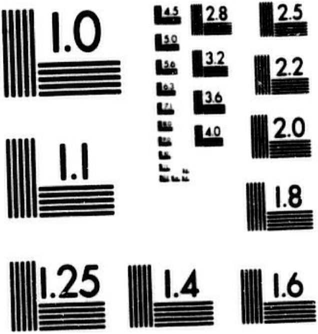
[37] Kaup, W.: A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. **183**, 503-529 (1983).

[38] Kaup, W.: On real Cartan factors, Manuscripta Math. **92**, 191-222 (1997).

[39] Kaup, W. and Upmeier, H.: Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces, Math. Z. **157**, 179-200, (1977).

[40] Loos, O.: Bounded symmetric domains and Jordan pairs, Math. Lectures, University of California, Irvine 1977.

[41] Martínez, J. and Peralta A. M.: Separate weak*-continuity of the triple product in dual real JB*-triples, Math. Z., **234**, 635-646 (2000).



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

[27] Goodearl, K. R.: Notes on real and complex C*-algebras, Shiva Publ., Nantwich, Cheshire, England 1982.

[28] Hanche-Olsen, H. and Størmer, E.: Jordan operator algebras, Monographs and Studies in Mathematics 21, Pitman, London-Boston-Melbourne, 1984.

[29] Harris, L. A.: Bounded Symmetric Homogeneous Domains in infinite dimensional spaces, In: Proceedings on infinite dimensional Holomorphy (Kentucky 1973), pp. 13-40, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1974.

[30] Ho, T.: Derivations of Jordan Banach Triples, University of California, Irvine, (tésis doctoral), 1992.

[31] Horn, G.: Klassifikation der JBW*-Tripel vom Typ I, Ph. D. Thesis, Tübingen, 1984.

[32] Ingelstam, L.: Real Banach algebras, Arkiv. för Mat. **5**, 239-270 (1964).

[33] Isidro, J. M., Kaup, W. and Rodríguez, A.: On real forms of JB*-triples, Manuscripta Math. **86**, 311-335 (1995).

[34] Isidro, J. M. and Rodríguez, A.: On the definition of real W*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **124**, 3407-3410 (1996).

[35] Kadison, R. V. and Ringrose, J. R.: Fundamentals of the theory of operator algebras, vol I, Academic Press 1983.

[36] Kaup, W.: Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds, Math. Ann. **228**, 39-64 (1977).

[37] Kaup, W.: A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. **183**, 503-529 (1983).

[38] Kaup, W.: On real Cartan factors, Manuscripta Math. **92**, 191-222 (1997).

[39] Kaup, W. and Upmeier, H.: Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces, Math. Z. **157**, 179-200, (1977).

[40] Loos, O.: Bounded symmetric domains and Jordan pairs, Math. Lectures, University of California, Irvine 1977.

[41] Martínez, J. and Peralta A. M.: Separate weak*-continuity of the triple product in dual real JB*-triples, Math. Z., **234**, 635-646 (2000).

[42] Murphy, G.: C*-algebras and operator theory, Academic Press, Inc. New York, 1978.

[43] Neher, E.: Jordan Triple Systems by the Grid Approach, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1987.

[44] Peralta, A. M.: Derivaciones en JB*-triples, Tesina Universidad de Granada (1997).

[45] Peralta, A. M. and Stachó, L.: Atomic decomposition of real JBW*-triples, Quart. J. of Mathematics (to appear).

[46] Rickart, C. E.: General theory of Banach algebras, Kreiger, New York, 1974.

[47] Rodríguez A.: Jordan structures in Analysis. In Jordan algebras: Proc. Oberwolfach Conf., August 9-15, 1992 (ed. by W. Kaup, K. McCrimmon and H. Petersson), 97-186. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[48] Russo B.: Structure of JB*-triples. In Jordan algebras: Proc. Oberwolfach Conf., August 9-15, 1992 (ed. by W. Kaup, K. McCrimmon and H. Petersson), 209-280. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[49] Sakai, S.: C*- and W*-algebras, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[50] Sherman, S.: On Segal's postulates for general quantum mechanics, Ann. of Math., **64**, 593-601, (1956).

[51] Shultz, F. W.: On normed Jordan algebras wich are Banach dual spaces, J. Funct. Anal. **31**, 360-376 (1979).

[52] Stormer, E.: On the Jordan structure of C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **120**, 438-447 (1965).

[53] Stormer, E.: Jordan algebras of type I, Acta Math. **115**, 165-184 (1966).

[54] Stormer, E.: Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators, Trans. Amer. Math. Soc. **130**, 153-166 (1968).

[55] Topping, D.: Jordan algebras of Self-adjoint operators, Mem. Amer. Math. Soc. **53**, 1965.

[56] Upmeier, H.: Derivations of Jordan C*-algebras, Math. Scand. **46**, 251-264 (1980).

[57] Upmeier, H.: Symmetric Banach Manifolds and Jordan C*-algebras, Mathematics Studies 104, (Notas de Matemática, ed. by L. Nachbin) North Holland, 1985.

[58] Upmeier, H.: Jordan Algebras in Analysis, Operator Theory, and Quantum Mechanics, American Mathematical Society, No. 67, Providence Rhode Island, 1987.

[59] Wright, J. M.: Jordan C*-Algebras, Mich. Math. J., **24**, 291-302 (1977).

[60] Zhevlakov, K. A., Slinko, A. M., Shestakov, I. P. and Shirshov, A. I.: Rings that are nearly associative, Academic Press, New York, 1982.

Glosario