UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento de Matemática Aplicada

REPRESENTACIÓN PROPORCIONAL. REPRESENTACIÓN PARLAMENTARIA

TESIS DOCTORAL

realizada por
María Luisa Márquez García
para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Granada, Septiembre de 1997

Tesis Doctoral dirigida por los doctores D. Victoriano Ramírez González y D. Rafael Pérez Gómez, profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada. Defendida por Mª Luisa Márquez García el día 10 de Diciembre de 1997, ante el tribunal formado por los siguientes profesores: D. M. L. Balinski (Presidente), D. Miguel de Guzmán Ozámiz, D. Diego López Garrido y D. Juan Montabes Pereira (Vocales) y D. José Castellano Alcántara (Secretario). Obtuvo la calificación de Apto "cum Laude" por unanimidad.

En memoria de mi padre y de mi hermano

A Ángel,
Blanca, Elvira y Luisa

No quisiera dar por terminada esta Memoria sin antes manifestar mi mayor gratitud a todas aquéllas personas que me han apoyado en todo momento con su ánimo, estímulo y continuo apoyo.

En primer lugar, quiero manifestar mi más profundo agradecimiento a los directores del presente trabajo, Dr. D. Victoriano Ramírez González y Dr. D. Rafael Pérez Gómez, por su imprescindible ayuda, plasmada en innumerables sesiones de trabajo, y por su infatigable labor de mejora continua de ésta Memoria.

Al Director del Departamento de Matemática Aplicada Dr. D. Victoriano Ramírez González, por poner a mi disposición todos los medios necesarios para la realización de este trabajo.

A mis compañeros del Departamento, muy especialmente a mis queridos compañeros de la sección de la Escuela Universitaria de Arquitectura Técnica, ya, que he contado con su apoyo, tanto moral como académico en todo momento.

Por último, a mi familia que nunca me ha fallado.

Índice

Introducción v

1 Preliminares 1

1.1 Introducción . . . 1
1.2 Notaciones y definiciones . . . 5
1.3 El problema de representación proporcional (r.p.) . . . 7
1.4 Minimizando $\|q - a\|_1$. El método de Restos Mayores o de Hamilton . . . 8
1.5 Paradojas del método de Restos Mayores . . . 9
1.5.1 Paradoja de Alabama . . . 9
1.5.2 Paradoja de los votos . . . 11
1.5.3 Paradoja de los Nuevos Estados o de las nuevas circunscripciones . . . 12
1.5.4 Inconsistencia . . . 13
1.5.5 Otras observaciones con respecto al método de Restos Mayores . . . 14
1.6 Parámetros de un Sistema Electoral. Índice de proporcionalidad . . . 16
1.6.1 Índices para medir la desproporcionalidad de un Sistema Electoral . . . 17

2 Métodos basados en divisores 19

2.1 Comparación por pares . . . 20
2.2 Obtención de métodos basados en comparaciones dos a dos . . . 24
2.2.1 El Método de St. Laguë . . . 24
2.2.2 Los métodos de Huntington con restricciones mínimas y máximas . . . 37
2.3 Definición general de métodos basados en divisores . . . 40
2.4 Otros planteamientos . . . 45
2.5 Propiedades lógicas para los métodos de asignación de escaños . . . 45
2.5.1 Exactitud . . . 45
2.5.2 Homogeneidad . . . 46
2.5.3 Anónimo . . . 46
2.5.4 Equilibrado . . . 46
2.5.5 Débilmente v-monótono respecto de los votos . . . 46

2.5.6 h-monotonía (o monotonía con respecto al tamaño de la circunscripción) . . . 47
2.5.7 v-monotonía (o monotonía con respecto a los votos o con respecto a los cambios en la población) . . . 47
2.5.8 n-monótono (o monótono respecto de las nuevas circunscripciones o a los nuevos estados) . . . 47
2.5.9 Consistencia . . . 47
2.5.10 Cuota . . . 48
2.5.11 Cerca de la cuota . . . 49
2.5.12 Fortalecimiento de coaliciones o subaditividad . . . 51
2.6 Repartos Biproporcionales . . . 52

3 Familia paramétrica de métodos d(s)=s+t **57**
3.2 Propiedades elementales de los métodos M^t . . . 58
3.3 Caracterizaciones de la familia paramétrica . . . 73
3.4 La subfamilia de métodos $M^{\frac{p-1}{p}}$ . . . 77
3.5 La subfamilia paramétrica de métodos $M^{\frac{1}{p}}$ . . . 85

4 Análisis del Sistema Electoral Español para la Cámara de Diputados **93**
4.1 El Sistema Electoral Español . . . 93
4.2 Resultados obtenidos a la Cámara de Diputados . . . 95
4.2.1 Elecciones de 1977 . . . 96
4.2.2 Elecciones de 1979 . . . 97
4.2.3 Elecciones de 1982 . . . 99
4.2.4 Elecciones de 1986 . . . 101
4.2.5 Elecciones de 1989 . . . 103
4.2.6 Elecciones de 1993 . . . 103
4.2.7 Elecciones de 1996 . . . 106
4.3 Observaciones al comportamiento del S.E.E. para la Cámara de Diputados . 109
4.4 Agravios más significativos . . . 114
4.5 Desproporcionalidad del S.E.E. a lo largo de las 7 elecciones a la Cámara de Diputados . . . 117
4.5.1 Análisis comparado de la desproporcionalidad . . . 119
4.5.2 Causas de la desproporcionalidad en España . . . 122
4.5.3 Consecuencias . . . 123

5 Alternativas al Sistema Electoral Español (dentro del marco constitucional **125**
5.1 Introducción . . . 125

5.2 Resultados obtenidos al cambiar el método d'Hondt por otro más proporcional . . . 126
5.2.1 Elecciones de 1977 y 1979 . . . 127
5.2.2 Elecciones de 1982 . . . 132
5.2.3 Elecciones de 1986 . . . 132
5.2.4 Elecciones de 1989 . . . 140
5.2.5 Elecciones de 1993 . . . 140
5.2.6 Elecciones de 1996 . . . 143
5.2.7 Comparación de los índices de proporcionalida del S.E.E. para las distintas asignaciones obtenidas con distintos valores de $t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ y 1 . . . 145
5.2.8 Conclusiones . . . 145
5.2.9 Observaciones . . . 147
5.3 Cámara de 400 diputados y cambio del método d'Hondt por otro más proporcional . . . 150
5.3.1 Resultados obtenidos al aplicar la alternativa anterior a los datos de las elecciones de las elecciones de 1993 y 1996 . . . 152

6 Circunscripciones de mayor tamaño **157**
6.1 Introducción . . . 157
6.2 Resultados obtenidos en la asignación de escaños a las Comunidades Autónomas . . . 157
6.3 Resultados por Comunidades Autónomas al simular con distintos métodos . 160
6.3.1 Elecciones de 1993 . . . 161
6.3.2 Resultados globales de las alternativas en las elecciones de 1993 . . . 169
6.3.3 Elecciones de 1996 . . . 169
6.3.4 Resultados globales de las alternativas en las elecciones de 1996 . . . 178
6.4 Desproporcionalidad . . . 180
6.5 Conclusiones . . . 181

7 Adaptación del Sistema Electoral Alemán a España **183**
7.1 Breve descripción del Sistema Electoral Alemán183 . . .
section7.2 Distritos y circunscripciones en España para adaptar el S.E.E.185
7.2.1 Tamaño de la Cámara de Diputados . . . 187
7.2.2 Asignación de distritos a las provincias . . . 187
7.2.3 Modelo Estadístico . . . 192
7.3 Simulación de resultados en los distritos . . . 195
7.4 Resumen general de la estimación en los distritos . . . 208
7.4.1 Resultados totales estimados para los partidos . . . 208

7.4.2 Resultados estimados para los partidos en las distintas Comunidades Autónomas . . . 208
7.4.3 Observaciones . . . 209
7.5 Repartos de escaños correspondientes a las listas de los partidos . . . 211
7.5.1 Primera posibilidad . . . 212
7.5.2 Resumen . . . 215
7.5.3 Segunda posibilidad . . . 220
7.6 Desproporcionalidad . . . 221

8 Proporcionalidad Global y Bonificación al partido más votado 227
8.1 Introducción . . . 227
8.2 Proporcionalidad global . . . 229
8.2.1 Escaños necesarios para alcanzar la proporcionalidad global . . . 230
8.2.2 Corrección de la desproporcionalidad global actual con 30 escaños . 232
8.2.3 Desproporcionalidad después de la corrección . . . 238
8.2.4 Reparto complementario sin lista nacional . . . 240
8.3 Proporcionalidad y bonificación al partido más votado . . . 240
8.3.1 Número de escaños para la asignación directa . . . 241
8.3.2 La alternativa PyB . . . 244
8.3.3 Resultados globales de las simulaciones para la alternativa PyB con los datos de las 7 elecciones generales (1977-1996) . . . 245
8.3.4 Primas recibidas por el primer partido . . . 248
8.3.5 Proporcionalidad con la alternativa propuesta . . . 248
8.4 Conclusiones . . . 251

9 Distribución de los escaños del Senado por Comunidades Autónomas 255
9.1 Introducción . . . 255
9.2 Algunas observaciones para la distribución actual de senadores . . . 256
9.2.1 Distribuciones proporcionales de los escaños del Senado con mínimos 257
9.2.2 Distribucción de los escaños del Senado mediante dos asignaciones independientes: una fija por Comunidad y otra proporcional de acuerdo con las poblaciones . . . 260
9.2.3 Distribución proporcional con mínimos diferentes en las distintas CC. AA. . . . 260
9.2.4 Distribución proporcional con fijos diferentes en las distintas CC.AA. 262
9.2.5 Repartos proporcionales con otros tamaños de Senado . . . 263
9.2.6 Tres alternativas diferentes con tamaño de Senado diferentes . . . 263
9.3 Conclusiones . . . 266
9.4 Sobre los métodos de asignación proporcional . . . 267
9.5 Desproporcionalidad para las alternativas desarrolladas . . . 268

Introducción

En esta Memoria se estudia el problema de la Representación Proporcional. Se demuestran resultados para algunos métodos basados en divisores, concretamente para los de la familia paramétrica, obteniendo varias caracterizaciones de la misma y otras propiedades que sugieren la consideración de subfamilias de la familia paramétrica. También se define una nueva propiedad deseable para los métodos de asignación de escaños a los partidos y se caracteriza qué métodos basados en divisores la verifican.

Asimismo, se analiza el comportamiento del Sistema Electoral Español a la Cámara de Diputados a lo largo de las 7 elecciones generales, celebradas entre 1977 y 1996, resaltando qué desproporcionalidad origina y a costa de qué partidos. En consecuencia, se elabora una amplia gama de alternativas al mismo tendentes, en su mayoría, a mejorar la proporcionalidad entre votos totales y escaños totales recibidos por cada partido.

Parte de las alternativas que se desarrollan no requieren modificar la Constitución; otras, por el contrario, no respetan las limitaciones que establece la Constitución.

El cambio del método d'Hondt, o del tamaño de las circunscripciones, la adaptacción a España del Sistema Electoral Alemán y la distribución de los escaños en varias etapas (para facilitar la gobernabilidad, además de corregir el tipo de desproporcionalidad) son algunas de las estrategias utilizadas para diseñar las diferentes alternativas al sistema electoral actual para la elección al Congreso de los Diputados.

Por último, se elaboran alternativas para distribuir los escaños del Senado entre las Comunidades Autónomas en proporción al número de habitantes de las mismas, pero garantizando una representación a cada Comunidad Autónoma.

La distribución de una cantidad, h, en proporción a otras cantidades, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, es muy simple; de tal forma que si v es la suma de estas cantidades, entonces $q_i = \frac{h}{v} v_i$ es la cuota que se asignaría a la cantidad i. Sin embargo, el problema no es tan simple

cuando las asignaciones tienen que ser todas enteras, ya que q_i es, en general, una fracción y, por tanto, no es válida como asignación.

Para ganar en claridad expositiva, y por ser el problema de reparto que mayor interés y debate suscita en España, se aborda el problema de la distribución proporcional refiriéndose continuamente a la distribución de los escaños para el Congreso de los Diputados en proporción a los votos obtenidos de los partidos en cada elección.

Sin embargo, en cuanto a dificultad matemática, el problema es idéntico a cualquier otro que requiera distribución proporcional con resultados enteros como puede ser el que aparece en las elecciones municipales, las autonómicas, las europeas o, bién, en la distribución de los escaños de una Cámara entre las circunscripciones electorales (las provincias en nuestro caso) en proporción a su número de habitantes o entre los Estados si se trata de la Cámara de un Estado Federal.

Precísamente el origen remoto del estudio de la representación proporcional arranca con el problema de la distribución de los escaños de la Cámara de los Estados Unidos entre los Estados que componían la Unión (11 inicialmente). Alexander Hamilton y Thomas Jefferson fueron quienes aportaron en 1792 los primeros métodos (Hamilton propuso el método de Restos Mayores y Jefferson inventó el mismo método que propuso posteriormente Victor Hondt). El debate sobre los métodos de reparto para la Cámara de los EE.UU. se ha mantenido desde el inicio hasta la actualidad y, de hecho, muchos de los métodos electorales inventados en Europa para distribuir escaños ya habían sido inventados, e incluso aplicados en EE. UU. Así, además de d'Hondt, el interesante método atribuido en Europa a St. Laguë había sido propuesto mucho antes por el americano Webster, incluso utilizado para distribuir los escaños de la Cámara en EE.UU. También han sido propuestos otros tres métodos - Adams, Dean y Hill - que, junto al de Jefferson y Webster, constituyen los métodos de Huntington.

Recientemente, durante las dos últimas décadas, M. Balinski ha continuado la investigación en el problema del reparto, referido en muchas ocasiones a la distribución de los representantes de la Cámara de los EE.UU. Su estudio sobre los métodos basados en divisores deja a los métodos de Huntington como ejemplos particulares de una familia infinita de métodos de reparto, para la cual ha elaborado una teoría matemática, ha descrito una serie de propiedades lógicas (y, por tanto, deseables para todo método de reparto proporcional), ha encontrado diversas caracterizaciones e incluso un teorema de incompatibilidad entre varias propiedades lógicas (teorema de interés similar al famoso teorema de Arrow).

Continuando con la utilidad de los métodos de reparto proporcional, indiquemos que se

pueden aplicar a cualquier otro tipo de elección (por ejemplo, las internas en los partidos, las sindicales, etc.). Fuera del campo de la representación, volvemos a encontrar más aplicaciones en el campo de la Economía, la Adminstración, etc.

La resolución de un problema de reparto proporcional requiere la definición, sin ambigüedad, de un método (matemáticamente una correspondencia) que transforma unos números $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ en otros $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, todos enteros. Por ejemplo, transforma votos en escaños.

La proporcionalidad exacta no es posible y, por tanto, habrá que recurrir a una aproximación. Pero, a la hora de aproximar, existen muchas posibilidades. En principio, una de las más intuitivas puede ser la propuesta por Hamilton que, en el caso de reparto de escaños entre partidos, el método consiste en asignar a cada partido la parte entera de su cuota y, después, un escaño más a cada partido con mayor resto, hasta completar los h escaños del problema. A pesar de la asiduidad con la que se propone a este método para la asignación proporcional, hay que indicar que los escaños finales los asigna sin ningún criterio de proporcionalidad puesto que está basado en los Restos Mayores y, por ello, un partido muy pequeño puede obtener un beneficio muy grande (por ejemplo, recibir un escaño con una cuota de 0.25, lo que significa 4 veces más de lo que le corresponde), sin embargo, un partido grande, por ejemplo con cuota 10.25, no puede recibir 4 veces más de lo que le corresponde (que serían 41 escaños). Es muy restrictivo con los grandes partidos y poco con los pequeños. Esto no es lo peor, sino las consecuencias que se derivan. Se pueden encontrar muchas paradojas al comparar repartos realizados con el método basado en los Restos Mayores y, además, este método no es consistente: una parte de una asignación proporcioal puede no ser proporcional.

Los métodos basados en divisores evitan las paradojas del método de Hamilton y son consistentes, pero existe una infinidad de ellos y es necesario conocer qué propiedades verifican para, así, poder elegir para cada tipo de problema el método que verifica las propiedades más interesantes para el mismo.

El estudio de los métodos de reparto proporcional se lleva a cabo en la primera parte de la Memoria, capítulos 1, 2 y 3 que, por sí misma es completa. En la segunda parte se analiza el Sistema Electoral Español para la Cámara de Diputados y se dan alternativas. Puede leerse la segunda parte sin necesidad de leer la primera. Además los capítulos de la segunda parte, practicamente, pueden leerse en cualquier orden, ya que se ha intentado que tengan autocontenido, aunque eso haya supuesto algunas repeticiones.

Casi todos los contenidos matemáticos se encuentran en los tres primeros capítulos.

En ellos se define el Problema de la Representación Proporcional, se describen los métodos conocidos y sus propiedades, se obtienen nuevas familias de métodos en divisores (subfamilias de la familia paramétrica), etc. A pesar del contenido matemático de estos capítulos, su lectura es, en buena parte, asequible para personas con una formación no matemática dado que muchos de los conceptos y propiedades se introducen con la mínima notación matemática, partiendo casi desde cero y acompañados, continuamente, de ejemplos. No obstante, si se prefiere conocer sólo las aplicaciones desarrolladas, que en nuestro caso son alternativas al Sistema Electoral Español, puede leerse la Memoria a partir del capítulo 4.

Un desglose, algo más detallado del contenido de la Memoria es el siguiente:

En el capítulo 1 se introducen algunas definiciones y notaciones que se usarán a lo largo del trabajo. Se ha planteado el Problema de la Representación Proporcional y se ha estudiado el método de los Restos Mayores o de Hamilton mostrando detalladamente sus paradojas e inconsistencia. Termina el capítulo definiendo un sistema electoral y los parámetros más significativos del mismo: el método de asignación de los escaños (también denominado fórmula electoral), el tamaño de las circunscripciones, el número de circunscripciones (que junto con el tamaño de las mismas equivale a considerar el tamaño de la Cámara) y la barrera electoral. También se recoge la definición de diferentes índices para medir la desproporcionalidad de un sistema electoral.

El capítulo 2 se ha dedicado al estudio de métodos para la búsqueda de la solución del Problema de la Representación Proporcional, que eviten todas las paradojas que produce la utilización del método de Hamilton. En lugar de partir de las cuotas de los partidos se puede tratar de minimizar la desproporcionalidad entre dos partidos cualesquiera, transfieriendo escaños de uno a otro. Si el proceso converge, se tendrá un nuevo método. Es lo que se conoce como Comparación por Pares y los cinco métodos obtenidos son los de E. V. Huntington.

La aplicación de un método de Huntington sugiere la consideración de unos divisores o umbrales para el redondeo; de tal forma que es posible definir un algoritmo, para aplicar cualquiera de ellos, donde lo único que cambia cuando sustituimos un método Huntington por otro son los divisores del primero por los del segundo. Posteriormente se ha generalizado la idea de divisores, lo cual ha dado lugar a una infinidad de métodos diferentes (quedando los de Huntington como cinco casos particulares, aunque entre ellos están algunos de los más importantes y, por supuesto, más utilizados como son d'Hondt y St. Laguë). El problema que surge es qué método elegir. La respuesta no es fácil *a priori*. Cualquier elección de método habría que calificarla de arbitraria si no va acompañada de una justificación rigurosa.

Además, otras técnicas diferentes podríamos haber considerado; por ejemplo, plantear el problema como uno de optimización y minimizar alguna función que midiese la desproporcionaldad del reparto, pero volveríamos a encontrarnos con el mismo problema que antes: qué función objetivo debemos considerar y, de nuevo, cualquier propuesta injustificada sería arbitraria. La respuesta al problema de la elección de método es considerar una lista de propiedades lógicas para un método de reparto proporcional y tratar de encontrar un método que las verifique. Al establecer una lista de propiedades puede resultar lógico incluir entre ellas "la cuota", es decir, pedir que la asiganción a cualquier partido difiera de su cuota exacta menos de un escaño.

Lamentablemente, como probamos en este capítulo, ningún método basado en divisores verifica esta propiedad. La consistencia del método de reparto sería otra propiedad a exigir y análogamente ciertos comportamientos de tipo monótono (por ejemplo, cuando existan más escaños para distribuir no debe corresponderle menos a ningún partido, etc). Sin embargo, M. Balinski ha probado su incompatibilidad. Así, a la hora de elegir un método electoral hay que renunciar a algunas propiedades deseables. La elección del método podrá partir de la elección de un conjunto de propiedades lógicas que sean compatibles. Eso justifica el interés de profundizar en el conocimiento de las propiedades de los distintos métodos.

El capítulo 2 finaliza con una introducción al problema de reparto biproporcional que aplicamos después en el capítulo 7, para una de las adaptaciones del Sistema Electoral Alemán a España. Toda la teoría correspondiente a los métodos de reparto biproporcional (o proporcionalidad entre matrices) ha sido desarrollada por M.L. Balinski y G. Demange puede verse en [23].

En el capítulo 3 estudiamos la familia paramétrica de métodos basado en divisores. Contiene la mayor parte de las aportaciones de tipo matemático que hemos obtenido. Además se introduce una nueva propiedad, que hemos denominado *propiedad* α, que entendemos es interesante para los métodos usados para la distribución de los escaños a los partidos. Viene a significar lo siguiente: a igualdad de restos en sus cuotas, un partido con más votos no debe quedar perjudicado con respecto a otro que tenga menos votos. Con menor razón se debe perjudicar al partido más votado si su resto es mayor que el del partido menos votado. Por ejemplo, ante un problema de reparto de 8 escaños entre tres partidos cuyas cuotas sean 4.8, 2.6 y 0.6, si el partido primero recibe 4 escaños y el segundo 3, tendríamos que el primero está perjudicado con respecto a su cuota y el segundo beneficiado, a pesar de que el segundo tiene menos votos y menor resto, luego el reparto 4-3-1 no verificaría la propiedad α. Lo mismo ocurre con el reparto 5-2-1.

En este capítulo se caracterizan los métodos en divisores que verifican la propiedad α. Asimismo se encuentran cacterizaciones de la propia familia paramétrica y nuevas propiedades de estos métodos. Algunas de estas propiedades se refieren a acotaciones en la asignación obtenida con un método de la familia paramétrica; estas propiedades han originado la consideración de otras subfamilias de la familia paramétrica de interés en la elección de métodos para la distribución de escaños a los partidos.

En el capítulo 4, se ha hecho un análisis del comportamiento del Sistema Electoral Español para el Congreso de los Diputados. Examinando los resultados producidos en las siete elecciones generales celebradas entre 1977 y 1996, se deduce la elevada desproporcionalidad del mismo. Asimismo, se ha comparado la desproporcionalidad con la originada por los sistemas electorales de otras democracias, apoyándonos para ello en los datos obtenidos por Lijphart [56].

La desproporcionalidad, medida con un índice u otro, es un número que sólo indica una media de los desvíos de las proporciones, sin informar sobre su distribución y, por tanto, deja escapar mucha información interesante. Es necesario profundizar en el estudio de la desproporcionalidad para valorar la importancia de la misma. Cualquiera de los índices de desproporcionalidad refleja un valor de los más altos para el Sistema Electoral Español cuando se compara con el de otros países (el Sistema Electoral Alemán se encuentra entre los más proporcionales). Esta consecuencia, en principio, no hay que considerarla negativa, puesto que a cambio podría inducir ventajas con respecto a otros sistemas electorales mucho más proporcionales. Hay que establecer más comparaciones y ver cómo se genera la desproporcionalidad.

Se observa que la desproporcionalidad no afecta por igual a partidos similares en votos, sino que entre partidos intermedios, con similar número de votos, se producen los mayores agravios. Es posible que mientras un partido recibe sólo la mitad, o menos, de los escaños que le corresponden según su cuota, otro, con menos votos que aquél, está siendo primado. Lo cual no es lógico, porque si se prima a algún partido debiera ser al más votado con objeto de facilitar la acción de gobierno. Peor aún es que los partidos castigados por el sistema electoral son siempre los mismos: el tercero y siguientes de ámbito estatal. Los principales partidos de ámbito autonómico no sufren penalización con respecto a la cuota correspondiente a sus votos totales, puesto que el número total de escaños recibidos es muy similar a esa cuota (incluso superior en ocasiones). Al comparar partidos intermedios de ámbito estatal con partidos de ámbito autonómico, similares en votos, el sistema perjudica fuertemente a los primeros. Tampoco es esto lógico, ya que se trata de representantes de toda España.

Aunque las primeras alternativas se enfocan hacia la búsqueda de una mayor proporcionalidad mediante técnicas muy diferentes, posiblemente la más interesante sea la dada en el capítulo 8 cuyo primer objetivo es corregir la desproporcionalidad entre los principales partidos y, en segundo lugar, bonificar al partido vencedor para facilitar la gobernabilidad.

En el capítulo 5 se recogen las primeras alternativas al sistema electoral actual. Se basan en cambiar el método d'Hondt por otros más proporcionales (elegidos de acuerdo con los resultados obtenidos en el capítulo 3) y en el posible aumento del tamaño del Congreso a 400 diputados; en alguna de ellas se propone disminuir a un escaño la asignación inicial a cada provincia. Todas las alternativas recogidas en este capítulo respetan las limitaciones establecidas en la Constitución. Con todas ellas se consigue disminuir la desproporcionalidad; sin embargo, hemos de indicar que la dificultad de formar mayorías absolutas aumenta.

El capítulo 6 se ha dedicado al estudio de los resultados que se obtienen cuando las circunscripciones actuales se sustituyen por otras de mayor tamaño; en este caso hemos sustituido las provincias por las Comunidades Autónomas. Luego el número de circunscripciones será 17, más Ceuta y Melilla.

Si aplicamos esta alternativa a los votos de las elecciones generales de 1993 y 1996 y calculamos los índices de desproporcionalidad observamos que han disminuido considerablemente, incluso cuando se utiliza el método d'Hondt; lo que demuestra que el método de asignación no es el único elemento del Sistema Electoral Español culpable de la desproporcionalidad, sino que se debe al efecto combinado de todos los que lo determinan (fundamentalmente, la interacción entre el tamaño pequeño de la mayoría de las circunscripciones y el método d'Hondt). Lógicamente, cuando en las alternativas presentadas en este capítulo, con circunscripciones grandes, se usa el método de St. Laguë el sistema consigue una proporcionalidad muy elevada.

Terminamos la propuesta de distintas alternativas tendentes a la mejora de la proporcionalidad del Sistema Electoral Español con un estudio, en el capítulo 7, de diversas adaptaciones del Sistema Electoral Alemán a España. Lógicamente, muy similares entre sí.

El Sistema Electoral Alemán se basa en una elección mixta. De los 658 diputados de la Cámara, una parte de ellos son elegidos por el Sistema Mayoritario en circunscripciones uninominales, los distritos y otra parte mediante listas de partido en circunscripciones plurinominales, los 16 Länder, utilizando un Sistema Proporcional con respecto a la totalidad de los votos de los partidos y a la totalidad de los escaños de la Cámara. La proporciona-

lidad está condicionada a asignar a cada partido, al menos, el número de diputados que consigue por mayoría.

Para diseñar un sistema electoral similar al alemán, es lógico aumentar el tamaño de la Cámara y considerar circunscripciones de mayor tamaño que las actuales en número similar al usado en Alemania. Así pues, hemos considerado como tamaño de Cámara, 500 escaños y como circunscripciones las Comunidades Autónomas que, aunque no tengan un tamaño similar entre sí, parece más lógico que utilizar otras que agruparan Comunidades.

En esta alternativa se nos presentó una dificultad importante para simular resultados al no existir una delimitación de los distritos electorales. Hemos obviado este problema aprovechando un modelo estadístico propuesto por M. Balinski y V. Ramírez [29] para resolver el mismo problema en México. Como con cualquier otra predicción para los resultados en distritos, puede aparecer cierto error; sin embargo, al tratarse de un sistema que liga el segundo reparto al primero y que establece una proporcionalidad entre votos totales y escaños totales de los partidos, los posibles errores del modelo considerado quedan anulados en la práctica totalidad de los casos. Lógicamente, de este modo se consigue una gran proporcionalidad. Pero, sin lugar a duda, lleva acompañados ciertos inconvenientes: si se quiere mantener unos distritos de tamaño uniforme, hay que estar modificando sus límites en cada elección (su delimitación es en sí un problema), la dificultad para formar mayorías aumenta y los partidos grandes pueden dividirse sin perder escaños (con lo que aumentará mucho el número de fuerzas en el Parlamento).

Algunas de las observaciones que acabamos de hacer son, aunque en menor medida, comunes a todas las alternativas desarrolladas hasta ahora. Por tanto, no podemos asegurar que alguna de tales alternativas tenga ventajas en todos los sentidos. Por ello, nos proponemos diseñar, en el capítulo 8, nuevas alternativas para evitar los inconvenientes citados. Ello nos ha obligado a elegir métodos algo más complejos, aunque para el elector no se modifica el sistema de votación actual ni para los partidos el tipo de listas.

Así, en el capítulo 8, se propone una nueva alternativa que, a diferencia de las anteriores tendente sólo a mejorar la proporcionalidad del Sistema Electoral Español, mejora la proporcionalidad y, además, prima al partido vencedor facilitándole la formación de mayorías absolutas. Dicha prima repercute en una pérdida proporcional de representación de los demás partidos, en lugar de ser una pérdida exclusivamente a costa del tercero y siguientes de ámbito estatal.

Los objetivos que se proponen con esta alternativa son:

a) Cada partido debe recibir, al menos, los mismos escaños que con el sistema actual.

b) Disminuir la discriminación que sufren los partidos de ámbito estatal, a partir del tercero.

c) Facilitar la gobernabilidad al partido más votado.

Evidentemente, para que a) sea compatible con b), es necesario aumentar el tamaño de la Cámara (se ha tomado igual a 400). La técnica de repartos con restricciones, introducida en el capítulo 2, ha sido necesaria constantemente para lograr los objetivos planteados.

El capítulo 9, último de la Memoria, está dedicado a estudiar la distribución de escaños al Senado. La distribución actual de senadores no responde a criterios de proporcionalidad. Se ha planteado una nueva distribución de escaños del Senado considerando como circunscripciones las Comunidades Autónomas, más Ceuta y Melilla, y se han propuesto nuevas alternativas. En ellas, la mayoría de los escaños se asignan en proporción a la población de la Comunidad Autónoma utilizando el método de St. Laguë, condicionado a asignar una representación mínima a cada Comunidad. Se ha establecido un mínimo de 4 senadores por Comunidad Autónoma, excepto Ceuta y Melilla que siempre están representadas por 1 senador.

Se han elaborado distintas alternativas para tamaños del Senado iguales a 200, 260 (correspondiente a la ley electoral para el censo de 1995) y 300 senadores. Nuevamente, la asignación proporcional sujeta a requisitos mínimos origina una proporcionalidad mucho mayor que la obtenida mediante asignaciones iniciales fijas.

Desde el capítulo 4 al 9, los textos van acompañados de Tablas numéricas que los justifican con rigor, y de gráficas que facilitan aún más la lectura.

Por último, en el Apéndice se recogen los datos y algunos programas elaborados para el procesamiento de los mismos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

En cualquier tipo de representación, ya sea parlamentaria, munipical, sindical, etc., es necesario elegir un número reducido de personas que toman decisiones en nombre de un colectivo mucho más amplio. Tal elección, está regulada por una ley cuyo núcleo principal describe cómo se vota y cómo se transforman los votos en representación de las diferentes candidaturas, es, el Sistema Electoral.

Los sistemas electorales más usados son los mayoritarios y los proporcionales, aunque no son los únicos, y, posiblemente, en el futuro será necesario recurrir a fórmulas más complejas.

En términos elementales, se conoce como Sistema Mayoritario aquél que asigna todos los representantes a la candidatura vencedora; es decir, a la que más votos ha obtenido. Por Sistema Proporcional se entiende aquél que trata de asignar a cada candidatura un número de representantes en proporción a los votos obtenidos. Aparentemente se trata de dos únicas filosofías, excluyentes, que producen resultados muy alejados. Sin embargo, no es así.

De antemano, tanto un sistema como el otro admiten diversas variantes. El Sistema Mayoritario, que suele utilizar distritos uninominales, puede asignar los representantes por mayoría simple, por mayoría absoluta e ir a una segunda elección si ningún partido la consigue, o bién por mayoría absoluta mediante voto transferible etc. Para la asignación proporcional también se han usado métodos muy variados (Restos Mayores, d'Hondt, St. Laguë, etc, son algunos de ellos), de hecho, existe una infinidad de métodos diferentes. Combinando esta variedad de métodos con diferentes tamaños de circunscripción, dispo-

nemos de una gama muy amplia de sistemas electorales, hasta el punto que es posible escoger dos sistemas electorales de tipo proporcional cuyos resultados difieran bastante, de modo que los resultados de uno de ellos sean más parecidos a los de un Sistema Mayoritario que a los del otro de tipo proporcional (bastaría para ello elegir las circunscripciones del primer sistema proporcional muy pequeñas y las del segundo muy grandes, aunque la fórmula para asignar los escaños sea la misma en ambos).

La diversidad de sistemas electorales es aún mayor. Por ejemplo, en los mayoritarios con circunscripciones plurinominales, los hay que asignan la mayor parte de los escaños al partido vencedor, y los restantes al segundo más votado. Es el caso de la elección de los senadores en México que según, con la legislación de 1996 el partido vencedor, en cada Estado, consigue 2 senadores y el segundo partido más votado recibe 1 senador, independientemente de votos que obtenga cada uno. Asimismo, en elecciones internas de algunos partidos la lista más votada consigue un alto porcentaje de puestos, por ejemplo el 75%, y la segunda consigue los restantes. Por otra parte se pueden combinar repartos a más de un nivel; por ejemplo, asignar parte de los representantes por mayoría y parte por representación proporcional. Los últimos sistemas electorales de México para el Congreso de los Diputados han establecido asignar 300 diputados por mayoría simple en otros tantos distritos uninominales y 200 en 5 circunscripciones de 40 representantes cada una, usando representación proporcional. Ambas asignaciones son independientes, aunque exige algunas limitaciones. Alemania (ver el capítulo número 7 de esta Memoria) hace también dos repartos de este tipo, con 328 escaños para cada uno de ellos, pero la asignación proporcional está condicionada por los resultados en los distritos uninominales. Los resultados de México y Alemania no tienen parecido; el sistema electoral de México se comporta de forma algo parecida a un sistema mayoritario, corregido con una dosis de proporcionalidad, mientras que el Sistema Electoral Alemán es uno de los más proporcionales. La gran diferencia consiste en ligar el reparto proporcional a los resultados del mayoritario o hacerlos independientes.

Si se opta por un sistema electoral de tipo mayoritario, el problema de transformar los votos en escaños no tiene gran dificultad. Sin embargo, cuando se opta por la representación proporcional, el problema es mucho más complejo, y más interesante desde el punto de vista matemático, pues hay que elegir una función que transforme unos números (los votos) en otros números (los escaños).

Lógicamente, el problema de la representación proporcional radica en el hecho de que la proporcionalidad exacta no es posible (salvo raras excepciones), puesto que las asignaciones tienen que ser enteras y las proporciones no suelen serlo. Hay que aproximar las proporciones, pero ¿qué aproximación se elige? El siguiente ejemplo muestra la dificultad

de hacer tal elección.

Partidos	Votos	Cuotas	Adams	RM	St. Laguë	$M^{\frac{2}{3}}$	d'Hondt
1	464 400	15.48	14	15	16	16	17
2	72 900	2.43	3	2	2	3	2
3	44 700	1.49	2	2	1	1	1
4	18 000	0.60	1	1	1	0	0
Total	600 000	20.00	20	20	20	20	20

Tabla 1.1: Resultados obtenidos con distintos métodos.

Como se observa en la Tabla 1.1, se trata de una circunscripción en la que hay que distribuir 20 representantes entre cuatro partidos 1, 2, 3 y 4; que han recibido 600 000 votos en total. Por tanto, a los 464 400 votos del partido A corresponde una proporción exacta, o cuota, igual a $\frac{464400}{600000/20} = \frac{464400}{30000} = 15.48$ (como figura en la columna de cuotas), etc. A la vista de las cuotas, ¿qué distribución de los 20 escaños es la más adecuada? La respuesta no es inmediata. Las cinco últimas columnas muestran la solución obtenida por cada uno de los métodos de Adams, Restos Mayores, St. Laguë, $M^{\frac{2}{3}}$ y d'Hondt, (respectivamente), todos ellos son métodos que pueden usarse para la distribuci´n proporcional de escaños y que se verán en esta Memoria. Así, para un mismo problema, con sólo cuatro partidos, cinco métodos han dado cinco soluciones diferentes para la distribución de los 20 representantes.

En principio, en el reparto proporcional, se espera que cada partido reciba un número de escaños muy próximo a su cuota. Así, para el ejemplo anterior, se podría esperar que el partido 1 no recibiese más de 16 representantes (verificase la cuota superior) ni menos de 15 (verificase la cuota inferior), lo que en conjunto, significaría verificar la cuota. Puede ocurrir que no se satisfaga la cuota. En el ejemplo anterior, ni el método de Adams ni el d'Hondt verifican la cuota. Adams no verifica la cuota inferior. El método d'Hondt no satisface la cuota superior. Para nuestro ejemplo, los tres métodos restantes verifican la cuota; sin embargo, para $M^{\frac{2}{3}}$ y St. Laguë, es posible dar ejemplos para los que no verifican la cuota, como se verá más adelante.

Cuota y cuota ajustada

El cálculo de las cuotas o proporciones exactas es muy simple. Sin embargo, a veces hay que modificar el concepto de cuota. Supongamos que, en el ejemplo anterior, 1, 2, 3 y 4 fuesen 4 circunscripciones electorales de una Comunidad cuyo Parlamento lo constituye una Cámara con 20 representantes y que la siguiente columna en lugar de votos

significa habitantes de cada circunscripción. Supongamos que los 20 representantes deben distribuirse en proporción a los habitantes de las cicunscripciones, pero que ninguna de ellas debe obtener menos de 2 representantes. ¿Cuál es la distribución más adecuada en este caso? De antemano, ninguna de las mostradas anteriormente es válida porque cada circunscripción debe recibir, al menos, 2 representantes. Es evidente que 4, aunque reciba sólo 2, estará sobrerrepresentada, pero se debe a una decisión política que tenemos que acatar (incluso el valor 2 podría haber sido otro mucho mayor). ¿Cómo resolver el problema? En primer lugar, vamos a establecer unas nuevas cuotas. Si la distribución proporcional no tuviese que ser entera trataríamos de asignar a cada circunscripción su cuota exacta, pero ¿cuánto valen las cuotas con la restricción introducida? Lógicamente la nueva cuota para 3 y 4 sería 2, y la sobrerrepresentación obtenida por 3 y 4 tienen que perderla 1 y 2 proporcionalmente. En el ejemplo anterior para calcular las cuotas se dividen los votos de cada partido entre 30000. Ahora hay que aumentar este divisor para que la suma siga siendo 20. Concretamente será el valor x tal que

$$2+2+\frac{464400}{x}+\frac{72900}{x}=20$$

con lo cual $x = 33581.25$ y las nuevas cuotas son: 1, 13.83; 2, 2.17; 3, 2; y 4, 2. A estas cuotas se les denomina cuotas ajustadas (incluyen las restricciones).

Hemos considerado unas restricciones mínimas pero de forma análoga podrían ser restricciones máximas, o existir ambas simultáneamente. De hecho, podemos considerar que todo problema está afectado de restricciones mínimas y máximas, ya que de no existir restricciones mínimas equivale a que esas sean cero y de no existir restricciones máximas equivale a que valgan el total de representantes a distribuir.

Así pues, un problema de distribución proporcional de escaños, vendrá dado por el número total, h, de puestos a distribuir, por n cantidades (votos, poblaciones, etc.), entre las que se deba efectuar la distribución proporcional, y por las limitaciones mínimas, **mín**, y máximas, **máx**, establecidas. Dependiendo del método M elegido la asignación, **a**, de los representantes será una u otra. La elección del método debe hacerse en función de las propiedades que deseemos.

Pasamos a sistematizar matemáticamente las definiciones que hemos dado anteriormente e incluir algunas notaciones más que nos serán útiles a lo largo de la Memoria. Indiquemos que, generalmente por sencillez y claridad, el problema de la representación proporcional se presenta continuamente aplicado a la elección de la Cámara de Diputados en España, pero los resultados son válidos para cualquier otro problema de distribución de una cantidad entera en proporción a otros números que requieran una solución entera.

1.2 Notaciones y definiciones

Como es habitual, los símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ representarán, respectivamente, los conjuntos de números reales, enteros y naturales.

Para $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la suma de los valores absolutos de las componentes de $\mathbf{x}$ puede notarse usando el símbolo $\|.\|_1$ (la norma de la suma en $\mathbb{R}^n$); es decir, $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_i |x_i|$.

h es el **tamaño** o número de escaños de la circunscripción electoral y H será el tamaño de la Cámara.

n será el **número de partidos** que concurren a unas elecciones en la circunscripción correspondiente. Análogamente, m será el número de circunscripciones.

v_i es el número de votos que ha obtenido en unas elecciones el partido i en una determinada circunscripción.

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $v_i \geq 0$ y $\mathbf{v} \neq 0$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, es el **vector de votos**.

$\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$, $q_i \geq 0$, es el **vector de cuotas**, donde

$q_i = \dfrac{h.v_i}{\|\mathbf{v}\|_1}$, es la cuota del partido i, cuando no existen restricciones mínimas ni máximas.

Si existen **restricciones** se notarán por:
mín $= (m_1, m_2, ..., m_n)$, $m_i \geq 0$ y **mín** $\in \mathbb{Z}^n$, las mínimas, y por
máx $= (t_1, t_2, ..., t_n)$, $t_i \geq 0$ y **máx** $\in \mathbb{Z}^n$, las máximas.

Entonces para obtener el vector de cuotas (cuotas ajustadas, en este caso) es necesario calcular el valor x para el cual

$$\sum_{i=1}^{i=n} \text{mediana}\left\{m_i, \frac{v_i}{x}, t_i\right\} = h.$$

Encontrado x, $q_i = \text{mediana}\left\{m_i, \dfrac{v_i}{x}, t_i\right\}$, es el valor de la **cuota ajustada** del partido i, (recordemos que si $x \leq y \leq z$, entonces mediana$\{x, y, z\} = y$). No necesitamos para las cuotas ajustadas una notación diferente de la usada para las cuotas, ya que siempre podemos considerar que se trata de cuotas ajustadas, puesto que la ausencia de restricciones

equivale a $m_i = 0$, $t_i = h$, para todo i. Normalmente se entenderá que las cuotas están ordenadas de mayor a menor, $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$.

Por $\lfloor q_i \rfloor$ notamos la **cuota inferior** para el partido i, o redondeo por defecto de q_i; es decir, el mayor entero que es menor o igual que q_i. De tal forma que $q_i = \lfloor q_i \rfloor + r_i$, siendo r_i el resto o fracción de escaños de la cuota, $r_i \in [0, 1)$.

La asignación a_i a un partido, i, de cuota $q_i = \lfloor q_i \rfloor + r_i$, se dice, que **viola la cuota inferior** si $a_i < \lfloor q_i \rfloor$.

Análogamente, notamos por $\lceil q_i \rceil$ la **cuota superior** para el partido i, o redondeo por exceso de q_i; es decir, el menor entero que es mayor o igual que q_i.

La asignación a_i a un partido, i, cuya cuota es $q_i = \lfloor q_i \rfloor + r_i$, se dice que **viola la cuota superior** si $a_i > \lceil q_i \rceil$.

En general, un **problema de asignación de escaños** viene dado por una cuaterna del tipo $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con $v_i \geq 0$ y $\mathbf{v} \neq 0$; $\mathbf{mín}$ y $\mathbf{máx} \in \mathbb{Z}^n$, $0 \leq m_i \leq t_i$; y $h \in \mathbb{N}$.

Una posible **solución**, para el problema $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, es un vector $\mathbf{a}$ de componentes enteras, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tal que $m_i \leq a_i \leq t_i$ y $\|\mathbf{a}\|_1 = h$.

La condición necesaria y suficiente para que este problema tenga solución es que

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \leq h \leq \sum_{i=1}^{i=n} t_i;$$

es decir, que las restricciones sean compatibles. Siempre consideraremos problemas que tengan solución.

Un **método de asignación** de escaños, M, es un conjunto de reglas que, para cada problema $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, asigna, al menos, una solución. El conjunto de todas **las soluciones** obtenidas con un método M de reparto de escaños lo notamos por $M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$. Lógicamente, este conjunto puede tener más de una solución. Basta pensar, por ejemplo, en los posibles repartos de un número impar de escaños entre dos partidos que han obtenido igual número de votos; este empate hace que cualquier método que se use dé como respuesta un número par de soluciones.

Una de las posibles asignaciones, **a**, obtenidas con el método M se nota por

$$\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h).$$

Escribiremos $\mathbf{a} = M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ cuando **a** sea la única solución que da el método M para el problema $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$.

Cuando no existan restricciones, escribiremos $M(\mathbf{v}; h)$ y si, en lugar del vector de votos, se tiene el de cuotas, sería suficiente con escribir $M(\mathbf{q})$ para representar el conjunto de soluciones del problema.

1.3 El problema de representación proporcional (r.p.)

El problema de representación proporcional puede plantearse en los siguientes términos:

Sean los vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n) > \mathbf{0}$, $\mathbf{mín} = (m_1, m_2 \ldots, m_n) \geq \mathbf{0}$ *y* $\mathbf{máx} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \geq \mathbf{0}$, *de componentes enteras no negativas, y* $h \in \mathbb{N}$, *se trata de hallar, si existe, un vector* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *tal que* $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$, *con* $a_i \geq 0$, *para todo i, que satisfaga* $\|\mathbf{a}\|_1 := \sum_i a_i = h$, $\mathbf{mín} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{máx}$ *y* **a** *sea aproximadamente proporcional a* **v**.

Dado que, en general, no es posible obtener **a** exactamente proporcional a **v**, hemos de contentarnos con una aproximación de tal proporcionalidad. Así, aunque hablemos siempre de representación proporcional, nos estamos refiriendo a alguna aproximación de la misma.

Por tanto, una solución o **asignación** será una n-upla $(a_1, a_2, ..., a_n)$, de números enteros, no negativos, "próximos" a las cuotas y que sumen h.

Para construir métodos de asignación se puede optar por establecer formas de medir en $\mathbb{R}^n$ y minimizar la diferencia absoluta entre los vectores de cuotas y asignaciones. Es decir, la obtención de un método se puede plantear como una técnica para resolver un problema de optimización. Pero no es el único camino.

Los diferentes métodos de asignación permiten obtener, mediante diferentes reglas, soluciones al problema; es decir aproximaciones de las cuotas por cantidades enteras.

Por ejemplo, pueden establecerse diversas propiedades relacionadas con la proporcionalidad y ver si es posible definir un método que las cumpla. Incluso la optimización no tiene que establecerse necesariamente como minimizar una distancia entre cuotas y asignaciones, puesto que la proporcionalidad se puede escribir de muchas otras formas. Todo ello, da lugar a que puedan definirse muchos métodos electorales para resolver el problema

de la r.p. El primero de ellos lo estudiaremos a continuación y los restantes se introducen en el capítulo siguiente.

1.4 Minimizando $\|\mathbf{q}-\mathbf{a}\|_1$. El método de los Restos Mayores o de Hamilton.

Un primer método para obtener la solución **a** de un problema de asignación de escaños se basa en minimizar $\|\mathbf{a}-\mathbf{q}\|_1$.

Análogamente podríamos tratar de minimizar la expresión $(\sum |a_i - q_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in \mathbb{N}$, es decir, encontrar **a** tal que $\|\mathbf{a}-\mathbf{q}\|_p$ sea mínimo. Como es conocido, la respuesta es la que da el método de los Restos Mayores o de Hamilton, que consiste

1º) En primer lugar, se asigna a cada partido, i, un número de escaños igual a la parte entera de su cuota ajustada, es decir, se asigna $\lfloor q_i \rfloor$.

2º) Si no se han asignado todos los escaños, h, se calculan los restos r_i correspondientes a cada partido i, $r_i = q_i - \lfloor q_i \rfloor$. A continuación se ordenan los restos de mayor a menor. Por comodidad, supongamos que los mayores corresponden a los partidos i, j, k,... respectivamente $r_i \geq r_j \geq r_k \geq \ldots$.

3º) Se le asigna un escaño adicional a cada uno de los partidos con mayor resto, hasta completar los h escaños, es decir, si queda un escaño por asignar, le corresponde al partido i, si quedan dos escaños corresponden a los partidos i y j, etc.

Observaciones.

1ª) La ordenación de los restos es única si todos los r_i son distintos y, en tal caso, el método de los Restos Mayores da una solución única para el problema correspondiente.

Ejemplo 1.4.1 *Sea el problema cuyo vector de cuotas es* $\mathbf{q} = (5.9, 4.3, 3.6, 2.5, 1.4, 1.2, 0.1)$ *el número de escaños a asignar* $h = 19$, *la solución que obtenemos aplicando el método de los Restos Mayores es* $\mathbf{a} = (6, 4, 4, 3, 1, 1, 0)$, *ya que las cuotas inferiores son* $(5, 4, 3, 2, 1, 1, 0)$ *y los tres escaños que quedan corresponden a los partidos primero tercero y cuarto, que son los que tienen mayor resto.*

2ª) Si los restos no son todos diferentes puede existir solución única o más de una solución, como muestran los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.4.2 *Sea el problema cuyo vector de cuotas es* $\mathbf{q} = (5.6, 4.6, 2.5, 1.5, 1.2, 0.6)$; *el número de escaños a asignar* $h = 16$. *La única solución que obtenemos aplicando el método de los Restos Mayores es* $\mathbf{a} = (6, 5, 2, 1, 1, 1)$.

Ejemplo 1.4.3 *Sea el problema cuyo vector de cuotas es* $\mathbf{q} = (5.6, 4.6, 2.7, 1.3, 1.2, 0.6)$; *el número de escaños a asignar* $h = 16$. *Las soluciones que obtenemos aplicando el método de los Restos Mayores son* $\mathbf{a}_1 = (6, 5, 3, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (6, 4, 3, 1, 1, 1)$ *y* $\mathbf{a}_3 = (5, 5, 3, 1, 1, 1)$

3ª) Cualquier solución, $\mathbf{a}$, obtenida por el método de los Restos Mayores verifica la cuota

- Verifica la cuota inferior porque cada partido recibe, al menos, un número de escaños igual al redondeo por defecto de su cuota.
- Verifica la cuota superior porque cada partido recibe, a lo sumo, el redondeo por exceso de su cuota (los que tienen resto mayor).

Por tanto, el método de los Restos Mayores conduce a soluciones que difieren de la cuota en menos de 1 escaño para cualquier partido. Esto anima a usarlo en problemas de asignación. Pero para conocer un método, es necesario saber cómo reacciona frente a cambios en los datos del problema, es decir, cómo cambian las soluciones en función de los datos del problema. Los ejemplos que se dan en el apartado siguiente muestran diferentes paradojas, que aparecen cuando se utiliza el método de los Restos Mayores.

1.5 Paradojas del método de Restos Mayores

1.5.1 Paradoja de Alabama

¿Es lógico que si aumentase el tamaño h de una circunscripción, para una misma distribución de votos, un partido reciba un escaño menos?, o ¿es lógico que, en España, si el tamaño del Congreso pasara de 350 a 351 escaños, sin variar el censo de las provincias, una provincia reciba un escaño menos al asignar 351 de los que le correspondían al asignar 350? Este efecto extraño, puede ocurrir cuando se usa el método de los Restos Mayores y se conoce como **Paradoja de Alabama;** fué descubierta en 1882 al observar que si la Cámara de los EE.UU. tenía 299 representantes, el estado de Alabama recibía 8 representantes, al usar el método de Hamilton, pero si la Cámara tenía 300 Alabama recibía sólo 7 representantes (Texas e Illinois aumentaban en un representante).

El mismo efecto se puede producir en la distribución de los escaños de una circunscripción, entre los partidos: un partido puede recibir menos escaños cuando se reparten más escaños.

Veamos, mediante el ejemplo que muestran las Tablas 1.2 y 1.3, que el método de los Restos Mayores presenta la Paradoja de Alabama.

Observamos en la Tabla 1.2 que el cuarto partido recibe un escaño cuando h=6.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	208 560	3.49	3
2	82 000	1.37	1
3	38 000	0.64	1
4	30 000	0.50	1
Totales	358 560	6..00	6

Tabla 1.2: Asignación de 6 escaños a cuatro partidos con el método de Restos Mayores.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	208 560	4.07	4
2	82 000	1.60	2
3	38 000	0.75	1
4	30 000	0.58	0
Totales	358 560	7.00	7

Tabla 1.3: Asignación de 7 escaños a cuatro partidos con el método de Restos Mayores.

En la Tabla 1.3, observamos cómo aparece la paradoja de Alabama, ya que el cuarto partido no recibe ningún escaño, con h=7 mientras que al repartir 6 escaños le correspondía uno.

En España se usa el Método de los Restos Mayores para la asignación de los escaños del Congreso de los Diputados a las provincias.

La Constitución permite fijar el tamaño del Congreso H entre 300 y 400 escaños.

Cuando se calculan los repartos correspondientes para los posibles valores de H aparece con frecuencia la paradoja de Alabama. Así, podemos comprobar que con el censo de 1993, para los valores de $H = 364$ y $H = 371$, se presenta (simultáneamente) para las provincias de Salamanca y Zamora, que pierden un escaño cada una al aumentar el tamaño de la Cámara en 7 escaños. La Tabla 1.4 recoge el reparto para estas dos provincias y el correspondiente a las otras 9 provincias que ganan un escaño.

1.5.2 Paradoja de los votos

Si n partidos han concurrido a dos elecciones diferentes en una misma circunscripción de tamaño h en ambas elecciones, y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores de votos obtenidos por dichos partidos en la primera y segunda elección, respectivamente, es lógico que $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ puesto que, unos partidos habrán aumentado sus votos y otros habrán perdido votos en la

Provincia	Censo	H=364	H=371
Madrid	5 084 966	36	37
Barcelona	4 712 850	33	34
Valencia	2 165 455	16	17
Coruña (La)	1 119 295	9	10
Asturias	1 112 415	9	10
Cádiz	1 104 248	9	10
Granada	817 005	7	8
Palmas (Las)	809 981	7	8
Badajoz	665 406	6	7
Salamanca	363 072	**5**	**4**
Zamora	214 705	**4**	**3**
39 790 955, censo total de España en 1993.			

Tabla 1.4: Paradoja de Alabama en la asignación de los escaños a las provincias.

segunda elección respecto de la primera. Además, el porcentaje de participación en ambas elecciones será diferente. Por tanto, en general, cada componente de $\mathbf{v}_2$ será diferente de la correspondiente de $\mathbf{v}_1$. Pero, supongamos que para dos partidos 2 y 3 se da la siguiente situación: el partido 2 ha obtenido en la segunda elección más votos que en la primera y con respecto al partido 3 ocurre lo contrario. Entonces, parece lógico que en la segunda elección no debiera ganar el partido 3 más escaños que en la primera, al mismo tiempo que el partido 2 pierde algún escaño. Sin embargo, observamos, en el ejemplo de las Tablas 1.5 y 1.6, que utilizando el método de los Restos Mayores para el reparto de escaños, esa situación paradójica puede darse.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	567 000	5.67	6
2	267 000	2.67	3
3	166 000	1.66	1
Totales	1 000 000	10.00	10

Tabla 1.5: Asignación de 10 escaños, con el método de los Restos Mayores.

Observamos que el tercer partido ha obtenido un escaño más en la segunda elección, habiendo perdido votos en relación con la elección precedente. Sin embargo, el segundo partido ha perdido un escaño habiendo obtenido más votos que en la elección precedente.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	650 000	6.00	6
2	269 000	2.48	2
3	164 000	1.52	2
Totales	1 083 000	10.00	10

Tabla 1.6: Asignación de 10 escaños, con el método de los Restos Mayores.

1.5.3 Paradoja de los Nuevos Estados o de las nuevas circunscripciones.

Se suele llamar de los Nuevos Estados porque puede aparecer cuando un nuevo Estado se incorpora para participar en el reparto de escaños en una Unión de Estados. El número de Estados en Estados Unidos ha ido aumentando desde 1791, año en que se constituyó con 11, hasta alcanzar el número de 50 Estados que hay en la actualidad. También podría aplicarse al número de Estados que componen la Unión Europea.

En EE.UU. los censos se revisan cada 10 años, el censo se considera constante durante cada período. Si durante un período se agrega un Estado más, y el tamaño de la Cámara permanece fijo, a ningún Estado le deberían corresponder más escaños, sino que alguno de ellos debería perder algún escaño en beneficio del nuevo Estado.

También puede presentarse esta paradoja si el número de partidos que concurren en una circunscripción se ve incrementado. De modo más preciso, supongamos que se van a asignar h escaños entre n partidos, si se incluye un partido más, digamos el $n+1$, a ninguno de los n primeros debieran corresponder más escaños que antes de incluir para el reparto a éste último partido.

El método de los Restos Mayores puede no verificar el principio anterior como se observa en el ejemplo de las Tablas 1.7 y 1.8.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	47 000	4.7	5
2	37 000	3.7	4
3	16 000	1.6	1
Totales	100 000	10.0	10

Tabla 1.7: Asignación de 10 escaños a tres partidos, con el método de los Restos Mayoores.

Podemos observar, en la Tabla 1.8 que al participar en el reparto el cuarto partido, el tercer partido ha obtenido un escaño más y los dos primeros un escaño menos.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	47 000	4.31	4
2	37 000	3.39	3
3	16 000	1.47	2
4	9 000	0.83	1
Totales	109 000	10.00	10

Tabla 1.8: Asignación de 10 escaños a cuatro partidos, con el método de los Restos Mayores.

1.5.4 Inconsistencia

Podemos observar en las Tablas 1.9 y 1.10 que los partidos 1 y 2, manteniendo el mismo múmero de votos, reciben entre los dos el mismo número de escaños, 5 entre ambos en cada Tabla sin embargo, las asignaciones son distintas. En el primer caso, estos partidos reciben 3 y 2 escaños, respectivamente, mientras que en el segundo caso reciben 4 y 1.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	351 000	3.40	3
2	149 000	1.45	2
3	800 000	7.77	8
4	245 000	2.38	2
Totales	1 545 000	15.00	15

Tabla 1.9: Asignación de 15 escaños a cuatro partidos, con el método de los Restos Mayores. Entre los dos primeros, reciben 5 escaños.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	351 000	3.51	4
2	149 000	1.49	1
Totales	500 000	5.00	5

Tabla 1.10: Asignación de 5 escaños a dos partidos. Produce asignaciones diferentes frente a situaciones parcialmente idénticas.

Así, al analizar de forma separada una parte de una asignación proporcional, hemos encontrado que la asignación para las componentes de esa parte "no es proporcional" cuando se usa como método de reparto el de los Restos Mayores. Es decir, el método no es consistente.

De hecho, la idea en la que se basa el método de los Restos Mayores o de Hamilton

no corresponde completamente a una idea de proporcionalidad: parte de los escaños se asignan en función de los restos de las cuotas, sin tener en cuenta la parte entera de las mismas.

1.5.5 Otras observaciones con respecto al método de los Restos Mayores

Los votos de los partidos que no obtienen escaño inciden en el reparto perjudicando a los partidos más votados.

En la Tabla 1.11 intervienen 6 partidos en el reparto, pero sólo los tres más votados han conseguido escaños y el tercero de ellos ha obtenido 2 escaños. Si sólo intervienen 3 partidos en el reparto, tal y como se ve en la Tabla 1.12, el tercer partido obtendría sólo 1 escaño en beneficio del segundo.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	35 900	3.59	4
2	25 000	2.50	2
3	15 200	1.52	2
4	1 200	0.12	0
5	1 300	0.13	0
6	1 400	0.14	0
Totales	80 000	8.00	8

Tabla 1.11: Asignación de 8 escaños a seis partidos, con el método de los Restos Mayores.

Partido	Votos	Cuota	Escaños
1	35 900	3.77	4
2	25 000	2.63	3
3	15 200	1.60	1
Totales	76 100	8.00	8

Tabla 1.12: Asignación de 8 escaños con el método de los Restos Mayores.

No prima coaliciones

Si consideramos que los votos obtenidos por una coalición son la suma de los votos obtenidos separadamente por los partidos que la integran, puede resultar que el número de escaños obtenidos por dicha coalición de partidos sea menor, mayor ó igual que la suma de los escaños que hubieran obtenido por separado. Luego, el método de los Restos Mayores

Part. i	Vot. v_i	Cuot. q_i	Esc. a_i
1	36 500	3.65	4
2	25 500	2.55	3
3	13 000	1.30	1
4	5 000	0.50	0
Totales	80 000	8.00	8

Tabla 1.13: Asignación de 8 escaños a cuatro partidos, llendo por separado a las elecciones. La coalición 1+2 perdería 1 escaño, la 3+4 gana 1 escaño, la 1+2+3 origina un empate, las demás no pierden ni ganan escaño.

no prima las coaliciones ni prima a los partidos más votados. En la Tabla 1.13 se recoge un ejemplo que corrobora este hecho.

En un problema de asignación, en el que utilicemos para calcular la solución el método de los Restos Mayores, es posible que un partido con un número de votos muy pequeño obtenga representación. Por ejemplo, sea el vector de cuotas $\mathbf{q} = (10.2^-, 9.2, 6.2, 3.2, 0.2^+)$, donde con 10.2^- indicamos que la cuota del primer partido es muy próxima a 10.2, pero algo menor, y con 0.2^+ indicamos que la cuota del quinto partido es algo superior a 0.2. El quinto partido, recibe un escaño, aproximadamente cinco veces más de lo que vale su cuota, sin embargo, el primer partido no puede recibir un beneficio similar.

Umbrales

El mínimo porcentaje de votos para el que un partido puede conseguir un escaño, en el supuesto de que se le den las condiciones más favorables es muy bajo, cuando se usa el método de los Restos Mayores. A ese mínimo, le denominamos el *umbral de representación o inclusión.*

Es evidente que si todos los restos r_i valen $\dfrac{1}{n}$ a uno de ellos le corresponde, un escaño. De tal forma que si $q_n = \dfrac{1}{n}$, el partido n puede obtener un escaño con el método de los Restos Mayores. Por tanto, el *umbral mínimo de representación o inclusión es* $\dfrac{100}{h\,n}\%$.

Por ejemplo si $n = h = 10$, un partido, con sólo superar el 1% de los votos, puede obtener un escaño si la distribución de votos entre los demás es favorable.

Para evitar una situación de este tipo, los sistemas electorales suelen incluir un umbral legal o barrera electoral que los partidos deben superar para tener derecho a participar en

la asignación de escaños.

Para que un partido, i, no obtenga representación con el método de los Restos Mayores, en el caso más desfavorable, es necesario que su cuota sea $q_i \leq \frac{n-1}{n}$.

En efecto: el caso más desfavorable corresponde a unas cuotas cuyos restos $r_i = r$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y suman $n-1$; es decir, $r = \frac{n-1}{n}$. Entonces, el partido n, con cuota $q_n = \frac{n-1}{n}$, puede no recibir escaños.

1.6 Parámetros de un Sistema Electoral. Índices de proporcionalidad

La causa de que se produzcan situaciones como las que hemos descrito, se deben, fundamentalmente, al sistema electoral utilizado.

Un sistema electoral es un conjunto de reglas electorales esencialmente inalteradas bajo las que se han celebrado una o más elecciones sucesivas en una democracia concreta.

El número de sistemas posibles electorales es en principio infinito, aunque el número de sistemas electorales propuestos a lo largo de la Historia es menor, y aún es menor el número de los que han sido efectivamente utilizados.

En un sistema electoral intervienen un conjunto de parámetros que son las características básicas del mismo, estos parámetros son:

Método asignación (también denominado fórmula electoral), tamaño de las circunscripciones; número de circunscripciones (que junto con el tamaño de las mismas equivale a considerar el tamaño de la Cámara) y barrera electoral.

Los parámetros, que tienen mayor incidencia sobre la proporcionalidad de la elección y sobre la asignación de escaños a partidos son: los dos primeros; por eso, serán sobre los que más modificaciones se harán en el diseño de sistemas electorales que se presentan en esta Memoria como alternativas al Sistema Electoral Español.

La barrera electoral es menos importante. Así mismo, el tamaño de la Cámara, aunque oscile algo, será siempre entre valores altos, sin que repercuta demasiado en la proporcionalidad en la asignación global de escaños. Sin embargo, la desproporcionalidad puede

aumentar mucho cuando en lugar de pocas circunscripciones grandes se tengan muchas pequeñas. Se verá en las aplicaciones en los capítulos finales. Ahora vemos qué fórmulas se establecen para medir la desproporcionalidad.

Dado que la representación proporcional exacta no es posible y que distintos métodos de representación proporcional dan resultados diferentes, se plantea medir de alguna forma la desproporcionalidad de un sistema electoral.

Lo normal, es establecer una medida de la diferencia entre los porcentajes de votos totales y los porcentajes de escaños totales de los partidos.

1.6.1 Índices para medir la desproporcionalidad de un Sistema Electoral

Podemos referirnos como medidas de desproporcionalidad a las medidas de la desviación entre el porcentaje de escaños y el de votos.

Una de las medidas es la propuesta por Douglas W. Rae; utiliza la medida de las desviaciones, la suma de las diferencias absolutas entre los porcentajes de votos y los de escaños y la divide por el número n total de partidos. El índice de Rae se define por

$$IR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} |\%v_i - \%\ e_i| .$$

Donde $\%v_i$ indica el tanto por ciento de votos totales del partido i y $\%\ e_i$ el tanto por ciento de los escaños totales del partido i.

Este índice es muy sensible a la presencia de partidos muy pequeños. Por tanto, no es lógico usarlo.

John Loosemore y Victor J. Hanby [27] propusieron un índice que evita el problema de Rae y es una medida de desproporcionalidad, ampliamente utilizada. Se define por

$$DA = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\%v_i - \%\ e_i| .$$

Si en lugar de medir la desproporcionalidad se prefiere hablar de proporcionalidad de un sistema se entenderá que, en términos porcentuales, la máxima es 100. Por eso, un índice (relacionado con DA) para medir la proporcionalidad es el índice de Rose cuyo valor es $I = 100 - DA$.

Michael Gallagher [27] ha propuesto recientemente, uno de los índices más aceptados para medir la proporcionalidad. Corresponde a la idea matemática de los mínimos cuadrados. Se define por

$$MC = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\%v_i - \%\ e_i)^2}.$$

Con este índice se quita importancia a los desviaciones pequeñas y por tanto a la no representación de partidos pequeños.

Capítulo 2

Métodos basados en divisores

Como se ha visto en el primer capítulo, el método de asignación de escaños llamado de los Restos Mayores (o de Hamilton), tiene el inconveniente de presentar paradojas. Además, no es consistente. Este último inconveniente es muy importante, ya que un problema de asignación proporcional de escaños es un problema de reparto equitativo.

Aquí veremos otros métodos para la asignación de escaños, llamados métodos en divisores, que evitan todas las paradojas del método de Hamilton y además son consistentes. Sin embargo, estos métodos no aseguran que se verifique la cuota.

En primer lugar veremos el proceso de comparación por pares que dio lugar a los métodos de Huntington y las formas alternativas de obtención de la solución. Mediante una combinación convexa de dos medidas de la desproporcionalidad pueden obtenerse los métodos de la familia paramétrica; después veremos la formulación general de los métodos basados en divisores y comentaremos otras técnicas de obtención de métodos para resolver el problema de la asignación proporcional; finalizamos presentando las principales propiedades deseables para un método de reparto proporcional y una introducción al concepto de reparto biproporcional que nos será útil posteriormente en la adaptación del Sistema Electoral Alemán a España, que constituye el capítulo número 7 de esta Memoria.

La mayor parte de los conceptos y resultados que se presentan en este capítulo han sido obtenidos por M. Balinski y colaboradores (por ejemplo, en [5], [21], [26], etc), quién a través de un gran número de artículos ha elaborado y sistematizado la teoría matemática para los repartos proporcionales y biproporcionales. Además, aportamos una nueva obtención de la familia paramétrica y nuevas demostraciones a resultados ya concidos.

2.1 Comparación por pares

La proporcionalidad exacta en un reparto puede expresarse como una proporcionalidad exacta entre votos y escaños de dos partidos, i y j, cualesquiera. Dicha proporcionalidad se expresará de la siguiente forma:

$$\frac{a_i}{v_i} = \frac{a_j}{v_j}, \tag{2.1.1}$$

o, equivalentemente, como

$$\frac{a_i}{v_i} v_j = a_j, \quad \frac{v_j}{v_i} = \frac{a_j}{a_i}, \quad \frac{a_i v_j}{v_i a_j} = 1, \quad etc.$$

Continuando, con cualquiera de estas expresiones, por ejemplo con la expresión 2.1.1, es difícil que dicha igualdad pueda darse, en general, en un reparto de escaños, puesto que las asignaciones a_i, a_j están restringidas a ser enteras. En tal caso, en lugar de la igualdad (2.1.1) se dará una desigualdad. Por ejemplo

$$\frac{a_i}{v_i} > \frac{a_j}{v_j}, \tag{2.1.2}$$

con lo cual, en términos relativos, el partido i estaría sobrerrepresentado con respecto al partido j.

Existirá, pues, una diferencia, $e \geq 0$, de la proporcionalidad entre el partido beneficiado y el perjudicado, siendo su valor, o medida de desigualdad, $e = \frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}$ (ya que hemos supuesto que el partido i está beneficiado con respecto al partido j). Si se transfiere un escaño del partido i al partido j tendremos un nuevo valor, $e' \geq 0$, para la medida de la nueva desigualdad.

Podemos, pues, definir un nuevo método de asignación proporcional de escaños basado en minimizar la cantidad de desigualdad de las proporciones entre votos y escaños de dos partidos cualesquiera. Así, se podría partir de una asignación inicial $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_i \geq 0$, $\sum a_i = h$ cualquiera, y establecer comparaciones dos a dos entre los partidos y, mediante transferencia de escaños de uno a otro, tratar de minimizar la cantidad de desigualdad e. El proceso se detendría cuando ninguna transferencia de escaño entre dos partidos cualesquiera permitiese disminuir el valor de e, es decir, cuando se alzanzase una solución **estable**. De antemano, no sabemos si siempre se alcanzará una solución estable.

Concretamente si se satisface 2.1.2, podemos ensayar qué posibilidades pueden darse si al partido i (que es el beneficiado) le asignamos un escaño menos y al partido j (que es el perjudicado) uno más. Puede ocurrir:

1ª) Que el partido i siga estando sobrerrepresentado, es decir:

$$\frac{a_i - 1}{v_i} > \frac{a_j + 1}{v_j},$$

con lo cual el nuevo valor $e' = \frac{a_i - 1}{v_i} - \frac{a_j + 1}{v_j}$ es menor que e; el reparto entre los partidos i y j es más proporcional (según esta forma de medir) y, por tanto, esta asignación entre ambos se considera mejor que la de partida, luego debe sustituir a aquélla.

2ª) Que el partido sobrerrepresentado haya pasado a ser ahora el partido j. En tal caso, en lugar de la desigualdad 2.1.2 se tiene la siguiente:

$$\frac{a_i - 1}{v_i} < \frac{a_j + 1}{v_j},$$

y la medida de la desigualdad correspondiente es $e'' = \frac{a_j + 1}{v_j} - \frac{a_i - 1}{v_i}$. De tal forma que si $e'' < e$ la nueva asignación debe sustituir a la de partida, pero si $e'' > e$ debe mantenerse aquélla. Cuando aparece el signo igual es indiferente hacer una asignación u otra.

Una vez que hemos descrito el proceso de comparación y transferencia de escaños entre dos partidos cualesquiera, se puede plantear "tratar de construir un método de asignación de escaños basados en establecer comparaciones por pares hasta que ningún cambio de escaños de un partido i a un partido j, cualesquiera, permita disminuir el valor de e". Lógicamente, el método dependerá de la expresión de la proporcionalidad considerada.

Por tanto, tendríamos que ir comparando dos a dos todos los partidos y modificando las asignaciones de ambos siempre que con ello disminuya e, y, si el proceso llega a estabilizarse, es decir, se llega a una asignación para la cual cualquier cambio de un escaño de un partido a otro conlleva un aumento de la medida de la desigualdad establecida, entonces entendemos que la asignación obtenida es óptima.

Esta idea de repetir el proceso de reajuste de escaños entre dos partidos cualesquiera es la que originó los métodos de Huntington.

Sin embargo, es posible que el proceso de lugar a una fase cíclica de transferencias, y por tanto, el método descrito no sería válido. De hecho, si partimos de la siguiente expresión para la proporcionalidad,

$$\frac{a_i}{a_j} = \frac{v_i}{v_j},$$

el problema $(\mathbf{v}; h) = ((762, 534, 304); 16)$, indicado en [21], no alcanza una solución estable mediante el proceso de transferencia por comparación por pares, sino que da lugar a un proceso cíclico. Veámoslo. Con objeto de partir de una asignación próxima a las cuotas, $\mathbf{q} = (7.62, 5.34, 3.04)$, podemos elegir en primer lugar la asignación $\mathbf{a} = (8, 5, 3)$. El partido 1 estaría beneficiado con respecto al partido 2 y la cantidad de desigualdad entre ambos es $e = 0.173$; si transferimos un escaño del partido 1 al 2 la nueva asignación sería $\mathbf{a} = (7, 6, 3)$, con lo cual el partido beneficiado ha pasado a ser el 2 y el nuevo valor de la cantidad de desigualdad es $e = 0.156$. Luego, según el criterio que estamos considerando la asignación $\mathbf{a} = (8, 5, 3)$ debemos olvidarla y continuar con la asignación $\mathbf{a} = (7, 6, 3)$. Ahora para los partidos 2 y 3 el valor de e correspondiente a la asignación $\mathbf{a} = (7, 6, 3)$ es $e = 0.243$, y el correspondiente a la asignación $\mathbf{a} = (7, 5, 4)$ es $e = 0.231$ luego debemos quedarnos con la asignación $\mathbf{a} = (7, 5, 4)$. Ahora analizamos el cambio entre los partidos 1 y 3 y obtenemos que el valor para la asignación $\mathbf{a} = (7, 5, 4)$, en la cual el beneficiado es el 3, es $e = 0.172$, y el valor para la correspondiente a $\mathbf{a} = (8, 5, 3)$, en la cual el beneficiado es el partido 1, es $e = 0.160$.

Con lo cual, debemos abandonar aquella asignación y quedarnos con $\mathbf{a} = (8, 5, 3)$, pero nos damos cuenta que hemos entrado en una situación cíclica, ya que hemos llegado a una de las asignaciones previas, concretamente a la de partida.

Luego este método no permitiría resolver el problema planteado.

Veamos ahora qué ocurre para el mismo problema si consideramos que la desigualdad que deseamos minimizar es la dada en (2.1.2). Vamos a partir, inicialmente, de la asignación $\mathbf{a} = (8, 6, 2)$.

Si analizamos las diferencias para los partidos 1 y 3, el partido 1 es el beneficiado y $e = 0.0039$, mientras que si se transfiere un escaño del partido 1 al 3, entonces $\mathbf{a} = (7, 6, 3)$, y $e = 0.00068$, luego la transferencia debe ser aceptada.

Si comparamos 2 y 3 en $\mathbf{a} = (7, 6, 3)$, se tiene $e = 0.0014$, mientras que si el partido 2 que es el beneficiado cede un escaño al 3, $\mathbf{a} = (7, 5, 4)$, entonces $e = 0.00379$, luego la transferencia no debe hacerse.

Ahora, si comparamos los partidos 2 y 1 para $\mathbf{a} = (7, 6, 3)$, donde el partido 2 es el beneficiado, se tiene $e = 0.0020$, mientras que si el partido 2 cede un escaño al 1,

$\mathbf{a} = (8,5,3)$, y $e = 0.0011$, luego el cambio debe ser aceptado.

Ahora, si comparamos los partidos 1 y 3 para $\mathbf{a} = (8,5,3)$, el partido 1 es el beneficiado y $e = 0.0006$, mientras que si el partido 1 cede un escaño al 3, $\mathbf{a} = (7,5,4)$, y $e = 0.0039$, luego no se acepta el cambio. Finalmente para $\mathbf{a} = (8,5,3)$, al comparar los partidos 3 (beneficiado) con el 2 se tiene $e = 0.0005$, mientras que para $\mathbf{a} = (8,6,2)$, donde el beneficiado es el 2 con respecto al 3, el valor de la desigualdad es $e = 0.0046$, con lo cual tampoco debe transferirse un escaño del partido 3 al 2. Por tanto, hemos obtenido una asignación estable, la $\mathbf{a} = (8,5,3)$, que es la solución del problema de partida.

Cuando se contemplan todas las igualdades equivalentes a la (2.1.1), y se estudian los métodos de asignación correspondientes, se observa que todas las comparaciones convergentes conducen a sólo 5 métodos diferentes. Además, son métodos basados en divisores, como veremos después.

Por otra parte, se puede plantear medir, en la comparación por pares, diferencias relativas en lugar de diferencias absolutas. Entendemos por diferencia relativa de dos números la diferencia absoluta dividida entre el menor de ellos. De tal forma que si partimos de (2.1.2) la diferencia relativa vale $\dfrac{\left(\dfrac{a_i}{v_i} - \dfrac{a_j}{v_j}\right)}{\dfrac{a_j}{v_j}}$; es decir, $\dfrac{v_j a_i}{v_i a_j} - 1$. Puede comprobarse que se obtiene la misma cantidad si se parte de cualquier otra igualdad equivalente a (2.1.1). Esto hizo que **Huntington** (1921) se inclinara por esta forma de medir la cantidad de desigualdad e.

Observamos que si partimos de una igualdad en la que aparece en el denominador a_j, todo partido debe recibir *un* escaño antes de que ningún otro reciba *dos* escaños, pues cuando un partido recibe *cero* escaños la cantidad de desigualdad correspondiente se hace infinita. El método obtenido en ese caso no tiene interés para la asignación de escaños a los partidos, salvo que se les exija un número elevado de votos (o bien un porcentaje mínimo) para participar en la asignación, ya que, en caso contrario, los partidos pequeños serían muy beneficiados. Sin embargo, en la asignación de escaños a las circunscripciones puede estar justificado el uso de un método de este tipo puesto que, en tal caso, toda circunscripción debe recibir escaños.

Sin lugar a duda, el proceso de cálculo mediante comparación por pares sería largo, y el estudio de la comparación no es fácil a partir de las expresiones de la proporcionalidad dadas anteriormente. A continuación vamos a obtener una propiedad de las soluciones correspondientes a los métodos convergentes, que nos permitirá fácilmente la obtención de

las mismas.

2.2 Obtención de métodos basados en comparaciones dos a dos

2.2.1 El Método de St. Laguë

Con el planteamiento hecho en (2.1.1), una solución es **estable** si ningún cambio de escaño está justificado. En tal caso, si la solución estable es $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, y si entre los partidos i y j, el partido i es el beneficiado, entonces $\frac{a_i}{v_i} \geq \frac{a_j}{v_j}$, y la medida de la desigualdad es $e = \frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}$, si cambiásemos un escaño del partido i (que es el beneficiado) al partido j, el j estaría ahora beneficiado, y si la cantidad de desigualdad entre ambos no disminuye con respecto a la que existía antes, es decir, $\frac{a_j+1}{v_j} \geq \frac{a_i-1}{v_i}$, la medida de desigualdad, e', será $e' = \frac{a_j+1}{v_j} - \frac{a_i-1}{v_i}$.

En el estado de equilibrio, cuando se ha alcanzado una asignación estable, se verifica $e' \geq e$.

$$\frac{a_j+1}{v_j} - \frac{a_i-1}{v_i} \geq \frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}; \quad \forall i, \text{ tal que } a_i \geq 1 \text{ y } \quad \forall j, \text{ tal que } a_j \geq 0.$$

de lo que se sigue que

$$\frac{2\,a_i - 1}{v_i} \leq \frac{2\,a_j + 1}{v_j}$$

Lo anterior implica que

$$\frac{v_j}{2\,a_j + 1} \leq \frac{v_i}{2\,a_i - 1}$$

y

$$\frac{v_j}{a_j + \frac{1}{2}} \leq \frac{v_i}{a_i - \frac{1}{2}}; \quad \forall i, \text{ tal que } a_i \geq 1 \quad y\ \forall j, \text{ tal que } a_j \geq 0.$$

Por tanto,

$$\max_{a_j \geq 0} \left\{ \frac{v_j}{a_j + \frac{1}{2}} \right\} \leq \min_{a_i \geq 1} \left\{ \frac{v_i}{a_i - \frac{1}{2}} \right\} \tag{2.2.1}$$

□.

Veamos ahora procedimientos prácticos para obtener la asignación de h escaños de un problema $(\mathbf{v};h)$, con el método anterior. Observemos que si llamamos $d(s) = s + \frac{1}{2}$, $s = 0, 1, 2, ...$ la desigualdad 2.2.1, en función de estos divisores, se escribe

$$\max_{a_j \geq 0} \left\{ \frac{v_j}{d(a_j)} \right\} \leq \min_{a_i \geq 1} \left\{ \frac{v_i}{d(a_i - 1)} \right\} \tag{2.2.2}$$

En primer lugar supongamos un ejemplo de problema de reparto donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $h = 7$, es decir, un problema $(\mathbf{v}; 7)$, sin restricciones, cuya solución sea $\mathbf{a} = (4, 2, 1, 0)$ y escribamos la Tabla 2.1, cuyas filas se han obtenido dividiendo los votos de cada partido por los divisores $d(0), d(1), ..., d(4)$

Votos	$d(0)$	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$
v_1	$\frac{v_1}{0+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_1}{1+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_1}{2+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_1}{3+\frac{1}{2}}$ *	$\frac{v_1}{4+\frac{1}{2}}$ \$
v_2	$\frac{v_2}{0+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_2}{1+\frac{1}{2}}$ *	$\frac{v_2}{2+\frac{1}{2}}$ \$	$\frac{v_2}{3+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_2}{4+\frac{1}{2}}$
v_3	$\frac{v_3}{0+\frac{1}{2}}$ *	$\frac{v_3}{1+\frac{1}{2}}$ \$	$\frac{v_3}{2+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_3}{3+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_3}{4+\frac{1}{2}}$
v_4	$\frac{v_4}{0+\frac{1}{2}}$ \$	$\frac{v_4}{1+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_4}{2+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_4}{3+\frac{1}{2}}$	$\frac{v_4}{4+\frac{1}{2}}$

Tabla 2.1: Asignación de escaños utilizando divisores.

Lo que nos dice la desigualdad (2.2.2) es que el mínimo de los cocientes señalados con el signo * tiene que ser mayor o igual que el máximo de los señalados con el signo \$. Evidentemente los que hay a la izquierda de los primeros son mayores que ellos y los que hay a la derecha de los segundos son menores que los señalados con un \$. Luego los siete cocientes más grandes de la Tabla 2.1 son los señalados con * y los que se encuentran a su izquierda; *cuatro* de ellos están en la primera fila (han sido obtenidos con los votos del primer partido), *dos* en la segunda y *uno* en la tercera (*ninguno* en la cuarta), coincidiendo así el número de cantidades seleccionadas con los escaños recibidos por el partido correspondiente. La generalización a cualquier otro problema es inmediata. Por tanto una técnica para realizar la asignación con los divisores $d(s)$ consiste en obtener una tabla de cocientes entre votos y divisores, seleccionar los h mayores, y el número de ellos que se encuentren en cada fila, indica el número de escaños que hay que asignar al partido correspondiente.

Por ejemplo, la Tabla 2.2 muestra los cocientes obtenidos en Gerona en 1993 para cinco partidos y los divisores $d(s) = s + \frac{1}{2}$. De los 5 cocientes más grandes (los subrayados) 2 se encuentran en la primera fila, 2 en la segunda y 1 en la tercera, luego la asignación correspondiente al método de St. Laguë es $\mathbf{a} = (2, 2, 1, 0, 0)$.

Part.	Vot.	Cuot.	$\frac{v_i}{0.5}$	$\frac{v_i}{1.5}$	$\frac{v_i}{2.5}$	$\frac{v_i}{3.5}$	*St.L.*
CiU	128 957	2.22	257 914	85 971	51 583	36 845	2
PSOE	84 586	1.46	169 172	56 391	33 834	24 167	2
PP	39 112	0.67	78 224	26 075	15 645	11 174	1
ERC	27 449	0.47	54 898	18 299	10 980	7 843	0
IC	10 437	0.18	20 874	6 958	4 175	2 982	0
totales	290 541	5.00					5

Tabla 2.2: Gerona: 5 escaños. Asignación con St. Laguë para los datos de 1993. Comparación con las cuotas.

Si en lugar de usar los divisores 0.5, 1.5, 2.5,..., se hubiesen usado otros proporcionales a ellos, los cocientes de la Tabla 2.2 quedarían multiplicados por ese factor y los cinco mayores, seguirían ocupando la misma posición; es decir, estos divisores son equivalentes entre otros a $d(s) = 2s + 1$ ya que darían el mismo resultado, de ahí que los escandinavos denominen a este método el de los números impares. Además, es indiferente realizar los cocientes con los votos o con otras cantidades proporcionales como, por ejemplo, las cuotas.

También se puede realizar la distribución de escaños con estos divisores usando el siguiente algoritmo

1º) Hacer $a_i = 0, i = 1, 2, \ldots, n$.

2º) Mientras $\sum a_i < h$,

(a) buscar k tal que $\dfrac{v_k}{a_k + \frac{1}{2}}$ sea máximo, y

(b) aumentar en 1 el valor de a_k.

3º) Fin.

Una segunda técnica consiste en la búsqueda de un valor x para dividir los votos de cada partido por x y redondear los cocientes obtenidos en función de los divisores. Como valor x podemos elegir cualquiera para el cual los redondeos sumen en total los h escaños que hay que asignar. Veámoslo.

Volviendo a la desigualdad (2.2.2), si suponemos que la desigualdad se da en sentido estricto, existen valores x tales que

$$\max_{a_j \geq 0} \left\{ \frac{v_j}{d(a_j)} \right\} < x < \min_{a_i \geq 1} \left\{ \frac{v_i}{d(a_i - 1)} \right\}$$

Luego para todo i tal que $a_i \geq 1$

$$d(a_i - 1) < \frac{v_i}{x} < d(a_i)$$

y para aquellos i tales que $a_i = 0$,

$$\frac{v_i}{x} < d(a_i)$$

o sea, cuando el cociente $\frac{v_i}{x}$ se encuentra entre dos divisores consecutivos $d(k-1)$ y $d(k)$ la asignación al partido i es $a_i = k$ y cuando es menor que $d(0)$ la asignación es $a_i = 0$. Además se tiene que verificar que $\sum_i a_i = h$.

Por tanto, el problema de la distribución de escaños se puede plantear como la búsqueda de un valor x tal que la suma de las asignaciones, o redondeos según los divisores $d(s)$ de las cantidades $\frac{v_i}{x}$, sea h.

Entendiendo que si el mayor divisor superado por dicho cociente es el $d(k-1)$ al partido i hay que asignarle k escaños. Si no alcanza el valor $d(0)$ se le asigna cero escaños.

Cuando en (2.2.1) se da la igualdad, significa que, al menos, existen dos partidos r y s tales que

$$\max_{a_j \geq 0} \left\{ \frac{v_j}{d(a_j)} \right\} = \frac{v_r}{d(a_r)} = \frac{v_s}{d(a_s - 1)} = \min_{a_i \geq 1} \left\{ \frac{v_i}{d(a_i - 1)} \right\}$$

En tal caso, si la asignación $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_r, ..., a_s, ...a_n)$ se cambia por $\mathbf{a}' = (a_1, ..., a_r + 1, ..., a_s - 1, ...a_n)$ también se sigue verificando 2.2.1. Luego se estaría en una situación de empate, ambos vectores son asignaciones para este método. En este caso sólo existe un valor de x comprendido entre los valores

$$\max_{a_j \geq 0} \left\{ \frac{v_j}{d(a_j)} \right\} \ y \ \min_{a_i \geq 1} \left\{ \frac{v_i}{d(a_i - 1)} \right\}$$

que coincide con los cocientes $\frac{v_r}{d(a_r)} = \frac{v_s}{d(a_s - 1)} = x$. Traducido al redondeo de las cantidades $\frac{v_i}{x}$ significa que cuando una de estas cantidades coincide con un divisor $d(k-1)$ existen dos redondeos alternativos el k y el $k+1$.

Por tanto tenemos un segundo método de asignación de escaños. Elegimos un $x > 0$ y calculamos la suma de los redondeos, según los divisores, de las cantidades $\frac{v_i}{x}$, y si la suma es mayor que h debemos aumentar x, si es igual a h los correspondientes redondeos

constituyen la asignación, si es menor que h debemos disminuir x. Al realizar los redondeos hay que considerar todas las soluciones posibles en los casos de empate.

Por otra parte, de (2.2.2), se deduce que si a_i y a_j son las asignaciones a los partidos i y j, cuando el número total de escaños es h y no existen empates (desigualdad estricta entre i y j), entonces ni $(a_i - r, a_j + s)$ ni $(a_i + r, a_j - s)$, con $r, s \geq 1$, pueden formar parte de la solución del problema de asignación de k escaños. Por tanto, salvo en caso de empate, cuando se pasa de asignar h escaños a asignar $h+1$ escaños ningún partido puede perder escaños (uno de ellos ganará el nuevo escaño). En caso de empate lo que ocurre es que existen varias soluciones y, en tal caso, al menos una, también será *monótona* en función de h. Esta misma afirmación resulta mucho más evidente si se considera el método de asignación como el obtenido mediante la tabla de cocientes o como la búsqueda del valor x. □

El método que corresponde a los divisores $d(s) = s + \frac{1}{2}$ es conocido en la literatura europea como el **método de St. Laguë** o de los números impares y en la literatura americana como el **método de Webster** que, de hecho, fue el primero en encontrarlo. La asignación con el método de St. Laguë se puede plantear como la búsqueda de un divisor x tal que la suma de los redondeos al entero más próximo de las fracciones $\frac{v_i}{x}$ sea h, entendiendo que cuando la fracción tiene resto igual a 0.5 puede redondearse tanto por exceso como por defecto.

Partiendo de las demás expresiones para medir la cantidad de desigualdad, se obtienen los cinco métodos estables posibles (métodos de Huntington).

Método de los Divisores Pequeños o de Adams

Partimos de la desigualdad $a_i \geq a_j \frac{v_i}{v_j}$, en la cual suponemos de nuevo que el partido i está beneficiado respecto al partido j, la cantidad de desigualdad, e, será $e = a_i - a_j \frac{v_i}{v_j}$.

Si cambiamos un escaño del partido i al j, el j está beneficiado por lo que

$a_j + 1 \geq (a_i - 1)\frac{v_j}{v_i}$ y la medida de desigualdad, e', será $e' = a_j + 1 - (a_i - 1)\frac{v_j}{v_i}$, la estabilidad se alcanza cuando $e \leq e'$, por lo que $a_i - a_j \frac{v_i}{v_j} \leq (a_j + 1) - (a_i - 1)\frac{v_j}{v_i}$; es decir,

$$a_i + a_i \frac{v_j}{v_i} - a_j \frac{v_i}{v_j} - a_j \leq \frac{v_j}{v_i} + 1$$

$$a_i\left(1+\frac{v_j}{v_i}\right)-a_j\left(\frac{v_i}{v_j}+1\right)\leq\frac{v_j}{v_i}+1$$

$$a_i\left(\frac{v_i+v_j}{v_i}\right)-\left(\frac{v_j+v_i}{v_i}\right)\leq a_j\left(\frac{v_i+v_j}{v_j}\right),$$

podemos escribir la desigualdad

$$(a_i-1)\frac{1}{v_i}\leq a_j\frac{1}{v_j},$$

$$\frac{v_j}{a_j}\leq\frac{v_i}{a_i-1},\ \forall j,\text{ tal que } a_j\geq 0,\forall i,\text{ tal que } a_i\geq 1$$

$$\max_{a_j\geq 0}\{\frac{v_j}{a_j}\}\leq\min_{a_i\geq 1}\{\frac{v_i}{a_i-1}\} \tag{2.2.3}$$

lo que equivale a usar los divisores

$$\boxed{d(s)=s}$$

Así pues, la asignación de escaños con este método puede plantearse como la búsqueda de un divisor x tal que la suma de los redondeos por exceso de las fracciones $\frac{v_i}{x}$ sea h. Si las fracciones de partida son las cuotas sus redondeos (cuotas superiores) excederán del valor h (salvo que sean todas enteras) luego habrá que aumentar y, por tanto, disminuyen las fracciones y sus redondeos por exceso también serán menores o iguales que en el caso anterior, es decir, la asignación con el método de Adams verifica la cuota superior. □

Método de la Media Armónica o de Dean

Partimos de la desigualdad: $\frac{v_j}{a_j}\geq\frac{v_i}{a_i}$, en la cual, el partido i está beneficiado respecto al partido j, la medida de desigualdad, e, será $e=\frac{v_j}{a_j}-\frac{v_i}{a_i}$.

Si cambiamos un escaño del partido i al j, el j está beneficiado por lo que la desigualdad será, $\frac{v_i}{a_i-1}\geq\frac{v_j}{a_j+1}$. La medida de desigualdad, e', es $e'=\frac{v_i}{a_i-1}-\frac{v_j}{a_j+1}$.

Se llega al estado de equilibrio cuando $e\leq e'$, es decir, cuando se satisface la desigualdad $\frac{v_j}{a_j}-\frac{v_i}{a_i}\leq\frac{v_i}{a_i-1}-\frac{v_j}{a_j+1}$.

Lo que equivale a

$$v_j\left(\frac{1}{a_j}+\frac{1}{a_j+1}\right)\leq v_i\left(\frac{1}{a_i-1}+\frac{1}{a_i}\right)$$

$$v_j\left(\frac{2\,a_j+1}{a_j\,(a_j+1)}\right)\leq v_i\left(\frac{2\,a_i-1}{(a_i-1)\;a_i}\right)$$

$$\frac{v_j}{\frac{a_j\,(a_j+1)}{2\,a_j+1}}\leq\frac{v_i}{\frac{(a_i-1)\;a_i}{2a_i-1}},\ \forall j,\ \text{tal que } a_j\geq 0,\forall i,\ \text{tal que } a_i\geq 1$$

$$\frac{v_j}{\frac{a_j\,(a_j+1)}{2\,a_j+1}}\leq\frac{v_i}{\frac{(a_i-1)\;a_i}{2a_i-1}},\ \forall j,\ \text{tal que } a_j\geq 0,\forall i,\ \text{tal que } a_i\geq 1$$

$$\max_{a_j\geq 0}\left\{\frac{v_j}{\frac{a_j\,(a_j+1)}{2\,a_j+1}}\right\}\leq\min_{a_i\geq 1}\left\{\frac{v_i}{\frac{(a_i-1)\;a_i}{2a_i-1}}\right\},\tag{2.2.4}$$

de donde se obtiene que los divisores son equivalentes a

$$\boxed{d(s)=2\frac{s(s+1)}{2s+1}}$$

□

Método de la Media Geométrica o de Hill o de las Proporciones Iguales

Para obtener la expresión de los divisores del método, partimos de la expresión de la desigualdad $\frac{v_j\;a_i}{a_j\;v_i}\geq 1$. La medida de desigualdad, e, será $e=\frac{v_j\;a_i}{a_j\;v_i}-1$.

De forma análoga, a como hemos hecho en los casos anteriores, si cambiamos un escaño del partido i al j, el j está beneficiado por lo que $\frac{v_i\,(a_j+1)}{v_j\,(a_i-1)}\geq 1$ y el nuevo valor de la medida de desigualdad e' será $e'=\frac{v_i\,(a_j+1)}{v_j\,(a_i-1)}-1$.

La establidad se alcanza cuando ninguna transferencia está justificada; es decir, $e\leq e'$:

$$\frac{v_j\, a_i}{a_j\, v_i} - 1 \leq \frac{v_i\,(a_j+1)}{v_j\,(a_i-1)} - 1.$$

de donde obtenemos

$$\frac{v_j^2}{a_j\ (a_j+1)} \leq \frac{v_i^2}{a_i\ (a_i-1)}$$

luego

$$\frac{v_j}{(a_j\ (a_j+1))^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{v_i}{(a_i\ (a_i-1))^{\frac{1}{2}}}, \forall j, \text{ tal que } a_j \geq 0, \forall i, \text{ tal que } a_i \geq 1;$$

de donde

$$\max_{a_j \geq 0} \frac{v_j}{(a_j\ (a_j+1))^{\frac{1}{2}}} \leq \min_{a_i \geq 1} \frac{v_i}{(a_i\ (a_i-1))^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.2.5}$$

lo que equivale a

$$\boxed{d(s) = [s\,(s+1)]^{\frac{1}{2}}}$$

□

Método d'Hondt o de Jefferson

A continuación, partimos de la expresión de la desigualdad $a_i \frac{v_j}{v_i} \geq a_j$. Análogamente, el partido i está beneficiado frente al partido j, luego la medida de desigualdad, e, será $e = a_i \frac{v_j}{v_i} - a_j$. Si cambiamos un escaño del partido i al j, el j está beneficiado por lo que la desigualdad será: $(a_j + 1)\,\frac{v_i}{v_j} \geq (a_i - 1)$. La nueva medida de desigualdad, e', viene dada por

$$e' = (a_j + 1)\,\frac{v_i}{v_j} - (a_i - 1)\,.$$

La establidad se alcanza cuando $e \leq e'$ por lo que:

$$a_i \frac{v_j}{v_i} - a_j \leq (a_j + 1)\,\frac{v_i}{v_j} - (a_i - 1)\,.$$

Lo cual implica la siguiente desigualdad:

$$a_i \left(\frac{v_j}{v_i} + 1\right) \leq (a_j + 1)\left(\frac{v_i}{v_j} + 1\right),$$

$$a_i \left(\frac{v_j + v_i}{v_i}\right) \leq (a_j + 1)\left(\frac{v_i + v_j}{v_j}\right),$$

$$\frac{v_j}{(a_j+1)} \leq \frac{v_i}{a_i},\ \forall j, \text{ tal que } a_j \geq 0, \forall i, \text{ tal que } a_i \geq 1;$$

de donde:

$$\max_{a_j \geq 0} \frac{v_j}{(a_j+1)} \leq \min_{a_i \geq 1} \frac{v_i}{a_i}, \tag{2.2.6}$$

luego los divisores son

$$\boxed{d(s) = s+1}.$$

□

El método obtenido es conocido en literatura europea por d'Hondt en honor al matemático belga Victor d'Hondt que lo propuso en 1932. Sin embargo este método ha sido reinventado en varias ocasiones y fue el matemático Jefferson el primero en proponerlo en 1792.

En términos de la búsqueda de un divisor x, en este caso, las fracciones $\frac{v_i}{x}$ deben redondearse por defecto y su suma ser h; por tanto, si las fracciones de partida son las cuotas (el redondeo del método d'Hondt coincide con la cuota inferior) su suma será menor que h, salvo que todas sean enteras; luego, en general, habrá que elegir un divisor menor que el obtenido para calcular las cuotas y, en tal caso, las fracciones serán mayores y por tanto la asignación para cada partido con este método será mayor o igual que su cuota inferior. Es decir, el método d'Hondt verifica la cuota inferior.

Resumen

La Tabla 2.3 recoge los distintos métodos basados en divisores (métodos de Huntington), así como expresiones para la cantidad de desigualdad que origina a cada uno de ellos.

Método	Medida	divisores
Divisores Pequeños (Adams)	$a_i - a_j\frac{v_i}{v_j}$	$d(s) = s$
Media Armónica (Dean)	$\frac{v_j}{a_j} - \frac{a_i}{v_i}$	$d(s) = 2s\frac{s+1}{2s+1}$
Media Geométrica (Hill)	$\frac{v_j a_i}{v_i a_j} - 1$	$d(s) = \sqrt{s(s+1)}$
St. Laguë (Webster)	$\frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}$	$d(s) = s + \frac{1}{2}$
d'Hondt (Jefferson)	$a_i\frac{v_j}{v_i} - a_j$	$d(s) = s+1$

Tabla 2.3: Cinco métodos basados en divisores obtenidos mediante comparación por pares.

Combinaciones de medidas anteriores

1. d'Hondt y St Laguë

Se podría considerar como medida de desigualdad de la proporcionalidad una combinación lineal convexa de dos medidas establecidas anteriormente. Pero, teniendo en cuenta que el número de votos suele ser elevado (miles), mientras que el de escaños suele ser muy bajo (la mayor parte de las veces menos de una decena), los valores de las medidas de la desigualdad difieren en igual razón. Para evitarlo vamos a introducir un factor de normalización: en lugar de las medidas que han dado lugar a los métodos de Adams y d'Hondt, al combinarlas con el de St. Laguë usaremos aquellos valores divididos por $(v_i + v_j)$. Por ejemplo, vamos a usar en primer lugar una combinación de las medidas que dieron lugar a los métodos d'Hondt (normalizada) y St. Laguë; es decir, $\left(a_i \frac{v_j}{v_i} - a_j\right)/(v_i + v_j)$ y $\left(\frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}\right)$. La medida de desigualdad e,

$$e = \frac{\lambda}{v_i + v_j}\left(a_i \frac{v_j}{v_i} - a_j\right) + (1-\lambda)\left(\frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}\right),\ \lambda \in [0,1]$$

Al no aparecer como divisor ningún a_i, éstos no están obligados a ser mayores que cero y por tanto los métodos que resultan pueden ser adecuados para la asignación de escaños a los partidos, sin imponer umbrales mínimos, para participar en el reparto.

$$e = \lambda \frac{1}{v_i + v_j} a_i \frac{v_j}{v_i} + (1-\lambda)\frac{a_i}{v_i} - \lambda \frac{1}{v_i + v_j} a_j - (1-\lambda)\frac{a_j}{v_j}.$$

Si cambiamos un escaño del partido i al j, el j está beneficiado por lo que el error, e', es

$$e' = \lambda \frac{1}{v_i + v_j}(a_j + 1)\frac{v_i}{v_j} + (1-\lambda)\frac{(a_j+1)}{v_j} - \lambda \frac{1}{v_i + v_j}(a_i - 1) - (1-\lambda)\frac{(a_i - 1)}{v_i}.$$

La estabilidad se alcanza cuando $e \leq e'$, de lo que se sigue que

$$\lambda \frac{1}{v_i + v_j} a_i \frac{v_j}{v_i} + (1-\lambda)\frac{a_i}{v_i} - \lambda \frac{1}{v_i + v_j} a_j - (1-\lambda)\frac{a_j}{v_j} \leq$$
$$\lambda \frac{1}{v_i + v_j}(a_j + 1)\frac{v_i}{v_j} + (1-\lambda)\frac{(a_j+1)}{v_j} - \lambda \frac{1}{v_i + v_j}(a_i - 1) - (1-\lambda)\frac{(a_i - 1)}{v_i}.$$

de donde se obtienen las desigualdades

$$\lambda \frac{a_i}{v_i} + \frac{(1-\lambda)\ (2\,a_i - 1)}{v_i} \leq \lambda \frac{(a_j+1)}{v_j} + \frac{(1-\lambda)\ (2\,a_j + 1)}{v_j}$$
$$\frac{\lambda a_i + (1-\lambda)\ (2\,a_i - 1)}{v_i} \leq \frac{\lambda\ (a_j+1) + (1-\lambda)\ (2\,a_j + 1)}{v_j}$$

y

$$\frac{v_j}{[\lambda\ (a_j+1)+(1-\lambda)\ \ (2\ a_j+1)]} \leq \frac{v_i}{[\lambda a_i+(1-\lambda)\ \ (2\ a_i-1)]}$$

para los índices j e i tales que $a_j \geq 0$ y $a_i \geq 1$, respectivamente, de donde

$$\max_{a_j \geq 0} \frac{v_j}{[\lambda\ (a_j+1)+(1-\lambda)\ \ (2\ a_j+1)]} \leq \min_{a_i \geq 1} \frac{v_i}{[\lambda a_i+(1-\lambda)\ \ (2\ a_i-1)]}. \quad (2.2.7)$$

Luego

$$d(s) = \lambda(s+1)+(1-\lambda)(2s+1) = s(2-\lambda)+1$$

lo que equivale a

$$d(s) = s + \frac{1}{2-\lambda}$$

□

Como $\lambda \in [0,1]$, $\dfrac{1}{2-\lambda}$ crece recorriendo el intervalo $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$. La relación entre unos valores y otros es biyectiva, luego los divisores obtenidos mediante esta combinación equivalen a los de la forma $d(s) = s+t$, $t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Para $\lambda = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$ (método de St. Laguë); $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $t = \dfrac{2}{3}$ (método $\dfrac{2}{3}$) y para $\lambda = 1$, $t = 1$ (método d'Hondt).

2. Divisores Pequeños y St. Laguë

De forma análoga al caso anterior, para la medida de desigualdad partimos de una combinación lineal convexa de las medidas de desigualdad, a partir de las cuáles, hemos obtenido los dos métodos. Concretamente vamos a partir de la medida de los Divisores Pequeños $a_i - a_j \dfrac{v_i}{v_j}$, y medida de St. Laguë $\left(\dfrac{a_i}{v_i} - \dfrac{a_j}{v_j}\right)$

$$e = (1-\lambda)\left(a_i - a_j \frac{v_i}{v_j}\right) + \lambda\left(\frac{a_i}{v_i} - \frac{a_j}{v_j}\right),\ \lambda \in [0,1]$$

o bien

$$e = (1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}\ a_i - (1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j} a_j \frac{v_i}{v_j} + \lambda\frac{a_i}{v_i} - \lambda\frac{a_j}{v_j}.$$

Si cambiamos un escaño del partido i al j, el j está beneficiado por lo que

$$e' = (1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}(a_j+1) - (1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}(a_i-1)\frac{v_j}{v_i} + \frac{\lambda\ (a_j+1)}{v_j} + \frac{\lambda\ (a_i-1)}{v_i}.$$

La establidad se alcanza cuando $e \leq e'$, obteniéndose

$$(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}a_i-(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}a_j\frac{v_i}{v_j}+\lambda\frac{a_i}{v_i}-\lambda\frac{a_j}{v_j}\leq$$
$$(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}(a_j+1)-(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}(a_i-1)\frac{v_j}{v_i}+\frac{\lambda(a_j+1)}{v_j}+\frac{\lambda(a_i-1)}{v_i}.$$

Así pues, podemos escribir las siguientes desigualdades

$$(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}a_i-(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}+(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}(a_i-1)\frac{v_j}{v_i}+\lambda\frac{(a_i-1)}{v_i}+\lambda\frac{a_i}{v_i}\leq$$
$$(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}a_j\frac{v_i}{v_j}+(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}a_j+\lambda\frac{a_j}{v_j}+\lambda\frac{a_j+1}{v_j},$$

Asociando términos semejantes, obtenemos la desigualdad

$$(1-\lambda)\frac{1}{v_i+v_j}(a_i-1)\left(1+\frac{v_j}{v_i}\right)+\frac{\lambda}{v_i}(2a_i-1)\leq(1-\lambda)\frac{a_j}{v_j}+\frac{\lambda}{v_j}(2a_j+1)$$

equivalente a

$$\frac{1}{v_i}\left[(1-\lambda)(a_i-1)+\lambda(2a_i-1)\right]\leq\frac{1}{v_j}\left[(1-\lambda)a_j+\lambda(2a_j+1)\right]$$

que se expresa, finalmente, como

$$\frac{v_i}{\left[(1-\lambda)\ (a_i-1)+\lambda\ (2a_i-1)\right]}\geq\frac{v_j}{\left[(1-\lambda)\ a_j+\lambda\ (2a_j+1)\right]}$$

siendo j e i índices tales que $a_j \geq 0$ y $a_i \geq 1$, respectivamente.

En consecuencia,

$$\max_{a_j\geq 0}\frac{v_j}{\left[(1-\lambda)\ a_j+\lambda\ (2a_j+1)\right]}\leq\min_{a_i\geq 1}\frac{v_i}{\left[(1-\lambda)\ (a_i-1)+\lambda\ (2a_i-1)\right]}\qquad(2\,2.8)$$

de donde

$$\boxed{d(s)=\left[(1-\lambda)\ s+\lambda(2\ s+1)\right]=s(\lambda+1)+\lambda}$$

lo que equivale a

$$\boxed{d(s)=s+\frac{\lambda}{1+\lambda}}$$

□

Cuando λ recorre el intervalo $[0,1]$, $\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ lo hace en el intervalo $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, de tal forma que existe una relación biyectiva entre unos valores y otros. Luego los divisores

obtenidos mediante estas combinaciones equivalen a los de la forma $d(s) = s+t, \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Para $\lambda = 0$, $t = 0$, (método de Divisores Pequeños (Adams)); $\lambda = \frac{1}{2}$, $t = \frac{1}{3}$(método Danés) y para $\lambda = 1$, $t = \frac{1}{2}$, (método de St. Laguë).

3. d'Hondt y Divisores Pequeños

Análogamente a los casos anteriores se podría considerar como medida de desigualdad de la proporcionalidad una combinación lineal convexa de las dos medidas de desigualdad $a_i \frac{v_j}{v_i} - a_j$ y $a_i - a_j \frac{v_i}{v_j}$ a partir de las cuáles hemos obtenido el método d'Hondt y el de los Divisores Pequeños. Entonces

$$e = (1-\lambda)\left(a_i \frac{v_j}{v_i} - a_j\right) + \lambda\left(a_i - a_j \frac{v_i}{v_j}\right), \lambda \in [0,1].$$

Si cambiamos un escaño del partido i al j, el j está beneficiado y la medida de desigualdad e' será

$$e' = (1-\lambda)(a_j+1) - (1-\lambda)(a_i-1)\frac{v_j}{v_i} + \lambda(a_j+1)\frac{v_i}{v_j} - \lambda(a_i-1).$$

Ningún cambio está justificado cuando $e \leq e'$. Luego

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\left(a_i\frac{v_j}{v_i} - a_j\right) + \lambda\left(a_i - a_j\frac{v_i}{v_j}\right) \leq \\ &(1-\lambda)(a_j+1) - (1-\lambda)(a_i-1)\frac{v_j}{v_i} + \lambda(a_j+1)\frac{v_i}{v_j} - \lambda(a_i-1).\end{aligned}$$

Operando y asociando términos semejantes establecemos la desigualdad

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)(a_i-1) - (1-\lambda)a_j\left(\frac{v_i}{v_j}+1\right) + \lambda a_i\left(\frac{v_j}{v_i}+1\right) \leq \\ &(1-\lambda)(a_i-1)\left(\frac{v_j}{v_i}\right) + \lambda(a_j+1)\left(\frac{v_i}{v_j}+1\right)\end{aligned}$$

que equivale a

$$(1-\lambda)(a_i-1)\left(1-\frac{v_j}{v_i}\right) - (1-\lambda)a_j\left(\frac{v_i}{v_j}+1\right) + \lambda a_i\left(\frac{v_j}{v_i}+1\right) \leq \lambda(a_j+1)\left(\frac{v_i}{v_j}+1\right)$$

es decir

$$\frac{1}{v_i}\left[(1-\lambda)\,(a_i-1)+\lambda a_i\right] \leq \frac{1}{v_j}\left[(1-\lambda)a_j+\lambda\,(a_j+1)\right]$$

o

$$\frac{v_i}{\left[(1-\lambda)\ (a_i-1)+\lambda\ a_i\right]} \geq \frac{v_j}{\left[(1-\lambda)a_j+\lambda\ (a_j+1)\right]}$$

desigualdad cierta para cualesquiera índices j e i tales que $a_j \geq 0$ y $a_i \geq 1$, respectivamente.

Se deduce, pues, que

$$\max_{a_j \geq 0} \frac{v_j}{\left[(1-\lambda)\ a_j+\lambda\ (a_j+1)\right]} \leq \min_{a_i \geq 1} \frac{v_i}{\left[(1-\lambda)\ (a_i-1)+\lambda\ a_i\right]} \tag{2.2.9}$$

lo que implica que

$$\boxed{d(s)=(1-\lambda)s+\lambda\,(s+1)=s+\lambda}$$

Es decir, hemos encontrado de nuevo los divisores $d(s) = s + t$, ahora $t \in [0,1]$, que constituyen la **familia paramétrica** de métodos ddivisores. Para los algunos valores de λ obtenemos varios métodos de Huntington:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 0 \Longrightarrow t=0 \text{ Divisores Pequeños}\\
\lambda &= \frac{1}{2} \Longrightarrow t=\frac{1}{2} \text{ St. Laguë}\\
\lambda &= 1 \Longrightarrow t=1 \text{ d'Hondt.}
\end{aligned}$$

Mediante combinaciones de las desigualdades que originaron los métodos de la Media Armónica y la Media Geométrica no es sencillo encontrar nuevas familias de divisores.

2.2.2 Los métodos de Huntington con restricciones mínimas y máximas

Por simplicidad, hemos desarrollado el proceso de obtención de los métodos anteriores sin considerar restricciones. Su generalización es sencilla.

La existencia de restricciones mínimas, **mín.** $= (m_1, m_2, ..., m_n)$, y máximas, **máx.** $= (t_1, t_2, ..., t_n)$, en un problema de asignación, nos obligaría a incluirlas en la propiedad que caracteriza la solución con el método correspondiente. Por ejemplo, si el método de asignación fuese d'Hondt hemos de elegir un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, con $\|\mathbf{a}\|_1 = h$, que verifique lo siguiente:

$$\max_{a_j < t_j} \left\{\frac{v_j}{a_j+1}\right\} \leq \min_{a_i > m_i} \left\{\frac{v_i}{a_i}\right\}.$$

O bien podemos plantearlo como la búsqueda de un divisor x para el cual la suma de las cantidades a_i sea h, donde $a_i = \text{mediana}\{m_i, \left\lfloor \frac{v_i}{x} \right\rfloor, t_i\}$. Si en lugar de referirnos al método d'Hondt nos referimos a otro cualquiera de los anteriores lo único que cambian son los divisores, es decir, la forma de realizar el redondeo. Veamos un ejemplo.

Dado el problema $((10700, 3600, 2800, 1500, 400), (2, 2, 2, 2, 2), (6, 6, 6, 5, 3); 19)$ se va a resolver con el método de St. Laguë. Todo partido debe recibir, al menos, 2 escaños y ninguno de los tres primeros puede recibir más de 6; el último no puede recibir más de 3, ni el penúltimo más de 5. Podemos realizar los cocientes entre los votos y los divisores: 0.5, 1.5, 2.5, ... y 5.5, que constituyen 6 columnas en la Tabla 2.4. Si no hubiese restricciones habría sido necesario calcular más columnas de cocientes, puesto que en la primera fila podrían aparecer más cocientes superiores a los de la última, pero las restricciones nos obligan a asignar 2 escaños, como mínimo, a cada partido, eso nos obliga a asignar un escaño por cada fracción de las 2 primeras columnas (independientemente del valor de estas fracciones), después continuar asignando escaños en función de las restantes fracciones (a las mayores) sin sobrepasar los límites superiores. Luego las 19 fracciones elegidas para contabilizar los escaños que corresponden a cada partido son las que aparecen a la izquierda de la línea escalonada de la Tabla 2.4.

Part.	Votos	$\frac{v_i}{0.5}$	$\frac{v_i}{1.5}$	$\frac{v_i}{2.5}$	$\frac{v_i}{3.5}$	$\frac{v_i}{4.5}$	$\frac{v_i}{5.5}$	a_i
1	10700	21400	7133.33	4280	3057.14	2377.77	1945.45	6
2	3600	7200	2400.00	1440	1028.57	800.00	654.55	5
3	2800	5600	1866.66	1120	800.00	622.22	509.09	4
4	1500	3000	1000.00	600	428.57	333.33	272.72	2
5	400	800	266.66	160	114.28	88.88	72.73	2

Tabla 2.4: Asignación de escaños con restricciones.

Por tanto, de las 19 fracciones separadas, *seis* se encuentran en la primera fila, *cinco* en la segunda *cuatro* en la tercera, *dos* en la cuarta y *dos* en la quinta, de ahí que la asignación sea la que aparece en la última columna; es decir, la solución para el problema con el método St. Laguë es $\mathbf{a} = (6, 5, 4, 2, 2)$.

Comprobamos que verifica la desigualdad

$$\max_{a_j < t_j} \left\{ \frac{v_j}{a_j + \frac{1}{2}} \right\} \leq \min_{a_i > m_i} \left\{ \frac{v_i}{a_i - \frac{1}{2}} \right\}.$$

pues

$$\max_{a_j<t_j}\left\{\frac{v_j}{a_j+\frac{1}{2}}\right\}=\max\{654.55,622.22,600,160\}=654.55$$

y

$$\min_{a_i>m_i}\left\{\frac{v_i}{a_i-\frac{1}{2}}\right\}=\min\{1945.45,800,800\}=800$$

Esta asignación la podemos hacer, también, buscando un valor de x tal que la suma de las medianas del mínimo, el máximo y del redondeo al entero más próximo de $\frac{v_i}{x}$ sea 19. En este caso es evidente que si tomamos como divisor x el valor 1000 la suma vale 6+4+3+2+2=17, luego hay que elegir un valor más pequeño. Es evidente que la ecuación a resolver será (en este caso):

$$\min\left\{\left[\frac{10700}{x}\right],6\right\}+\min\left\{\left[\frac{3600}{x}\right],6\right\}+\min\left\{\left[\frac{2800}{x}\right],6\right\}+$$

$$+\max\left\{2,\left[\frac{1500}{x}\right]\right\}+\max\left\{2,\left[\frac{400}{x}\right]\right\}=19,$$

donde la expresión entre corchetes significa el redondeo al entero más próximo. Para $x=700$ el valor de la expresión anterior es: 6+5+4+2+2=19, por tanto ya tendríamos una solución. En este caso hay muchos más valores de x que permiten encontrar la solución. Por ejemplo, puede comprobarse que todos los comprendidos en el intervalo $[655,800]$ son válidos. No obstante, el valor $x=800$ da lugar a *cuatro* soluciones de las cuales *tres* no suman 19 y por tanto no son válidas.

Si $x=800$, los cocientes $\frac{v_i}{800}$, $i=1,2,3,4,5$ valen $(13.38,4.5,3.5,1.87,0.5)$ de tal forma que el segundo de ellos se puede aproximar indistintamente por 4 o por 5, y el tercero por 3 o por 4. Luego las correspondientes medianas serían

$(6,5,4,2,2)$, cuya suma es 19,

$(6,5,3,2,2)$, cuya suma es 18,

$(6,4,4,2,2)$, cuya suma es 18,

$(6,4,3,2,2)$, cuya suma es 17,

de tal forma que sólo la primera es válida como asignación de los 19 escaños de nuestro problema. Sin embargo, es inmediato que si $h=18$ existen dos soluciones (situación de empate) y sólo un divisor permite encontrarlas; precísamente, el valor $x=800$.

Hemos visto que la asignación con cualquiera de los métodos obtenidos por Huntington puede hacerse calculando una tabla de cocientes y localizando los h mayores o buscando un factor x tal que la suma de los redondeos de las cantidades $\frac{v_i}{x}$ según los divisores sea h.

Con posterioridad a la técnica que dio lugar a los cinco métodos de Huntington, se ha generalizado la idea de divisores y se ha obtenido una familia infinita de métodos basados en divisores que contiene como casos particulares a los cinco métodos de Huntington y a los de la familia paramétrica.

2.3 Definición general de métodos basados en divisores

Una idea general para obtener métodos de asignación de escaños mediante divisores se basa en la definición de un *"umbral d para redondear"* las fracciones de cada intervalo $[s, s+1]$, $s = 0, 1, 2, ...$, a una de las cantidades enteras que lo limitan y buscar un divisor x tal que si $a_i = \left[\frac{v_i}{x}\right]_d$ (donde $\left[\frac{v_i}{x}\right]_d$ es el redondeo de las fracciones $\frac{v_i}{x}$ según el umbral d) se tenga $\sum_{i=1}^{n} a_i = h$. Los métodos obtenidos de esta forma se denominan **métodos basados en divisores**.

La teoría matemática que fundamenta los métodos de asignación de escaños basados en divisores es la siguiente.

Sea $d(.)$ una función, estrictamente creciente, definida en los enteros no negativos $s \geq 0$, satisfaciendo

$$\begin{aligned} d : \mathbb{N} \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto d(s) \end{aligned}$$

tal que

$$s \leq d(s) \leq s+1$$

con $s = 0, 1, 2, \ldots$, y no existen dos enteros $a \geq 1$, $b \geq 0$ tales que $d(a) = a$ y $d(b) = b+1$. A una función de este tipo se le denomina *función divisor* o, simplemente, divisores. Es inmediato que *para cualquier número real $r \geq 0$ existe un único entero $s \geq 0$ tal que*

$$d(s) \leq r \leq d(s+1),$$

o bien

$$r < d(0).$$

Basándonos en esta propiedad damos la siguiente definición.

Definición 2.3.1 *Sea $r \in \mathbb{R}^+$, definimos el* ***redondeo de r,*** *basado en la función $d(.)$ y lo notaremos por $[r]_d$ como*

$$[r]_d = \begin{cases} 0 & \text{si } r < d(0) \text{ o } r = 0 \\ s \text{ o } s+1 \text{ (indiferente)} & \text{si } r = d(s) \text{ y } r > 0 \\ s+1 & \text{si } d(s) < r < d(s+1) \end{cases}$$

El redondeo es único, salvo que $r = d(s)$, para algún s, en cuyo caso hay dos redondeos posibles.

Un método M^d basado en los divisores d, para asignar h escaños entre n partidos (existiendo restricciones mínimas y máximas) consiste en encontrar un divisor $x > 0$ para calcular los cocientes $\frac{v_i}{x}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \text{mediana}\left\{m_i, \left[\frac{v_i}{x}\right]_d, t_i\right\} = h,$$

para algún d-redondeo de las cantidades $\frac{v_i}{x}$, cuando existen límites mínimos, m_i, y máximos, t_i, de asignación de escaños. Cuando no existen límites máximos, t_i, la mediana se sustituye por el máximo de las dos cantidades restantes; cuando no existen restricciones mínimas la mediana se sustituye por el mínimo. En el caso más frecuente, es decir, cuando no existen restricciones, ni máximas ni mínimas, sólo se necesita $\sum_i \left[\frac{v_i}{x}\right]_d = h$. Donde:

$$\begin{aligned} \text{Si } d(s) &< \frac{v_i}{x} < d(s+1), \ \left[\frac{v_i}{x}\right]_d = s+1 \\ \text{Si } \frac{v_i}{x} &< d(0), \ \left[\frac{v_i}{x}\right]_d = 0, \\ \text{Si } \frac{v_i}{x} &= d(s), \ \left[\frac{v_i}{x}\right]_d \in \{s, s+1\} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Observaciones

1. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_n$. El número n de partidos a considerar será a lo sumo igual al de escaños h a repartir, $n \leq h$, pues si $n > h$, el partido $n+1$ y los que le siguen no reciben escaños. Además si $n > h$ y $d(0) = 0$ el problema no tiene solución. Cuando $n = h$, si $d(0) = 0$ el reparto es inmediato: un escaño a cada partido; si $d(0) > 0$, como v_1 debe recibir, al menos, 1 escaño y a lo sumo, h, los posibles valores del divisor x son los que verifican $x \leq \frac{v_1}{d(0)}$,

$x \geq \frac{v_1}{d(h-1)}$. Cuando $n < h$, el primer partido recibe, al menos, 2 escaños y, a lo sumo, h; por tanto, los divisores x se encuentran en el intervalo

$$x \in \left[\frac{v_1}{d(h-1)}, \frac{v_1}{d(1)}\right]$$

2. Al disminuir x aumentan los cocientes correspondientes de (2.3.1) y, por tanto, los valores a_i aumentan (o al menos no disminuyen) y, cuando aumenta x, a los valores de a_i les ocurre lo contrario.

3. Si $d(0) = 0$, por (2.3.1) $a_i \geq 1$ para todo i tal que $v_i > 0$. Luego los divisores $d(.)$, con $d(0) = 0$, no son prácticos para el reparto de escaños entre partidos ya que $\forall x \in (0, \infty)$ habría que asignar, al menos, un escaño a cada partido y si $n > h$, $\sum a_i > h$. Por tanto, de pretender usar unos divisores d con $d(0) = 0$ para asignar escaños a los partidos, se hace imprescindible imponer una restricción a los partidos para poder participar en el reparto de escaños, por ejemplo, superar un porcentaje de votos; por el contrario, en la asignación de escaños a las circunscripciones no presenta ningún problema usar divisores con $d(0) = 0$, pues se suele exigir que toda circunscripción tenga, al menos un escaño (de hecho, en EE.UU. se han utilizado métodos para la asignación de escaños cuyo primer divisor es nulo).

4. Cuando x crece, partiendo del valor $\frac{v_i}{d(h-1)}$ el redondeo de $\left[\frac{v_i}{x}\right]_d$ disminuye pasando de forma continua por los enteros h, $h-1$, ..., 1, 0 (supuesto $d(0) > 0$). Su valor es único salvo cuando coincide con uno de los siguientes $\frac{v_i}{d(h-1)}, \frac{v_i}{d(h-2)}, \ldots,$ $\frac{v_i}{d(1)}, \frac{v_i}{d(0)}$, en cuyo caso toma dos valores posibles que son consecutivos. Luego existe una sucesión finita de números $c_1 < c_2 < \ldots < c_p$, tales que $\sum_i \left[\frac{v_i}{x}\right]_d$ tiene valor constante en cada intervalo $(0, c_1)$, (c_1, c_2), $(c_2, c_3), \ldots, (c_{p-1}, c_p)$ y decreciente al avanzar de cada intervalo al siguiente. Los extremos c_j se obtienen al dividir los v_i por $d(0), d(1), \ldots, d(h-1)$, respectivamente.

   4a. Si $\sum_i \left[\frac{v_i}{x}\right]_d = h$ cuando $x \in (c_k, c_{k+1})$, para algún k, todo valor de x de dicho intervalo es un divisor válido para efectuar el reparto.

   4b. Si $\sum_i \left[\frac{v_i}{x}\right]_d = h_1 < h$, $x \in (c_k, c_{k+1})$ y $\sum_i \left[\frac{v_i}{x}\right]_d = h_2 > h$, $x \in (c_{k-1}, c_k)$ es porque existen $(h_2 - h_1)$ pares $\{i, j\}$ para los cuáles el cociente $\frac{v_i}{d(j)}$ vale c_k, luego tomando $x = c_k$, por (2.3.1), $\sum_i \left[\frac{v_i}{c_k}\right]_d$ puede tomar cualquier valor

entero entre h_1 y h_2, ambos inclusive, existiendo $\begin{pmatrix} h-h_1 \\ h_2-h_1-1 \end{pmatrix}$ asignaciones diferentes tales que $\sum_i a_i = h$.

Podemos enunciar el siguiente teorema (supuesto que $n \leq h$).

Teorema 2.3.2 *Para cualquier función divisor d, existe, al menos, un valor de x y un redondeo de las cantidades $\frac{v_i}{x}$ que constituyen un reparto de los h escaños.*

1. Si para repartir h escaños necesitamos un divisor x, y para repartir $h+1$ escaños (con la misma distribución de votos) otro divisor x', se tiene que $x' \leq x$, de tal forma que:

   1a. Si se da la situación 4b. $x' = x$. En este caso hay que elegir $h+1-h_1$ partidos entre los $h_2 - h_1$ empatados; es decir, se tienen

   $$\begin{pmatrix} h-h_1 \\ h_2-h_1-1 \end{pmatrix}$$

   soluciones posibles. Cada una de ellas puede obtenerse eligiendo $h-h_1$ partidos entre los $h_2 - h_1$ empatados no elegidos.

   1b. Si $x' < x$, y los vectores de asignación de escaños para los h y $h+1$ escaños son, respectivamente, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}'$ se verifica que $a'_i \geq a_i$, $\forall i$, lo que equivale a que $a'_i = a_i$, $\forall i$, excepto para ur j tal que $a'_j = a_j + 1$. Por ello, en cualquier caso, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 2.3.3 *Toda solución $\mathbf{a}'$ para repartir $h+1$ escaños con un método basado en divisores, puede obtenerse partiendo de alguna solución $\mathbf{a}$ correspondiente al reparto de h escaños y disminuir el valor de x si fuera necesario hasta conseguir asignar un escaño más a alguno de los partidos.*

Ejemplo 2.3.1 *Dado el problema* $((100000, 62000, 24000); 5)$ *se trata de encontrar el divisor x para repartir 5 escaños entre tres partidos, con los divisores $d(s) = s + 0.6$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Los cocientes, y posibles redondeos, para $x = 40000$, se recogen en la Tabla 2.5.*

Si $x > 40000$, el redondeo permite asignar, a lo sumo, 3 escaños. Si $x = 40000$ los redondeos pueden sumar hasta 4. Debemos elegir otro x más pequeño. Cualquier valor muy próximo a 40000, pero menor que 40000, conduce a la asignación de 4 escaños. Si $x = 30000$, los escaños que se asignarían serían 6.

Partidos	Votos	$\frac{v_i}{x} = \frac{v_i}{40000}$	$\left[\frac{v_i}{x}\right]_d$
1	100 000	2.50	2
2	62 000	1.55	1
3	24 000	0.60	0⟷1

Tabla 2.5: Asignación de 5 escaños a tres partidos cuando $x = 40000$. Como el número de escaños asignados son 3 o 4, el valor de x no es válido.

Cualquier $x \in \left(\frac{100000}{2.6}, \frac{62000}{1.6}\right) = (38465.53, 38750)$ es válido como divisor, puesto que el número de escaños asignado sería 5.

Si usamos el divisor $x = 38750$, los resultados que se obtienen se recogen en la Tabla 2.6.

Partidos	Votos	$\frac{v_i}{x} = \frac{v_i}{38750}$	$\left[\frac{v_i}{38750}\right]_d$
1	100 000	2.58	2
2	62 000	1.60	1⟷2
3	24 000	0.62	1

Tabla 2.6: Asignación de 5 escaños a tres partidos cuando $x = 38750$. Como $h = 5$, el valor de x es válido, asignando 2 escaños al segundo partido.

Si $x = \frac{100000}{2.6}$, se puede tomar $a_1 = 2$ o 3. Si se toma $a_1 = 2$, el reparto que se obtiene es válido. Si $x < \frac{100000}{2.6}$ el número de escaños repartidos es mayor o igual a 6. Luego para asignar 5 escaños con estos divisores es necesario que $x \in \left[\frac{100000}{2.6}, \frac{62000}{1.6}\right]$.

Ejemplo 2.3.2 *Buscar el divisor x para repartir 5 escaños con los divisores del ejemplo anterior, en proporción al vector de votos* $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{52000, 32000, 16000\}$. *La Tabla 2.7 muestra los resultados obtenidos con* $x = 20000$.

Partidos	Votos	$\frac{v_i}{x} = \frac{v_i}{20000}$	$\left[\frac{v_i}{x}\right]_d$
1	52 000	2.60	2⟷3
2	32 000	1.60	1⟷2
3	16 000	0.80	1

Tabla 2.7: Asignación de cinco escaños a tres partidos con $x = 20000$.

Cuando $x = 20000$ estamos ante un caso de empate, a_1 puede ser dos o tres, a_2 puede ser 1 o 2. Luego hay dos soluciones que suman 5: $\mathbf{a} = (3, 1, 1)$ o $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$.

2.4 Otros planteamientos

En el capítulo primero hemos obtenido el método de los Restos Mayores o de Hamilton como solución a un problema de optimización, minimizando la $\|\mathbf{a}-\mathbf{q}\|_1$, con $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^n$. Lógicamente se podría plantear optimizar otra función objetivo. Por ejemplo, $\frac{v_i}{a_i}$ es la media de votos por diputado del partido i podemos tratar de que el mínimo de estas cantidades sea lo más grande posible, la respuesta como es conocida, es el método d'Hondt. Se podría pensar en minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre el número de escaños por voto y la media de escaños por voto, para cada voto. Esto es, minimizar $\sum_i v_i(\frac{a_i}{v_i}-\frac{h}{\|\mathbf{v}\|_1})^2$, cuya respuesta es el método de St. Laguë, o bien minimizar $\sum_i a_i(\frac{v_i}{a_i}-\frac{\|\mathbf{v}\|_1}{h})^2$, cuya respuesta es el método de la media geométrica, o bien minimizar $\sum_i v_i(\frac{a_i+t-0.5}{v_i}-\frac{h}{\|\mathbf{v}\|_1})^2$, cuya respuesta es el método de la familia paramétrica M^t, cuyos divisores son $d(s)=s+t$. Análogamente se podrían definir otras funciones objetivo a optimizar y obtener nuevos métodos.

Pero la cuestión es siempre la misma, ¿por qué se elige una función objetivo ú otra?, ¿por qué se elige una expresión determinada en la comparación por pares?, ¿por qué se eligen unos divisores u otros? [19]

No existe una respuesta que nos permita decir qué elección es la más apropiada. Por ello, es lógico plantearse otro camino. Puede ser, establecer una tabla de propiedades que desearíamos que cumpliese un método de asignación proporcional, tal vez imposibles de ser verificadas todas por un mismo método, y, después, elegir las más apropiadas en cada caso, que sean compatibles, para elegir el método. Así pues, procedemos a establecer propiedades lógicas que deseamos las verifiquen los métodos de asignación proporcional.

2.5 Propiedades lógicas para los métodos de asignación de escaños

Vemos a continuación, algunas de las propiedades lógicas que son deseables que cumpla un método de asignación proporcional de escaños, [26].

2.5.1 *Exactitud*

Sea el problema $(\mathbf{v},\mathbf{mín},\mathbf{máx};h)$; es difícil que se presente un ejemplo real para el cual todas las componentes del vector de cuotas sean números enteros pero, si se diera este

caso, entonces la única solución al problema de asignación proporcional debiera ser la solución exacta. Es decir, diremos que M es exacto si el vector de cuotas $\mathbf{q}$ tiene todas sus componentes enteras, $\mathbf{q} \in \mathbb{Z}^n \Longrightarrow M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h) = \{\mathbf{q}\}$.

2.5.2 *Homogeneidad*

La idea de proporcionalidad demanda la homogeneidad del método. Diremos que M es homogéneo si

$$\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h) \Rightarrow \mathbf{a} \in M(\lambda\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h), \forall \lambda > 0.$$

2.5.3 *Anónimo*

Un método M se dice que es anónimo si los resultados para cada partido no dependen del orden en que aparezcan sus votos; es decir, una permutación en el vector de votos conduce a la misma permutación en el vector de resultados. Es decir, si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, un método M de asignación, es anónimo, si $\mathbf{a}^g \in M(\mathbf{v}^g, \mathbf{mín}^g, \mathbf{máx}^g; h)$ para cualquier permutación g de todos los vectores.

2.5.4 *Equilibrado*

Un método M se dice que es equilibrado si las asignaciones de escaños a dos partidos distintos que tengan el mismo número de votos difieren como mucho en un escaño. Es decir, si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}, h)$ y $v_i = v_j$, $\min_i = \min_j$, $\max_i = \max_j$ implica que $|a_i - a_j| \leq 1$.

2.5.5 *Débilmente* v-*monótono respecto de los votos*

Se dice que un método M es débilmente v-monótono si ante dos problemas que difieran sólo en los votos de un partido, por ejemplo, $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ y $(\mathbf{v}', \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ con $v_i < v_i'$ y $v_j = v_j'$, para todo $i \neq j$, entonces si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ y $\mathbf{a}' \in M(\mathbf{v}', \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, se tiene $a_i \leq a_i'$.

La propiedades anteriores las satisfacen el método de los Restos Mayores y todos los métodos basados en divisores. Sería razonable exigir que estas propiedades, al menos, las cumpla un método para llamarlo proporcional.

Otras propiedades lógicas para los métodos de asignación proporcional son:

2.5.6 *h-monotonía (o monotonía con respecto al tamaño de la circunscripción)*

Salvo para alguna de las posibles soluciones correspondientes a empates múltiples, cuando se reparten más escaños ningún partido debiera recibir menos. Cuando un método posee esta propiedad diremos que es $h-$monótono. Es decir, diremos que M es $h-$monótono si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ implica que existe $\mathbf{a}' \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h+1)$ tal que $\mathbf{a}' \geq \mathbf{a}$. Por tanto, los métodos h-monótonos no presentan la paradoja de Alabama.

2.5.7 v-*monotonía (o monotonía con respecto a los votos o con respecto a los cambios en la población)*

Sean los problemas $(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ y $(\mathbf{v}', \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, tales que $v_i' > v_i$ y $v_j' < v_j$. Entonces, si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ y $\mathbf{a}' \in M(\mathbf{v}', \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, no es lógico que al pasar del primer problema al segundo, el partido i pierda representación y el j aumente la suya; es decir, no debiera ocurrir que $a_i' < a_i$ y $a_j' > a_j$. No es lógico que un método presente la paradoja de los votos. Luego un método M diremos que es v-monótono si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, y $\mathbf{a}' \in M(\mathbf{v}', \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ con $v_i' > v_i$ y $v_j' < v_j$ implica que no debe darse simultáneamente que $a_i' < a_i$ y $a_j' > a_j$.

2.5.8 n-*monótono (o monótono respecto de los nuevas circunscripciones o a los nuevos estados)*

Supongamos que existen m circunscripciones (o m estados en una Cámara Fedral) a las que corresponden $(h_1, h_2, ..., h_m)$ escaños, con $\sum_i h_i = H$, en función de su respectivas poblaciones. Si aumenta en 1 el número de circunscripciones (o se anexiona un nuevo estado) y no aumenta el tamaño H de la Cámara, y el reparto entre las $m+1$ circunscripciones es $(a_1', a_2', ..., a_m', a_{m+1}')$ escaños, entonces debiera ocurrir que el número de escaños que recibe cada circunscripción cuando el número de ellas es $m+1$ fuese menor o igual que el número de escaños que recibe cada circunscripción cuando el número de ellas que intervienen en la asignación es m, es decir, $a_i' \leq a_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Un método que posea esta propiedad diremos que es n-monótono.

El método de los Restos Mayores no es monótono en ninguno de los tres sentidos citados últimamaente, aunque sí es débilmente monótono. Tablas 1.3, 1.4,1.6 y 1.8, del primer capítulo corroboran dicha afirmación.

2.5.9 *Consistencia*

Las partes proporcionales de una asignación proporcional deben ser proporcionales. Por ejemplo, si un método M de asignación proporcional, en una elección en la que participan

los partidos A, B, C, ..., otorga a_1 escaños a A y a_2 a B, es lógico que si sólo hubiesen participado estos dos partidos, y el número de escaños a asignar hubiese sido $h = a_1 + a_2$, la asignación con M debería ser a_1 escaños al partido A y a_2 al B. Además, los empates se deben reproducir. De manera general, si el conjunto de índices se separa en dos partes $S \cup T = \{1, 2, ...n\}$, y $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$, notamos por $\mathbf{a}^S$ la parte del vector $\mathbf{a}$ que corresponde a los índices de S, (análogamente para los de T), entonces se dice que el método M es consistente si

$$(\mathbf{a}^S, \mathbf{a}^T) \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$$

implica

$$\mathbf{a}^S \in M\left(\mathbf{v}^S, \mathbf{mín}^S, \mathbf{máx}^S; \sum_S a_i\right)$$

y si, además,

$$\mathbf{b}^S \in M\left(\mathbf{v}^S, \mathbf{mín}^S, \mathbf{máx}^S; \sum_S a_i\right)$$

entonces

$$(\mathbf{b}^S, \mathbf{a}^T) \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$$

El método de los Restos Mayores no es consistente (Ver Tablas 1.9 y 1.10 del capítulo primero)

Teorema 2.5.1 *(Caracterización de los métodos basados en divisores [5]) Los únicos métodos de asignación que son consistentes y v-monótonos son los métodos basados en divisores.*

2.5.10 Cuota

Si $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ es la solución de un determinado problema con un método M. Se dice que dicho método M satisface la cuota si toda asignación $\mathbf{a}$ difiere en menos de un escaño de su cuota $\mathbf{q}$; es decir que $|q_i - a_i| < 1$, $\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n_+$, $i = 1, ..., n$. Lógicamente, esto equivale, a que $\lfloor q_i \rfloor \leq a_i \leq \lceil q_i \rceil$ para todo i. Evidentemente, el método de Hamilton verifica esta propiedad. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.5.2 *Ningún método basado en divisores verifica la cuota.*

Demostración

Es conocido que Adams verifica la cuota superior pero puede violar la inferior y que a d'Hondt le ocurre lo contrario.

Sea un método M^d basado en los divisores d para los cuales $\exists\, c \in \{0,1,2,3,...\}$ tal que $c < d(c) < c+1$, entonces

$$d(c) = c + r(c), 0 < r(c) < 1 \Rightarrow \exists\, \frac{p_1}{q_1} \text{ y } \frac{p_2}{q_2}, \text{ con } 0 < \frac{p_1}{q_1} < r(c) < \frac{p_2}{q_2} < 1$$

donde p_1, p_2, q_1 y q_2 son enteros positivos. Consideramos el siguiente vector de votos

$$\mathbf{v_2} = (q_2 k, \overbrace{cq_2 + p_2, ..., cq_2 + p_2}^{q_2}), \text{ y el problema } (\mathbf{v_2}; k + q_2 c + p_2)$$

cuyas cuotas son

$$\mathbf{q_2} = (k, \overbrace{c + \frac{p_2}{q_2}, ..., c + \frac{p_2}{q_2}}^{q_2})$$

de tal forma que para k suficientemente grande el reparto es

$$\mathbf{a_2} = (k - e, \overbrace{c+1, ..., c+1}^{q_2})$$

siendo $e = q_2 - p_2 \geq 1$. Por tanto el método viola la cuota inferior. □

Utilizando la otra fracción considerada y un razonamiento análogo nos permite probar que el método también viola la cuota superior. De tal forma que Adams es el único método que satisface la cuota superior y d'Hondt el único que satisface la cuota inferior. Tal vez sean estas limitaciones lo que han llevado a M. Balinski y H.P. Young, [26] a introducir un nuevo concepto relacionado con la cuota. El concepto de estar los repartos "cerca de la cuota" que recogemos a continuación

2.5.11 *Cerca de la cuota*

Se dice que un método M está cerca de la cuota si para todo $i \neq j$ $\mathbf{a} \in M(\mathbf{v}, \mathbf{mín}, \mathbf{máx}; h)$ implica que no ocurre simultáneamente

$$\{|a_i - q_i| > |a_i + 1 - q_i| \text{ y } |a_j - q_j| > |a_j - 1 - q_j|\},$$

Es decir, sería imposible transferir un escaño de un partido j a un partido i de manera que ambos reciban asignaciones más próximas a sus respectivas cuotas.

Esta propiedad admite que un partido pueda recibir más escaños de la cuota superior, pero no puede ser a costa de partidos cuyo resto sea superior a 0.5 y, análogamente, se admite que algún partido pueda recibir menos escaños de su cuota inferior pero no podrá ser a causa de que partidos con resto menor que 0.5 hayan sido beneficiados con respecto a su cuota.

Teorema 2.5.3 *(De imposibilidad de Balinski [17]). No es posible definir un método de asignación de escaños que sea homogéneo, monótono con respecto a los votos y que verifique la cuota.*

Sin lugar a duda, este teorema tiene un paralelismo y una importancia similar al famoso teorema de Arrow. M. Balinski ha conseguido encontrar un método, denominado Método de la Cuota, consistente y monótono con respecto al tamaño de la circunscripción pero, lamentablemente, no es débilmente monótono con respecto a los votos.

Con respecto a estar cerca de la cuota la respuesta es contundente:

Teorema 2.5.4 *El único método consistente que está cerca de la cuota es de St. Laguë [27].*

Otro resultado interesante es la caracterización de los métodos en divisores es el siguiente:

Teorema 2.5.5 *(Caracterización de los métodos en divisores [11]). Los únicos métodos consistentes y débilmente monótonos son los basados en divisores.*

Esto constituye una razón poderosa para indicar que los únicos métodos que es razonable elegir para la distribución proporcional son los de divisores. Si además se quiere que el reparto esté cerca de la cuota la elección debe ser el método de St. Laguë. Pero a veces, otras propiedades pueden interesar más que la proximidad a la cuota. Por ejemplo, puede interesar primar a los grandes partidos para evitar la fragmentación de los mismos; esto nos induce a considerar otras propiedades que pueden conducir a elecciones diferentes.

Se entiende por sesgo de un método electoral a la tendencia sistemática a favorecer, en el reparto, a circunscripciones o a partidos con determinadas características. Por ejemplo, favorecer a los grandes partidos, o favorecer a los pequeños partidos. Se dice que un método es imparcial, o insesgado, cuando no prima ni a los grandes partidos ni a los pequeños.

En los repartos de escaños entre circunscripciones, cualquier método que presente sesgo en favor de las circunscripciones más grandes, o de las más pequeñas, debiera ser rechazable, salvo si es producido por restricciones mínimas ó máximas.

Sin embargo, en repartos entre partidos suele aceptar en muchas ocasiones que el método sea sesgado en favor de los partidos más grandes para fortalecer la unidad de los partidos.

El método de Adams es sesgado en favor de los pequeños partidos y el metodo de St. Laguë es insesgado, no da ventajas a los grandes partidos sobre los pequeños ni viceversa, es imparcial.

2.5.12 *Fortalecimiento de coaliciones o subaditividad*

Un método M para la asignación de escaños fortalece coaliciones, o posee la propiedad de subaditividad, si para cualquier distribución de votos entre los partidos $i_1, i_2, ..., i_j$, el número de escaños $a_{i_1+i_2+...+i_j}$ que recibiría la coalición formada por los partidos $i_1, i_2, ..., i_j$ es mayor, o igual, que la suma de los obtenidos separadamente:

$$a_{i_1+i_2+\cdots+i_j} \geq a_{i_1} + a_{i_2} + ... + a_{i_j}.$$

Se entiende que los restantes partidos reciben el mismo número de votos tanto si los partidos $i_1, i_2, ..., i_j$ compiten por separado como que si lo hacen juntos, y que los votos de la coalición es la suma de los votos que obtienen por separado los partidos que la forman.

Es conocido que el único método basado en divisores que fortalece coaliciones es el método d'Hondt. A cambio el método d'Hondt es sesgado en favor de los grandes partidos.

Teorema 2.5.6 (14) . *El método d'Hondt es el único consistente, monótono y estable que fortalece coaliciones.*

Teorema 2.5.7 *El método de St. Lagué es insesgado.*

Como no es posible definir un método de asignación de escaños que verifique todas las propiedades lógicas deseables, hay que prescindir de alguna de las propiedades anteriores, ya que todo método incumple alguna de ellas. Por tanto, para elegir un método se debe elegir previamente qué conjunto de propiedades compatibles deseamos que verifique y, después, elegir el método. No a la inversa.

Una de las propiedades que primero se suele elegir es la cuota, pero hemos visto que esa propiedad limita mucho el conjunto de métodos a considerar y que los métodos que verifican la cuota contienen paradojas que los hacen muy rechazables. Además, verificar la cuota supone exigir mucho a los grandes partidos y muy poco a los pequeños. A un partido pequeño se le exige que la diferencia entre su cuota exacta de escaños y la asignación que obtiene sea menor que 1. A un partido grande se le exige la misma diferencia. De tal

forma que si, en un reparto, a un partido cuya cuota es 0.5 escaños se le asigna 1 escaño, recibe el doble y se verifica la cuota, pero otro partido al que correspondan 10.5 no puede recibir el doble, esto es 22 escaños, ni siquiera 12, para verificar la cuota. Por tanto, las limitaciones que origina la cuota no corresponden a una idea de proporcionalidad.

2.6 Repartos Biproporcionales

Finalizamos este capítulo haciendo una breve introducción al concepto de repartos biproporcionales. La teoría correspondiente puede verse detalladamente en [22] y [23].

Esta técnica se aplicará en alguna de las alternativas correspondientes a la adaptación del sistema electoral alemán a España, que desarrollamos en el capítulo 7 de esta Memoria.

De forma resumida, un ejemplo de problema de reparto biproporcional se presenta cuando n partidos concurren en m circunscripciones. Tenemos una matriz de votos, $\mathbf{V}$, de dimensión $n * m$, que contiene los votos de cada partido en cada circunscripción y le queremos asignar una matriz $\mathbf{A}$, de igual dimensión, y valores a_{ij} enteros no negativos que contiene los escaños que debe recibir el partido i en la circunscripción j, sujeta a ciertas restricciones. Un tipo de restricciones posibles es de igualdad: la suma de los elementos de las filas y columnas de la matriz $\mathbf{A}$ deben tener ciertos valores fijados previamente; es decir, limitaciones de forma que el total de escaños recibidos por el partido i, en las m circunscripciones sea f_i y el número de escaños que asignados a las listas de los n partidos de la circunscripción j sean c_j. Se trata de aproximar una matriz rectangular por otra con cantidades enteras para las cuales existen limitaciones de igualdad por filas y por columnas. Este tipo de métodos permiten, por ejemplo, asignar a cada partido en total un número de escaños próximo a la cuota de sus votos totales y a cada circunscripción una cantidad próxima a la que corresponda a su cuota de población.

Ejemplo 2.6.1 *Supongamos que 4 partidos A, B, C y D han concurrido en tres circunscripciones c1, c2 y c3 y han obtenido los resultados que aparecen en la matriz* $\mathbf{V}$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 100000 & 40000 & 60000 \\ 70000 & 50000 & 30000 \\ 36000 & 44000 & 20000 \\ 14000 & 26000 & 10000 \end{pmatrix}$$

siendo 50 el total de escaños que deben distribuirse. Supongamos que las circunscripciones deben recibir 17, 17 y 16 representantes respectivamente y que cada partido debe recibir una asignación en el conjunto de las tres circunscripciones proporcional a sus votos totales según el método de St. Laguë. Es decir A, 20 escaños; B, 15; C, 10 y D, 5. ¿Cuántos escaños debemos asignar a cada partido en cada circunscripción?

Observamos que el coste medio de cada escaño es 10000 votos; si multiplicamos la matriz de votos por el escalar $\lambda = \frac{1}{10000}$ y redondeamos según St. Laguë tenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

que verifica las restricciones para los partidos pero no las verifica con respecto a las circunscripciones. De hecho, lo normal con el procedimiento seguido es que no las verificase ni para los partidos ni para las cricunscripciones. Aunque, lógicamente es muy fácil conseguir que las verifique en uno de los dos sentidos, puesto que basta con descomponer el problema matricial como varios problemas vectoriales.

Debemos multiplicar la primera columna de la matriz de votos por $\beta_1 < 1$ y la tercera por un factor $\beta_3 > 1$, después multiplicamos de nuevo toda la matriz por un λ tal que los redondeos sumen 50. En este ejemplo, fácil, es inmediato que tomando $\beta_1 = 0.85$, $\beta_3 = 1.25$ y $\lambda = \dfrac{1}{10000}$ obtenemos como un posible redondeo con St. Laguë

$$V = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

que verifica todas las restricciones establecidas para partidos y crcunscripciones.

En general, el proceso no es tan inmediato. Normalmente, al intentar normalizar las columnas para que la suma de los redondeos sea correcta se reajustan las filas; es decir, deja de ser correcta la asignación a los partidos.

Por ejemplo, en la Tabla 2.8 se recogen los votos de dos partidos A y B en dos circunscripciones c1 y c2, así como, el total de escaños que debe recibir cada partido y cada circunscripción.

Es decir, la matriz de votos es

$$V = \begin{pmatrix} 100 & 80 \\ 30 & 70 \end{pmatrix}$$

y las restricciones son A, 12 escaños; B, 16 escaños; en c1 deben elegirse 15 representantes y en c2, 13. La respuesta no es tan inmediata como en el caso anterior. Puede comprobarse

part.\circ.	c1	c2	escaños
A	100	80	12
B	30	70	16
represent.	15	13	28

Tabla 2.8: Votos de los partidos A y B y número de representantes de cada partido y de cada circunscripción.

que tomando $\lambda = 0.1$, $\alpha_1 = 0.606$, $\alpha_2 = 1.75$, $\beta_1 = 1.257$, $\beta_2 = 0.766$ se tiene

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.62 & 3.72 \\ 6.60 & 9.39 \end{pmatrix}$$

con lo cual los redondeos de St. Laguë darían

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

que verifica las restricciones establecidas.

Por tanto, hay que realizar un proceso iterativo de reajuste de filas y columnas hasta obtener la solución.

En general, el proceso de la distribución proporcional de escaños, respecto de una matriz de votos V_{nm} equivale a la búsqueda de unos escalares λ, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, $\beta_1,\ldots,\beta_m$ tales que las aproximaciones de los elementos de la matriz

$$\lambda \text{ Diagonal } (\alpha_1,\ldots,\alpha_n).V_{nm}.\text{Diagonal } (\beta_1,\ldots,\beta_m)$$

verifiquen las restricciones establecidas tanto por filas como por columnas y la suma total coincida con el número de escaños a repartir.

Aquí, por simplicidad y por ser los únicos que usaremos en el capítulo número 7, sólo hemos mencionado restricciones de igualdad: la suma de los elementos de cada fila (respectivamente columnas) de la matriz de asignación debe valer exactamente una cantidad. El esquema puede ser más general, dichas sumas pueden estar comprendidas entre dos cantidades enteras (restricciones de desigualdad).

Tampoco hemos entrado en el estudio de los métodos de asignación biproporcional, sino que directamente hemos utilizado el método de St.Laguë, pero podría haber sido cualquier otro método basado en divisores, ya que en [24] se establece una axiomática y se prueba

que son los métodos basados en divisores los únicos que la cumplen. Parte de los axiomas establecidos en [24] son la generalización a dos dimensiones de los primeros establecidos para el caso vectorial (exactitud, homogeneidad, monotonía débil con respecto a los votos, etc.).

Con respecto a la existencia de solución de un problema de reparto biproporcional hemos de indicar que se necesita, aparte de la compatibilidad de las restricciones, que todos los elementos, v_{ij}, de la matriz de votos sean mayores que cero. Esta condición no es restrictiva en la asignación de escaños a los votos, pues si un partido tiene cero votos en una circunscripción se le considera que tiene un voto, cambio que no altera la asignación en la práctica y nos permite aplicar el algoritmo de búsqueda de los multiplicadores para efectuar el reparto.

Como hemos indicado el desarrollo teórico de la asignación biproporcional puede verse en [22] y [23]; además en [29], [30] y [31] pueden verse muchos ejemplos aplicados a datos de varias elecciones de México. Por último un programa para efectuar este tipo de repartos que hemos realizado en lenguaje MATHEMATICA se encuentra en el apéndice de esta Memoria.

Capítulo 3

Familia paramétrica de métodos $d(s) = s + t$

3.1 Introducción

En este capítulo se presentan las aportaciones matemáticas más importantes de la Memoria. Se ha profundizado en el estudio de la familia paramétrica para la cual se han obtenido diversos resultados, entre los que cabe destacar los relativos a cotas máximas y mínimas en las asignaciones obtenidas con un método M^t y varias caracterizaciones de la familia paramétrica.

Se introduce un nuevo concepto, denominado *propiedad* α, que se refiere a que los partidos más votados no salgan perjudicados, a igualdad de restos en sus cuotas, con respecto a otros menos votados y se caracterizan los métodos de la familia paramétrica que verifican esta propiedad.

Por otra parte se demuestran diversos resultados que relacionan la sobrerrepresentación o la subrepresentación de los partidos más votados con respecto a los menos votados. Asimismo se encuentran notaciones sobre la asignación máxima y mínima para cada partido i con un método M^t.

Del estudio se deduce que existen dos sucesiones de valores de t, en el intervalo $[0, 1]$, una de ellas tiene el *cero* como punto de acumulación y la otra el *uno*. Son dos subfamilias de la familia paramétrica para las cuales se da alguna propiedad adicional y, por tanto, tienen un interés especial.

Algunas definiciones y resultados que se utilizarán en lo sucesivo se presentan a conti-

nuación.

Definición 3.1.1 *Diremos que un método verifica la propiedad α si, para todo problema de reparto para el cual $r_i \geq r_j$, con $i < j$, en el que existe una solución $\mathbf{a} \in M(\mathbf{q})$, con $a_j \geq q_j \Longrightarrow$ que existe una solución $\mathbf{b} \in M(\mathbf{q})$ con $b_i \geq q_i$.*

Por tanto, si $M(\mathbf{q})$ consta de una sola asignación y M verifica la propiedad α, si un partido j alcanza su cuota superior entonces todo partido i que tenga mayor cuota y mayor resto que el partido j alcanza, también, su cuota superior.

Definición 3.1.2 *Se dice que un método M es cíclico si*

$$\mathbf{a} \in M(\mathbf{v};h) \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{v} \in M(\mathbf{v};\, h + \|\mathbf{v}\|_1)\,.$$

3.2 Propiedades elementales de los métodos M^t

Teorema 3.2.1 *Supongamos que $\lambda' \leq \lambda''$. Si $(a,b) \in M^t((1,\lambda');h)$ y $(a,b) \in M^t((1,\lambda'');h)$ entonces $(a,b) \in M^t((1,\lambda);h)$, $\forall \lambda \in [\lambda',\lambda'']$.*

Demostración 1

Cuando λ coincide con λ' o con λ'' es evidente.

En caso contrario, se deduce de la propiedad de monotonía de los métodos basados en divisores. Para ellos, el resultado es el mismo cuando se aplica al vector de votos, al de cuotas o a cualquier otro proporcional a éstos, por ejemplo, al vector de cuotas dividido por la cuota del primero, $\frac{\mathbf{q}}{q_1}$, con lo cual la primera componente vale 1 como en el caso anterior. La monotonía con respecto a los votos o a los cambios en la población significa que si una componente aumenta y las demás no varían, la correspondiente componente del vector solución no disminuye. En nuestro caso, si se cumple que $(a-s, b+s) \in M^t((1,\lambda);h)$, entonces $s \geq 0$, por ser $\lambda' \leq \lambda$, y $s \leq 0$, por ser $\lambda \leq \lambda''$. Luego $s = 0$, con lo que concluye la demostración. □

Demostración 2

Si $(a,b) \in M^t((1,\lambda');h)$, siendo $a,b > 0$, se tiene que $\frac{1}{a+t} \leq \frac{\lambda'}{b-1+t}$ y $\frac{\lambda'}{b+t} \leq \frac{1}{a-1+t}$, lo que implica que

$$\frac{b-1+t}{a+t} \leq \lambda' \leq \frac{b+t}{a-1+t}$$

De forma análoga, si $(a,b) \in M^t((1,\lambda'');h)$, siendo $a, b > 0$, se satisfacen las desigualdades

$\frac{1}{a+t} \leq \frac{\lambda''}{b-1+t}$ y $\frac{\lambda''}{b+t} \leq \frac{1}{a-1+t}$, lo que da lugar a

$$\frac{b-1+t}{a+t} \leq \lambda'' \leq \frac{b+t}{a-1+t}$$

Así pues, podemos escribir la siguiente equivalencia:

$$\forall \lambda \in [\lambda', \lambda''], \frac{b-1+t}{a+t} \leq \lambda \leq \frac{b+t}{a-1+t} \Longleftrightarrow \forall \lambda \in [\lambda', \lambda''], (a,b) \in M^t((1,\lambda);h)$$

Si $b = 0$, se obtiene

$$\frac{-1+t}{a+t} \leq \lambda', \frac{-1+t}{a+t} \leq \lambda'', \Rightarrow \frac{-1+t}{a+t} \leq \lambda$$

lo que equivale a que $(a,0) \in M^t((1,\lambda);h)$. □

La consistencia de los métodos basados en divisores, permite extender este teorema a cualquier número de partidos, de tal forma que si $\mathbf{v}' = (v_1, v_{2,\ldots}, v_r', \ldots, v_n)$ y $\mathbf{v}'' = (v_1, v_{2,\ldots}, v_r'', \ldots, v_n)$ son dos vectores de votos con $v_r' < v_r''$ y una asignación $\mathbf{a} = (a_1, a_1, \ldots a_n)$ es tal que $\mathbf{a} \in M^t(\mathbf{v}';h)$ y $\mathbf{a} \in M^t(\mathbf{v}'';h)$ entonces $\mathbf{a} \in M^t(\mathbf{v};h)$ donde $\mathbf{v} = (v_1, v_{2,\ldots}, v_r, \ldots, v_n)$ con $v_r \in [v_r', v_r'']$.

Ejemplo 3.2.1 *Veamos un ejemplo que corrobore las hipótesis del teorema 3.2.1. Supongamos que tenemos una circunscripción de tamaño $h = 4$ y que en unas elecciones los votos de los dos partidos que pueden intervenir en el reparto de escaños en la misma son*

$$\mathbf{v}_1 = (62\,000, 38\,000).$$

Se tiene que

$$M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}_1;4) = M^{\frac{1}{2}}((1,\frac{38}{62});4) = (2,2).$$

Si los votos del segundo partido fuesen 40 000

$$\mathbf{v}_2 = (62\,000, 40\,000)$$

y

$$M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}_2;4) = M^{\frac{1}{2}}((1,\frac{40}{62});4) = (2,2).$$

Luego si, por ejemplo.

$$\mathbf{v}_3 = (62\,000, 39\,000)$$

podemos asegurar que

$$(2,2) \in M^{\frac{1}{2}}((62\,000, 39\,000); 4).$$

Análogamente, $(3,1) \in M^1(\mathbf{v}_1; 4)$ *y* $(3,1) \in M^1(\mathbf{v}_2; 4)$, *por lo que* $(3,1) \in M^1(\mathbf{v}_3; 4)$.

Teorema 3.2.2 *Sean* t' *y* t'' *tales que* $t' \leq t''$, *y supongamos que* $(a,b) \in M^{t'}((1,\lambda); h)$ *y* $(a,b) \in M^{t''}((1,\lambda); h)$. *Entonces,* $(a,b) \in M^t((1,\lambda); h)$ *para cualquier* t *del intervalo* $[t', t'']$.

Demostración

Si $(a,b) \in M^{t'}((1,\lambda); h)$, siendo $a, b > 0$, disponemos de las desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+t'} &\leq \frac{\lambda}{b-1+t'} \\ \frac{\lambda}{b+t'} &\leq \frac{1}{a-1+t'} \end{aligned}$$

que conducen a

$$b - 1 - a\lambda \leq t'(\lambda - 1) \leq b - a\lambda + \lambda$$

Análogamente, se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+t''} &\leq \frac{\lambda}{b-1+t''} \\ \frac{\lambda}{b+t''} &\leq \frac{1}{a-1+t''} \end{aligned}$$

por lo cual

$$b - 1 - a\lambda \leq t''(\lambda - 1) \leq b - a\lambda + \lambda.$$

y, en consecuencia,

$$b - 1 - a\lambda \leq t(\lambda - 1) \leq b - a\lambda + \lambda, \ \forall t \in [t', t''].$$

En definitiva, $(a,b) \in M^t((1,\lambda); h), \forall t \in [t', t'']$.

Caso de ser $b = 0$ se tiene que $(a,0) \in M^{t'}((1,\lambda); h)$, por lo que podemos escribir las siguientes implicaciones:

$$(a-1)\lambda \leq t'(1-\lambda) \Rightarrow (a-1)\lambda \leq t(1-\lambda), \forall t \geq t' \Rightarrow (a,0) \in M^t((1,\lambda); h), \forall t \geq t'$$

En particular, $(a,0) \in M^t((1,\lambda); h), \forall t \in [t', t'']$. □

La generalización a n partidos es inmediata, y se escribe:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in M^{t'}((v_1, v_2, \ldots v_n); h)$$

y

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in M^{t''}((v_1, v_2, \ldots v_n); h)$$

entonces

$$\mathbf{a} \in M^t((v_1, v_2, \ldots v_n); h), \ \forall t \in [t', t'']$$

Ejemplo 3.2.2 *La Tabla 3.1 muestra los resultados que obtuvieron los distintos partidos en la provincia de Almería en las elecciones generales de 1996. La solución, para distintos valores de t, verifican la hipótesis del teorema 3.2.2.*

Partido	Votos	Cuota	$M^{\frac{2}{3}}$	M^1
PSOE	135 789	2.42	3	3
PP	115 925	2.07	2	2
IU	28 580	0.51	0	0
Totales	280 294	5.00	5	5

Tabla 3.1: Resultados obtenidos por los distintos partidos en la provincia de Almería en las elecciones de 1996, Asignación con los métodos $M^{\frac{2}{3}}$ y M^1.

Con el valor de $t = \frac{2}{3}$, vemos que la solución del problema es $(3, 2, 0)$, que pertenece a $M^{\frac{2}{3}}((135\ 789, 115\ 925, 28\ 580); 5)$

Con $t = 1$ la solución del problema es $(3, 2, 0)$, que también pertenece al método $M^1((135\ 789, 115\ 925, 28\ 580); 5)$

Podemos asegurar, pues, que $(2, 3, 0)$ es solución del problema para cualquier valor t del intervalo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Teorema 3.2.3 *Supongamos que $\lambda < 1$, $t \leq t'$ y $(a, b) \in M^t((1, \lambda); h)$. Entonces existe una solución $(a', b') \in M^{t'}((1, \lambda); h)$ con $a' \geq a$.*

Demostración

Si $a = b = \frac{h}{2}$, se tiene que $a' \geq a$, puesto que $a' \geq \frac{h}{2}$.

Si $a \neq b$, $b \leq a - 1$ y supongamos que $a \geq 2$, (pues si $a = 1$, entonces $h = 1$ y, por tanto, $a' = 1$).

Como $(a, b) \in M^t((1, \lambda); h)$, se cumplen las desigualdades

$$\frac{1}{a+t} \leq \frac{\lambda}{b-1+t},$$
$$\frac{1}{(a-1)+t} \geq \frac{\lambda}{b+t}$$

que equivalen a

$$\frac{b-1+t}{a+t} \leq \lambda, \quad \frac{b+t}{(a-1)+t} \geq \lambda$$

respectivamente. En consecuencia,

$$\frac{(b-1)+t}{a+t} \leq \lambda \leq \frac{b+t}{(a-1)+t}$$

Definamos la función

$$f(t) = \frac{b+t}{(a-1)+t}$$

su derivada es

$$f'(t) = \frac{(a-1)+t-(b+t)}{[(a-1)+t]^2} = \frac{a-(b+1)}{[(a-1)+t]^2}$$

Cuando $b = a-1$, la derivada de f es nula, mientras que es positiva si $b < a-1$. Por tanto, es una función creciente en $[0, 1]$ si $b < a-1$, y podemos afirmar que $f(t) \leq f(t')$ para cualesquiera valores t y t' de $[0, 1]$ tales que $t \leq t'$. Entonces, se cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{\lambda}{b+t'} \leq \frac{1}{(a-1)+t'}$$

Así pues, podemos afirmar que con el método $M^{t'}$ el segundo partido no tiene derecho a recibir el escaño $b+1$ antes que el primer partido reciba el escaño a. □

Ejemplo 3.2.3 *En la Tabla 3.2 se recoge la asignación que obtuvieron con $t = 1$ los partidos en la circunscripción de Valencia en las elecciones generales de 1989 y la que hubieran obtenido con $t = \frac{2}{3}$.*

Al aumentar t de $\frac{2}{3}$ a 1, un escaño del cuarto partido, IU, pasa al primero, PSOE. De hecho, podría haber pasado al segundo ó al tercero, pero jamás al quinto.

Partido	Votos	Cuotas	$M^{\frac{2}{3}}$	M^1
PSOE	480 935	6.96	7	8
PP	290 922	4.21	4	4
UV	137 446	1.99	2	2
IU	118 567	1.72	2	1
CDS	77 663	1.12	1	1
Totales	1 105 533	16.00	16	16

Tabla 3.2: Distintas soluciones obtenidas para varios valores de t

Por tanto, al partido más votado nunca le perjudica el cambio del método M^t por el método $M^{t'}$, con $t < t'$, mientras que al menos votado nunca le beneficia dicho cambio. Para los partidos intermedios, los cambios de método pueden ser beneficiosos, perjudiciales o indiferentes. Para ellos no se puede afirmar nada, como se verá en el ejemplo que se da más adelante referido a Málaga; no obstante, normalmente, a los partidos que, sin ser el vencedor, se encuentren entre los más votados les interesan valores altos de t, mientras que a los menos votados les intersan valores bajos de t.

3.2.1 Consecuencia

Podemos dar un resultado que generaliza el teorema 3.2.3 para el caso en que el número de partidos que intervengan en el reparto sea n.

Si $t < t'$ y $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M^t(\mathbf{q}; h)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in M^{t'}(\mathbf{q}; h)$, se tiene que:

$$\sum_{1 \le i \le j}^{i=j} a_i \le \sum_{1 \le i \le j}^{i \le j} b_i, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

En efecto. Supongamos lo contrario, es decir, que

$$\exists\, j \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ tal que } \sum_{i \le j}^{i=j} a_i > \sum_{i \le j}^{i \le j} b_i.$$

Si $(a_1, \ldots a_r, \ldots, a_j, \ldots, a_s, \ldots, a_n)$ son los escaños que reciben n partidos con el $M^t(\mathbf{q}; h)$ y $(b_1, \ldots b_r, \ldots, b_j, \ldots, b_s, \ldots, b_n)$ son los que reciben, los n partidos con el $M^{t'}(\mathbf{q}; h)$. Por la hipótesis hecha se deduce que: $\exists$, r y s, con $r \le j < s$ tales que $a_r > b_r \ge b_s > a_s \ge 0$ entonces $a_r \ge 2$ y se satisface la desigualdad:

$$\frac{q_r}{(a_r - 1) + t} \ge \frac{q_s}{a_s + t}$$

que equivale a

$$\frac{a_s + t}{(a_r - 1) + t} \ge \frac{q_s}{q_r}$$

Definimos la función

$$f(t) = \frac{a_s + t}{(a_r - 1) + t}$$

cuya derivada es

$$f'(t) = \frac{((a_r - 1) + t)(a_s + t)}{[(a_r - 1) + t]^2} = \frac{a_r - a_s - 1}{[(a_r - 1) + t]^2}$$

Como $a_r - a_s \geq 2$, se sigue que f es monótona creciente en $[0, +\infty)$, y, en consecuencia $f(t) \leq f(t')$ para cualesquiera $t < t'$ de $[0, +\infty)$, lo que nos lleva a la desigualdad

$$\frac{q_r}{(a_r - 1) + t'} > \frac{q_s}{a_s + t'}$$

Entonces, podemos escribir la siguiente implicación:

$$b_s \geq a_s + 1 \Rightarrow b_r \geq a_r$$

Hemos llegado, pues, a una contradicción. □

Ejemplo 3.2.4 *Los votos obtenidos por los 5 partidos con derecho a participar en la asignación de los 10 escaños correspondientes a la circunscripción de Málaga en las elecciones generales de 1989 fueron:* $\mathbf{v} = (262\,607, 100\,061, 69\,486, 28\,396, 26\,350)$ *y las asignaciones correspondientes a* M^t *para los valores de* $t = 0.5, 0.6, 0.7$ *y* 1 *son:*

$$\begin{aligned} M^{0.5}(\mathbf{v};10) &= (5,2,1,1,1) \\ M^{0.6}(\mathbf{v};10) &= (6,2,1,1,0) \\ M^{0.7}(\mathbf{v};10) &= (6,2,2,0,0) \\ M^{1.0}(\mathbf{v};10) &= (7,2,1,0,0) \end{aligned}$$

de tal manera que, para los valores de t elegidos, al partido más votado nunca le perjudica el aumento de t, incluso le beneficia en dos ocasiones al segundo partido no le afecta el cambio de t; al tercer partido le beneficia el valor intermedio $t = 0.7$ *con respecto a los restantes, y a los dos menos votados no les beneficia el aumento de t. Por otra parte, puede observarse, que, cualquiera de las sumas parciales de los escaños de los j partidos más votados no disminuye; por ejemplo, la correspondiente a los tres partidos más votados es*

$$\sum_{1 \leq i \leq 3} a_i^{0.5} = 8 < \sum_{1 \leq i \leq 3} a_i^{0.6} = 9 < \sum_{1 \leq i \leq 3} a_i^{0.7} = 10 = \sum_{1 \leq i \leq 3} a_i^{1.0}$$

y la correspondiente a los dos más votados es

$$\sum_{1\leq i\leq 2} a_i^{0.5} = 7 < \sum_{1\leq i\leq 2} a_i^{0.6} = 8 = \sum_{1\leq i\leq 2} a_i^{0.7} < \sum_{1\leq i\leq 2} a_i^{1.0} = 9$$

Análogamente, se pueden comprobar los restantes.

Teorema 3.2.4 *El método M^t verifica la propiedad α si y sólo si $t \geq \dfrac{n-1}{n}$, siendo n el número de partidos que pueden conseguir escaño ($n \leq h$).*

Demostración

Condición necesaria

Consideremos un problema cuyas cuotas son las siguientes:

$$q_1 = 2 - \frac{1}{n},\ q_2 = q_3 = \ldots = q_n = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

Entonces $h = n$. Si $t < \dfrac{n-1}{n}$, se tiene que

$$\frac{q_1}{t} > \frac{q_2}{t} = \frac{q_3}{t} = \ldots = \frac{q_n}{t} > \frac{q_1}{1+t}$$

Por tanto, $\mathbf{a} = (1, 1, \ldots, 1)$ para el problema $M^t\left(2 - \dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}, \ldots, 1 - \dfrac{1}{n}\right)$ es la única solución que no verifica la propiedad α. Si $t = 0$, $\mathbf{a} = (1, 1, \ldots, 1)$ es también la solución.

Condición suficiente

Supongamos que $t \geq \dfrac{n-1}{n}$. Entonces
Si $r_j < t$, la tesis es cierta puesto que si $i < j$ y $r_i \geq r_j$, se tiene que

$$\frac{\lfloor q_j \rfloor + r_j}{\lfloor q_j \rfloor + t} \leq \frac{\lfloor q_i \rfloor + r_i}{\lfloor q_i \rfloor + t}$$

y, por tanto, el partido j no tiene derecho a recibir el escaño $\lfloor q_j \rfloor + 1$ antes que el partido i reciba el escaño $\lfloor q_i \rfloor + 1$.

Si $r_j \geq t$, sea k el número de restos mayores o iguales que t. La suma, s, de estos restos, verifica:

(1) Si $k = n, s = n - 1$. En este caso $r_i = t, i = 1, 2, \ldots, n$

(2) Si $k < n, s > k - 1$. Porque $s \geq k * t = k - \dfrac{k}{n} > k - 1$.

Cuando se da (1), existe un empate con n soluciones posibles. Para cada una de estas soluciones todos los partidos, excepto uno, alcanzan su cuota superior. La solución en la que el partido n no alcanza su cuota superior, verifica la propiedad α.

Cuando se da (2), $s \geq k$, luego, al menos, los k partidos con resto mayor o igual que t alcanzan su cuota superior. Por tanto, se verifica la propiedad α. □

Ejemplo 3.2.5 *En la Tabla 3.3 mostramos los votos que obtuvieron los partidos con derecho a participar en el reparto de escaños en la circunscripción de Barcelona en las elecciones generales de 1989. Vemos que con* $t = \dfrac{1}{2}$ *no se verifica la propiedad* α

Partido	Votos	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{4}{5}}$
PSOE	900 039	13.05	13	13	13
CiU	740 479	10.74	10	11	11
PP	256 785	3.72	4	4	4
IC	199 372	2.89	3	3	3
CDS	110 175	1.60	2	1	1
Totales	2 206 850	32.00	32	32	32

Tabla 3.3: Circunscripción de Barcelona en las elecciones generales de 1989. Vemos que con $t = \frac{1}{2}$ no se verifica la propiedad α.

Es decir, en Barcelona el método de St. Laguë asigna 10 escaños a CiU, partido con resto más grande, quedando perjudicado con respecto a PP y CDS, ambos con menos votos y con resto más pequeño; es decir, no verifica la propiedad α. Si aumentamos el valor de t a $\dfrac{4}{5}$, el teorema anterior nos asegura que el reparto verifica la propiedad α; no obstante, en este caso, también serían válidos valores menores que $\dfrac{4}{5}$, por ejemplo $t = \dfrac{2}{3}$ como hemos recogido en la Tabla 3.3 (incluso son válidos valores de t algo menores a 0.6).

1) Los métodos d'Hondt y Hamilton verifican la propiedad α para todo n.

2) El método de Adams no verifica la propiedad α cuando $n > 1$.

3) El método de St. Laguë no verifica la propiedad α cuando $n > 2$.

Proposición 3.2.5 *Sin limitaciones para n ni h no existe ningún método M^t, $t \in [0,1)$, que verifique la propiedad α. De hecho, sin limitación alguna para n y h el único método basado en divisores que verifica la propiedad α es d'Hondt.*

Demostración

Para ello, basta observar que si c es el primer entero para el cual el divisor $d(c)$ del método M^d es menor que $c+1$; existe una fracción $\frac{p}{q}$ entre ambas cantidades y al considerar una distribución de cuotas entre $n = q$ partidos como la siguiente $\mathbf{q} = (k+\frac{p}{q}, c+\frac{p}{q}, \ldots, c+\frac{p}{q})$, es decir, todas iguales excepto la primera, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{c+\frac{p}{q}}{d(c)} &> 1, \\ \lim_{k\to\infty} \frac{k+\frac{p}{q}}{d(k)} &= 1, \end{aligned}$$

con lo cual, para k suficientemente grande, ninguna solución de $M^d(\mathbf{q}; k+q)$ verifica la propiedad α.

Pero en la práctica h es finito, incluso pequeño en muchas ocasiones, por tanto, n suele ser pequeño y t queda sensiblemente inferior a 1 (para garantizar α). □

Observación

Por n estamos indicando el número de partidos con derecho a participar en la asignación de escaños. Cuando no existe una limitación legal a participar en el reparto (porque no existe un umbral mínimo que se necesite superar), resultaría irreal el valor mínimo de t obtenido para que se verifique la propiedad α porque, en general, puede presentarse un número elevado de pequeños partidos y obligar de esta forma a tomar un valor de t próximo a 1. Sin embargo, es evidente que más de h partidos no pueden obtener escaño, y, además, es fácil ver que n puede tomarse como el número de partidos cuya cuota tiene resto mayor o igual que i. Esto hace que en condiciones normales, en las que entre los dos partidos más votados obtienen alrededor del 70% de los votos, el valor $n = 3$ (es decir, $t = \frac{2}{3}$) garantiza la propiedad α en circunscripciones de tamaño medio en la gran mayoría de las ocasiones. De hecho, este valor habría verificado la propiedad α en los 52 repartos de cada una de las 7 elecciones celebradas en España entre 1977 y 1996.

Teorema 3.2.6 *Si $\exists\, \mathbf{a} \in M^t(\mathbf{q})$ con $a_i < \lfloor q_i \rfloor$, para algún i, y para algún $k < i$, tal que $q_k = q_i + m$, $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, entonces $\exists\, \mathbf{b} \in M^t(\mathbf{q})$ con $b_k < \lfloor q_k \rfloor$.*

Demostración

$a_i < \lfloor q_i \rfloor$ implica que $t \in [0,1)$, pues $t = 1 \Longrightarrow a_i \geq \lfloor q_i \rfloor$, $i = 1, \ldots, n$ (puesto que d'Hondt verifica la cuota inferior)

$\lfloor q_i \rfloor \geq 1$, si $t > 0$.

$\lfloor q_i \rfloor \geq 2$, si $t = 0$, pues con Adams $a_i \geq 1, i = 1, 2, \ldots, n$ (se supone $n \leq h$).

Luego $0 < t < 1$ y $\lfloor q_i \rfloor$ tiene que ser, al menos, igual a 1 para que puedan darse las hipótesis del teorema $a_i < \lfloor q_i \rfloor \Rightarrow a_i \leq \lfloor q_i \rfloor - 1$.

Vamos a ver que

$$\frac{q_i}{\lfloor q_i \rfloor - 1 + t} > \frac{q_k}{\lfloor q_k \rfloor - 1 + t}; \text{ es decir, que } \frac{q_i}{\lfloor q_i \rfloor - 1 + t} > \frac{q_i + m}{\lfloor q_i \rfloor + m - 1 + t}$$

Podemos definir la función

$$f(m) = \frac{(q_i + m)}{(\lfloor q_i \rfloor + m - 1 + t)}.$$

$f(m)$ es continua y derivable en $[0, \infty)$, $\forall m \geq 0$, ya que $\lfloor q_i \rfloor \geq 1$ y si $t = 0$, $\lfloor q_i \rfloor \geq 2$.

Entonces:

$$f'(m) = \frac{(\lfloor q_i \rfloor + m - 1 + t) - (q_i + m)}{(\lfloor q_i \rfloor + m - 1 + t)^2} = \frac{(\lfloor q_i \rfloor - q_i) + (t - 1)}{(\lfloor q_i \rfloor + m - 1 + t)^2}$$

$$f'(m) = \frac{-r_i + (t - 1)}{(\lfloor q_i \rfloor + m - 1 + t)^2} < 0$$

Luego $f(m)$ es una función decreciente$\Rightarrow f(m) \leq f(0)$, $\forall\, m \geq 0$, por tanto:

$$\frac{q_i + m}{\lfloor q_i \rfloor + m - 1 + t} < \frac{q_i}{\lfloor q_i \rfloor - 1 + t}$$

Así pues, antes de que el partido k reciba el escaño $\lfloor q_i \rfloor + m = \lfloor q_k \rfloor$, el partido i tiene que recibir el escaño $\lfloor q_i \rfloor$. Evidentemente si $m = 0$ puede darse una situación de empate.

Es decir, si la solución con M^t es única y un partido i obtiene en la asignación menos escaños que su cuota inferior, todo partido j con más votos que el i y menor o igual resto, $r_j \leq r_i$, recibe menos de su cuota inferior en la asignación con dicho método $\square$.

Observaciones

El teorema sigue siendo cierto si $q_k = \lfloor q_i \rfloor + m + r_k$, con $r_k \leq r_i$. Por tanto, si r_i está muy próximo a 1, (o, simplemente, es el mayor resto), r_k verifica la condición para todo partido con cuota mayor que el partido i. En tal caso, el partido i perdería con respecto a su cuota (al menos) cerca de 2 escaños. El teorema afirma que en tales condiciones todo partido con cuota superior al i debe perder, al menos, más de 1 escaño. Luego si el primer partido recibe la cuota inferior, ningún otro partido j puede recibir menos de $\lfloor q_j \rfloor - 1$ escaños.

Si un partido i no alcanza su cuota inferior, todo partido j anterior al i recibe, a lo sumo, su cuota inferior; es decir, si $a_i < \lfloor q_i \rfloor \Rightarrow a_j \leq \lfloor q_j \rfloor$, $j = 1, 2, \ldots, i-1$.

Ejemplo 3.2.6 *Sea una circunscripción de tamaño* $h = 25$. *Supongamos que las cuotas correspondientes a 7 partidos vienen dadas por el vector*

$$\mathbf{q} = (10.2, 9.3, 2.6, 1.51, 0.48, 0.46, 0.45)$$

La solución para $t = \dfrac{1}{3}$ será:

$$M^{\frac{1}{3}}\left((10.2, 9.3, 2.6, 1.51, 0.48, 0.46, 0.45)\,; 25\right) = (9, 8, 3, 2, 1\ \ 1)$$

Si el segundo partido no alcanza la cuota inferior el primero tampoco puede alcanzarla, puesto que tiene más votos y menor resto que el segundo, es decir,

$$a_2 = 8 < \lfloor q_2 \rfloor = 9 \Rightarrow a_1 < \lfloor q_1 \rfloor = 10$$

Como vemos $a_1 = 9$, lo que corrobora el teorema 3.2.6.

Teorema 3.2.7 *Si* $\exists\ \mathbf{a} \in M^t(\mathbf{q})$ *con* $a_i > \lceil q_i \rceil$, *para un* i, *y para algún* $k < i$, *tal que* $q_k = q_i + m$, $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, *entonces existe* $\mathbf{b} \in M^t(\mathbf{q})$ *con* $b_k > \lceil q_k \rceil$.

Demostración

Si $a_i > \lceil q_i \rceil \Rightarrow t > 0$.
Vamos a ver que

$$\frac{q_i}{\lceil q_i \rceil + t} \leq \frac{q_k}{\lceil q_k \rceil + t};$$

es decir, que:

$$\frac{q_i}{\lceil q_i \rceil + t} \leq \frac{q_i + m}{\lceil q_i \rceil + m + t},$$

o equivalentemente, que:

$$q_i\left(\lceil q_i\rceil + m + t\right) \leq \left(\lceil q_i\rceil + t\right)\left(q_i + m\right)$$

podemos construir una función f

$$f\left(m\right) = \frac{q_i + m}{\lceil q_i\rceil + m + t}$$

y estudiar su variación.

$$f'\left(m\right) = \frac{\left(\lceil q_i\rceil + m + t\right) - \left(q_i + m\right)}{\left(\lceil q_i\rceil + m + t\right)^2} = \frac{\lceil q_i\rceil - q_i + t}{\left(\lceil q_i\rceil + m + t\right)^2} = \frac{1 - r_i + t}{\left(\lceil q_i\rceil + m + t\right)^2} \geq 0$$

Luego $f'\left(m\right) \geq 0 \Rightarrow f\left(m\right) \geq f\left(0\right)$, $\forall\ m \geq 0$; $f\left(m\right)$ es una función creciente para $m \in [0, \infty)$, por tanto el teorema es cierto □.

Observaciones

El teorema sigue siendo cierto si $q_k = \lfloor q_i\rfloor + m + r_k$, con $r_k \geq r_i$.

Además, si $r_i \simeq 0$ (o, simplemente, r_i es el resto más pequeño) las hipótesis del teorema se verifican para todo partido con mayor cuota que el i. En tal caso, antes de que la asignación a un partido supere en 2 escaños a su cuota superior, todo partido con mayor cuota que él debe haber recibido, al menos, 1 escaño más del valor de su cuota superior. Por tanto, si con la asignación del método, el partido más votado verifica la cuota superior, ningún otro partido puede superar su cuota superior en más de 1 escaño.

Ejemplo 3.2.7 *Sea $h = 31$ el tamaño de una circunscripción en la que las cuotas de 7 partidos vienen dadas por el vector*

$$\mathbf{q} = (10.9, 9.8, 5.3, 2.6, 1.4, 0.6, 0.4)$$

y la solución para $t = 1$ por:

$$M^{1.0}\left((10.9, 9.8, 5.3, 2.6, 1.4, 0.6, 0.4); 31\right) = (12, 11, 5, 2, 1, 0, 0)$$

Para el segundo partido se tiene que $a_2 = 11 > \lceil q_2\rceil = 10$, luego a_1 tiene que valer más de 11 ya que el primer partido tiene más votos y mayor resto que el segundo, es decir,

$$a_2 = 11 > \lceil q_2\rceil = 10 \Rightarrow a_1 > 11 = \lceil q_1\rceil.$$

Como vemos, $a_1 = 12$.

Teorema 3.2.8 *Si, para un i, se tiene que $r_i \geq t$ y $\exists\, \mathbf{a} \in M^t(\mathbf{q})$, con $a_i > \lfloor q_i \rfloor$ y para algún $k > i$, $q_k = q_i - m$, $m \in \{0, 1, 2, \ldots, \lfloor q_i \rfloor\}$, entonces existe una solución $\mathbf{b} \in M^t(\mathbf{q})$ con $b_k > \lfloor q_k \rfloor$.*

Demostración

Para $t = 0$ y $m = \lfloor q_i \rfloor$ el resultado es cierto, puesto que con el método de Adams antes de que ningún partido reciba 2, o más, escaños todos los demás partidos deben haber recibido 1 escaño.

Cuando $t = 1$ tenemos el método d'Hondt. Este valor de t queda descartado ya que $r_i > t$.

Si $a_i > q_i \Rightarrow a_i \geq \lfloor q_i \rfloor + 1$. Vamos a ver que:

$$\frac{q_i}{\lfloor q_i \rfloor + t} \leq \frac{q_k}{\lfloor q_k \rfloor + t},$$

es decir,

$$\frac{q_i}{\lfloor q_i \rfloor + t} \leq \frac{q_i - m}{\lfloor q_i \rfloor - m + t}.$$

de donde, realizando operaciones y simplificando, se llega a que la desigualdad anterior es equivalente a la siguiente:

$$q_i \geq \lfloor q_i \rfloor + t$$

la cual es cierta siempre.

Por tanto

$$\frac{q_i}{\lfloor q_i \rfloor + t} \leq \frac{q_k}{\lfloor q_k \rfloor + t}$$

y antes de que el partido i reciba el escaño$\lfloor\, q_i \rfloor + 1$, el partido k recibe el escaño $\lfloor q_k \rfloor + 1$.

Para ver la demostración, también podemos construir una función g

$$g(m) = \frac{q_i - m}{\lfloor q_i \rfloor - m + t}, \text{ con } \lfloor q_i \rfloor - m + t \neq 0,$$

$g(m)$ es continua y derivable para todo $m \in (-\infty, \lfloor q_i \rfloor)$.

$$g'(m) = \frac{-(\lfloor q_i \rfloor + t - m) + (q_i - m)}{(\lfloor q_i \rfloor + t - m)^2} = \frac{r_i - t}{(\lfloor q_i \rfloor + t - m)^2} \geq 0$$

Por tanto, g es una función creciente en: $\begin{cases} [0, \lfloor q_i \rfloor] \text{ cuando } t > 0 \text{ y en} \\ [0, \lfloor q_i \rfloor - 1] \text{ cuando } t = 0 \end{cases}$

Luego, para estos casos, se tiene que:

$$g'(m) \geq 0 \Rightarrow g(m) \geq g(0)$$

y, por tanto, $\exists \mathbf{b} \in M^t(\mathbf{q})$ con $b_k > \lfloor q_k \rfloor$.

Es decir, si existe unicidad de solución y un partido i con resto mayor que t, $r_i \geq t$, resulta primado en la asignación (recibe más escaños de su cuota) todo partido j con menos votos que el i y con resto menor, $r_j \geq r_i$, también resulta primado en la asignación con M^t. A igualdad de restos, si son mayores que t, el método M^t prima antes a los partidos menos votados y, si los restos son menores que t, prima antes a los partidos más votados. □

Ejemplo 3.2.8 *Sea $h = 28$ el tamaño de una circunscripción en la que las cuotas de 6 partidos vienen dadas por el vector*

$$\mathbf{q} = (10.8, 7.8, 5.25, 2.6, 1.35, 0.2)$$

y la solución para $t = \dfrac{1}{2}$ es:

$$M^{\frac{1}{2}}((10.8, 7.8, 5.25, 2.6, 1.35, 0.2); 28) = (11, 8, 5, 3, 1, 0).$$

Los partidos primero y segundo tienen igual resto que, además, es mayor que t. La asignación del primero supera su cuota inferior, puesto que $a_1 = 11 > \lfloor q_1 \rfloor = 10$, luego la asignación del segundo también tiene que superar su cuota inferior, como efectivamenete ocurre $a_2 = 8 > \lfloor q_2 \rfloor = 7$.

Corolario 3.2.9 *De los teoremas 3.2.6, 3.2.7 y 3.2.8, para cualquier método de asignación M^t perteneciente a la familia paramétrica, se verifica que si*

$$\lfloor q_k \rfloor \leq a_k \leq \lceil q_k \rceil \Longrightarrow \lfloor q_i \rfloor - 1 \leq a_i \leq \lceil q_i \rceil + 1, i = k+1, \ldots, n.$$

Es decir, si la asignación correspondiente a un partido k verifica la cuota, la asignación correspondiente a cualquier otro partido i, que tenga menos votos que el partido k, no puede variar más de un escaño con respecto a sus cuotas inferior y superior. A igualdad de restos el partido que tiene más posibilidades de no verificar cualquiera de las cuotas (inferior o superior) es el más votado.

Nota 3.2.1 *En los teoremas 3.2.6, 3.2.7 y 3.2.8 la solución* **b** *coincide usualmente con la solución* **a** *(pero en las situaciones de empate* **a** *y* **b** *pueden ser diferentes).*

3.3 Caracterizaciones de la familia paramétrica

Teorema 3.3.1

$$M^d \text{es cíclico} \Longleftrightarrow M^d \in \{M^t, t \in [0,1]\}$$

Es decir, un método basado en divisores es cíclico sí y sólo si corresponde a uno de los de la familia paramétrica.

Demostración

El método M^t es cíclico

$$\frac{p}{(a-1)+t} \geq \frac{q}{b+t} \Rightarrow \frac{p}{p+a-1+t} \geq \frac{q}{q+b+t}$$

$$\frac{q}{(b-1)+t} \geq \frac{p}{a+t} \Rightarrow \frac{q}{q+b-1+t} \geq \frac{p}{p+(a+t)}.$$

Es decir,

$$si\ \ (a,b) \in M^t(p,q) \Rightarrow (a+p, b+q) \in M^t(p,q)$$

Reciprocamente: Sea $d(s) = s + r(s)$, con $r(s)$ no constante. Supongamos que

$r(0) = r(1) = \ldots = r(c-1) \neq r(c)$. Distinguimos dos casos:

1) $r(c-1) > r(c)$, sea $f = \dfrac{p}{q}$, una fracción comprendida entre $r(c-1)$ y $r(c)$; es decir, $r(c-1) < f < r(c)$

Sea $h = kp$. Consideremos el problema $M^d(kq-1, 1; kp)$. Las cuotas de los dos partidos valen: $q_1 = kp - f$, $q_2 = f$. Como

$$\frac{f}{r(0)} < 1, \frac{kp-f}{(kp-1)+r(kp-1)} \to 1, \text{cuando } k \to \infty.$$

Para k grande, $k \geq k_1$, el primer cociente es menor que el segundo, luego $(kp, 0) \in M^d(kq-1, 1; kp)$.

Si el método fuera cíclico, aplicando c veces dicha propiedad $(kp + c(kq-1), c)$ debe ser una solución cuando $h = kp + ckq$. Es decir, si M^d es cíclico, $(kp + c(kq-1), c) \in M^d(kq-1, 1; kp + ckq)$. Pero las cuotas, en tal caso, valen:

$$q_1 = akq + kp - c - f, q_2 = c + f.$$

Así, pues,

$$\frac{c+f}{c+r(c)} > 1 \text{ y } \frac{akq+kp-c-f}{akq+kp-c-1+r(akq+kp-c-1)} \to 1, \text{ cuando } k \to \infty.$$

Para k grande, $k \geq k_2$, el primer cociente es mayor que el segundo. Es decir, si

$$k \geq k_2, (kp+ckq-c-1, c+1) \in M^d(kq-1, 1; kp+ckq)$$

y, por tanto,

$$(kp+ckq-c, c) \notin M^d(kq-1, 1; kp+ckq).$$

Finalmente, si $k \geq máx\{k_1, k_2\}$, se tiene que

$$(kp, 0) \in M^d(kq-1, 1; kp) \text{ y } (kp+ckq-c, c) \notin M^d(kq-1, 1; kp+ckq)$$

y en consecuencia M^d no sería cíclico.

2) $r(c-1) < r(c)$.

Se puede ver, de forma análoga, que si k es suficientemente grande

$$(kp-1, 1) \in M^d(kq-1, 1; kp) \text{ y } (kp+ckq-c-1, c+1) \notin M^d(kq-1, 1; kp+ckq)$$

y, en consecuencia, M^d tampoco sería cíclico en este caso.

Por tanto $r(c-1) = r(c)$ y $r(s)$ es constante. Entonces $M^d \in \{M^t, t \in [0, 1]\}$.

A continuación, mostramos algunos ejemplos de reparto de escaños con métodos basados en divisores que no pertenecen a la familia paramétrica y los resultados que se obtienen, que corroboran que tales métodos no son cíclicos. □

Ejemplo 3.3.1 *Si los divisores* $d(s)$ *son* $1, 1.1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

entonces

$$(1, 0) \in M^d((3, 1); 1), (3, 2) \in M^d = ((3, 1); 5)$$

y, sin embargo,

$$(4, 1) \notin M^d((3, 1); 5).$$

Comprobemos también que los métodos Dean y Hill no son cíclicos.

El método de Dean no es cíclico

Como sabemos, los divisores de Dean son $d(s) = \dfrac{s(s+1)}{s+\frac{1}{2}}$; $s \in \{0,1,2,\ldots\}$. Los siguientes ejemplos nos confirman que el método de Dean no es cíclico.

$$\boxed{(1,1) \in M^{Dean}((5,1);2),\ (6,2) \notin M^{Dean}((5,1);8)}$$

$$\boxed{(5,2) \in M^{Dean}((4,1);7),(9,3) \notin M^{Dean}((4,1);12)}$$

$$\boxed{(187,63) \in M^{Dean}((3,1);250),(190,64) \notin M^{Dean}((3,1);250)}$$

El método de Hill no es cíclico

Los divisores de Hill son $d(s) = [s(s+1)]^{\frac{1}{2}}$, $s \in \{0,1,2\ldots\}$. Los siguientes ejemplos permiten afirmar que el método de Hill no es cíclico.

$$\boxed{(1,1) \in M^{Hill}((5,1);2),(6,2) \notin M^{Hill}((5,1);8)}$$

$$\boxed{(1,1) \in M^{Hill}(4,1),(5,2) \notin M^{Hill}(4,1)}$$

Sin embargo los otros tres métodos de Huntington (Adams, Webster y Jefferson, sí son cíclicos ya que pertenecen a la familia paramétrica). Un ejemplo de asignaciones para cada uno es el siguiente:

$$\boxed{(2,1) \in M^{0}((3,1);3),\ldots,(2+3k,1+k) \in M^{0}((3,1);3+4k),\ \forall k \geq 0}$$

$$\boxed{(2,1) \in M^{\frac{1}{2}}((3,1);3),\ldots,(2+3k,1+k) \in M^{\frac{1}{2}}((3,1);3+4k),\ \forall k \geq 0}$$

$$\boxed{(3,0) \in M^{1}((3,1);3),\ldots,(3+3k,k) \in M^{1}((3,1);3+4k),\ \forall k \geq 0}$$

Teorema 3.3.2 *Fijado un valor de* $t \in [0,1]$, *si* $r_i \geq t, r_k \leq t$ *,entonces:*

1) Si $\exists\ \mathbf{a} \in M^{t}(\mathbf{q})$ tal que $a_k > q_k \Rightarrow \exists\ \mathbf{b} \in M^{t}(\mathbf{q})$, tal que $b_i > q_i$.

2) Si $\forall\, \mathbf{a} \in M^t(\mathbf{q})\,,\, a_i \leq q_i \Rightarrow \forall\, \mathbf{b} \in M^t(\mathbf{q})\,,\, b_k \leq q_k$.

Además, M^t es el único método basado en divisores que tiene esta propiedad.

Demostración

1) y 2) son equivalentes y su demostración resulta inmediata, pues basta tener en cuenta las siguientes desigualdades:

$$\frac{q_k}{\lfloor q_k \rfloor + t} \leq 1 \leq \frac{q_i}{\lfloor q_i \rfloor + t},$$

que indican que el partido i tiene, al menos, la misma prioridad para recibir el escaño $\lfloor q_i \rfloor + 1$ que el partido k para recibir el escaño $\lfloor q_k \rfloor + 1$. Para el caso $t = 0$ tiene que ser $q_k \geq 1$, porque si $q_k < 1 \Rightarrow q_k = 0$ y en tal caso el partido k estaría excluido del reparto.

Para ver el recíproco, supongamos que $d(s) = s + r(s)\,, r(s) \in [0,1]$, donde r no es constante. Fijado $t \in [0,1]$, $\exists\, c \geq 0$ tal que $r(c) \neq t$. Vamos a considerar los dos casos siguientes:

1. 1.- $r(c) < t$.

Sean $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tales que

$$r(c) < \frac{n_1}{n_3} < t \leq \frac{n_2}{n_3} \leq 1.$$

Evidentemente $n_1 < n_2 \leq n_3$. Supongamos un problema de asignación en el que existen n_3 partidos con cuota idéntica cuyo valor es

$$q_i = k + \frac{n_2}{n_3},\ i = 1, 2, \ldots, n_3$$

y otros n_3 partidos con cuota

$$q_i = c + \frac{n_1}{n_3},\ i = n_3 + 1, \ldots, 2n_3.$$

Dado que

$$\frac{c + \frac{n_1}{n_3}}{c + r(c)} > 1,\ \frac{k + \frac{n_2}{n_3}}{k + r(k)} \to 1, \textit{cuando } k \to \infty.$$

Para k suficientemente grande, el primer cociente es mayor que el segundo (incluso cuando $r(c) \backsimeq 1$). En tal caso, cualquiera de los n_3 últimos partidos, con cuota $c + \frac{n_1}{n_3}$,

consigue $c+1$ escaños antes que ninguno de los n_3 primeros consiga $k+1$ escaños. Sólo n_1+n_2 obtienen su cuota superior de escaños. Los demás partidos obtienen sólo su cuota inferior. Por tanto, existen (al menos) n_1 partidos (de los n_3 últimos) que alcanzan su cuota superior, siendo su resto $\frac{n_1}{n_3} < t$, y existe un partido (al menos) de los n_3 primeros que no recibe más escaños de su cuota inferior, siendo su resto $\frac{n_2}{n_3} > t$.

$r(c) > t$

Se consideran de nuevo tres números naturales n_1, n_2, n_3 tales que

$$0 \leq \frac{n_1}{n_3} \leq t < \frac{n_2}{n_3} < r(c)$$

y se procede de forma análoga. □

3.4 La subfamilia paramétrica de métodos $M^{\frac{p-1}{p}}$

Teorema 3.4.1 *Sea el problema* $(\mathbf{v}; h)$ *y si* $\mathbf{a} \in M^t(\mathbf{v}; h)$. *Se tiene que:*

$$a_i \geq mín\{\lfloor q_i \rfloor, máx\{\lceil q_i - (n-i)(1-t) \rceil, 1\} \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Demostración

Supongamos que la desigualdad es falsa. Esto es, $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ para el cual

$$a_i < mín\{\lfloor q_i \rfloor, máx\{\lceil q_i - (n-i)(1-t) \rceil, 1\}.$$

Por tanto,

$$a_i < \lfloor q_i \rfloor$$

y

$$a_i < máx\{\lceil q_i - (n-i)(1-t) \rceil, 1\}.$$

Si $a_i < \lfloor q_i \rfloor \Rightarrow \lfloor q_i \rfloor \geq 1$. Por el torema 3.2.6, como el partido i no alcanza su cuota inferior, ningún partido j, $j = 1, 2, \ldots, i-1$, es decir, con cuota mayor o igual que el partido i, puede obtener $\lceil q_i \rceil$ escaños, pues $q_j = \lfloor q_j \rfloor + r_j < \lfloor q_j \rfloor + 1$. El último miembro podemos considerarlo como una cuota con resto cero. Por tanto, el partido j debe recibir menos de $\lfloor q_j \rfloor + 1$ escaños; es decir, $a_j \leq q_j$. Esto significa que ningún partido con cuota mayor que el i puede beneficiarse a costa del partido i (ya que su cuota es mayor o igual que su asignación). Son los partidos j, con $j = i+1, \ldots, n$, los únicos que pueden beneficiarse

a costa del i, obteniendo una asignación $a_j = \lceil q_j \rceil$ (y no más por el Teorema 3.2.6; además, para ello, estos partidos deben tener resto mayor o igual a t, de tal forma que el beneficio o prima máxima que puede recibir cada uno es $1 - t$.

Luego el máximo de cuota que puede perder el partido i en beneficio de los menores que él es $(n - i)(1 - t)$ y, en ningún caso, quedaría con menos de 1 escaño por esta pérdida. Así pues, se tiene que

$$a_i \geq máx.\{\lceil q_i - (n - i)(1 - t) \rceil, 1\},$$

contradiciendo la hipótesis. □

Nota 3.4.1 *La desigualdad sigue siendo cierta si n se sustituye por $mín\{h, k\}$, siendo k el número de partidos con cuota mayor o igual a t, y n es el número de escaños. Por otra parte, para estudiar los casos en los que un método de la familia paramétrica no verifica la cuota inferior, también podemos considerar que el primer partido tiene cuota mayor o igual a 2.*

Según este teorema, para que el método $M^{\frac{p-1}{p}}$, de la familia paramétrica, pueda no verificar la cuota inferior es necesario que $(n - i)(1 - t) \geq 1$ para algún i; es decir, al menos, tiene que ocurrir que $(n - 1)(1 - t) \geq 1$. Por tanto,

$$n \geq 1 + \frac{1}{1 - t}.$$

Con objeto de obtener valores enteros, esta última expresión sugiere analizar los valores de t de la forma $t = \dfrac{p-1}{p}$ con p entero, para ellos, $n \geq p+1$. Para beneficiar a los pequeños partidos a costa del primer partido, el valor $n = p + 1$, obliga a que los $n - 1$ partidos menos votados tengan cuota con resto igual a t todos ellos y, por tanto, el primer partido tiene cuota con resto cero. Pero entonces se verifica la cuota inferior para él, luego se necesita que $n \geq p + 2$ para que puedan existir problemas en los que se viole la cuota inferior.

El valor $t = \dfrac{p-1}{p}$ es óptimo en el sentido de que si se toma otro ligeramente inferior, digamos $t = \dfrac{p-1}{p} - \varepsilon$, el número mínimo de partidos necesarios para que existan problemas de reparto en los que el método pueda no verificar la cuota inferior disminuye en uno, es decir, pasa a ser $n \geq p + 1$. Por otra parte recordemos que el valor $t = \dfrac{p-1}{p}$ cumple una segunda propiedad de optimalidad como se vió en el teorema 3.2.4 al caracterizar la

propiedad α. Por tanto, la subfamilia de métodos M^t con $t = \frac{p-1}{p}$ tiene un interés especial dentro de la familia paramétrica.

Es evidente que $p = 1$ corresponde al método de Adams y $p = 2$ corresponde al de St Laguë. A los métodos obtenidos para $p = 3$, $p = 4, \ldots$, *etc*, los denominamos método $\frac{2}{3}$, método $\frac{3}{4}$, ...,etc. Finalmente, $p = \infty$ corresponde al método d'Hondt. Por tanto, para poder dar un ejemplo que viole la cuota inferior, el mínimo número de partidos que tiene que intervenir es 3 con el método de Adams, 4 con el de St. Laguë, etc.; el método d'Hondt siempre verifica la cuota inferior.

Como sabemos, n representa el número de partidos con cuota mayor o igual que t (además nunca superior a h). Y n debe ser mayor o igual a $p+2$ para que el método M^t pueda violar la cuota inferior. Deseamos ahora estudiar, caso a caso, para cada valor de p, el mínimo valor de h para que pueda ser violada dicha cuota. Para ello, debemos tener en cuenta el siguiente lema:

Lema 3.4.2 *Si* $(\mathbf{v};h)$, *donde* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *es un problema para el cual el método* M^t *viola la cuota inferior, es decir, existe* k, $1 \leq k \leq n$, *tal que* $\lfloor q_k \rfloor - a_k = d \geq 1$, *entonces existe un problema* $(\mathbf{v}';h')$, *donde* $\mathbf{v}' = (v_1, v_2, \ldots, v_{n'})$, *con* $n' \leq n$, $h' \leq h$ *para el cual* $\mathbf{q}' = (q_1, r, r, \ldots, r)$, $r \geq t$, *siendo* q_1 *entero y* $q_1 - a_1 = d' \geq d$.

Demostración

Por los teoremas 3.2.6, 3.2.7 y 3.2.8 debemos buscar la no verificación de la cuota en el primer partido y debemos usar cuotas menores que 1 en los restantes partidos. De estos últimos, los que no obtengan escaño, pueden ser eliminados y el reparto, por la consistencia del método, no cambia.

Finalmente, los votos de los partidos que quedan al final, y ocupan la posición segunda a la última, pueden igualarse.

Observación
Si $d' > d$ puede disminuirse el número final de partidos para que $d' = d$.

Ejemplo 3.4.1 *Sea* p_1 *un problema de asignación* $(\mathbf{v};h)$, *donde* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. *Podemos representarlo por* $(\mathbf{q}_1;h)$ *siendo* $\mathbf{q}_1$ *el vector de cuotas*

$$\mathbf{q}_1 = (\lfloor q_1 \rfloor + r_1, \lfloor q_2 \rfloor + r_2, ..., \lfloor q_k \rfloor + r_k, ..., \lfloor q_n \rfloor + r_n).$$

Suponemos que, para este problema, al aplicar el método M^t para obtener la solución, el partido k recibe a_k escaños, con $q_k - a_k > 1$; es decir, no alcanza su cuota inferior en el reparto de los h escaños y, por tanto, $d = \lfloor q_k \rfloor - a_k \geq 1$.

En primer lugar, observemos que es inmediato que, si $r_1 \leq r_k$, el primer partido no alcanza su cuota inferior y la diferencia entre su cuota y la asignación que obtiene es menor, o igual, que d.

Si $r_1 > r_k$, sea p_2 el problema $(\mathbf{q_2}; h)$ donde $\mathbf{q_2}$

$$\mathbf{q_2} = (\lfloor q_1 \rfloor + r_k, \lfloor q_2 \rfloor + r_2, ..., \lfloor q_k \rfloor + r_1, ..., \lfloor q_n \rfloor + r_n),$$

para el cual el primer partido no alcanza la cuota inferior y de nuevo la diferencia entre su cuota y su asignación vuelve a ser mayor o igual que d.

Con objeto de no duplicar los razonamientos, en lo que sigue consideramos que en el problema de partida se verifica que $r_1 \leq r_k$.

Consideremos a continuación el problema p_3: $(\mathbf{q_3}; h_1)$ donde $\mathbf{q_3}$

$$\mathbf{q_3} = (\lfloor q_1 \rfloor + r_1, r_2, ..., r_k, ..., r_n)$$

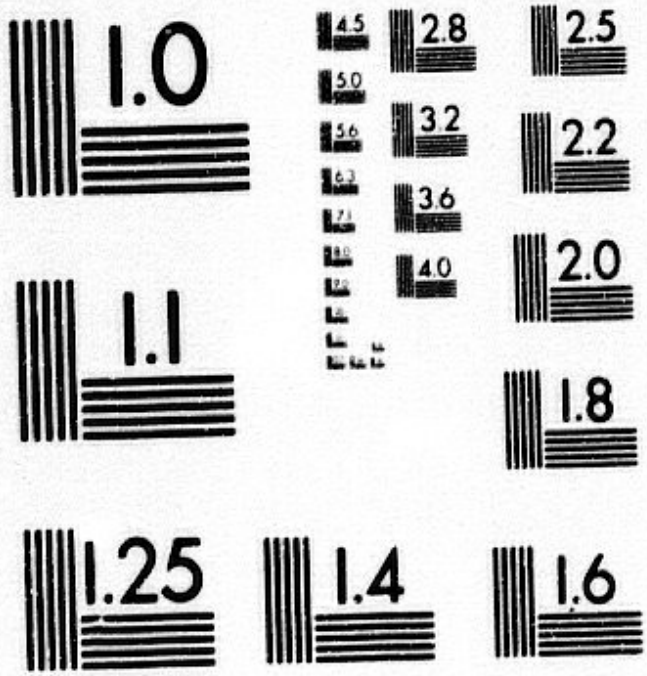
y

$$h_1 = h - \sum_{i=2}^{n} \lfloor q_i \rfloor).$$

Es inmediato que, con el mismo método de asignación de escaños, el primer partido recibe en el problema $p3$, a lo sumo, los mismos escaños que en el problema de partida, p_1. Es posible que algunos de los partidos restantes no reciban ningún escaño, por lo que podemos eliminarlos y la solución (por la consistencia) no cambia.

Supongamos que, después de eliminar tales partidos y reajustar las cuotas, fijando la del primer partido en $\lfloor q_1 \rfloor$ sólo el primer partido tiene cuota mayor o igual que 1 (en caso contrario, para aquellos partidos, a partir del segundo, con cuota mayor o igual a 1 volveríamos a quitarle la parte entera y disminuir el número de escaños a repartir como hicimos antes); lógicamente en el problema por la asignación para el primer partido no es mayor que en p_2. Además, quedan $n' \leq n$ partidos, todos ellos, excepto el primero, tienen cuota menor que 1; a partir del segundo, todos reciben 1 escaño. Se trata, pues, de un problema de la forma $(\mathbf{q_4}; h)$ donde $\mathbf{q_4}$

$$\mathbf{q_4} = (\lfloor q_1 \rfloor, r'_2, ..., r'_{n'}),$$



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

Suponemos que, para este problema, al aplicar el método M^t para obtener la solución, el partido k recibe a_k escaños, con $q_k - a_k > 1$; es decir, no alcanza su cuota inferior en el reparto de los h escaños y, por tanto, $d = \lfloor q_k \rfloor - a_k \geq 1$.

En primer lugar, observemos que es inmediato que, si $r_1 \leq r_k$, el primer partido no alcanza su cuota inferior y la diferencia entre su cuota y la asignación que obtiene es menor, o igual, que d.

Si $r_1 > r_k$, sea p_2 el problema $(\mathbf{q}_2; h)$ donde $\mathbf{q}_2$

$$\mathbf{q}_2 = (\lfloor q_1 \rfloor + r_k, \lfloor q_2 \rfloor + r_2, ..., \lfloor q_k \rfloor + r_1, ..., \lfloor q_n \rfloor + r_n),$$

para el cual el primer partido no alcanza la cuota inferior y de nuevo la diferencia entre su cuota y su asignación vuelve a ser mayor o igual que d.

Con objeto de no duplicar los razonamientos, en lo que sigue consideramos que en el problema de partida se verifica que $r_1 \leq r_k$.

Consideremos a continuación el problema p_3: $(\mathbf{q}_3; h_1)$ donde $\mathbf{q}_3$

$$\mathbf{q}_3 = (\lfloor q_1 \rfloor + r_1, r_2, ..., r_k, ..., r_n)$$

y

$$h_1 = h - \sum_{i=2}^{n} \lfloor q_i \rfloor).$$

Es inmediato que, con el mismo método de asignación de escaños, el primer partido recibe en el problema $p3$, a lo sumo, los mismos escaños que en el problema de partida, p_1. Es posible que algunos de los partidos restantes no reciban ningún escaño, por lo que podemos eliminarlos y la solución (por la consistencia) no cambia.

Supongamos que, después de eliminar tales partidos y reajustar las cuotas, fijando la del primer partido en $\lfloor q_1 \rfloor$ sólo el primer partido tiene cuota mayor o igual que 1 (en caso contrario, para aquellos partidos, a partir del segundo, con cuota mayor o igual a 1 volveríamos a quitarle la parte entera y disminuir el número de escaños a repartir como hicimos antes); lógicamente en el problema por la asignación para el primer partido no es mayor que en p_2. Además, quedan $n' \leq n$ partidos, todos ellos, excepto el primero, tienen cuota menor que 1; a partir del segundo, todos reciben 1 escaño. Se trata, pues, de un problema de la forma $(\mathbf{q}_4; h)$ donde $\mathbf{q}_4$

$$\mathbf{q}_4 = (\lfloor q_1 \rfloor, r'_2, ..., r'_{n'}),$$

con $0 < t < r'_i$, $h' \leq h_1$ y $n' \leq n$.

Por último, consideramos el problema p_5, $(\mathbf{q_5}; h')$ donde $\mathbf{q_5}$

$$\mathbf{q_5} = (\lfloor q_1 \rfloor, r, ..., r)\,,$$

siendo

$$r = \frac{1}{n'-1} \sum_{i=2}^{n'} r'_i,$$

cuya solución es la misma que para el problema anterior. Por tanto, en el problema final, p_5, el primer partido no alcanza la cuota inferior y la diferencia entre cuota y asignación es mayor o igual que d.

Se ha conseguido, así, deducir la forma de los ejemplos más simples para violar la cuota inferior. Más simples, en el sentido de que el problema p_5 utiliza un número de escaños h' menor o igual que el número de escaños h del problema p_1, es mayor o igual que el número de partidos implicados también es menor y el valor d' es mayor o igual que d.

Ejemplo 3.4.2 *Vamos a dar un ejemplo lo suficientemente complejo como para que contenga toda la casuística posible y requieran todos los pasos citados anteriormente.*

Consideremos un problema de asgnación con el método $M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q_1}; 54)$, cuyo vector de cuotas es:

$$\mathbf{q_1} = (20.5, 19.2, 4.1, 3.6, 1.86, 0.99, 0.70, 0.65, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6)$$

El vector solución de $M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q_1}; 54)$ es:

$$\mathbf{a_1} = (20, 18, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)\,.$$

El segundo partido no alcanza la cuota inferior en el reparto de los 54 escaños con el método $M^{\frac{1}{2}}$, ya que recibe 18 escaños cuando su cuota inferior es 19, luego $d = 1$.

Como $r_1 > r_2$, intercambiamos los restos entre ambos partidos y el primer partido no alcanza la cuota inferior, con lo cual tenemos un nuevo problema de asignación p_2, $(\mathbf{q_2}; 54)$, donde el nuevo vector de cuotas es:

$$\mathbf{q_2} = (20.2, 19.5, 4.1, 3.6, 1.86, 0.99, 0.70, 0.65, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6)$$

cuya solución $\mathbf{a}_2 \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q}_2; 54)$ es:

$$\mathbf{a}_2 = (19, 19, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

para este problema se viola la cuota inferior en una unidad para el primer partido.

Pasamos a un problema, p_3 en el cual, el primer partido tiene por cuota $q_1 = 20.2$ y a la cuota de los demás partidos le restamos su parte entera, quedando el problema $(\mathbf{q}_3; 27)$ en el que h ha disminuido de 54 a 27, donde

$$\mathbf{q}_3 = (20.2, 0.5, 0.1, 0.6, 0.86, 0.99, 0.70, 0.65, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6),$$

para el cual su solución $\mathbf{a}_3 \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q}_3; 27)$ es

$$\mathbf{a}_3 = (18, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Podemos pasar a un nuevo problema p_4 en el cual eliminamos los partidos que no han obtenido escaños (el segundo y el tercero), y reajustamos las cuotas de los demás partidos dejando la del primero en 20, de forma que la nuevas cuotas son

$$\mathbf{q}_4 = (20, 0.678, 0.97, 1.12, 0.79, 0.73, 0.678, 0.678, 0.678, 0.678)$$

La solución $\mathbf{a}_4 \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q}_4; 27)$ viene dada por:

$$\mathbf{a}_4 = (18, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Para la cual el primer partido dista ya 2 unidades de su cuota inferior. En el reajuste anterior la cuota de un partido (el cuarto) ha pasado a ser mayor que 1; por tanto, repetimos el proceso mediante el cual todos los partidos los dejamos con la parte entera de la cuota igual a 0, excepto el primero,

$$\mathbf{q}_5 = (20, 0.678, 0.97, 0.12, 0.79, 0.73, 0.678, 0.678, 0.678, 0.678).$$

La solución $\mathbf{a}_5 \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q}_5; 26)$ viene dada por:

$$\mathbf{a}_5 = (18, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Podemos pasar a un nuevo problema p_6 en el cual eliminamos los partidos que no han obtenido escaños (el cuarto), y reajustamos las cuotas de los demás partidos dejando la del primero en 20, de forma que la nuevas cuotas son

$$\mathbf{q}_6 = (20, 0.69, 1., 0.81, 0.74, 0.69, 0.69, 0.69, 0.69).$$

La solución $\mathbf{a_6} \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q_6}; 26)$ viene dada por:

$$\mathbf{a_6} = (18, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

En el reajuste anterior la cuota del tercer partido, ha pasado a ser 1; por tanto, repetimos el proceso mediante el cual todos los partidos los dejamos con la parte entera de la cuota igual a 0, excepto el primero, en este caso, no tenemos que hacer un reajuste de las cuotas de los demás partidos, ya que la cuota del tercer partido es 1.0, pasamos a un problema p_7, en el cual el nuevo vector de cuotas es

$$\mathbf{q_7} = (20, 0.69, 0.81, 0.74, 0.69, 0.69, 0.69, 0.69)$$

y la solución $\mathbf{a_7} \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q_6}; 25)$ viene dada por:

$$\mathbf{a_7} = (18, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

que viola la cuota para el primer partido en 2 unidades. Si queremos sólo que $d = d' = 1$, bastaría, eliminar el último partido y reajustar las cuotas entre los restantes, excepto el primero, es decir se tendría el problema p_8 cuyas cuotas sean:

$$\mathbf{q_8} = (20, 0.82, 0.82, 0.82, 0.82, 0.82, 0.82)$$

con lo cual la solución $\mathbf{a_8} \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q_8}; 25)$ es

$$\mathbf{a_8} = (19, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

La solución del problema p_8 es la misma que la del p_9 donde las cuotas de los partidos segundo al último, son sustituidas por el mismo valor, es decir p_9 es el problema $(\mathbf{q_9}; 25)$, donde

$$\mathbf{q_9} = (20, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6})$$

Hemos partido de un problema, p_1 en el cual, intervienen 12 partidos y 54 escaños, en el cual, el segundo partido violaba la cuota inferior en un escaño, y hemos llegado al problema p_8, con 7 partidos y se asignan 25 escaños, en el que el primer partido tiene cuota entera y el resto de los partidos tiene la parte entera de la cuota 0 y el resto $r_i > t$, para el cual el primer partido viola la cuota inferior en 1 escaño. Podíamos habernos saltado el problema p8 y haber igualado cuotas desde el problema p7 con lo cual d' valdría 2 en lugar de 1, sólo el que el mínimo de partidos sería al final 8 en lugar de 7.

Por tanto, para analizar problemas en los que se viole la cuota inferior con un método M^t de la familia paramétrica, podemos limitarnos a analizar ejemplos de este tipo. En

primer lugar hemos de partir de valores de $t < 1$. Si $r > t$, es el resto común a todos los partidos, excepto al primero, para la violación de la cuota inferior, el primer partido debe recibir 1 escaño menos de su cuota inferior. Entonces se debe cumplir que:

$$(n-1) * (1-r) = 1 \Rightarrow r = \frac{n-2}{n-1}, \text{ con } n \geq 3.$$

Es decir, los valores de r son

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots,$$

de forma que el primero de ellos, $r = \frac{1}{2}$, será válido cuando $t < \frac{1}{2}$. Para todos estos valores de r, el valor mínimo de n es 3 y el h mínimo será:

$$\frac{h-1}{h-2+t} < \frac{1}{2t} \Longrightarrow h = \frac{2-3t}{1-2t},$$

de forma que $h \to \infty$ cuando $t \to \frac{1}{2}$.

Veamos para distintos valores de $t \in [0, 1)$ los correspondientes valores mínimos de n y h para conseguir que se viole la cuota inferior y los ejemplos óptimos correspondientes.

a) $p = 1$ entonces $t = 0$ (método de Adams).

En este caso, $n \geq 3$. Para $n = 3$, consideramos $\mathbf{q} = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow \mathbf{a} = (1, 1, 1)$; luego $h = 3$.

Además, se obtiene la misma solución si la cuota de los partidos 2 y 3 disminuye a valores próximos a *cero* y la cuota del primero aumenta hasta cerca del valor *3*. Por tanto, es muy fácil que el método de Adams produzca soluciones que no verifican la cuota inferior, en problemas reales, cuando el tamaño de la circunscripción es igual o superior a tres y participan en la asignación al menos 3 partidos.

b) $p = 2$ tenemos que $t = \frac{1}{2}$ (método de St Laguë).

En este caso $n \geq 4$. Para $n = 4$ consideramos las cuotas $\mathbf{q} = \left(e, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Con $e = 2$ aparecen 4 soluciones posibles (empate), de las cuales, sólo una no verifica la cuota inferior. Por tanto en la práctica difícilmente se presentará. Con $e \geq 3 \Rightarrow h \geq 5$; entonces, para la distribución de cuotas anterior la solución es única y vale $\mathbf{a} = (e-1, 1, 1)$. Además, existen muchos otros ejemplos que no verifican la cuota.

Para $n = 5$ y $h \geq 5$ se pueden encontrar más situaciones; por ejemplo, $\mathbf{q} = (2, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ implica $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1, 1)$ (solución única).

c) $p = 3 \Rightarrow t = \dfrac{2}{3}$ (método $\dfrac{2}{3}$).

En este caso, $n \geq 5$. Para $n = 5$, el ejemplo más favorable que no verifica la cuota inferior corresponde a $\mathbf{q} = \left(e, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ y debe ser $e \geq 3$. Con $e = 3$ hay 5 soluciones (empate quíntuple), de las cuáles sólo una de ellas no verifica la cuota inferior. En este caso tenemos $h = 6$ y para este valor el ejemplo anterior es el único que contiene una solución que no verifica la cuota inferior (además empatada con otras 4 soluciones que sí la verifican). Por tanto, se necesita $h \geq 7$ para encontrar problemas con solución única que viole la cuota inferior. En tal caso, para el ejemplo anterior, $e \geq 4$ y la solución es única $\mathbf{a} = (e-1, 1, 1, 1, 1)$ que no verifica la cuota.

Con 6 partidos es posible encontrar muchos más ejemplos, con $h = 6$, para los que el método $\dfrac{2}{3}$ viole la cuota inferior. Uno de ellos sería $\mathbf{q} = \left(2, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (también puede ser la cuota del primer partido algo mayor que 2 y las cuotas de los restantes algo menores que $\dfrac{4}{5}$), en cuyo caso $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ es solución única y viola la cuota inferior.

En el límite, cuando $p \to \infty$, concluímos que es necesario que n y h también tiendan a infinito para poder violar dicha cuota y como consecuencia el método d'Hondt siempre verifica la cuota inferior.

Sin embargo, en la práctica el número de partidos con opción a obtener escaños en una determinada circunscripción es muy bajo. La mayoría de las veces no es superior a 3 (salvo en circunscripciones muy grandes o donde exista una fragmentación política) y raras veces pasa de 4 a 5 el número de partidos que obtienen escaños en una misma circunscripción electoral. Ello hace que en la práctica sea muy difícil que el método $\dfrac{2}{3}$ viole la cuota inferior. Por ello no analizamos más valores de p. No obstante, en la Tabla 3.4 se recogen, además de los valores discutidos, algunos más.

3.5 La subfamilia paramétrica de métodos $M^{\frac{1}{p}}$

Teorema 3.5.1 *Sea el problema* $(\mathbf{v}; h)$ *y* $\mathbf{a} \in M^t(\mathbf{v}; h)$. *Se tiene que*

$$a_i \leq \mathit{máx}\{\lceil q_i \rceil, \mathit{mín}\{\lfloor q_i + (n-i)\, t \rfloor, h\}, \ \forall i.$$

Demostración

t	n	h	**q (cuota)**	**a (asignación)**
0	3	3	$\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(1,1,1)$
$\frac{1}{2}$	4	4	$\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^{*}$	$(1,1,1,1)^{**}$,etc.
	4	≥ 5	$\left(h-2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$(h-3,1,1,1)$
	5	≥ 5	$\left(h-3, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$(h-4,1,1,1,1)$
$\frac{2}{3}$	5	6	$\left(3, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)^{*}$	$(2,1,1,1,1)^{**}$,etc.
	5	≥ 7	$\left(h-3, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$(h-4,1,1,1,1)$
	6	6	$\left(2, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$	$(1,1,1,1,1,1)$
$\frac{3}{4}$	6	8	$\left(4, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{4}{5}\right)^{*}$	$(3,1,1,1,1,1)^{**}$,etc.
	6	≥ 9	$\left(h-4, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{4}{5}\right)$	$(h-5,1,1,1,1,1)$
	7	8	$\left(3, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{5}{6}\right)$	$(2,1,1,1,1,1,1)$
1	∞	∞	imposible	
* única posibilidad en la que existe una solución que no verifica la c.i.				
**única solución que no verifica la c.i. Existen otras que sí la verifican.				

Tabla 3.4: Valores de t, h y n para los que no se alcanza la cuota inferior.

Por reducción al absurdo. Supongamos que

$$a_i > máx\{\lceil q_i \rceil, mín\{\lfloor q_i + (n-i)\,t \rfloor, h\}\},$$

entonces

$$a_i > \lceil q_i \rceil$$

y

$$a_i > mín.\lfloor q_i + (n-i)\,t \rfloor$$

Siempre que este último valor de a_i no supere a h.
Por otra parte, si $a_i > \lceil q_i \rceil$ entonces $a_j \geq \lceil q_j \rceil$, $1 \leq j \leq i-1$, ya que

$$q_j \geq q_i,\ j = 1, \ldots, i-1$$

y

$$\frac{\lfloor q_j \rfloor + r_j}{\lfloor q_j \rfloor + t} > \frac{\lfloor q_i \rfloor + r_i}{\lfloor q_i \rfloor + 1 + t};$$

luego

$$t(\lfloor q_j \rfloor - \lfloor q_i \rfloor) + t(r_j - r_i) + (\lfloor q_j \rfloor (1 - r_i)) + r_j(\lfloor q_i \rfloor + 1) > 0$$

ya que si $r_j < r_i$, entonces $\lfloor q_j \rfloor > \lfloor q_i \rfloor$.

Así pues, antes de que el partido i consiga sobrepasar su cuota superior, todos los partidos con más votos que el i deben haber conseguido, al menos, tantos escaños como su cuota superior. Por tanto, la prima en escaños del partido i, por encima de su cuota superior, sólo puede ser a costa de los $n-i$ partidos más pequeños que él. Además, para que ello sea posible sea necesita que los citados partidos tengan cuota con resto inferior a t. Es decir, el partido i no puede obtener más de $q_i + (n-i)\,t$ escaños. Luego $a_i \leq \lfloor q_i + (n-i)\,t \rfloor$ contradiciendo la hipótesis. □

Nota 3.5.1 *Para que el partido i pueda obtener más escaños de su cuota superior es necesario que $(n-i)\,t \geq 1$, lo que implica $n \geq 1 + \frac{1}{t}$.*

Por tanto, cuando $t \to 0$, se necesita que el número de partidos tienda a infinito para que pueda existir un ejemplo en el que no se cumpla la cuota superior. Así pues, el método de Adams siempre verifica la cuota superior.

Nuevamente, la expresión obtenida para n sugiere analizar los valores de t de la forma $t = \frac{1}{p}$, con p entero, para los que se obtienen el mínimo valor de h, para el cual pueda ser violada la cuota superior. Para ello, debemos tener en cuenta el siguiente lema.

Lema 3.5.2 *Si* $(\mathbf{v};h)$, *donde* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *es un problema para el cual el método* M^t *viola la cuota superior, es decir, existe* k, $1 \leq k \leq n$, *tal que* $a_k - \lceil q_k \rceil = d \geq 1$, *entonces existe un problema* $(\mathbf{v}';h')$, *donde* $\mathbf{v}' = (v_1, v_2, \ldots, v_{n'})$, *con* $n' \leq n$, $h' \leq h$ *para el cual* $\mathbf{q}' = (q_1, r, r, \ldots, r)$, $r < t$, *siendo* q_1 *entero y tal que* $\mathbf{a} = (h', 0, ..., 0, ...0) \in M^t(\mathbf{v}';h')$, *siendo* $h' - q_1 = d' \geq d$.

Demostración

En primer lugar eliminamos los partidos excepto el primero, que obtengan una asignación superior a su cuota. Análogamente al Lema 3.4.2, por los teoremas 3.2.6, 3.2.7 y 3.2.8 debemos buscar la no verificación de la cuota en el primer partido y debemos usar cuotas q_i, $i = 2, 3, \ldots, n$ menores que t en los restantes partidos, tales que la suma de las cuotas de estos últimos $\sum_{i=2}^{n} q_i = d \geq 1$.

Ejemplo 3.5.1 *Sea el problema* p_1 *un problema de asignación* $(\mathbf{v};h)$, *donde* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. *Podemos representar las cuotas por:*

$$\mathbf{q}_1 = (\lfloor q_1 \rfloor + r_1, \lfloor q_2 \rfloor + r_2, ..., \lfloor q_k \rfloor + r_k, ..., \lfloor q_n \rfloor + r_n)$$

Suponemos que, para este problema, al aplicar el método M^t para obtener la solución, el partido k recibe a_k escaños, $a_k > \lceil q_k \rceil$, es decir, $a_k - q_k = d \geq 1$.

Así pues, si el partido k es tal que $a_k > \lceil q_k \rceil$ entonces podemos distinguir los siguientes casos:

a) cuando $r_1 \geq r_k$, en el problema p_1 el método M^t viola la cuota superior para el primer partido, y la diferencia entre la asignación que recibe y su cuota es mayor, o igual que d.

b) si $r_1 < r_k$, consideraremos el problema en el que todos los partidos tienen la misma cuota que tenían en el problema p_1, excepto los partidos 1 y k, que tienen los restos intercambiados; es decir, su vector de cuotas sería

$$(\lfloor q_1 \rfloor + r_k, \lfloor q_2 \rfloor + r_2, ..., \lfloor q_k \rfloor + r_1, ..., \lfloor q_n \rfloor + r_n)$$

para el cual el método M^t viola la cuota superior para el primer partido.

Suponemos, a partir de ahora, que en el problema p_1 de partida $r_1 \geq r_k$ y que $a_k > \lceil q_k \rceil$; por tanto $a_1 > \lceil q_1 \rceil$, es decir, $d = a_k - \lceil q_k \rceil \geq 1$, con lo cual la asignación al primer partido sobrepasa su cuota superior.

Consideremos el problema p_2, obtenido a partir de p_1, como sigue:

Se eliminan todos los partidos, excepto el primero, que han recibido más escaños que su cuota y se disminuye h en el número de escaños asignados, en p_1, a los partidos eliminados. Para los partidos que han recibido un número de escaños menor o igual que su cuota se reduce ésta a su resto y se vuelve a disminuir h en igual cantidad. Supondremos que los partidos eliminados son el $n'+1$,...al n. Tras reajustar las cuotas en este problema nos queda

$$\mathbf{q_2} = \left(q_1', r_2', ..., r_k', ..., r_n'\right).$$

donde $q_1' \leq q_1$ y $r_i' \leq r_i$, $i = 1, 2, \ldots, n'$.

Evidentemente la asignación al primer partido es mayor o igual que a_1 y la de los restantes es cero. Finalmente, si en lugar del problema p_2 consideramos p_3, donde la cuota del primer partido se aumenta hasta su cuota superior y la de los restantes se hace idéntica en todos ellos, la asignación obtenida con el método M^t es la misma.

Ejemplo 3.5.2 *Veamos un ejemplo numérico, que refleja el proceso descrito anteriormente.*

Sea $p1$ el problema de asignación $(\mathbf{q_1}; 62)$ donde $\mathbf{q_1}$ es el vector de cuotas siguiente

$$\mathbf{q_1}=(20.1, 11.8, 5.08, 4.2, 3.46, 3.2, 2.35, 2.3, 2.21, 2.2, 1.35, 1.3, 1.25, 1.2)$$

Su solución con $M^{\frac{1}{2}}$ es

$$\mathbf{a_1}= (21, 13, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1).$$

y el segundo partido viola la cuota superior, ya que con cuota 11.8 recibe 13 escaños, luego $d = 1$.

Como $r_1 < r_2$, pasamos a un problema p_2, $(\mathbf{q_2}; 62)$, donde las componentes de $\mathbf{q_2}$ son las mismas que en el problema p_1 salvo los restos del primer y segundo partido están intercambiados; es decir $\mathbf{q_2}$ sería:

$$\mathbf{q_2} = (20.8, 11.1, 5.08, 4.2, 3.46, 3.2, 2.35, 2.3, 2.21, 2.2, 1.35, 1.3, 1.25, 1.2)$$

cuya solución $\mathbf{a_2} \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q_2}; 62)$ es

$$\mathbf{a_2}= (22, 12, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1).$$

y el primer partido viola la cuota superior en una unidad.

Pasamos a un problema p_3 en el que eliminamos los partidos segundo y quinto que están beneficiados y la parte entera de los restantes excepto del primero. Con lo cual el número de escaños h disminuye, pasando de 62 a 22. El nuevo vector de cuotas, $\mathbf{q}_3$, una vez reajustadas es

$$\mathbf{q}_3 = (19.52, 0.07, 0.19, 0.19, 0.32, 0.28, 0.20, 0.19, 0.33, 0.28, 0.23, 0.19\};$$

y cuya solución, $\mathbf{a}_3 \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q}_3; 22)$, viene dada por

$$\mathbf{a}_3 = (22, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

En el reajuste anterior, ninguno de los partidos, excluido el primero, tiene cuota mayor que 1, ni está beneficado; pasamos a un problema p_4, $(\mathbf{q}_4, 22)$, en el que la cuota del primer partido la redondeamos por exceso y las cuotas de los demás se igualan, es decir,

$$\mathbf{q}_4 = (20, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11})$$

y cuya solución, $\mathbf{a}_4 \in M^{\frac{1}{2}}(\mathbf{q}_4; 22)$, viene dada por

$$\mathbf{a}_4 = (22, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

En definitiva, hemos partido del problema p_1 en el que intervienen 14 partidos en la asignación de 64 escaños, y el segundo partido viola la cuota superior en 1 escaño, $d = 1$, y hemos llegado al problema p_4 en el que el intervienen 12 partidos, se asignan 22 escaños, el primer partido tiene cuota entera $q_1 = 20$ y el resto de los partidos cuota $q_i = \frac{2}{11} < t = \frac{1}{2}$ y $d' = 2$. Si queremos llegar a un problema en el cual $d = d'$, basta eliminar partidos con cuota menor que t y reajustar entre ellos (como se hizo con la cuota inferior).

En resumen, podemos hacer el análisis de la violación de la cuota superior con un método de la familia paramétrica M^t estudiando ejemplos de este tipo. Así mismo, como se recogen en la Tabla 3.5, hemos deducido la forma de ejemplos óptimos para que se pueda violar la cuota superior en el sentido de utilizar un menor número de escaños y un menor número de partidos.

Partimos de valores de $t \in [0, 1]$.

Cuando $t = 0$, tenemos el método de Adams. En este caso, no es posible encontrar problemas en los que se viole la cuota superior, ya que r debe ser mayor que t.

Para valores de t, $0 < t \leq 1$ y si $r < t$, es el resto común de todos los partidos a partir del segundo hasta el último para que el primer partido reciba un escaño más de su cuota

superior se debe cumplir que $(n-1)\,r = 1$; es decir, $r = \dfrac{1}{n-1}$, además de $r < t$, lo que implica que $n > 1 + \dfrac{1}{t}$, que se escribe como $n \geq p+2$.

El caso $r = t$ permitiría $n = p+1$ pero corresponde a una situación en la que los partidos i, $i = 2, 3, \ldots, n$, tienen cuota igual a t y, como la suma de sus restos es entera, el partido 1 tiene cuota entera; en tal caso es imposible que este partido reciba más escaños de su cuota a costa de los partidos con cuota igual a t. Luego para que con el método M^t se pueda violar la cuota superior se necesita que $n \geq p+2$. El n mínimo para $p = 1, 2, 3, \ldots$ será $3, 4, 5, \ldots$; y, por tanto, los valores de r para los distintos valores de n son $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$

Para $p = 1$ se tiene $t = 1$, $n = 3$, $r = \dfrac{1}{2}$. Podemos obtener h a partir de $\dfrac{h-1}{(h-1)+1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1}$. Por tanto, $h - 1 \geq \dfrac{h}{2}$, lo que implica que $h \geq 2$.

Para $h = 2$ las soluciones son $\{\{2,0,0\},\{1,1,0\},\{1,0,1\}\} \in M^1((1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); 2)$. La primera de ellas viola la cuota superior. Si $h > 2$, $(h,0,0) = M^1((h-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}); h)$.

El siguiente valor de p es 2 y corresponde a $t = \dfrac{1}{2}$. Los métodos M^t con $t = \dfrac{1}{2}$ necesitan que intervengan, al menos, tres partidos para violar la cuota superior, siendo para $n = 3$ el mínimo valor de h el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{h-1}{(h-1)+1} &\geq \frac{1}{2t};\ 2th - 2t \geq h - 1 + t \\ (2t-1)\,h &\geq 3t - 1, \text{ luego } h \geq \frac{3t-1}{2t-1} \end{aligned}$$

de forma que cuando $t$decrece hacia el valor $\frac{1}{2}$, el tamaño h necesario para que con tres partidos pueda violarse la cuota superior crece hacia infinito. Para $n = 3$ y $t = \frac{1}{2}$ el método de St. Laguë verifica la cuota superior. Para $p = 2 \Longrightarrow t = \frac{1}{2}$, $n = 4$, $r = \frac{1}{3}$. Efectuando los cálculos se obtiene, en este caso, que el h mínimo es $h = 2$; y $(2,0,0,0) = M^{\frac{1}{2}}((1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}); 2)$.

En la Tabla 3.5 se recogen los valores mínimos de n y h para que el método correspondiente a $t = \frac{1}{p}$, pueda violar la cuota superior, así como, los correspondientes valores mínimos de h en cada caso y ejemplos óptimos correspondientes a estos valores.

p	t	n	h	**q (cuota)**	**a (asignación)**
5	$\frac{1}{5}$	7	2	$\left(1, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$	$(2,0,0,0,0,0,0)$
4	$\frac{1}{4}$	6	2	$\left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$	$(2,0,0,0,0,0)$
3	$\frac{1}{3}$	5	2	$\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$(2,0,0,0,0)$
2	$\frac{1}{2}$	4	2	$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$(2,0,0,0)$
1	1	3	3	$\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$(3,0,0)$

Tabla 3.5: Valores t, n y h, para los que puede no verificarse la cuota superior.

Capítulo 4

Análisis del Sistema Electoral Español para la Cámara de Diputados.

En este capítulo se analiza el comportamiento del Sistema Electoral Español a lo largo de las 7 elecciones generales celebradas en España entre 1977 y 1996 a la Cámara de Diputados, obsevando que la desproporcionalidad que presenta se produce, fundamentalmente, porque el sistema electoral penaliza a los partidos de ámbito estatal tercero (en número de votos) y siguientes, y prima, casi por igual, a los dos primeros partidos (también de ámbito estatal). A los principales partidos de ámbito autonómico (conocidos en España como *nacionalistas*), el sistema electoral les asigna un número de escaños próximo a sus cuotas globales. La causa que origina este comportamiento es la existencia de un elevado número de circunscripciones pequeñas y el uso del método d'Hondt.

Lógicamente, ante este hecho se producen agravios muy importantes al comparar el número de escaños totales obtenido por un partido de ámbito estatal con el número de escaños obtenidos por un partido de ámbito autonómico, con un número similar de votos.

4.1 El Sistema Electoral Español

El Referéndum que aprobó la Constitución Española se celebró el 6 de Diciembre de 1978 y el texto fue publicado en el B.O.E núm. 311.1 del 29 de Diciembre de 1978. Los preceptos que regulan diversos aspectos del régimen electoral general se recogen en los artículos 1, 6, 12, 13, 23, 62, 67, 68, 69, 70, 81, 86, 92, 99, 115, 116, 140, 141, 143, 144, 149, 152, 167 y 168, así como en las disposiciones transitorias tercera, cuarta y octava.

Lógicamente, los artículos anteriores marcan las normas básicas para regular todas las elecciones posibles.

De toda esta normativa, la parte que nos interesa, se reduce únicamente al sistema electoral para la Cámara de los Diputados, que está recogida en el artículo 68.

Artículo 68.- 1. El Congreso se compone de un mínimo de 300 y un máximo de 400 Diputados, elegidos por sufragio universal, libre, igual directo y secreto, en los términos que establezca la ley.

2. La circunscripción electoral es la provincia. Las poblaciones de Ceuta y Melilla estarán representadas cada una de ellas por un Diputado. La ley distribuirá el número total de Diputados, asignando una representación mínima inicial a cada circunscripción y distribuyendo los demás en proporción a la población.

3. La elección se verificará en cada circunscripción atendiendo a criterios de representación proporcional.

El desarrollo de esta normativa constitucional se lleva a cabo, mediante la Ley Electoral 5/1985 que fué elaborada en 1985, bajo el nombre de Ley Orgánica núm. 5/1985, de 19 de Junio, del Régimen Electoral General y ha sido modificada mediante las leyes 1/1987 de 2 de abril (B.O.E. del 3), 8/1991, de 13 de marzo (B.O.E. del 14) y 6/1992, de 2 de noviembre (B.O.E. del 3), [34].

La parte que afecta al sistema electoral, corresponde a los artículos 162 y 163.

El artículo 162 fija el tamaño de la Cámara de Diputados en 350, de los cuales uno corresponde a Ceuta y otro a Melilla; a continuación asigna inicialmente 2 a cada provincia y los 248 restantes se distribuyen entre las provincias, en proporción a su población, utilizando el método de Hamilton, también conocido como de los Restos Mayores y como Niemeyer (aunque no menciona ninguno de éstos).

El artículo 163 fija el método de asignación de escaños a los partidos en cada circunscripción en proporción a los votos obtenidos. En primer lugar declara no elegible a todo partido que no obtenga, al menos, el 3% de los votos válidos emitidos en la circunscripción.

A continuación establece, como fórmula de asignación de escaños a los partidos, el método d'Hondt; es decir, un método basado en divisores, siendo éstos los números naturales 1, 2, 3, ...

En caso de empate se resuelve en favor del partido más votado y por sorteo en caso de persistir el empate.

Finalmente, indica que los escaños correspondientes a cada candidatura se adjudican a los candidatos incluidos en ella, por el orden de colocación en que aparezcan.

Con el censo utilizado en las últimas elecciones, los Diputados que correspondieron, a cada una de las circunscripciones, fueron: a Madrid, 34; a Barcelona, 31; a Valencia, 16; a Sevilla, 13; a Alicante, 11; a Málaga, 10; a Cádiz, La Coruña, Murcia, Asturias, y Vizcaya, 9; a Pontevedra, 8; a Baleares, Córdoba, Granada, Las Palmas, Tenerife y Zaragoza, 7; a Badajoz, Guipúzcoa, Jaén y Tarragona, 6; a Almería, Cáceres, Castellón, Ciudad Real, Gerona, Huelva, León, Navarra, Orense, Cantabria, Toledo y Valladolid, 5; a Álava, Albacete, Lérida, la Rioja, Lugo y Salamanca, 4; a Ávila, Burgos, Cuenca, Guadalajara, Huesca, Palencia, Segovia, Soria, Teruel y Zamora, 3; y a Ceuta y a Melilla 1 escaño a cada una.

4.2 Resultados obtenidos a la Cámara de Diputados

En esta sección recogemos, en las Tablas 4.1 a 4.7, los resultados que se han producido con los datos de las elecciones generales que ha habido en España, desde 1977 hasta 1996. En cada una de las Tablas, la primera columna de números contiene los votos recibidos por los partidos que obtuvieron algún escaño y los de aquéllos otros que no obtuvieron escaño pero sus votos totales fueron más de 100 000. Por ejemplo, en 1979 se incluyen PTE y ORT que no obtuvieron escaños pero superaron los 100 000 votos (superaron a otros partidos que sí consiguieron escaño, como ERC y EE); y en 1993 se incluyen CDS y BNG por razones similares. La segunda columna contiene el % de los votos totales obtenidos por los partidos que cumplen los criterios que hemos establecido; la tercera columna las cuotas; la cuarta el resultado de aplicar en las 52 circunscripciones el método d'Hondt y sumar los escaños de cada partido; finalmente, la última columna contiene el % de escaños que recibió cada partido.

En cada una de las Tablas se resaltan, en negrita, dos columnas: la correspondiente a las cuotas y la que corresponde a los escaños totales obtenidos por los partidos con el sistema electoral en vigor en la elección correspondiente, que practicamente ha sido el mismo en las 7 elecciones, ya que la Cámara ha sido siempre de 350 Diputados y el método electoral ha sido el método d'Hondt. Sólo se han dado pequeñas variaciones en el tamaño de las circunscripciones provinciales, por la variación de la población en las mismas.

4.2.1 Elecciones de 1977

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños totales	% escaños
UCD	6 337 288	37.99	**132.96**	**166**	47.43
PSOE	5 358 781	32.13	**112.43**	**118**	33.71
PCE	1 718 026	10.30	**36.04**	**21**	6.00
AP	1 525 028	9.14	**32.00**	**18**	5.14
PSP-US	816 510	4.89	**17.33**	**6**	1.71
PDC	514 647	3.09	**10.80**	**11**	3.14
PNV	314 409	1.88	**6.60**	**8**	2.29
EE	60 312	0.36	**1.26**	**1**	0.29
AIC	37 183	0.22	**0.78**	**1**	0.29
Totales	16 682 184	100.00	350.00	350	100.00

Tabla 4.1: Resultados globales de las Elecciones Generales de 1977.

Con el sistema electoral actual, que prácticamente ha sido el usado desde 1977, el partido ganador en cualquier convocatoria de elecciones generales obtiene un número de escaños superior a su cuota, porque hay muchas circunscripciones pequeñas y el método d'Hondt da una prima fuerte al partido más votado en cada una; en 1977 la prima a UCD fue más de 33 escaños, como observamos al comparar, en la Tabla 4.1, la columna de cuotas con la siguiente que contiene los escaños. La prima resultaría aún mayor si para el cálculo de las cuotas se hubiesen considerado todos los votos válidos, en lugar de limitarnos a los obtenidos por los partidos que aparecen en la Tabla 4.1.

La prima, en escaños, que obtiene el partido más votado no es pagada proporcionalmente por los restantes. Es más, si observamos los datos de la Tabla 4.1, el segundo partido también recibe una prima de unos 6 escaños. Cabe preguntarse, qué partidos son los que se perjudican ante esta situación; basta ver, en la Tabla 4.1, que la pérdida de escaños se concentra en tres partidos: PCE, AP y PSP-US. Esto hace que surjan agravios importantes al comparar estos partidos con otros similares en número de votos. Por ejemplo, obsérvese que PSP-US obtuvo tantos votos como PDC y PNV juntos y, sin embargo, consiguió la tercera parte de escaños que ellos. PCE y AP consiguieron algo más de la mitad de la representación que les correspondía, es decir 21 y 18 escaños y sus cuotas fueron 36.04 y 31.99 respectivamente. Luego, la prima en escaños que obtuvo el partido más votado en 1977 fué pagada por los partidos de ámbito estatal que ocuparon las posiciones tercera, cuarta y quinta, (en número de votos), todos ellos con muchos más votos que los partidos de ámbito autonómico.

Los partidos de ámbito autonómico, recibieron un número de escaños similar a su cuota; en estas elecciones, el PNV se vió algo beneficiado.

Los resultados de las elecciones de 1977, se recogen gráficamente en las Figuras 4.1 y 4.2. En la primera Figura, cada partido viene representado por dos barras; la primera barra recoge el tanto por ciento de votos obtenidos por el partido o coalición, y en la segunda se representa el tanto por ciento de escaños asignados al mismo.

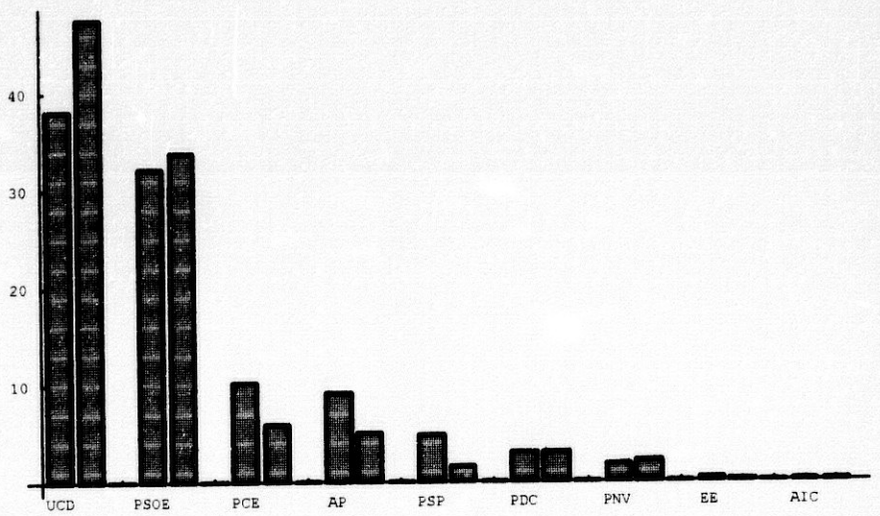


Figura 4.1: Relación entre el porcentaje de votos y el porcentaje de escaños recibidos por los partidos en 1977.

En la Figura 4.2, cada una de las barras representan la diferencia entre el porcentaje de escaños asignados a cada partido y su porcentaje de votos; las barras que están hacia arriba, indican que el partido correspondiente está sobrerrepresentado, las barras que están hacia abajo, reflejan, que el partido correspondiente está subrepresentado (los nombres de estos partidos están debajo o al lado derecho de la barra).

4.2.2 Elecciones de 1979

Al igual que en las elecciones de 1977, el partido vencedor en 1979 obtuvo una prima muy importante; el sistema electoral le concedió una prima de más de 37 escaños y el segundo partido obtuvo una prima de más de 10 escaños.

Al observar los datos que se reflejan en la Tabla 4.2, la penalización que reciben los

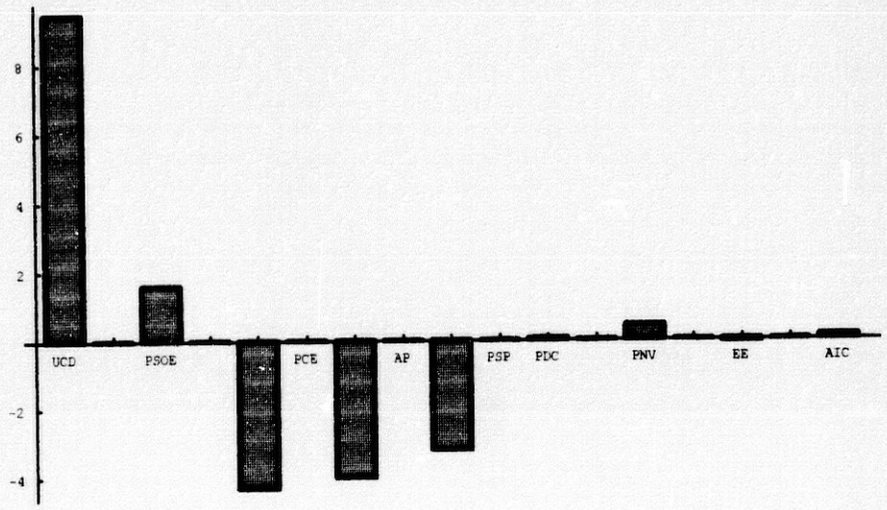


Figura 4.2: Diferencia entre el porcentaje de escaños y el porcentaje de votos de cada partido en 1977.

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños totales	% escaños
UCD	6 262 593	37.05	**129.68**	**167**	47.71
PSOE	5 469 813	32.36	**113.27**	**123**	35.14
PCE	1 938 487	11.47	**40.14**	**25**	7.14
CD	1 064 333	6.30	**22.04**	**9**	2.57
CiU	483 254	2.86	**10.01**	**9**	2.57
UN	378 955	2.24	**7.85**	**1**	0.29
PSA	325 762	1.93	**6.75**	**5**	1.43
PNV	275 292	1.63	**5.70**	**7**	2.00
PTE	192 798	1.14	**3.99**	**0**	0.00
HB	172 110	1.02	**3.56**	**2**	0.57
ORT	127 417	0.75	**2.64**	**0**	0.00
ERC	125 690	0.74	**2.60**	**1**	0.29
EE	85 677	0.51	**1.77**	**1**	0.29
Totales	16 902 181	100.00	350.00	350	100.00

Tabla 4.2: Resultados globales de las Elecciones Generales de 1979.

partidos de ámbito estatal, a partir del tercero (PCE, CD, UN, PTE y ORT) es de más del 50% de sus escaños. Exceptuando a CiU, UN obtuvo más votos que cualquier partido nacionalista, sin embargo, sólo consiguió 1 escaño. Por su parte, los partidos estatales PTE y ORT no obtuvieron representación, aunque superaron en votos a varios partidos nacionalistas que sí consiguieron escaños.

De los principales partidos de ámbito autonómico sólo está algo beneficiado el PNV, los demás reciben un número de escaños próximo a su cuota y la penalización que sufren, en cualquier caso, siempre es mucho menor que la penalización de los partidos de ámbito estatal.

Las Figuras 4.3 y 4.4 muestran gráficamente los resultados de la elección de 1979. La interpretación de las barras es la misma que se indicó en la elección de 1977 y será la que se utilice para las demás elecciones.

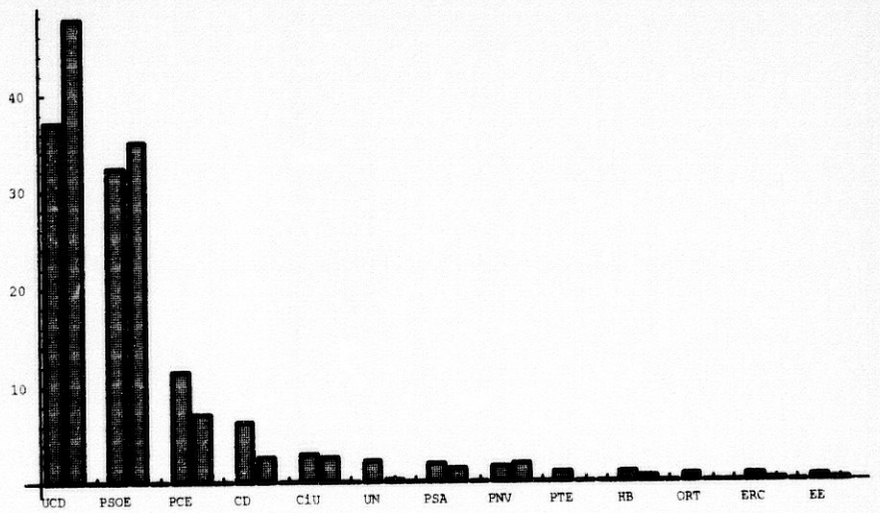


Figura 4.3: Relación entre el porcentaje de votos y el porcentaje de escaños recibidos por los partidos en 1979.

4.2.3 Elecciones de 1982

En las elecciones de 1982, el PSOE, partido vencedor, obtuvo 202 escaños con una cuota de 176.44; es decir, una prima de más de 25 escaños (la prima del vencedor fué menor que en las anteriores elecciones). En estas elecciones, se produce la primera mayoría

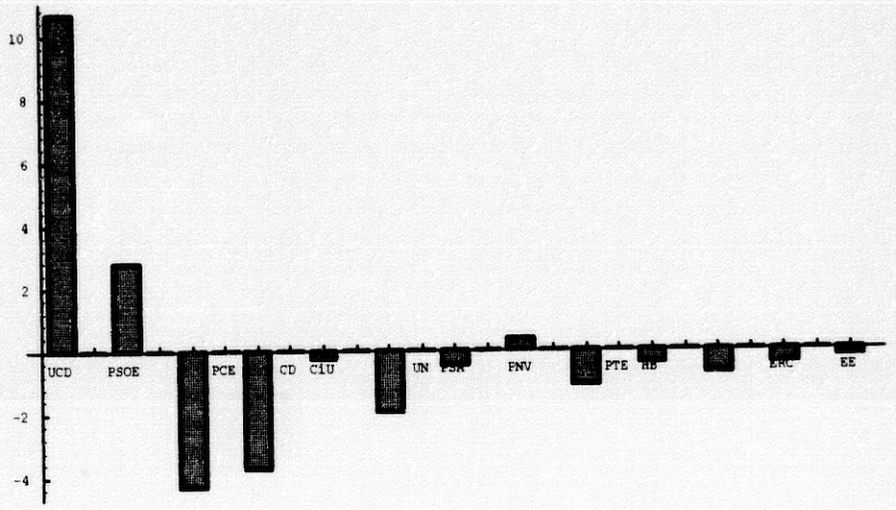


Figura 4.4: Diferencia del porcentaje de escañosos y del porcentaje de votos de cada uno de los partidos en 1979.

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños totales	% escaños
PSOE	10 127 392	50.41	**176.44**	**202**	57.71
AP	5 543 107	27.59	**96.58**	**107**	30.57
UCD	1 354 858	6.74	**23.61**	**11**	3.14
PCE	844 976	4.21	**14.72**	**4**	1.14
CiU	772 726	3.85	**13.46**	**12**	3.43
CDS	600 842	2.99	**10.47**	**2**	0.57
PNV	395 629	1.97	**6.89**	**8**	2.29
HB	210 601	1.05	**3.67**	**2**	0.57
ERC	138 116	0.69	**2.41**	**1**	0.29
EE	100 326	0.50	**1.75**	**1**	0.29
Totales	20 088 573	100.00	350.00	350	100.00

Tabla 4.3: Resultados globales de las Elecciones Generales de 1982. Aquí PSOE=PSOE+PSC; AP=AP+PDP+PAR+UPN+UV+PDL+UCD en el País Vasco; PCE=PCE+PSUC.

absoluta del PSOE, que se repetiría después en las elecciones de 1986 (y prácticamente en 1989). Análogamente a como ocurría en las elecciones de 1977 y 1979 los partidos de ámbito estatal, a partir del tercero, reciben un número de escaños muy por debajo de su cuota; la Tabla 4.3 recoge las cuotas de los partidos y la asignación en escaños totales obtenidos; podemos observar la penalización que recibieron UCD, PCE y CDS, que con cuotas 23.61, 14.72 y 10.47, recibieron 11, 4 y 2 escaños respectivamente, es decir, sólo el 46.59%, 27.17% y el 19.10% de los escaños que le correspondían. Por el contrario, para los partidos de ámbito autonómico (CiU, PNV, HB, ERC y EE), las diferencias entre cuotas y asignaciones fué insignificante.

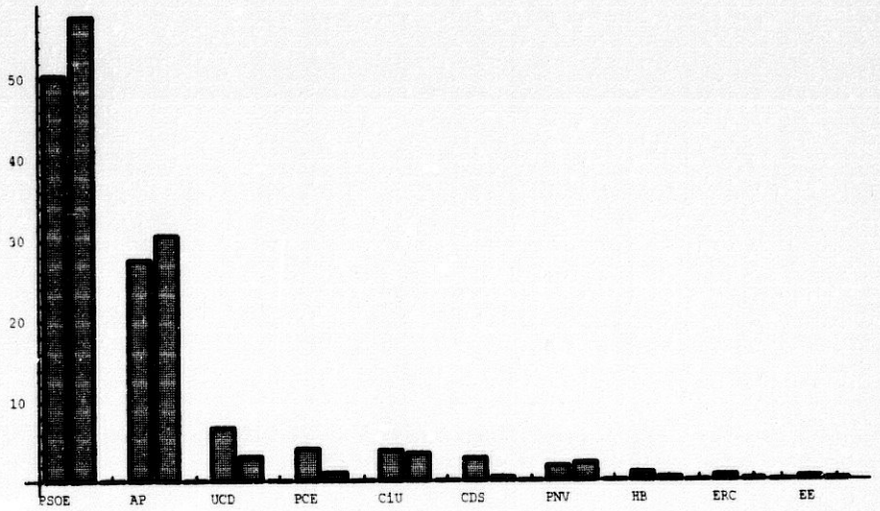


Figura 4.5: Relación entre el porcentaje de votos y el porcentaje de escaños asignados a los partidos en 1982.

4.2.4 Elecciones de 1986

En las elecciones de 1986, gracias a la prima que suele conceder el método d'Hondt al partido vencedor, en cada provincia, el PSOE consigue de nuevo mayoría absoluta al obtener una prima de 18 escaños, como refleja la Tabla 4.4; la prima que recibió el segundo partido fué de 7 escaños y, de nuevo, los partidos de ámbito estatal tercero y siguientes (CDS é IU en este caso) son los que pagan la prima que recibieron los dos más votados, ya que recibieron 19 y 6 escaños con unas cuotas de 34.22 y 14.29, respectivamente. Con respecto a los partidos de ámbito autonómico (CiU, PNV, HB, UER, EE, CG, PAR, AIC y UV), se repite la misma regla que en elecciones anteriores; obtienen un número de escaños

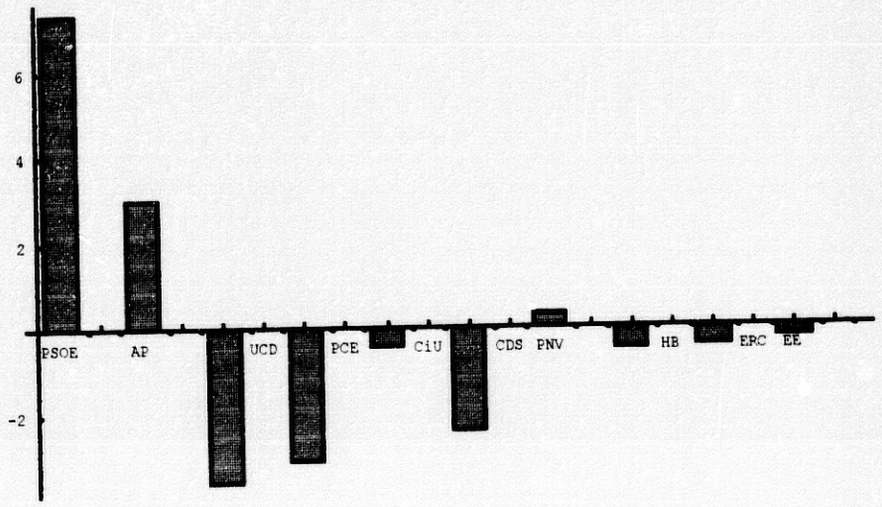


Figura 4.6: Diferencia del porcentaje de escaños y el porcentaje de votos de cada uno de los partidos en 1982.

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños totales	% escaños
PSOE	8 901 718	47.33	**165.66**	**184**	52.56
CP	5 247 677	27.90	**97.66**	**105**	30.00
CDS	1 838 799	9.78	**34.22**	**19**	5.43
CiU	1 014 258	5.39	**18.87**	**18**	5.14
IU	768 158	4.08	**14.29**	**6**	1.71
PNV	309 610	1.65	**5.76**	**6**	1.71
HB	215 282	1.14	**4.01**	**5**	1.43
UER	123 912	0.66	**2.31**	**1**	0.29
EE	107 053	0.57	**1.99**	**2**	0.57
CG	79 972	0.43	**1.49**	**1**	0.29
PAR	71 628	0.38	**1.33**	**1**	0.29
AIC	64 989	0.35	**1.21**	**1**	0.29
UV	64 403	0.34	**1.20**	**1**	0.29
Totales	18 807 459	100.00	350.00	350	100.00

Tabla 4.4: Resultados globales de las Elecciones Generales de 1986. Aquí PSOE corresponde a PSOE +PSC

muy similar a su cuota de votos.

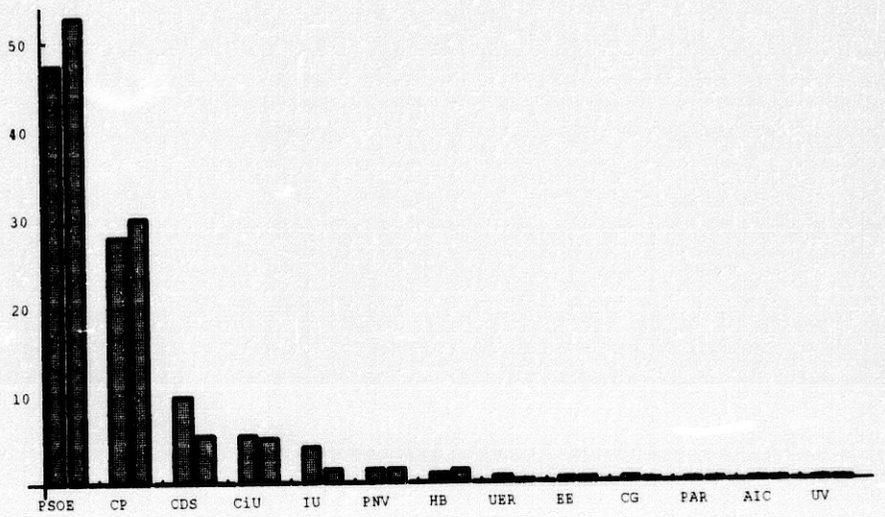


Figura 4.7: Relación entre el porcentaje de votos y el porcentaje de escaños obtenidos por los partidos en 1986.

4.2.5 Elecciones de 1989

La Tabla 4.5 recoge los resultados de las elecciones de 1989; podemos observar que la prima que recibe el partido vencedor es de 26 escaños, PSOE, con una cuota 148.40, se queda a un escaño de conseguir la mayoría absoluta. El segundo partido obtiene una prima de 10 escaños; y a los partidos IU y CDS el sistema actual les penaliza, ya que IU recibe sólo el 50% de los escaños y el CDS el 47% de los escaños que les corresponden según su cuota. Todos los partidos de ámbito autonómico (CiU, PNV, HB, PA, UV, EA, EE, PAR, y AIC) reciben un número de escaños muy similar a su cuota.

4.2.6 Elecciones de 1993

En la Tabla 4.6 se recogen los resultados de las elecciones de 1993; de nuevo, los dos partidos con mayor número de votos reciben primas importantes: 17 y 13 escaños respectivamente. Y, de nuevo, es a costa de los dos partidos siguientes de ámbito estatal: IU y CDS (hay que resaltar la penalización que sufre el CDS, que con cuota 6.47, mayor que todos los partidos de ámbito autonómico excepto CiU, el sistema electoral no le asigna ningún escaño desapareciendo poco después como fuerza política).

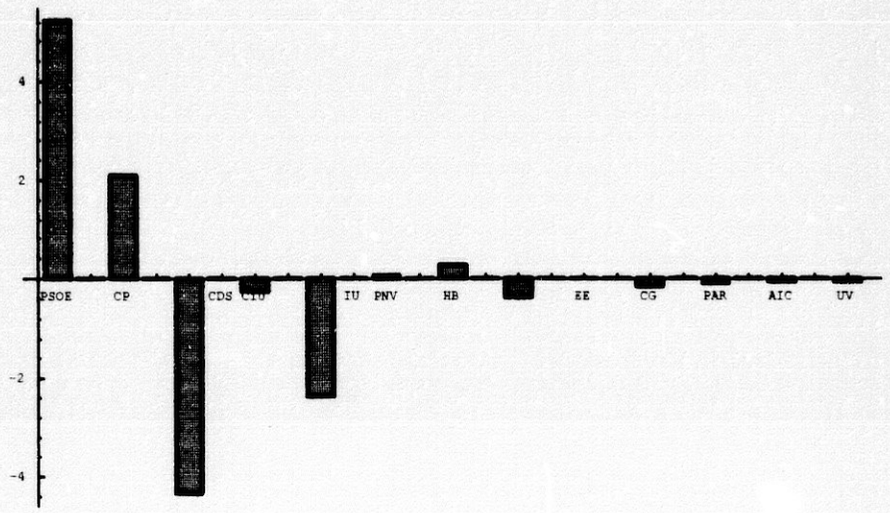
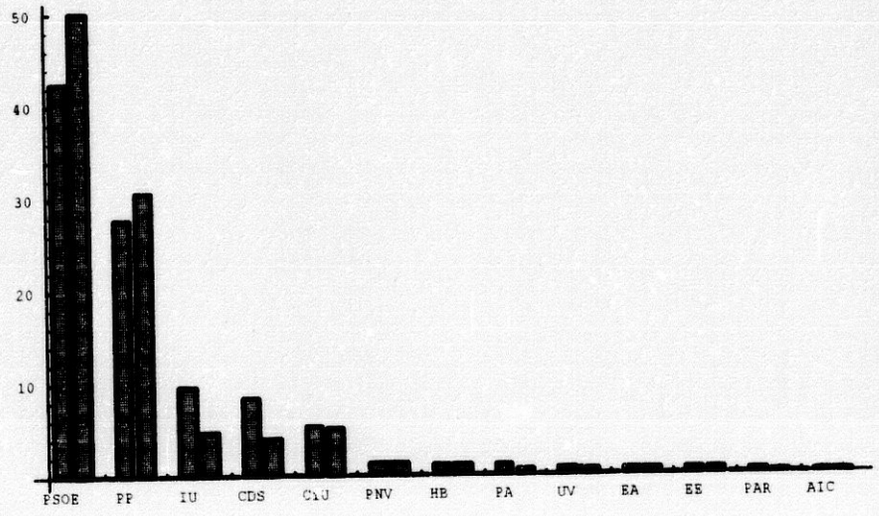


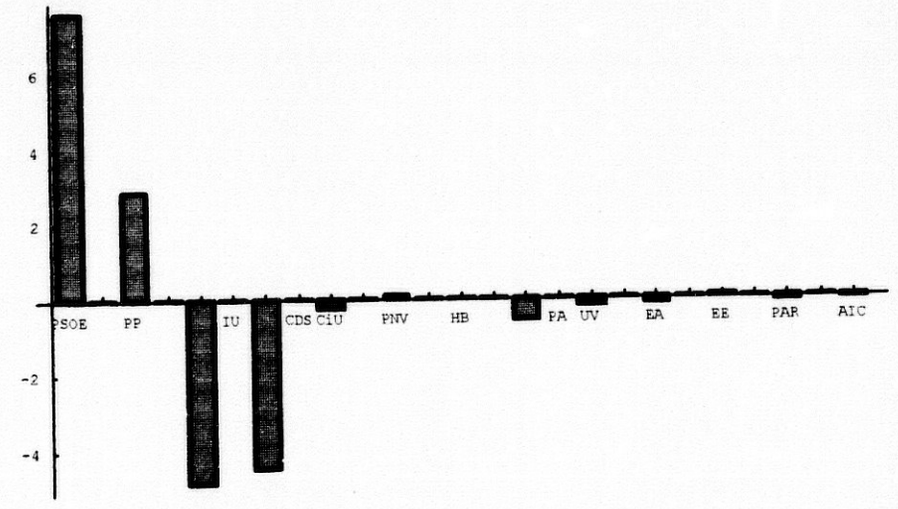
Figura 4.8: Diferencia entre el porcentaje de escaños y el porcentaje de votos de cada uno de los partidos en 1986.

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños totales	% escaños
PSOE	8 088 072	42.39	**148.40**	**175**	50.00
PP	5 282 877	27.69	**96.93**	**107**	30.57
IU	1 851 080	9.70	**33.96**	**17**	4.86
CDS	1 617 104	8.48	**29.67**	**14**	4.00
CiU	1 030 476	5.40	**18.91**	**18**	5.14
PNV	253 769	1.33	**4.66**	**5**	1.43
HB	216 822	1.14	**3.98**	**4**	1.14
PA	212 807	1.12	**3.90**	**2**	0.57
UV	144 655	0.76	**2.65**	**2**	0.57
EA	136 595	0.72	**2.51**	**2**	0.57
EE	105 217	0.55	**1.93**	**2**	0.57
PAR	71 628	0.38	**1.31**	**1**	0.29
AIC	64 989	0.34	**1.19**	**1**	0.29
Totales	19 076 091	100.00	350.00	350	100.00

Tabla 4.5: Resultados globales de las Elecciones Generales de 1989.



Figura~4.9: Relación entre el porcentaje de votos y el porcentaje de escaños obtenidos por cada uno de los partidos en 1989.



Figura~4.10: Diferencia entre el porcentaje de escaños y el porcentaje de votos de cada uno de los partidos en 1989.

Partidos	Votos totales	% votos	Cuota.	Escaños totales	% escaños
PSOE	9 071 760	40.52	**141.81**	**159**	45.42
PP	8 170 201	36.49	**127.71**	**141**	40.28
IU	2 245 444	10.03	**35.10**	**18**	5.14
CiU	1 162 534	5.19	**18.17**	**17**	4.86
CDS	414 000	1.85	**6.47**	**0**	0.00
PNV	300 308	1.34	**4.69**	**5**	1.43
CC	206 953	0.92	**3.24**	**4**	1.14
HB	206 296	0.92	**3.22**	**2**	0.57
PAR	144 241	0.64	**2.25**	**1**	0.29
BNG	126 965	0.57	**1.98**	**0**	0.00
ERC	121 972	0.54	**1.91**	**1**	0.29
EA	117 859	0.53	**1.84**	**1**	0.29
UV	102 714	0.46	**1.61**	**1**	0.29
Totales	22 391 247	100.00	350.00	350	100.00

Tabla 4.6: Resultados globales de las Elecciones Generales de 1993.

Una vez más, no existen diferencias significativas entre las cuotas de los partidos de ámbito autonómico (CiU, PNV, CC, HB, PAR, BNG, ERC y UV) y el total de escaños recibidos. El más perjudicado de ellos fue BNG que no consiguió representación al tener sus votos muy repartidos en las 4 provincias gallegas (aunque en 2 de ellas estuvo a punto de conseguir 1 escaño).

4.2.7 Elecciones de 1996

En las elecciones generales de 1996, últimas celebradas en España hasta ahora, cuyos resultados recoge la Tabla 4.7, obtuvieron representación 11 partidos de los cuáles sólo 3 son de ámbito estatal. La prima obtenida por los dos partidos más votados fué a costa de IU que no recibió el 45% de los escaños que correspondían a su cuota.

De los resultados que se recogen en las Tablas 4.1 a 4.7 y en las gráficas que muestran las Figuras 4.1 a ?? correspondientes a las 7 elecciones generales celebradas desde 1977 a 1996, se han obtenido unas conclusiones acerca del comportamiento del Sistema Electoral Español que vamos a resaltar a continuación.

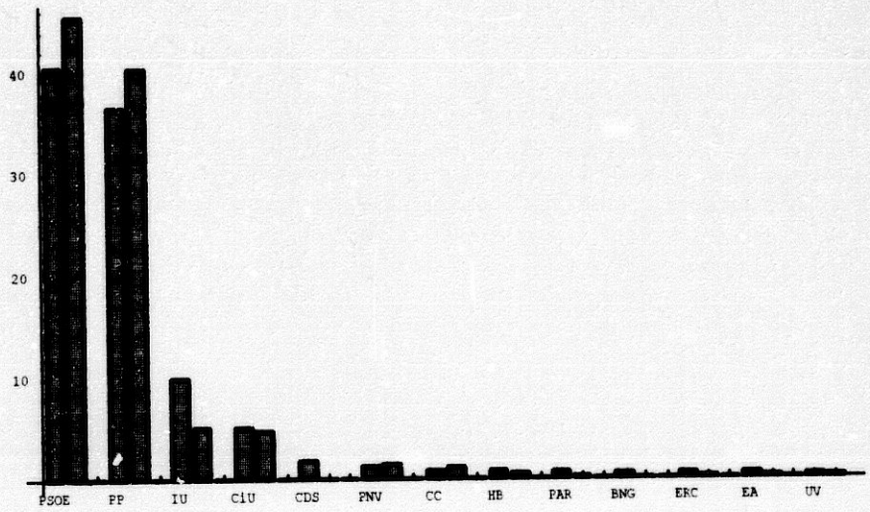


Figura 4.11: Relación entre el porcentaje de votos y el porcentaje de escaños obtenidos por los partidos en 1993.

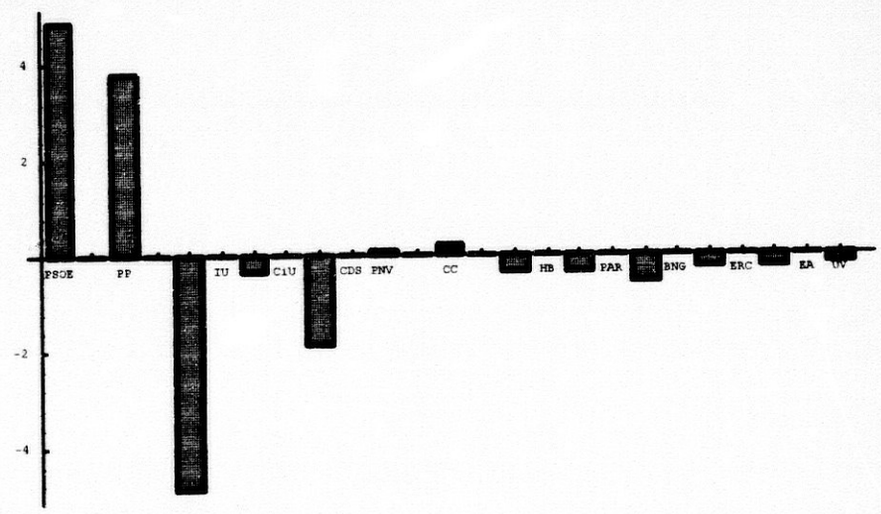


Figura 4.12: Diferencia entre el porcentaje de escaños y el porcentaje de votos de cada uno de los partidos en 1993.

Partidos	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños totales	% escaños
PP	9 716 006	40.09	**140.33**	**156**	44.57
PSOE	9 425 678	38.89	**136.13**	**141**	40.28
IU	2 639 774	10.89	**38.13**	**21**	6.00
CiU	1 151 633	4.75	**16.63**	**16**	4.57
PNV	318 951	1.32	**4.61**	**5**	1.43
CC	220 418	0.91	**3.18**	**4**	1.14
BNG	220 147	0.91	**3.18**	**2**	0.57
HB	181 304	0.75	**2.62**	**2**	0.57
ER	162 545	0.67	**2.35**	**1**	0.29
EA	115 861	0.48	**1.67**	**1**	0.29
UV	81 350	0.34	**1.17**	**1**	0.29
Totales	24 233 667	100.00	350.00	350	100.00

Tabla 4.7: Resultados globales de las Elecciones Generales de 1996.

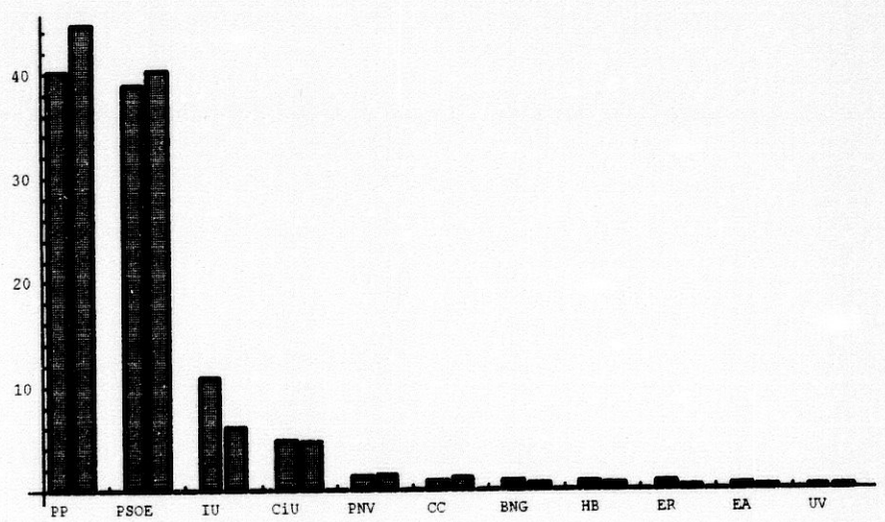


Figura 4.13: Relación entre el porcentaje de votos y el porcentaje de escaños de los partidos en 1996.

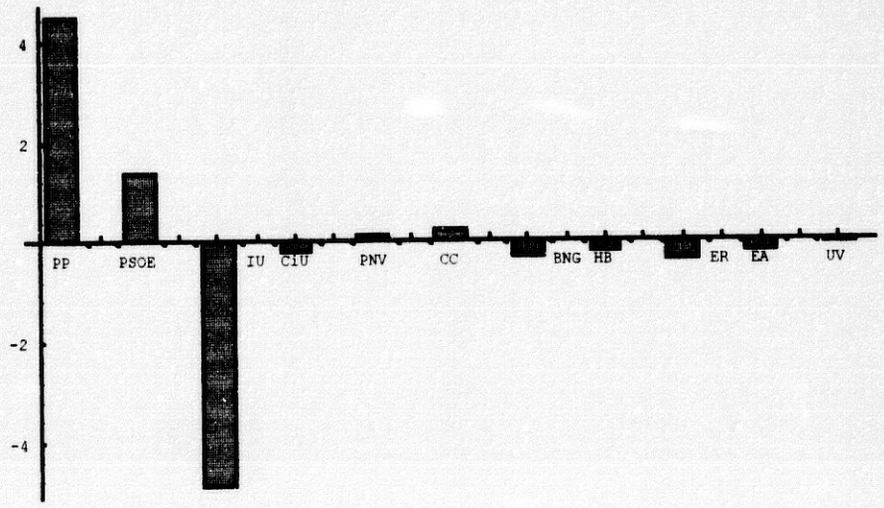


Figura 4.14: Diferencia entre el porcentaje de escaños y el porcentaje de votos de cada uno de los partidos en 1996.

4.3 Observaciones al comportamiento del Sistema Electoral Español para la Cámara de Diputados

1. El partido más votado en cada elección obtiene un número de escaños muy superior a su cuota global. La cuantía de la prima no es similar en unas elecciones y otras, ya que ha oscilado entre los más de 37 escaños en 1979 y poco más de 15 escaños en 1993 y 1996.

2. El segundo partido en votos también ha resultado primado en las 7 elecciones aunque en menor cuantía: entre 5 y 13 escaños. Con respecto a los dos partidos más votados hay que señalar que en las últimas elecciones hubo menos de 300 000 votos de diferencia y fue perfectamente posible que el PSOE las hubiera ganado en votos y el PP en escaños.

3. La prima en escaños que obtienen los partidos más votados es pagada, casi exclusivamente, por los partidos que concurren a nivel estatal y ocupan las posiciones tercera, cuarta y siguientes, en número de votos. De hecho, desde 1993, como ya hemos dicho, toda fuerza de ámbito estatal, posterior a la tercera, ha quedado sin representación.

4. Podría pensarse que el método d'Hondt fuerza la existencia de sólo dos partidos

(bipartidismo) pues la fuerte penalización que recibe el tercer partido de ámbito nacional y siguientes les forzaría a desaparecer. Sin embargo, los resultados en España niegan tal generalización. Es cierto que cuando los dos partidos más votados son los mismos en todas las circunscripciones, y el tamaño de éstas es pequeño, el método d'Hondt tiende a representar sólo a los dos partidos más votados y, por tanto, a potenciar el bipartidismo. Pero, si los dos partidos más votados son diferentes de unas provincias a otras (porque en algunas de ellas correspondan a partidos de ámbito autonómico) la situación es mucho más compleja, como ocurre en España. Incluso podría llegar el momento en el que alguno de los dos grandes partidos de ámbito estatal sea perjudicado (por ejemplo, si existieran partidos de ámbito autonómico fuertes en casi todas las Comunidades Autónomas). El método d'Hondt tampoco potencia el bipartidismo cuando las circunscripciones son de gran tamaño.

5. La desproporcionalidad del sistema electoral español se produce por la distribución de los escaños entre los partidos de ámbito estatal. Los de ámbito autonómico reciben unas cantidades de escaños muy similares a sus cuotas. Las Tablas 4.8, a 4.14 muestran de forma resumida los resultados para las 7 elecciones en las que se refleja dicho comportamiento del Sistema Electoral Español para los partidos de ámbito estatal más votados y para los partidos de ámbito autonómico, en cada una de ellas.

Partidos estatales	Cuotas	Escaños	Diferencia
UCD	132.96	166	33.04
PSOE	112.43	118	5.57
PCE+AP+PSP	85.36	45	-40.36
Partidos autonómicos			
PDC+PNV+EE+AIC	19.45	21	1,55

Tabla 4.8: Elecciones generales de 1977.

En 1977, el partido vencedor de las elecciones recibió una prima de más de 33 escaños, mientras que los partidos de ámbito estatal a partir del tercero, recibieron 40 escaños menos de los que le correspondían. Los partidos de ámbito autonómico obtuvieron un número de escaños similar a su cuota; ya que, si observamos la Tabla 4.8, estos partidos reciben en conjunto una prima de 1.55 escaños, que repartida entre los 4 de ámbito autonómico es insignificante.

En las elecciones de 1979 vamos a resaltar que, de nuevo, el primer y segundo partido se

Partidos estatales	Cuotas	Escaños	Diferencia
UCD	129.68	167	37.32
PSOE	113.27	123	9.73
PCE+CD+UN+PTE+ORT	76.66	35	-41.66
Partidos autonómicos			
CiU+PSA+PNV+HB+ERC+EE	30.39	25	-5.39

Tabla 4.9: Elecciones generales de 1979.

ven muy beneficiados; el resto de los partidos de ámbito estatal se ven penalizados con una pérdida de más de 41 escaños; los partidos de ámbito autonómico obtienen una la pérdida de más de 5 escaños, que repartidos entre los seis partidos vuelve a ser insignificante.

Partidos estatales	Cuotas	Escaños	Diferencia
PSOE	176.44	202	25.56
AP	96.58	107	10.42
UCD+PCE+CDS	48.80	17	-31.80
Partidos autonómicos			
CiU+PNV+HB+ERC+EE	28.18	24	-4.18

Tabla 4.10: Elecciones generales de 1982.

En 1982 se da una situción similar a las de las elecciones anteriores aunque el partido vencedor no es el mismo. En estas elecciones, los partidos de ámbito estatal tercero y siguientes tienen una pérdida de cerca de 32 escaños; los de ámbito autonómico pierden, entre los 5 partidos que intervienen en la asignación, unos 4 escaños.

En 1986, según se recoge en la Tabla 4.11, son CDS e IU los que aportan la prima que reciben los dos partidos más votados; CDS e IU dejaron de recibir más de 23 de los escaños que le correspondían; en cambio, los partidos de ámbito autonómico sufren una pérdida de un poco más de 2 escaños, prácticamente todos ellos reciben los escaños que les corresponden.

La situación en 1989 fué muy similar a la 1986. Con la aplicación del método electoral en vigor, IU y CDS pierden más de 32 escaños de los que les correspondían; la pérdida fué

Partidos estatales	Cuotas	Escaños	Diferencia
PSOE	165.66	184	18.34
CP	97.66	105	7.34
CDS+IU	48.51	25	-23.51
Partidos autonómicos			
CiU+PNV+HB+UER+ EE+CG+PAR+AIC+UV	38.17	36	-2.17

Tabla 4.11: Elecciones generales de 1986.

Partidos estatales	Cuotas	Escaños	Diferencia
PSOE	148.40	175	26.60
PP	96.93	107	10.07
IU+CDS	63.63	31	-32.63
Partidos autonómicos			
CiU+PNV+HB+PA+UV+ EA+EE+PAR+AIC	41.04	37	-4.04

Tabla 4.12: Elecciones generales de 1989.

mayor que la que sufrieron en 1986.

Partidos estatales	Cuotas	Escaños	Diferencia
PSOE	141.81	159	26.60
PP	127.71	141	10.07
IU+CDS	41.57	18	-23.57
Partidos autonómicos			
CiU+PNV+CC+HB+PAR+ BNG+ERC+EA+UV	38.91	32	-6.91

Tabla 4.13: Elecciones generales de 1993.

En 1993 la aplicación del sistema electoral penaliza de nuevo a IU y al CDS, asignando una prima a cada uno de los dos primeros partidos muy similar, 17 y 13 escaños, respectivamente. En cuanto a los partidos de ámbito autonómico, sufren una pérdida de unos 7 escaños. Esta pérdida es insignificante, salvo para el BNG que no recibe 2 de esos 7 escaños.

Partidos estatales	Cuotas	Escaños	Diferencia
PP	140.33	156	15.67
PSOE	136.13	141	4.87
IU	38.13	21	-17.13
Partidos autonómicos			
CiU+PNV+CC+BNG+ HB+ER+EA+UV	35.41	32	-3.41

Tabla 4.14: Elecciones generales de 1996.

En 1996, el CDS no participó en las elecciones y la penalización que sufren los partidos de ámbito estatal, a partir del tercero, sólo la sufrió IU al no recibir unos 17 escaños que le correspondían; en cuanto a los de ámbito autonómico, vuelven a recibir un número de escaños similar a su cuota.

4.4 Agravios más significativos

La penalización que sufren los partidos, tercero y siguientes de ámbito estatal como consecuencia de la prima que reciben los más votados hace que surjan cantidad de **agravios** al comparar votos y escaños de los partidos perjudicados de ámbito estatal con los de ámbito autonómico similares e inferior en número de votos. Resaltemos los más importantes:

- En 1977, a los 816 000 votos del PSP correspondieron 6 escaños y a los 514 000 de PDC correspondieron 11 escaños. Gráficamente, en la Figura 4.15 se recoge este resultado y algunos más, cuya primera barra representa la cuota y la segunda el número de escaños para cada partido de ámbito estatal y de ámbito autonómico que se incluyen.

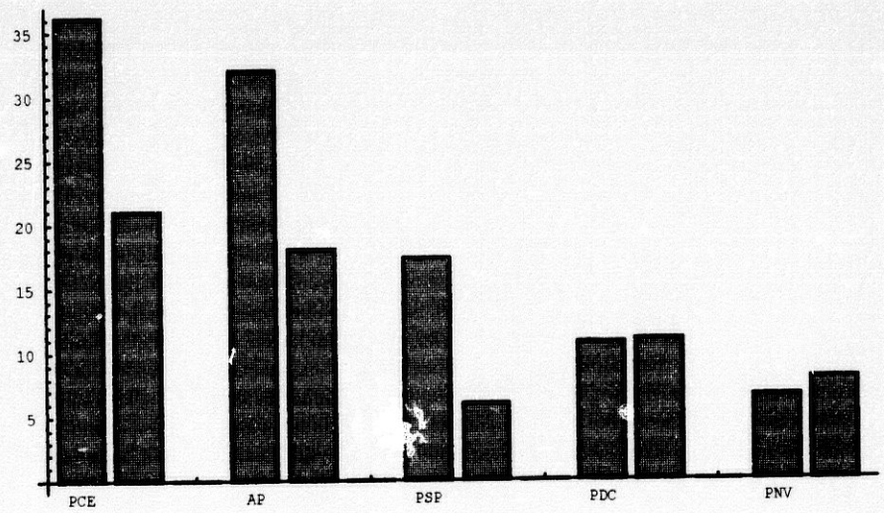


Figura 4.15: Cuota y número de escaños de: PCE, AP y PCP (ámbito estatal); PDC y PNV (ámbito autonómico) en 1977.

- En 1979, el CD obtuvo 1 064 000 votos y 9 escaños, mientras que CiU obtuvo otros 9 escaños con sólo 483 000 votos. La gráfica de la Figura 4.16 recoge la comparación de la cuota y del número de escaños recibidos por algunos partidos de ámbito estatal y de ámbito autonómico en la elección de 1979.

- En 1982, el PCE obtuvo 845 000 votos y 4 escaños, CDS obtuvo 600 000 votos y 2 escaños, mientras que CiU, con 773 000 votos, consiguió 12 escaños. En la gráfica de la Figura 4.17 se representan los principales agravios de estas elecciones.

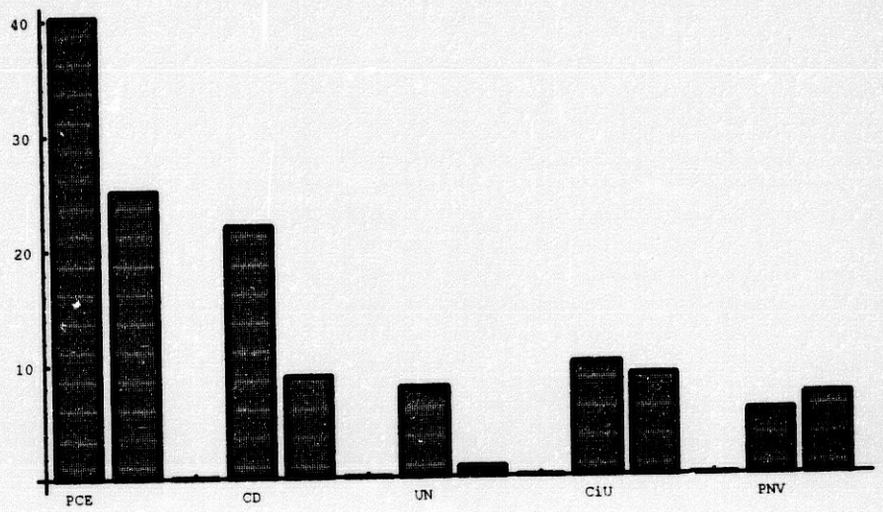
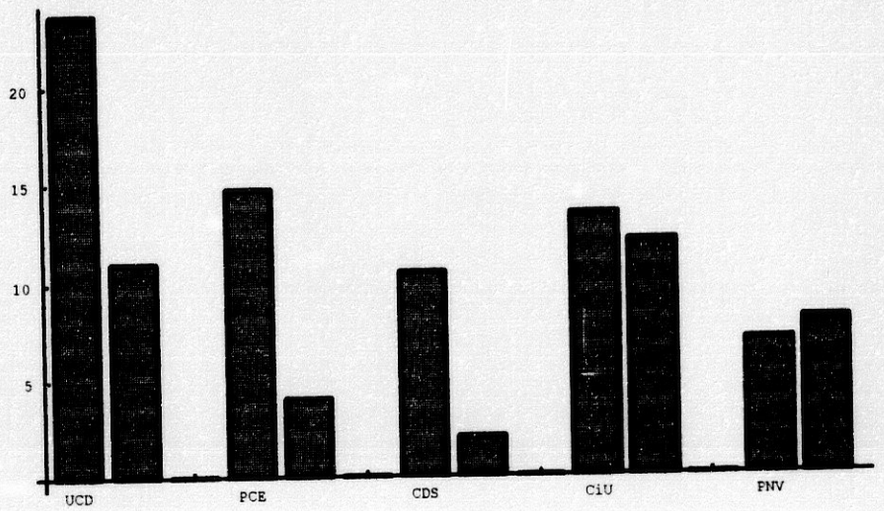


Figura 4.16: Cuota y número de escaños recibidos por los partidos: PCE, CD y UN (ámbito estatal), CiU y PNV (ámbito autonómico) en 1979

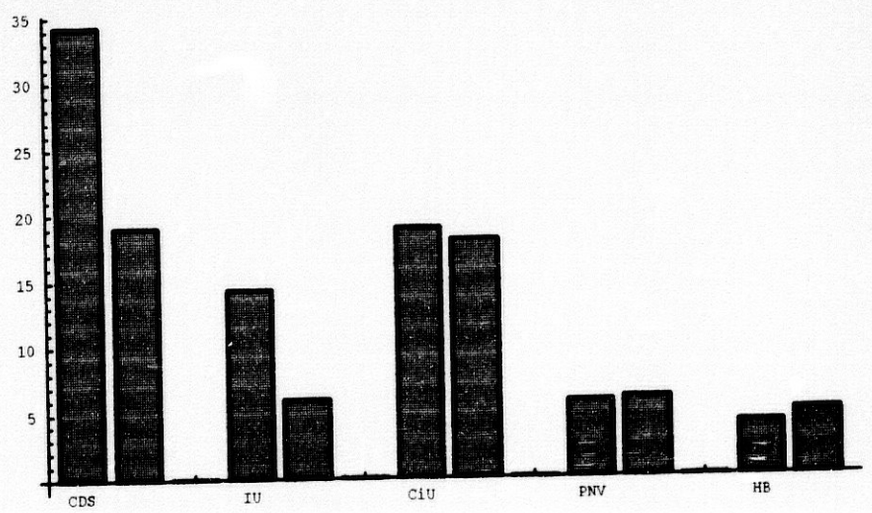
- En 1986, el CDS con 1 839 000 votos, casi duplica los 1 014 000 de CiU y sólo recibió un escaño más que CiU; así mismo, IU, con 768 000 votos, duplica ámpliamente los 310 000 votos del PNV, pero ambos obtuvieron los mismos escaños. La gráfica de la Figura 4.18, recoge este agravio y algunos más.

- En 1989, IU obtuvo 1 851 000 votos, CDS obtuvo 1 617 000 y ambos recibieron menos escaños que CiU con 1 030 000 votos. Tanto en las elecciones de 1986 como en las de 1989, CDS e IU alternaban como tercer partido, en las distintas circunscripciones, de ahí que tengan ambos una pérdida similar de escaños. La gráfica de la Figura 4.19 muestra los votos y escaños recibidos por los partidos IU, CDS, CiU, PNV y HB; de nuevo los partidos de ámbito estatal están subrepresentados en relación con el número de escaños que reciben los partidos de ámbito autonómico, con un número de votos similar.

- En 1993, IU recibe más de 2 millones de votos y el sistema le asignó 18 escaños, la mitad de los que corresponden a su cuota, mientras que CC, con sólo 200 000 votos, recibió 4 escaños (1 escaño más que el correspondiente a su cuota). En esa misma elección, CDS con 414 000 votos superó a todos los partidos de ámbito autonómico, excepto a CiU, y, sin embargo, no obtuvo ningún escaño, mientras que UPN, con



Figura~4.17: Cuota y número de escaños recibidos por los partidos: UCD, PCE y CDS (ámbito estatal), CiU y PNV (ámbito autonómico) en 1982.



Figura~4.18: Cuota y número de escaños recibidos por los partidos: CDS e IU (ámbito estatal), CiU, PNV y HB (ámbito autonómico) en 1986.

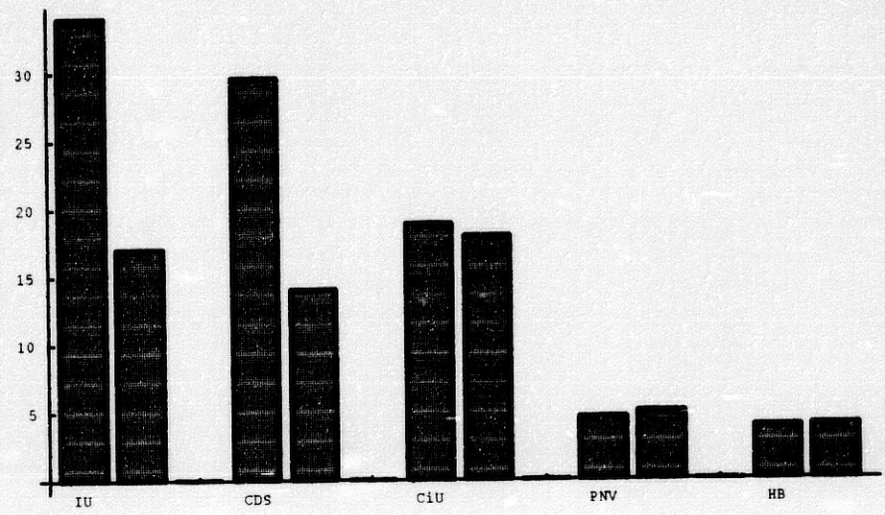


Figura 4.19: Relación entre la cuota y el número de escaños recibidos por los partidos: IU y CDS (ámbito estatal), CiU, PNV y HB (ámbito autonómico) en 1989.

112 000 votos, recibió 3 escaños en Navarra (en las Tablas estos 3 escaños aparecen incluidos con los del PP). En la gráfica de la Figura 4.20, se recogen estos agravios y algunos más.

- En 1996, IU con más del doble de votos que CiU, obtiene 21 escaños y CiU obtuvo 16. Gráficamente en la Figura 4.21, podemos observar con claridad este agravio y alguno más que se produjeron en esta elección.

4.5 Desproporcionalidad del S. E. E. a lo largo de las 7 elecciones a la Cámara de Diputados

Según hemos visto en la sección 4.1, la asignación de escaños a partidos en cada provincia debe hacerse atendiendo a criterios de representación proporcional y el método d'Hondt es el que se utilizará para la asignación de los escaños a los partidos.

La elección del método d'Hondt, junto con la existencia de muchas circunscripciones de tamaño pequeño, hace que, en cuanto a la asignación de escaños a partidos se refiere, se produzca una desproporcionalidad importante entre votos y escaños totales recibidos

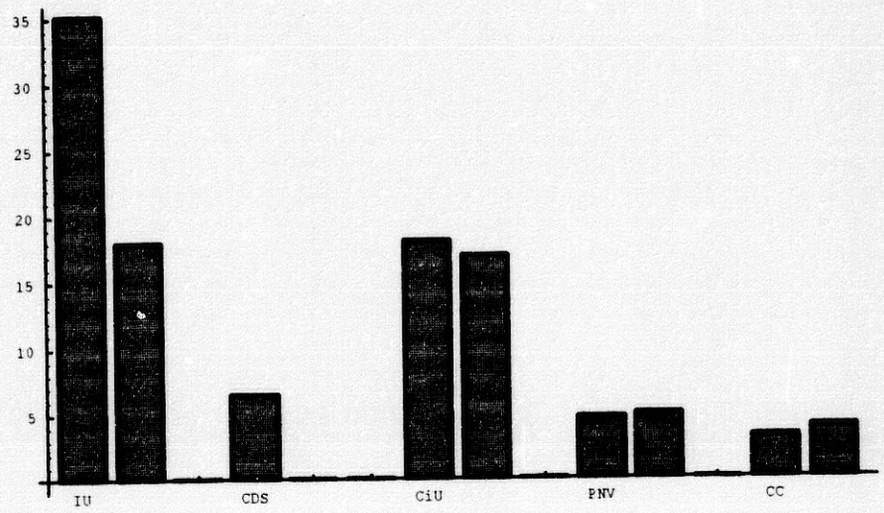


Figura 4.20: Cuota y número de escaños recibidos por los partidos: IU y CDS (ámbito estatal), CiU, PNV y CC (ámbito autonómico) en 1993.

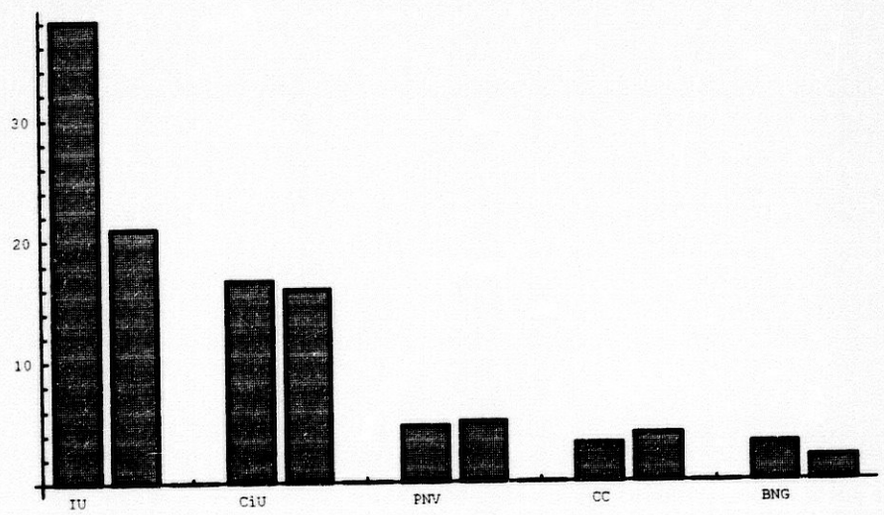


Figura 4.21: Cuota y número de escaños de los partidos: IU (ámbito estatal), CiU, PNV, CC y BNG (ámbito autonómico) en 1996.

por los partidos, como hemos visto anteriormente. Tratamos de medir dicha desproporcionalidad. Para ello vamos a utilizar los índices *MC* y *DA*, introducidos en el capítulo 1.

Si se calcula el valor de los índices *MC* y *DA* para cada una de las 7 elecciones generales celebradas, en España entre 1977 y 1996, se obtienen los resultados que aparecen en la Tabla 4.15.

Elección	1977	1979	1982	1986	1989	1993	1996	Media
MC	8.26	8.96	6.75	5.33	7.42	5.78	4.82	6.76
DA	11.55	13.82	10.60	7.69	10.60	9.02	6.22	9.93

Tabla 4.15: Desproporcionalidad en las elecciones a la Cámara de Diputados. En la última columna se da la media aritmética de los 7 valores de cada índice.

Así, si nos fijamos en la media del índice *DA*, observamos que, en media, aproximadamente un 10% de los escaños de la Cámara se asignan a partidos que no le corresponden (en proporción a sus votos). Los valores anteriores se han calculado a partir de los porcentajes de votos y escaños que aparecen en las Tablas 4.1 a 4.7. Si en su lugar se hubiesen considerado los porcentajes de votos que se obtienen al considerar todos los partidos que compiten en cada elección la desproporcionalidad aumenta considerablemente, llegando a superar el valor 15 con el índice *DA* para varias elecciones *[69]*.

La Figura 4.22 nos muestra la gráfica obtenida al representar los valores de los índices *MC* y *DA* obtenidos para las 7 elecciones generales.

4.5.1 Análisis comparado de la desproporcionalidad

El *Sistema Electoral Español, tiene una proporcionalidad muy baja.* Para corroborar esta afirmación, vamos a comparar la desproporcionalidad media del Sistema Electoral Español con la desproporcionalidad de los sistemas electorales de otros países, para ello se van a utilizar los datos obtenidos por Arend Lijphart [53], (pág. 227-231), para el índice *MC* de los sistemas electorales de 26 países gobernados con regímenes democráticos.

Con objeto de simplificar los datos, se calcula la desproporcionalidad media de los sistemas electorales de cada país (media aritmética) medida con el índice de los mínimos cuadrados, *MC*, para las elecciones celebradas en el período entre 1945 y 1990.

Normalmente, cada uno de ellos ha tenido más de un sistema electoral en el período considerado; incluso algunos países han tenido sistemas electorales proporcionales para unas elecciones y mayoritarios para otras; es el caso de Francia, que las elecciones de

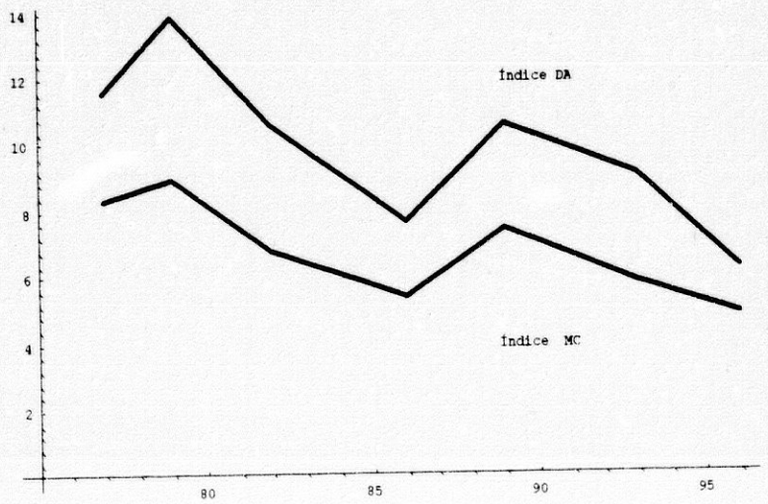


Figura 4.22: Representación gráfica de los valores de los índices MC y DA de todas las elecciones generales habidas desde 1977 a 1996.

1986 las celebró con un sistema proporcional mientras que las demás fueron con sistemas mayoritarios. Otros países han utilizado sistemas electorales sólo mayoritarios (principalmente los de influencia inglesa). En la Tabla 4.16 se recogen los resultados que hemos obtenido.

País	India	Canadá	N-Zel.	R-Unid.	Grecia	Austral.	Francia
MC	18.77	11.33	10.66	10.55	9.48	9.47	8.47
País	España	Noruega	Japón	EEUU	Island.	Portugal	C. Rica
MC	8.10	5.52	5.43	5.41	5.18	4.25	3.99
País	Irlanda	Bélgica	Luxem.	Finland.	Italia	Malta	Aleman.
MC	3.49	3.23	3.11	2.86	2.64	2.61	2.58
País	Austria	Suecia	Suiza	Israel	Dinam.	Holanda	
MC	2.52	2.51	2.36	1.98	1.87	1.31	

Tabla 4.16: Desproporcionalidad media de los sistemas electorales usados para las elecciones celebradas en cada país entre 1945 y 1990. España 1977-1996

Los países que presentan una desproporcionalidad media superior a la de España corresponden a sistemas mayoritarios, excepto Grecia y Francia en 1986. Grecia ha tenido 4 sistemas electorales diferentes con desproporcionalidad 15.79, 10.99, 7.08 y 4.06, respecti-

vamente; es decir, aunque los sistemas electorales de Grecia tienen una desproporcionalidad media peor que España, los dos últimos sistemas electorales que ha usado presentan una proporcionalidad mayor que la de España.

Por tanto, con el índice de los mínimos cuadrados, España es uno de los países que presenta mayor desproporcionalidad entre los que usan sistemas proporcionales, siendo incluso superior a la de varios países con sistema mayoritario. A las mismas conclusiones se llega cuando se mide la desproporcionalidad con otros índices.

Así, concluimos que España se encuentra entre los países con mayor desproporcionalidad en la asignación de escaños a la Cámara de Diputados (incluidos los que usan un sistema mayoritario).

Otro dato a tener en cuenta es la evolución de la desproporcionalidad en los países que han realizado cambios de sistema electoral. Casi todos los países con sistema electoral proporcional han realizado cambios de sistema. Si bien no existe unanimidad en la evolución de la desproporcionalidad, en tales cambios, hay que indicar que la mayoría de los cambios realizados han tendido hacia una mayor proporcionalidad. Un ejemplo es Alemania, cuyos sistemas electorales han tenido una desproporcionalidad de 3.80, 3.67, 2.18 y 0.67 (según el índice MC); otro ejemplo puede ser Noruega, cuyos sistemas electorales han tenido unos índices de desproporcionalidad de 8.53, 4.38 y 3.65 respectivamente; Grecia, visto antes, es otro ejemplo en la misma dirección. El único país que ha tenido cambios en los que la desproporcionalidad ha aumentado considerablemente en alguna ocasión ha sido Francia (de hecho ha cambiado de sistemas mayoritarios a proporcional, y viceversa). Los sucesivos valores del índice MC para Francia han sido 3.65, 5.48, 14.15, 7.23 y 11.84, respectivamente.

La mayoría de las democracias, basadas en representación proporcional, tienen, sistemas electorales cuya proporcionalidad, con el índice DA, es menor que 5, incluso en algunas, como por ejemplo en Alemania, suele descender hasta el valor 1. Para la democracia en España podemos hacer la siguiente **observación.**

El sistema electoral español tiene un índice de proporcionalidad muy bajo que no sólo es menor que el de la mayoría de las democracias con representación proporcional, sino que, además, la diferencia (DA) con el valor ideal, 0, ha sido de cerca de 14 puntos en 1979 y, en las demás elecciones, se acercó a 10 (incluso lo sobrepasó), salvo en la de 1996 que bajó a 6.22 siendo éste el valor más bajo en las 7 elecciones.

Pero peor aún que el valor en sí de la desproporcionalidad del sistema electoral español,

es, que ésta se origina por la penalización de un reducido número de partidos de ámbito estatal.

4.5.2 Causas de la desproporcionalidad en España

De los cuatro parámetros esenciales que intervienen en la definición de un sistema electoral, tamaño de las circunscripciones, fórmula electoral, tamaño de la Cámara y barrera electoral, sólo los dos primeros son los que inciden de forma más directa sobre la desproporcionalidad.

El cambio de tamaño de circunscripción repercute en la proporcionalidad del sistema. Al aumentar el tamaño de las circunscripciones aumenta la proporcionalidad. Así, si todo el país se convierte en una sola circunscripción electoral (como en las elecciones al Parlamento Europeo) el sistema pasa a tener una de las proporcionalidades más altas aunque se utilice el método d'Hondt como fórmula de asignación de escaños. Pero si las circunscripciones son grandes, la barrera juega un papel crucial. Por ejemplo, el 3% en una circunscripción nacional dejaría fuera del Parlamento a todos los partidos de ámbito autonómico excepto a CiU, mientras que, en la misma situación, una barrera mucho más baja llenaría el Congreso de pequeños partidos; además, muchos otros factores cambiarían de signo. Es decir, el cambio a circunscripciones más grandes (ámbito estatal, ámbito autonómico u otras), mejoraría la proporcionalidad pero dicho cambio conlleva otras consecuencias que es necesario predecir.

El cambio de la fórmula d'Hondt por otra más imparcial aumentaría la proporcionalidad, lo veremos en el capítulo 5. No obstante, siempre hay que tener en cuenta que los cambios en un sistema electoral pensados para modificar un determinado aspecto del mismo (por ejemplo, aumentar la proporcionalidad) pueden modificar otros aspectos en una dirección no deseada.

Por tanto, el diseño de un sistema electoral para cumplir unos fines no es un problema cuya solución sea inmediata.

En España, la barrera fijada por la Ley Electoral para el Congreso es de un 3% de los votos de la circunscripción correspondiente; es decir, un partido intervendrá en el reparto de escaños para obtener representación en el Parlamento si alcanza, al menos, el 3% de los votos totales válidos escrutados en la misma. En los resultados de las elecciones generales celebradas en España durante el actual período democrático no ha sido de gran influencia, ya que sólo puede tener algún efecto sobre las circunscripciones de Madrid y Barcelona, y, en éstas, salvo en 1993 en Madrid, en ninguna otra elección la barrera ha evitado que participe en el reparto un partido con posibilidades de obtener escaños. En 1993 el CDS

obtuvo 93 347 votos, que representaba el 2,99% del total de votos válidos, por lo que quedó excluido de participar en la asignación en Madrid. Traducidos los votos del CDS a escaños equivalen a 1.01, por lo que si hubiese participado en el reparto se le habría asignado 1 escaño con el método electoral vigente.

Por tanto, de lo anteriormente expuesto, podemos afirmar que la causa de la desproporcionalidad en España es el efecto combinado de muchas circunscripciones muy pequeñas (30 no pasan de 5 escaños) y fórmula electoral que prima a los grandes partidos.

Modificar la proporcionalidad del sistema electoral actual, sin tener en cuenta ningún otro aspecto, es sencillo y existen varias soluciones (además de las indicadas anteriormente). Sin embargo, si al mejorar la proporcionalidad tratamos de que: los partidos de ámbito autonómico sigan teniendo una representación en el Congreso similar a la actual, los partidos de ámbito estatal no estén discriminados en comparación con los de ámbito autonómico con un número de votos similar (incluso mucho inferior) al de aquellos, y que el partido más votado siga primado como en la actualidad (o más), de forma que sus posibilidades de gobernar no disminuyan (e incluso aumenten), el problema es mucho más difícil pero, como veremos en los capítulos que siguen, existen soluciones.

4.5.3 Consecuencias

La desproporcionalidad del Sistema Electoral Español actual se consigue a costa de un debilitamiento de los partidos intermedios de ámbito estatal y provoca, fundamentalmente, una prima a los dos primeros partidos de ámbito estatal. Después de las dos últimas elecciones, sólo continúan con representación tres partidos de ámbito estatal.

Por el contrario, la desproporcionalidad no afecta a los partidos de ámbito autonómico, ya que el sistema electoral suele asignarles un número de escaños equivalente a sus cuotas; por tanto, el Sistema Electoral Español facilita su consolidación.

Cada elección en la que ninguno de los grandes partidos obtenga mayoría absoluta de escaños, la acción de gobierno dependerá, normalmente, de los partidos de ámbito autonómico, puesto que la coalición del vencedor con el otro gran partido de ámbito estatal no suele ser factible y, en tal caso, sólo queda como posible la coalición con el tercer partido de ámbito estatal, o bien coaliciones con partidos de ámbito autonómico. Así pues, con frecuencia, el partido vencedor de las elecciones dependerá de los partidos de ámbito autonómico para gobernar, hecho que fortalecerá a éstos, y las ventajas obtenidas por las autonomías con partidos que influyen decisivamente en el gobierno pueden inducir, paulatinamente, la aparición de partidos de ámbito autonómico fuertes en otras autonomías.

Salvo que se produzca un cambio radical en el comportamiento del electorado, o se dé un cambio importante en uno de los dos grandes partidos (por fragmentación, por coalición con otro, etc.), de forma que se produzca un gran distanciamiento en votos entre los dos primeros partidos (o, al menos, el más votado sea el vencedor en casi todas las cicunscripciones), o bien salvo que se reforme el sistema electoral actual, la dependencia de los partidos de ámbito autonómico para conseguir la mayoría absoluta continuará, incluso, puede aumentar.

Capítulo 5

Alternativas al Sistema Electoral Español (dentro del marco constitucional)

5.1 Introducción

Como hemos indicado en el estudio hecho en la sección 4.3.2, entre las causas de la desproporcionalidad que presenta el sistema electoral español está la utilización del método d'Hondt para la asignación de escaños a partidos, además de que gran parte de las circunscripciones son pequeñas. Para corroborar esta afirmación analizamos en la sección 5.2 de este capítulo el comportamiento de varios métodos de representación proporcional aplicados a la asignación de escaños a los partidos, apoyándose en los datos de todas las elecciones generales, manteniendo las circunscripciones actuales y su tamaño. Y en la sección 5.3 el cambio a una Cámara de tamaño 400 escaños combinado con el cambio del método d'Hondt por otro más proporcional.

En la asignación proporcional de escaños a los partidos, muchas veces, se admiten métodos que primen a los más votados, para facilitar que se produzcan mayorías y posibilitar gobiernos estables. Por el contrario, la prima a partidos minoritarios no suele argumentarse nunca. Como sabemos, el método de St. Laguë es imparcial, en el sentido de no primar ni a los partidos más votados ni a los menos votados, mientras que el método d'Hondt es el menos proporcional al favorecer a los partidos más votados. Ambos, corresponden a casos particulares de la familia paramétrica de métodos basados en divisores, $d(s) = s + t$, para $t = 1$ se obtienen los divisores de d'Hondt, y para $t = 0.5$ se obtienen los divisores de St. Laguë.

En la sección 5.2 obtenemos los resultados correspondientes a cinco métodos basados en divisores de la familia paramétrica $d(s) = s + t$, correspondientes a valores de t: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ y 1, que notaremos por $M^{\frac{1}{2}}$, $M^{\frac{2}{3}}$, $M^{\frac{3}{4}}$, $M^{\frac{4}{5}}$ y M^1. Todos ellos, son métodos de la subfamilia $M^{\frac{p-1}{p}}$ estudiada en el capítulo 3.

Existen infinitos valores de t intermedios entre los que vamos a utilizar y, por tanto, podrían obtenerse muchas más simulaciones con métodos diferentes a los anteriores. Se prueba en el capítulo 3, y se muestra en el ejemplo 3.1.3, Tabla 3.2, que a medida que aumenta el valor de t se beneficia a los partidos más votados, en la circunscripción correspondiente; y si dos valores de t conducen a la misma asignación todos los intermedios, también dan la misma asignación en dicha circunscripción.

Es claro que dos métodos correspondientes a sendos valores de t que sean diferentes, pero próximos entre sí, dan asignaciones idénticas o muy similares. Así pues, aunque no se den resultados con más métodos, las simulaciones que vamos a realizar con estos métodos permiten conocer una buena aproximación sobre el comportamiento de todos los métodos basados en divisores de la familia paramétrica d(s)=s+t, con t comprendidos entre 0.5 y 1.

No se van a calcular los resultados que darían otros métodos conocidos, también basados en divisores (Adams, Dean, Hill, Condorcet), porque priman a los partidos pequeños a costa de los grandes y eso parece que está fuera de la lógica usual en la elección de métodos de asignación de escaños a partidos (al menos en España).

5.2 Resultados obtenidos al cambiar el método d'Hondt por otro más proporcional.

Las Tablas 5.1 a 5.7 recogen los resultados que se obtienen al aplicar los cinco métodos basados en los divisores correspondientes a los valores de t $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ y 1, a cada una de las elecciones generales celebradas en España desde 1977 y 1996. En cada Tabla, las cuatro primeras columnas coinciden con las de las Tablas 4.1 a 4.7, en el resto de las columnas figuran sólo los resultados globales, es decir, los correspondientes a la suma de los resultados de aplicar en las 52 cicunscripciones cada método basado en los divisores indicados y sumar los escaños obtenidos por cada partido.

Se resaltan en negrita, en todas las Tablas, dos columnas: la correspondiente a las cuotas y la correspondiente a los divisores para $t = 1$ (asignación actual).

5.2.1 Elecciones de 1977 y 1979

Partido	Votos totales	% *votos*	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'H.*
UCD	6 337 288	37.99	**132.96**	146	152	156	157	**166**
PSOE	5 358 781	32.13	**112.43**	116	118	119	118	**118**
PCE	1 718 026	10.30	**36.04**	30	27	25	25	**21**
AP	1 525 028	9.14	**31.99**	33	28	24	24	**18**
PSP-US	816 510	4.89	**17.33**	6	6	6	6	**6**
PDC	514 647	3.09	**10.80**	10	10	10	10	**11**
PNV	314 409	1.88	**6.60**	7	7	8	8	**8**
EE	60 312	0.36	**1.27**	1	1	1	1	**1**
AIC	37 183	0.22	**0.78**	1	1	1	1	**1**
Totales	16 682 184	100.00	350.00	350	350	350	350	350

Tabla 5.1: Resultados con varios métodos de las Elecciones Generales de 1977, usando divisores del tipo d(s)=s+t.

Gráficamente los resultados de los 4 partidos, que obtuvieron distintas asignaciones para varios valores de t se recogen en las Figuras 5.1 a 5.4.

Las Figuras 5.5 a 5.8 muestran gráficamente los resultados obtenidos por los cuatro partidos más votados en 1979 con distintos métodos M^t.

Observaciones a las Tablas 5.1 y 5.2. y a las Figuras 5.1 a 5.8. En 1977, el método de St. Laguë es el que produce asignaciones más proporcionales; hecho que no es de extrañar ya que es el único imparcial. A medida que se avanza en t, es decir, $M^{\frac{1}{2}}$, $M^{\frac{2}{3}}$, $M^{\frac{3}{4}}$, $M^{\frac{4}{5}}$ y M^1, la proporcionalidad disminuye, aumentando la prima en favor de los partidos más votados y a costa del tercero y siguientes de ámbito estatal. Este comportamiento de los diferentes métodos que estamos considerando será uniforme a lo largo de las simulaciones correspondientes a las 7 elecciones.

Tanto en las elecciones de 1977 como en las de 1979, el primer partido obtiene una importante ventaja con todos los métodos, incluido el de St. Laguë. El segundo partido también obtiene una prima, pero en este caso es más uniforme al cambiar de un método a otro, (es decir, le afecta poco el cambio de método de asignación).

Con respecto a la elección de 1977 indicar finalmente que ninguno de los métodos utilizados consigue evitar la gran desproporcionalidad del PSP-US. En menor medida ocurre lo mismo con PTE, en 1979, que sólo St. Laguë consigue darle 1 representante.

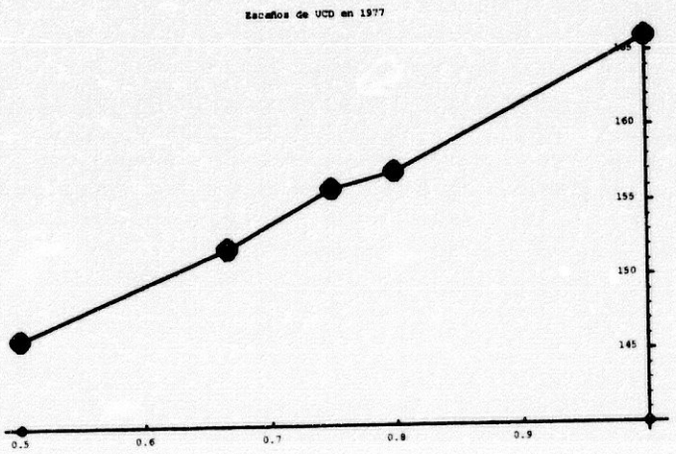


Figura 5.1: Representación gráfica de los escaños recibidos por UCD en la elección de 1977 con varios métodos de la familia paramétrica. A medida que t aumenta la prima que obtiene UCD aumenta notablemente.

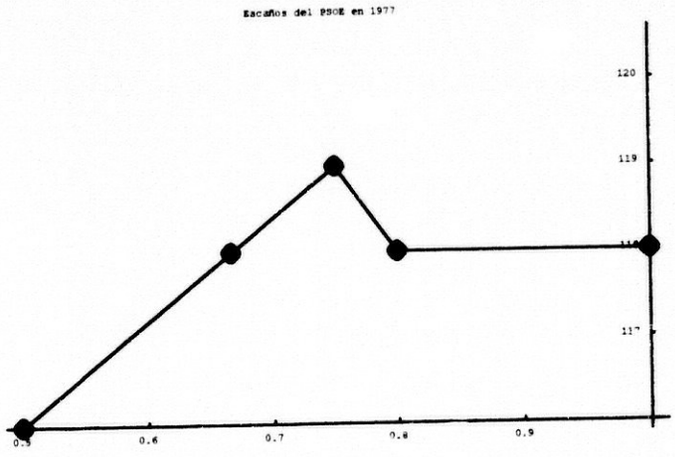
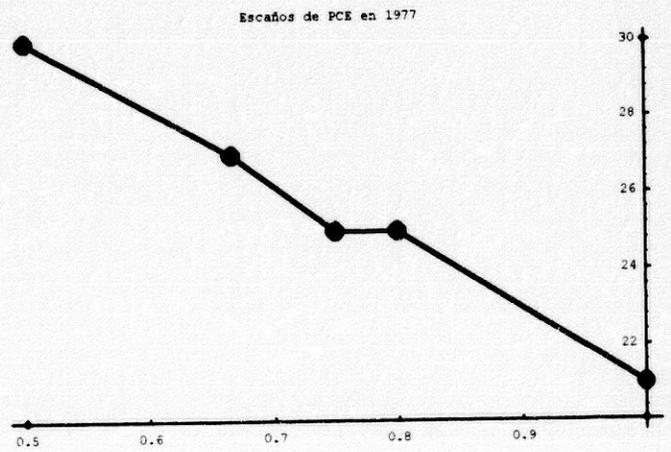
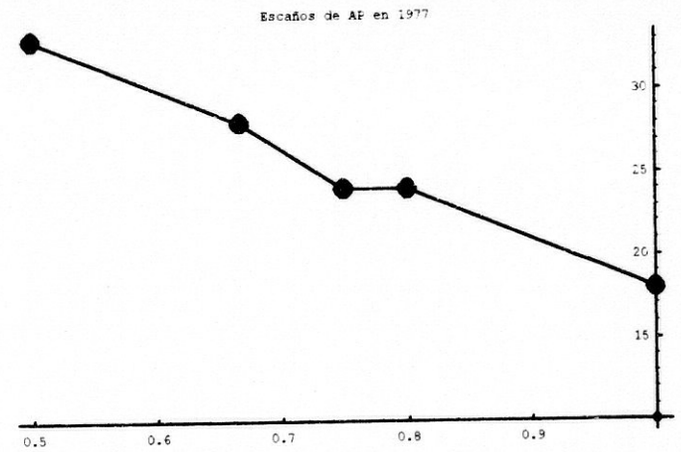


Figura 5.2: Representación gráfica de los escaños recibidos por el PSOE en la elección de 1977 con varios métodos de la familia paramétrica. No hay variaciones importantes en la asignación total obtenida por el PSOE al cambiar de método.



Figura~5.3: Representación gráfica de los escaños recibidos por el PCE en la elección de 1977 con varios métodos de la familia paramétrica. A medida que t aumenta la penalización para PCE es mayor.



Figura~5.4: Representación gráfica de los escaños recibidos por el AP en la elección de 1977 con varios métodos de la familia paramétrica. El cambio de método afecta a AP lo mismo que al PCE, al aumentar t le perjudica.

Partido	Votos totales	% *votos*	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'H.*
UCD	6 262 593	37.05	**129.68**	147	157	161	161	**167**
PSOE	5 469 813	32.36	**113.27**	118	120	123	123	**123**
PCE	1 938 487	11.47	**40.14**	36	29	26	26	**25**
CD	1 064 333	6.30	**22.04**	17	13	12	12	**9**
CiU	483 254	2.86	**10.01**	8	9	9	9	**9**
UN	378 955	2.24	**7.85**	2	2	1	2	**1**
PSA	325 762	1.93	**6.75**	7	7	6	6	**5**
PNV	275 292	1.63	**5.70**	6	6	6	6	**7**
PTE	192 798	1.14	**3.99**	1	0	0	0	**0**
HB	172 110	1.02	**3.56**	4	3	3	3	**2**
ORT	127 417	0.75	**2.64**	1	1	1	0	**0**
ERC	125 690	0.74	**2.60**	1	1	1	1	**1**
EE	85 677	0.51	**1.77**	2	2	1	1	**1**
Totales	16 902 181	100.00	350.00	350	350	350	350	350

Tabla 5.2: Resultados con varios métodos de las Elecciones Generales de 1979, usando divisores del tipo d(s)=s+t.

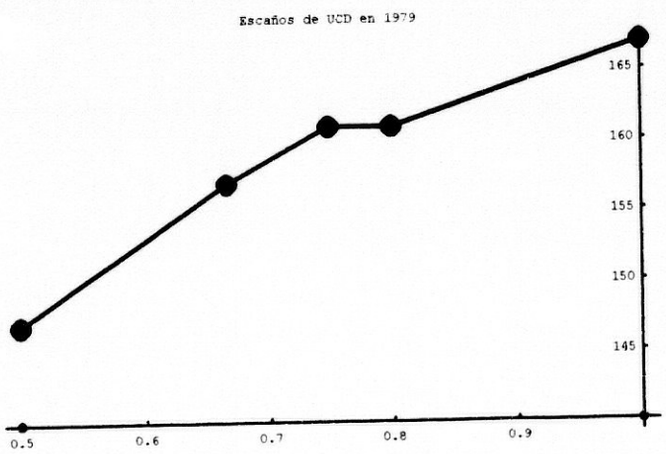
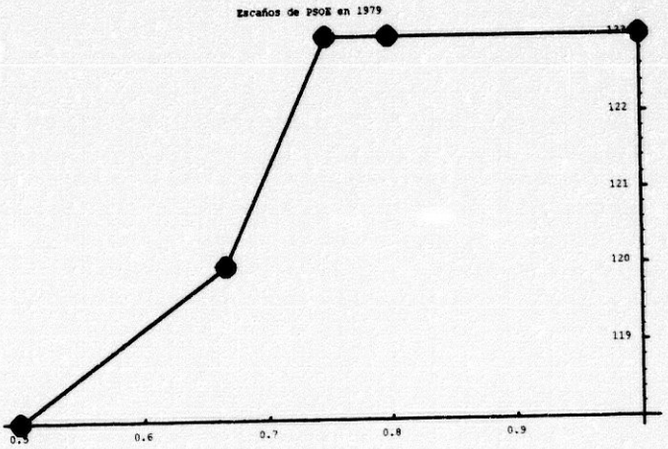
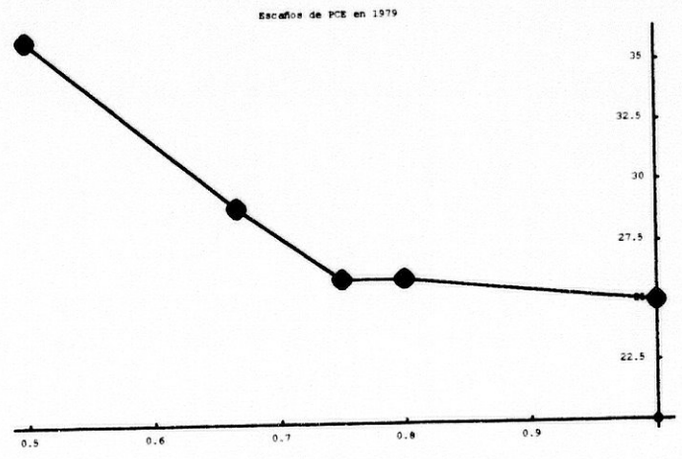


Figura 5.5: Representación gráfica de los escaños recibidos por UCD en la elección de 1979 con varios métodos de la familia paramétrica. Para UCD que volvió a ser vencedor en 1979, el cambio de método le repercute igual que en 1977: al aumentar t obtiene una prima mucho mayor.



Figura~5.6: Representación gráfica de los escaños recibidos por PSOE en la elección de 1979 con varios métodos de la familia paramétrica. Los cambios de método afectarán al segundo partido; la diferencia máxima no pasa de 5 escaños, incluso, después de t=2/3 todos los métodos dan igual asignación.



Figura~5.7: Representación gráfica de los escaños recibidos por PCE en la elección de 1979 con varios métodos de la familia paramétrica. El aumento de t repercute negativamente en el total de escaños recibidos por PCE.

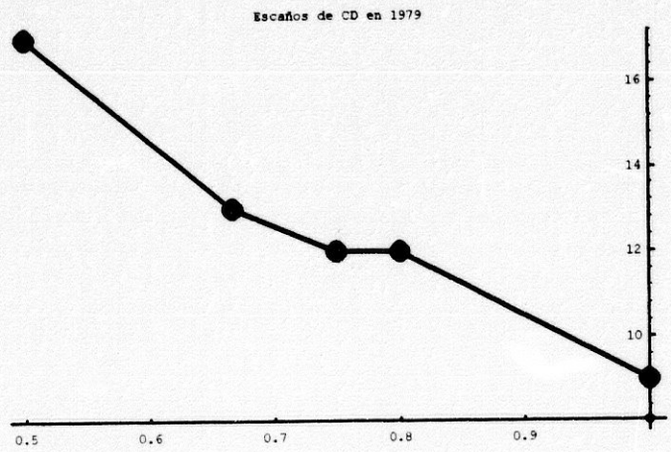


Figura 5.8: Representación gráfica de los escaños recibidos por CD en la elección de 1979 con varios métodos de la familia paramétrica. El aumento de t perjudica a CD.

5.2.2 Elecciones de 1982

La Tabla 5.3 recoge los resultados numéricos de las elecciones de 1982. y gráficamente se recogen estos resultados en las Figuras 5.9 a 5.12; a la vista de ellos podemos hacer las siguientes observaciones. El tercer partido, UCD, habría recibido con la fórmula de St. Laguë 31 escaños, mucho más que corresponde a su cuota. Ahora el tercer partido es el que ha obtenido mayor prima con St. Laguë, lo que hace que su ventaja relativa con respecto al primero sea muy grande. Así, el PSOE, con 7.5 veces más votos que UCD recibe sólo 182 escaños. La ventaja que dan todos los métodos a los dos primeros partidos (y St. Laguë también al tercero) vuelve a ser a costa de los siguientes partidos de ámbito estatal; mientras que el comportamiento de los cinco métodos con respecto a los partidos de ámbito autonómico vuelve a ser prácticamente idéntico.

5.2.3 Elecciones de 1986 y 1989

Gráficamente los resultados que en la elección de 1986 obtuvieron PSOE, CP, CDS e IU, se recogen en las Figuras 5.13 a 5.16.

Las gráficas de las Figuras 5.17 a 5.20 representan los resultados obtenidos por los partidos PSOE, PP, IU y , en la elección de 1989, para varios métodos M^t..

Tanto en 1986 como en 1989, el segundo partido de ámbito estatal más votado recibe,

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ St.L.	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} d'H.
PSOE	10 127 392	50.41	**176.44**	182	187	195	197	**202**
AP	5 543 107	27.59	**96.58**	101	102	103	104	**107**
UCD	1 354 858	6.74	**23.61**	31	25	19	16	**11**
PCE	844 976	4.21	**14.72**	9	8	6	6	**4**
CiU	772 726	3.85	**13.46**	11	11	11	11	**12**
CDS	600 842	2.99	**10.47**	3	3	2	2	**2**
PNV	395 629	1.97	**6.89**	7	8	8	8	**8**
HB	210 601	1.05	**3.67**	3	3	3	3	**2**
ERC	138 116	0.69	**2.41**	1	1	1	1	**1**
EE	100 326	0.50	**1.75**	2	2	2	2	**1**
Totales	20 088 573	100.00	350.00	350	350	350	350	350

Tabla 5.3: Resultados con varios métodos de las Elecciones Generales de 1982, usando divisores del tipo d(s)=s+t. PSOE=PSOE+PSC; AP=AP+PDP+PAR+UPN+UV+PDL+UCD (en el País Vasco); PCE=PCE+PSUC

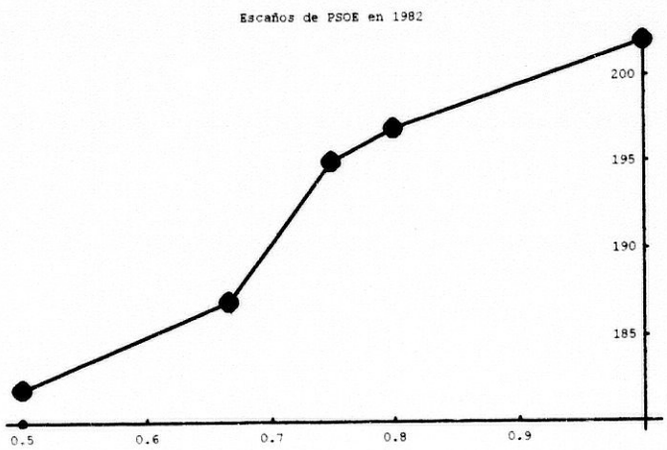


Figura 5.9: Representación gráfica de los escaños recibidos por el PSOE en la elección de 1982 con varios métodos de la familia paramétrica. Al aumentar t aumenta notablemente la prima obtenida por el PSOE, llegando a ganar 20 escaños más al usar el método d'Hondt que el método de St. Laguë.

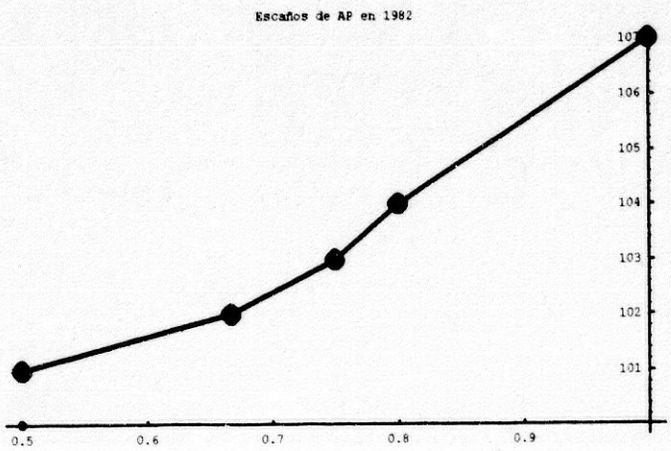


Figura 5.10: Representación gráfica de los escaños recibidos por AP en la elección de 1982 con varios métodos de la familia paramétrica. Nuevamente al segundo partido le beneficia el aumento de t, aunque una vez más le afecta en menor cantidad que al primero.

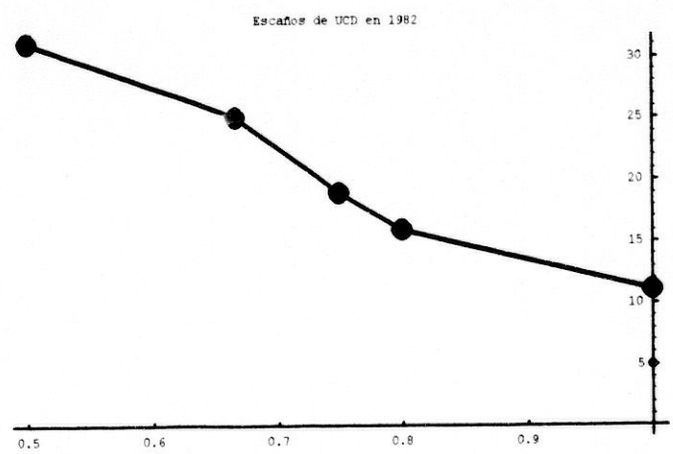


Figura 5.11: Representación gráfica de los escaños recibidos por UCD en la elección de 1982 con varios métodos de la familia paramétrica. El aumento de t prjudica a UCD.

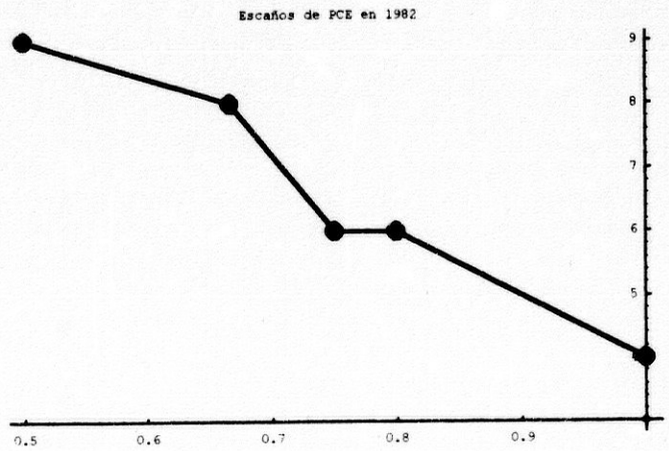


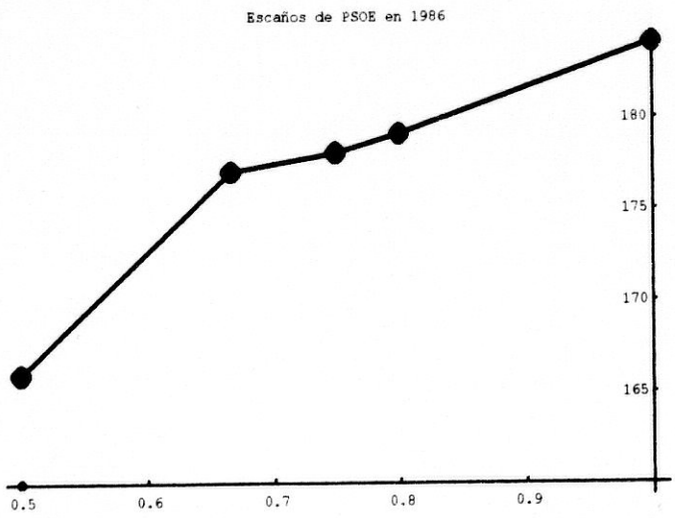
Figura 5.12: Representación gráfica de los escaños recibidos por el PCE en la elección de 1982 con varios métodos de la familia paramétrica. Al PCE le perjudican menos los valores pequeños de t.

Partido	Votos totales	% *votos*	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'H.*
PSOE	8 901 718	47.33	**165.66**	166	177	178	179	**184**
CP	5 247 677	27.90	**97.66**	106	107	106	106	**105**
CDS	1 838 799	9.78	**34.22**	32	23	23	23	**19**
CiU	1 014 258	5.39	**18.87**	17	18	18	18	**18**
IU	768 158	4.08	**14.29**	11	7	7	6	**6**
PNV	309 610	1.65	**5.76**	6	6	6	6	**6**
HB	215 282	1.14	**4.01**	4	5	5	5	**5**
UER	123 912	0.66	**2.31**	1	1	1	1	**1**
EE	107 053	0.57	**1.99**	2	2	2	2	**2**
CG	79 972	0.43	**1.49**	2	1	1	1	**1**
PAR	71 628	0.38	**1.33**	1	1	1	1	**1**
AIC	64 989	0.35	**1.21**	1	1	1	1	**1**
UV	64 403	0.34	**1.20**	1	1	1	1	**1**
Totales	18 807 459	100.00	350.00	350	350	350	350	350

Tabla 5.4: Resultados con varios métodos, de las Elecciones Generales de 1986, usando divisores del tipo d(s)=s+t. PSOE corresponde a PSOE +PSC

Partido	Votos totales	% *votos*	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'H.*
PSOE	8 088 072	42.39	**148.40**	152	**162**	165	168	**175**
PP	5 282 877	27.69	**96.93**	107	**106**	106	106	**107**
IU	1 851 080	9.70	**33.96**	24	**23**	22	21	**17**
CDS	1 617 104	8.48	**29.67**	27	**21**	18	16	**14**
CIU	1 030 476	5.40	**18.91**	17	**17**	18	18	**18**
PNV	253 769	1.33	**4.66**	5	**5**	5	5	**5**
HB	216 822	1.14	**3.98**	6	**6**	6	6	**4**
PA	212 807	1.12	**3.90**	3	**2**	2	2	**2**
UV	144 655	0.76	**2.65**	2	**2**	2	2	**2**
EA	136 595	0.72	**2.51**	2	**2**	2	2	**2**
EE	105 217	0.55	**1.93**	2	**2**	2	2	**2**
PAR	71 628	0.38	**1.31**	1	**1**	1	1	**1**
AIC	64 989	0.34	**1.19**	2	**1**	1	1	**1**
Totales	19 076 091	100.00	350.00	350	350	350	350	350

Tabla 5.5: Asignaciones, con los datos de las Elecciones Generales de 1989, usando divisores del tipo d(s)=s+t.



Figura~5.13: Representación gráfica de los escaños recibidos por PSOE en la elección de 1986 con varios métodos de la familia paramétrica. Nuevamente el aumento de t desde 0.5 a 1 le supone un aumento en la prima al partido vencedor de cerca de 20 escaños.

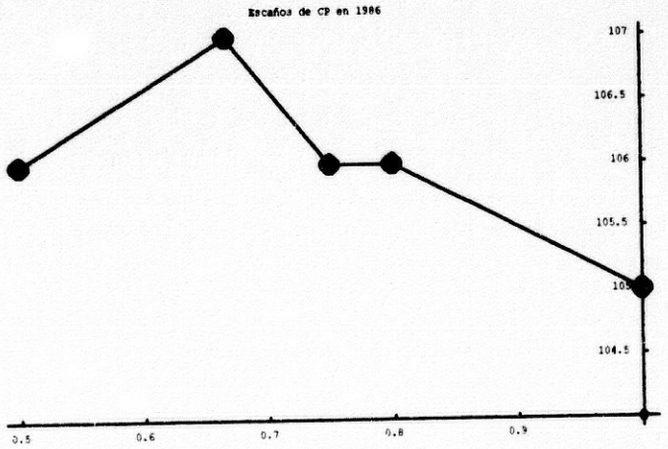


Figura 5.14: Representación gráfica de los escaños recibidos por CP en la elección de 1986 con varios métodos de la familia paramétrica. Para el segundo partido, CD, no hay diferencias significativas por el cambio de método electoral.

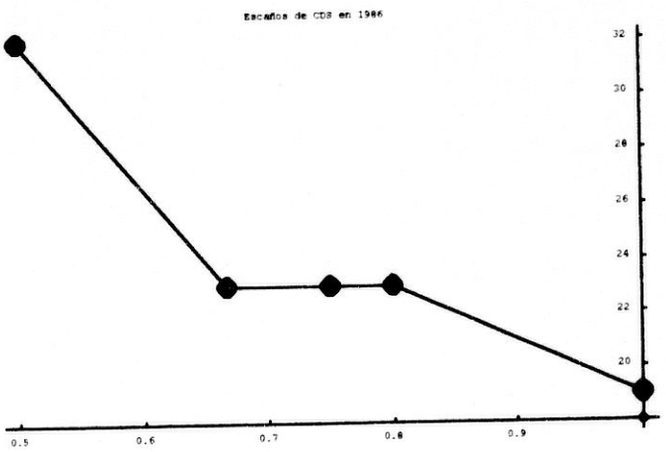


Figura 5.15: Representación gráfica de los escaños recibidos por CDS en la elección de 1986 con varios métodos de la familia paramétrica. Para el CDS el aumento de t le perjudica, aunque el salto fuerte se da al cambiar del método de St. Laguë al método t=2/3.

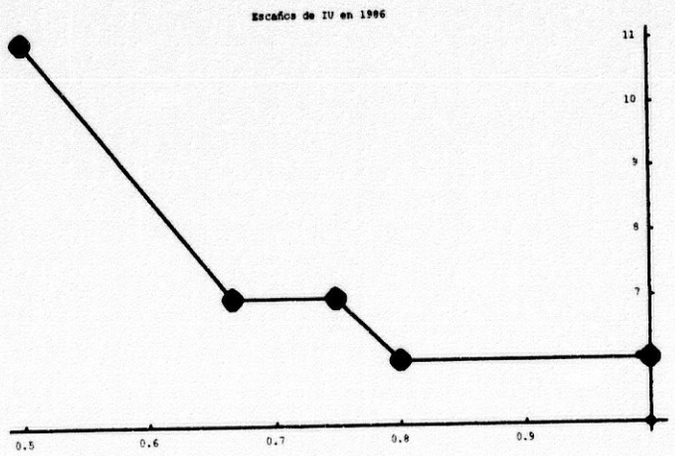


Figura 5.16: Representación gráfica de los escaños recibidos por IU en la elección de 1986 con varios métodos de la familia paramétrica. La variación para IU es muy similar a la que se da para CDS; hecho lógico dado su parecido en la distribución de votos con respecto a los demás partidos.

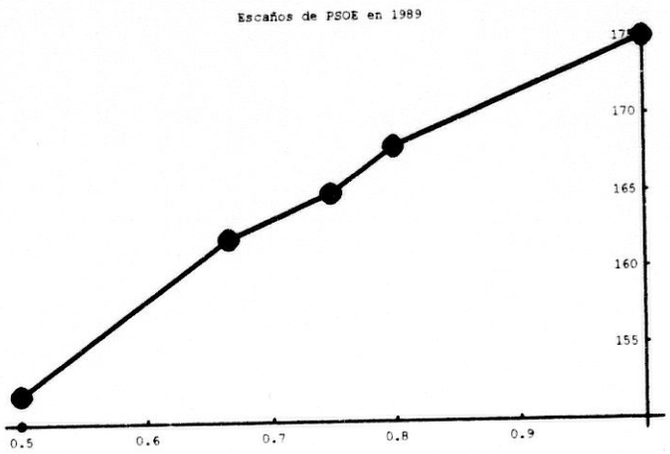


Figura 5.17: Representación gráfica de los escaños recibidos por PSOE en la elección de 1989 con varios métodos de la familia paramétrica. De nuevo, al partido vencedor le aumenta la prima en escaños al aumentar t, consiguiendo 20 escaños de diferencia entre usar el método de St. Laguë y el método d'Hondt.

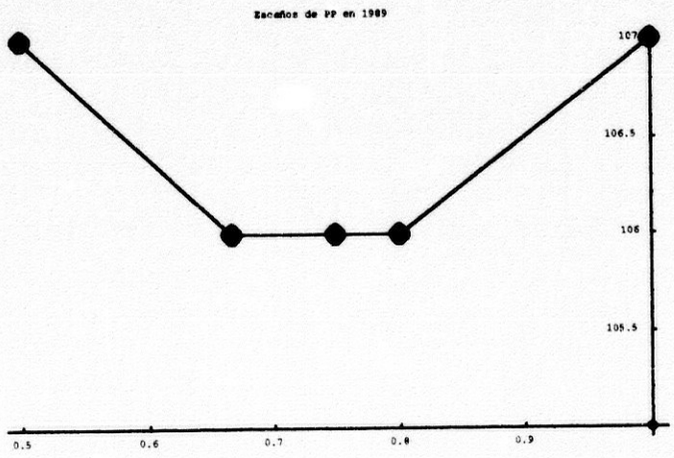


Figura 5.18: Representación gráfica de los escaños recibidos por PP en la elección de 1989 con varios métodos de la familia paramétrica. Al segundo partido no le afecta el cambio de método electoral; sólo 1 escaño de diferencia entre usar valores de t intermedios (2/3, 3/4 y 4/5) o usar un valor extremo (1/2 o 1).

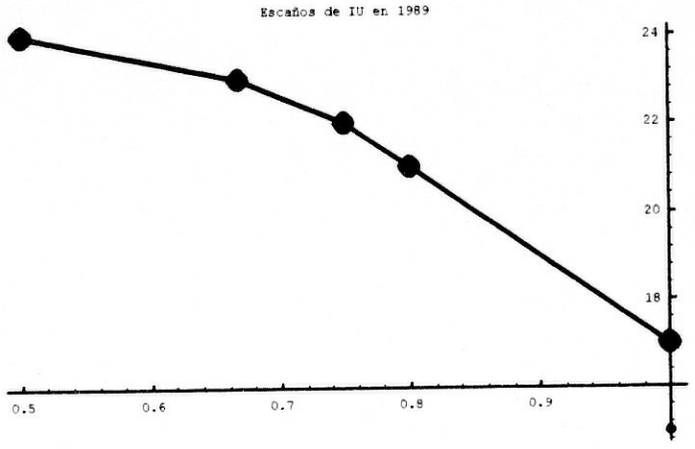


Figura 5.19: Representación gráfica de los escaños recibidos por IU en la elección de 1989 con varios métodos de la familia paramétrica. El aumento de t conlleva el aumento de la penalización a IU.

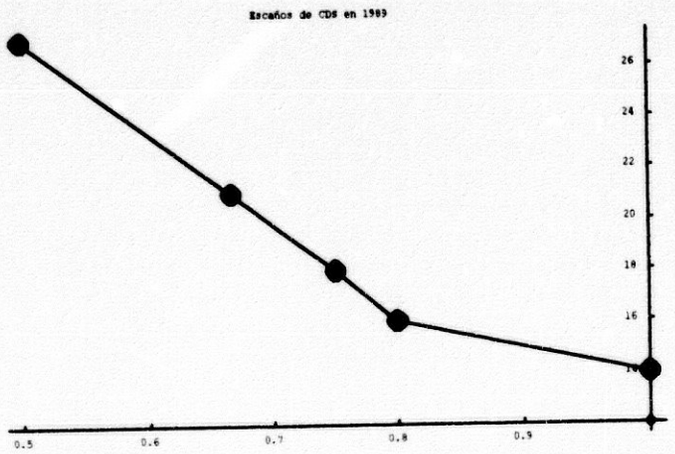


Figura 5.20: Representación gráfica de los escaños recibidos por CDS en la elección de 1989 con varios métodos de la familia paramétrica. El aumento de t conlleva el aumento de la penalización a CDS.

con todos los métodos, una asignación muy similar a la que recibió con d'Hondt. A IU y CDS el método de St. Laguë les asigna un número de escaños muy cerca de su cuota en ambas elecciones, aunque conviene resaltar que CDS obtendría en 1989 con el método de St. Laguë más escaños que IU a pesar de obtener menos votos que IU. La prima que habría dado el método de St. Laguë en 1989 al primer partido es mucho menor que la que habría dado al segundo. La asignación a los partidos de ámbito autonómico es casi idéntica con los demás métodos.

5.2.4 Elecciones de 1993

De los resultados que aparecen en la Tabla 5.6 y de las gráficas de las Figuras 5.21 a 5.23, se deduce que en las elecciones de 1993 el CDS y BNG no obtienen representación con d'Hondt; sin embargo, St. Laguë, les asigna 1 y 2 escaños respectivamente, de tal forma que el BNG obtendría una representación correcta con todos los métodos excepto con d'Hondt, mientras que la desproporción del CDS no es corregida por ninguno de ellos.

En estas elecciones la asignación de d'Hondt a los partidos más votados es más similar a la que dan los demás métodos, excepto St. Laguë, cuya prima al primer partido es de 10 escaños menos que los que les asigna d'Hondt.

Salvo el BNG, los partidos de ámbito autonómico reciben una representación muy

Partidos	Votos totales	% *votos*	Cuota.	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'H.*
PSOE	9 071 760	45.42	**141.81**	149	156	157	158	**159**
PP	8 170 201	36.49	**127.71**	136	136	137	137	**141**
IU	2 245 444	10.03	**35.10**	27	22	21	20	**18**
CiU	1 162 534	5.19	**18.17**	16	16	16	16	**17**
CDS	414 000	1.85	**6.47**	1	0	0	0	**0**
PNV	300 308	1.34	**4.69**	5	5	5	5	**5**
CC	206 953	0.92	**3.24**	4	4	4	4	**4**
HB	206 296	0.92	**3.22**	4	3	3	3	**2**
PAR	144 241	0.64	**2.25**	2	2	2	2	**1**
BNG	126 965	0.57	**1.98**	2	2	2	2	**0**
ERC	121 972	0.54	**1.91**	1	1	1	1	**1**
EA	117 859	0.53	**1.84**	2	2	1	1	**1**
UV	102 714	0.46	**1.61**	1	1	1	1	**1**
Totales	22 391 247	100.00	350.00	350	350	350	350	350

Tabla 5.6: Resultados de las Elecciones Generales de 1993, con varios métodos electorales, usando divisores del tipo d(s)=s+t.

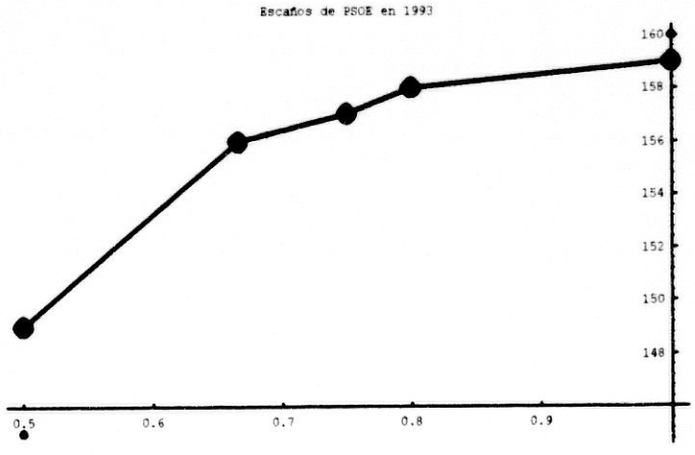


Figura 5.21: Representación gráfica de los escaños recibidos por PSOE en la elección de 1993 con varios métodos de la familia paramétrica. Nuevamente el aumento de t conduce a repartos más beneficiosos para el partido vencedor. A diferencia de los casos anteriores, la diferencia entre usar el método d'Hondt y el método de St. Laguë descendería a sólo 10 diputados.

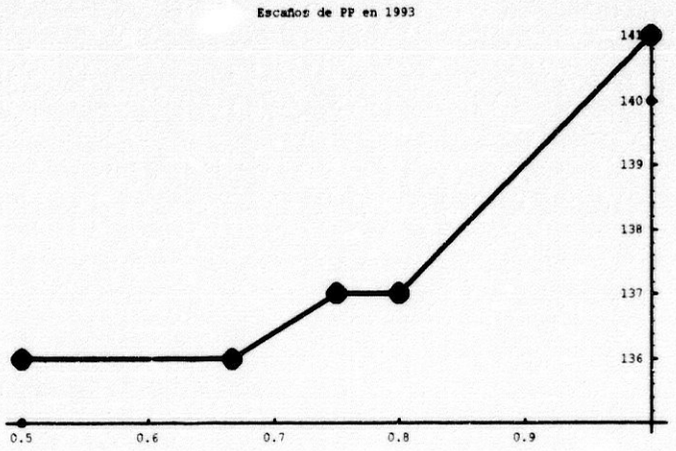


Figura 5.22: Representación gráfica de los escaños recibidos por PP en la elección de 1993 con varios métodos de la familia paramétrica. Al segundo partido le vuelve a afectar poco el cambio de método. En este caso sólo el cambio de $M^{\frac{4}{5}}$ por el método d'Hondt le daría un aumento de 4 escaños, los demás sólo se diferencian en 1 escaño a lo sumo.

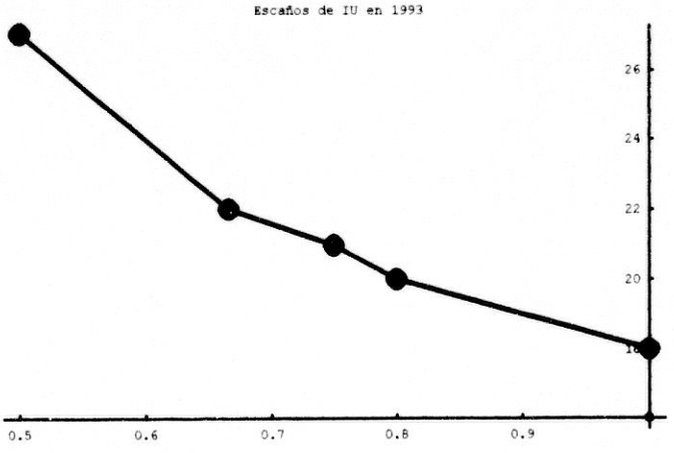


Figura 5.23: Representación gráfica de los escaños recibidos por IU en la elección de 1993 con varios métodos de la familia paramétrica. De nuevo, el aumento de t perjudica a IU.

similar, sea cual sea el método usado. Sin embargo, IU sólo con St. Laguë obtendría una representación próxima a su cuota.

5.2.5 Elecciones de 1996

Partidos	Votos totales	% votos	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ St.L.	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} d'H.
PP	9 716 006	40.09	**140.33**	149	153	156	156	**156**
PSOE	9 425 678	38.89	**136.13**	138	139	140	140	**141**
IU	2 639 774	10.89	**38.13**	31	28	24	24	**21**
CiU	1 151 633	4.75	**16.63**	15	14	14	14	**16**
PNV	318 951	1.32	**4.61**	5	5	5	5	**5**
CC	220 418	0.91	**3.18**	4	4	4	4	**4**
BNG	220 147	0.91	**3.18**	3	2	2	2	**2**
HB	181 304	0.75	**2.62**	2	2	2	2	**2**
ERC	162 545	0.67	**2.35**	1	1	1	1	**1**
EA	115 861	0.48	**1.67**	1	1	1	1	**1**
UV	81 350	0.34	**1.17**	1	1	1	1	**1**
Totales	24 233 667	100.00	350.00	350	350	350	350	350

Tabla 5.7: Resultados de las Elecciones Generales de 1996, con varios métodos electorales,usando divisores del tipo d(s)=s+t

En 1996, como podemos ver en la Tabla 5.7 y en las gráficas de las Figuras 5.24 a 5.26, la diferencia entre el número de escaños que asigna d'Hondt al partido más votado y St. Laguë es de 7 escaños. Las diferencias para el segundo partido son menores aún; no ocurre lo mismo con IU, ya que el método d'Hondt le asigna 10 escaños menos que St. Laguë, y a pesar de ello St. Laguë deja a IU con muchos menos escaños que corresponden a su cuota.

5.2.6 Comparación de los índices de proporcionalidad del S.E.E. para las distintas asignaciones obtenidas con distintos valores de t=1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y 1

Al observar los resultados de las Tablas 5.1, a 5.7 y 5.8 y de las Figuras 5.1 a 5.27 correspondientes a los resultados y a las gráficas obtenidos para todas las elecciones generales, con distintos métodos de la familia paramétrica y los valores de los índices de proporcionalidad MC y DA, correspondientes, se extraen varias conclusiones.

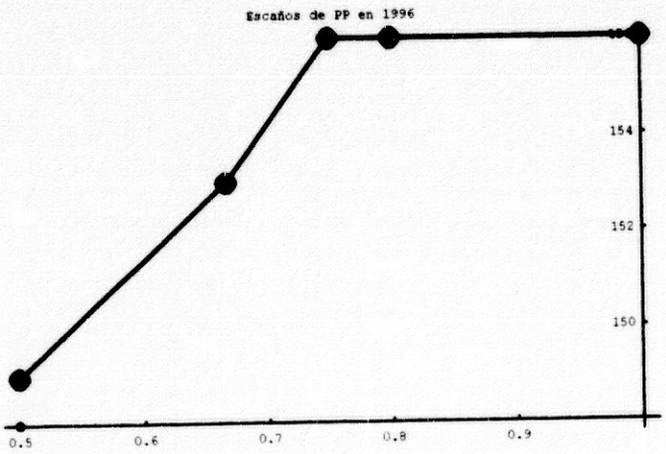


Figura 5.24: Representación gráfica de los escaños recibidos por el PP en la elección de 1996 con varios métodos de la familia paramétrica. De nuevo, el aumento de t es más favorable para el partido vencedor, pero la ventaja ha vuelto a decrecer siendo menor aún que en 1993, ahora entre usar el método de St. Laguë y usar el método d'Hondt sólo supone para el PP una diferencia de 7 escaños.

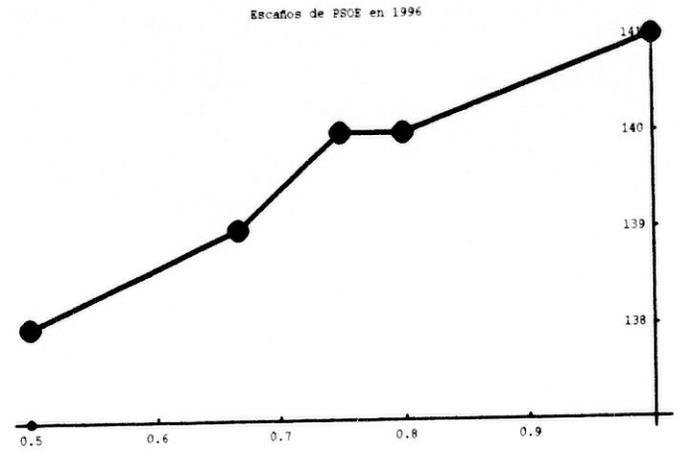
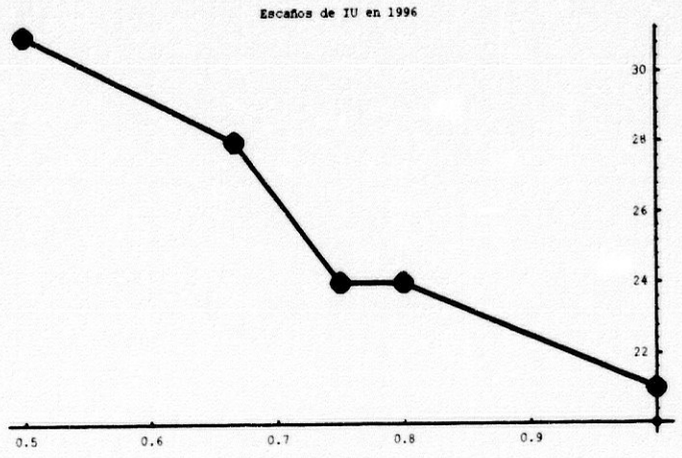
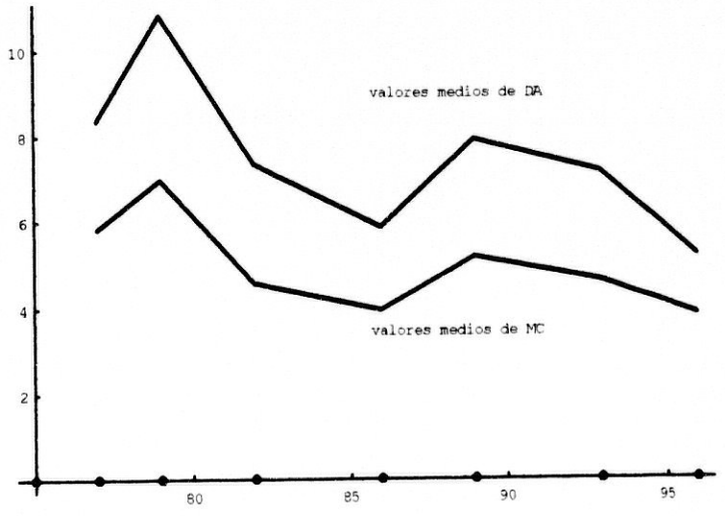


Figura 5.25: Representación gráfica de los escaños recibidos por PSOE en la elección de 1996 con varios métodos de la familia paramétrica. Sólo 4 escaños separan las asignaciones del PSOE con los distintos métodos.



Figura~5.26: Representación gráfica de los escaños recibidos por IU en la elección de 1996 con varios métodos de la familia paramétrica. Nuevamente los valores más pequeños de t penalizan menos a IU.



Figura~5.27: Relación entre los valores medios de los índices MC y DA de las siete elecciones generales con los valores de t=1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y 1.

Elecciones de 1977						
t	1/2	2/3	3/4	4/5	1	Media
MC	3.75	5.01	6.02	6.13	8.26	5.83
DA	5.21	7.21	8.92	8.92	11.55	8.36
Elecciones de 1979						
t	1/2	2/3	3/4	4/5	1	Media
MC	4.13	6.56	7.69	7.66	8.96	7.00
DA	6.65	9.95	11.82	11.82	13.82	10.81
Elecciones de 1982						
t	1/2	2/3	3/4	4/5	1	Media
MC	2.87	3.22	4.80	5.32	6.75	4.59
DA	5.07	5.35	7.52	8.38	10.60	7.38
Elecciones de 1986						
t	1/2	2/3	3/4	4/5	1	Media
MC	1.93	4.04	4.07	4.27	5.33	3.93
DA	2.70	6.26	6.26	6.55	7.69	5.89
Elecciones de 1989						
t	1/2	2/3	3/4	4/5	1	Media
MC	3.07	4.40	5.14	5.82	7.42	5.17
DA	4.83	7.18	8.03	8.89	10.60	7.91
Elecciones de 1993						
t	1/2	2/3	3/4	4/5	1	Media
MC	3.02	4.48	4.80	5.06	5.78	4.63
DA	5.09	6.87	7.33	7.62	9.02	7.19
Elecciones de 1996						
t	1/2	2/3	3/4	4/5	1	Media
MC	2.35	3.40	4.39	4.39	4.82	3.87
DA	3.36	4.79	5.93	5.93	6.22	5.25

Tabla 5.8: Índices de proporcionalidad para las 7 elecciones generales, celebradas en España, con los resultados obtenidos para los valores de t=1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y 1.

5.2.7 Conclusiones

1. Todos los métodos conceden una prima al partido más votado, destacando que la menor es la que le asigna el método de St. Laguë y la mayor la que le asigna el método d'Hondt. La prima al partido más votado aumenta a medida que ha aumentado el valor de t.

2. El cambio de un método por otro no afecta prácticamente nada al segundo partido, presenta pequeñas oscilaciones tanto hacia arriba como hacia abajo. No obstante los valores altos le suelen ser algo más favorables.

3. Todos los métodos asignan a los partidos de ámbito autonómico un número de escaños muy similar.

4. La asignación que más se aproxima a la cuota corresponde a $t = 1/2$. Es decir, confirma una vez más que el método de St. Laguë es el más proporcional.

5. La tercera fuerza de ámbito estatal recibe con d'Hondt, aproximadamente, la mitad de los escaños que corresponden a su cuota. La cuarta fuerza de ámbito estatal recibe también menos de la mitad de los escaños de su cuota, incluso ninguno en 1993. Las restantes fuerzas de ámbito estatal suelen quedar extraparlamentarias. Cuando t disminuye la tercera fuerza se perjudica menos, pero generalmente no consigue alcanzar su cuota. Sólo en la elección de 1982, el tercer partido habría sido primado usando St. Laguë, incluso con $M^{\frac{2}{3}}$ habría obtenido una holgada representación.

6. Los índices MC y DA tienen su valor más pequeño con el método de St. Laguë y el más grande con el de d'Hondt; su valor crece a medida que t crece de $\frac{1}{2}$ a 1.

5.2.8 Observaciones

Ha quedado patente que la fórmula electoral más proporcional de las cinco comparadas corresponde al valor $t = 0.5$ (St.Laguë) y la menos proporcional al valor $t = 1$ (d' Hondt). No obstante, además de la proporcionalidad y la imparcialidad a la hora de elegir un método de representación proporcional para asignar escaños a los partidos, hay que cuidar también otras propiedades. Por ejemplo, es importante que no induzca fragmentaciones en los partidos; para ello, siempre sería bueno que el método de asignar los escaños no diera ventajas a un partido pequeño respecto a otro más grande, por ejemplo, que verifique la propiedad α.

Una de las principales propiedades estudiada en el capítulo 3 de esta Memoria, la propiedad α, que induce a usar uno de los valores de t citados, trata de buscar la máxima proporcionalidad asegurando que en ningún caso se perjudique a los grandes partidos.

Un ejemplo sirve para recordarla. Sea el problema $((4.67, 3.64, 0.69); 9)$, si calculamos la solución, aplicando los métodos St. Laguë y d'Hondt se obtienen los resultados:

$$M^1(4.67, 3.64, 0.69) = (5, 4, 0);$$
$$M^{\frac{1}{2}}(4.67, 3.64, 0.69) = (4, 4, 1).$$

Si observamos los resultados de las asignaciones por los dos métodos, la solución obtenida con el método d'Hondt verifica la propiedad α, porque perjudica al partido menos votado; sin embargo, la solución obtenida por el método de St. Laguë no verfica la propiedad α ya que el primer partido tiene más votos y mayor resto que el segundo. Sin embargo, el segundo partido ha sido beneficiado y el primero perjudicado, con respecto a sus cuotas, con la asignación (4,4,1).

Así, dependiendo del número de partidos con opción a escaño, se obtiene un valor u otro de t. Por ejemplo, si dicho número de partidos es 3, para garantizar que se verifique la propiedad α, para todo problema, el valor de t debe ser $t = \frac{2}{3}$ (o mayor); si el número de partidos es 4 el valor de t es $t = \frac{3}{4}$; etc.

Cuando se repasan los resultados de todas las elecciones generales habidas desde 1977 hasta 1996, se observa que el número de partidos que consiguen escaños en cada provincia es muy bajo. La mayoría de las veces sólo dos partidos consiguen escaños en una provincia, (incluso utilizando los divisores de St.Laguë); además, es lógico que así ocurra, pues basta tener en cuenta que más de 30 circunscripciones tienen tamaño 5 o inferior y en ellas es muy difícil que la tercera fuerza política consiga representación. La Tabla 5.9 muestra el número de circunscripciones en las que consiguieron escaños en las elecciones de 1993; un sólo partido (Ceuta y Melilla), dos partidos (en 33 de ellas) y así hasta cinco, que fue el máximo número de partidos que consiguieron escaños en una misma circunscripción, concretamente en 2 de ellas, Barcelona (PSOE, CiU, PP, IU y ERC) y Guipúzcoa (PSOE, PNV, PP, HB y EA).

nº de partidos que obtienen escaños	1	2	3	4	5
nº de circunscripciones en las que ocurre	2	33	12	3	2

Tabla 5.9: Número de partidos que obtuvieron escaños en las distintas circunscripciones para la asignacón con d'Hondt en 1993.

En las dos circunscripciones de Ceuta y Melilla, lógicamente sólo un partido consigue el escaño. En 33 provincias sólo dos partidos consiguieron escaños con el método d'Hondt

(a pesar de que todas ellas tienen 3 o más escaños); por tanto, en cada una de tales provincias, la tercera fuerza (y cualquiera de las que le siguen), perdió todos sus votos. Esto ha propiciado la *cultura del voto útil*, es decir, la de votar a uno de los pocos partidos con opción a escaño aunque se tenga preferencia por uno de los restantes. En otras 12 provincias más, sólo consiguen escaños tres partidos. En total, en 47 de las 52 circunscripciones, el método d'Hondt asignó escaños a 3 partidos a lo sumo. Algo similar ocurre si se consideran los datos de las demás elecciones generales. Por tanto, la elección de $t = \frac{2}{3}$ es una de las más importantes a tener en cuenta, ya que asegura el cumplimiento de la propiedad α en casi todas las circunscripciones (en la práctica suele verificarla en todas, aunque el número de partidos que consigan escaño en alguna de ellas sea superior a tres). No ocurre lo mismo con el método de St. Laguë. Se constata este hecho con un ejemplo, en el que los datos del problema pertenecen a las Elecciones Generales de 1989, ver Tablas 5.10 y 5.11.

Existen en cualquier elección cerca de 20 provincias en las cuales 3, o más, partidos consiguen escaño; en ellas, a igualdad de restos de sus cuotas, si alguno de los grandes partidos se perjudica es el más votado. Dos ejemplos servirán para mostrar, de forma más contundente, el perjuicio al primer partido; corresponden a datos de las provincias de Barcelona y Jaén en las elecciones generales de 1989. Los votos de 1989, las cuotas (con dos decimales) y las asignaciones con el método de St.Laguë y el $M^{\frac{2}{3}}$, para las provincias, de Barcelona y Jaén se recogen en las Tablas 5.10 y 5.11, respectivamente.

Partidos	votos	cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$
PSOE	900 039	13.05	13	13
CiU	740 479	10.74	10	11
PP	256 785	3.72	4	4
IC	199 372	2.89	3	3
CDS	110 175	1.60	2	1
Totales	2 209 850	32.00	32	32

Tabla 5.10: Asignación, con los datos de las Elecciones Generales de1989, usando el método de St. Laguë y el 2/3. BARCELONA: 32 escaños.

En el primer caso, en Barcelona, St. Laguë asigna a CiU, partido con resto más grande, 10 escaños, quedando perjudicado con respecto a PP, IC y CDS, todos con menos votos y con restos más pequeños. En el segundo caso, en Jaén, el partido más votado tiene resto prácticamente idéntico al segundo más votado, St. Laguë beneficia al segundo y perjudica al primero. En Jaén podíamos asegurar que el método $\frac{2}{3}$ no beneficiaría al

Partidos	votos	cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$
PSOE	197 441	3.61	3	4
PP	88 879	1.62	2	1
IU	42 038	0.77	1	1
Totales	328 358	6.00	6	6

Tabla 5.11: Asignación, con los datos de las Elecciones Generales de1989, usando el método de St. Laguë. JAÉN: 6 escaños

segundo partido a costa del primero, puesto que el número de partidos con escaños es 3; sin embargo, observamos que en Barcelona tampoco perjudica el método $\frac{2}{3}$ a ninguno de los partidos con resto grande: CiU, PP e IU con respecto al CDS que es el de resto menor, a pesar de existir 5 partidos. De hecho, para que el método $\frac{2}{3}$ no verifique la propiedad α se necesita, entre otras cosas, que al menos 4 partidos tengan resto superior a 0.67, lo cual es muy difícil en la práctica.

El método de St. Laguë tiene la ventaja de ser el que más proporcionalidad ha dado, debido a su imparcialidad; sin embargo, en varias elecciones ha dado al segundo partido mayor ventaja que al primero y es normal, en cada elección, que no cumpla la propiedad α en alguna circunscripción. El método $M^{\frac{2}{3}}$ tiene menor proporcionalidad que St. Laguë, pero siempre ha dado más ventaja al primer partido que al segundo y ha satisfecho la propiedad α en todos los repartos provinciales.

Por eso serán estos los dos métodos que consideraremos en las siguientes alternativas que se desarrollan en las que se aprovechan al máximo los límites establecidos por la Constitución (con objeto de corregir la desproporcionalidad en la representación de los partidos y de las provincias)

5.3 Cámara de 400 diputados y cambio del método d'Hondt por otro más proporcional

Las alternativas a cualquier sistema electoral son siempre muchas y, por tanto, no tiene sentido enumerar una larga lista de ellas sin justificación alguna.

El estudio de cualquier alternativa estará orientado a corregir algún efecto que produce el Sistema Electoral Español. Al hacer el análisis del S.E.E. hemos contastado, por ejemplo, que la proporcionalidad del mismo es baja; luego, uno de los objetivos de cualquiera de las alternativas que presentemos, irá orientado en el sentido de mejorar la proporcionalidad.

Las alternativas que se estudian en esta sección estarán orientadas a conseguir los siguientes objetivos mínimos:

1. Disminuir las diferencias entre los costes de los escaños en las provincias.
2. Aumentar la proporcionalidad en la asignación a los partidos.
3. Además queremos respetar los límites que recoge la Constitución.

Con el primer objetivo, se trata de corregir el desequilibrio existente en la asignación de escaños a las circunscripciones. El segundo, se refiere a la prima en escaños que reciben unos partidos a costa de otros, ya que, según hemos visto, la asignación de escaños a partidos con el método d'Hondt, produce una desproporcionalidad alta.

Se pueden elaborar alternativas que traten de cumplir sólo, alguno de los objetivos anteriores. Algunas podrían ser muy elementales; por ejemplo, cambiar la fórmula d'Hondt por otra más proporcional (método de St. Laguë), en este capítulo, hemos obtenido los resultados de aplicar a los datos de las elecciones generales distintos métodos basados en divisores, hemos podido contastar, que la utilización del método de St. Laguë, mejora la proporcionalidad en la asignación de escaños a los distintos partidos.

Por otra parte, cuando las circunscripciones utilizadas son las provincias, hay bastantes alternativas posibles a la asignación de escaños entre las mismas, que están en la línea del objetivo 1. En todos los casos, el método de asignación de escaños, ya sea a partidos o a circunscripciones, debe ser uno basado en divisores con objeto de evitar comportamientos paradójicos. Si se aumenta el tamaño de la Cámara a 400 Diputados, ésta verificaría los objetivos que hemos puesto.

A continuación, vamos a estudiar nuevas alternativas introduciendo en el sistema electoral un cambio en el tamaño de la Cámara, que consideraremos 400, que es el máximo permitido por la Constitución, un cambio en la asignación de los escaños a las circunscripciones, ya que vamos a disminuir el fijo inicial a 1, y un cambio de método electoral, ya que sustituiremos d'Hondt por el método de St. Laguë y el método $M^{\frac{2}{3}}$. También suprimimos la barrera electoral del 3%. Al mantener la asignación inicial fija de un escaño a cada provincia se continúa primando a las más pequeñas pero en menor medida.

Luego, resumiendo, la alternativa que vamos a presentar consiste en:

- Aumentar el tamaño de la cámara de Diputados a 400 escaños.

- Disminuir al mínimo (a uno) la asignación inicial de escaños a las provincias y los restantes con St. Laguë.

- Utilizar el método $M^{\frac{1}{2}}$ o el $M^{\frac{2}{3}}$ para la asignación de escaños, es decir, uso de fórmulas de asignación de escaños, más proporcionales.

5.3.1 Resultados obtenidos al aplicar la alternativa anterior a los datos de las elecciones de 1993 y 1996

En primer lugar hay que determinar el número de escaños de cada provincia. Tras asignar un escaño a cada una de ellas, otro a Ceuta y otro a Melilla, quedan 348 escaños por asignar entre las provincias en proporción a sus poblaciones. Para esta asignación se usa el método de St. Laguë.

Los resultados globales con esta alternativa, obtenidos de la asignación de escaños a los partidos según los datos de las elecciones generales de 1993 y 1996, se recogen en las Tablas 5.12 y 5.13 respectivamente.

Partido	Votos	% votos	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ St.L.	$M^{\frac{2}{3}}$	Escaños actual
PSOE	9 071 760	40.29	161.17	169	171	159
PP	8 170 201	36.29	145.15	149	153	141
IU	2 245 444	9.97	39.89	35	30	18
CiU	1 162 534	5.16	20.65	19	20	17
CDS	414 000	1.84	7.36	1	1	0
PNV	300 308	1.34	5.34	5	5	5
CC	206 953	0.92	3.68	4	4	4
HB	206 296	0.92	3.67	4	4	2
PAR	144 241	0.64	2.56	3	3	1
BNG	126 965	0.56	2.25	2	2	0
ERC	121 972	0.54	2.17	3	2	1
EA	117 859	0.52	2.09	2	2	1
UV	102 714	0.46	1.82	2	2	1
PA	96 513	0.43	1.72	1	0	0
U.P.C.	27 005	0.12	0.48	1	1	0
Totales	22 514 765	100.00	400.00	400	400	350

Tabla 5.12: Asignación, con los datos de las Elecciones Generales de 1993, usando distintos métodos, y la asignación actual.

Como se observa, en la Tabla 5.13 la representación de la tercera fuerza política a nivel nacional mejora con los métodos $M^{\frac{1}{2}}$, $M^{\frac{2}{3}}$. Con el sistema actual recibe menos del 50 % de los escaños que corresponden a su cuota; con la alternativa propuesta recibe, hasta el 72.3%, dependiendo del método que utilicemos. En todos los casos su representación aumenta en relación con la asignación actual. Observamos que el CDS, en 1993, sólo recibe un escaño por Madrid y ha sido gracias a que se ha eliminado la barrera del 3%. Es decir, la representación de los partidos intermedios (en número de votos) con electorado disperso (los de ámbito estatal) sólo se corrige parcialmente.

Partidos	Votos	% *votos*	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$	*As. act.*
PP	9 716 006	39.87	159.48	166	170	156
PSOE	9 425 678	38.68	154.72	157	159	141
IU	2 639 774	10.83	43.33	38	33	21
CiU	1 151 633	4.73	18.90	18	19	16
PNV	318 951	1.31	5.24	5	7	5
CC	220 418	0.91	3.62	4	4	4
BNG	220 147	0.90	3.61	2	2	2
HB	181 304	0.74	2.98	3	2	2
ERC	162 545	0.67	2.67	2	1	1
PA	134 800	0.55	2.21	2	1	0
EA	115 861	0.48	1.90	2	1	1
UV	81 350	0.33	1.34	1	1	1
Totales	24 368 467	100.00	400.00	400	400	350

Tabla 5.13: Asignación, con los datos de las Elecciones Generales de 1996, usando distintos métodos y la asignación actual.

Según podemos observar en la Tabla 5.13, el tercer partido de ámbito nacional mejora su representación con los métodos $M^{\frac{1}{2}}$, $M^{\frac{2}{3}}$. Aún así, la prima que reciben los dos primeros partidos es pagada exclusivamente por los partidos de ámbito nacional tercero y siguientes ya que los de ámbito autonómico (en conjunto) siguen recibiendo una representación muy similar a su cuota.

De los datos que obtenemos en las Tablas 5.12 y 5.13, vemos la dificultad que tienen las fuerzas cuarta, quinta, etc., de ámbito nacional para conseguir representación; esta dificultad no se podrá subsanar sin una reforma más profunda.

El coste mínimo de escaño tanto en las elecciones de 1993 como las de 1996, con el

sistema alternativo, corresponde a Soria y es aproximadamente de 47 000 habitantes por escaño, le sigue Palencia con unos 59 000 habitantes por escaño; mientras que el máximo corresponde a Barcelona y es sobre 112 000 habitantes por escaño. Otras 15 provincias tendrían un coste superior a 100 000 habitantes. Las diferencias con el coste de escaño con el sistema actual, se han acortado sensiblemente como muestran los resultados que se recogen en la Tabla 5.14.

	Coste del escaño 1993	*Coste del escaño* 1996
Sist. actual	31 500←→150 000	31 465←→153 169
Alternativo	47 400←→112 000	47 198←→113 053

Tabla 5.14: Comparación con el sistema actual y la alternativa del coste de escaños de las elecciones generales de 1993 y 1996.

La Tabla 5.15 recoge los distintos valores de los índices de proporcionalidad *MC* y *DA*, comparándo, los del sistema actual y los que aparecerían con la primera alternativa, en el caso en el que se utilizara el método de St Laguë o el método $M^{2/3}$ para el reparto de escaños.

	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	actual
MC	1.58	2.78	4.82
DA	2.35	4.26	6.22

Tabla 5.15: Comparación de los índices de proporcionalidad, de las elecciones de 1996, MC y DA de las alternativas al sistema actual.

Con esta alternativa, el índice de proporcionalidad mejora considerablemente tal que como podemos observar en los resultados que aparecen en la Tabla 5.15 y en la gráfica de la Figura 5.28.

Los resultados de esta alternativa para los datos de las restantes elecciones generales conducen a conclusiones muy similares.

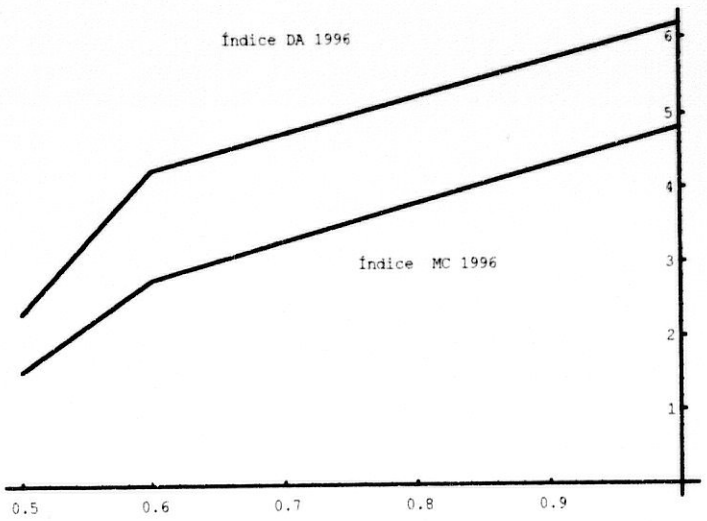


Figura 5.28: Valores de los índices de proporcionalidad MC y DA con los datos de las elecciones de 1996, para la alternativa H=400.

Capítulo 6

Circunscripciones de mayor tamaño

6.1 Introducción

Las nuevas alternativas que vamos a estudiar contemplan el cambio de circunscripción provincial por otras de mayor tamaño. Concretamente, se sustituyen las provincias por las Comunidades Autónomas. Estas alternativas suponen un cambio importante en el Sistema Electoral Español, al permitir un mayor equilibrio tanto en el valor del voto entre circunscripciones como entre partidos.

Como ya se sabe, una de las causas de que la proporcionalidad del Sistema Electoral Español sea baja se debe, entre otras causas, al tamaño pequeño de las circunscripciones electorales. Vamos a considerar una alternativa en la cual las circunscripciones van a ser las Comunidades Autónomas. Por tanto, muy pocas tienen tamaño pequeño (prácticamente sólo La Rioja, Navarra y Cantabria, además de Ceuta y Melilla). En la asignación de escaños a las Comunidades Autónomas se utiliza el método de St.Laguë que es más proporcional. Además, se impone que cada una de ellas reciba al menos 4 escaños, con objeto de que ninguna Autonomía uniprovincial tenga menos escaños que en la actualidad.

Teniendo en cuenta el censo de las Comunidades Autónomas, calculamos previamente el número de escaños que corresponden a cada una de ellas. Para ello utilizamos, el método de St. Laguë con mínimo 4 para cada Comunidad Autónoma.

6.2 Resultados obtenidos en la asignación de escaños a las Comunidades Autónomas

En las Tablas 6.1 y 6.2 se recogen las poblaciones de cada Comunidad Autónoma, la cuota correspondiente para un Parlamento con 350 escaños, en las elecciones de 1993 y 1996, el número de escaños que le corresponden con el método de St. Laguë y los escaños que actualmente tiene asignados (es decir, la suma de los escaños asignados por la Ley Electoral vigente de las provincias que la componen).

Comunidad Autónoma	Censo	Cuota 350	Asignación propuesta	Asignacón actual
Andalucía	7 145 357	62.70	62	61
Cataluña	6 158 675	54.04	54	47
Madrid	5 084 966	44.62	44	34
C. Valenciana	3 950 293	34.66	35	31
Galicia	2 785 919	24.45	24	26
Castilla-León	2 573 317	22.58	22	33
País Vasco	2 127 972	18.67	19	19
Castilla-La Mancha	1 699 715	14.92	15	20
Canarias	1.561 043	13.70	14	14
Aragón	1 198 743	10.52	10	13
Asturias	1 112 415	9.76	10	9
Extremadura	1 084 099	9.51	9	11
Murcia	1 080 986	9.49	9	9
Baleares	765 126	6.71	7	7
Cantabria	534 730	4.69	5	5
Navarra	528 837	4.64	5	5
La Rioja	266 101	2.33	4	4
Ceuta+Melilla			2	2
Totales	39 658 653	348.00	350	350

Tabla 6.1: Propuesta de asignación de 350 escaños entre las Comunidades Autónomas. Censo de 1993. Mínimo 4.

Sin más que comparar las dos últimas columnas de las Tablas 6.1 y 6.2, se deducen las siguientes consecuencias:

1. Andalucía, Galicia, País Vasco, Canarias, Asturias, Murcia, Baleares, Cantabria, Navara y la Rioja, contarían con un número de escaños muy similar al actual. La razón es que están formadas, principalmente, por provincias de tamaño medio (La Rioja se mantiene igual por el mínimo establecido).

Comunidad Autónoma	Censo	Cuota 350	Asignación propuesta	Asignación actual
Andalucía	7 314 644	63.27	63	62
Cataluña	6 226 869	53.87	53	46
Madrid	5 181 659	44.82	44	34
C.Valenciana	4 028 774	34.85	35	31
Galicia	2 825 020	24.44	24	26
Castilla-León	2 584 407	22.36	22	33
País Vasco	2 130 783	18.43	18	19
Castilla-La Mancha	1 730 717	14.97	15	20
Canarias	1 631 498	14.11	14	14
Aragón	1 205 663	10.43	10	13
Asturias	1 117 370	9.67	10	9
Murcía	1 109 977	9.60	10	9
Extremadura	1 100 538	9.52	9	11
Baleares	787 984	6.82	7	7
Cantabria	541 885	4.69	5	5
Navarra	536 192	4.64	5	5
La Rioja	268 206	2.32	4	4
Ceuta-Melilla	137 869	1.19	2	2
Totales	40 460 055	350	350	350

Tabla 6.2: Propuesta de asignación de 350 escaños entre las Comunidades Autónomas. Censo de 1995. Mínimo 4.

2. Castilla-La Mancha y Castilla-León tendrían una representación mucho menor, ya que están constituidas por un elevado número de provincias pequeñas y, como consecuencia, todas están sobrerrepresentadas actualmente. Algo parecido, aunque en menor cuantía, ocurre con Extremadura.

3. Lo contrario ocurre con las Comunidades de Madrid y Cataluña; ambas tienen una provincia, que recibe con el sistema actual muchos menos escaños que le corresponden, mientras que con la asignación propuesta se corrige esta situación. Por la misma causa, también aumenta la representación de la Comunidad Valenciana.

Con el sistema propuesto, salvo La Rioja, ninguna Comunidad tiene una variación superior a un escaño con respecto a su cuota. Sin embargo, con el sistema actual existen Comunidades que reciben 10 escaños menos de su cuota y otras que reciben hasta 11 escaños más.

Con esta asignación de escaños a las Comunidades, el coste de cada escaño en 16 de ellas está en torno a 115 000 habitantes y 66 500 en La Rioja. Luego, salvo en una Comunidad, prácticamente existe una equidad total en el valor del voto de los ciudadanos de las distintas circunscripciones.

6.3 Resultados por Comunidades Autónomas al simular con distintos métodos

A continuación se calcula la asignación de escaños a los partidos en cada circunscripción (Comunidad Autónoma) en proporción a los votos obtenidos en la misma en 1993 y 1996; es decir, los votos de cada partido en una circunscripción van a ser la suma de los votos obtenidos en 1993 y 1996 por dicho partido en las provincias que la componen.

Con objeto de tener una visión más amplia, se presentan los resultados que se obtendrían con varios métodos de la familia paramétrica $M^{\frac{1}{2}}$ (St. Laguë), $M^{\frac{2}{3}}$, $M^{\frac{3}{4}}$, $M^{\frac{4}{5}}$ y M^{1} (d'Hondt).

No se considera ningún tipo de barrera para poder participar en la asignación de escaños.

Cada tabla corresponde a una sola circunscripción y contiene el total de votos de cada partido en la circunscripción, la cuota equivalente a esos votos y las asignaciones correspondientes a los distintos métodos.

6.3.1 Elecciones de 1993

En las Tablas 6.3 a 6.19 se recogen los resultados correspondientes a la asignación en cada Comunidad Autónoma con los datos de las elecciones generales de 1993 y los tamaños de las circunscripciones los que aparecen en la Tabla 6.1.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PSOE	2 063 889	32.95	32	33	34	34	34
PP	1 195 476	19.08	19	19	19	19	19
IU	484 753	7.74	8	8	8	8	8
PA	96 513	1.54	2	1	1	1	1
PAP	43 196	0.69	1	1	0	0	0
Totales	3 883 827	62.00	62	62	62	62	62

Tabla 6.3: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: ANDALUCÍA; 62 escaños.

Consideramos las siguientes **observaciones** a la Tabla 6.3.

1. Si se utilizan uno de los métodos $M^{\frac{3}{4}}$, a M^1(d'Hondt) le corresponden 34 escaños al PSOE, siendo su cuota 32.95; por tanto, no verifica la cuota ya que pasa de 33.

2. Con el método $\frac{2}{3}$ la asignación obtenida verifica la cuota y también la propiedad α, ya que en este caso todos los restos menores que 0.60 no consiguen escaño y todos los restos mayores que 0.60 redondean por exceso; es decir, consiguen escaño. Al existir 5 partidos que consiguen escaños no podía asegurarse la propiedad α, ya que para garantizarla era necesario usar el método $\frac{4}{5}$. Ya se advirtió que aunque el método $\frac{2}{3}$ sólo garantiza la propiedad α cuando el número de partidos es menor o igual a 3, en la práctica la suele verificar siempre. Por ejemplo, el método $\frac{2}{3}$ verifica la propiedad α en los repartos de las 17 Comunidades, a pesar de que en 9 de ellas intervienen 4 partidos o más.

3. Con el método de St. Laguë, la asignación ha sido de 32-19-8-2-1 escaños, respectivamente; es decir, el resto más grande (0.95 del PSOE) correspondiente al partido más votado habría redondeado por defecto, mientras que otros tres restos más pequeños y de partidos menos votados redondearían por exceso. Una violación importante de la propiedad α.

Observaciones a la Tabla 6.4.

1. No se considera una violación de la propiedad α aproximar la cuota 9.60 del PP por 10 mientras que se aproxima la cuota 2.63 (de ERC) por 2, la razón es que aunque

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PSOE	1 277 838	19.65	19	20	20	20	20
CiU	1 165 783	17.92	18	18	18	18	18
PP	624 493	9.60	10	10	10	10	10
IU	273 444	4.20	4	4	4	4	4
ERC	171 042	2.63	3	2	2	2	2
Totales	3 512 600	54.00	54	54	54	54	54

Tabla 6.4: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CATALUÑA; 54 escaños.

el resto de esta última es mayor, se acepta que los partidos más votados puedan ser beneficiados con respecto a los menos votados.

2. Los resultados con el método de St.Laguë producen una nueva violación de la propiedad α, ya que el PSOE, siendo más votado y teniendo un resto mayor que ERC, es perjudicado en favor de ERC. Las asignaciones obtenidas con los restantes métodos verifican la propiedad α y también la cuota en este caso.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	1 373 042	20.04	20	20	20	20	21
PSOE	1 093 015	15.95	16	16	16	16	16
IU	455 685	6.65	7	7	7	7	6
CDS	93 347	1.36	1	1	1	1	1
Totales	3 015 089	44.00	44	44	44	44	44

Tabla 6.5: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: MADRID; 44 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.5.

1. La entrada del CDS a participar en el reparto se debe sólo a que se ha eliminado la barrera del 3% y, por tanto, tiene derecho a participar.

2. Todos los métodos dan el mismo reparto al aplicarlos a la circunscripción de Madrid, excepto el método d'Hondt, el cual asigna 21 escaños al PP en detrimento de IU, ganando el PP una fracción de escaño igual a 0.96 escaños.

3. En este caso, ningún método incumple la propiedad α.

4. Si las cuotas se hubiesen calculado teniendo también en cuenta los votos útiles de los restantes partidos, la cuota del PP es inferior a 20 y d'Hondt le asigna 21 escaños; es decir, violaría la cuota superior.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	987 317	15.08	15	15	15	15	15
PSOE	935 325	14.28	14	14	14	15	15
IU	256 929	3.92	4	4	4	4	4
UV	112 341	1.72	2	2	2	1	1
Totales	2 291 912	35.00	35	35	35	35	35

Tabla 6.6: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: C. VALENCIANA; 35 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.6.

1. El PP, que es el partido más votado, obtiene los mismos escaños con todos los métodos. El PSOE que fue el segundo partido más votado, recibe una prima de 0.72 escaños con los métodos $\frac{4}{5}$ y d'Hondt, en detrimento de UV.

2. Todos los métodos verifican la cuota y la propiedad α.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	569 899	11.80	12	12	12	12	12
PSOE	746 964	9.01	9	9	9	9	9
BNG	126 965	2.01	2	2	2	2	2
IU	74 605	1.18	1	1	1	1	1
Totales	1 518 433	24.00	24	24	24	24	24

Tabla 6.7: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: GALICIA; 24 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.7.

- BNG e IU consiguen la representación que les correponde, al sumar los votos de las cuatro provincias. El resultado del reparto es el mismo con todos los métodos. Todas las asignaciones verifican la cuota y la propiedad α.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	771 705	10.86	11	11	11	11	11
PSOE	597 961	8.42	8	8	8	8	9
IU	125 417	1.77	2	2	2	2	1
CDS	67 512	0.95		1	1	1	1
Totales	1 562 595	22.00	22	22	22	22	22

Tabla 6.8: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CASTILLA-LEÓN; 22 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.8.

1. Todas las asignaciones obtenidas verifican la propiedad α y la cuota.

2. Con IU y CDS ocurre en esta Comunidad lo mismo que con BNG e IU en Galicia. Al sumar los votos de todas las provincias obtienen una representación similar a su cuota.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PSOE	293 442	4.95	5	5	5	5	5
PNV	287 908	4.86	5	5	5	5	5
PP	175 758	2.97	3	3	3	3	3
HB	174 655	2.95	3	3	3	3	3
EA	117 856	1.99	2	2	2	2	2
IU	75 572	1.28	1	1	1	1	1
Totales	1 125 191	19.00	19	19	19	19	19

Tabla 6.9: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: PAÍS VASCO; 19 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.9.

- En esta ocasión no hay diferencias entre los resultados que obtiene cada uno de los partidos con los respectivos repartos. La entrada de IU aumenta, más aún, la fragmentación en el País Vasco. Todas las asignaciones verifican la cuota y la propiedad α.

Observaciones a la Tabla 6.10.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PSOE	487 810	7.08	7	7	7	7	7
PP	463 295	6.73	7	7	7	7	7
IU	81 888	1.19	1	1	1	1	1
Totales	1 032 993	15.00	15	15	15	15	15

Tabla 6.10: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CASTILLA-LA MANCHA; 15 escaños.

- Todos los métodos vuelven a dar el mismo resultado y todas las asignaciones verifican tanto la cuota como la propiedad α. La diferencia con el resultado actual es que IU consigue representación.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	274 666	5.03	5	5	5	5	5
PSOE	241 648	4.43	4	4	4	4	5
CC	207 077	3.80	4	4	4	4	4
IU	40 314	0.74	1	1	1	1	0
Totales	763 705	14.00	14	14	14	14	14

Tabla 6.11: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CANARIAS; 14 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.11.

- No existen variaciones importantes entre las asignaciones obtenidas con los diferentes métodos; sólo que, nuevamente, la tercera fuerza de ámbito nacional consigue representación al sumar los votos de todas las islas, excepto con el método d'Hondt. Todas las asignaciones verifican la cuota y la propiedad α.

Observaciones a la Tabla 6.12.

- En Aragón todos los métodos dan la misma asignación y todos los partidos obtienen un número de escaños similar a su cuota no produciendose violación de la cuota ni de la propiedad α con ninguno de los métodos.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PSOE	261 108	3.58	4	4	4	4	4
PP	250 105	3.43	3	3	3	3	3
PAR	144 544	1.98	2	2	2	2	2
IU	73 820	1.01	1	1	1	1	1
Totales	729 577	10.00	10	10	10	10	10

Tabla 6.12: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones del los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: ARAGÓN; 10 escaños.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PSOE	271 877	4.27	4	4	4	4	5
PP	258 355	4.05	4	4	4	4	4
IU	106 757	1.68	2	2	2	2	1
Totales	636 989	10.00	10	10	10	10	10

Tabla 6.13: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: ASTURIAS; 10 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.13.

1. En la asignación de escaños en Asturias, salvo d'Hondt, todos los métodos dan igual respuesta. El método d'Hondt ha otorgado al PSOE una prima de 0.73 escaños en detrimento de IU; a pesar de ello, se verifica tanto la cuota como la propiedad α para todos los métodos.

Partidos	votos	cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PSOE	342 977	4.88	5	5	5	5	5
PP	238 191	3.38	3	3	3	3	4
IU	52 214	0.74	1	1	1	1	0
Totales	633 382	9.00	9	9	9	9	9

Tabla 6.14: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones del los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: EXTREMADURA; 9 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.14.

1. Como en los casos anteriores, con el método d'Hondt, IU queda muy perjudicada.
2. Los demás métodos, al ser más proporcionales, asignan a IU un escaño. Con frecuencia vemos que a medida que el método es más proporcional la posibilidad de que la tercera fuerza política obtenga un escaño es mayor.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	310 507	4.46	4	4	4	4	4
PSOE	253 324	3.63	4	4	4	4	4
IU	63 717	0.91	1	1	1	1	1
Totales	627 548	9.00	9	9	9	9	9

Tabla 6.15: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: MURCIA; 9 Escaños.

Observaciones a las Tablas 6.15, 6.16, 6.17, 6.18 y 6.19.

- Tanto la Comunidad de Murcia como todas las que restan hasta el final son uniprovinciales y, además, tienen en estas alternativas el mismo número de representates que con el sistema actual. Los resultados coinciden en todas ellas con todos los métodos. Además, el tamaño, después de Baleares, es pequeño, de ahí que el número de partidos que consiguen escaño sea sólo 2 en todas ellas, salvo en Navarra. Salvo en esta Comunidad las asignaciones obtenidas con todos los métodos son idénticas, lo que corrobora la poca influencia del método usado cuando el tamaño de la circunscripción es pequeño.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	191 461	4.04	4	4	4	4	4
PSOE	140 145	2.96	3	3	3	3	3
Totales	331 606	7.00	7	7	7	7	7

Tabla 6.16: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: BALEARES; 7 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.18.

1. Con el método d'Hondt, HB no ha obtenido ningún escaño, teniendo un resto de a 0.6. En este caso, el método ha asignado el escaño número 5 al partido más votado, aunque el resto que tiene 0.22.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	M^{1} *d'Hondt*
PSOE	122 418	2.50	3	3	3	3	3
PP	121 967	2.50	2	2	2	2	2
Totales	244 385	5.00	5	5	5	5	5

Tabla 6.17: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CANTABRIA; 5 escaños.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	112 228	2.22	2	2	2	2	3
PSOE	108 305	2.14	2	2	2	2	2
HB	32 221	0.64	1	1	1	1	0
Totales	252 754	5.00	5	5	5	5	5

Tabla 6.18: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción:NAVARRA; 5 escaños.

2. Los demás métodos, al ser más proporcionales, asignan 1 escaño a HB ya que tiene un resto mucho mayor que los otros dos partidos.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.Laguë*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	78 792	2.21	2	2	2	2	2
PSOE	64 037	1.79	2	2	2	2	2
Totales	142 829	4.00	4	4	4	4	4

Tabla 6.19: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: LA RIOJA; 4 escaños.

6.3.2 Resultados globales de las alternativas en las elecciones de 1993

La Tabla 6.20 resume los resultados obtenidos por cada partido con los datos de la elección general de 1993, por la aplicación de los métodos, St.Laguë, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$,$\frac{4}{5}$, d'Hondt y la asignación actual, cuando consideramos como circunscripciones las Comunidades Autónomas, para una Cámara de 350 Diputados, distribuidos entre las Comunidades Autónomas en proporción al censo de cada una (usando St.Laguë para esta proporcionalidad), con la excepción de que cada Comunidad debe recibir, al menos, 4 representates.

Partido	Votos totales	Cuota	$M^{\frac{1}{2}}$ St.L.	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} d'H.	Sistema actual
PSOE	9 096 815	140.98	142	145	145	146	**150**	159
PP	8 197 342	127.04	127	126	127	127	**127**	141
IU	2 245 444	34.80	34	34	34	34	**31**	18
CiU	1 163 221	18.03	18	18	18	18	**18**	17
CDS	414 000	6.42	2	2	2	2	**2**	0
PNV	300 308	4.65	5	5	5	5	**5**	5
CC	206 953	3.21	4	4	4	4	**4**	4
HB	206 296	3.20	4	4	4	4	**3**	2
PAR	144 241	2.22	2	2	2	2	**2**	1
BNG	126 965	1.97	2	2	2	2	**2**	0
ERC	121 972	1.89	3	2	2	2	**2**	1
EA	117 859	1.83	2	2	2	2	**2**	1
UV	102 714	1.59	2	2	2	1	**1**	1
PA	96 513	1.50	2	1	1	1	**1**	0
PAP	43 196	0.67	1	1	0	0	**0**	0
Totales	22 583 839	350.00	350	350	350	350	350	350

Tabla 6.20: Datos de las elecciones generales de 1993. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, d'Hondt y el reparto actual cuando las circunscripciones son las Comunidades Autónomas. Incluye también los resultados de Ceuta y Melilla.

- La prima obtenida por el PP en 1993 fue de 14 escaños con el sistema actual. Con las alternativas desarrolladas su asignación ha variado, a lo sumo, 1 escaño con respecto a su cuota.

6.3.3 Elecciones de 1996

De forma análoga a como hemos hecho con los datos de las elecciones de 1993, las Tablas 6.21 a 6.37 recogen los resultados correspondientes a la asignación que en cada Comunidad Autónoma han obtenido los distintos partidos que pueden intervenir en el reparto de escaños, con los datos de las elecciones generales de 1996 y tamaño de las circunscripciones que aparecen en la Tabla 6.2.

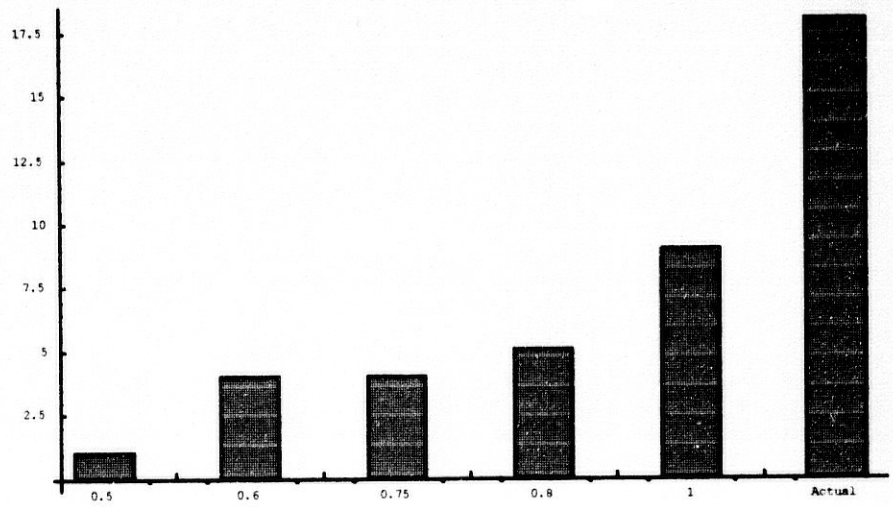


Figura 6.1: Prima obtenida por el primer partido en 1993, PSOE con los diferentes métodos y circunscripciones las Comunidades Autónomas. Comparación con la prima actual (última barra).

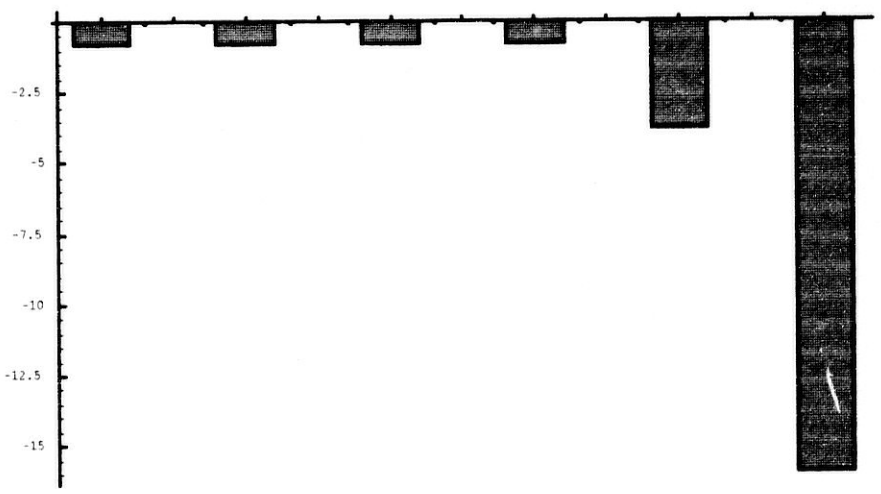


Figura 6.2: Penalización que obtiene la tercera fuerza en 1993, IU, con los diferentes métodos y circunscripciones las Comunidades Autónomas. Comparación con la penalización que obtiene con el sistema actual (última barra).

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PSOE	2 017 857	29.80	30	30	30	30	30
PP	1 530 057	22.60	22	23	23	23	23
IU	582 970	8.61	9	8	8	8	8
PA	134 800	1.99	2	2	2	2	2
Totales	4 265 684	63.00	63	63	63	63	63

Tabla 6.21: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: ANDALUCÍA; 63 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.21.

1) No se considera una violación de la propiedad α aproximar la cuota 22.60 del PP por 23, mientras que se aproxima la cuota 8.61 de IU por 8, ya que, aunque el resto de IU sea mayor, se acepta que los partidos más votados puedan ser beneficiados con respecto a los menos votados.

2) Sólo el método de St. Laguë da resultados distintos a los demás métodos. Todos los repartos verifican la cuota y la propiedad α. Si bién St. Laguë habría incumplido esta última si el PP hubiese recibido algunos votos más.

3) El Partido Andalucista entraría en el Congreso con una representación muy similar a su cuota de votos.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PSOE	1 531 143	21.13	21	21	21	21	21
CiU	1 151 633	15.89	16	16	16	16	16
PP	698 400	9.64	10	10	10	10	10
IU	296 985	4.10	4	4	4	4	4
ERC	162 545	2.24	2	2	2	2	2
Totales	3 840 706	53.00	53	53	53	53	53

Tabla 6.22: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CATALUÑA; 53 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.22.

- Poco que resaltar en este caso, ya que los resultados son los mismos con los cinco métodos y, además, el número de escaños que recibe cada partido es similar a su cuota; las asignaciones verifican la cuota y la propiedad α.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PP	1 642 489	22.32	23	23	23	23	23
PSOE	1 046 904	14.23	14	14	14	14	14
IU	547 901	7.45	7	7	7	7	7
Totales	3 237 294	44.00	44	44	44	44	44

Tabla 6.23: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: MADRID; 44 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.23.

- En Madrid, en estas elecciones, sólo tres partidos de ámbito estatal intervienen en el reparto. Lo único que podemos resaltar es que el único partido beneficiado ha sido el más votado, salvo con el método de St. Laguë que habría sido el menos votado. Todos los repartos verifican la cuota y la propiedad α.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PP	1 130 813	15.90	16	16	16	16	16
PSOE	990 993	13.93	14	14	14	14	14
IU	286 582	4.03	4	4	4	4	4
UV	81 350	1.14	1	1	1	1	1
Totales	2 489 738	35.00	35	35	35	35	35

Tabla 6.24: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: C. VALENCIANA; 35 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.24.

- La asignación con todos los métodos es la misma. Todos los partidos alcanzan su cuota, PP y PSOE la cuota superior y UV e IU su cuota inferior. Se verifican la cuota y la propiedad α.

Observaciones a la Tabla 6.25.

- Con todos los métodos, excepto con el método d'Hondt, IU obtiene un escaño; sin embargo, el método d'Hondt no le asigna ningún escaño y viola la cuota superior para el PP. Todos los repartos verifican la propiedad α.

Observaciones a la Tabla 6.26.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	827 405	11.79	12	12	12	12	13
PSOE	574 491	8.19	8	8	8	8	8
BNG	220 147	3.14	3	3	3	3	3
IU	62 253	0.88	1	1	1	1	0
Totales	1 684 296	24.00	24	24	24	24	24

Tabla 6.25: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: GALICIA; 24 escaños.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PP	878 981	11.85	12	12	12	12	12
PSOE	598 869	8.08	8	8	8	8	8
IU	153 705	2.07	2	2	2	2	2
Totales	1 631 555	22.00	22	22	22	22	22

Tabla 6.26: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CASTILLA-LEÓN; 22 escaños.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'Hondt*
PNV	315 793	4.66	5	5	5	5	5
PSOE	298 499	4.41	4	5	5	5	5
PP	231 286	3.41	3	3	3	3	3
HB	154 853	2.28	2	2	2	2	2
IU	116 133	1.71	2	2	2	2	2
EA	103 628	1.53	2	1	1	1	1
Totales	1 220 192	18.00	18	18	18	18	18

Tabla 6.27: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: PAIS VASCO; 18 escaños.

1) Todas las asignaciones son idénticas, verifican la cuota y la propiedad α.

Observaciones a la Tabla 6.27.

- En esta Comunidad, el electorado está muy fragmentado. No se viola ni la la cuota ni la propiedad α.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PP	534 983	7.21	7	7	7	7	7
PSOE	483 251	6.51	7	7	7	7	7
IU	95 199	1.28	1	1	1	1	1
Totales	1 113 433	15.00	15	15	15	15	15

Tabla 6.28: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CASTILLA-LA MANCHA; 15 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.28.

- Con todos los métodos se obtiene el mismo reparto. Además no se viola ni la cuota ni la propiedad α. IU conseguiría representación en la Comunidad de Castilla-La Mancha.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PP	330 513	5.37	5	5	5	5	6
PSOE	263 249	4.27	4	4	4	4	4
CC	220 418	3.58	4	4	4	4	4
IU	48 172	0.78	1	1	1	1	0
Totales	862 352	14.00	14	14	14	14	14

Tabla 6.29: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CANARIAS; 14 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.29.

En la Comunidad de Canarias, los resultados de la asignación con los distintos métodos son los mismos, excepto con el método d'Hondt, que a IU, con resto mayor que todos, no le asigna escaño en favor del PP.

Observaciones a la Tabla 6.30.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 d'Hondt
PP	370 975	5.22	5	5	5	5	5
PSOE	268 189	3.78	4	4	4	4	4
IU	70 775	1.00	1	1	1	1	1
Totales	709 939	10.00	10	10	10	10	10

Tabla 6.30: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: ARAGÓN; 10 escaños.

- En Aragón, todas las asignaciones son idénticas y verifican la cuota y la propiedad α. El tercer partido también conseguiría representación en esta Comunidad.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 d'Hondt
PP	297 079	4.26	4	4	4	4	5
PSOE	288 558	4.13	4	4	4	4	4
IU	112 339	1.61	2	2	2	2	1
Totales	697 876	10.00	10	10	10	10	10

Tabla 6.31: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: ASTURIAS; 10 escaños.

Observaciones a la Tabla 6.31.

1) Al aplicar el método d'Hondt, el PP obtiene una prima de 0.74 escaños en detrimento de IU que no consigue su segundo escaño, teniendo una fracción de resto 0.61 mucho mayor que la del PP que es 0.26.

2) Con los demás métodos, al ser más proporcionales, la tercera fuerza política alcanza su segundo escaño.

Observaciones a la Tabla 6.32.

- Con el método d'Hondt, IU no obtiene representación a pesar de que su resto sea próximo a 1. Con los demás métodos el terecer partido consigue representación en Extremadura en detrimento del PSOE.

Observaciones a la Tabla 6.33.

- En la Comunidad de Murcia, todos los partidos obtienen la misma asignación con todos los métodos.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 d'Hondt
PSOE	339 903	4.47	4	4	4	4	5
PP	282 698	3.71	4	4	4	4	4
IU	62 502	0.82	1	1	1	1	0
Totales	685 103	9.00	9	9	9	9	9

Tabla 6.32: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hond.t Circunscripción: EXTREMADURA; 9 escaños.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 d'Hondt
PP	350 337	5.07	5	5	5	5	5
PSOE	266 738	3.86	4	4	4	4	4
IU	73 961	1.07	1	1	1	1	1
Totales	691036	10.00	10	10	10	10	10

Tabla 6.33: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: MURCIA; 10 escaños.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 d'Hondt
PP	194 859	3.56	3	4	4	4	4
PSOE	155 244	2.83	3	3	3	3	3
IU	33 224	0.61	1	0	0	0	0
Totales	383 327	7.00	7	7	7	7	7

Tabla 6.34: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: BALEARES; 7 escaños.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 d'Hondt
PP	175 651	2.59	2	3	3	3	3
PSOE	123 940	1.83	2	2	2	2	2
IU	39 541	0.58	1	0	0	0	0
Totales	339 132	5.00	5	5	5	5	5

Tabla 6.35: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5 y d'Hondt. Circunscripción: CANTABRIA; 5 escaños.

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 d'Hondt
PP	120 335	2.33	2	2	2	2	2
PSOE	98 102	1.89	2	2	2	2	2
IU	40 354	0.78	1	1	1	1	1
Totales	258 791	5.00	5	5	5	5	5

Tabla 6.36: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4,4/5 y d'Hondt. Circunscripción:NAVARRA; 5 escaños

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 d'Hondt
PP	88 069	2.08	2	2	2	2	2
PSOE	65 311	1.55	2	2	2	2	2
IU	15 530	0.37	0	0	0	0	0
Totales	168 910	5.00	4	5	4	4	4

Tabla 6.37: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4,4/5 y d'Hondt. Circunscripción:LA RIOJA; 4 escaños.

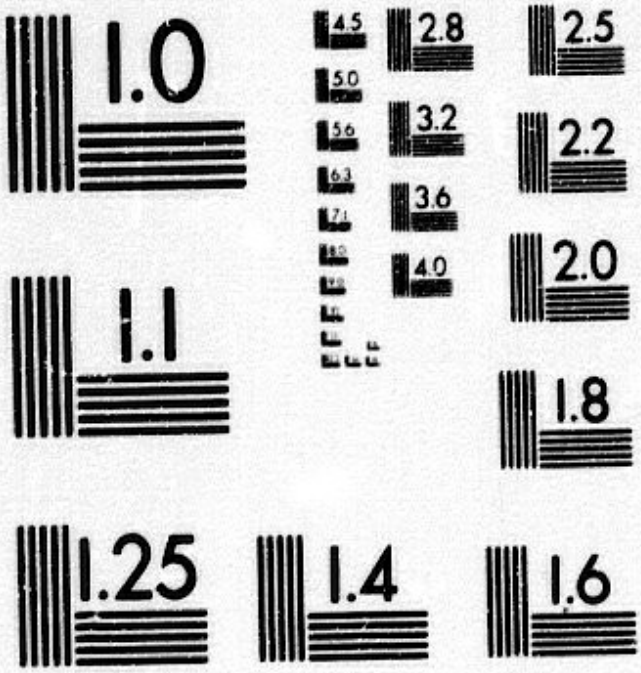
Observaciones a las Tablas 6.34 a 6.37.

- Tanto la Comunidad de Baleares, como las tres restantes, Cantabria, Navarra y La Rioja, son uniprovinciales. El resultado con los diferentes métodos es idéntico salvo para las dos primeras que el método de St. Laguë da representación al tercer partido, IU, mientras que con los restantes métodos sólo consiguen representación en Baleares y Cantabria PP y PSOE. En cuanto al reparto obtenido en Cantabria con St. Laguë hay que hacer notar una nueva violación de la propiedad α ya que asigna 1 representante a IU con cuota 0.58 y 2 al PP con cuota 2.59.

6.3.4 Resultados globales de las alternativas en las elecciones de 1996

La Tabla 6.38 resumen los resultados obtenidos por cada partido con los datos de la elección general de 1996, por la aplicación de los métodos, St.Laguë, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$,$\frac{4}{5}$, d'Hondt y la asignación actual, cuando consideramos como circunscripciones las Comunidades Autónomas, para una Cámara de 350 Diputados, distribuidos entre las Comunidades Autónomas en proporción al censo de cada una (usando St.Laguë para esta proporcionalidad), con la limitación de que cada Comunidad debe recibir, al menos 4 representates.

- La asignación del PSOE con los diferentes métodos, apenas difiere de 1 escaño con respecto a su cuota. Con el sistema actual la prima obtenida por el PSOE en 1996



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PP	120 335	2.33	2	2	2	2	2
PSOE	98 102	1.89	2	2	2	2	2
IU	40 354	0.78	1	1	1	1	1
Totales	258 791	5.00	5	5	5	5	5

Tabla 6.36: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4,4/5 y d'Hondt. Circunscripción:NAVARRA; 5 escaños

Partidos	Votos	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^1 *d'Hondt*
PP	88 069	2.08	2	2	2	2	2
PSOE	65 311	1.55	2	2	2	2	2
IU	15 530	0.37	0	0	0	0	0
Totales	168 910	5.00	4	5	4	4	4

Tabla 6.37: Datos de las elecciones generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4,4/5 y d'Hondt. Circunscripción:LA RIOJA; 4 escaños.

Observaciones a las Tablas 6.34 a 6.37.

- Tanto la Comunidad de Baleares, como las tres restantes, Cantabria, Navarra y La Rioja, son uniprovinciales. El resultado con los diferentes métodos es idéntico salvo para las dos primeras que el método de St. Laguë da representación al tercer partido, IU, mientras que con los restantes métodos sólo consiguen representación en Baleares y Cantabria PP y PSOE. En cuanto al reparto obtenido en Cantabria con St. Laguë hay que hacer notar una nueva violación de la propiedad α ya que asigna 1 representante a IU con cuota 0.58 y 2 al PP con cuota 2.59.

6.3.4 Resultados globales de las alternativas en las elecciones de 1996

La Tabla 6.38 resumen los resultados obtenidos por cada partido con los datos de la elección general de 1996, por la aplicación de los métodos, St.Laguë, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$,$\frac{4}{5}$, d'Hondt y la asignación actual, cuando consideramos como circunscripciones las Comunidades Autónomas, para una Cámara de 350 Diputados, distribuidos entre las Comunidades Autónomas en proporción al censo de cada una (usando St.Laguë para esta proporcionalidad), con la limitación de que cada Comunidad debe recibir, al menos 4 representates.

- La asignación del PSOE con los diferentes métodos, apenas difiere de 1 escaño con respecto a su cuota. Con el sistema actual la prima obtenida por el PSOE en 1996

Partidos	Votos totales	Cuotas	$M^{\frac{1}{2}}$ *St.L.*	$M^{\frac{2}{3}}$	$M^{\frac{3}{4}}$	$M^{\frac{4}{5}}$	M^{1} *d'H.*	*Asig. Actual*
PP	9 716 006	139.55	139	142	142	142	**146**	156
PSOE	9 425 678	135.38	135	136	136	136	**136**	141
IU	2 639 774	37.92	39	36	36	36	**32**	21
CiU	1 151 633	16.54	16	16	16	16	**16**	16
PNV	318 951	4.58	5	5	5	5	**5**	5
CC	220 418	3.16	4	4	4	4	**4**	4
BNG	220 147	3.16	3	3	3	3	**3**	2
HB	181 304	2.60	2	2	2	2	**2**	2
ERC	162 545	2.34	2	2	2	2	**2**	1
PA	134 800	1.94	2	2	2	2	**2**	0
EA	115 861	1.66	2	1	1	1	**1**	1
UV	81 350	1.17	1	1	1	1	**1**	1
Totales	24 368 467	350.00	350	350	350	350	**350**	350

Tabla 6.38: Datos de las generales de 1996. Comparaciones de los métodos 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, d'Hondt y el reparto actual cuando las circunscripciones son las Comunidades Autónomas. Incluye también los resultados de Ceuta y Melilla.

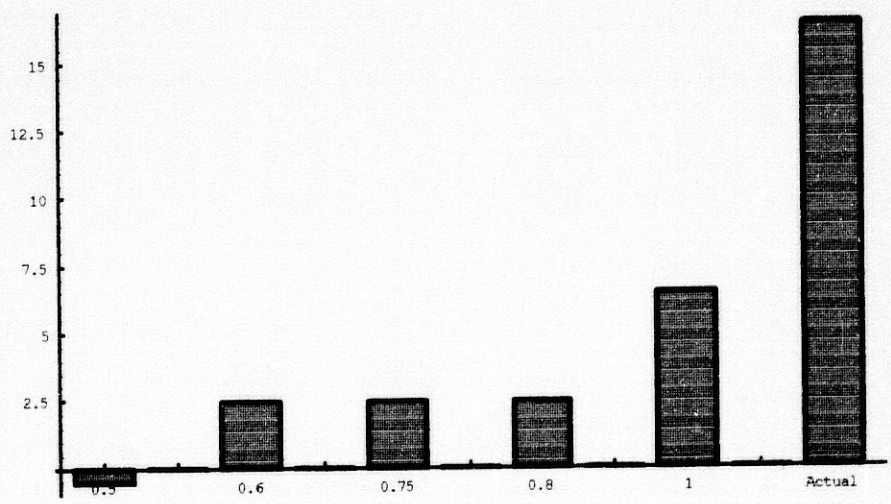


Figura 6.3: Prima obtenida por el primer partido e 1996, PP, con los diferentes métodos y cicunscripciones las Comunidades Autónomas. Comparación con la prima actual (última barra).

es superior a 6 escaños.

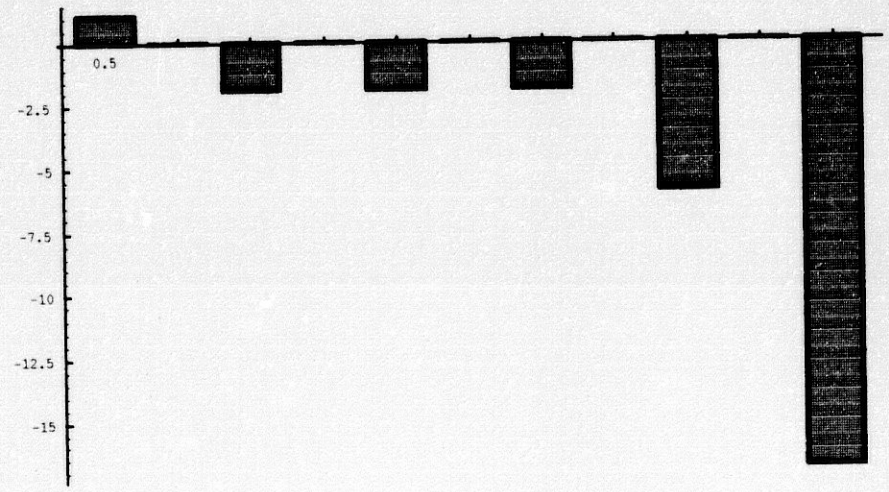


Figura 6.4: Penalización que obtiene la tercera fuerza en 1996, IU, con los diferentes métodos y circunscripciones las Comunidades Autónomas. Comparación con la penelización que obtiene con el sistema actual.

De la observación de los datos que se recogen en la Tabla 6.38, vemos cómo en 1996 si las circunscripciones hubiesen sido las Comunidades Autónomas también mejora la representación de IU, ya que la asignación que le da el método d'Hondt es de 11 escaños más que los que actualmente tiene. También observamos que al aumentar el tamaño de las circunscripciones, la proporcionalidad del sistema ha aumentado bastante; en la sección 6.4 se han calculado los valores de los índices *MC* y *DA* correspondientes.

Se ha resaltado en negrita la columna correspondiente a la suma de las asignaciones con el método d'Hondt en las 17 Comunidades, además de Ceuta y Melilla, por ser el método que utiliza el sistema electoral y así poder comparar la asignación que ha otorgado a los partidos con esta alternativa y la asignación actual que tiene cada partido.

La última columna de las Tablas 6.20 y 6.38 contiene los resultados obtenidos por los distintos partidos en las elecciones generales de 1993 y 1996, con el sistema electoral actual.

6.4 Desproporcionalidad

Nuevamente vamos a calcular el valor de los índices *MC* y *DA* para las distintas alternativas.

Elecciones de 1993						
t	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	1	actual
MC	0.998	1.268	1.256	1.398	2.187	5.78
DA	1.577	2.004	1.92	2.08	2.992	9.02
Elecciones de 1996						
t	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	1	Actual
MC	0.596	0.706	0.706	0.706	1.797	4.82
DA	1.069	1.255	1.255	1.255	2.398	6.22

Tabla 6.39: Índices de proporcionalidad.

De la observación de los datos de la Tabla 6.39 extraemos las siguientes conclusiones:

- Podemos corroborar, una vez más, que el método de St. Laguë es el más proporcional de los métodos basados en divisores que estamos considerando y el método de d'Hondt el menos proporcional.
- Al aumentar el tamaño de las circunscripciones aumenta mucho la proporcionalidad del sistema electoral basta comparar las dos últimas columnas de la Tabla 6.39.
- Con este cambio en el tamaño de las circunscripciones, aunque varias sigan siendo pequeñas, el uso de un método electoral u otro tiene una repercusión mucho menor. Por eso la causa de la desproporcionalidad del sistema electoral español no es exclusivamente debida al uso del método d'Hondt sino que afecta en mayor medida el tamaño de las circunscripciones provinciales.

6.5 Conclusiones

1. Para las alternativas que se obtienen considerando como circunscripciones las Comunidades Autónomas y cualquiera de los métodos, la tercera fuerza de ámbito estatal recupera la mayoría de los escaños que pierde (con respecto a su cuota) con el sistema electoral actual.
2. Salvo el PSOE y el PP que reciben unos cuantos escaños más de su cuota y el CDS que recibe unos cuantos menos, todas las fuerzas reciben un número de escaños muy similar a su cuota.

3. En 1993, la cuarta fuerza de ámbito estatal vuelve a perder la mayoría de los escaños correspondientes a su cuota, a pesar de tener más votos que cualquier partido nacionalista excepto CiU.

4. Para la mayoría de los partidos nacionalistas no cambia su representación.

5. En 1993 aumenta la fragmentación del Parlamento con la presencia de BNG, PA y PAP; por tanto, aumentan las dificultades para conseguir mayorías absolutas, si bién existen más posibilidades de coalición. En 1996 entraría en el Parlamento el PA.

6. La desproporcionalidad ha disminuido de forma muy considerable con todos los métodos (incluido d'Hondt).

7. El gran tamaño de la mitad de las circunscripciones, junto con la eliminación de la barrera mínima, puede inducir a la aparición de un mayor número de pequeños partidos.

8. El hecho de que las circunscripciones sean las Comunidades Autónomas aleja a los candidatos de los electores y lo más seguro es que los partidos tengan más poder aún frente a los electores ya que, al ser menos listas y más grandes, el número de "escaños dudosos" es menor.

9. El método d'Hondt habría violado en varias ocasiones la cuota superior.

10. El método de St Laguë no ha violado la cuota en ninguna ocasión pero no ha cumplido la propiedad α en varias asignaciones.

11. El método $\frac{2}{3}$ no habría violado la cuota en ninguna ocasión y ha verificado la propiedad α en todas ellas.

Capítulo 7

Adaptación del Sistema Electoral Alemán a España

7.1 Breve descripción del Sistema Electoral Alemán

El Sistema Electoral Alemán se basa en una elección mixta, en el sentido de que una parte de los diputados son elegidos mediante el sistema mayoritario en circunscripciones uninominales, *distritos*, y la otra parte mediante listas de partido en circunscripciones plurinominales, *los Länder*, utilizando un método proporcional con respecto a la totalidad de los votos de los partidos y a la totalidad de los escaños de la Cámara.

Dicha proporcionalidad sólo está condicionada a asignar a cada partido, como mínimo, el número de diputados conseguido en la elección con el sistema mayoritario. Por tanto, el Sistema Electoral Alemán es altamente proporcional; con cualquiera de los índices de proporcionalidad usados se encuentra en los primeros puestos. El elector emite dos votos

1. Uno, a un candidato de su distrito,
2. otro, en favor de una de las listas de los partidos que se presentan en su Land (Estado Federal).

Puede votar a un candidato y a una lista pertenecientes a partidos diferentes, aunque no sea habitual. Los candidatos de los distritos pueden aparecer en la lista del Land correspondiente, de tal forma que si un candidato de un partido no consigue el escaño del distrito en el que compite puede obtenerlo si aparece bien situado en la lista de su partido.

La Cámara tiene un tamaño de 658 diputados, aunque en función de los resultados en los distritos algún partido puede ganar más escaños que los que proporcionalmente le

corresponden, con lo que aparecen *diputados sobrantes* y la Cámara puede tener más de 658 diputados.

El país se divide en 329 distritos uninominales. La elección del diputado del distrito se hace por mayoría simple; es decir, en cada distrito, el candidato más votado consigue el escaño de diputado, al que llamaremos *diputado por mayoría*.

La asignación proporcional se realiza *combinada* con la mayoritaria. La proporcionalidad se establece en función de los votos obtenidos por los partidos con sus listas, no con los votos obtenidos por el sistema mayoritario en los distritos, y se aplica con respecto a la totalidad de los diputados (los 658). La diferencia entre el valor obtenido y el número de diputados por mayoría es el número de diputados de la lista del partido correspondiente. Se introduce la siguiente restricción: si en el reparto proporcional a un partido le corresponden menos escaños de los obtenidos mediante el sistema mayoritario, no recibe diputados de lista pero no pierde ninguno de los escaños obtenidos por el sistema mayoritario, en tal caso es cuando aparecen diputados sobrantes.

A los diputados procedentes de las listas de partido obtenidos mediante la proporcionalidad combinada los denominamos *diputados de partido*. El método utilizado en Alemania para la asignación de los diputados de partido es el de Niemeyer, conocido en España como Proporcional Puro y como Restos Mayores, en EE.UU. como método de Hamilton. Al establecer la proporcionalidad con respecto al número total de escaños asignados a cada Estado Federal (Land) el método consigue una alta proporcionalidad a pesar de elegir la mitad de sus representates mediante el sistema mayoritario. Para una descripción completa del Sistema Electoral Alemán, así como para conocer los resultados de varias convocatorias electorales puede consultarse [61].

La adaptación de un sistema electoral, en este caso el alemán, a un país no consiste en "copiarlo", literalmente hablando, sino en observar los aspectos y propiedades más significativos del mismo y tratar de definir un sistema que los reproduzca y respete al máximo las peculiaridades propias del país. En tal sentido, vamos a desarrollar alternativas al Sistema Electoral Español cuya similitud con el sistema alemán se concreta en que:

1. Una parte de los diputados, aproximadamente la mitad de ellos, se eligen por el sistema mayoritario en distritos uninominales.

2. Para la elección de los restantes diputados, los partidos presentan listas de candidatos en las circunscripciones plurinominales (preferiblemente de tamaño grande). El método de asignación de estos diputados tratará de conseguir que la representación total de cada partido (incluidos los diputados obtenidos por el sistema mayoritario)

sea proporcional a los votos totales obtenidos en las listas y contemplará que cada partido reciba, al menos, tantos diputados como distritos en los que ha vencido. Es decir, la segunda asignación está condicionada por los resultados obtenidos en la primera.

Con sólo estos requisitos se pueden elaborar muchas alternativas; no obstante, la mayoría de ellas consistirían en pequeñas variantes de las que desarrollaremos a continuación. Nos centraremos, fundamentalmente, en la parte técnica del reparto, entendiendo que la elaboración de una alternativa para plasmarla en ley electoral debía extenderse en otros aspectos complementarios. Por ejemplo, no vamos a entrar en cómo resolver actuaciones de tipo picaresco como sería que un candidato se presente como independiente sin serlo. Tampoco nos vamos a preocupar aquí de si la elección en los distritos se hace por mayoría simple a una vuelta, o se utiliza un procedimiento diferente.

Ni siquiera nos preocuparemos en delimitar los distritos, pues sería una tarea enorme para no tener garantías de usarlos en la práctica. Ante esto, cabe pensar que no podremos simular resultados. Pero de hecho, aunque tuviésemos los distritos definidos la simulación con datos procedentes de elecciones en circunscripciones plurinominales no serían fiables, porque el comportamiento de los electores es diferente frente a sistemas electorales diferentes. Basta pensar que los simpatizantes de un mismo partido tienen comportamiento diferente, en el momento de votar, cuando dicho partido tiene muchas posibilidades de obtener escaño que cuando ese partido no tiene casi ningunas posibilidades de conseguir escaño.

Para simular resultados en los distritos recurriremos a un modelo estadístico usado en [29] para estimar escaños por mayoría conociendo sólo el porcentaje de votos totales de los partidos en México. Sólo que en nuestro caso en lugar de votos totales pueden usarse votos a nivel de circunscripciones plurinominales.

A continuación nos centramos en estudiar los distintos factores que intervienen a la hora de adaptar a España el Sistema Electoral Alemán (S.E.A.).

7.2 Distritos y circunscripciones en España para adaptar el S.E.A.

La historia, la cultura, la tradicción y la división político-administrativa de España deben ser considerados a la hora de diseñar un sistema electoral. Por ejemplo, supongamos que

se han definido los distritos y que el electorado de uno de ellos pertenece a dos provincias distintas. Lo más probable es que el distrito fuese cuestionado por los afectados.

El posible rechazo podría surgir porque la provincia constituye en España un marco administrativo y cultural de gran tradición. Fue Felipe V (1683-1746), primer rey de la dinastía borbónica, quién trajo a España fórmulas francesas del absolutismo de Luis XIV. Creó un modelo único de administración territorial en España que (exceptuando Navarra y Vizcaya) dividió el territorio en provincias gobernadas por un capitán general y una Audiencia. Los límites de aquellas provincias no coincidían en todos los casos con los de las provincias actuales, pero la provincia aún mantiene un arraigo histórico en España.

Creemos que la demarcación de los distritos debe realizarse dentro de las provincias actuales. Así lo consideramos en las propuestas de adaptación del S.E.A. que vamos a formular.

Desde el inicio de la democracia, para las elecciones a diputados, sólo se han utilizado listas de partido, ordenadas y bloqueadas, con circunscripción provincial. Mantener las listas de partido a nivel provincial en la adaptación del Sistema Alemán a España no sirve para producir un comportamiento similar al de Alemania, ya que tendríamos un elevado número de circunscripciones, 50 frente a las 16 de Alemania, con lo cual, en la mayoría de los casos, nuestras circunscripciones tendrían un tamaño inferior a la décima parte de cualquier circunscripción alemana.

Por otra parte, el voto a la lista de partido se identifica más con el partido que con la provincia; y los partidos tienen ámbito nacional en unos casos y autonómico en otros. Por ello, parece lógico que las circunscripciones coincidan con las Comunidades Autónomas (más cercanas a los Land). Esto tiene, entre otras, las siguientes ventajas:

1. Salvo en los casos de la Rioja, Cantabria y Navarra, el tamaño de la circunscripción es grande.

2. El número de circunscripciones se reduce a 17 (sin contar Ceuta y Melilla).

3. Desde la creación del Estado de las Autonomías, éstas han constituido un marco administrativo muy importante de cara al ciudadano.

4. Algunos partidos son de ámbito autonómico.

Así pues, vamos a considerar como marco geográfico para las listas de partido las Comunidades Autónomas.

7.2.1 Tamaño de la Cámara de Diputados

El tamaño actual de la Cámara de Diputados es de 350 representantes. Este tamaño es uno de los más bajos con respecto a paises similares a España [39].

Por otra parte, si se quiere tener un sistema mixto como es el alemán, debe utilizarse un tamaño de Cámara más bien alto.

Por ejemplo, 500 (entre diputados por mayorías y diputados de partido) podría resultar adecuado. Ello viene a representar, aproximadamente, 80 000 habitantes por escaño; con lo cual, si Ceuta y Melilla se mantienen con un escaño cada una, siguen estando sobrerrepresentadas ya que su población es inferior a 80 000 en ambos casos.

Vamos a usar el tamaño 500 para el total de la cámara de Diputados, de los cuales 250 corresponderían a los distritos en unas alternativas y 300 en otra y los restantes (250 en el primer caso y 200 en el segundo) corresponderían a las listas de partido para la representación proporcional combinada.

7.2.2 Asignación de distritos a las provincias

Para la asignación actual de los 350 escaños a las provincias (correspondientes a los distritos uninominales), se utiliza un proceso con dos etapas.

- En la primera etapa se asignan 2 escaños a cada provincia, independientemente del censo; además, Ceuta y Melilla reciben 1 escaño cada una.

- En la segunda etapa se realiza el reparto de los 248 escaños restantes, en proporción al censo de las 50 provincias, usando el método de Hamilton. Como el reparto en esta segunda etapa no beneficia a unas provincias con respecto a otras, mientras que la asignación inicial favorece a las más pequeñas, el resultado global es que las provincias más pequeñas quedan primadas con respecto a las más grandes, alcanzando la relación 4 a 1 para la comparación más extrema en cuanto a número de habitantes por escaño asignado.

Existen métodos de reparto proporcional que permiten asegurar una representación mínima a cada provincia sin necesidad de realizar una asignación inicial [12]. Su uso evita un sesgo como el que actualmente se da entre provincias poco pobladas y provincias muy pobladas.

Sin embargo, hemos de entender que posiblemente el legislador quiso sobrerrepresentar a las provincias poco pobladas y, por tanto, no es nuestro objetivo modificar sustancialmente este criterio. Por el contrario, lo vamos a respetar en la primera propuesta de asignación de distritos a las provincias, si bien daremos otras 2 propuestas en las que se realiza una asignación imparcial (en el sentido de no favorecer a unas provincias con respecto a otras); en los tres casos se considera que cada provincia debe recibir, al menos, 2 distritos.

No obstante, en la primera propuesta, que contempla una asignación fija inicial, vamos a disminuir algo el sesgo existente en favor de las provincias menos pobladas ya que en lugar de asignar 2 distritos inicialmente a cada provincia, asignaremos sólo 1 distrito y consideraremos que en el reparto proporcional debe recibir, al menos, otro distrito.

De hecho, como el número de distritos va a ser de 250 y de 300 (dependiendo de la propuesta) frente a los 350 diputados actuales, si asignásemos 2 distritos inicialmente a cada provincia se produciría un sesgo mayor que el actual en términos relativos con respecto a los distritos; no con respecto al total de la Cámara, puesto que restan otros 250 o 200 escaños por asignar. Pero éstos últimos no nos permiten comparar provincias puesto que se asignarán a las Comunidades Autónomas.

Así pues, las asignaciones de distritos entre las provincias que vamos a considerar son:

D1 Asignación de 1 distrito inicial por provincia y 198, con mínimo 1, en proporción a la población de las provincias.

D2 Asignación de 248 distritos, con mínimo de 2, en proporción a la población de las provincias.

D3 Asignación de 298 distritos, con mínimo de 2, en proporción a la población de las provincias.

Además, en todos los casos, Ceuta y Melilla están representadas por un distrito cada una, lo que completa los 250 escaños en los dos primeros casos y los 300 escaños en el tercero.

Para distribuir los distritos en proporción a la población, utilizaremos el método de St. Laguë, con mínimo de 1 (en el primer caso) y mínimo 2 (en el segundo y tercer caso); es decir, dependiendo de la propuesta que utilicemos, tendremos que encontrar un divisor

x tal que

$$\sum_{i=1}^{50} máx\left\{1, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\} = 198$$

$$\sum_{i=1}^{50} máx\left\{2, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\} = 248$$

$$\sum_{i=1}^{50} máx\left\{2, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\} = 298$$

donde p_i es la población de cada una de las provincias, (se va a usar el censo de 1995); el escaño de Ceuta y el de Melilla se contabilizan como distritos y $\left[\frac{p_i}{x}\right]$ representa el entero más próximo a la fracción $\frac{p_i}{x}$. Los empates aparecen cuando $\frac{p_i}{x} + 0.5$ es un número entero, E, en cuyo caso hay que admitir como parte entera incluso los valores E y E-1 en las ecuaciones anteriores para que siempre exista solución.

Encontrado el divisor x que verifica la ecuación anterior, la cantidad $\text{máx}\left\{2, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\}$ es el número de distritos que corresponde a la provincia i, en los dos últimos casos, y $1+\text{máx}\left\{1, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\}$, en el primer caso. Ceuta recibe siempre un escaño y Melilla otro.

Los resultados obtenidos con las tres propuestas (D1, D2 y D3 respectivamente) se recogen en las Tablas 7.1 y 7.2.

Según hemos dicho en el apartado 6.2.1 el tamaño de la Cámara que vamos a considerar es de 500 escaños; luego, aún nos quedan por asignar en los dos primeros casos 250 escaños más y en el tercer con 200 escaños más, (para la elección proporcional combinada mediante listas de partido).

La distribución de estos escaños a las Comunidades Autónomas se hará en proporción al censo de las mismas con mínimo de 3 en cualquiera de ellas.

Como cada provincia ha recibido, al menos, 2 representantes para la elección mayoritaria, el mínimo de 3 por Comunidad Autónoma asegura a cada Comunidad Autónoma, entre diputados de distrito y diputados por listas, al menos, 5 representantes.

Los resultados obtenidos para cada Comunidada Autónoma, después de hacer los dos repartos, se recogen en la Tabla 7.3. Las columnas D1, D2, y D3 muestran el número de

Provincia	Población	Propuesta primera	Propuesta segunda	Propuesta tercera
Madrid	5.181 659	26	30	37
Barcelona	4 748 236	24	28	33
Valencia	2 200 319	12	13	16
Sevilla	1 719 446	9	10	12
Alicante	1 363 785	8	8	10
Málaga	1 224 959	7	7	9
Vizcaya	1 163 726	7	7	8
La Coruña	1 136 283	7	7	8
Cádiz	1 127 622	6	7	8
Asturias	1 117 370	6	7	8
Murcia	1 109 977	6	7	8
Pontevedra	937 811	6	6	7
Zaragoza	852 332	5	5	6
Granada	841 829	5	5	6
Las Palmas	844 140	5	5	6
Baleares	787 984	5	5	6
Córdoba	782 221	5	5	6
St. Cruz de T.	787 358	5	5	6
Guipúzcoa	684 113	4	4	5
Badajoz	675 592	4	4	5
Jaén	666 767	4	4	5
Tarragona	576 231	4	3	4
Cantabria	541 885	4	3	4
Navarra	536 192	4	3	4
León	532 806	4	3	4

Tabla 7.1: Número de distritos en cada provincia para cada alternativa según censo de población de 1995. (continúa).

Provincia(cont.)	Población (Cont.)	Propuesta primera	Propuesta segunda	Propuesta tercera
Girona	541 995	4	3	4
Toledo	515 434	4	3	4
Valladolid	504 583	3	3	4
Almería	493 126	3	3	3
Ciudad Real	490 573	3	3	3
Castellón	464 670	3	3	3
Huelva	458 674	3	3	3
Cáceres	424 946	3	2	3
Lugo	386 405	3	2	3
Salamanca	365 293	3	2	3
Orense	364 521	3	2	3
Burgos	360 677	3	2	3
Albacete	361 327	3	2	3
Lleida	360 407	3	2	3
Álava	282 944	2	2	2
Rioja (La)	268 206	2	2	2
Zamora	214 273	2	2	2
Huesca	210 276	2	2	2
Cuenca	207 499	2	2	2
Palencia	186 035	2	2	2
Ávila	176 791	2	2	2
Guadalajara	155 884	2	2	2
Segovia	149 653	2	2	2
Teruel	143 055	2	2	2
Soria	94 396	2	2	2
Ceuta	73 142	1	1	1
Melilla	64 727	1	1	1
Totales	40 460 055	250	250	300

Tabla 7.2: Número de distritos en cada provincia para cada alternativa según censo de la población de 1995.

distritos correspondientes a las provincias que constituyen dicha Comunidad de acuerdo con los datos que aparecen en las propuestas primera, segunda y tercera de la Tabla 7.3.

Las columnas L1, L2 y L3 contienen el número de diputados de listas correspondientes al reparto de 250 diputados en los dos primeros casos y 200 en el tercero en proporción a la población de cada Comunidad, pero, asegurando en todos los casos que cualquier Comunidad, por pequeña que sea, debe recibir, al menos, 3 diputados (lógicamente L1 coincide con L2). Las sumas D1+L1, D2+L2 y D3+L3 son la representación total de las Comunidades, y se recogen en las columnas T1, T2 y T3.

Así, por ejemplo, para la primera alternativa, en la que se asignaba 1 distrito únicamente a cada provincia y los restantes en proporción a su población con mínimo de otro más, el resultado para Andalucía es: 42 distritos entre sus ocho provincias (primer número de la columna D1), 45 representantes para ser elegidos de entre las listas de los partidos (primer número de la columna L1); que hacen un total de 87 representantes (primer número de la columna T1), etc.. Análogamente las columnas D2, L2 y T2 muestran los escaños de distrito, de lista y totales para la segunda alternativa y las columnas D3, L3 y T3 para la tercera.

Conocido el número de distritos que corresponden a cada provincia hemos de estimar en cuántos de ellos ganaría cada partido. Para esto, la información más cercana en tiempo y espacio que conocemos son los resultados de las elecciones generales de 1996 en la provincia a la que pertenece cada distrito. Aún así, estos datos son insuficientes porque no tenemos delimitados los distritos, por ello, vamos a usar un modelo estadístico para estimar los resultados en los distritos sin conocer el diseño de los mismos. Dicho modelo ha sido propuesto por M. Balinski y V. Ramírez [29]. Recientemente los autores lo han utilizado para estimar los resultados de las elecciones de julio de 1997 en México, pronosticando que si el PRI bajaba del 42.2% de los votos perdería la mayoría absoluta (251 escaño). El PRI ha obtenido en las eleciones de 1977 aproximadamente el 38% de los votos y 238 escaños. Los datos oficiales aún no se tienen. En los casos que se ha podido contrastar, la diferencia entre la predicción con este modelo y los resultados obtenidos es pequeña.

7.2.3 Modelo estadístico

Elegida una provincia y conocido el porcentaje o tanto por ciento, tci, de votos totales del partido i en dicha provincia, se hace la hipótesis siguiente: "el porcentaje de votos del partido i en los distritos de la provincia elegida corresponde a una variable estadística con distribución uniforme en el intervalo $[tc_i - h_i, tc_i + h_i]$, siendo $h_i = mín\{tc_i, 25\}$.

Por ejemplo, los resultados en la provincia de Sevilla de PSOE, PP, IU y PA en las elecciones de 1996 fueron:

C.Autónoma	D1	D2	D3	L1	L2	L3	T1	T2	T3
Andalucía	42	44	52	45	45	36	87	89	88
Cataluña	35	36	44	39	39	31	74	75	75
Madrid	26	30	37	32	32	25	58	62	62
C.Valenciana	23	24	29	25	25	20	48	49	49
Galicia	19	17	21	17	17	14	36	34	35
Castilla-León	23	20	24	16	16	13	39	36	37
País Vasco	13	13	15	13	13	10	26	26	25
Castilla-La M.	14	12	14	11	11	9	25	23	23
Canarias	10	10	12	10	10	8	20	20	20
Aragón	9	9	10	7	7	6	16	16	16
Asturias	6	7	8	7	7	5	13	14	13
Murcia	6	7	8	7	7	5	13	14	13
Extremadura	7	6	8	7	7	5	14	13	13
Baleares	5	5	6	5	5	4	10	10	10
Cantabria	4	3	4	3	3	3	7	6	7
Navarra	4	3	4	3	3	3	7	6	7
La Rioja	2	2	2	3	3	3	5	5	5
Ceuta-Melilla	2	2	2	-	-	-	2	2	2
Totales	250	250	300	250	250	200	500	500	500

Tabla 7.3: Asignaciones a las Comunidades Autónomas de los 500 escaños (distritos, diputados de lista y totales para las tres propuestas).

Votos=(521 484, 327 384,139 733, 36 797)
Porcentaje= $tc = (50.85, 31.93, 13.63, 3.59)$
$h_1 = mín\{tc_1, 25\} = mín.\{50.85, 25\} = 25$; $h_2 = 25$; $h_3 = 13.63$; $h_4 = 3.59$

Los porcentajes de votos del PSOE suponemos que responden a una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[25.85, 75.85]$, los del PP en el intervalo $[6.93, 56.93]$, los de IU en el intervalo $[0, 27.26]$ y los del PA en el intervalo $[0, 7.18]$. Por tanto el PA no puede ganar en ningún distrito, ya que su candidato siempre sería superado por el candidato del PSOE. El número de partidos m con opción a ganar en los diferentes distritos de Sevilla sería 3, ya que el candidato del PA no superaría el 7.18% de los votos y el del PSOE obtendría, al menos, el 25.85%.

La probabilidad P_1 de que el vencedor en un distrito sea el candidato del PSOE es:

$$P_1 = \frac{1}{50}\left[\int_{25.85}^{27.26}\left(\frac{t-6.93}{63.86}\right)\left(\frac{t}{27.96}\right)dt\right] + \frac{1}{50}\int_{27.26}^{56.93}\left(\frac{t-6.93}{63.86}\right)dt + \frac{1}{27.26}\int_{56.93}^{75.85}dt = 0.806643$$

Análogamente se calcula la probabilidad de que el vencedor sea el candidato del PP, obteniendo $P_2 = 0.193072$, y la de IU que vale $P_3 = 0.000284704$.

Multiplicando estas probabilidades por 9 que es el número de distritos de Sevilla en la primera alternativa D1, obtenemos el número esperado de éxitos de cada partido, dicho número será: $9 * P_1 = 7.2598$; $9 * P_2 = 1.7376$ y $9 * P_3 = 0.0026$, con lo cual la estimación es: PSOE, 7 diputados de mayoría; PP, 2 diputados de mayoría; IU, no gana en ningún distrito de Sevilla.

Es decir, si en una provincia un partido obtiene el 40% de los votos se hace la hipótesis de que el porcentaje en los distritos es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[5, 65]$; pero si otro partido obtiene el 10% de los votos en las provincias, entonces, su porcentaje en los distritos se distribuye según una variable aleatoria uniforme en $[0, 20]$.

Con estas hipótesis se puede calcular la probabilidad P_i de que el partido i sea el vencedor en los distritos de la provincia elegida, con sólo conocer el porcentaje de votos de todos los partidos en las provincias. Aplicando dicha probabilidad al número de distritos de la provincia, obtenemos el número de escaños que se espera gane dicho partido en los distritos. Para calcular estas probabilidades hemos de calcular antes el número m de partidos con opción a ganar. Una vez obtenido m la probabilidad P_1, por ejemplo, es

$$P_1 = \int_{tc_1-h_1}^{tc_m+h_m} \frac{1}{2h_m}\frac{t-(tc_2-h_2)}{2h_2}\cdots\frac{t-(tc_m-h_m)}{2h_m}dt +$$

$$\int_{tc_m+h_m}^{tc_{m-1}+h_{m-1}} \frac{1}{2h_1}\frac{t-(tc_2-h_2)}{2h_2}\cdots\frac{t-(tc_{m-1}-h_{m-1})}{2h_{m-1}}dt+\cdots+\int_{tc_2+h_2}^{tc_1+h_1}\frac{1}{2h_m}dt$$

$$= \frac{1}{2h_m}\left[\int_{tc_1-h_1}^{tc_m+h_m}\prod_{k=2}^{m}\frac{t-(tc_k-h_k)}{2h_k}dt+\int_{tc_m+h_m}^{tc_{m-1}+h_{m-1}}\prod_{k=2}^{m-1}\frac{t-(tc_k-h_k)}{2h_k}dt\right]+$$

$$\frac{1}{2h_m}\left[+\ldots+\int_{tc_3+h_3}^{tc_2+h_2}\prod_{k=2}^{2}\frac{t-(tc_2-h_2)}{2h_2}dt+\int_{tc_2+h_2}^{tc_1+h_1}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2h_m}\left(\int_{tc_1-h_1}^{tc_m+h_m}\prod_{k=2}^{m}\frac{t-(tc_k-h_k)}{2h_k}dt+\right.$$

$$\left.\sum_{r=3}^{m}\int_{tc_r+h_r}^{tc_{r-1}+h_{r-1}}\left(\prod_{k=2}^{r-1}\frac{t-(tc_k-h_k)}{2h_k}dt+(tc_2-tc_1+h_2-h_1)\right)\right)$$

Expresiones análogas permiten obtener el valor de $P_2,\ldots,P_m$; y a partir de ellos la estimación de los diputados por mayoría de cada partido en la circunscripción correspondiente.

Con el criterio citado se ha hecho la simulación, para estimar los resultados en la elección de los diputados por mayorías; los resultados obtenidos se recogen en las Tablas 7.4 a 7.20.

7.3 Simulación de los resultados en los distritos

Comunidad Autónoma: **Andalucía**

Cuando el primer partido se acerca o pasa del 50% de los votos de la provincia, salvo que exista un segundo partido muy próximo a él en votos, tiende a ganar en casi todos los distritos de la misma. Según esta simulación, el PSOE, con cerca del 50% de los votos en Andalucía, ganaría la mayor parte de los diputados por mayoría. Concretamente los resultados en los distritos de Andalucía para las tres alternativas consideradas son:

$$\text{PSOE} : \left(\ \text{D1}_{\text{And.}},\ \text{D2}_{\text{And.}},\ \text{D3}_{\text{And.}}\ \right) = \left(\ 29,\ 31,\ 36\ \right)$$

$$\text{PP} : \left(\ \text{D1}_{\text{And.}},\ \text{D2}_{\text{And.}},\ \text{D3}_{\text{And.}}\ \right) = \left(\ 13,\ 13,\ 16\ \right)$$

El tercer partido, IU, al estar muy distanciado en votos, posiblemente no obtendría ningún diputado por mayoría, según esta estimación.

Comunidad Autónoma: **Cataluña**

La estimación en Cataluña es difícil de hacer, ya que entran en el reparto, además de los tres partidos de ámbito nacional, dos de ámbito autonómico. Aunque ERC no

Provincia	Partidos	% votos	D1	D2	D3
Sevilla	PSOE	50.85	7	8	10
	PP	31.93	2	2	2
	IU	13.63	0	0	0
	PA	03.59	0	0	0
Málaga	PSOE	42.72	4	4	5
	PP	39.13	3	3	4
	IU	15.41	0	0	0
	PA	02.74	0	0	0
Cádiz	PSOE	44.56	4	5	5
	PP	35.91	2	2	3
	IU	13.37	0	0	0
	PA	06.16	0	0	0
Granada	PSOE	47.06	3	3	4
	PP	38.85	2	2	2
	IU	12.13	0	0	0
	PA	01.96	0	0	0
Córdoba	PSOE	46.40	4	4	4
	PP	34.31	1	1	2
	IU	19.29	0	0	0
Jaén	PSOE	49.18	3	3	4
	PP	37.26	1	1	1
	IU	11.84	0	0	0
	PA	01.72	0	0	0
Huelva	PSOE	52.70	2	2	2
	PP	34.26	1	1	1
	IU	10.32	0	0	0
	PA	02.72	0	0	0
Almería	PSOE	47.64	2	2	2
	PP	40.67	1	1	1
	IU	10.03	0	0	0
	PA	01.66	0	0	0
Totales			42	44	52

Tabla 7.4: Estimación de resultados en los distritos de Andalucía.

Provincia	Partidos	%votos	D1	D2	D3
Barcelona	PSOE	40.85	16	19	23
	CiU	27.80	6	7	8
	PP	18.61	2	2	2
	IU	08.86	0	0	0
	ERC	03.88	0	0	0
Tarragona	PSOE	38.52	3	2	3
	CiU	31.13	1	1	1
	PP	20.29	0	0	0
	IU	05.08	0	0	0
	ERC	04.98	0	0	0
Gerona	PSOE	41.89	2	2	2
	CiU	36.88	2	1	2
	PP	12.15	0	0	0
	IU	05.69	0	0	0
	ERC	03.39	0	0	0
Lérida	PSOE	39.65	2	1	2
	CiU	33.32	1	1	1
	PP	18.05	0	0	0
	IU	05.63	0	0	0
	ERC	03.35	0	0	0
Totales			35	36	44

Tabla 7.5: Estimación de resultados distritos de Cataluña.

tiene posibilidades de alcanzar escaño, CiU supera al PP en todas las provincias y al PSOE en dos de ellas, nos encontramos con una situación en la que estos dos partidos en general están muy igualados y aunque es el PSOE el que estimamos que más escaños se lleva por tener mayor porcentaje de votos en Barcelona, un posible apoyo del PP a CiU daría lugar a otro reparto en el que el favorecido sería CiU, pues hay que tener en cuenta que el tercer partido tiene pocas posibilidades de obtener escaño pero, a veces, tiene muchas posibilidades de influir en los resultados con su apoyo a uno u otro de los 2 primeros partidos. Así, los resultados en Tarragona podrían cambiar completamente. De forma análoga otras muchas combinaciones de apoyos son posibles en los distritos de Cataluña, y alguna de ellas podría hacer que uno de los primeros partidos ganase muy pocos diputados por mayoría.

Los datos globales obtenidos en los distritos de Cataluña por distritos son:

$$\begin{aligned} \text{PSOE} &: \left(D1_{\text{Cat.}},\ D2_{\text{Cat.}},\ D3_{\text{Cat.}} \right) = \left(23,\ 24,\ 30 \right) \\ \text{CiU} &: \left(D1_{\text{Cat.}},\ D2_{\text{Cat.}},\ D3_{\text{Cat.}} \right) = \left(10,\ 10,\ 12 \right) \\ \text{PP} &: \left(D1_{\text{Cat.}},\ D2_{\text{Cat.}},\ D3_{\text{Cat.}} \right) = \left(2,\ 2,\ 2 \right) \end{aligned}$$

Comunidad Autónoma: **Madrid**

Provincia	Partidos	% votos	D1	D2	D3
Madrid	PP	50.74	21	24	30
	PSOE	32.34	5	6	7
	IU	16.92	0	0	0
Totales			26	30	37

Tabla 7.6: Estimación de resultados en los distritos de Madrid.

En este caso, se estima que la tercera fuerza no consigue ningún escaño porque la primera vuelve a tener un porcentaje muy alto. Sin embargo, sabemos que IU podría ganar en algún distrito del cinturón de Madrid. Por otra parte, el apoyo de IU al PSOE podría cambiar los resultados de muchos distritos. En cualquier caso estas variaciones respecto de la estimación quedan compensadas cuando se asignan los diputados de partido.

Comunidad Autónoma: **Valencia**

En la Comunidad Valenciana, al ser el porcentaje de votos del PP mayor que el del PSOE, se estima que el PP ganaría en más distritos; como los porcentajes de ambos partidos son muy altos, IU y UV no tienen posibilidades de ganar en algún distrito; sin embargo, si se tratara del sistema mayoritario sin proporcionalidad combinada tendrían

Provincia	Partidos	% votos	D1	D2	D3
Valencia	PP	43.46	7	8	10
	PSOE	38.23	5	5	6
	IU	12.50	0	0	0
	UV	05.81	0	0	0
Alicante	PP	47.42	5	5	6
	PSOE	41.57	3	3	4
	IU	11.01	0	0	0
Castellón	PP	49.40	2	2	2
	PSOE	42.52	1	1	1
	IU	08.08	0	0	0
Totales			23	24	29

Tabla 7.7: Estimación de resultados en los distritos de la Comunidad de Valencia.

mucho poder de negociación con los dos grandes partidos porque de ellos podía depender la victoria del PP o del PSOE en muchos distritos. Los totales estimados han sido:

$$\text{PP} : \left(\text{D1}_{\text{Val.}}, \ \text{D2}_{\text{Val.}}, \ \text{D3}_{\text{Val.}} \right) = \left(14, \ 15, \ 18 \right)$$
$$\text{PSOE} : \left(\text{D1}_{\text{Val.}}, \ \text{D2}_{\text{Val.}}, \ \text{D3}_{\text{Val.}} \right) = \left(9, \ 9, \ 11 \right)$$

Comunidad Autónoma: **Galicia**

En Galicia la situación es clara ya que el PP roza el 50% de los votos en La Coruña, Pontevedra y Orense, y sobrepasa el 50% en Lugo, mientras que el segundo partido queda por debajo del 35%, salvo en Orense, luego deja muy pocas posibilidades a los demás partidos. De hecho, si el PSOE no estuviera próximo al 35% en votos, es posible que no consiguiera escaños con esta simulación. Los resultados globales estimados son:

$$\text{PP} : \left(\text{D1}_{\text{Ga.}}, \ \text{D2}_{\text{Ga.}}, \ \text{D3}_{\text{Ga.}} \right) = \left(15, \ 13, \ 16 \right)$$
$$\text{PSOE} : \left(\text{D1}_{\text{Ga.}}, \ \text{D2}_{\text{Ga.}}, \ \text{D3}_{\text{Ga.}} \right) = \left(4, \ 4, \ 5 \right)$$

Los resultados podrían variar dependiendo del BNG, de tal forma que las diferencias entre PP y PSOE podrían disminuir bastante o incluso aumentar.

Provincia	Partidos	% votos	D1	D2	D3
La Coruña	PP	48.16	5	5	6
	PSOE	34.48	2	2	2
	BNG	12.98	0	0	0
	IU	04.38	0	0	0
Pontevedra	PP	47.96	5	5	5
	PSOE	33.06	1	1	2
	BNG	14.85	0	0	0
	IU	04.13	0	0	0
Lugo	PP	54.28	3	2	3
	PSOE	32.97	0	0	0
	BNG	10.11	0	0	0
	IU	02.64	0	0	0
Orense	PP	49.38	2	1	2
	PSOE	36.69	1	1	1
	BNG	12.21	0	0	0
	IU	01.72	0	0	0
Totales			19	17	21

Tabla 7.8: Estimación de resultados en los distritos de Galicia.

Comunidad Autónoma: **Castilla-León**

En Castilla-León el PP sobrepasa en todas las provincias el 50% de los votos y el número de distritos en cada provincia es muy bajo, por eso el PSOE conseguiría escaño en muy pocas. El tercer partido, IU, no tendría ninguna posibilidad en esta Comunidad y el número de los resultados globales obtenidos han sido:

$$\text{PP} : \left(\text{D1}_{\text{C.L.}}, \quad \text{D2}_{\text{C.L.}}, \quad \text{D3}_{\text{C.L.}} \right) = \left(19, \quad 17, \quad 20 \right)$$
$$\text{PSOE} : \left(\text{D1}_{\text{C.L.}}, \quad \text{D2}_{\text{C.L.}}, \quad \text{D3}_{\text{C.L.}} \right) = \left(4, \quad 3, \quad 4 \right)$$

En la mayoría de los distritos el escaño lo ganaría el PP; sin embargo, si se tratase de un sistema mayoritario los resultados podrían ser algo diferentes, porque IU podría influir decisivamente en alguno de los distritos. En este sistema no tiene gran interés tales apoyos puesto que el segundo reparto corrige la desproporcionalidad del primero.

Comunidad Autónoma: **País Vasco**

La predicción más difícil de hacer en elección por sistema mayoritario es la correspondiente al País Vasco. Se trata de una Comunidad Autónoma con una fragmentación

Provincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
León	PP	51.70	3	2	3
	PSOE	40.17	1	1	1
	IU	08.13	0	0	0
Valladolid	PP	50.19	2	2	3
	PSOE	36.83	1	1	1
	IU	12.98	0	0	0
Salamanca	PP	55.64	2	2	2
	PSOE	36.05	1	0	1
	IU	08.31	0	0	0
Burgos	PP	56.49	3	2	3
	PSOE	31.98	0	0	0
	IU	11.53	0	0	0
Zamora	PP	55.91	2	2	2
	PSOE	38.28	0	0	0
	IU	05.81	0	0	0
Palencia	PP	52.81	1	1	1
	PSOE	39.02	1	1	1
	IU	08.17	0	0	0
Ávila	PP	60.62	2	2	2
	PSOE	31.44	0	0	0
	IU	07.94	0	0	0
Segovia	PP	57.10	2	2	2
	PSOE	33.62	0	0	0
	IU	09.28	0	0	0
Soria	PP	56.68	2	2	2
	PSOE	35.21	0	0	0
	IU	08.11	0	0	0
Totales			23	20	24

Tabla 7.9: Estimación de resultados en los distritos de Castilla-León.

Provincia	Partidos	% votos	D1	D2	D3
Vizcaya	PNV	30.32	4	4	4
	PSOE	24.71	2	2	3
	PP	19.16	1	1	1
	HB	10.32	0	0	0
	IU	10.11	0	0	0
	EA	05.38	0	0	0
Guipúzcoa	PNV	23.36	2	2	2
	PSOE	20.32	1	1	2
	PP	18.98	1	1	1
	HB	15.12	0	0	0
	IU	14.76	0	0	0
	EA	07.46	0	0	0
Álava	PNV	27.97	1	1	1
	PSOE	26.03	1	1	1
	PP	20.65	0	0	0
	HB	11.95	0	0	0
	IU	07.68	0	0	0
	EA	05.72	0	0	0
Totales			13	13	15

Tabla 7.10: Estimación de resultados en los distritos del País Vasco.

política muy alta. Basta recordar que en las elecciones generales de 1996 los 6 escaños de Guipúzcoa fueron asignados a 5 partidos diferentes (todos recibieron 1 escaño salvo PSOE que recibió 2; por eso, afirmar que el método d'Hondt conduce siempre al bipartidismo es una ligereza.

La simulación obtenida indica que los dos grandes partidos de ámbito estatal y el PNV conseguirán algún diputado por mayoría en el País Vasco. Incluso es posible que, en esta Comunidad, 5 partidos consigan escaño al aplicar el sistema mayoritario, cuando en ninguna de las restantes pasa de 3 el número de partidos que consiguen diputados por mayoría y en la práctica, el tercer partido tiene muy pocas posibilidades de éxito en casi todas ellas. Cualquier predicción es muy arriesgada en esta Comunidad, ya que menos de 9 puntos separan a los 5 partidos más votados en alguna de las provincias. Las estimaciones totales han sido:

$$\begin{aligned}
\text{PNV} &: \left(D1_{\text{P.V.}},\ D2_{\text{P.V.}},\ D3_{\text{P.V.}} \right) = \left(7,\ 7,\ 7 \right) \\
\text{PSOE} &: \left(D1_{\text{P.V.}},\ D2_{\text{P.V.}},\ D3_{\text{P.V.}} \right) = \left(4,\ 4,\ 6 \right) \\
\text{PP} &: \left(D1_{\text{P.V.}},\ D2_{\text{P.V.}},\ D3_{\text{P.V.}} \right) = \left(2,\ 2,\ 2 \right)
\end{aligned}$$

Comunidad Autónoma: **Castilla- La Mancha**

En Castilla-La Mancha, PP y PSOE se encuentran bastante igualados, con cierta ventaja del PP. Lo mismo ocurre con los resultados previstos. Los resultados simulados son:

$$\begin{aligned}
\text{PP} &: \left(D1_{\text{C.M.}},\ D2_{\text{C.M.}},\ D3_{\text{C.M.}} \right) = \left(9,\ 8,\ 9 \right) \\
\text{PSOE} &: \left(D1_{\text{C.M.}},\ D2_{\text{C.M.}},\ D3_{\text{C.M.}} \right) = \left(5,\ 4,\ 5 \right)
\end{aligned}$$

La situación es similar a la proporción de escaños que se predicen para cada partido y la proporción que actualmente tienen. Esto se debe a que sus provincias son de tamaño pequeño y es conocido que en provincias de ese tamaño el comportamiento del sistema electoral proporcional usando d'Hondt es muy similar a la elección con el sistema mayoritario.

Provincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
Toledo	PP	49.13	2	2	2
	PSOE	42.53	2	1	2
	IU	08.34	0	0	0
Ciudad-Real	PP	45.96	2	2	2
	PSOE	45.74	1	1	1
	IU	08.30	0	0	0
Albacete	PP	45.49	2	1	2
	PSOE	44.71	1	1	1
	IU	09.80	0	0	0
Cuenca	PP	51.13	1	1	1
	PSOE	43.16	1	1	1
	IU	05.71	0	0	0
Guadalajara	PP	53.19	2	2	2
	PSOE	35.83	0	0	0
	IU	10.98	0	0	0
Totales			14	12	14

Tabla 7.11: Estimación de resultados en los distritos de Castilla-La Mancha.

Comunidad Autónoma: **Canarias**

En Las Palmas la predicción no es demasiado difícil, pero en Tenerife los tres partidos más votados están aproximadamente a 8 puntos por lo que cualquiera de ellos puede obtener un resultado mucho más favorable a costa de los otros dos.

Comunidad Autónoma: **Aragón**

En Aragón el PP aventaja al PSOE en Zaragoza en 18 puntos, lo que es muy significativo en una elección mayoritaria. En las otras dos provincias, ambos partidos están más igualados, aunque el PP tiene un porcentaje de votos mayor. Por ello, el PP gana en casi todos los distritos de Zaragoza; sin embargo, no ocurre lo mismo en Huesca y Teruel. Los resultados globales de la estimación son:

$$\text{PP} : \left(D1_{Ar.}, \; D2_{Ar.}, \; D3_{Ar.} \right) = \left(6, \; 6, \; 7 \right)$$

$$\text{PSOE} : \left(D1_{Ar.}, \; D2_{Ar.}, \; D3_{Ar.} \right) = \left(3, \; 3, \; 3 \right)$$

Provincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
Las Palmas	PP	43.27	3	3	4
	PSOE	26.38	1	1	1
	CC	24.51	1	1	1
	IU	05.84	0	0	0
Tenerife	PP	35.06	2	2	3
	PSOE	32.93	2	2	2
	CC	26.71	1	1	1
	IU	05.30	0	0	0
Totales			10	10	12

Tabla 7.12: Estimación de resultados en los de la Comunidad de Canarias.

Provincia	Partidos	% votos	D1	D2	D3
Zaragoza	PP	53.47	4	4	5
	PSOE	35.38	1	1	1
	IU	11.15	0	0	0
Huesca	PP	48.40	1	1	1
	PSOE	43.60	1	1	1
	IU	08.00	0	0	0
Teruel	PP	51.04	1	1	1
	PSOE	42.74	1	1	1
	IU	06.22	0	0	0
Totales			9	9	10

Tabla 7.13: Estimación de resultados en los distritos de la Comunidad de Aragón.

Comunidad Autónoma: **Asturias**

Provincia	Partidos	% votos	D1	D2	D3
Asturias	PP	42.56	3	4	4
	PSOE	41.34	3	3	4
	IU	16.10	0	0	0
Totales			6	7	8

Tabla 7.14: Estimación de resultados en los distritos de la Comunidad de Asturias.

En Asturias el PSOE y PP se encuentran muy igualados. En este caso, si los votantes de IU apoyasen a algún partido, pueden conseguir que el partido al que apoyen se vea muy beneficiado; por ejemplo, si apoyasen al PSOE el reparto esperado para el PSOE sería 5 distritos en la primera alternativa y 6 en las otras dos. Luego el partido al que apoyase IU podría conseguir casi todos los diputados de distrito.

Comunidad Autónoma: **Extremadura**

Provincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
Badajoz	PP	49.83	3	3	3
	PSOE	40.02	1	1	2
	IU	10.15	0	0	0
Cáceres	PP	49.27	2	1	2
	PSOE	43.22	1	1	1
	IU	07.51	0	0	0
Totales			7	6	8

Tabla 7.15: Estimación de resultados en los distritos de la Comunidad Extremadura.

En Extremadura los votantes de IU podrían conseguir, con su apoyo al PSOE, que éste obtuviera cerca del 60% de los votos, con lo que ganaría casi todos los diputados de distrito. No obstante, este tipo de estrategia carece de interés puesto que el segundo reparto compensaría a los partidos que quedan sobrerrepresentados.

Comunidad Autónoma: **Murcia**

La situación en Murcia es similar a las últimas que hemos visto y también a las que restan por ver. En todas ellas el PP tiene unos 10 puntos más que el PSOE y ello le permite ganar la mayor parte de los diputados por mayoría. Pero si en lugar de tratarse del sistema alemán se tratase del inglés, los votos de IU podrían hacer cambiar sensiblemente los resultados.

Provincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
Murcia	PP	50.70	4	5	6
	PSOE	38.60	2	2	2
	IU	10.70	0	0	0
Totales			6	7	8

Tabla 7.16: Estimación de resultados en los distritos de la Comunidad de Murcia.

Comunidad Autónoma: **Baleares**

Povincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
Baleares	PP	50.83	3	3	4
	PSOE	40.50	2	2	2
	IU	08.67	0	0	0
Totales			5	5	6

Tabla 7.17: Estimación en los distintos distritos de la Comunidad de Baleares.

Comunidad Autónoma: **Cantabria**

Provincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
Cantabria	PP	51.79	3	2	3
	PSOE	36.55	1	1	1
	IU	11.66	0	0	0
Totales			4	3	4

Tabla 7.18: Estimación en los distintos distritos de Cantabria.

Comunidad Autónoma: **Navarra**

Provincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
Navarra	PP	40.03	3	2	3
	PSOE	32.63	1	1	1
	IU	13.42	0	0	0
	PNV	08.80	0	0	0
	HB	04.07	0	0	0
	EA	01.05	0	0	0
Totales			4	3	4

Tabla 7.19: Estimación en los distintos distritos de la Comunidad de Navarra.

Comunidad Autónoma: **La Rioja**

Provincia	Partido	% votos	D1	D2	D3
La Rioja	PP	52.14	1	1	1
	PSOE	38.67	1	1	1
	IU	09.19	0	0	0
Totales			2	2	2

Tabla 7.20: Estimación de resultados en los distritos de la Comunidad de La Rioja.

7.4 Resumen general de la estimación en los distritos

7.4.1 Resultados totales estimados para los partidos

La Tabla 7.21 recoge los resultados totales estimados para cada uno de los partidos con las tres distribuciones de distritos consideradas.

7.4.2 Resultados estimados para los partidos en las distintas Comunidades Autónomas

En la Tabla 7.22 se recogen los resultados estimados para cada uno de los partidos en las distintas Comunidades.

Partidos	Diputados totales por mayoría según D1	Diputados totales por mayoría según D2	Diputados totales por mayoría según D3
PP	130	128	154
PSOE	101	103	124
IU	0	0	0
CiU	10	10	12
ERC	0	0	0
PNV	7	7	7
HB	0	0	0
EA	0	0	0
CC	2	2	2
BNG	0	0	0
UV	0	0	0
PA	0	0	0
Totales	250	250	300

Tabla 7.21: Total de diputados de mayoría estimados para cada partido según las tres distribuciones de distritos D1, D2 y D3.

7.4.3 Observaciones

1. Salvo pocas excepciones (País Vasco, Canarias y Barcelona), el número de partidos que consiguen escaño en los distritos de una misma provincia es 2, a lo sumo. Cuando el partido más votado obtiene más del 50% de los votos suele ganar todos los escaños, salvo que el segundo partido también obtenga un % de votos muy alto.

2. Los resultados obtenidos cuando el número de distritos es pequeño, por ejemplo menor o igual que 5, es similar al que da el método d'Hondt aplicado directamente a los porcentajes de votos de los partidos.

3. El hecho de que la tercera fuerza y las siguientes no consigan diputados por mayorías no debe inducir a sus votantes a emitir un voto estratégico ni a los partidos a establecer pactos previos. Esto representa una ventaja notable con respecto al método mayoritario (sin proporcionalidad combinada).

C.Autónóma	D1		D2		D3	
Andalucía	PSOE	29	PSOE	31	PSOE	36
	PP	13	*PP*	13	PP	16
Cataluña	PSOE	23	PSOE	24	PSOE	30
	CiU	10	CiU	10	CiU	12
	PP	2	PP	2	PP	2
Madrid	PP	21	PP	24	PP	30
	PSOE	5	PSOE	6	PSOE	7
C.Valenciana	PP	14	PP	15	PP	18
	PSOE	9	PSOE	9	PSOE	11
Galicia	PP	15	PP	13	PP	16
	PSOE	4	PSOE	4	PSOE	5
Castilla-León	PP	19	PP	17	PP	20
	PSOE	4	PSOE	3	PSOE	4
País Vasco	PNV	7	PNV	7	PNV	7
	PSOE	4	PSOE	4	PSOE	6
	PP	2	PP	2	PP	2
Castilla-La M.	PP	9	PP	8	PP	9
	PSOE	5	PSOE	4	PSOE	5
Canarias	PP	5	PP	5	PP	7
	PSOE	3	PSOE	3	PSOE	3
	CC	2	CC	2	CC	2
Aragón	PP	6	PP	6	PP	7
	PSOE	3	PSOE	3	PSOE	3
Asturias	PP	3	PP	4	PP	4
	PSOE	3	PSOE	3	PSOE	4
Murcia	PP	4	PP	5	PP	6
	PSOE	2	PSOE	2	PSOE	2
Extremadura	PP	5	PP	4	PP	5
	PSOE	2	PSOE	2	PSOE	3
Baleares	PP	3	PP	3	PP	4
	PSOE	2	PSOE	2	PSOE	2
Cantabria	PP	3	PP	2	PP	3
	PSOE	1	PSOE	1	PSOE	1
Navarra	PP	3	PP	2	PP	3
	PSOE	1	PSOE	1	PSOE	1
La Rioja	PP	1	PP	1	PP	1
	PSOE	1	PSOE	1	PSOE	1
Ceuta-Melilla	PP	2	PP	2	PP	2
Totales		250		250		300

Tabla 7.22: Resultados de la estimación en los distritos de las distintas Comunidades Autónomas.

7.5 Repartos de escaños correspondientes a las listas de los partidos

Una vez que sabemos el número de representantes de cada una de las Comunidades Autónomas, los votos de los partidos y el número de escaños que ha conseguido cada partido en los distritos, podemos pasar a distribuir los restantes escaños entre las listas de los partidos. Para llevar a cabo este reparto vamos a describir dos posibilidades. La primera consistirá en realizar en cada Comunidad Autónoma un reparto de sus escaños totales con las restricciones derivadas de los resultados en los distritos. Los 17 repartos serían independientes y, por tanto, un partido puede recibir varios escaños más (ó menos) de los que le corresponden a sus votos totales en todo el país. En cambio, este reparto es muy sencillo de realizar.

Con la segunda posibilidad que mostramos, se trata de que cada partido reciba la proporción de escaños que corresponde a sus votos totales y cada Comunidad Autónoma reciba exactamente los que hemos fijado en la correspondiente alternativa. Emplearemos para ello la técnica correspondiente a repartos biproporcionales desarrollada en [22] y [23]. Este método conduce a un elevado proporcionalismo (aunque no mucho más que el obtenido en el caso anterior, puesto que en él, también es elevado), pero tiene el inconveniente de que la técnica de la biproporcionalidad es prácticamente desconocida en la clase política, incluso para muchos investigadores en sistemas electorales. Su aplicación también es algo más compleja que en el caso de repartos simples.

En ambos casos, antes de nada debemos fijar un criterio para saber qué partidos son los que van a intervenir en la asignación y el método a utilizar para obtener la solución. Este criterio puede ser:

- Si un partido supera el 3% de los votos totales tiene derecho a participar en la distribución de escaños de listas de todas las Comunidades Autónomas.
- Si un partido no supera el 3%, sólo podrá participar en aquéllas Comunidades Autónomas en las que obtenga, al menos, el 5% de los votos de la misma.
- Dado que se persigue alta proporcionalida, el método a utilizar para estas distribuciones de escaños va a ser el método de St. Laguë.

La incidencia que tiene el segundo criterio sobre el número de partidos que intervienen en el reparto es pequeña ya que, al aplicarlo en las Comunidades, los partidos que se ven afectados, son los partidos de ámbito autonómico, ERC, PA y UV; de tal forma que si repartimos 500 escaños sin limitación, el resultado que estos tres partidos obtendrían es: ERC, 3 escaños; PA, 3 escaños; y UV, 2 escaños. Mientras que si se incluye la restricción

del 5%, estos partidos quedan excluidos del reparto (según los datos de las elecciones de 1996). En cualquier caso, la elección de estas barreras es arbitraria, pero similar a la utilizada en problemas parecidos.

7.5.1 Primera posibilidad

Las Tablas 7.23 a 7.40 recogen los resultados totales obtenidos por los partidos en cada una de las Comunidades utilizando los criterios anteriores. Para explicar como se ha obtenido cada Tabla, vamos a desglosar la primera detalladamentente para una alternativa.

Consideremos la Comunidad de Andalucía. A esta Comunidad le corresponden con la primera alternativa 87 escaños. Los partidos que pueden intervenir en la asignación de los 87 escaños son PSOE, PP e IU. Si hacemos el reparto de los 87 escaños en proporción a los votos totales, pero usando como restricción mínima el número de diputados por mayoría conseguidos por cada partido PSOE, 29; PP,12 e IU, 0; los escaños que corresponden a cada partido son: PSOE, 43; PP, 13; IU, 12. Luego el PSOE obtendrá de su lista 14 escaños y el PP obtendrá de su lista 11 escaños e IU obtendrá de su lista 12 escaños, que junto con los mínimos (diputados de distrito) conseguidos por cada uno de ello suman 43, 32 y 12 escaños respectivamente. Los únicos diputados que recibe IU son los de su lista ya que no había ganado en ningún distrito.

Partidos	Votos	Cuota 87	Mínimos (distritos)	Reparto proporc.	Diputados de listas
PSOE	2 017 857	42.50	29	43	14
PP	1 530 057	32.22	13	32	19
IU	582 970	12.28	0	12	12
Totales	4 130 884	87.00	42	87	45

Tabla 7.23: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Andalucía, para la primera alternativa, simulando datos de la elección de 1996.

Los votos de los partidos en las diferentes Comunidades Autónomas para la elección de 1996 están recogidos en las Tablas 6.20 a 6.36. Por tanto no se repiten en las tablas que siguen, ni se recogen las cuotas puesto que estamos considerando para las circunscripciones autonómicas 3 tamaños diferentes (T1, T2 y T3).

En Andalucía, el PA, al no superar el 5% de los votos, no puede intervenir en la asignación proporcional de escaños.

En Cataluña, sólo el ERC no puede intervenir en la asignación.

C. Autónoma	Partidos	T1=87	T2=89	T3=88
Andalucía	PSOE	43	43	43
	PP	32	33	33
	IU	12	13	12

Tabla 7.24: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Andalucía.

C. Autónoma	Partidos	T1=74	T2=75	T3=75
Cataluña	PSOE	31	31	31
	CiU	23	24	24
	PP	14	14	14
	IU	6	6	6

Tabla 7.25: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Cataluña.

En la Comunidad de Madrid, los tres partidos que intervienen en el reparto son de ámbito estatal. En esta simulación se compensa a IU que con más del 16% de los votos, no obtiene ningún diputado por mayoría.

En la Comunidad Valenciana, el partido nacionalista UV no interviene en la asignación al no superar el 5% de los votos en la Comunidad; sin embargo, IU se ve compensada con este reparto, ya que no consiguió ningún diputado por mayoría en esta Comunidad.

En Galicia, IU alcanza 1 diputado en esta simulación; el BNG se ve muy recompensado, consiguiendo 5 escaños en la proporcionalidad. Es decir, al final cada partido recibe un número de escaños muy similar a su cuota.

En Castilla-León, al igual que en la Comunidad de Madrid, los tres partidos que intervinen en el reparto son de ámbito estatal.

En el País Vasco intervienen tres partidos de ámbito estatal y tres de ámbito autonómico, el resultado con esta simulación está en relación con los votos totales de cada uno.

En Castilla-La Mancha en el resultado de la asignación intervienen los mismos partidos que en Castilla-León y se vuelve a alcanzar una proporcionalidad elevada entre ellos.

En la Comunidad de Canarias, podemos resaltar 1 escaño que obtiene IU, cantidad casi idéntica a su cuota. Con el sistema actual IU no obtiene representación en esta Comunidad.

C. Autónoma	Partidos	T1=58	T2=62	T3=62
Madrid	PP	29	31	31
	PSOE	19	20	20
	IU	10	11	11

Tabla 7.26: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Madrid.

C. Autónoma	Partidos	T1=48	T2=49	T3=49
Comunidad Valenciana	PP	22	23	23
	PSOE	20	20	20
	IU	6	6	6

Tabla 7.27: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Valencia.

C. Autónoma	Partidos	T1=36	T2=34	T3=35
Galicia	PP	18	17	17
	PSOE	12	12	12
	BNG	5	4	5
	IU	1	1	1

Tabla 7.28: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Galicia.

C. Autónoma	Partidos	T1=39	T2=36	T3=37
Castilla-León	PP	21	20	20
	PSOE	14	13	13
	IU	4	3	4

Tabla 7.29: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Castilla-León.

C. Autónoma	Partidos	T1=26	T2=26	T3=25
País-Vasco	PNV	7	7	7
	PSOE	6	6	6
	PP	5	5	5
	IU	3	3	2
	HB	3	3	3
	EA	2	2	2

Tabla 7.30: Resultados obtenidos por los distintos partidos en el País-Vasco.

C. Autónoma	Partidos	T1=25	T2=23	T=23
Castilla-La Mancha	PP	12	11	11
	PSOE	11	10	10
	IU	2	2	2

Tabla 7.31: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Castilla-La Mancha.

C. Autónoma	Partidos	T1=20	T2=20	T3=20
Canarias	PP	8	8	8
	PSOE	6	6	6
	CC	5	5	5
	IU	1	1	1

Tabla 7.32: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Canarias.

Tanto en la Comunidad de Aragón como en las que siguen hasta la de Cantabria, los partidos que intervienen en el reparto son todos de ámbito estatal. El resultado vuelve a alcanzar una elevada proporcionalidad en todos los casos.

En la Comunidad de Navarra, dos partidos de ámbito autonómico, HB y EA, no pueden intervenir en el reparto; sin embargo, sí lo hace el PNV que se ve compensado con 1 escaño.

Termina esta asignación de escaños a los partidos con el reparto en la Comunidad de la Rioja, el PP y el PSOE, al igual que ocurre con los diputados por mayoría, se reparten los diputados de la proporcionalidad.

7.5.2 Resumen

El número de diputados obtenidos por los partidos con las estimaciones D1 y L1 y totales T1, se recoge en la Tabla 7.41.

Como podemos observar, entre los resultados que se aparecen en la Tabla 7.41y los del diagrama de la Figura 7.1, han aparecido pequeñas diferencias a nivel nacional con respecto a la cuota de algunos partidos. Así, el PP ha obtenido 2 escaños por encima de la cuota superior, el PNV 1 escaño por encima de su cuota superior, mientras que PSOE, IU y CiU han quedado un escaño por debajo de su cuota inferior.

En cualquier caso, estas diferencias son poco significativas. Diferencias similares aparecen para las otras dos alternativas, como se observa en las Tablas 7.42 y 7.43 y en los diagramas de las Figuras 7.2 y 7.3

C. Autónoma	Partidos	T1=16	T2=16	T3=16
Aragón	PP	8	8	8
	PSOE	6	6	6
	IU	2	2	2

Tabla 7.33: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Aragón.

C. Autónoma	Partidos	T1=13	T2=14	T3=13
Asturias	PP	6	6	6
	PSOE	5	6	5
	IU	2	2	2

Tabla 7.34: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Asturias.

C. Autónoma	Partidos	T1=13	T2=12	T3=13
Murcia	PP	7	6	7
	PSOE	5	5	5
	IU	1	1	1

Tabla 7.35: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Murcia.

C. Autónoma	Partidos	T1=14	T2=13	T3=13
Extremadura	PSOE	7	7	7
	PP	6	5	5
	IU	1	1	1

Tabla 7.36: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Extremadura.

C. Autónoma	Partidos	T1=10	T2=10	T3=10
Baleares	PP	5	5	5
	PSOE	4	4	4
	IU	1	1	1

Tabla 7.37: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Baleares.

C. Autónoma	Partidos	T1=7	T2=6	T3=7
Cantabria	PP	4	3	4
	PSOE	2	2	2
	IU	1	1	1

Tabla 7.38: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Cantabria.

C. Autónoma	Partidos	T1=7	T2=6	T3=7
Navarra	PP	3	2	3
	PSOE	2	2	2
	IU	1	1	1
	PNV	1	1	1

Tabla 7.39: Resultados obtenidos por los distintos partidos en Navarra.

C. Autónoma	Partidos	T1=5	T2=5	T3=5
La Rioja	PP	3	3	3
	PSOE	2	2	2
	IU	0	0	0

Tabla 7.40: Resultados obtenidos por los distintos partidos en La Rioja.

Partidos	Votos	% votos	Cuota 500	Mayoría distrito D1	Listas partido L1	Totales T1
PP	9 716 006	40.53	202.63	130	75	205
PSOE	9 425 678	39.31	196.58	101	94	195
IU	2 639 774	11.01	55.05	0	54	54
CiU	1 151 633	4.80	24.02	10	13	23
PNV	318 951	1.32	6.59	7	1	8
CC	220 418	0.92	4.60	2	3	5
BNG	220 147	0.92	4.59	0	5	5
HB	181 304	0.76	3.78	0	3	3
EA	115 861	0.43	2.16	0	2	2
Totales	23 989 772	100.00	500.00	250	250	500

Tabla 7.41: Resultados obtenidos por los partidos entre diputados por mayoría y diputados de lista de partido, para la primera alternativa, con repartos independientes en cada Comunidad Autónoma.

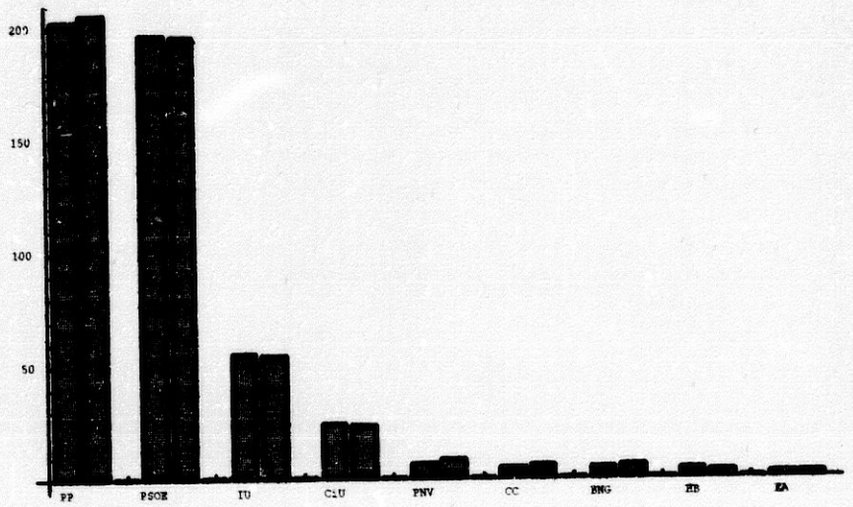


Figura 7.1: Resultados obtenidos por los partidos, entre diputados por mayoría (D1) y diputados de lista (L1) para la primera alternativa con repartos independientes en cada C.A (la primera barra representa los votos y la segunda los escaños).

Partidos	Votos	% votos	Cuota 500	Mayoría distrito D2	Listas partido L2	Totales T2
PP	9 716 006	40.53	202.63	128	74	202
PSOE	9 425 678	39.31	196.58	103	92	195
IU	2 639 774	11.01	55.05	0	57	57
CiU	1 151 633	4.80	24.02	10	14	24
PNV	318 951	1.32	6.59	7	1	8
CC	220 418	0.92	4.60	2	3	5
BNG	220 147	0.92	4.59	0	4	4
HB	181 304	0.76	3.78	0	3	3
EA	115 861	0.43	2.16	0	2	2
Totales	23 989 772	100.00	500.00	250	250	500

Tabla 7.42: Resultados obtenidos por los partidos entre diputados por mayoría y diputados de lista de partido, para la segunda alternativa, con repartos independientes en cada Comunidad Autónoma.

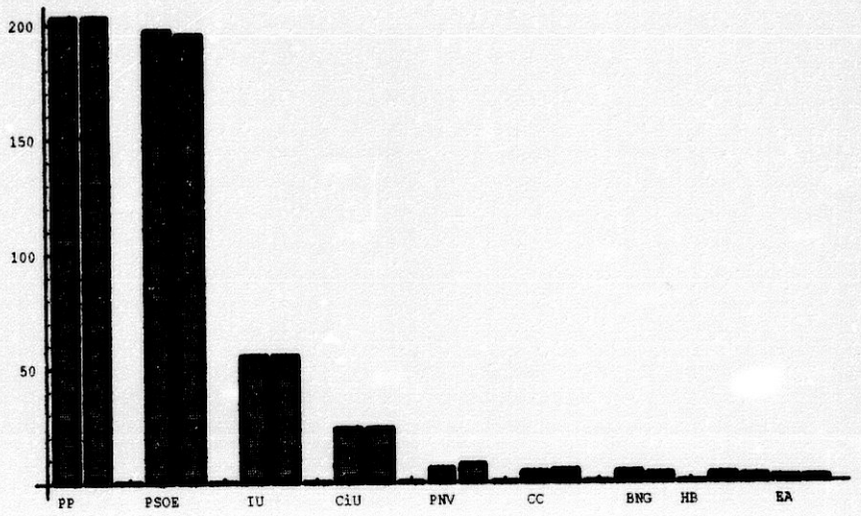


Figura 7.2: Resultados obtenidos por los partidos, entre diputados por mayoría (D2) y diputados de lista (L2) para la segunda alternativa con repartos independientes en cada C.A.

Partidos	Votos	% votos	Cuota 500	Mayoría distrito D3	Listas partido L3	Totales T3
PP	9 716 006	40.53	202.63	155	50	205
PSOE	9 425 678	39.31	196.58	124	70	194
IU	2 639 774	11.01	55.05	0	54	54
CiU	1 151 633	4.80	24.02	12	12	24
PNV	318 951	1.32	6.59	7	1	8
CC	220 418	0.92	4.60	2	3	5
BNG	220 147	0.92	4.59	0	5	5
HB	181 304	0.76	3.78	0	3	3
EA	115 861	0.43	2.16	0	2	2
Totales	23 989 772	100.00	500.00	250	200	500

Tabla 7.43: Resultados obtenidos por los partidos entre diputados por mayoría y diputados de lista de partido, para la tercera alternativa, con repartos independientes en cada Comunidad Autónoma.

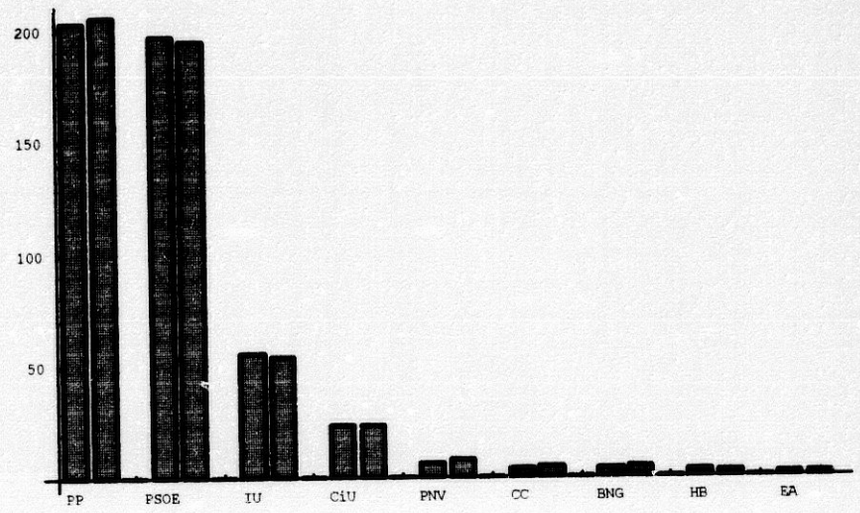


Figura 7.3: Resultados obtenidos por los partidos, entre diputados por mayoría (D3) y diputados de lista (L3) para la tercera alternativa con repartos independientes en cada C.A.

7.5.3 Segunda posibilidad

El proceso descrito en el párrafo anterior es muy simple de aplicar pero no tenemos la garantía, como de hecho ha ocurrido, de que cada partido obtenga tantos escaños como le corresponden a sus votos totales ya que hemos hecho 17 repartos independientes.

Si aplicamos el método de St. Laguë a los votos totales de los partidos, los escaños que debería recibir cada partido son los que aparecen en la Tabla 7.44, y observamos que no coinciden "exactamente" con la última columna de las Tablas 7.41, 7.42 y 7.43.

Es posible distribuir los escaños que restan en cada alternativa de forma que cada partido reciba los escaños que se le asignan en la Tabla 7.44, que son los que le corresponden según sus votos totales, y cada Comunidad reciba los escaños que se indican en las tres últimas columnas de la Tabla 7.3.

Para la alternativa primera, por ejemplo, obtuvimos que los escaños totales que deben corresponder a cada una de las 17 Comunidad Autónomas son:

$$(87, 74, 58, 48, 36, 39, 26, 25, 20, 16, 13, 13, 14, 10, 7, 7, 5)\,.$$

Para conseguir esta doble proporcionalidad (para partidos y para Comunidades) hay que recurrir a la técnica de repartos biproporcionales, cuya teoría ha sido desarrollada en [22] y [23] y de la cual hemos presentado una introducción en el capítulo 2. Esta teoría nos permite usar un método que asigne a cada partido los escaños totales que le corresponden (7.44) y a cada Comunidad los diputados que le corresponden..

Las Tablas 7.24 hasta la 7.40, contienen los datos totales de cada partido en cada Comunidad Autónoma. Para saber los diputados de lista de partido que corresponden a cada uno de ellos es necesario restarle al valor obtenido en las Tablas 7.24 hasta la 7.40 el número de diputados por mayoría obtenidos en la Comunidad correspondiente.

Por ejemplo, según el reparto biproporcional correspondiente a la primera alternativa, si observamos la Tabla 7.23, deducimos que en Andalucía, por ejemplo, el PSOE obtendrá 14 diputados de su lista, que junto con los 29 de mayoría completan los 43; el PP obtendría 18 diputados de su lista, que junto con los 13 que obtuvo en los distritos, completa los 31; e IU obtiene los 13 diputados de su lista, ya que no había ganado en ningún distrito. Un desglose similar de datos se hace para cada Comunidad Autónoma.

Esta técnica de la biproporcionalidad tiene ventajas con respecto a la técnica seguida en Alemania, ya que en este caso no existen *diputados sobrantes*.

Partidos	PP	PSOE	IU	CiU	PNV	HB	EA	CC	BNG
Escaños	202	196	55	24	7	4	2	5	5

Tabla 7.44: Escaños que corresponden a los partidos en el reparto de 500 escaños con el método de St. Laguë en proporción a los votos totales.

La variaciones en las tres Tablas que contienen los repartos biproporcionales se derivan de las variaciones en la representación de las Comunidades Autónomas en las tres alternativas, ya que el total para los partidos es el mismo en los tres casos.

7.6 Desproporcionalidad

Finalizamos este capítulo dedicado a la adaptación del Sistema Electoral Alemán a España calculando los índices de proporcionalidad *MC* y *DA* de las tres alternativas desarrolladas y recogemos gráficamente los resultados en el diagramas de las Figuras 7.4 y 7.5 Hemos de calcular 4 valores para cada índice: los tres correspondientes a las tres alternativas, con repartos para los diputados de lista en cada Comunidad Autónoma independientemente, y el correspondiente al reparto biproporcional (en este caso las tres alternativas dan igual resultado global).

C.Autónoma	PP	PSOE	IU	CiU	PNV	HB	EA	CC	BNG	Totales
Andalucía	31	43	13	0	0	0	0	0	0	87
Cataluña	14	30	6	24	0	0	0	0	0	74
Madrid	29	19	10	0	0	0	0	0	0	58
C.Valenciana	22	20	6	0	0	0	0	0	0	48
Galicia	17	13	1	0	0	0	0	0	5	36
Castilla-León	21	14	4	0	0	0	0	0	0	39
País Vasco	5	6	3	0	7	3	2	0	0	26
Castilla-La M.	12	11	2	0	0	0	0	0	0	25
Canarias	8	6	1	0	0	0	0	5	0	20
Aragón	8	6	2	0	0	0	0	0	0	16
Asturias	6	5	2	0	0	0	0	0	0	13
Murcia	7	5	1	0	0	0	0	0	0	13
Extremadura	6	7	1	0	0	0	0	0	0	14
Baleares	5	4	1	0	0	0	0	0	0	10
Cantabria	3	3	1	0	0	0	0	0	0	7
Navarra	3	2	1	0	0	1	0	0	0	7
La Rioja	3	2	0	0	0	0	0	0	0	5
Ceuta	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Melilla	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Totales	202	196	55	24	7	4	2	5	5	500

Tabla 7.45: Resultado de aplicar un reparto biproporcional para la alternativa primera.

C.Autónoma	PP	PSOE	IU	CiU	PNV	HB	EA	CC	BNG	Totales
Andalucía	33	44	12	0	0	0	0	0	0	89
Cataluña	14	31	6	24	0	0	0	0	0	75
Madrid	31	20	11	0	0	0	0	0	0	62
C.Valenciana	23	20	6	0	0	0	0	0	0	49
Galicia	16	12	1	0	0	0	0	0	5	34
Castilla-León	20	13	3	0	0	0	0	0	0	36
País Vasco	5	6	3	0	7	3	2	0	0	26
Castilla-La M.	11	10	2	0	0	0	0	0	0	23
Canarias	8	6	1	0	0	0	0	5	0	20
Aragón	8	6	2	0	0	0	0	0	0	16
Asturias	6	6	2	0	0	0	0	0	0	14
Murcia	7	5	2	0	0	0	0	0	0	14
Extremadura	5	7	1	0	0	0	0	0	0	13
Baleares	5	4	1	0	0	0	0	0	0	10
Cantabria	3	2	1	0	0	0	0	0	0	6
Navarra	2	2	1	0	0	1	0	0	0	6
La Rioja	3	2	0	0	0	0	0	0	0	5
Ceuta	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Melilla	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Totales	202	196	55	24	7	4	2	5	5	500

Tabla 7.46: Resultado de aplicar un reparto biproporcional para la alternativa segunda.

C.Autónoma	PP	PSOE	IU	CiU	PNV	HB	EA	CC	BNG	Totales
Andalucía	32	43	13	0	0	0	0	0	0	88
Cataluña	14	31	6	24	0	0	0	0	0	75
Madrid	31	20	11	0	0	0	0	0	0	62
C.Valenciana	23	20	6	0	0	0	0	0	0	49
Galicia	17	12	1	0	0	0	0	0	5	35
Castilla-León	20	13	4	0	0	0	0	0	0	37
País Vasco	5	6	2	0	7	3	2	0	0	25
Castilla-La M.	11	10	2	0	0	0	0	0	0	23
Canarias	8	6	1	0	0	0	0	5	0	20
Aragón	8	6	2	0	0	0	0	0	0	16
Asturias	5	6	2	0	0	0	0	0	0	13
Murcia	7	5	1	0	0	0	0	0	0	13
Extremadura	5	7	1	0	0	0	0	0	0	13
Baleares	5	4	1	0	0	0	0	0	0	10
Cantabria	3	3	1	0	0	0	0	0	0	7
Navarra	3	2	1	0	0	1	0	0	0	7
La Rioja	3	2	0	0	0	0	0	0	0	5
Ceuta	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Melilla	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Totales	202	196	55	24	7	4	2	5	5	500

Tabla 7.47: Resultado de aplicar un reparto biproporcional para la alternativa tercera.

De la observación de los datos de la Tabla 7.48 podemos obtener las siguientes conclusiones:

- Los valores de los índices de proporcionalidad han bajado considerablemente, quedando por debajo de los obtenidos en todas las alternativas desarrolladas en capítulos anteriores. El correspondiente a reparto biproporcional es el más bajo de todos, siendo su valor muy próximo a cero.
- Cualquiera de las alternativas desarrolladas tiene características muy similares a las del sistema electoral alemán (proporcionalidad, sistema de votación, etc.).

Los diagramas de las Figuras 7.4 y 7.5 representan los valores de los índices MC y DA para las tres alternativas y el valor obtenido para el reparto biproporcional.

Alternativa	MC	DA
Primera y proporcionalidad por Comunidad Autónoma	0.516	0.933
Segunda y proporcionalidad por Comunidad Autónoma	0.434	0.748
Tercera y proporcionalidad por Comunidad Autónoma	0.569	0.933
Primera, segunda, tercera y biproporcionalidad	0.151	0.278

Tabla 7.48: Índices de proporcionalidad para las tres alternativas y para la biproporcionalidad.

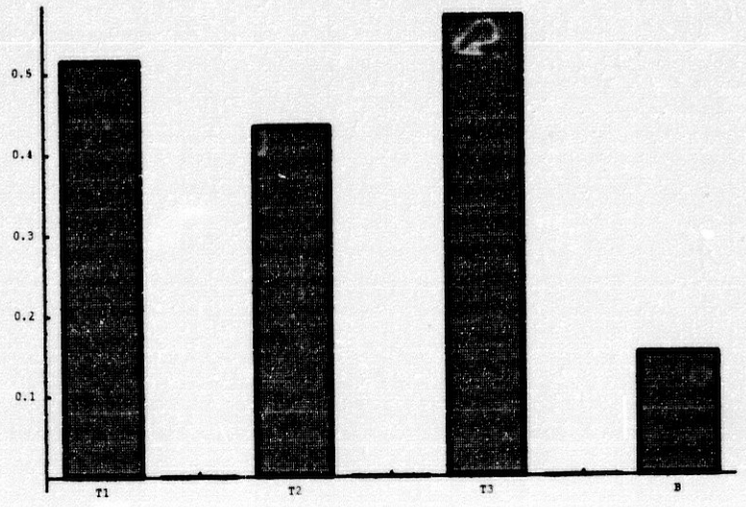


Figura 7.4: Comparación de los valores del índice MC para las tres alternativas y el valor del índice para el reparto biproporcional.

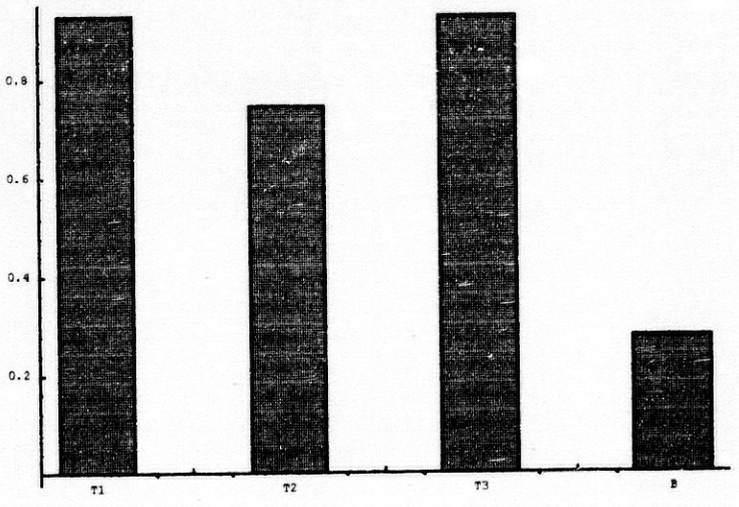


Figura 7.5: Comparación de los valores del índice DA para las tres alternativas y el valor del índice para el reparto biproporcional.

Capítulo 8

Proporcionalidad Global y Bonificación al partido más votado

8.1 Introducción

En este capítulo desarrollamos una nueva técnica para diseñar un sistema electoral. Ha sido pensada para ofrecer una alternativa al Sistema Electoral Español actual que corrija el tipo de desproporcionalidad de éste, no en el sentido de disminuirle drásticamente, sino en el de primar sólo al partido vencedor y de manera que dicha prima repercuta en una pérdida proporcional de representación de todos los demás partidos, en lugar de ser exclusivamente a costa del tercero y siguientes de ámbito estatal. Se trata de efectuar repartos a varios niveles, aunque ello no significa que el elector tenga que emitir varios votos. De hecho, para el elector la votación puede ser idéntica a la actual: depositar un sólo voto en favor de una candidatura de la circunscripción provincial a la que pertenezca.

La técnica ofrece más posibilidades que el Sistema Electoral Alemán, evita el continuo *districting* y simplifica el proceso de votación. La clave de todo radica en el uso de métodos de reparto con restricciones mínimas.

Por otra parte, hemos de indicar que lo importante es la técnica, pero que, como en capítulos anteriores, hemos de fijar valores a ciertos parámetros (umbral mínimo para participar en un reparto, número de escaños usados en cada reparto, etc.) y el método a usar (St. Laguë, d'Hondt) para simular resultados.

La elección de esos valores y de los métodos no está hecha al azar, sino que va acompañada de una justificación previa; no obstante, es evidente que otros muchos valores y métodos serían perfectamente válidos.

La técnica está pensada como una modificación del actual Sistema Electoral Español, que trate de conservar aspectos concretos y cambie el sentido de algunos otros. Así, para los principales partidos de ámbito autonómico se ha considerado el hecho de que vienen obteniendo una representación próxima a su cuota, por tanto, no debe modificarse sensiblemente su asignación; una forma de hacerlo es garantizándoles, al menos, la misma representación que obtienen con el sistema actual.

No ocurre lo mismo con los partidos de ámbito estatal. Habitualmente, con el sistema actual, el partido más votado está beneficiado, como hemos estudiado en el capítulo 4, y los restantes, a partir del tercero más votado de ámbito estatal, están penalizados.

Cara a facilitar la acción de gobierno se puede aceptar primar al partido vencedor, incluso aumentarle con respecto al sistema actual las posibilidades de alcanzar la mayoría absoluta pero no parece lógico primar simultáneamente a los dos primeros partidos y tampoco parece justificarse que la bonificación al vencedor (incluso al segundo, como ocurre ahora) sea a costa de sólo unos cuantos partidos.

Por eso, hemos fijado los siguientes objetivos en esta nueva alternativa el sistema electoral actual:

1. Garantizar a todos los partidos (tanto de ámbito autonómico como de ámbito estatal) un número de representantes igual o superior al actual.
2. Disminuir la discriminación que sufren los partidos intermedios de ámbito estatal.
3. Aumentar la proporcionalidad (al menos entre todos los partidos, excluido el más votado).
4. Facilitar al partido más votado la gobernabilidad (entendiendo por ello, las posibilidades para alcanzar la mayoría absoluta, tanto individualmente como en coalición con otros partidos).

Veremos, que ello es perfectamente posible y que, además, se puede lograr más equidad en otros aspectos no citados anteriormente.

Una primera forma de alcanzar los objetivos anteriores consiste en aumentar el tamaño de la Cámara (sin pasar de 400 escaños) y asignarlos a los partidos en tres etapas.

1. Primera asignación: la misma que produce el sistema electoral actual.
2. Segunda asignación: es una asignación complementaria para corregir la gran desproporcionalidad que existe entre los votos totales y los escaños totales recibidos por

los partidos en la primera asignación. Se estudia en el siguiente apartado, bajo el nombre de proporcionalidad global, y la notaremos por PG.

3. Tercera asignación: es una asignación directa en favor del partido más votado. Se desarrrolla en el apartado titulado proporcionalidad y bonificación al partido vencedor, y la notaremos por PyB

Las únicas circunscripciones electorales a utilizar, en cualquiera de las tres etapas que constituyen esta alternativa, serán las provincias.

Hemos de indicar que la técnica que vamos a desarrollar es aplicable, no sólo al Sistema Electoral Español, sino también a la reforma del sistema electoral de cualquier otro país. Al mismo tiempo, puede ser de gran utilidad para nuevas democracias de paises muy heterogéneos, ya que se conjuga proporcionalidad, representación de partidos de ámbito regional y gobernabilidad.

8.2 Proporcionalidad global

La desproporcionalidad de las asignaciones que origina el sistema electoral actual puede corregirse mediante la asignación complementaria de un número, k, de escaños adicionales planteándola como un problema de asignación proporcional de $350 + k$ escaños a nivel nacional con restricciones que afectan a los 350 primeros. Esta asignación complementaria se basa tanto en los votos totales de los partidos como en los escaños totales de la Cámara, condicionada por los escaños totales obtenidos por los partidos en la primera asignación. Por tanto, todo partido y toda circunscripción recibe, al menos, tantos representantes como con el sistema actual.

Para la asignación complementaria no tiene una importancia crucial el método que se elija, puesto que se trata de un reparto único (no de 52 repartos provinciales), donde la circunscripción, que ahora es todo el Estado, es de gran tamaño, pues, aunque el número de nuevos escaños, k, fuese pequeño, el número de escaños que intervienen en la resolución del problema es muy grande, $350 + k$ y, por tanto, todas las fórmulas dan alta proporcionalidad. Así pues, se va a usar el método d'Hondt para la segunda asignación (asignación complementaria), puesto que no existe una razón importante en favor de otro método. Queda por fijar el valor de k y el umbral que se exige a los partidos para participar en esta asignación complementaria.

Teniendo en cuenta que han sido unos 25 millones los votantes en las últimas elecciones, una barrera superior al 3% de los votos totales no permitiría participar en la asignación complementaria a partidos que no consigan unos 750 000 votos, con lo que posiblemente,

en muchos casos, no se logre la corrección deseada. Una barrera en torno al 2% permite la participación de partidos con alrededor de 500 000 de votos. Tal vez una discusión más profunda lleve a proponer como barrera algún porcentaje comprendido entre el 2% y el 3% de los votos. Aquí, con objeto de poder realizar simulaciones, se va a elegir como barrera el 2%. En [77] se ha elegido el 3% como umbral mínimo, cuanto más bajo sea el umbral elegido más posibilidades de corregir la desproporción tienen los pequeños partidos de ámbito estatal, y más partidos tienen posibilidad de conseguir representación en el Congreso.

8.2.1 Escaños necesarios para alcanzar la proporcionalidad global

¿Qué entendemos por alcanzar la proporcionalidad global mediante una asignación complementaria?

Si los votos totales de los n partidos que superan el 2% (de los votos totales a partidos) son $\mathbf{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ y los escaños recibidos en las 52 circunscripciones por estos partidos son $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, se va a entender que:

El mínimo valor de k que permite alcanzar la proporcionalidad global con un método de asignación, M, es el menor valor de k para el cual, al menos, una de las posibles soluciones, digamos $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$, obtenidas al asignar $k + \sum_i a_i$ escaños con dicho método en función de los votos $\mathbf{v}$, sin restricción alguna, verifica $a_i \leq b_i$, para todo partido i.

Evidentemente, cuando M sea un método basado en divisores, cualquier otro valor de k, superior al mínimo, seguirá dando proporcionalidad global; el mínimo es el que menos modifica la asignación correspondiente a la primera etapa (la producida por el sistema electoral actual).

De una forma general, podemos decir que valores inferiores al mínimo, pero próximos a él, conducen a repartos con proporcionalidad elevada. Por tanto, el mínimo definido anteriormente no es un valor obligado para el objetivo de esta alternativa sino una referencia a tener en cuenta.

Veamos el ejemplo que recogemos en la Tabla 8.1 con los datos de las elecciones generales de 1996. Sólo cuatro partidos, PP, PSOE, IU y CiU, superaron el 2% de los votos; por tanto, son los únicos que participan en el reparto de k escaños para la proporcionalidad global.

Como podemos observar, en la Tabla 8.1, correspondiente al sistema actual en la tercera columna de números, los partidos que superan el 2% de los votos totales obtuvieron

Partid.	Votos totales	Cuota	Esc. act.	PG k15	PG k20	PG k25	PG k30	PG k32	PG k33
PP	9 716 006	140.33	156	148	150	152	154	155	**156**
PSOE	9 425 678	136.13	141	144	146	148	150	151	**151**
IU	2 639 774	38.13	21	40	41	41	42	42	**42**
CiU	1 151 633	16.63	16	17	17	18	18	18	**18**
PNV	318 951	4.61	5						
CC	220 418	3.18	2						
BNG	220 147	3.18	1						
HB	181 304	2.62	4						
ER	162 545	2.35	1						
EA	115 861	1.67	2						
UV	81 350	1.17	1						
Total.	24 233 667	350.00	350						

Tabla 8.1: Repartos complementarios sin restricciones para diferentes valores de k, usando los votos totales de la elección de 1996.

156+141+21+16=334 escaños. Si tomamos $k = 15$ y repartimos 334+15 escaños en proporción a los votostotales del PP, PSOE, IU y CiU, obtenemos la columna 4^a: 148, 144, 40, 17 (los restantes partidos no cambian). Por tanto $a_1 > b_1$ puesto que el PP no alcanzaría los 156. Si aumentamos k a valores $20, 25, 30$ y 32...la asignación cambia. El valor mínimo de k para conseguir la proporcionalidad global en las elecciones de 1996, es $k = 33$, como se muestra en la última columna. Al imponer restricciones mínimas en el reparto global, valores de k inferiores a $k = 33$, y próximos a él, conducen a repartos con proporcionalidad elevada. Luego, $k = 33$ no es un valor obligado para el objetivo de esta alternativa sino una referencia importante.

¿Qué valor de k elegir para conseguir proporcionalidad global con la asignación complementaria?

Usando el método d'Hondt para la asignación complementaria, el mínimo valor de k que se habría necesitado para cada una de las 7 elecciones generales sería el que se indica en la Tabla 8.2.

Elección	1977	1979	1982	1986	1989	1993	1996
k-mínimo	85	70	43	33	56	26	33

Tabla 8.2: Escaños para conseguir proporcionalidad global

Las dos primeras elecciones necesitan de un mayor número de escaños para efectuar un reparto complementario con el que alcanzar la proporcionalidad global. Son dos elecciones que corresponden al inicio de la democracia y, por tanto, con mayor fragmentación parlamentaria. Para las 5 elecciones restantes el número de escaños necesarios es mucho menor, con una media inferior a 40 y alrededor de 30 para 3 de ellas.

Por tanto, es posible que por debajo de $k = 30$ se den elecciones en las que, para una relación de fuerzas políticas similar a la actual, no se alcance proporcionalidad global; sin embargo, incluso con valores muy inferiores a 30, como podría ser $k = 20$, se consigue una importante mejora de la proporcionalidad, ya que la desproporción actual perjudica a muy pocos partidos, que precisamente son los que recibirían en la asignación complementaria la mayor parte de los k escaños adicionales.

En la gráfica de la Figura 8.1 cada barra representa el número de escaños que se necesitan para alcanzar la proporcionalidad global en cada una de las elecciones generales.

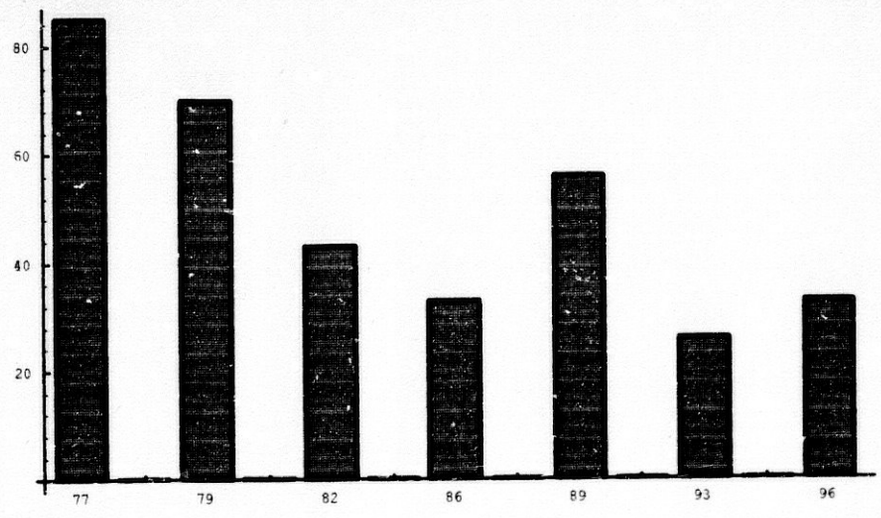


Figura 8.1: Número de escaños que se necesitan para conseguir la proporcionalidad global en cada una de las 7 elecciones generales.

8.2.2 Corrección de la desproporcionalidad global actual con 30 escaños

Teniendo en cuenta los datos de las elecciones generales habidas en España desde 1977 hasta 1996, vamos a mostrar que es posible mejorar la proporcionalidad en la asignación

de escaños a los partidos con la alternativa anterior. En las Tablas 8.3 a 8.9 se recogen los efectos de la asignación complementaria a las elecciones generales, usando 30 escaños en cada caso. El criterio que se ha seguido para aplicar la asignación complementaria es que intervengan en el reparto todos aquéllos partidos que han superado el 2% de los votos. En cada Tabla, la columna "Escaños actual" muestra los resultados con el sistema actual (para una Cámara de 350 Diputados) y la columna PG los correspondientes a la corrección mediante 30 escaños para la proporcionalidad global (para una Cámara de 380 Diputados). Las comparaciones deben establecerse entre las columnas que muestran los porcentajes ya que en ellos no afecta el uso de diferentes tamaños de la Cámara.

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños actual	% escaños	Cor. PG	% PG
UCD	6 337 288	37.99	**132.96**	**166**	47.43	166	43.68
PSOE	5 358 781	32.13	**112.43**	**118**	33.71	118	31.05
PCE	1 718 026	10.30	**36.04**	**21**	6.00	32	8.42
AP	1 525 028	9.14	**31.99**	**18**	5.14	28	7.36
PSP-US	816 510	4.89	**17.33**	**6**	1.71	15	3.94
PDC	514 647	3.09	**10.80**	**11**	3.14	11	2.89
PNV	314 409	1.88	**6.60**	**8**	2.29		
EE	60 312	0.36	**1.27**	**1**	0.29		
AIC	37 183	0.22	**0.78**	**1**	0.29		
Totales	16 682 184	100.00	350.00	350	100.00		

Cor.= Corrección

Tabla 8.3: Corrección de la desproporcionalidad de la elección de 1977 usando 30 escaños.

Si observamos la Tabla 8.3, después de la asignación complementaria, los partidos de ámbito estatal, a partir del tercero, y que han podido intervenir en el reparto, PCE, AP y PSP-US, han recibido 32 28 y 15 escaños, respectivamente. Con ello, el número de escaños que obtienen con la proporcionalidad global es mucho más próximo a sus cuotas respectivas y la diferencia entre el tanto por ciento de votos obtenidos y el tanto por ciento de escaños recibidos, ha disminuido considerablemente. Estos tres partidos, si observamos las columnas cuarta y quinta, están muy penalizados por el sistema actual.

En cuanto al PDC, que también interviene en el reparto, hay que resaltar que al ser un partido de ámbito autonómico, había obtenido un número de escaños similar a su cuota. En este caso, con una cuota de 10.80 (sobre 350) había obtenido 11 escaños, esto ha hecho que con la asignación complementaria no aumente su número de escaños.

La Tabla 8.4 recoge los resultados de la asignación complementaria de escaños para los partidos que intervinieron en las elecciones de 1979. De los partidos que participaron

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños actual	% escaños	Cor. PG	% PG
UCD	6 262 593	37.05	**129.68**	**167**	47.71	167	43.95
PSOE	5 469 813	32.36	**113.27**	**123**	35.14	123	32.37
PCE	1 938 487	11.47	**40.14**	**25**	7.14	38	10.00
CD	1 064 333	6.30	**22.04**	**9**	2.57	20	5.26
CiU	483 254	2.86	**10.01**	**9**	2.57	9	2.37
UN	378 955	2.24	**7.85**	**1**	0.29	7	1.84
PSA	325 762	1.93	**6.75**	**5**	1.43		
PNV	275 292	1.63	**5.70**	**7**	2.00		
PTE	192 798	1.14	**3.99**	**0**	0.00		
HB	172 110	1.02	**3.56**	**2**	0.57		
ORT	127 417	0.75	**2.64**	**0**	0.00		
ERC	125 690	0.74	**2.60**	**1**	0.29		
EE	85 677	0.51	**1.77**	**1**	0.29		
Totales	16 902 181	100.00	350.00	350	100.00		

Tabla 8.4: Corrección de la desproporcionalidad de la elección de 1979 usando 30 escaños.

en la asignación de los 30 escaños, observamos como PCE, CD y UN obtienen la mayoría de ellos, ya que las diferencias entre los tantos por cientos de votos obtenidos y escaños recibidos han pasado de 4.33, 3.73 y 1.95 que tenían a 1.47, 1.04 y 0.4, respectivamente, que alcanzan cuando se hace la asignación complementaria y el número de escaños que cada uno ha pasado de 25, 9 y 1 cuando se asignaron 350 escaños a 38, 20 y 7 que han obtenido con la PG.

Al aplicarle la asignación complementaria a los datos de las elecciones de 1982, se obtienen los resultados que se recogen en la Tabla 8.5. UCD, PCE y CDS, que están subrepresentados en la primera asignación, se ven muy recompensados en la asignación complementaria ya que UCD recibe más del doble de escaños que en la primera asignación; PCE y CDS reciben 10 y 8 escaños más, respectivamente; por último, CiU, que también interviene en la asignación complementaria, como ya en la primera asignación obtuvo 12 escaños, ahora se ve beneficiado con 1 más, llegando a obtener 13 escaños.

Los resultados que se obtuvieron con la proporcionalidad global para las elecciones de 1986 se recogen en la Tabla 8.6. De nuevo son los partidos de ámbito estatal, en este caso CDS e IU, los que más se benefician con la asignación complementaria. En esta elección, salvo el PSOE, todos los partidos que participan en el reparto complementario reciben algún escaño.

Los resultados correspondientes a 1989 se recogen en la Tabla 8.7. En cuanto a la

Partido	Votos totales	% *votos*	Cuota	Escaños actual	% escaños	Cor. PG	% PG
PSOE	10 127 392	50.41	**176.44**	**202**	57.71	202	53.16
AP	5 543 107	27.59	**96.58**	**107**	30.57	107	28.16
UCD	1 354 858	6.74	**23.61**	**11**	3.14	22	5.79
PCE	844 976	4.21	**14.72**	**4**	1.14	14	3.68
CiU	772 726	3.85	**13.46**	**12**	3.43	13	3.42
CDS	600 842	2.99	**10.47**	**2**	0.57	10	2.63
PNV	395 629	1.97	**6.89**	**8**	2.29		
HB	210 601	1.05	**3.67**	**2**	0.57		
ERC	138 116	0.69	**2.41**	**1**	0.29		
EE	100 326	0.50	**1.75**	**1**	0.29		
Totales	20 088 573	100.00	350.00	350	100.00		

Tabla 8.5: Corrección de la desproporcionalidad de la elección de 1982 usando 30 escaños.

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños actual	% escaños	Cor. PG	% PG
PSOE	8 901 718	47.33	**165.66**	**184**	52.56	184	48.42
CP	5 247 677	27.90	**97.66**	**105**	30.00	106	27.89
CDS	1 838 799	9.78	**34.22**	**19**	5.43	37	9.74
CiU	1 014 258	5.39	**18.87**	**18**	5.14	20	5.26
IU	768 158	4.08	**14.29**	**6**	1.71	15	3.95
PNV	309 610	1.65	**5.76**	**6**	1.71		
HB	215 282	1.14	**4.01**	**5**	1.43		
UER	123 912	0.66	**2.31**	**1**	0.29		
EE	107 053	0.57	**1.99**	**2**	0.57		
CG	79 972	0.43	**1.49**	**1**	0.29		
PAR	71 628	0.38	**1.33**	**1**	0.29		
AIC	64 989	0.35	**1.21**	**1**	0.29		
UV	64 403	0.34	**1.20**	**1**	0.29		
Totales	18 807 459	100.00	350.00	350	100.00		

Tabla 8.6: Corrección de la desproporcionalidad de la elección de 1986 usando 30 escaños.

Partido	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños actual	% escaños	Cor. PG	% PG
PSOE	8 088 072	42.39	**148.40**	**175**	50.00	175	46.05
PP	5 282 877	27.69	**96.93**	**107**	30.57	107	28.16
IU	1 851 080	9.70	**33.96**	**17**	4.86	33	8.68
CDS	1 617 104	8.48	**29.67**	**14**	4.00	28	7.37
CIU	1 030 476	5.40	**18.91**	**18**	5.14	18	4.74
PNV	253 769	1.33	**4.66**	**5**	1.43		
HB	216 822	1.14	**3.98**	**4**	1.14		
PA	212 807	1.12	**3.90**	**2**	0.57		
UV	144 655	0.76	**2.65**	**2**	0.57		
EA	136 595	0.72	**2.51**	**2**	0.57		
EE	105 217	0.55	**1.93**	**2**	0.57		
PAR	71 628	0.38	**1.31**	**1**	0.29		
AIC	64 989	0.34	**1.19**	**1**	0.29		
Totales	19 076 091	100.00	350.00	350	100.00		

Tabla 8.7: Corrección de la desproporcionalidad de la elección de 1989 usando 30 escaños.

distribución de los k escaños de la proporcionalidad global son muy similares a los de 1986: entre IU y CDS reciben los 30 nuevos escaños, consiguiendo así duplicar su representación.

Como se observa en la Tabla 8.8, en 1993 se ha alcanzado la proporcionalidad global, ya que sólo se necesitaban 26 escaños para conseguirla y hemos usado 30. Además, como el método d'Hondt asigna a cada partido, al menos, su cuota inferior de escaños, el déficit en escaños, en términos absolutos, no alcanza el valor de 1 escaño para ningún partido de los que participan en la corrección de la desproporcionalidad. IU ha pasado de perder cerca del 50% de sus escaños con el sistema actual a recibir un porcentaje de escaños superior a su porcentaje de votos. Lo mismo ocurre con todos los partidos que participan en la proporcionalidad global; es decir, los 4 están beneficiados.

Los cambios obtenidos para 1996, que se recogen en la Tabla 8.9, son muy similares a los de las elecciones anteriores. El déficit de IU, que superaba el 43%, ha desaparecido tras la asignación complementaria.

De las 5 últimas elecciones generales, en las elecciones de 1989 es en la que se necesitan más escaños para alcanzar proporcionalidad global, según los datos obtenidos en la Tabla 8.2. Aún así, observamos en la Tabla 8.7 que, con la corrección efectuada, el déficit porcentual de escaños tanto de IU como del CDS pasa de estar, aproximadamente, entre el 4.5% y el 5% al 1%, tras la asignación para la proporcionalidad global.

Partidos	Votos totales	% votos	Cuota.	Escaños actual	% escaños	Cor. PG	% PG
PSOE	9 071 760	40.52	**141.81**	**159**	45.43	161	42.37
PP	8 170 201	36.49	**127.71**	**141**	40.28	145	38.16
IU	2 245 444	10.03	**35.10**	**18**	5.14	39	10.26
CIU	1 162 534	5.19	**18.17**	**17**	4.86	20	5.26
CDS	414 000	1.85	**6.47**	**0**	0.00		
PNV	300 308	1.34	**4.69**	**5**	1.43		
CC	206 953	0.92	**3.24**	**4**	1.13		
HB	206 296	0.92	**3.22**	**2**	0.57		
PAR	144 241	0.64	**2.25**	**1**	0.29		
BNG	126 965	0.57	**1.98**	**0**	0.00		
ERC	121 972	0.54	**1.91**	**1**	0.29		
EA	117 859	0.53	**1.84**	**1**	0.29		
UV	102 714	0.46	**1.61**	**1**	0.29		
Totales	22 391 247	100.00	350.00	350	100.00		

Tabla 8.8: Corrección de la desproporcionalidad de la elección de 1993 usando 30 escaños.

Partidos	Votos totales	% votos	Cuota	Escaños actual	% escaños	Cor. PG	% PG
PP	9 716 006	40.09	**140.33**	**156**	44.57	156	41.05
PSOE	9 425 678	38.89	**136.13**	**141**	40.28	149	39.21
IU	2 639 774	10.89	**38.13**	**21**	6.00	41	10.79
CiU	1 151 633	4.75	**16.63**	**16**	4.57	18	4.74
PNV	318 951	1.32	**4.61**	**5**	1.43		
CC	220 418	0.91	**3.18**	**4**	1.14		
BNG	220 147	0.91	**3.18**	**2**	0.57		
HB	181 304	0.75	**2.62**	**2**	0.57		
ER	162 545	0.67	**2.35**	**1**	0.29		
EA	115 861	0.48	**1.67**	**1**	0.29		
UV	81 350	0.34	**1.17**	**1**	0.29		
Totales	24 233 667	100.00	350.00	350	100.00		

Tabla 8.9: Corrección de la desproporcionalidad de la elección de 1996 usando 30 escaños.

De lo anteriormente expuesto, podemos **concluir** lo siguiente:

Aunque se han utilizado sólo 30 escaños para la asignación complementaria, se ha conseguido un aumento muy importante de la proporcionalidad y, sobre todo, han disminuido considerablemente los agravios entre partidos de ámbito estatal y los de ámbito autonómico.

En todas las elecciones, uno o más partidos de ámbito estatal (tercero, cuarto...) pierden con el sistema actual entre 4 y 5 puntos con respecto a su porcentaje de votos, son recompensados y esta pérdida disminuiye aproximadamente al valor 1 en casi todas las elecciones; sólo en 1977 mantendría un valor próximo a 1.9 para el PCE.

Hay que tener en cuenta que una pérdida de 4 o 5 puntos, porcentuales para los partidos afectados (por ejemplo, el tercero en número de votos) significa, alrededor del 50% de su cuota, que equivale a muchos escaños. Mientras que a otros partidos con menos votos, pero concentrados en pocas circunscripciones, la asignación con el sistema actual difiere un escaño con respecto a su cuota (es decir, están representados proporcionalmente).

8.2.3 Desproporcionalidad después de la corrección

En la Tabla 8.10 se muestran los valores de los índices de desproporcionalidad *MC* y *DA* para los resultados obtenidos después de la asignación complementaria llevada a cabo en las 7 elecciones generales con $k = 30$. Si comparamos los datos de esta Tabla 8.10 con los de la última columna de la Tabla 5.8, observaremos cómo han descendido considerablemente los valores de los índices de desproporcionalidad.

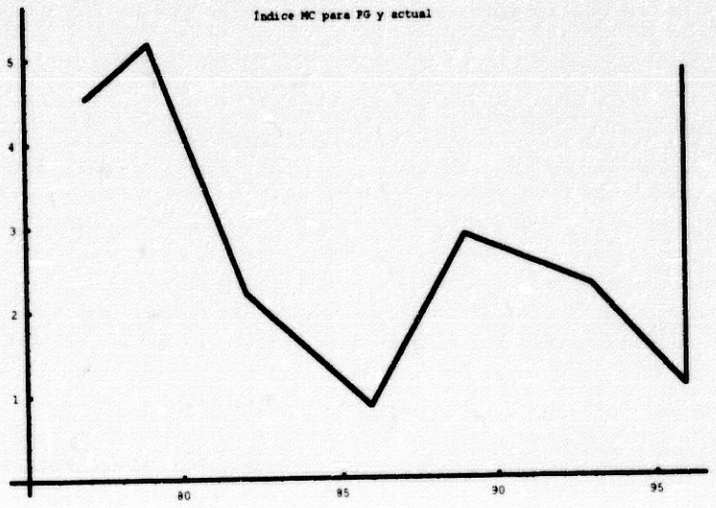
Elección	1977	1979	1982	1986	1989	1993	1996	Media
MC	4.54	5.19	2.22	0.86	2.89	2.29	1.10	2.73
DA	5.96	7.11	3.44	1.26	4.12	3.96	1.97	3.97

Tabla 8.10: Desproporcionalidad después de la asignación complementaria.

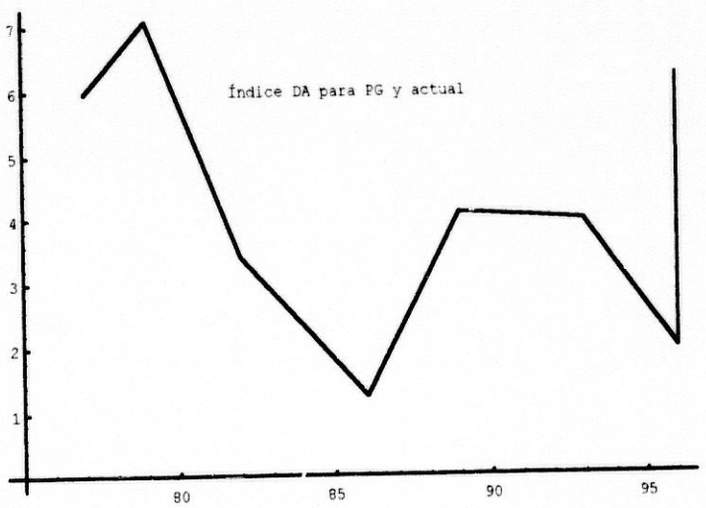
En las Figuras 8.2 y 8.6 se muestran gráficamente los valores de los índices *MC* y *DA* obtenidos con PG, comparados con el valor de dichos índices en el sistema actual.

8.2.4 Reparto complementario sin lista nacional

Los escaños que un partido recibe por proporcionalidad global podrían asignarse a una lista de candidatos que dicho partido habría presentado a nivel nacional. Es una posibilidad que, en principio, parece ser el mecanismo más simple. Sin embargo, aquí se va a sugerir otro método, aparentemente más complejo, pero que a cambio puede tener ventajas.



Figura~8.2: Comparación de los valores del índice MC para la alternativa PG de las siete elecciones generales y el valor de MC con el sistema actual.



Figura~8.3: Comparación de los valores del índice DA para la alternativa PG de las siete elecciones generales y el valor de DA con el sistema actual.

Conocido el número de escaños que debe recibir cada partido para la compensación global, se pueden asignar a los primeros puestos que no han recibido escaño en las listas provinciales. Ahora bien, habría que determinar esta distribución ¿a las listas de qué provincias y cuántos a cada una? Se trata de volver a resolver, para cada partido, un problema de asignación proporcional con restricciones. Por ejemplo, con los datos actuales de 1996, el PSOE debe recibir 8 escaños más para compensar la desproporcionalidad, en total serían 149; luego se plantea como un problema de asignar 149 escaños en proporción a sus votos en todas las provincias con la restricción de que en cada una de ellas debe recibir, al menos, tantos escaños como obtuviese en la primera asignación.

¿Qué método usar en esta ocasión?

Nada justifica dar mayor valor al votante de un partido por pertenecer a una provincia u otra. Por tanto, el método más lógico para esta asignación es el de St. Laguë.

De esta forma, los 2 nuevos escaños de CiU (para la proporcionalidad global en 1996) los recibiría en Barcelona y corresponderían a los candidatos que ocupaban las posiciones 10 y 11 en la lista de CiU por Barcelona. Los 8 nuevos escaños del PSOE corresponderían a Madrid 3, Barcelona 3, Sevilla 1 y Valencia 1; por ejemplo, los 3 nuevos escaños del PSOE por Madrid corresponderían a los candidatos que ocuparon en su lista las posiciones 12, 13 y 14. Los 20 nuevos escaños de IU corresponden 4 a Madrid, 3 a Barcelona y 1 escaño a cada una de las provincias de Alicante, Badajoz, Baleares, Córdoba, Coruña, Guipúzcoa, Jaén, Málaga, Asturias, Cantabria, Valencia, Valladolid y Zaragoza.

Obsérvese que la mayoría de los escaños de la asignación complementaria han correspondido a las listas de las provincias más pobladas.

8.3 Proporcionalidad y bonificación al partido más votado

La tercera asignación de escaños es una asignación en favor, exclusivamente, del partido más votado con objeto de garantizarle, al menos, las mismas posibilidades para alcanzar la mayoría absoluta que le da el sistema electoral actual. Y, de no alcanzarla, garantizarle que, al menos, todas aquellas coaliciones con otros partidos que actualmente dan mayoría absoluta siguen dándola. Es decir, se trata de conseguir que el partido más votado tenga, al menos, las mismas posibilidades de formar gobiernos estables que le otorga el sistema electoral actual.

En principio, puede parecer que aumentar la bonificación al partido más votado significa disminuir la proporcionalidad, con respecto al sistema actual. No es así. Veremos

que la alternativa obtenida con las tres asignaciones da mayor facilidad para gobernar al partido vencedor y una proporcionalidad algo similar a la del sistema electoral actual.

Para garantizar al partido vencedor (o a sus coaliciones) las mismas posibilidades de mayoría absoluta que le concede el sistema actual será necesario primarlo de manera que su posición con respecto a los restantes partidos sea, al menos, tan ventajosa como en la actualidad. Ello supone alguna pérdida de proporcionalidad con respecto a la obtenida después de las dos primeras asignaciones, pero da mayor proporcionalidad que el sistema actual porque sólo se prima al partido vencedor, no a los dos más votados (incluso a otros), como ocurre actualmente.

8.3.1 Número de escaños para la asignación directa

Una de las características del Sistema Electoral Español, que suele considerarse interesante, es que prima a los partidos más votados. Se argumenta que es interesante porque facilita la gobernabilidad del país y la cohesión de los grandes partidos.

El método d'Hondt prima, normalmente, en la asignación de los escaños de cada provincia, al partido más votado, casi siempre en perjuicio del tercer o del cuarto partido. El efecto acumulado en los 52 repartos es que un partido puede recibir una prima importante en escaños si gana en todas o en casi todas las circunscripciones y, como consecuencia, puede alcanzar la mayoría absoluta en escaños aunque esté lejos de ella en votos. En este sentido, podría afirmarse que el sistema electoral actual facilita la gobernabilidad.

Sin embargo, la afirmación se vuelve falsa en algunas ocasiones, puesto que depende de los resultados que se den en las distintas provincias.

De hecho, es posible que el segundo partido reciba una prima en escaños mayor que la del primero, porque sea vencedor en más provincias que el primero (por ejemplo, en muchas provincias pequeñas donde el coste de cada escaño en votos es mucho menor que en las grandes); incluso, es posible que el partido vencedor en votos no sea el que más escaños obtiene (como ha estado a punto de ocurrir en las elecciones de 1996). Por otra parte, existen partidos de ámbito autonómico muy consolidados que vencen en algunas provincias de su autonomía y, por tanto, suelen ser los beneficiados por el sistema electoral en dicha provincia. ¿Puede decirse, en estos casos, que el sistema electoral facilita la gobernabilidad?

Parece lógico que si se quiere facilitar la gobernabilidad primando al partido más votado, se haga a nivel global y no mediante 52 repartos independientes en los cuales la prima la recibe unas veces un partido y otras veces otro distinto, de manera que el efecto

se contrarresta, incluso puede dar más ventaja al segundo partido que al primero.

En 1993 el coste medio de un escaño del PSOE fue 57 055 votos, mientras que el coste medio de los escaños del PP fue muy similar, concretamente 57 945; sin embargo, el coste medio de los escaños de IU fue 125 000 votos. La desproporción, contra IU, no sirvió para facilitar la gobernabilidad, puesto que la prima originada por el sistema quedó repartida entre los dos primeros partidos y algunos de ámbito autonómico.

Si se quiere un método electoral que facilite la gobernabilidad asignando, para ello, a algunos partidos más escaños de sus cuotas, lo lógico es diseñar el método de forma que concentre la prima en escaños en un sólo partido, ¡en el más votado! Pero, ¿cuántos escaños, $k1$, se van a utilizar para la prima directa?

Siguiendo la misma técnica que con la segunda asignación (la correspondiente a la proporcionalidad global) se va a observar qué ha ocurrido en las 7 elecciones generales. Es decir, qué porcentaje de escaños ha recibido el partido vencedor por encima de su porcentaje de votos. En otras palabras, ¿qué prima ha concedido (indirectamente) el sistema electoral actual al partido vencedor?

La Tabla 8.11 contiene las diferencias entre el porcentaje de escaños y el de votos (prima) del partido más votado, para cada una de las 7 elecciones generales celebradas desde 1977.

Elección	1977	1979	1982	1986	1989	1993	1996
Primer partido	UCD	UCD	PSOE	PSOE	PSOE	PSOE	PP
Prima actual, %	9.44	10.66	7.30	5.23	7.61	4.90	4.48

Tabla 8.11: Prima porcentual de escaños obtenida por el primer partido.

Las cantidades son muy diferentes. Además, para calcular el porcentaje de votos totales no se han tenido en cuenta los votos en blanco ni los votos de los pequeños partidos (más de 50 partidos que obtienen sólo unos miles de votos, incluso sólo unos cientos de votos, en cada elección). Si los porcentajes de votos se calculan con respecto al total de votos válidos, [60], las primas anteriores aumentan a 12.68%, 13.09%, 9.6%, 8.46%, etc.

Por otra parte, una vez alcanzada la mayoría absoluta, los escaños que obtenga el partido vencedor por encima de ella no presentan interés cara a obtener la mayoría parlamentaria. Por ejemplo, en 1986 no se habría necesitado un 5.23% para alcanzar la mayoría, con un 2.96% de prima en escaños habría sido suficiente para que el PSOE alcanzase la

mayoría absoluta.

Por tanto, $k1$ va a ser el número máximo que se asignará al vencedor para facilitarle la mayoría absoluta, pero si con menos de $k1$ la alcanza, se le asignan sólo los necesarios para obtenerla.

Observamos que, según la Tabla 8.11, las primas recibidas por el vencedor en las 5 últimas elecciones generales han oscilado, aproximadamente, entre el 4.48% y el 7.30%. En las dos primeras elecciones la prima fue algo mayor, alcanzando el 10.66% de los escaños de la Cámara. La media aritmética de las primas obtenidas en las 7 elecciones es de 7.09%.

Por tanto, si se parte de un reparto en el que existe una proporcionalidad global entre votos totales y escaños totales de los partidos estaría justificada una cantidad, $k1$, superior a 30 escaños como prima directa al vencedor, de forma que, el porcentaje que representa dicha prima sobre una Cámara de 400 Diputados sería inferior al que viene dando el sistema actual. Ya que, si el partido más votado ha obtenido, por ejemplo, el 40% de los votos, de los 30 escaños le corresponderían 12 en función de su proporción de votos y serían sólo 18 los que obtendría por encima de su porcentaje de votos (el 4.5% de 400). No obstante, antes de elegir un valor de $k1$ para simular resultados hemos de asegurar que las elecciones de k y $k1$ garantizan los objetivos que nos habíamos planteado.

Se va a establecer, pues, un principio que garantice, al menos, la misma posibilidad de alcanzar mayoría parlamentaria, para el partido más votado, que la que obtiene con el sistema electoral actual.

Concretamente **se va a exigir** que si, con el sistema actual, el partido más votado consigue la mayoría absoluta, no la pierda como consecuencia de la asignación complementaria (usando k escaños) y la asignación directa a dicho partido (usando $k1$ escaños).

Para garantizar que se cumple el principio anterior, para cualquier situación posible, se necesita que

$$k \leq k1.$$

Por tanto, si se quiere primar al partido vencedor con sólo 30 escaños se han de utilizar, como mucho, 20 escaños para la proporcionalidad global (en la segunda asignación).

Si, por respetar el límite máximo constitucional fijado para la Cámara de Diputados, se quiere que el tamaño de la Cámara no pase de 400 diputados, el número de escaños k

de igualación proporcional no podría ser superior a 25 y, en el caso de elegir $k1 = 30$, k tendría que bajar hasta 20. Esto significa que se mejora mucho la proporcionalidad con la segunda asignación, pero, en general, 20 escaños serán insuficientes para alcanzar lo que hemos denominado proporcionalidad global.

En cambio, la elección de $k = 20$ y $k1 = 30$ va a garantizar una prima para el partido vencedor superior al 4.5% de los escaños; y, en términos absolutos, va a necesitar (como apoyo de otros partidos) 5 escaños menos que en la actualidad para alcanzar la mayoría absoluta, con lo cual el número de coaliciones favorables aumenta. Así pues, aunque esta elección de los parámetros no conduzca a una proporcionalidad tan elevada como podría desearse, es aceptable, desde el punto de vista de facilitar la gobernabilidad al mismo tiempo que mejora la proporcionalidad como veremos después.

Por ello, se propone como alternativa, que notamos por PyB (proporcionalidad y bonificación al vencedor) elegir como prima máxima al partido vencedor el valor $k1 = 30$ y como número de escaños para la proporcionalidad global $k = 20$.

8.3.2 La alternativa PyB

Resumimos a continuación cómo ha quedado esta nueva alternativa que se propone al sistema electoral actual, que tendería a mejorar la proporcionalidad y beneficiar al partido más votado. Admitiendo que la elección de los diversos parámetros puede ser diferente (tal vez mayores), con objeto de poder simular resultados nos vemos obligados a hacer una elección.

Tamaño de la Cámara: variable entre 370 y 400 escaños.

- Primera asignación: 350 escaños de igual forma que se hace con el sistema electoral actual.

- Segunda asignación: Asignación complementaria de 20 escaños para mejorar la proporcionalidad global entre los partidos que han obtenido, al menos, el 2% de los votos. Los escaños se asignan a las listas provinciales.

- Tercera asignación: asignación directa de, a lo sumo, 30 escaños (si con menos no alcanza la mayoría absoluta) al partido más votado, que se adjudican también a sus listas provinciales.

8.3.3 Resultados globales de las simulaciones para la alternativa PyB con los datos de las 7 elecciones generales (1977-1996)

A continuación mostramos en las Tablas 8.12, 8.13, 8.14 y 8.15 los resultados globales que habría obtenido cada partido en las 7 elecciones generales para la alternativa PyB que acabamos de describir. La columna central contiene las asignaciones producidas por el sistema electoral actual, y la última columna, PyB, corresponde a la alternativa descrita.

Elección 1977				Elección 1979			
Partido	Votos	Act.	PyB	Partido	Votos	Act.	PyB
UCD	6 337 288	166	196	UCD	6 262 593	167	197
PSOE	5 358 781	118	118	PSOE	5 469 813	123	123
PCE	1 718 026	21	28	PCE	1 938 487	25	32
AP	1 525 028	18	25	CD	1 064 333	9	17
PSP-US	816 510	6	12	CiU	483 254	9	9
PDC	514 647	11	11	UN	378 955	1	6
otros	2 005 014	10	10	otros	2 145 247	16	16
total	18 275 294	350	400	totales	17 742 682	350	400

Tabla 8.12: Resultados globales que habría obtenido cada partido en las elecciones generales de 1977 y 1979 para la alternativa PyB.

Se observa que, en 1977, UCD necesitaría para alcanzar la mayoría absoluta 10 escaños con el sistema actual y sólo 5 con la alternativa PyB. Pero hay más diferencias en favor de PyB: todas las coaliciones que con el sistema actual dan mayoría absoluta siguen dando mayoría absoluta con la alternativa PyB (siendo en este último caso más holgadas las mayorías) y, además, hay nuevas coaliciones que dan mayoría absoluta para UCD, el apoyo de los 8 diputados de PNV, o bien el apoyo de los de los 12 diputados de PSP-US, etc.

En 1979, UCD necesita el apoyo de 9 diputados para la mayoría absoluta con el sistema actual y sólo 4 con el propuesto. Nuevamente todas las coaliciones que dan mayoría absoluta para el sistema actual la dan también para el propuesto. Pero, además, para el sistema propuesto, UCD alcanzaría la mayoría absoluta con PNV (7 escaños), o con PSA (5 escaños) y con otras coaliciones de los pequeños partidos.

En 1982 la alternativa PyB se limita a tener mayoría absoluta para el PSOE y alta proporcionalidad puesto que en este caso la prima para la gobernabilidad ha sido nula para el PSOE puesto que ya tiene mayoría absoluta. La Cámara tendría en 1982 tamaño mínimo, es decir, 370 diputados, como muestra la Tabla 8.13.

Elección 1982				Elección 1986			
Partido	Votos	Act.	PyB	Partido	Votos	Act.	PyB
PSOE	10 127 392	202	202	PSOE	8 901 718	184	187
AP	5 543 107	107	107	CP	5 247 677	105	105
UCD	1 354 858	11	18	CDS	1 838 799	19	32
PCE	844 976	4	11	CiU	1 014 258	18	18
CiU	772 726	12	12	IU	930 223	6	13
CDS	600 842	2	8	otros	2 125 065	18	18
otros	1 663 111	12	12	totales	20 057 740	350	373
totales	20 907 012	350	370				

Tabla 8.13: Resultados globales que habría obtenido cada partido en las elecciones generales de 1882 y 1886 para la alternativa PyB.

En 1986 la prima al PSOE para alcanzar mayoría absoluta se reduce a sólo 3 escaños. Por tanto, el tamaño de la Cámara sería de 373 diputados. Obsérvese que con el sistema actual el PSOE obtuvo mayoría absoluta, pero dicha mayoría era debida a la prima obtenida con el sistema electoral actual, no a que el PSOE hubiese obtenido más del 50% de los votos. Con la asignación complementaria se habría perdido dicha mayoría absoluta, pero con la tercera asignación (la bonificación al vencedor) recupera la mayoría absoluta, con sólo utilizar 3 escaños (de los 30 posibles).

Elección 1989				Elección 1993			
Partido	Votos	Act.	PyB	Partido	Votos	Act.	PyB
PSOE	8 088 072	175	196	PSOE	9 071 760	159	189
PP	5 282 877	107	107	PP	8 170 201	141	141
IU	1 851 080	17	27	IU	2 245 444	18	36
CDS	1 617 104	14	24	CiU	1 162 534	17	19
CiU	1 030 476	18	18	otros	2 632 134	15	15
otros	2 404 411	19	19	totales	24 403 185	350	400
totales	20 307 783	350	391				

Tabla 8.14: Resultados globales que habría obtenido cada partido en las elecciones generales de 1989 y 1993 para la alternativa PyB.

En 1989 el PSOE, tras prosperar la impugnación en Melilla, obtuvo exactamente el 50% de los escaños de la Cámara de diputados. Con el sistema propuesto el PSOE alcanza la mayoría absoluta con sólo 21 escaños de bonificación. Por tanto, en este caso, el tamaño de la Cámara quedaría en 391. IU y CDS, con el sistema propuesto, mejoran su representación, aunque los 20 escaños utilizados para la proporcionalidad global son

muy insuficientes en este caso. A pesar de ello, el déficit de escaños de estos dos partidos disminuye mucho ya que cada uno consigue 10 de los 20 escaños.

En 1993, la dificultad del PSOE para alcanzar la mayoría absoluta (17 escaños más) se reduce a sólo 12 para el sistema propuesto. Por tanto, nuevas coaliciones le serían posibles a partir de los partidos agrupados como "otros" que en total suman 15 escaños. En la Tabla 8.14 se reflejan los datos de 1989 y 1993.

Partido	Votos	%Votos	Act.	%Act.	PyB	%PyB
PP	9 716 006	39.12	156	44.57	186	46.50
PSOE	9 425 678	37.95	141	40.28	142	35.50
IU	2 639 774	10.63	21	6.00	39	9.75
CiU	1 151 633	4.64	16	4.57	17	4.25
PNV	318 951	1.28	5	1.43	5	1.25
CC	220 418	0.89	4	1.14	4	1.00
BNG	220 147	0.89	2	0.57	2	0.50
HB	181 304	0.73	2	0.57	2	0.50
ERC	167 641	0.65	1	0.29	1	0.25
EA	115 861	0.46	1	0.29	1	0.25
UV	81 350	0.33	1	0.29	1	0.25
otros	564 168	2.23	0	0.00	0	0.00
totales	24 802 931	100.00	350	100.00	400	100.00

Tabla 8.15: Resultados globales que habría obtenido cada partido en las elecciones generales de 1996 para la alternativa PyB.

En 1996, con el sistema propuesto, los escaños de PP y CiU superan el 50% de la Cámara; sin embargo, con el sistema actual esta coalición no llega a ser mayoritaria. Además, el PP podría conseguir otra coalición mayoritaria sin intervenir PSOE, IU ni CiU, ya que los restantes partidos tienen 16 escaños y el PP sólo necesita 15 para alcanzar los 201. También hay que valorar otros hechos que facilitan la gobernabilidad, por ejemplo, con el sistema propuesto PSOE+IU tienen menos escaños que PP; es decir, estos dos partidos necesitarían del apoyo de otros partidos para sumar más representantes que el PP, estos resultados se recogen en la Tabla 8.15

8.3.4 Primas recibidas por el primer partido

Veamos en la Tabla 8.16 el porcentaje de escaños que habría obtenido el primer partido con el sistema actual y con la alternativa PyB.

Es decir, como habíamos afirmado, en todas las elecciones en las que el vencedor no había conseguido la mayoría absoluta el porcentaje de escaños recibidos con la alternativa

Elección	1977	1979	1982	1986	1989	1993	1996
Primer partido	UCD	UCD	PSOE	PSOE	PSOE	PSOE	PP
% escaños Actual.	47.43	47.71	57.71	52.56	50.00	45.42	44.57
% escaños PyB	49.00	49.25	54.59	50.13	50.13	47.25	46.50

Tabla 8.16: Porcentaje de escaños que habría obtenido el primer partido con el sistema actual y con la alternativa PyB.

PyB es más alto que el correspondiente al sistema actual, mientras que en aquellas otras en las que el partido vencedor ha obtenido con el sistema actual mayoría absoluta mantiene dicha mayoría con el nuevo sistema aunque, en tal caso, al mejorar la proporcionalidad, disminuye la prima recibida.

8.3.5 Proporcionalidad con la alternativa propuesta

Como acabamos de ver, la alternativa PyB facilita al partido vencedor el conseguir, individualmente o mediante coalición, la mayoría absoluta. Queremos saber si este esfuerzo ha repercutido negativamente en la proporcionalidad del sistema. Por ello, vamos a medirla para las 7 elecciones generales. Se va a usar de nuevo el índice de los mínimos cuadrados, *MC*. Los resultados se muestran en la Tabla 8.17.

Elección	1977	1979	1982	1986	1989	1993	1996	Media
MC Actual.	8.26	8.96	6.75	5.33	7.42	5.78	4.82	6.76
MC PyB	8.69	7.12	3.60	2.27	6.10	5.12	5.23	5.45

Tabla 8.17: Desproporcionalidad en las elecciones a la Cámara de Diputados con la alternativa PyB.

La desproporcionalidad es completamente similar en aquellas elecciones en las que el partido vencedor recibe 30 escaños para faciltar la gobernabilidad y es superior para el sistema propuesto en las tres elecciones restantes (1982, 1986 y 1989). La gráfica de la Figura ?? muestra los resultados de la Tabla 8.17 mediante dos líneas poligonales, la de arriba es la que corresponde a los valores del índice *MC* actual y la línea poligonal que está más cerca del eje de abscisas representa los valores del índice *MC* correspondientes a la alterntiva PyB.

Proporcionalidad entre circunscripciones

También conviene señalar los principales cambios en el número de representantes asignados a las listas provinciales. Madrid y Barcelona reciben la mayor parte de los escaños correspondientes a la corrección de la proporcionalidad y a PyB. Le siguen Valencia, Alicante,

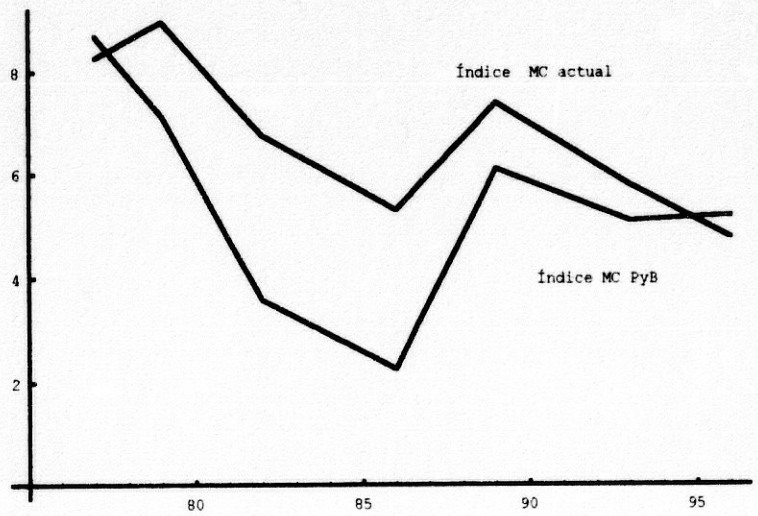


Figura 8.4: Representación de los valores correspondientes al índice MC para el sistema actual y para la alternativa PyB. Elecciones generales de 1977 a 1996.

Sevilla. Es decir, la mayoría de los escaños utilizados tanto para la segunda asignación como para la tercera van a corresponder a las provincias más perjudicadas con el reparto actual. Por tanto, la proporcionalidad en la representación provincial también se va a mejorar. La Tabla 8.18 recoge los principales cambios.

Provincia	%pobl.	%Dip. act.	%Dip. PyB	Increm.	Total	Cuota
Madrid	12.78	9.71	12.75	15	49	51
Barcelona	11.84	8.86	10.75	8	39	47
Valencia	5.44	4.57	5.00	5	21	22
Sevilla	4.22	3.71	3.75	2	15	17
Alicante	3.34	3.14	3.50	3	14	13
Málaga	3.00	2.86	3.00	2	12	12
Coruña	2.81	2.57	2.75	2	11	11
Asturias	2.80	2.57	2.75	2	11	11

Tabla 8.18: Principales variaciones en la representación provincial.

Entre Madrid y Barcelona tienen un déficit del 6% de representación con el sistema actual, mientras que el propuesto ese déficit conjunto se reduce al 1%. No es un hecho casual, sino que se producirá un efecto similar en cualquier otra elección puesto que el

método descrito tiende a igualar el coste de los diputados de cada partido en las circunscripciones en las que ha competido y, en general, el coste es mayor en las provincias más pobladas. Debemos resaltar cómo uno de los pocos cambios en provincias pequeñas, el correspondiente a Gerona, donde el PP, que fue tercera fuerza y no recibió escaño alguno, consigue un representante de entre los asignados para la PyB.

Para medir la desproporcionalidad en la representación de las circunscripciones vamos a utilizar el índice *DA* puesto que, en este tipo de reparto, no hay que restar importancia a las diferencias pequeñas frente a las grandes. El resultado en 1996 habría sido:

$$DA_{actual} = 9.22 \qquad DA_{propuesto} = 4.2$$

Por último, vamos a recoger, para cada partido, el coste medio (c.m.) a nivel global de sus escaños, es decir, el valor de la fracción:

$$c.\ m. = \frac{votos\ totales\ del\ partido}{escaños\ totales\ conseguidos}$$

Veremos que las diferencias se acortan sensiblemente con la alternativa PyB.

La Tabla 8.19 muestra los datos correspondientes a los cuatro partidos que han tenido variación en 1996.

Partido	c.m. Act.	c.m. PyB
PP	62 282	52 237
PSOE	66 849	66 378
IU	125 704	67 687
CiU	71 977	67 743
global	70 969	62 098

Tabla 8.19: Costes medios

El coste medio a nivel global con el sistema actual es de 70 969 votos por escaño, para la elecciones de 1996. PP y PSOE tienen un coste inferior, CiU un coste algo superior e IU un coste mucho mayor, 125 704.

El coste medio global con el sistema propuesto desciende a 62 098 votos por escaño (ya que el tamaño de la Cámara aumenta a 400). En este caso, sólo el PP tiene un coste inferior a la media global, 62 098, pero PSOE, CiU e IU tienen un coste muy similar entre sí (debido a la corrección de la proporcionalidad). Las Figuras 8.5 y 8.6 recogen gráficamente estos resultados; la primera barra de cada partido y global representa el coste medio actual

y la segunda barra para cada partido y global representa el coste medio con la alternativa PyB.

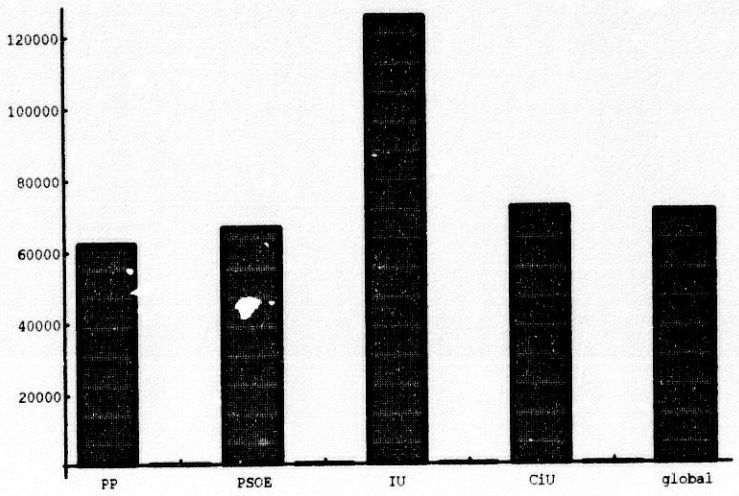


Figura 8.5: Coste medio del escaño con el sistema actual para aquellos partidos que han tenido variación en 1996.

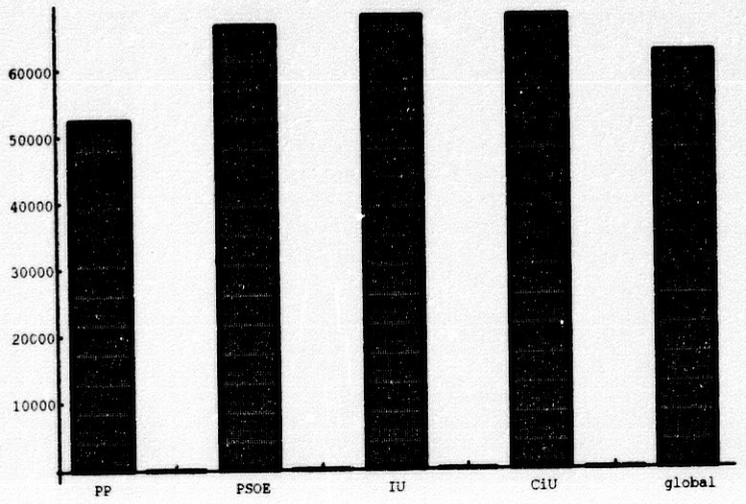
8.4 Conclusiones

Para la alternativa PyB se tienen las siguientes conclusiones:

1. Si el partido vencedor en votos consigue mayoría absoluta con el sistema actual, también consigue mayoría absoluta con esta alternativa.

2. Si el partido vencedor en votos no consigue mayoría absoluta con el sistema actual, con el sistema propuesto siempre consigue un porcentaje de escaños mayor que con el actual. Necesita menos apoyos para conseguir la mayoría absoluta.

3. Todas las coaliciones que dan, para el partido vencedor en votos, mayoría absoluta con el sistema actual dan, también, mayoría absoluta con el sistema propuesto. Además, normalmente, aparecen nuevas coaliciones que dan al partido vencedor la mayoría absoluta.



Figura~8.6: Coste medio del escaño con la alternativa PyB, para aquéllos partidos que han tenido variación en 1996.

4. En general, la proporcionalidad será similar a la obtenida con el sistema actual. Excluido el primer partido, la proporcionalidad entre los restantes aumenta considerablemente.

5. La proporcionalidad en la representación de las diferentes circunscripciones es mucho mayor.

6. Los partidos de ámbito estatal que superen la barrera exigida no estarán tan discriminados como actualmente.

7. No se da una desigualdad tan grande entre el número de votos que necesitan los candidatos de un mismo partido, pertenecientes a provincias diferentes, para conseguir escaño. Para cada partido, el coste de los escaños obtenidos en las diferentes circunscripciones es mucho más similar y mucho más próximo a su coste medio; por tanto, disminuye la discriminación entre los candidatos de las diferentes listas de un mismo partido.

8. Todos los votos obtenidos por los partidos que superan la barrera (el 2% en este caso) contribuyen a la representación global del partido; es decir, son útiles para conseguir escaños.

9. Fortalece a los partidos. A los grandes no les interesa la división porque pierden posibilidades de vencer y obtener la bonificación correspondiente. A los demás porque la fragmentación les puede dejar por debajo de la barrera a alguna de las partes y, en general, porque al no conseguir mayor número de representantes por separado, la corrección de la desproporcionalidad les será menos favorable.

10. Ningún partido y ninguna circunscripción obtiene menos representantes que con el sistema actual.

11. Para las diferentes fases en las que se efectúa el reparto proporcional de escaños a los partidos la circunscripción siempre es la provincia.

En resumen, esta alternativa mejora la proporcionalidad (entre los partidos, entre las circunscripciones y entre las listas de un mismo partido), mantiene el fortalecimiento de los partidos y la presencia en el Parlamento de los pequeños partidos de índole nacionalista o regionalistas, pero, además, tiene la garantía de que facilita la gobernabilidad al partido vencedor de las elecciones.

Capítulo 9

Distribución de los escaños del Senado por Comunidades Autónomas

9.1 Introducción

En este capítulo se considera un nuevo diseño de circunscripciones electorales para la distribución de los escaños del Senado. Concretamente, se eligen como tales, las Comunidades Autónomas junto con Ceuta y Melilla y se muestran diferentes alternativas de asignación de los escaños del Senado a las mismas. Para dichas alternativas, la mayoría de los escaños se asignan en proporción a la población de las Comunidades Autónomas usando el método de St.Laguë condicionado a asignar determinada representación mínima a cada Comunidad, que en todos los casos se ha fijado igual, o superior, a 4 senadores, salvo Ceuta y Melilla que siempre están representadas por 1 senador. También se establecen comparaciones con los resultados obtenidos mediante dos asignaciones independientes: una inicial fija y otra proporcional.

El artículo 69.1 de la Constitución establece que el Senado es la Cámara de representación territorial. En los puntos siguientes, determina las circunscripciones y su tamaño. Concretamente, asigna a cada una de las provincias peninsulares 4 escaños; a Gran Canaria, Tenerife y Mallorca 3 a cada una; a Ibiza, Formentera, Menorca, Lanzarote, Fuerteventura, Hierro, Gomera y la Palma uno a cada una; Ceuta y Melilla están representadas por 2 escaños cada una. Por último, cada Comunidad Autónoma elige, como mínimo, un senador y, en caso de superar el millón de habitantes, tantos senadores más como millones de habitantes posea.

Por tanto, sólo una minoría de los escaños del Senado son asignados a las Comunidades Autónomas atendiendo a criterios de representación proporcional. Es cierto que la provincia representa una unidad administrativa con cierto arraigo cultural e histórico; sin embargo, la Constitución de 1978 otorga a la Comunidad Autónoma un papel en la Administración del Estado mucho más importante que a la provincia. En tal sentido, sería lógico utilizar como circunscripciones para el Senado a las CC.AA. en lugar de las provincias o, al menos, aumentar considerablemente el peso de la Comunidad Autónoma frente al de la provincia.

Por otra parte, la casi ausencia de proporcionalidad en la representación territorial no responde a ningún criterio lógico. Un elevado proporcionalismo con respecto a unos parámetros u otros (población, extensión, etc.) puede dar, para alguna de las circunscripciones, una representación poco satisfactoria lo cual puede evitarse incluyendo condiciones sobre el número mínimo de representantes que debe recibir la correspondiente circunscripción. Por supuesto, también puede realizarse una asignación uniforme seguida de otra proporcional, tal y como se hace en la actualidad para la distribución de los escaños del Congreso entre las provincias.

Existen infinitas posibilidades de elección de métodos, como hemos estudiado, para la asignación proporcional de escaños que, combinadas con diferentes esquemas de circunscripciones y posibles mínimos (y/o máximos) de representación de cada una de ellas, permiten establecer diseños de sistemas electorales "casi a la medida" con cualesquiera de las condiciones que establezca la clase política.

Dentro de esta infinidad de posibles métodos para resolver un problema de reparto de escaños no se puede decir que exista un método mejor que los demás, sino que unos métodos tienen distintas propiedades de otros. Por ello, para establecer un determinado sistema electoral es preciso definir, como hemos estudiado en el capítulo 2 de la Memoria, previamente qué propiedades lógicas deseamos que se verifiquen (es decir, qué comportamiento deseamos) y, a continuación, elegir las fórmulas. No a la inversa. En todo caso, hay que hacer un estudio tendente a preveer las consecuencias de tales cambios.

9.2 Algunas observaciones para la distribución actual de senadores.

La actual asignación de los senadores a las provincias no responde a criterios de proporcionalidad. Todas las provincias peninsulares reciben igual número de senadores. Nada justifica que todas las provincias deban recibir exactamente igual número de escaños para el Senado. Madrid tiene unas 30 veces más población que Ávila, y ambas, consideradas

como provincias, reciben 4 senadores (por otra parte, la asignación de un senador más por cada millón de habitantes de la CA apenas corrige esta gran desproporción). La Comunidad de Castilla-León está compuesta por nueve provincias poco pobladas, de forma que tiene menos habitantes que la Comunidad de Madrid, o que la Comunidad Valenciana o que Galicia; sin embargo, el total de senadores que le corresponden a la Comunidad de Castilla-León es superior al doble de los que reciben cualquiera de las otras tres que acabamos de citar. Asimismo, dicha Comunidad recibe también más escaños que la suma de los obtenidos por las siguientes comunidades: Asturias, Murcia, Baleares, Cantabria, Navarra y la Rioja. La población de estas seis Comunidades casi triplica a la de Castilla-León y su heterogeneidad es mucho mayor. Entonces, ¿qué justifica dar mayor representación a Castilla-León?

El reparto actual, tampoco responde a un criterio de representación en función de la extensión territorial, pues basta observar que Soria y Segovia, conjuntamente, son mucho menores que Cáceres o Badajoz y, sin embargo, aquellas suman más escaños para el Senado que cualquiera de éstas.

Tamaño del Senado

Con la legislación actual, 209 escaños del Senado son asignados a las circunscripciones y otros 51 a las Comunidades Autónomas: uno por Comunidad y otro por cada millón de habitantes de la misma. Con el censo proporcionado por el Instituto de Estadística correspondiente a la actualización de 1995, los escaños asignados a las CC.AA. serían: Andalucía 8, Cataluña 7, Madrid 6, C. Valenciana 4, Castilla-León 3, Galicia 3, País Vasco 3, Aragón 2, Asturias 2, Canarias 2, Castilla-La Mancha 2, Extremadura 2, Murcia 2, Baleares 1, Cantabria 1, Navarra 1 y La Rioja 1. Por tanto, la mayoría de las simulaciones las vamos a hacer suponiendo que el tamaño del Senado es 260 escaños (como correspondería con el sistema actual y el censo de 1995), aunque también utilizaremos los valores 200 y 300 con objeto de tener más comparaciones. En todos los casos se considera que corresponde un escaño de senador a cada una de las ciudades de Ceuta y Melilla.

9.2.1 Distribuciones proporcionales de los escaños del Senado con mínimos.

Vamos a mostrar los resultados de aplicar el método de St. Laguë para distribuir los escaños del Senado en proporción a las poblaciones de las CC.AA. garantizando mínimos de representación por Comunidad Autónoma, idénticos para todas ellas, e iguales a 4, 5 y 6. La Tabla 9.1 muestra los resultados. Es decir que para cada caso hay que resolver una de las siguientes ecuaciones en x (excluyendo los dos escaños de Ceuta y Melilla de 260).

$$\sum_{i=1}^{17} máx.\left\{4, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\} = 258$$

$$\sum_{i=1}^{17} máx.\left\{5, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\} = 258$$

$$\sum_{i=1}^{17} máx.\left\{6, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\} = 258$$

donde $\left[\frac{p_i}{x}\right]$ significa redondear al entero más próximo el cociente $\frac{p_i}{x}$, siendo p_i la población de la Comunidad Autónoma.

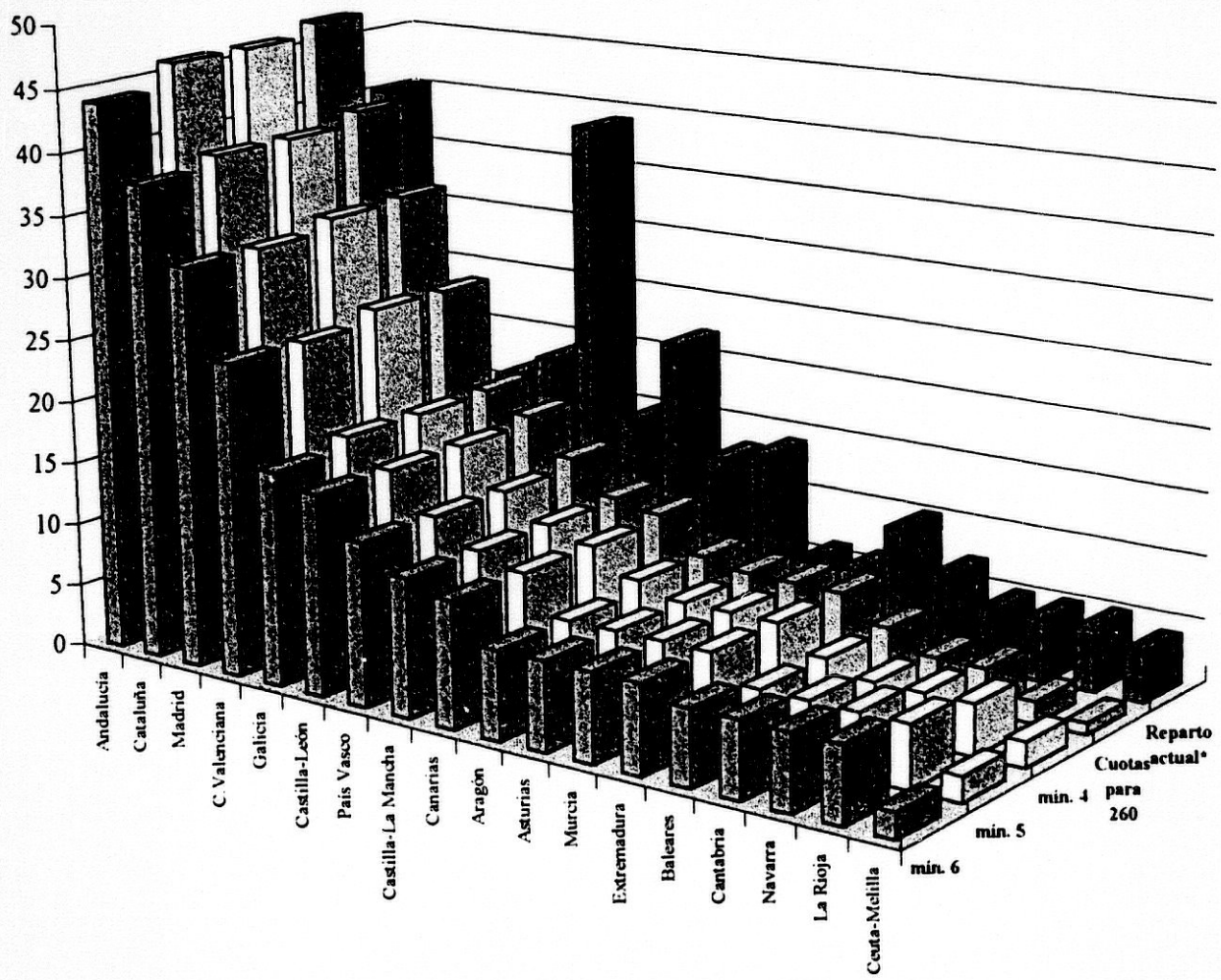
C.Autónoma	Población	Rep. actual*	Cuota 260	mín. 4	mín. 5	mín. 6
Andalucía	7 314 644	40	47.01	46	46	44
Cataluña	6 226 869	23	40.02	39	39	38
Madrid	5 181 659	10	33.30	33	32	32
C.Valenciana	4 028 774	17*	25.89	26	25	25
Galicia	2 825 020	19	18.15	18	18	17
Castilla-León	2 584 407	39	16.61	16	16	16
País Vasco	2 130 783	15	13.69	13	13	13
Castilla-La M.	1 730 717	22	11.12	11	11	11
Canarias	1 631 498	13	10.48	10	10	10
Aragón	1 205 663	14	7.75	8	7	7
Asturias	1 117 370	6	7.18	7	7	7
Murcía	1 109 977	6	7.13	7	7	7
Extremadura	1 100 538	10	7.07	7	7	7
Baleares	787 984	7	5.06	5	5	6
Cantabria	541 885	5	3.48	4	5	6
Navarra	536 192	5	3.45	4	5	6
La Rioja	268 206	5	1.72	4	5	6
Ceuta-Melilla	137 869	4	0.89	2	2	2
Totales	40 460 055	260	260.00	260	260	260

Tabla 9.1: Resultados de aplicar el método de St. Laguë para distribuir los escaños del Senado en proporción a las poblaciones de las CC.AA.

*Reparto actual se refiere al número total de senadores de la CA con la ley actual y censo de 1995. No coincide exactamente con los de las últimas elecciones ya que en aquella

ocasión se usó el censo de 1993 y con él la Comunidad Valenciana no había alcanzado los 4 millones de habitantes por lo que le correspondió un senador menos (es decir en las elecciones de 1996 el Senado fué de 259 miembros, pero si hubiese usado el censo de 1995 habrían sido 260 que es el tamaño que se va a usar para varias de las alterntivas que siguen)

Se observa que, incluso, asignando 6 senadores como mínimo a cada CA la proporcionalidad es elevada. Por ejemplo, Madrid pasa de recibir 10 senadores con la ley actual a recibir 32 cuando se asignan como mínimo 6 a cada CA y su cuota con respecto a su población es 33.30 para un tamaño de Senado de 260; y Cataluña pasa de 23 a 38, cantidad muy próxima a su cuota que es 40.02. Sólo reciben cantidades desproporcionadas aquellas CA que tienen cuota inferior al mínimo de senadores establecido para cada CA (fundamentalmente La Rioja). La siguiente Figura muestra, en forma gráfica, los resultados de la Tabla 9.1.



9.2.2 Distribución de los escaños del Senado mediante dos asignaciones independientes: una fija por Comunidad y otra proporcional de acuerdo con las poblaciones

Mostramos a continuación los resultados que se obtendrían al distribuir los escaños del Senado mediante dos asignaciones. La primera adjudica un número fijo de senadores idéntico para todas las Comunidades. La segunda es una asignación proporcional, independiente de la anterior salvo en el hecho de que si la primera asignación es inferior a 4 senadores la segunda incluye un mínimo para garantizar que, entre ambas, cada CA reciba, al menos, 4 senadores. La Tabla 9.2 muestra los resultados. La columna A2 corresponde a la asignación fija inicial de 2 senadores por Comunidad Autónoma seguida de la asignación de los 224 en proporción a las poblaciones pero garantizando que cada una recibe al menos otros 2 senadores. La columna A3 corresponde a la asignación fija de 3 senadores por CA y los 207 restantes en proporción a las poblaciones, garantizando que cada CA recibe, al menos, 1 senador más mediante este reparto. Por ejemplo para calcularla, se necesita resolver la ecuación

$$\sum_{i=1}^{17} máx.\left\{1, \left[\frac{p_i}{x}\right]\right\} = 207$$

encontrado x, el valor $3 + máx.\{1, [\frac{p_i}{x}]\}$ es el número de senadores que corresponden a la Comunidad i.

Las columnas A4, A5 y A6 corresponden a asignaciones fijas de 4, 5 y 6 senadores por CA y los restantes, hasta 260 en proporción a sus poblaciones. En [30] se presentan alternativas con fijos iniciales 4, 5 y 6 para diversos tamaños del Senado

Con la técnica basada en una asignación fija inicial seguida de otra proporcional, pero independiente de la primera, las CC.AA. de la parte media-alta de la Tabla 9.2 (Galicia, Castilla-León, etc.) reciben una representación muy similar a la obtenida en la Tabla 9.1 (es decir, parecida a su cuota); las CC.AA. más pobladas reciben muchos menos escaños de los que corresponden a sus cuotas, hasta el punto de que para Andalucía sería mucho peor la alternativa correspondiente al fijo de 6 escaños iniciales que la distribución actual de senadores; no obstante, Madrid y Cataluña mejorarían con respecto a la asignación que obtienen con la ley actual y lo mismo le ocurriría a las CC.AA. menos pobladas (así, por ejemplo, La Rioja recibiría 7 escaños, a pesar de ser su cuota sólo 1.72).

9.2.3 Distribución proporcional con mínimos diferentes en las distintas CC.AA.

El mínimo de escaños establecido puede ser diferente de una CA a otra. Por ejemplo, se podría pensar en establecer un mínimo de 4 senadores para las CC.AA. que sean unipro-

C.Autónoma	Población	Cuotas 260	A2	A3	A4	A5	A6
Andalucía	7 314 644	47.01	43	40	39	37	35
Cataluña	6 226 869	40.02	36	35	33	32	30
Madrid	5 181 659	33.30	31	30	28	27	26
C.Valenciana	4 028 774	25.89	24	24	23	22	22
Galicia	2 825 020	18.15	18	17	17	17	17
Castilla-León	2 584 407	16.61	16	16	16	16	16
País Vasco	2 130 783	13.69	14	14	14	14	14
Castilla-La M.	1 730 717	11.12	12	12	12	13	13
Canarias	1 631 498	10.48	11	11	12	12	12
Aragón	1 205 663	7.75	9	9	10	10	11
Asturias	1 117 370	7.18	8	9	9	10	10
Murcia	1 109 977	7.13	8	9	9	10	10
Extremadura	1 100 538	7.07	8	9	9	10	10
Baleares	787 984	5.06	6	7	8	8	9
Cantabria	541 885	3.48	5	6	7	7	8
Navarra	536 192	3.45	5	6	7	7	8
La Rioja	268 206	1.72	4	5	5	6	7
Ceuta-Melilla	137 869	0.89	2	2	2	2	2
Totales	40 460 055	260.00	260	260	260	260	260

Tabla 9.2: Resultados que se obtienen al distribuir los escaños del Senado, con distintas asignaciones fijas.

vinciales, 5 en las biprovinciales (Canarias y Extremadura) y un mínimo igual al doble del número de provincias que la integran para las restantes. Los cambios con respecto a los obtenidos en la Tabla 9.1 con mínimo 4 son sólo los siguientes: Castilla-León obtendría dos senadores más (es decir, 18 en total), la Comunidad de Madrid perdería un senador y la Comunidad Valenciana perdería el otro; las demás obtendrían la misma representación que aparece en la Tabla 9.1 para un mínimo de 4. El método de obtención es tan simple como en los casos anteriores.

9.2.4 Distribución proporcional con fijos diferentes en las distintas CC.AA.

Ahora vamos a considerar que la distribución de los escaños del Senado se hacen mediante dos asignaciones diferentes: una fija pero con valores diferentes para las distintas CC.AA. Concretamente, los valores descritos en el epígrafe anterior (que son los que aparecen en la Tabla 9.3 en la columna "Fijos"), y otra asignación proporcional de los 144 restantes (para completar los 260) sin mínimos.

C.Autónoma	Población	Cuotas 260	Fijos	Proporc. C.A	Totales
Andalucía	7 314 644	47.01	16	29	45
Cataluña	6 226 869	40.02	8	25	33
Madrid	5 181 659	33.30	4	18	22
C.Valenciana	4 028 774	25.89	6	16	22
Galicia	2 825 020	18.15	8	11	19
Castilla-León	2 584 407	16.61	18	10	28
País Vasco	2 130 783	13.69	6	8	14
Castilla-La M.	1 730 717	11.12	10	7	17
Canarias	1 631 498	10.48	4	6	10
Aragón	1 205 663	7.75	6	5	11
Asturias	1 117 370	7.18	4	2	6
Murcia	1 109 977	7.13	4	2	6
Extremadura	1 100 538	7.07	4	4	8
Baleares	787 984	5.06	4	1	5
Cantabria	541 885	3.48	4	0	4
Navarra	536 192	3.45	4	0	4
La Rioja	268 206	1.72	4	0	4
Ceuta-Melilla	137 369	0.89	2	0	2
Totales	40 460 055	260.00	116	144	260

Tabla 9.3: Resultados de la distribución de escaños, con fijos diferentes en las distintas CC.AA.

Esta distribución podría aprovecharse para la elección de senadores por provincias y por CC.AA., de forma que en cada provincia podrían elegirse 2 senadores y el Parlamento de la Comunidad correspondiente designaría los restantes (29 en Andalucía, 25 en Cataluña, 20 en Madrid, ..., 2 en La Rioja); incluso podrían ser senadores natos por cada CA, al menos, el Presidente del Parlamento correspondiente y asignados los restantes en proporción a la representación parlamentaria de los partidos.

Tendríamos así un sistema parecido al actual en el cual los Parlamentos de las CC.AA. ganan influencia sin que las provincias la pierdan por completo. Con respecto a la proporcionalidad mejoraría con relación a la del sistema actual. De forma que las CC.AA. muy pobladas que en la actualidad están subrepresentadas lo seguirían estando aunque en menor cuantía. Castilla-León seguiría estando sobrerrepresentada aunque en menor cuantía también.

Es decir, esta alternativa conduce a resultados que ocupan una posición intermedia entre los obtenidos con el sistema actual y los obtenidos con las alternativas de alta proporcionalidad desarrolladas en la Tabla 9.1.

Otras muchas posibilidades podrían considerarse, incluso tomando otros parámetros. Por no extendernos demasiado, sólo vamos a desarrollar dos más correspondientes a tamaños del Senado algo diferentes al usado hasta ahora.

9.2.5 Repartos proporcionales con otros tamaños de Senado

Vamos a mostrar los resultados con dos nuevos tamaños de Senado, 200 y 300 escaños de senadores, usando la técnica que consideramos más apropiada de las discutidas anteriormente (estableciendo requisitos mínimos en lugar de asignaciones fijas).

Para el tamaño de 200 senadores consideraremos un mínimo de 4, y para tamaño de 300 senadores, un mínimo de 6 escaños por CA. En ambos casos, la técnica será la de reparto proporcional con mínimos exigidos. La Tabla 9.4 recoge los resultados que hemos obtenido.

9.2.6 Tres alternativas equivalentes con tamaño de Senado diferentes

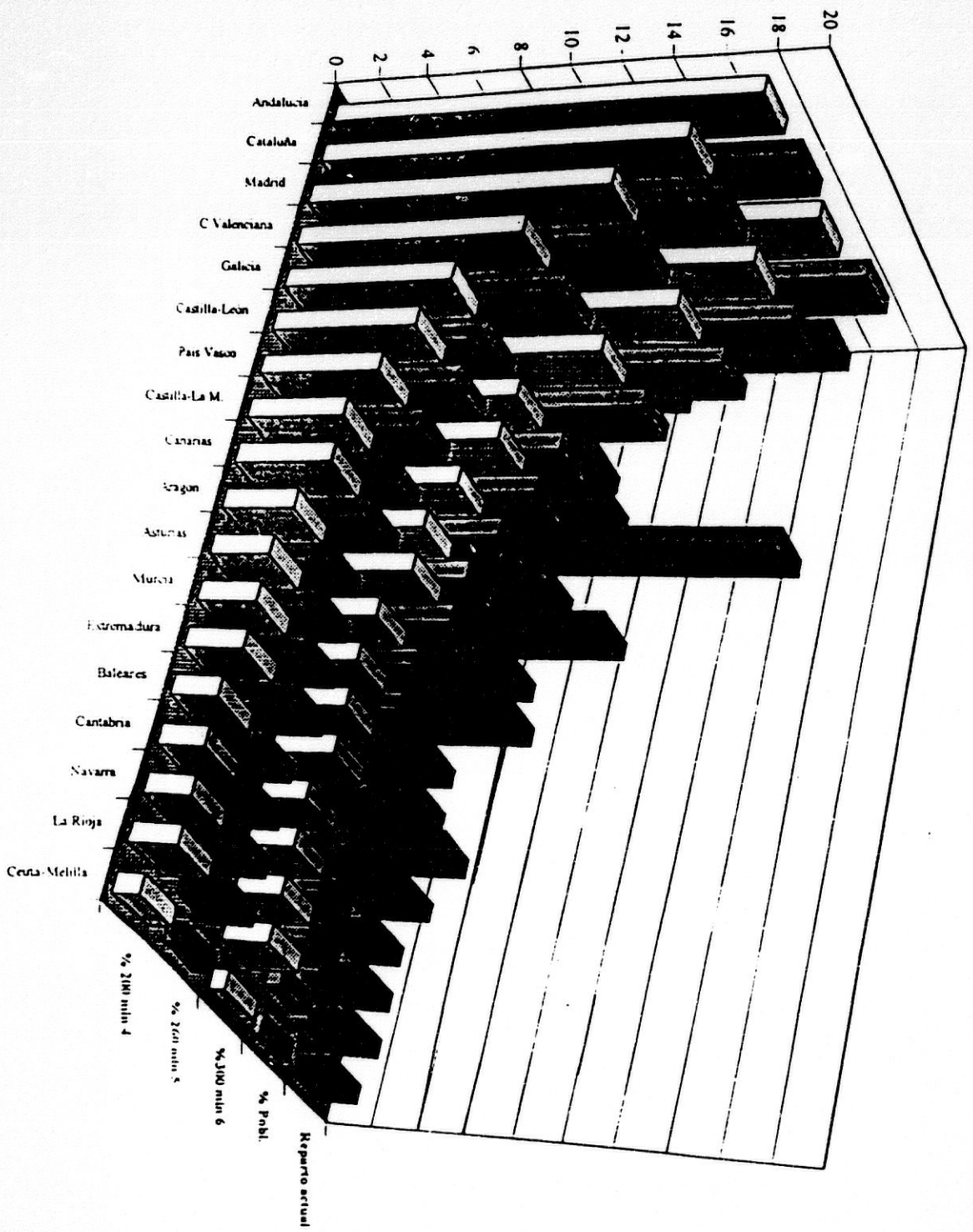
El mínimo de 4 escaños por CA para un Senado de tamaño igual a 200 escaños equivale, en términos porcentuales, al mínimo de 6 escaños cuando el tamaño es 300 y, aproximadamente, a 5 escaños cuando el tamaño es 260. Estas tres alternativas conducen, para cada CA, a porcentajes de representación muy similares, y similar, a su vez, al porcentaje de población de dicha CA. Representamos gráficamente los resultados de estas tres

C.Autónoma	%. Pob.	Cuota 200	A.200 m.4	% 200	Cuota 300	A.300 m.6	% 300
Andalucía	**18.08**	36.16	35	**17.50**	54.24	52	**17.33**
Cataluña	**15.39**	30.78	30	**15.00**	46.17	45	**15.00**
Madrid	**12.80**	25.62	25	**12.50**	38.42	37	**12.33**
C.Valenciana	**9.96**	19.91	19	**9.50**	29.87	29	**9.67**
Galicia	**6.98**	13.94	14	**7.00**	20.95	20	**6.67**
Castilla-León	**6.39**	12.78	12	**6.00**	19.16	19	**6.33**
País Vasco	**5.27**	10.53	10	**5.00**	15.80	15	**5.00**
Castilla-La M.	**4.28**	8.56	8	**4.00**	12.83	12	**4.00**
Canarias	**4.03**	8.07	8	**4.00**	12.10	12	**4.00**
Aragón	**2.98**	5.96	6	**3.00**	8.94	9	**3.00**
Asturias	**2.76**	5.52	5	**2.50**	8.28	8	**2.67**
Murcia	**2.74**	5.49	5	**2.50**	8.23	8	**2.67**
Extremadura	**2.72**	5.44	5	**2.50**	8.16	8	**2.67**
Baleares	**1.95**	3.90	4	**2.00**	5.84	6	**2.00**
Cantabria	**1.34**	2.68	4	**2.00**	4.02	6	**2.00**
Navarra	**1.33**	2.65	4	**2.00**	3.98	6	**2.00**
La Rioja	**0.66**	1.33	4	**2.00**	1.99	6	**2.00**
Ceuta-Melilla	**0.34**	0.68	2	**1.00**	1.02	2	**0.66**
Totales	100.00	200.00	200	100.00	300.00	300	100.00

A.=asignación, m.=mínima.

Tabla 9.4: Resultados con dos nuevos tamaños del Senado, 200 y 300 escaños. En negrita las columnas que deben compararse.

alternativas.



9.3 Conclusiones

1) La técnica de representación proporcional condicionada por mínimos (cuyos resultados aparecen en las Tablas 9.1 y 9.4) es la que conduce a mayor proporcionalidad en la distribución de escaños; además, no da una sobrerrepresentación por encima del mínimo cuando la cuota que corresponde a la circunscripción es inferior a dicho mínimo. En tal sentido, las distribuciones obtenidas en la Tabla 9.1 son más adecuadas que las obtenidas en la Tabla 9.3, máxime si la asignación fija inicial es elevada (por ejemplo 6 senadores por CA).

2) Aunque en la práctica las asignaciones obtenidas con el método de los Restos Mayores coinciden en la mayoría de los casos con las que se obtienen con el método de St. Laguë, y en los casos no coincidentes las diferencias son pequeñas, el método de los Restos Mayores no es consistente y presenta muchas paradojas como hemos estudiado en el capítulo 1 de la Memoria. No es lógico usarlo en este contexto pues su propiedad más importante es que verifica la cuota, pero esta es una propiedad que no estamos exigiendo en las alternativas elaboradas (máxime cuando se fijan mínimos elevados para algunas comunidades pequeñas)

3) El artículo 69.1 de la Constitución afirma que el Senado es la Cámara de representación territorial. No está claro su significado. En primer lugar, ¿quiénes son los territorios que integran el Estado?, ¿se pretende que tengan todos idéntica representación o que exista alguna proporcionalidad en función de su población, de su extensión o de algún otro factor? Los puntos restantes del artículo 69 no ayudan a clarificar el anterior, sino a dejarlo más confuso aún, pues definen como circunscripciones las provincias peninsulares, las islas (o agrupaciones de islas) y Ceuta y Melilla, y asigna una representación, sin ningún criterio predefinido, casi idéntica a todas ellas, lo que resulta desproporcionada en cualquier sentido que se considere. La Comunidad Autónoma juega un papel muy secundario en este reparto.

En las alternativas que se dan las CC.AA. pasan a ocupar el protagonismo en la representación territorial; no obstante, si se desea, puede mantenerse algún protagonismo también para las provincias, por ejemplo, mediante una alternativa como la mostrada en la Tabla 9.3, u otra similar variando los parámetros que se utilizan en ella.

4) Con cualquiera de las alternativas propuestas tendrían presencia en el Senado otras fuerzas políticas con implantanción social fuerte y distintas de las dos primeras y de los grupos nacionalistas.

9.4 Sobre los métodos de asignación proporcional.

Es conocido que el método de St. Laguë, es imparcial en el sentido de que no prima a circunscripciones grandes frente a pequeñas, ni viceversa, y por tanto es el más adecuado para asignar escaños a las circunscripciones. Por ello, en todas las alternativas que hemos simulado para el Senado se ha usado este método cada vez que se ha necesitado realizar una asignación proporcional.

La aplicación del método d'Hondt para distribuir los escaños del Senado primaría a las circuscripciones grandes frente a las pequeñas; por tanto, podría tener sentido utilizarlo en alternativas en las que se desee proporcionalidad y se desee hacer la distribución mediante una asignación inicial fija independiente de una segunda asignación proporcional, ya que la asignación fija perjudicaría a las circunscripciones más pobladas y al aplicar d'Hondt para la segunda asignación se compensaría en parte la desproporción introducida por la asignación fija. Por ejemplo, para un Senado de 260 la asignación fija de 4 senadores por CA (además de 1 a Ceuta y otro a Melilla), dejaría pendientes de asignar 190 senadores. Si se aplica St. Laguë, por ser imparcial, el resultado final es el que aparece en la Tabla 9.2 columna A4 (que presenta una desproporción importante). Por el contrario, si la segunda asignación se hace con d'Hondt el resultado es:

$$40, 34, 29, 23, 18, 16, 14, 12, 12, 9, 9, 9, 9, 7, 6, 6, 5, 1 + 1$$

que es algo menos perjudicial para las CC.AA., más grandes (porque la segunda asignación ha tenido un efecto contrario al de la primera en términos de proporcionalidad); a las CC.AA. menos pobladas le ocurre lo contrario, es decir, no salen tan beneficiadas como en la Tabla 9.2.

El método de Adams, favorece a las circunscripciones más pequeñas frente a las grandes, al aplicarlo para distribuir los escaños del Parlamento. En repartos de este tipo tiene una propiedad que lo hace interesante. *Antes de que una circunscripción reciba el segundo senador todas las demás deben haber recibido el primero.* Es decir, que sin necesidad de imponer mínimos, garantiza representación a todas las circunscripciones (si el tamaño del Senado no es menor que el número de circunscripciones). La distribución de escaños que se obtiene con el método Adams para un tamaño de Senado de 260, sin ninguna asignación fija inicial es:

$$46, 39, 33, 25, 18, 17, 14, 11, 11, 8, 7, 7, 7, 5, 4, 4, 2, 1 + 1$$

que es algo similar a la obtenida en la Tabla 9.1 para mínimo 4 (lógicamente al no poner mínimo La Rioja sólo ha obtenido 2 senadores ya que su cuota era 1.72). Obsérvese que Navarra con cuota 3.45 y Cantabria con 3.48 han obtenido 4 senadores con Adams,

mientras que Andalucía con cuota superior a 47 ha obtenido 46 senadores y Cataluña con cuota superior a 40 ha obtenido 39.

Si comparamos con las cuotas correspondientes que aparecen en las Tablas, observamos que las CC.AA. menos pobladas aparecen beneficiadas y las más pobladas perjudicadas.

9.4.1 Desproporcionalidad para las alternativas desarrolladas

Para terminar hemos calculado el índice de proporcionalidad MC para las diferentes alternativas presentadas.

Aplicado, el índice MC a las diferentes alternativas presentadas da los valores que aparecen en la Tabla 9.5. En ella, H tamaño del Senado, f asignación fija por Comunidad Autónoma, m mínimo en la asignación proporcional.

Alternativa	MC
H=260, f=0, m=4 (Columna mín. 4 en Tabla 9.1)	0.62
H=260, f=0, m=5 (Columna mín. 5 en Tabla 9.1)	0.92
H=260, f=0, m=6 (Columna mín. 6 en Tabla 9.1)	1.39
H=260, f=2, m=2 (Columna A2 en Tabla 9.2)	1.47
H=260, f=3, m=1	2.16
H=260, f=4, m=0	2.82
H=260, f=5, m=0	3.38
H=260, f=6, m=0	4.04
H=260, f=diferentes, m=0 (Columna totales en Tabla 9.3)	3.76
H=260, f=0, m=4 (Columna Asig. 200 en Tabla 9.4)	1.05
H=260, f=0, m=6	1.01
Reparto actual (acumulado por CC.AA.)	7.85

Tabla 9.5: Desproporcionalidad, aplicando el índice de los mínimos cuadrados.

Los valores de la columna de la desproporcionalidad, MC, corroboran lo que habíamos afirmado en los apartados anteriores, las alternativas correspondientes al método de St. Laguë con mínimos (sin fijos iniciales) son las más proporcionales garantizando los mínimos establecidos. No obstante cualquier otra de las desarrolladas en este capítulo disminuye, con respecto al reparto actual, substancialmente la desproporcionalidad por CC.AA.

Bibliografía

[1] Abeles F.Dogson, An apportionment for proportional representation. *Ganita Bharati Bull. Ind. Soc. Hist-Mathem.* Vol. 3, n. 34, pp. 71-82, 1981.

[2] Aguilera de Prat, C.R., Pere Vilanova, *Temas de Ciencia Política.* PPU, pp. 148-161, 1987.

[3] Álvarez Conde E. y Arnaldo Alcubilla E., *Código de Derecho Electoral Español.* Ed. Tecnos, Madrid, 1985.

[4] Álvarez Conde E. y Arnaldo Alcubilla E., De nuevo sobre el procedimiento electoral uniforme. *Revistas de Estudios Politicos.* Vol. 86, pp. 39-69, 1994.

[5] Balinski M.L., The Problem With Apportionmentñ. *Journal of the Operations Research Society of Japan.* Vol. 36, pp.134-148, 1993.

[6] Balinski M.L., Optimization. *Revue Scientifique et Technique de la Defense.* pp 173-179, 1993.

[7] Balinski M.L. & Agar A., How to Make Representation Equal. *Policy Options Politiques.* 1985.

[8] Balinski M.L. & Young H.P., A New Method for Congressional Apportionment. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* Vol 71, n. 11, pp. 4602-4606, 1974.

[9] Balinski M.L. & Young H.P., The quota method of apportioment. *American Mathem. Monthy.* Vol. 82, pp. 701-730, 1975.

[10] Balinski M.L. & Young H.P., Apportioment Schemes and the Quota Method. *American Mathem. Monthy.* n. 84, pp. 450-455, 1977.

[11] Balinski M.L. & Young H.P., On Huntington methods of apportionment. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* Vol. 33, n.4, pp. 607-618, 1977.

[12] Balinski M.L. & Young H.P., Stability, Coalitions and Schims in Proportional Representation Systems, *American Political Science Review.* Vol. 72, n. 3, pp. 848-858, 1978.

[13] Balinski M.L. & Young H.P., The Jefferson Method of Apportionment. *SIAM review.* Vol. 22, pp. 278-284, 1979.

[14] Balinski M.L. & Young H.P., Criteria for proportional representation. *Mathematics Operations Research.* Vol. 27, pp. 80-95, 1979.

[15] Balinski M.L. & Young H.P., Quotate Apportionment Methods. *Mathematics Operations Research.* n. 4, pp. 31-38, 1979.

[16] Balinski M.L. & Young H.P., The Webster method of apportionment. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* Vol. 77, n. 1, pp. 1-4, 1980.

[17] Balinski M.L. & Young H.P., *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One vote.* Yale University Press, New Haven, Ct. and London, 1982. Japanese translation, Chikura-Shabo Publishing Company, Tokyo, 1987.

[18] Balinski M.L. & Young H.P., *Fair Representation in the European Parliament.* Journal of Common Market Studies. Vol. 20, n. 4, 1982.

[19] Balinski M.L. & Young H.P., Apportionment the United States House of Representatives. *Interfaces.* Vol. 13, n. 4, pp 35-43, 1983.

[20] Balinski M.L. & Young H.P., Fair Electoral Distribution. *Policy Options Politiques.* n. 4, pp. 30-32.

[21] Balinski M.L. & Young H.P., Apportionment, in S.M. Pollock, M.H Rothkopf and Barnett, editors. *Operations Research and thePublic Sector*, hanbooks in Opration Research and Management Science. Vol. 6, North-Holland, Amsterdam, pp. 529-560, 1994.

[22] Balinski M.L. & Demange G., An axiomatic approach to proportionality between matrices. *Mathematics Operations Research.* n. 14, pp. 700-718, 1989.

[23] Balinski M.L. & Demange G., Algorithms For Proportional Matrices in Reals and Integers. *Mathematical Programming.* n. 45, pp. 193-210, 1989.

[24] Balinski M.L. & Gale D., On the Core of the Assignement Game. AD298 0487.

[25] Balinski M.L. & Mann L., Le vote par assentiment: un k-systeme de vote sincere. n. 386, Laboratoire d'Econométrie, 1993.

[26] Balinski M.L. & Ramírez V., El problema del reparto proporcional de escaños. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada* (SEMA). n. 8, pp. 3-34, 1996.

[27] Balinski, M. L., The Product Rate Variation Problem: An axiomatic approach. *To appear*

[28] Balinski, M. L., & S. T. Rachev. Rounding proportions: methods of rounding. *Mathematical Scientist.* Vol. 33, pp. 1-28, 1997.

[29] Balinski M.L. & Ramírez V., A case of study of electoral manipulation: the Mexican Electoral Laws of 1989 and 1994: Analysis and Critique. *Electoral Studies.* Vol. 15, n. 2, pp. 203-217, 1996.

[30] Balinski M.L. & Ramírez V., El Sistema Electoral de México. to appear in *Electoral Studies. 1997.*

[31] Balinski M.L. & Ramírez V., Los sistemas electorales de 1989-1990 y 1994 para la elección de diputados en México: análisis y crítica. *Estudios Sociológicos del Colegio de México.* Vol. 15, n. 43, pp. 137-185, 1997.

[32] Bernardi C. & Menghini M, Sistemi electorali proporzionali. La solucione italiana. *Bolletino U.M.I. (7)* 4-A, pp. 271-293, 1990.

[33] Bilbao Arrese J. M., Ley electoral y sistema de partidos políticos en España. *Revista de estudios políticos (Nueva Época).* n. 85, pp. 313-321, 1994.

[34] Bilbao Arrese J. M., La Reforma Constitucional de la Composición del Senado. *Revista de las Cortes Generales.* n. 33, pp. 185-197, 1994.

[35] Bordley, Robert F., A Pragmatic Method for Evaluation Election Schemes through Simulation. *The American Political Science Review.* Vol. 77, 1983.

[36] Brams, S. J. & Fishburn, P. C., Approval Voting. *The American Political Science Review,* Vol. 72, n. 3, 1978.

[37] Carreras, F. de, & Vallés, J. M., *Las elecciones.* Ed. Blume, Barcelona, 1977.

[38] Colomer, J.M., *El arte de la manipulación política.* Anagrama S.A., Barcelona, 1990.

[39] *Constitución Española.* 1978.

[40] Davis, O. Hinich, M. & Ordeshook, P. An Exposity Development of a Mathematical Model of the Electoral Process. *The American Political Science Review.* Vol. 64, 1970.

[41] Durverger, M., (ed): *L'influence des systemes électoraux sur la vie politique.* Cahiers de la Fondation Nationales des Sciences Politiques. A. Colin, Paris, 1950.

[42] Esteban J., López G., Espín, N., García F., Satrústegui & Varela, *El proceso electoral.* Editorial Lábor, Barcelona 1977.

[43] Fernández Segado F., La Correlación entre el tamaño de las circunscripciones y las distorsiones de la proporcionalidad en la elección del Congreso, *Revista de Estudios Políticos.* Vol. 79, pp. 305-401, 1993.

[44] Fishburn, P. C. & Little, J. D. C., *An Experiment in Approval Voting.* Management Science. Vol. 34, n. 5, 1988.

[45] Garfunkel, S., *For all practical purposes.* Freeman, 1988.

[46] Giménez Fernández, M., *Estudios de Derecho Electoral Contemporáneo.* La organización del sufragio y la representación de las ideas. pp. 107-161, Universidad de Sevilla, 1977.

[47] González J. & Lacourly, N., A Family of Hamilton Type Methods for Congressional Apportionments. *Operation Research.* Vol. 26, pp. 31-40, 1992.

[48] Grofman B. & Scarrow, H. A., *Current Issues In Reapportionment. Law & Policy Quaterly.* Vol 4, n. 4, 1982.

[49] Grofman B. & Scarow, Weighted H., Voting in New York. *Legislative Studies Quaterly.* Vol. 6, n. 2, May, 1981.

[50] Grofman, B., Owen, G; Noviello, N. & Glazer, A., Stability and Centrality of Legislative Choice in the Spatial Context. *American Political Science Review.* Vol. 81, n. 2, 1987.

[51] Grofman B., Fair apportionment and the Banzhaz Index. *The American Mathematical Monthly.* Vol. 88, pp. 1-5, 1981.

[52] D'Hondt V., *Système pratique et raisonné de représentation proportionnelle.* Muquardt, Bruxelles, 1982.

[53] Huntington E. V., The Apportionment of Representatives in Congress. *Transactions of the American Mathematical Society.* Vol. 30, pp. 85, 1928.

[54] Klahr D., A Computer Simulation of the Paradox of Voting. *The American Political Science Review.* J-1992.

[55] Lijphardt A., The Field of Electoral System Research. A critical Survey. *Electoral Studies.* Vol. 4, n. 1, 3-14, 1985.

[56] Lijphardt A., *Electoral Systems and Party Systems. A study of twenty-seven democracies*, 1945-1990. Oxford University Press, 1994.

[57] Lijphardt A., *Sistemas Electorales y Sistemas de Partidos.* Traducción de Fernando Jiménez, revisada por José Ramón Motero. Centro de Estudios Constitucionales, Madrid, 1995.

[58] Linz, J.J.& Montero J. R., *Crisis y Cambio: Electores y partidos en la España de los años ochenta.* Centro de Estudios Constitucionales, Madrid, 1986.

[59] López Garrido, D., *Qué son unas elecciones libres.* Editorial· La Gaya Ciencia, Barcelona, 1977.

[60] MacDonald, S. E.; Listhaug, O. & Rabinovich, G., Issues and Party Support in Multiparty Systems.. *American Political Science Review.* Vol. 85, n. 4, 1991.

[61] Mackenzie, W. J. M. *Elecciones Libres.* Editorial Tecnos, Madrid , 1962.

[62] Manfred Neuber, Normas, Programas y Perfiles. *Servicio especial electoral de Inter Nations*, Kennedyalle, 91-103, SO12-90, 1990.

[63] Márquez García, M.L. & Ramírez González, V., The Spanish Electoral System. Proportionality and Governability. To appear in *An. Operation Research.* 1997.

[64] Martínez Cuadrado, M., Bases, principios y criterios de la reforma electoral española. Examen jurídico-constitucional. *Revistas de Estudios Políticos.* Vol. 34, pp. 41-59, 1983.

[65] Meer, F., *La Constitución de la II República.* Eunsa, Pamplona, 1978

[66] Montabes, J., Non-state wide parties within the framewwork of the spanish Party System. (cap. 5, de Non-state wide parties in Europe), *Institut de Ciències Politiques i Socials*, Universitat de Barcelona, Barcelona 1994.

[67] Montero J.R., Llerra F. J. & Torcal M., Sistemas electorales en España: una recapitulaión. *Congreso mundial de la International Political Science Association. REIS.* Vol. 58, Buenos Aires (Argentina), 1992.

[68] Montero J.R. & Gunther R., La Reforma del Régimen Electoral. *Centro de Estudios Constitucionales.* Madrid, 1994.

[69] Nohlen, D., Reforma del sistema electoral español: Conveniencias, fórmulas y efectos políticos. *Revistas de Estudios Políticos.* Vol 34, pp. 61-68, 1983.

[70] Nohlen, D. *Los sistemas electorales del mundo*, Centro de Estudios Constitucionales. Madrid 1983

[71] Ortiz de Burgos, J., *La Representación Proporcional.* Madrid, 1923.

[72] Oyama T. On a parametric divisor method for the apportionment problem. *Journal of the Operations Research Society of Japan.* Vol. 34, n. 2, 1991.

[73] Pastor, M., *Ciencia Politica.* Mc-Graw Hill, 1988.

[74] Rae, D. W., *Leyes Electorales y Sistemas de Partidos políticos.* Ediciones CITEP-Madrid, 1977.

[75] Rae, D. W., Desicion-Rules and Individual Values in Constitucional Choice. *The American Political Science Review.* Vol. 63, J-1992.

[76] Rae, D. W.& Ramírez, V., *El Sistema Electoral Español. Quince años de experiencia.* Mc-Graw Hill. 1993.

[77] Ramírez González, V., Matemática Aplicada a la distribución de escaños. Método de reparto P.R.I. *Rev. Epsilon* n. 6/7, 1985.

[78] Ramírez González, V., *Apuntes para la Reforma de la Ley Electoral.* Proyecto Sur de Ediciones, 1990.

[79] Ramírez González, V., Pérez Gómez, R. & Márquez Garcia, L., Distribución de los escaños del Senado por Comunidades Autónomas. *Revista de las Cortes n. 41, pp. 217-234, 1997.*

[80] Ramírez González, V., Elecciones en una democracia parlamentaria. Proporcionalidad en la distribución de escaños. Proyecto Sur de Edic., ISBN: 84-87387, 1991.

[81] Ramírez González, V., Pérez Gómez, R. & Márquez García, M.L., *Alternativas al Sistema Electoral Español.* libro por aparecer.

[82] Ramírez González, V., Pérez Gómez, R. & Márquez García, M.L, *Proporcionalidad y Gobernabilidad.* Jornadas para debatir el Sistema Electoral Español. Parlamento de Andalucía. Sevilla, Noviembre 1996.

[83] Ramírez González, V., Pérez Gómez, R. & Márquez García, M.L., *Parametrics subfamilies of apportionment methods.* Comunicación presentada en Guangzhou International Symposium on Computational Mathematics. China, Agosto, 1997.

[84] *Régimen Electoral General. Normas de Aplicacion.* Edit. Lex Nova, 1993.

[85] Rokkan, S., Voz "Elecciones electorales", en *Enciclopedia Internacional de las Ciencias Sociales*. Ed. Aguilar, Madrid, 1986.

[86] Saks, M. J. & Baron, C. H., The Use/Nonuse/Misuse of Applied Social Research in the Courts. *The Council for Applied. Social Research*. 1980.

[87] Sainte-Laguë, La reprèsentation et la méthode des moindres carrés, *Comptes Rendus de Academie des Sciences. n.* 151, p. 377, 1910.

[88] Santolaya Machetti, P., Significado y alcance de la Ley Orgánica del Régimen Electoral General, Centro de Estudios Constitucionales. *Revista de Estudios Políticos (Nueva Época)*. n. 53, pp. 45-69, Madrid 1986.

[89] Spafford, D. The Electoral System of Canada. *The American Political Science Review*. Vol. 64, 1970.

[90] Still J. W., A class of new methods for congressional apportionment. SIAM *Journal on Applied Mathematics*. Vol. 37, pp. 401-418, 1979.

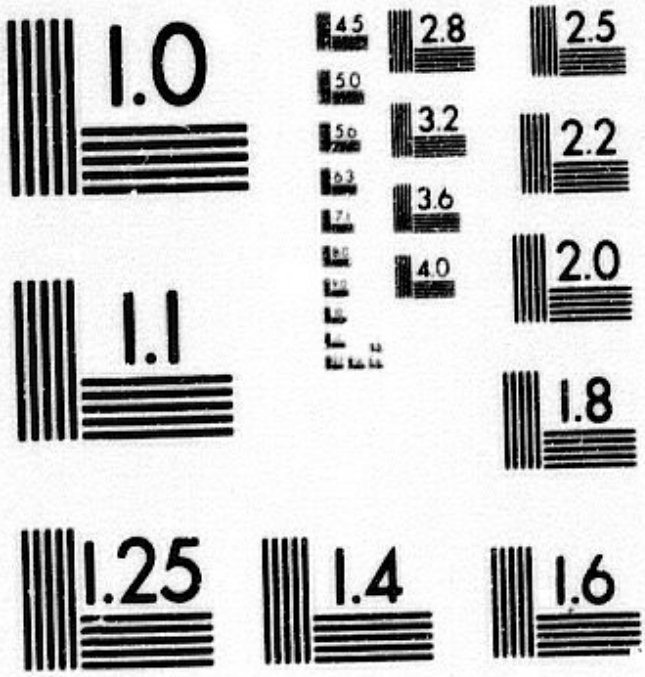
[91] The Riele, J. J. The proporcional representation problem in the Second Chamber: an approach via minimal distances. *Statistica Neerlandica*. Vol. 32, n. 4, pp. 163-179, 1978.

[92] Theil, H., The Desired Political Entropy. *The American Political Science Review*. Vol. 63. pp. 521-525, 1969.

[93] Villani, V., Legi Electorali,. *Cultura e Scuola*. n. 101, pp. 175-186, 1987.

[94] Wittman, D.,. Candidate Motivation: A Synthesis of Alternative Theories. *The American Political Science Review*. Vol. 77, 1983.

[95] Woodal, D. R., How Proportional is Proportional Representation. *The Mathematical Intelligencer*. Vol. 8, n..4, pp. 36-46, 1986.



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

[85] Rokkan, S., Voz "Elecciones electorales", en *Enciclopedia Internacional de las Ciencias Sociales.* Ed. Aguilar, Madrid, 1986.

[86] Saks, M. J. & Baron, C. H., The Use/Nonuse/Misuse of Applied Social Research in the Courts. *The Council for Applied. Social Research.* 1980.

[87] Sainte-Laguë, La reprèsentation et la méthode des moindres carrés, *Comptes Rendus de Academie des Sciences. n.* 151, p. 377, 1910.

[88] Santolaya Machetti, P., Significado y alcance de la Ley Orgánica del Régimen Electoral General, Centro de Estudios Constitucionales. *Revista de Estudios Políticos (Nueva Época).* n. 53, pp. 45-69, Madrid 1986.

[89] Spafford, D. The Electoral System of Canada. *The American Political Science Review.* Vol. 64, 1970.

[90] Still J. W., A class of new methods for congressional apportionment. SIAM *Journal on Applied Mathematics.* Vol. 37, pp. 401-418, 1979.

[91] The Riele, J. J. The proporcional representation problem in the Second Chamber: an approach via minimal distances. *Statistica Neerlandica.* Vol. 32, n. 4, pp. 163-179, 1978.

[92] Theil, H., The Desired Political Entropy. *The American Political Science Review.* Vol. 63. pp. 521-525, 1969.

[93] Villani, V., Legi Electorali,. *Cultura e Scuola.* n. 101, pp. 175-186, 1987.

[94] Wittman, D.,. Candidate Motivation: A Synthesis of Alternative Theories. *The American Political Science Review.* Vol. 77, 1983.

[95] Woodal, D. R., How Proportional is Proportional Representation. *The Mathematical Intelligencer.* Vol. 8, n..4, pp. 36-46, 1986.

Apéndice
Datos numéricos de las diferentes elecciones celebradas en España

Circunscripciones

1.0.1 Nombres de las Provincias

prov={"Álava","Albacete","Alicante","Almería","Ávila","Badajoz","Baleares",
"Barcelona","Burgos","Cáceres","Cádiz","Cantabria","Castellón","C. Real",
"Córdoba","Coruña","Cuenca","Gerona","Granada","Guadalajara","Guipúzcoa",
"Huelva","Huesca","Jaén","León","Lérida","Lugo","Madrid","Málaga",
"Murcia","Navarra","Orense","Oviedo","Palencia","Las Palmas","Pontevedra",
"La Rioja","Salamanca","S. C. Tenerife","Segovia","Sevilla","Soria",
"Tarragona","Teruel","Toledo","Valencia","Valladolid","Vizcaya","Zamora",
"Zaragoza","Ceuta","Melilla "};

El vector prov contiene los nombres correspondientes a las 52 circunscripciones. Son comunes a las 7 elecciones; cuando en una elección se da el primer vector de votos de los partidos, V[1], se refiere en todos ellos a los votos obtenidos por los partidos en la provincia de Álava y así sucesivamente hasta el vector V[52] que corresponde a los votos obtenidos por los distintos partidos en la provincia de Melilla.

1.1 Elección1977

La fuente de donde se han obtenido los datos ha sido la Junta Electoral Central.

1.1.1 Nombres de los Partidos

par={"UCD","PSOE","PCE","AP","PSP-US","PDC","PNV","EE" "OTROS"};

1.1.2 Votos por partido en cada Provincia en 1977

V[1]={38338,34244,4142,7994,0,0,21708,0,39805};
V[2]={64603,56382,13672,16034,0,0,0,0,18490};
V[3]={197100,213242,50444,36149,0,0,0,0,51666};
V[4]={92019,50723,11752,14763,0,0,0,0,15114};
V[5]={71587,14965,2406,7123,0,0,0,0,8792};
V[6]={148697,107797,22223,21844,0,0,0,0,18144};
V[7]={163536,73554,14140,28498,0,0,0,0,40568};
V[8]={355857,721888,469361,75097,0,364798,0,0,726075};
V[9]={89363,44388,4744,28445,0,0,0,0,183?9};
V[10]={115729,54827,6816,19517,0,0,0,0,12009};
V[11]={113712,152679,42081,20632,40765,0,0,0,87235};
V[12]={102719,67611,13884,36598,0,0,0,0,35161};
V[13]={84115,69776,14199,14546,0,0,0,0,54885};
V[14]={102362,79715,16169,31361,0,0,0,0,19812};
V[15]={117482,122361,59688,33544,0,0,0,0,28090};
V[16]={221996,78598,16929,50256,0,0,0,0,81861};
V[17]={70750,28350,7835,10327,0,0,0,0,8621};
V[18]={45231,60747,25127,7928,0,67275,0,0,107773};
V[19]={152498,111746,33697,24750,0,0,0,0,24982};
V[20]={39321,17133,5415,12449,0,0,0,0,5616};
V[21]={0,93010,12179,27008,0,0,102494,31208,198799};
V[22]={89494,63172,10706,9822,0,0,0,0,15725};
V[23]={55837,33698,7443,7253,0,0,0,0,18044};
V[24]={103697,123708,29465,27011,0,0,0,0,30090};
V[25]={137495,64766,12519,33285,0,0,0,0,20901}
V[26]={45191,27809,22659,10078,0,45428,0,0,79888};
V[27]={87059,20805,2945,36377,0,0,0,0,19874};
V[28]={742688,740015,248879,243672,212488,0,0,0,345679};
V[29]={115390,165095,50990,35033,0,0,0,0,48460};
V[30]={181633,155871,29434,29830,0,0,0,0,47620};

V[31]={75036,54720,6294,21884,0,0,18216,0,100696};
V[32]={99440,21104,2737,21502,0,0,0,0,16290};
V[33]={177654,182723,60276,77724,0,0,0,0,78034};
V[34]={51568,25878,3749,14784,0,0,0,0,5971};
V[35]={180475,36686,7467,15944,0,0,0,0,32560};
V[36]={198231,54642,11844,40104,0,0,0,0,43599};
V[37]={56917,36186,4114,19925,0,0,0,0,20243};
V[38]={108682,44168,5649,15280,0,0,0,0,19262};
V[39]={140557,50910,11054,24098,0,0,0,0,30560};
V[40]={50270,18210,2115,7442,0,0,0,0,6866};
V[41]={223252,251336,91914,42839,0,0,0,0,74398};
V[42]={35324,10755,1196,3742,0,0,0,0,8908};
V[43]={69014,59926,41345,15129,0,37146,0,0,66921};
V[44]={46820,16423,2427,14772,0,0,0,0,11788};
V[45]={101891,83956,21942,44091,0,0,0,0,13656};
V[46]={334705,395211,106133,60410,58654,0,0,0,204974};
V[47]={104145,76038,15589,20195,0,0,0,0,27735};
V[48]={91262,140643,33673,36934,0,0,171991,29104,264749};
V[49]={60626,26225,2780,30677,0,0,0,0,9307};
V[50]={138575,111293,22839,35298,47456,0,0,0,128930};
V[51]={8808,7886,0,2914,0,0,0,0,4614};
V[52]={10723,5186,966,2074,0,0,0,0,319};

1.1.3 Tamaño de las circunscripciones

h={4,4,9,5,3,7,6,33,4,5,8,5,5,5,7,9,4,5,7,3,7,5,3,7,6,4,5,32,8,8,5,5,10,3,6,8,4,4,7,3,
12,3,5,3,5,15,5,10,4,8,1,1}

1.2 Elección de 1979

Datos obtenidos de los que publicó la Junta Electoral Central el 17 de abril de 1979.

1.2.1 Nombres de los Partidos

par={"UCD","PSOE","PCE","CD","CiU","PNV","PSA","HB","UN","ERC","EE","PTE",
"ORT","PSOEH","MC"};

1.2.2 Votos por partido en cada Provincia en 1979

V[1]={29625,24891,3877,7205,0,26722,0,11594,1061,0,5442,777,1218,683,1248};
V[2]={65883,65465,20945,8224,0,0,0,0,3753,0,0,455,284,2205,0};
V[3]={207570,218137,62018,28917,0,0,0,0,10750,0,0,1628,3123,5196,2534};
V[4]={80854,67782,13534,8067,0,0,5074,0,3097,0,0,872,302,0,731};
V[5]={67001,20341,3661,6995,0,0,0,0,1599,0,0,265,278,0,429};
V[6]={146699,122680,30873,11194,0,0,0,0,6220,0,0,1852,4779,3183,369};
V[7]={140927,88232,14757,27554,0,0,0,0,3165,0,0,1793,1070,0,1179};
V[8]={387543,694847,436908,84195,362427,0,0,0,20743,88770,2550,36001,11122,
29868,10714};
V[9]={95425,41394,7189,14759,0,0,0,0,6900,0,0,2215,2288,2250,1139};
V[10]={97592,78670,10777,8490,0,0,0,0,5656,0,0,1427,1503,0,974};
V[11]={121800,124693,43824,13485,0,0,81598,0,4538,0,0,13254,1732,970,1040};
V[12]={111359,85727,17361,8362,0,0,0,0,5033,0,0,1012,2913,957,921};
V[13]={100896,95996,19171,11659,0,0,0,0,10004,2238,0,1296,2238,0,0};
V[14]={110734,111237,70554,20909,0,0,36826,0,7427,0,0,4080,3168,467,1078};
V[15]={200120,76873,20213,50588,0,0,0,0,4285,0,0,3043,12366,1423,2254};
V[16]={64273,38654,10049,7388,0,0,0,0,0,0,0,265,0,319,196};
V[17]={58939,66328,22261,7927,58735,0,0,0,2372,9964,0,1229,513,0,457};
V[18]={131107,128092,45384,16050,0,0,22156,0,4381,0,0,3161,304,2123,1066};
V[19]={36361,18155,6699,8416,0,0,0,0,5131,0,0,301,513,666,107};
V[20]={50551,59863,10034,3419,0,87090,0,57811,2397,0,42293,0,2765,0,4754};
V[21]={68756,65302,12913,6080,0,0,17720,0,3010,0,0,1099,4330,2009,505};
V[22]={56449,40885,7724,5280,0,0,0,0,900,0,0,665,263,1047,629};
V[23]={111209,137861,42466,11752,0,0,11335,0,9294,0,0,1388,398,1088,528};
V[24]={129085,71533,15157,29313,0,0,0,0,3029,0,0,1405,1262,0,630};
V[25]={54540,42937,18340,5509,27300,0,0,0,1875,13336,0,1914,355,0,562};
V[26]={64735,39245,4810,18686,0,0,0,0,1569,0,0,1053,1546,0,982};
V[27]={79964,27920,2441,30731,0,0,0,0,816,0,0,407,186,0,264};
V[28]={764830,769328,310496,198345,0,0,0,0,110730,0,3029,25832,48354,13322,

9095};
V[29]={120201,148497,53036,16304,0,0,49552,0,7338,0,0,6948,605,4628,1408};
V[30]={178229,178621,36090,25003,0,0,0,0,6925,0,0,1841,4715,7784,1157};
V[31]={83302,55399,5619,0,0,0,0,22425,0,0,0,0,0,0,2962};
V[32]={75271,23292,3829,26901,0,0,0,0,0,0,0,741,417,0,622};
V[33]={177459,200346,73744,46365,0,0,0,0,11178,0,0,1489,2518,3101,6003};
V[34]={51069,25888,4517,9351,0,0,0,0,3746,0,0,1033,325,0,302};
V[35]={171842,41616,8245,8007,0,0,0,0,2218,0,0,1315,1165,0,0};
V[36]={137769,49213,16111,37046,0,0,0,0,2733,0,0,2637,1081,0,1693};
V[37]={104328,51866,7837,14002,0,0,0,0,1946,0,0,1133,831,1642,487};
V[38]={139908,53604,11560,11204,0,0,0,0,3482,0,0,1644,1796,0,0};
V[39]={108552,78512,17140,0,0,0,0,0,10106,0,0,4014,3267,3735,872};
V[40]={49375,19216,3450,5458,0,0,0,0,948,0,0,306,299,0,532};
V[41]={191099,203468,110731,32428,0,0,101501,0,9225,0,0,27337,1086,3706,
1031};
V[42]={31756,14187,1550,5567,0,0,0,0,664,0,0,341,320,0,301};
V[43]={69926,71417,35283,9998,34792,0,0,0,2311,11382,0,1201,1038,0,1295};
V[44]={46775,22886,2737,6971,0,0,0,0,2000,0,0,475,151,0,247};
V[45]={110700,85288,28961,14933,0,0,0,0,19383,0,0,1692,1421,1753,0};
V[46]={364175,394813,145141,47017,0,0,0,0,27447,0,0,5076,6636,11774,8900};
V[47]={93062,71230,18229,19706,0,0,0,0,8931,0,0,3117,1570,2802,1755};
V[48]={88431,105481,31942,23484,0,161480,0,80280,7521,0,32363,0,2932,4131,
7292};
V[49]={61025,27143,3506,19603,0,0,0,0,2111,0,0,591,463,0,563};
V[50]={153457,113600,34000,22969,0,0,0,0,7843,0,0,19883,2432,4022,2780};
V[51]={11020,7502,0,1669,0,0,0,0,735,0,0,0,115,0,91};
V[52]={9035,3750,793,848,0,0,0,0,429,0,0,353,46,0,180};

1.2.3 Tamaño de las circunscripciones

h={4,4,10,5,3,6,7,32,4,5,9,5,5,7,9,3,5,7,3,6,5,3,6,5,4,4,5,34,10,9,5,4,9,3,7,8,4,5,7,3,12,
3,6,3,5,16,5,9,3,7,1,1}

1.3 Elección de 1982

Los datos son los facilitados por la Junta Electoral Central, publicados el 20 de diciembre de 1982

1.3.1 Nombres de los Partidos

par={"PSOE","AP","PSC","CiU","UCD","PNV","PCE","CDS","HB","PDP","PSUC",
"ERC","EE","FN","PST","PSA","CC"};

1.3.2 Votos por partido en cada Provincia en 1982

V[1]={51674,27,0,0,0,32103,1573,5604,14540,27974,0,0,10180,314,854,0,0};
V[2]={103328,55665,0,0,16755,0,8874,3846,0,0,0,0,0,1388,855,0,0};
V[3]={352632,189040,0,0,46940,0,26531,16680,0,0,0,0,0,3461,3656,0,0};
V[4]={119903,48280,0,0,23494,0,5504,3666,0,0,0,0,0,1251,0,2558,0};
V[5]={34142,37193,0,0,11218,0,1947,25000,0,0,0,0,0,414,581,0,0};
V[6]={209144,85295,0,0,30647,0,15368,5288,0,0,0,0,0,895,1310,0,0};
V[7]={144232,134444,0,0,37148,0,5962,18722,0,0,0,0,0,879,1716,0,0};
V[8]={1292672,385967,0,560555,0,0,0,49772,0,0,131314,99850,0,8724,15462,6687,40222};
V[9]={79626,90959,0,0,20609,0,3737,10404,0,0,0,0,0,919,1724,0,0};
V[10]={123902,57735,0,0,29832,0,3831,4528,0,0,0,0,0,785,1595,0,0};
V[11]={308571,97314,0,0,22728,0,20749,8473,0,0,0,0,0,1209,3474,16654,0};
V[12]={135987,117567,0,0,16265,0,9265,15281,0,0,0,0,0,1716,1760,0,0};
V[13]={130200,73825,0,0,33547,0,8280,7100,0,0,0,0,0,2777,915,0,0};
V[14]={151168,79037,0,0,29443,0,7627,5543,0,0,0,0,0,3222,1182,0,0};
V[15]={243428,90023,0,0,28414,0,37555,5358,0,0,0,0,0,1556,1836,9270,0};
V[16]={59676,42274,0,0,20119,0,4257,2399,0,0,0,0,0,2868,0,0,0};
V[17]={91228,35178,0,96306,0,0,0,5328,0,0,8431,5157,0,1377,1593,0,5994};
V[18]={234154,97554,0,0,27897,0,28636,7276,0,0,0,0,0,2029,0,4939,0};
V[19]={34212,33748,0,0,12049,0,3392,2919,0,0,0,0,0,805,971,0,0};
V[20]={99972,31,0,0,0,125389,4844,6407,74217,31308,0,0,38156,435,1142,0,0};
V[21]={139420,45755,0,0,17174,0,7976,3003,0,0,0,0,0,696,812,3752,0};
V[22]={63103,33945,0,0,19234,0,3314,6375,0,0,0,0,0,407,624,0,0};
V[23]={207754,83833,0,0,32456,0,26829,3363,0,0,0,0,0,1789,986,4750,0};
V[24]={196359,180619,0,0,66689,0,9113,14146,0,0,0,0,1216,5912,0,0,0};
V[25]={67781,64778,0,0,11545,0,2491,5774,0,0,0,0,669,905,0,0,0};
V[26]={109366,97701,0,0,45905,0,0,19705,0,0,0,0,0,758,1746,0,0};
V[27]={133206,94506,0,0,46170,0,5856,8052,0,0,0,0,0,1106,1276,0,0};
V[28]={70821,31832,0,56188,0,0,0,6286,0,0,5495,11748,0,743,1273,0,11484};

V[29]={53263,88462,0,0,34567,0,1391,3876,0,0,0,0,0,0,1026,0,0};
V[30]={1439137,891372,0,0,92508,0,137459,113384,0,0,0,0,0,22602,8064,0,0};
V[31]={315092,118369,0,0,19435,0,26935,7637,0,0,0,0,0,1298,2420,11770,0};
V[32]={270552,189642,0,0,34354,0,20065,10211,0,0,0,0,0,2501,0,0,0};
V[33]={112186,76255,0,0,31245,16363,2144,12278,34744,0,0,0,8399,459,1088,0,0};
V[34]={50619,63801,0,0,52282,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[35]={339575,181965,0,0,31763,0,53017,28048,0,0,0,0,0,2056,3570,0,0};
V[36]={49756,44965,0,0,12330,0,2679,4516,0,0,0,0,0,707,0,0,0};
V[37]={126228,155556,0,0,76575,0,8070,12099,0,0,0,0,0,930,4487,0,0};
V[38]={100537,64972,0,0,29951,0,2611,8338,0,0,0,0,0,362,0,0,0};
V[39]={130249,78174,0,0,61236,0,0,12587,0,0,0,0,0,1315,3469,0,0};
V[40]={34375,35483,0,0,9680,0,1348,6967,0,0,0,0,0,413,1074,0,0};
V[41]={496543,176054,0,0,30004,0,57272,5775,0,0,0,0,0,27,2568,23375,0};
V[42]={21639,22820,0,0,11453,0,715,2881,0,0,0,0,0,405,278,0,0};
V[43]={120880,51098,0,59677,0,0,0,7009,0,0,13313,11361,0,1281,1779,719,12535};
V[44]={38834,31779,0,0,15570,0,1124,4472,0,0,0,0,0,975,399,0,0};
V[45]={138169,98244,0,0,28433,0,12849,5331,0,0,0,0,0,6488,1059,0,0};
V[46]={635522,350281,0,0,52768,0,63026,28111,0,0,0,0,0,12431,7396,0,0};
V[47]={144409,88057,0,0,20704,0,9622,11786,0,0,0,0,0,2229,1555,0,0};
V[48]={196974,79,0,0,0,221801,14537,9815,87100,79866,0,0,43591,1289,3815,0,0};
V[49]={47804,47504,0,0,24725,0,1368,5880,0,0,0,0,0,1001,731,0,0};
V[50]={255402,156860,0,0,34044,0,16492,19918,0,0,0,0,0,2654,2952,0,0};
V[51]={11698,7674,0,0,1870,0,188,2010,0,0,0,0,0,173,137,0,0};
V[52]={10291,5551,0,0,3083,0,0,1615,0,0,0,0,0,143,0,0,0};

1.3.3 Tamaño de las circunscripciones

h={4,4,9,5,3,7,6,33,4,5,8,5,5,5,7,4,5,7,3,7,5,3,7,9,4,6,6,4,5,32,8,8,5,5,10,3,8,4,7,3,12,
3,5,3,5,15,5,10,4,8,1,1}

1.4 Elección de 1986

Datos obtenidos por la Junta electoral central publicados el 15 de julio de 1986

1.4.1 Nombres de los Partidos

par={"PSOE","CP","CDS","CiU","IU","PNV","EE","HB","OTROS"};

1.4.2 Votos por partido en cada Provincia en 1986

V[1]={45259,21600,11951,0,1162,26030,11081,16440,0,1239};
V[2]={97838,61093,16750,0,8729,0,0,0,0,5942};
V[3]={314763,188399,61446,0,31340,0,0,0,1786,37361};
V[4]={111617,54433,18960,0,11010,0,0,0,0,13313};
V[5]={278946,165071,79788,0,55881,0,0,0,0,23351};
V[6]={26927,32295,45283,0,2202,0,0,0,0,2731};
V[7]={209621,95566,31110,0,18727,0,0,0,0,9142};
V[8]={137363,117007,28510,0,7942,0,0,0,0,29642};
V[9]={1054135,261166,106434,728372,0,0,0,0,101654,157743};
V[10]={74484,79153,28353,0,5439,0,0,0,0,10892};
V[11]={127040,65470,17324,0,4796,0,0,0,0,20529};
V[12]={286104,93284,260800,0,27527,0,0,0,0,35763};
V[13]={129041,99149,37710,0,8997,0,0,0,0,13796};
V[14]={119255,86023,23113,0,6155,0,0,0,1351,20512};
V[15]={138568,86031,25128,0,9793,0,0,0,0,7538};
V[16]={223759,90637,27211,0,51007,0,0,0,0,22890};
V[17]={200522,184681,51763,0,0,0,0,0,18662,46145};
V[18]={57361,49339,11054,0,3119,0,0,0,0,4981};
V[19]={82116,25892,119963,0,6705,0,0,0,6659,17955};
V[20]={212031,105156,27398,0,28198,0,0,0,0,25492};
V[21]={32855,36174,9407,0,4024,0,0,0,0,3174};
V[22]={80336,281555,12487,0,2890,99515,37237,80032,0,2335};
V[23]={130386,44778,12034,0,11068,0,0,0,0,10344};
V[24]={53764,30289,15446,0,3978,0,0,0,11786,4522};
V[25]={201494,98395,195507,0,33567,0,0,0,0,16648};
V[26]={130432,988802,35709,0,7510,0,0,0,0,10020};
V[27]={58221,30759,6189,77645,0,0,0,0,4811,11757};
V[28]={55860,88162,12210,0,0,0,0,0,19944,9579};
V[29]={1054730,826206,360246,0,155932,0,0,0,0,155624};
V[30]={284757,108640,29925,0,44595,0,0,0,0,25872};

V[31]={261922,184109,44724,0,24222,0,0,0,0,17216};
V[32]={97010,80922,26106,0,4244,4935,7645,37998,0,9648};
V[33]={58876,67128,9584,0,0,0,0,0,24045,8033};
V[34]={44952,44311,13819,0,3271,0,0,0,0,4559};
V[35]={113905,98173,73842,0,0,0,0,0,6927,55008};
V[36]={143118,162134,36292,0,0,0,0,0,17321,41037};
V[37]={65151,58177,14952,0,2961,0,0,0,0,5725};
V[38]={82458,76438,39044,0,4392,0,0,0,0,8160};
V[39]={127292,57646,39510,0,0,0,0,0,58737,35573};
V[40]={29204,32785,21170,0,2218,0,0,0,0,3378};
V[41]={473743,169409,29033,0,66034,0,0,0,0,61439};
V[42]={20373,23949,8014,0,1500,0,0,0,0,2435};
V[43]={105261,43499,11376,88278,0,0,0,0,10788,16193};
V[44]={35785,28583,9233,0,1363,0,0,0,8405,2991};
V[45]={130951,100685,30763,0,13400,0,0,0,0,6884};
V[46]={559426,328800,99175,0,60857,0,0,0,61266,78573};
V[47]={115617,88500,47042,0,8280,0,0,0,0,14285};
V[48]={162323,65212,36286,0,9638,179130,51090,97252,0,6792};
V[49]={48436,52844,79444,0,2440,0,0,0,0,4001};
V[50]={198260,114389,49425,0,17147,0,0,0,52813,19151};
V[51]={10937,8788,1928,0,351,0,0,0,0,682};
V[52]={7048,9082,2219,0,549,0,0,0,0,583};

1.4.3 Tamaño de las circunscripciones

h={4,4,10,5,9,3,6,6,33,4,5,9,5,5,7,9,3,5,7,3,7,5,3,6,5,4,4,5,33,9,8,5,5,3,7,8,4,6,5,3,12,
3,5,3,5,16,5,10,4,8,1,1}

Elección de1989

Los datos han sido facilitados por la Dirección General de Política Interior (Ministerio del Interior)

Nombres de los Partidos

par={"PSOE","PP","CiU","IU","CDS","EAJ-PNV","HB","OTROS"};

Votos por partido en cada Provincia en 1989

V[1]={35526,19493,0,4238,9220,23178,15932,23434,5588};
V[2]={97693,60633,0,16523,14670,0,0,0,6055};
V[3]={290031,194898,0,59317,66097,0,0,3957,45160};
V[4]={114924,51218,0,18594,19494,0,0,5091,8233};
V[5]={30015,35690,0,4815,34305,0,0,0,3060};
V[6]={205115,87929,0,29965,37387,0,0,0,12005};
V[7]={118778,140114,0,17599,31673,0,0,0,33514};
V[8]={900039,256785,740497,199372,110175,0,0,0,218511};
V[9]={65554,88282,0,15998,21942,0,0,0,8826};
V[10]={125953,65377,0,12176,21044,0,0,0,14009};
V[11]={243767,76189,0,45149,19934,0,0,53296,28466};
V[12]={106017,86326,0,13945,22405,0,0,3252,20896};
V[13]={142991,81968,0,17225,21678,0,0,0,8101};
V[14]={206892,76549,0,76816,210032,0,0,24677,11757};
V[15]={189520,185805,0,15635,46489,0,0,0,73846};
V[16]={58338,49726,0,5500,9143,0,0,0,3819};
V[17]={74267,20440,120714,10059,7669,0,0,0,22096};
V[18]={203991,100879,0,47035,24679,0,0,10856,18798};
V[19]={31671,37041,0,7250,6695,0,0,0,3185};
V[20]={698994,24587,0,6871,7825,57069,78093,100354,6686};
V[21]={122955,41152,0,16203,9824,0,0,10556,8386};
V[22]={47307,30001,0,9048,10029,0,0,14246,5533};
V[23]={197441,88879,0,42038,17569,0,0,8985,8831};
V[24]={113165,109535,0,17797,28806,0,0,0,11303};
V[25]={52109,22648,76267,6798,7250,0,0,6667,9362};
V[26]={58472,60639,0,9466,10583,0,0,0,6515};
V[27]={62594,92076,0,3953,12385,0,0,5631,12411};
V[28]={894926,922188,0,410891,295653,0,0,0,134707};
V[29]={262607,100061,0,69486,28396,0,0,26350,20356};

V[30]={255492,166698,0,51002,57618,0,0,2914,18683};
V[31]={86505,92185,0,15965,19451,2550,30638,21313,6131};
V[32]={65073,76368,0,3655,13411,0,0,0,29261};
V[33]={245600,161952,0,95046,76442,0,0,0,16761};
V[34]={41256,50104,0,6512,9660,0,0,0,107533};
V[35]={112863,73209,0,35632,85954,0,0,6502,38166};
V[36]={136420,163546,0,15538,33787,0,0,0,64307};
V[37]={79604,87940,0,12207,26873,0,0,0,6861};
V[38]={128711,56606,0,17519,31765,0,0,58487,21090};
V[39]={118868,114247,0,19046,28904,0,0,0,13135};
V[40]={27470,35818,0,6373,14776,0,0,0,3790};
V[41]={437879,153041,0,92899,18359,0,0,72996,29081};
V[42]={18342,26725,0,2871,5250,0,0,0,1839};
V[43]={93198,35783,92998,14440,108006,0,0,0,23921};
V[44]={33540,27669,0,3514,7308,0,0,8883,2471};
V[45]={135248,99440,0,20945,23209,0.0,0,7474};
V[46]={480935,290922,0,118567,77663,0,0,13446,87811};
V[47]={102467,108363,0,27124,32627,0,0,0,11681};
V[48]={127387,59388,0,21253,21134,17972,92159,96711,19515};
V[49]={48442,54711,0,5074,14740,0,0,0,3714};
V[50]={173598,125607.0,51460,32791,0,0,48499,20989};
V[51]={8543,7822,0,2755,1875,0,0,0,1502};
V[52]={8079,7628,0,0,1640,0,0,0,1699};

1.4.4 Tamaño de las circunscripciones

h={4,4,10,5,3,6,6,32,4,5,9,5,5,7,9,3,5,7,3,7,5,3,6,5,4,4,5,33,10,9,5,5,9,3,7,8,4,7,5,3,12,
3,5,3,5,16,5,10,3,7,1,1}

Elección de 1993

La fuente de datos ha sido la Dirección General de Política Interior, B.O.E. 18 de julio de 1993.

Nombres de los Partidos

```
par={"PSOE","PP","IU","CiU","ERC","CDS","PNV","HB","EA","CC","PAR","UV",
     "OTROS"};
```

Votos por partido en cada Provincia en 1993

```
V[1]={40860,30652,10748,0,0,1818,26321,14702,9036,0,0,0,0};
V[2]={103057,90453,20841,0,0,4253,0,0,0,0,0,0,0};
V[3]={312754,340312,80339,0,0,15212,0,0,0,0,0,4328,0};
V[4]={126242,98341,25020,0,0,3585,0,0,0,0,0,0,0};
V[5]={34806,57324,6227,0,0,13444,0,0,0,0,0,0,0};
V[6]={211124,142563,36552,0,0,7657,0,0,0,0,0,0,0};
V[7]={140145,191461,24574,0,0,7648,0,0,0,0,0,0,0};
V[8]={1030053,480204,240019,851105,122530,22446,0,0,0,0,0,0,0};
V[9]={76863,111439,20343,0,0,6734,0,0,0,0,0,0,0};
V[10]={131853,95628,15662,0,0,5941,0,0,0,0,0,0,0};
V[11]={280715,155785,61604,0,0,4287,0,0,0,0,0,0,0};
V[12]={113752,128916,20250,0,0,5867,0,0,0,0,0,5014,0};
V[13]={146867,119123,21856,0,0,6383,0,0,0,0,0,0,0};
V[14]={230258,128898,80977,0,0,4648,0,0,0,0,0,0,0};
V[15]={236812,281077,34550,0,0,11328,0,0,0,0,0,0,53153};
V[16]={59763,64408,7041,0,0,3325,0,0,0,0,0,0,0};
V[17]={84586,39112,10437,128957,27449,1519,0,0,0,0,0,0,0};
V[18]={229537,160955,50588,0,0,5324,0,0,0,0,0,0,0};
V[19]={35163,46908,8826,0,0,2300,0,0,0,0,0,0,0};
V[20]={86410,42934,17733,0,0,2044,64195,76309,66645,0,0,0,0};
V[21]={138445,72640,22439,0,0,2093,0,0,0,0,0,0,0};
V[22]={50720,43059,9756,0,0,2840,0,0,0,0,23784,0,0};
V[23]={210306,129705,41311,0,0,3455,0,0,0,0,0,0,0};
V[24]={130241,142574,21510,0,0,7694,0,0,0,0,0,0,0};
V[25]={57218,41744,6798,83092,0,1310,0,0,0,0,0,0,0};
V[26]={64037,78792,11850,0,0,3609,0,0,0,0,0,0,0};
V[27]={72745,120130,6155,0,0,2842,0,0,0,0,0,0,16226};
V[28]={1093015,1373042,455685,0,0,93347,0,0,0,0,0,0,0};
```

V[29]={304745,196911,89498,0,0,5911,0,0,0,0,0,0};
V[30]={253324,310507,63717,0,0,14442,0,0,0,0,0,0};
V[31]={108305,112228,27043,0,0,5241,3540,32221,11437,0,0,0};
V[32]={85035,106471,4952,0,0,2570,0,0,0,0,0,13780};
V[33]={271877,258355,106757,0,0,25351,0,0,0,0,0,0};
V[34]={46448,57744,7761,0,0,3714,0,0,0,0,0,0};
V[35]={104367,160131,22382,0,0,4064,0,0,102913,0,0,0};
V[36]={175307,239286,28948,0,0,7539,0,0,0,0,0,43806};
V[37]={87578,114031,15633,0,0,9041,0,0,0,0,0,0};
V[38]={122418,121967,24453,0,0,5081,0,0,0,0,0,27005};
V[39]={137281,114535,17932,0,0,5846,0,0,0,104164,0,0};
V[40]={30945,46001,7104,0,0,8628,0,0,0,0,0,0};
V[41]={543651,252241,113316,0,0,5597,0,0,0,0,0,30421};
V[42]={21498,29627,3280,0,0,2151,0,0,0,0,0,0};
V[43]={105981,63433,16190,102629,21063,2301,0,0,0,0,0,0};
V[44]={36327,34293,3990,0,0,1644,0,0,0,12070,0,0};
V[45]={142960,142403,23324,0,0,5607,0,0,0,0,0,0};
V[46]={508819,518089,156340,0,0,18844,0,0,0,0,102999,27429};
V[47]={115617,145368,37532,0,0,11408,0,0,0,0,0,0};
V[48]={166172,102172,47091,0,0,5285,197392,83644,42175,0,0,0};
V[49]={53965,67597,6027,0,0,4703,0,0,0,0,0,0};
V[50]={174061,172753,60074,0,0,5765,0,0,0,108690,0,0};
V[51]={12170,15276,0,0,0,485,0,0,0,0,0,0};
V[52]={12885,11865,687,0,0,569,0,0,0,0,0,0 0};

1.4.5 Tamaño de las circunscripciones

h={4,4,10,5,9,3,6,7,32,4,5,9,5,5,5,7,9,3,5,7,3,6,5,3,6,5,4,5,34,10,9,5,4,3,7,8,4,4,7,3,12,
3,6,3,5,16,5,9,3,7,1,1}

Elección de 1996

La fuente de datos ha sido la Dirección General de Política Interior, B.O.E. 27 de marzo de 1996.

1.4.6 Nombres de los Partidos

par={"PP","PSOE","IU","CiU","ERC","PNV","HB","EA","CC","BNG","UV","PA"};

Votos por partido en cada Provincia en 1996

V[1]={45731,42561,19535,0,0,33761,12552,9364,0,0,0,0};
V[2]={105294,103471,22682,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[3]={382321,335149,88772,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[4]={115925,135789,28580,0,0,0,0,0,0,0,0,4754};
V[5]={68503,35527,8977,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[6]={167254,208287,42434,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[7]={194859,155244,33224,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[8]={548323,1203339,260881,818832,114195,0,0,0,0,0,0,0};
V[9]={126837,71804,25880,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[10]={115444,131616,20068,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[11]={217795,270237,81116,0,0,0,0,0,0,0,0,37356};
V[12]={140578,120997,23003,0,0,0,0,0,0,0,0,0}
V[13]={141494,142101,25689,0,0,0,0,0,0,0,0,13194};
V[14]={163155,220659,91773,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[15]={325922,233344,29669,0,0,0,0,0,0,87824,0,0};
V[16]={70199,59261,7844,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[17]={39569,120118,11038,136448,18548,0,0,0,0,0,0,0};
V[18]={196049,237446,61214,0,0,0,0,0,0,0,0,9878};
V[19]={53683,36156,11080,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[20]={56651,89645,28644,0,0,77976,72829,58030,0,0,0,0};
V[21]={89882,138259,27060,0,0,0,0,0,0,0,0,7129};
V[22]={61900,55766,10230,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[23]={155947,205818,49564,0,0,0,0,0,0,0,0,7200};
V[24]={162850,126532,25622,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[25]={40463,74686,7508,88880,12615,0,0,0,0,0,0,0};
V[26]={88069,65311,15530,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[27]={129523,78692,6292,0,0,0,0,0,0,24136,0,0};
V[28]={1642489,1046904,547901,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[29]={263920,288165,103930,0,0,0,0,0,0,0,0,18492};

V[30]={350337,266738,73961,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[31]={120335,98102,40354,0,0,3158,26451,12233,0,0,0,0};
V[32]={112326,83474,3915,0,0,0,0,0,0,27779,0,0};
V[33]={297079,288558,112339,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[34]={63245,46740,9784,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[35]={194812,118769,26305,0,0,0,0,0,110338,0,0,0};
V[36]={259634,178981,22377,0,0,0,0,0,0,80408,0,0};
V[37]={130734,84687,19526,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[38]={135701,144480,21867,0,0,0,0,0,110080,0,0,0};
V[39]={175651,123940,39541,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[40]={54188,31903,8808,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[41]={327384,521484,139733,0,0,0,0,0,0,0,0,36797};
V[42]={32561,20226,4662,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[43]={70045,133000,17558,107473,17187,0,0,0,0,0,0,0};
V[44]={45207,37856,5506,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[45]={164313,142262,27904,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[46]={607914,534847,174807,0,0,0,0,0,0,0,81350,0};
V[47]={164840,120941,42622,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[48]={128904,166293,67954,0,0,204056,69472,36234,0,0,0,0};
V[49]={75223,51509,7824,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[50]={263868,174567,55019,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[51]={17288,11627,718,0,0,0,0,0,0,0,0,0};
V[52]={13788,11810,950,0,0,0,0,0,0,0,0,0};

1.4.7 Tamaño de las circunscripciones

h={5,9,7,7,5,6,10,13,7,3,3,9,5,5,4,3,5,3,4,3,3,3,5,3,5,4,3,31,5,4,6,16,11,5,7,7,7,4,9,4,4,8,4,6,9,5,
5,6,34,9,1,1}

Censo por provincias de 1995 (fuente, Instituto de Estadistica)

censo={282944,361327,1363785,493126,176791,675592,787984,4748236,360677,
424946,1127622,464670,490573,782221,1136283,207499,541995,841829,155884,
684113,458674,210276,666767,532706,360407,268206,386405,5181659,1224959,
1109977,536192,364521,1117370,186035,844140,937811,365293,787358,541885,
149653,1719446,94396,576231,143055,515434,2200319,504583,1163726,214273,
852332,73142,64727}.

1.5 Algunos de los programas realizados con *Mathematica* y utilizados para la realización del trabajo

A continuación incluimos algunos de los programas que se han utilizado para obtener los resultados que se recogen en la Memoria al analizar las distintas elecciones habidas en España desde 1977 hasta 1996.

1.5.1 Programa para aplicar el método de los Restos Mayores

Hamilton300400={}

```
For[h=300, h<=400,h++, proporciones=Table[censo[[i]] h/Sum[censo[[i]],{i,50}];
    reparto=Floor[proporciones]; repartidos=Sum[reparto[[i]],{i,50}];
    k=h-repartidos; maximo=0; restos=proporciones-Floor[proporciones];
    For[j=1, j<=k, j++, maximo=0;
        If[maximo<restos[[i]], maximo=restos[[i]]; m=i]];
    restos[[m]]=0; reparto[[m]]=reparto[[m]]+1];
    reparto=reparto+2; p=reparto;
    For[i=1, i<=49, i++,
    For[j=i+1, j<=50,j++,
    If[p[[i]]<p[[j]], c=p[[i]]; p[[i]]=p[[j]]; p[[j]]=c]]];
    AppendTo[Hamilton300400, p],]
```

Modificando el bucle inicial y variando sólo de 248 a 248, este programa se puede aplicar para la distribución de los escaños de la Cámara entre las provincias, según la Ley actual, después habría que sumar 2 escaños más a cada provincia y asignar 1 escaño a Ceuta y otro a Melilla para así completar los 350.

Este programa se ha aplicado para:

- Mostrar la paradoja de Alabama cuando la Cámara tuviese un tamaño entre 300 y 400 Diputados (incluyéndolo dentro de un bucle nuevo).
- Para efectuar la distribución de los 350 escaños de la Cámara actual para diferentes censos de población (usados en las distintas elecciones); es decir, para calcular en cada una el tamaño de las 50 circunscripciones provinciales.

En una matriz h de longitud 52 se ha guardado el tamaño de cada una de las circunscripciones (h[[51]]=h[[52]]=1, puesto que corresponden a Ceuta y Melilla. A cada elección corresponde una matriz h que se obtiene en función del censo provincial usado en la misma, excepto en las primeras elecciones para las cuáles h se fijó en un decreto preconstitucional.

Para el reparto de escaños con los distintos métodos basados en dividores, cuyos resultados hemos recogido en los capítulos 4 y 5, hemos utilizado el siguiente programa.

1.5.2 Programa para la distribución de los escaños en cada circunscripción con unos divisores $d(i) = i + t$ (t fijo del intervalo $[0.5, 1]$)

```
t=1; For[i=1, i<=100, i++, d[i]=i+t];(*d'Hondt*)
For[k=1, k<=52, k++, For[i=1, i<=n, i++, esc[k,i]=0]];
For[k=1, k<=52, k++,
    For[t=1, t<=n[[k]], t++, maximo=0;
    For[i=1, i<=n,i++,divisor=d[esc[k,i]]+1];
    If[V[k][[i]]/divisor>maximo,
      maximo=V[k][[i]]/divisor;
      p=i;
      q=k];
        ]
    esc[q,p]=esc[q,p]+1
    ]
  ]
Table[esc[i,j],{i,52},{j,n}]
```

Para el cálculo de repartos con mínimos, una ligera modificación del programa permite obtener dicho reparto.

n es el número de partidos.

esc[k,i] es el número de escaños obtenidos por el partido n^o i en la provincia n^o k.

1.5.3 Cálculo de los índices MC y DA

```
MC=Sqrt[1/2Sum[(100.Sum[[V[i][[k]],{k,52}/Sum[Sum[V[j][[k]],
    {k,52}],{j,n]-100.Sum[esc[k,i]/H)^2,{i,n}];

DA=1/2Sum[Abs[(100.Sum[[V[i][[k]],{k,52}/Sum[Sum[V[j][[k]],
    {k,52}],{j,n]-100.Sum[esc[k,i]/H)^2,{i,n}]];
(*H tamaño de la Cámara)
```

1.5.4 Simulación de elección mayoritaria en distritos

```
tc={tc1,tc2,...,tcn};n=Length[a];h=Table[Min[tc_i[[i]],25],{i,n}]
ei=Table[tc[[i]]-h[[i]],{i,n}]*1.;es=Table[tc[[i]]+h[[i]],{i,n}]*1.
desde=1;For[i=2,i<=n,i++,
    If[es[[i]]>ei[[1]],desde=i]
    If[desde==1,p1=1,
    p1=1/(2h[[1]])*(Integrate[Product[(t-ei[[k]])/(2h[[k]]),
        {k,2,desde}],{t,ei[[1]],es[[desde]]}]+
    Sum[Integrate[Product[(t-ei[[k]])/(2h[[k]]),{k,2,j}],
    {t,es[[desde]],es[[desde-1]]}],
                {j,2,desde-1}]+
    es[[1]]-Max[es[[2]],ei[[1]]])];p1
    If[desde==1,p2=0,
    p2=1/(2h[[2]])*(Integrate[(t-ei[[1]])/(2h[[1]])*
            Product[(t-ei[[k]])/(2h[[k]]),
                {k,3,desde}],{t,ei[[1]],es[[desde]]}]+
    Sum[Integrate[(t-ei[[1]])/(2h[[1]])*Product[(t-ei[[k]])/(2h[[k]]),
    {k,3,j-1}],{t,es[[j]],es[[j-1]]}],
                    {j,desde,3,-1}])];p2
    If[desde<=2,p3=0,
    p3=1/(2h[[3]])*(Integrate[Product[(t-ei[[r]])/(2h[[r]]),{r,1,2}]*
        Product[(t-ei[[k]])/(2h[[k]]),
            {k,4,j-1}],{t,ei[[1]],es[[desde]]}]+
    Sum[Integrate[Product[(t-ei[[r]])/(2h[[r]]),{r,1,2}]*
        Product[(t-ei[[k]])/(2h[[k]]),{k,4,j}],
            {t,es[[desde]],es[[3]]}],
                {j,desde,3,-1}])];p3
probabilidades={p1, p2, p3};probabilidades
p1+p2+p3
```

Expresiones análogas permiten obtener el valor de $p_4,\ldots,p_m$; y a partir de ellos la estimación de los diputados por mayoría de cada partido en la circunscripción correspondiente.

1.5.5 Biproporcional entero general con restricciones de igualdad

El programa siguiente corresponde al método de St. Laguë biproporcional.

cm, cM, fm, fM, representan los mínimos y los máximos por columnas y filas. A es la matriz de votos, mf mc son los multiplicadores por filas y columnas.

```
A={{a11,...,a1n},{a21,...,a2n},....,{am1,...,amn}};
            m=Dimensions[A][[1]];n=Dimensions[A][[2]];
For[i=1,i<=m,i++,
    For[j=1,j<=n,j++,
        If[A[[i,j]]=0,A[[i,j]]=1]
    ]
]
    cm=cM={p1,p2,...,pn}; fm=fM={c1,c2,...,cm};
    h=Sum[cm[[i]],{i,n}]*1.;
(*Factores correctores por filas y columnas*)
    ff=fcf=Table[1,{i,m}]; fc=fcc=Table[1,{i,n}];
(*Matrix de cuotas totales*)
    Q=h A/Sum[A[[i,j]],{i,m},{j,n}];
For[t=1,t<=10,t++,
    fcf=Table[fm[[i]]/SumQ[[i,k]],{k,n},{i,m}];
    Q=DiagonalMatrix[fcf].Q;ff=ff*fcf;
    fcc=Table[cm[[k]]/Sum[Q[[i,k]],{i,m},{k,n}];
    Q=Q.DiagonalMatrix[fcc];fc=fc*fcc
    reparto=Round[Q]
For[i=1,i<=m,i++,
    If[Sum[reparto[[i,k]],{k,n}]<fm[[i]],
        v=Table[(Ceiling[Q[[i,k]]+.5]-.5)/Q[[i,k]],{k,n}];
        v1=Sort[v];fcf[[i]]=(v[[1]]+v[[2]])/2,
        If[Sum[reparto[[i,k]],{k,n}]==fm[[i]],fcf[[i]]=1,
        v=Table[(Ceeling[Q[[i,k]]-.5]-.500001)/Q[[i,k]],{k,n}];
            v1=Reverse[Sort[v]]; If[v1[[2]]<0,fcf[[i]]=v1[[1]],
            fcf[[i]]=(v1[[1]]+v1[[2]])/2]
        ]
    ]
]
ff=ff*fcf; Q=Diagonal Matrix[fcf].Q;
ff
reparto=Round[Q]
```