

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS



Departamento de Estadística e I.O.

**ESTUDIO DE LAS DIFERENTES NOCIONES
DE ENVEJECIMIENTO EN PROCESOS
DE MARKOV QUE DESCRIBEN EL
FUNCIONAMIENTO DE SISTEMAS**

TESIS DOCTORAL

M. Luz Gámiz Pérez

Febrero 1995

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Estadística e I.O.

**ESTUDIO DE LAS DIFERENTES NOCIONES DE
ENVEJECIMIENTO EN PROCESOS DE MARKOV QUE
DESCRIBEN EL FUNCIONAMIENTO DE SISTEMAS**

**Memoria que, para optar al grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas, presenta
la licenciada D^a M.Luz Gámiz Pérez**

V^o B^a

Director de la Memoria:

Prof. Dr. D. Rafael Pérez Ocón

A mis padres y hermanos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	I
--------------------	---

CAPÍTULO 1

CLASES DE DISTRIBUCIONES BASADAS EN NOCIONES DE ENVEJECIMIENTO

1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. CLASES DE DISTRIBUCIONES EN FIABILIDAD	4
1.2.1. Clase IFR	6
1.2.2. Clase IFRA	7
1.2.3. Clase DMRL	7
1.2.4. Clase NBU	8
1.2.5. Clase NBUE	9
1.3. LA CLASE ARMÓNICA NUEVA MEJOR QUE USADA EN ESPERANZA	11
1.4. RELACIONES DE ORDEN ENTRE VARIABLES ALEATORIAS	13
1.4.1. Órdenes estocásticos	13
1.4.2. Órdenes y clases de distribuciones	16

1.5. PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS	18
1.5.1. La transformación TTT	18
1.5.2. Caracterizaciones de propiedades de envejecimiento a partir de la transformación TTT	20
1.5.3. La transformación de Lorenz	21
1.5.4. Caracterizaciones de propiedades de envejecimiento a partir de la transformación de Lorenz	23
1.6. TESTS DE HIPÓTESIS	26
1.7. CLASES DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS EN FIABILIDAD	27

CAPÍTULO 2

MODELOS ESTOCÁSTICOS DE FALLO Y DESGASTE

2.1. INTRODUCCIÓN	31
2.2. UN MODELO DE CHOQUES POISSONIANOS	36
2.2.1. El modelo general	36
2.2.2. El modelo de choques con daño acumulado	37
2.3. MODELOS DE CHOQUES GENERALES	39
2.4. TEOREMA FUNDAMENTAL	44
2.4.1. Introducción	44
2.4.2. Teorema fundamental	46
2.4.3. Consecuencias del teorema	51
2.5. APLICACIONES DEL TEOREMA FUNDAMENTAL	54
2.5.1. El proceso de Yule y el proceso de Pòlya	54
2.5.2. Caracterización de algunas distribuciones de probabilidad	55
2.5.3. Ejemplos prácticos	58
2.5.4. Un proceso estocástico compuesto	64

2.5.5. Aplicaciones a la Economía	67
---	----

2.6. UN MODELO CORRELADO DE CHOQUES

ACUMULATIVOS	68
2.6.1. Exposición del modelo	68
2.6.2. Supervivencia HNBUE bajo un modelo de choques correlado	72
2.6.3. Comentarios	76

CAPÍTULO 3

**TIEMPOS DE PRIMER PASO EN PROCESOS DE MARKOV
CRECIENTES**

3.1. INTRODUCCIÓN	79
3.2. PARÁMETROS FUNDAMENTALES DE UN PROCESO DE MARKOV QUE MODELIZA EL DETERIORO DE UN SISTEMA	82
3.3. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV IFRA	87
3.3.1. Cadenas crecientes de Markov IFRA	88
3.3.2. Procesos crecientes de Markov IFRA	90
3.4. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV NBUE	92
3.4.1. Cadenas crecientes de Markov NBUE	92
3.4.2. Procesos crecientes de Markov NBUE	93
3.5. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV NBU	95
3.6. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV NBUC	98
3.6.1. Introducción	98
3.6.2. Cadenas crecientes de Markov NBUC	99
3.6.3. Procesos crecientes de Markov NBUC	101

3.7. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV DMRL	105
3.7.1. Introducción	105
3.7.2. Cadenas crecientes de Markov DMRL	106
3.7.3. Procesos crecientes de Markov DMRL	109
ANEXO 1	
SOBRE PROCESOS DE LA CLASE HNBUE	113
1. CADENAS CRECIENTES DE MARKOV HNBUE	113
2. PROCESOS DE RENOVACIÓN HNBUE	114
ANEXO 2	
EXTENSIONES MULTIVARIANTES	115
ANEXO 3	
INFERENCIA EN MODELOS DE CHOQUES	117
BIBLIOGRAFÍA	119

INTRODUCCIÓN

La teoría de fiabilidad estudia los fallos que se producen en un sistema. Desde el momento que estos se consideran de naturaleza aleatoria, se hace preciso aplicar la metodología propia del Cálculo de Probabilidades. Al considerar la evolución en el tiempo de los fallos de los sistemas, la teoría general de procesos estocásticos suministra modelos cuyas aplicaciones están siendo útiles. El tiempo de vida o tiempo de fallo de un sistema puede ser interpretado como una variable aleatoria no negativa. Los fallos puede ser de dos tipos: accidentales y de envejecimiento. El envejecimiento es un proceso físico y biológico observable y existen métodos que permiten predecir el tiempo de vida usando modelos de probabilidad.

La noción de envejecimiento se mide a partir de la razón de azar o razón de fallo. La distribución que desempeña un papel central en la teoría general de la fiabilidad es la distribución exponencial, por tratarse de la única en la que la razón de fallo es constante; lo que permite una primera

clase de distribuciones: las que tienen razón de azar creciente. Por otro lado, esta propiedad de la exponencial se expresa en términos de la función de supervivencia mediante la propiedad "nuevo igual que usado", y permite la definición de otra clase: nuevo mejor que usado. Surgen así importantes clases de distribuciones de uso frecuente, como IFR, NBU, NBUE y HNBUE y sus duales, todas ellas obtenidas por comparaciones con la distribución exponencial. Recientemente han sido introducidas otras clases que describen nuevas situaciones prácticas, algunas de las cuales se verán a lo largo de este trabajo.

La descripción del tiempo de vida de un mecanismo se expresa a través de la función de supervivencia. La gráfica empírica de esta función obtenida mediante los tests de fiabilidad pone de manifiesto la forma en que se aproxima el funcionamiento del sistema al instante de fallo fatal. Las diferentes formas de aproximación dan lugar a diferentes clases de distribuciones que se han ido clasificando y a la que se ha dedicado extensa literatura en los últimos años. Con la introducción de estas clases se pretende identificar los tipos de fallos que se presentan en los diferentes sistemas. Se han obtenido caracterizaciones de estas, propiedades relativas a la acotación de las funciones de supervivencia, tests de hipótesis para contrastar si un conjunto de datos pertenece a alguna de las clases, y otras propiedades que pueden ser consultadas en las referencias.

Desde un punto de vista práctico, el primer paso para encontrar métodos de prevención de fallos, cuyo interés en ingeniería es obvio, es tratar de caracterizar la clase a la que pertenecen los datos. El análisis de los mismos desde el punto de vista probabilístico entra dentro de la fiabilidad y mantenimiento de sistemas.

La teoría de la fiabilidad está estrechamente ligada a problemas prácticos. El estudio de estos lleva a la construcción de modelos y a los métodos estadísticos adecuados para obtener información sobre la adecuación de estos modelos. En este trabajo, estudiamos la aplicación de modelos sin entrar en la parte propiamente estadística, que ha sido poco tratada en la literatura cuando intervienen procesos estocásticos en la modelización. Estudiamos sólo modelos univariantes, y hacemos una pequeña incursión en un modelo bivalente en el Capítulo 2.

Este trabajo de tesis doctoral es un estudio del envejecimiento desde la perspectiva de los procesos estocásticos: estudiamos condiciones suficientes para que un proceso de Markov pertenezca a algunas de las clases de fiabilidad usuales y para que un modelo de choque y desgaste pertenezca a la clase armónica nueva mejor que usada en esperanza (HNBUE). En ambos casos obtenemos resultados que amplían y mejoran otros anteriores. Como aplicación de nuestro resultado caracterizamos distribuciones en términos del modelo de fallo y desgaste. También estudiamos un modelo bivalente y probamos y ampliamos un resultado incorrecto de Sumita y Shanthikumar (1985).

Los procesos que utilizamos son cadenas de Markov en tiempo discreto y en tiempo continuo, procesos de recuento, el proceso de Poisson, procesos de nacimiento puro homogéneos y no homogéneos.

En el Capítulo 1 introducimos las diferentes clases de envejecimiento que posteriormente trataremos en su relación con los modelos usados en los capítulos posteriores. Dedicamos especial atención a la clase armónica nueva mejor que usada en esperanza (HNBUE), una de las más amplias y

sobre la que aportamos resultados que pensamos son de interés. Una parte importante del capítulo está dedicado a procedimientos que permitan identificar si un conjunto de datos pertenece a una clase dada.

En el Capítulo 2, repasamos un modelo de choque y desgaste y sus extensiones: este es el de Esary, Marshall y Proschan (1973), que es uno de los más estudiados. Después de hacer un repaso por la literatura sobre el tema, probamos el teorema fundamental. La novedad de este teorema, que constituye una de las dos aportaciones de este capítulo y la más importante desde nuestro punto de vista, es que da una condición suficiente para que la función de supervivencia del modelo sea HNBUE en términos sólo del proceso de llegada de golpes, e independiente por tanto, de la clase de fiabilidad a la que pertenece la sucesión de supervivencia asociada al modelo. Las condiciones que imponemos en el teorema son satisfechas por el proceso de nacimiento puro lineal homogéneo (proceso de Yule) y son distintas a las exigidas por Klefsjö (1981b). Las consecuencias de este resultado son importantes: permiten simular un conjunto de valores de una distribución HNBUE y caracterizar diferentes distribuciones usuales en fiabilidad.

La segunda aportación de interés en el Capítulo 2, se refiere al modelo bivalente introducido por Sumita y Shanthikumar (1985). Establecemos condiciones para que la función de supervivencia del modelo sea HNBUE, corrigiendo con ello un teorema incorrecto de estos autores e interpretando las condiciones en términos de envejecimiento; aportamos un contraejemplo que prueba la incorrección del teorema de Sumita y Shanthikumar.

El Capítulo 3 contiene la tercera aportación. En él se introduce la clasificación de procesos de Markov en términos de las propiedades de envejecimiento. Esto se hace a partir de los tiempos de primer paso por una clase de estados. No tratamos el caso de reemplazamiento ni reparación de items en el sistema, por lo que los procesos de Markov son crecientes. Hacemos un repaso del estado de la cuestión en la literatura, que no es muy extensa sobre el tema: sólo se conocen resultados para las clases de fiabilidad IFR, IFRA y NBUE y sus duales. Nosotros ampliamos el estudio a otras clases y probamos varios resultados originales, que se refieren a las condiciones suficientes que deben verificarse para que el proceso sea NBUC y DMRL, tanto en el caso discreto como en el caso continuo. En este último caso, imponemos condiciones directamente sobre el proceso y también obtenemos el mismo resultado a través del caso discreto por el proceso de aleatorización o uniformización de Ross (1983). Tales condiciones vienen dadas en términos de las matrices de transición, potencial y las correspondientes acumuladas.

Además obtenemos un resultado sobre cadenas crecientes de Markov NBU con tres estados, que prueba que en este tipo de cadenas coinciden las clases IFRA y NBU, cosa que no ocurre en general. Este tipo de cadenas se presenta de manera frecuente en la modelización de procesos de tipo biológico.

CAPITULO 1

CLASES DE DISTRIBUCIONES BASADAS EN NOCIONES DE ENVEJECIMIENTO

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo definimos las clases de distribuciones que vamos a estudiar a lo largo de este trabajo y que son las más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones, justificando las propiedades esenciales que las hacen importantes en la teoría de la fiabilidad. Recientemente se han definido nuevas clases que matizan aún más las diversas nociones de envejecimiento y desgaste (Pellerey, 1994). Se caracterizan las diferentes clases y se resumen las propiedades más importantes, que tienen que ver con el comportamiento en las operaciones de fiabilidad y en la teoría general de mantenimiento de sistemas. Dedicamos especial atención a la clase HNBUE, por ser la clase sobre la que hemos obtenido las aportaciones fundamentales de esta tesis. Es también la clase

más amplia que tratamos, en el sentido que contiene a todas las demás.

El conocer la clase a la que pertenece un conjunto de datos observados tiene un gran valor práctico. En este sentido han sido dadas diferentes caracterizaciones de clases de distribuciones en términos de la transformación TTT (Barlow et al. (1975), Barlow (1979), Bergman (1979), Klefsjö (1982), Pham et al. (1994)), basada en el tiempo total del test. Esta transformación está íntimamente relacionada con la curva de Lorenz, de uso frecuente en Economía, y que permite caracterizar estas clases desde esta nueva curva (Chandra et al. (1981), Klefsjö (1984)). La aplicación práctica de estas curvas a un conjunto de datos permite una aproximación empírica a la identificación de clases de fiabilidad. Ambas curvas tienen la ventaja de que son invariantes ante un cambio de escala. El índice de Gini y la razón de Pietra, magnitudes usuales de la Economía, son útiles en el análisis de la fiabilidad, pues los valores de estas magnitudes dan información sobre la clase a la que pertenece la variable que representan.

Se introduce un procedimiento para establecer relaciones de orden parcial entre distribuciones de probabilidad, y se caracterizan algunas clases en términos de estos órdenes. Esto permite establecer comparaciones entre distribuciones que modelizan el envejecimiento de distintos dispositivos o sistemas y permite también interpretar alguna de las clases en términos probabilísticos.

Damos los tests de hipótesis que permiten contrastar si un conjunto de valores observados corresponden a la distribución exponencial o a alguna otra clase pero no exponencial. Estos tests están basados en general en la transformación TTT, si bien los más actuales (Aly, 1990, 1992) se basan en

ciertas magnitudes que miden distancias de los datos a las distintas clases. Las aplicaciones prácticas de los resultados, que se llevarán a cabo en el capítulo 2, las basaremos en la transformación TTT y no en estos tests de hipótesis.

La última sección está dedicada a las definiciones de clases de fiabilidad discretas, que serán aplicadas en los capítulos que siguen.

Enunciamos los resultados que van a ser utilizados posteriormente e introducimos la notación que seguiremos en adelante. No damos las pruebas de estos resultados ni hacemos un estudio exhaustivo de las diferentes caracterizaciones de las distintas clases de distribuciones, que luego resultan ser de mucha utilidad en la práctica, para ello nos remitimos a las referencias.

1.2. CLASES DE DISTRIBUCIONES EN FIABILIDAD

El tiempo de vida o tiempo de fallo de un dispositivo o de un sistema viene definido por una variable aleatoria no negativa T que supondremos continua. Llamaremos $F(t)$ a la función de distribución, $f(t)$ a la función de densidad si la hay, y $\bar{F}(t) = 1-F(t)$ a la función de supervivencia. La media se considera siempre finita, $\mu = E(T) < \infty$.

La noción de envejecimiento o desgaste viene dada por la razón de azar o razón de fallo $h(t) = f(t)/(1-F(t))$, que especifica la razón instantánea de fallo en el tiempo t dado que el ítem ha sobrevivido hasta el tiempo t . La forma de la curva $h(t)$ en el estudio de casos prácticos es la típica curva de "bañera". El caso más simple es aquel en el que no se presenta envejecimiento, entonces la razón de azar permanece constante, y la distribución correspondiente es la exponencial. En cierto sentido la distribución exponencial es la más importante en la teoría de la fiabilidad, como se verá a lo largo de este trabajo.

Las diferentes caracterizaciones y propiedades de las clases que definimos a continuación pueden ser estudiadas en el texto de Barlow y Proschan (1975). Definimos en esta sección y en las dos siguientes las clases que vamos a usar en este trabajo, y tratamos de justificar la importancia de cada una dentro de la teoría de la fiabilidad y el mantenimiento de sistemas.

Otro resultado práctico de interés en el estudio de las clases de distribuciones es el establecer cotas para las funciones de supervivencia de las diferentes clases, tales cotas son útiles en fiabilidad donde una situación típica es

aquella en la que solo se sabe de antemano la clase a la que pertenece el tiempo de fallo. En esta línea se han obtenido cotas para las clases IFR (DFR), IFRA (DFRA), NBU (NWU), NBUE (NWUE) y DMRL (IMRL), ver por ejemplo Barlow y Marshall (1964), Marshall y Proschan (1972), Haines y Singpurwalla (1974), Barlow y Proschan (1975). Sengupta (1994) obtiene cotas para la supervivencia en términos de cualquier momento finito para las clases IFR, IFRA, NBU y sus duales. Para la clase HNBUE (HNWUE) Klefsjö (1984) ha obtenido cotas para la función de supervivencia.

Indistintamente se dirá que una variable aleatoria T o su función de distribución pertenecen a una determinada clase.

En la definición y propiedades más importantes de las clases de distribuciones tiene un papel importante el proceso de renovación subyacente a una distribución dada. También nos referiremos a la distribución de equilibrio de una distribución dada F , que corresponde a la distribución asintótica del tiempo de espera residual en un proceso de renovación con distribución subyacente F y cuya función de distribución es

$$H_F(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t \bar{F}(x) dx, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (1.1)$$

Sea un sistema del siguiente tipo. Tenemos una unidad operando cuya distribución de vida es F . Tan pronto como falla es sustituida por otra unidad que actúa independientemente de la primera y tiene la misma distribución, que opera inmediatamente. Esta renovación del sistema continúa indefinidamente. Entonces la vida residual de la unidad que opera en el tiempo t cuando $t \rightarrow \infty$ viene dada por

$H_F(t)$, la distribución de equilibrio. Por tanto las comparaciones entre las distribuciones de equilibrio correspondientes a distribuciones de tiempos de vida tienen interés desde el punto de vista de la fiabilidad.

En este trabajo 'creciente' significa 'no decreciente' y 'decreciente' significa 'no creciente'.

1.2.1. Clase IFR

La primera clasificación de distribuciones se hace en términos de la monotonía de la razón de azar.

DEFINICIÓN 1. La variable aleatoria T es IFR (DFR) si su razón de azar es creciente (decreciente).

Diversas familias paramétricas de distribuciones tienen razón de azar monótona, entre estas son de especial importancia la de Weibull, la gamma y la normal truncada.

Dado un conjunto finito de distribuciones de la misma clase, es de interés conocer si esta clase se conserva a través de las operaciones de fiabilidad: formación de sistemas coherentes con componentes independientes (Barlow y Proschan, 1975), convolución y mezclas. Uno de los inconvenientes de la clase IFR es que no se conserva para la formación de sistemas coherentes, es decir, si tenemos un sistema coherente en el que las componentes son del tipo IFR, la fiabilidad del sistema no es necesariamente IFR. La siguiente clase a considerar es la clase más pequeña a la que pertenecen los sistemas coherentes con

componentes IFR.

La clase IFR es cerrada para la convolución, pero no para la formación de sistemas coherentes ni para mezclas. La clase DFR es cerrada para las mezclas, pero no para la formación de sistemas coherentes ni para la convolución.

1.2.2. Clase IFRA

DEFINICIÓN 2. La variable aleatoria T es IFRA (DFRA) si

$$\frac{1}{t} \int_0^t h(x) dx \quad (1.2)$$

es creciente (decreciente) en $t \geq 0$.

La propiedad fundamental de la clase IFRA es que es la más pequeña clase que contiene a la distribución exponencial y es cerrada bajo la formación de sistemas coherentes y de límites en distribución. También es cerrada para la convolución pero no para las mezclas. La clase DFRA solo se conserva para las mezclas.

1.2.3. Clase DMRL

La noción de desgaste puede venir dada también por el tiempo de vida residual. Para la variable T, el tiempo de vida residual en el tiempo t se define como $T_t = [T-t | T > t]$ para $t \geq 0$. La función de supervivencia de esta nueva variable aleatoria es

$$\bar{F}(x+t) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}. \quad (1.3)$$

DEFINICIÓN 3. La variable aleatoria T es DMRL (IMRL) si

$E[T-t|T>t]$ es decreciente (creciente) en $t \geq 0$.

Una variable DMRL (IMRL) tiene vida media residual decreciente (creciente).

1.2.4. Clase NBU

La distribución exponencial es la única distribución continua que verifica la igualdad

$$\bar{F}(x+y) = \bar{F}(x)\bar{F}(y) \quad (1.4)$$

para todo $x, y \geq 0$.

Esta propiedad es la propiedad de no memoria de la distribución exponencial, y establece que la supervivencia de un sistema nuevo es la misma que la de un sistema usado.

DEFINICIÓN 4. La variable aleatoria T es NBU (NWU) si

$$\bar{F}(x+y) \leq (\geq) \bar{F}(x)\bar{F}(y) \quad (1.5)$$

para todo $x, y \geq 0$.

En términos de vida residual, la propiedad NBU se escribe

$$\bar{F}(x/t) \leq \bar{F}(x) \quad (1.6)$$

para $x, t \geq 0$.

Esta propiedad NBU establece que la supervivencia de un sistema nuevo es mayor que la de un sistema usado. Las propiedades importantes de esta clase están relacionadas con la teoría general de reemplazamiento de sistemas y con las cotas sobre determinadas variables aleatorias asociadas a procesos de renovación. En particular, si $m(t)$ es la función de renovación de un proceso de renovación con distribución subyacente del tipo NBU, se tiene la acotación $(t/\mu) - 1 \leq m(t) \leq t/\mu$ para todo $t \geq 0$.

La clase NBU se conserva para la formación de sistemas coherentes y para la convolución, pero no para mezclas. La clase NWU no se conserva para ninguna de las operaciones de fiabilidad.

1.2.5. Clase NBUE

La acotación anterior de la función de renovación puede ser completada en el caso de que la distribución del proceso pertenezca a una nueva clase.

DEFINICIÓN 5. La variable aleatoria T es NBUE (NWUE) si

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \leq (\geq) \mu \bar{F}(t) \quad (1.7)$$

para todo $t \geq 0$.

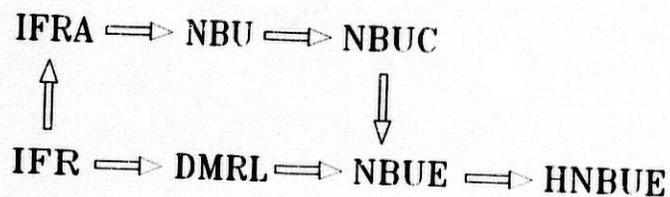
La relación anterior también se escribe, para todo $t \geq 0$,

$$\int_0^{\infty} \bar{F}(x/t) dx \leq (\geq) \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \quad (1.8)$$

Dado un proceso de renovación con distribución subyacente F , puede probarse que también en el caso en que F sea NBUE, la función de renovación $m(t)$ satisface que $(\mu/t) - 1 \leq m(t) \leq t/\mu$ para $t \geq 0$.

La clase NBUE se conserva solo para convoluciones, mientras que la clase NWUE no se conserva para ninguna de las operaciones de fiabilidad.

Las relaciones entre las diferentes clases viene dada por



Diferentes contraejemplos que ponen de manifiesto que las implicaciones no pueden ir en sentido contrario han sido estudiadas por Gámiz Pérez, M. Luz (1993).

1.3. LA CLASE ARMÓNICA NUEVA MEJOR QUE USADA EN ESPERANZA (HNBUE)

Consideramos esta clase aparte porque las más importantes aportaciones de este trabajo se refieren a ella. La clase HNBUE y su dual HNWUE fué introducida por Rolski (1975). Esta clase HNBUE contiene a las distribuciones NBUE y por tanto a las IFR, IFRA, NBU, y DMRL. Klefsjö (1980) probó que la clase HNBUE contiene a todas las anteriores y obtuvo una acotación para los momentos de esta clase, comprobando que los elementos de la clase HNBUE tienen momentos de todos los órdenes. Klefsjö (1981b) estudió el comportamiento de dicha clase ante el modelo de choque y desgaste de Esary et al. (1973). Klefsjö (1982) comprobó que la clase HNBUE solo se conserva para la convolución de distribuciones, y la clase HNWUE solo se conserva para la mezcla de distribuciones, y da cotas para la función de supervivencia; también calculó cotas para los tiempos medios de funcionamiento de sistemas en serie y en paralelo de componentes HNBUE. Basu y Bhattacharjee (1984) probaron que esta clase HNBUE es cerrada para la convergencia débil y caracterizaron la distribución exponencial dentro de la clase HNBUE en términos del coeficiente de variación, que en esta clase es siempre no mayor que uno, lo que la hace interesante en teoría de colas. Deshpande et al. (1986) caracterizaron una distribución HNBUE en términos de la razón de azar de la distribución de equilibrio. Basu y Kirmani (1986) caracterizan la distribución exponencial dentro de la clase HNBUE en términos del mínimo de una sucesión finita de variables aleatorias de esta clase, y calculan una cota para la función de renovación de un proceso de renovación cuya distribución subyacente es HNBUE. Bhattacharjee et al. (1990) caracterizaron la distribución exponencial dentro de las clases IFR, IFRA, NBU, NBUE, HNBUE en términos de los momentos.

DEFINICIÓN 6. La variable aleatoria T es HNBUE (HNWUE) si

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \leq (\geq) \mu \exp(-t/\mu) \quad (1.9)$$

para todo $t \geq 0$.

La desigualdad (1.9) puede ser escrita

$$\mu \geq \frac{1}{t^{-1} \int_0^t \left(E \left[\frac{T-u}{T > u} \right] \right)^{-1} du} \quad \forall t \geq 0$$

que expresa que el valor medio armónico integral de la vida media residual en un tiempo u, entre 0 y t, es menor o igual que el valor medio armónico integral de la vida media residual en 0. Así se justifica el nombre de la clase.

Más adelante, cuando se estudie la relación de orden convexo creciente, daremos una interpretación de esta propiedad.

Otra manera de escribir esta relación y que permite compararla con la distribución exponencial es

$$\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \leq (\geq) \int_t^{\infty} \exp(-x/\mu) dx. \quad (1.10)$$

para todo $t \geq 0$.

Más detalles sobre esta clase y su relación con las anteriores han sido estudiadas en Gámiz Pérez, M. Luz (1993).

1.4. RELACIONES DE ORDEN ENTRE VARIABLES ALEATORIAS

En el análisis de problemas relativos a fiabilidad, resulta útil clasificar las distribuciones de tiempos de vida usando relaciones de orden estocástico. En esta sección introducimos algunas relaciones de orden entre variables aleatorias o equivalentemente entre sus correspondientes funciones de distribución. Eso permitirá comparar los tiempos de vida de diversos ítems en términos de desigualdades entre las funciones de distribución o de supervivencia correspondientes, aunque esto no es posible en todos los casos. También permitirá interpretar en términos probabilísticos la clase armónica nueva mejor que usada en esperanza.

1.4.1. Órdenes estocásticos.

Una clase \mathcal{F} de funciones reales de variable real definidas sobre el eje real positivo puede generar un orden parcial $<$ sobre el conjunto de las distribuciones sobre $[0, \infty[$, postulando que cualesquiera dos distribuciones F y G satisfacen $F < G$ si y solo si

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) dF(x) \leq \int_0^{\infty} \varphi(x) dG(x) \quad (1.11)$$

para toda φ perteneciente a \mathcal{F} .

Sean X e Y variables aleatorias con distribuciones F y G respectivamente.

DEFINICIÓN 7. Escribimos $X \leq_{\text{est}} Y$ y decimos que X (o F) es estocásticamente menor que Y (o G) si la relación anterior se mantiene cuando \mathcal{F}

es la clase de todas las funciones crecientes.

Esta definición es equivalente (Ross, 1983) a esta otra de fácil aplicación,

$$X \leq_{est} Y \leftrightarrow \bar{F}(x) \leq \bar{G}(x), \quad x \geq 0. \quad (1.12)$$

Esta propiedad es suficientemente descriptiva de la relación de orden estocástico.

DEFINICIÓN 8. Escribimos $X \leq_{ic} Y$ y decimos que X (o F) es menor que Y (o G) en orden convexo y creciente si la relación anterior se mantiene cuando \mathcal{F} es la clase de todas las funciones convexas y crecientes.

Esta definición es equivalente (Ross, 1983) a esta otra en términos de las funciones de supervivencia,

$$X \leq_{ic} Y \leftrightarrow \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx \leq \int_t^{\infty} \bar{G}(x) dx, \quad t \geq 0. \quad (1.13)$$

Entonces, para dos variables no negativas con la misma media, $X \leq_{ic} Y$ significa que $E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]$ para toda función φ convexa y creciente. Esto significa que X tiene menos variabilidad que Y. Por ejemplo, si tomamos $\varphi = x^2$ convexa y creciente para $x \geq 0$, resulta que la varianza de X es menor que la varianza de Y. Decir que X es menos variable que Y es decir que da menos peso a los valores extremos, y un camino para garantizar esto es que $E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]$ cuando φ es convexa y creciente.

Sin hacer uso de familias de funciones, definimos otra relación de orden

que tiene que ver con las clases de distribuciones usadas en fiabilidad. Ahora supondremos que f y g son las densidades respectivas de F y G .

DEFINICIÓN 9. Escribimos $X \geq_r Y$ y decimos que X es menor que Y en razón de verosimilitud si $f(x)/g(x) \leq f(y)/g(y)$, para todo $x \leq y$.

Esta relación de orden tiene importantes aplicaciones en teoría de optimización (Ross, 1983).

La relación $X \geq_r Y$ significa que la razón de sus respectivas densidades, $f(x)/g(x)$ es creciente en x . Esta condición implica que la razón de azar de la variable aleatoria X es menor o igual que la de la variable aleatoria Y (Ross, 1983). Esta propiedad permite definir otro orden.

DEFINICIÓN 10. La variable aleatoria X es mayor o igual que la variable aleatoria Y en razón de azar si X tiene una razón de azar mayor que la razón de azar de Y . Esto significa que en cada instante, la probabilidad de fallo del item cuya vida viene dada por X corre más peligro que la de aquel cuya vida viene dada por Y .

La variable aleatoria T con densidad f se dice que tiene razón de verosimilitud creciente si $\log f(t)$ es cóncava, y razón de verosimilitud decreciente si $\log f(t)$ es convexa.

En términos del tiempo de vida residual, se tiene $T_s \geq_r T_t$ para todo $s \leq t$ si y solo si $\log f(t)$ es cóncava. Por tanto, T tiene razón de verosimilitud creciente si T_s decrece en razón de verosimilitud cuando s aumenta. El siguiente resultado

relaciona estos órdenes con el orden estocástico. Para $s \leq t$,

$$T_s \geq_{lr} T_t \rightarrow h_s \leq h_t \leftrightarrow T_s \geq_{\text{est}} T_t \rightarrow T_s \geq_{lc} T_t, \quad (1.14)$$

lo que prueba que si T tiene razón de verosimilitud creciente, entonces T es IFR.

Una función de densidad f tal que $\log f(t)$ es cóncava, es llamada una frecuencia de Pólya de orden 2. Esta es otra clase de distribuciones que no estudiamos en este trabajo, pero que aparece en la teoría de la fiabilidad.

1.4.2. Órdenes y clases de distribuciones

Basándonos en estas relaciones de orden pueden caracterizarse algunas de las clases de distribuciones definidas anteriormente. Esto permite interpretar el comportamiento de las variables aleatorias de las clases de envejecimiento. La relación de orden convexo y creciente permite definir una nueva clase de distribuciones, NBUC y su dual NWUC, de interés en fiabilidad, introducidas por Cao y Wang (1991). Designaremos por X_t la vida residual de la variable aleatoria X en el tiempo t , cuya distribución de tiempo de vida es F .

a) Clase IFR

$$X \text{ es IFR} \leftrightarrow X_t \text{ es estocásticamente decreciente en } t, \quad (1.15)$$

$$X \text{ es DFR} \leftrightarrow X_t \text{ es estocásticamente creciente en } t. \quad (1.16)$$

b) Clase NBU

La variable aleatoria X es NBU si y solo si $X \geq_{\text{est}} X_t$ para todo t .

c) *Clase HNBUE*

Si G es la distribución exponencial de media igual a la de X , μ , la variable aleatoria X es HNBUE si y solo si $X \leq_{ic} G$.

La interpretación que hemos dado al definir el orden convexo y creciente indica que si X es HNBUE tiene menor variabilidad estocástica que la distribución exponencial de la misma media.

d) *Clase NBUC (1991)*

DEFINICIÓN 11. La variable aleatoria X es NBUC si y solo si $X_t \leq_{ic} X$ para $t \geq 0$. La clase dual NWUC se define de cambiando el signo de la relación de orden.

Es inmediato comprobar que en términos de distribuciones se tiene la siguiente caracterización,

X es NBUC (NWUC) si y solo si

$$\int_x^{\infty} \bar{F}(t+y) dy \leq (\geq) \bar{F}(t) \int_x^{\infty} \bar{F}(y) dy, \quad (1.17)$$

para $x, t \geq 0$.

La clase NBUC es cerrada para convoluciones, no lo es para sistemas coherentes ni para mezclas, si lo es para la formación de sistemas en paralelo con componentes independientes e idénticamente distribuidas (Hendi et al., 1993).

1.5. PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS

Uno de los problemas prácticos de la teoría de la fiabilidad es conocer el tipo de envejecimiento de un dispositivo en régimen de funcionamiento, es decir, la clase a la que pertenece la distribución de su tiempo de fallo. En esta dirección, ha sido probado que la transformación tiempo total del test (transformación TTT), introducida por Epstein y Sobel (1953) para hacer inferencia acerca de la distribución exponencial, resulta especialmente interesante. Diferentes generalizaciones han sido llevadas a cabo desde entonces y han sido consideradas muy útiles en diferentes áreas de fiabilidad, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. La extensión original fué hecha por Barlow y Campo (1975), y posteriormente Chandra y Singpurwalla (1981), Klefsjö (1984), Bergman y Klefsjö (1984), Sen (1986), Pham y Turkkan (1994) han discutido las relaciones entre la transformación TTT y la curva de Lorenz, de uso frecuente por los economistas, lo que ha ampliado el campo de aplicaciones de la teoría de la fiabilidad. Definimos las transformaciones TTT y de Lorenz y las relacionamos con las clases de distribuciones definidas arriba. En el capítulo 2 haremos aplicaciones prácticas de estos conceptos.

1.5.1. La transformación TTT (tiempo total del test)

Se supone un ensayo en el que se observan tiempos de funcionamiento de unidades idénticas, con tiempos de fallo ordenados. Esta situación se modeliza considerando los estadísticos ordenados $T_{(i)}$ para $i=1,2,\dots,n$ con $T_{(0)}=0$, de una variable aleatoria T que representa el tiempo de fallo. El tiempo total de funcionamiento del test hasta el fallo i -ésimo permite definir el TTT hasta la observación i ,

$$T_n(T_{(j)}) = \sum_{j=1}^i (n-j+1)(T_{(j)} - T_{(j-1)}), \quad (1.18)$$

esta expresión es frecuentemente usada cuando se hace inferencia sobre la distribución exponencial, pero puede ser generalizado a otras distribuciones. Para referirlo a unidades abstractas y poder comparar distintas curvas TTT se considera la expresión

$$W_n(i/n) = \frac{T_n(T_{(j)})}{\sum_{j=1}^n T_{(j)}}, \quad (1.19)$$

que está definida entre 0 y 1, lo que permite que puedan hacerse comparaciones entre distribuciones a partir de esta curva.

La gráfica $(i/n, W_n)$ para $i=1,2,\dots,n$ es la curva TTT para los datos correspondientes.

La transformación TTT para una variable aleatoria, en el caso de una población teórica, o para la correspondiente función de distribución F , la definimos a continuación, y está basada en la anterior curva empírica.

Dada una variable aleatoria T con función de distribución F y media finita μ , definimos

$$F^{-1}(y) = \inf \{x: F(x) \geq y\} \quad \text{para } 0 \leq y \leq 1,$$

se define la curva TTT sobre $[0,1]$ como

$$W(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(s) ds. \quad (1.20)$$

La gráfica $(p, W(p))$ sobre $[0,1]$ se denomina curva TTT.

Las propiedades de esta función pueden estudiarse en las referencias citadas, señalamos únicamente algunas: es estrictamente creciente en el cuadrado unidad, $W(0)=0$, $W(1)=1$, es invariante ante un cambio de escala. Desde nuestro punto de vista el interés se centra en la relación entre la curva TTT y las clases de distribuciones que representan el envejecimiento, pero el campo de aplicaciones es mucho más amplio.

1.5.2. Caracterizaciones de propiedades de envejecimiento a partir de la transformación TTT

La transformación TTT puede ser usada para ilustrar y caracterizar diferentes propiedades de envejecimiento. Resumimos los resultados que aplicaremos posteriormente cuando tratemos un ejemplo en el capítulo 2.

La variable aleatoria T es IFR si y solo si la transformación TTT, $W(t)$, es cóncava en $[0,1]$ (Barlow y Campo, 1975; y Lanberg et al. 1980).

Si la variable aleatoria T es IFRA entonces $W(t)/t$ es decreciente en $0 < t < 1$ (Barlow, 1979). La implicación inversa no es cierta. Klefsjö (1982) observó que la clase de distribuciones para las que $W(t)/t$ es decreciente en $0 < t < 1$ es una clase que surge de manera natural en la teoría de reemplazamiento, estudiada por Marshall y Proschan (1972).

La variable aleatoria T es DMRL si y solo si $(1-W(t))/(1-t)$ es decreciente en $0 \leq t < 1$ (Klefsjö, 1982).

La variable aleatoria T es NBUE si y solo si $W(t) \geq t$, $0 \leq t \leq 1$, (Bergman, 1979). Esta propiedad asegura que la curva TTT de una distribución NBUE nunca cruza la diagonal del cuadrado unidad.

Cada una de las propiedades de envejecimiento de arriba tiene una propiedad dual (DFR, DFRA, IMRL, NWUE) para los que se pueden enunciar los resultados correspondientes a los que acabamos de citar.

1.5.3. La transformación de Lorenz

La curva de Lorenz es bien conocida en Economía y surge al considerar los ingresos de una cierta población en orden creciente. Considerando los estadísticos ordenados $T_{(i)}$ para $i=1,2,\dots,n$ con $T_{(0)}=0$ de una variable aleatoria T que representa los ingresos en forma porcentual, la curva empírica de Lorenz mide la concentración de los ingresos, en el sentido de la mayor o menor equidad en el reparto de la suma total de la variable aleatoria considerada.

Se define para $0 \leq p \leq 1$,

$$L_n(p) = \frac{\sum_{j=1}^{[np]} T_{(j)}}{\sum_{j=1}^n T_{(j)}}. \quad (1.21)$$

La gráfica $(i/n, L_n(i/n))$ para $i=1,2,\dots,n$ es la curva de Lorenz para los datos anteriores.

La relación entre las curvas empíricas TTT y Lorenz es

$$W_n(i/n) = L_n(i/n) + \frac{(n-i)T_{(i)}}{\sum_{j=1}^n T_{(j)}}. \quad (1.22)$$

A continuación definimos la curva de Lorenz para una variable aleatoria, en el caso de una población teórica, o para su correspondiente función de distribución.

La transformación de Lorenz de la variable aleatoria T con función de distribución F y media finita μ , se define sobre $[0,1]$ mediante la expresión

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^p F^{-1}(s) ds. \quad (1.23)$$

La gráfica $(p, L(p))$ sobre $[0,1]$ se denomina curva de Lorenz.

La relación entre las curvas TTT y de Lorenz viene dada por

$$W(p) = L(p) + [(1-p)/\mu] F^{-1}(p), \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (1.24)$$

Las propiedades de la curva de Lorenz pueden ser estudiadas en las referencias citadas, citamos solo las más importantes: es convexa y estrictamente creciente con $L(0)=0$ y $L(1)=1$, por tanto nunca cruza la diagonal del cuadrado unidad; es invariante ante un cambio de escala; el índice de Gini es dos veces el área encerrada entre la curva de Lorenz y la diagonal del cuadrado, y la razón de Pietra es la diferencia entre $F(\mu)$ y $L(\mu)$, ambas magnitudes son medidas de frecuente uso en economía.

El índice de Gini es una medida de la concentración de los ingresos, con la ventaja de resumir en una cifra la información expresada por la curva de Lorenz.

Las expresiones para el índice de Gini y la razón de Pietra son respectivamente,

$$G(T) = \frac{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |x-y| dF(x) dF(y)}{2\mu}, \quad (1.25)$$

$$\rho(T) = \frac{E|T-\mu|}{2\mu}. \quad (1.26)$$

1.5.4. Caracterizaciones de propiedades de envejecimiento a partir de la transformación de Lorenz

El índice $G\{T\}$ se ha usado tradicionalmente para medir el grado de desigualdad en los ingresos, pero puede ser usado para medir el grado de acercamiento de T a la clase IFR o DFR. $G\{T\}$ es el área encerrada por encima de la curva TTT y el cuadrado unidad. Por tanto $G\{T\}$ está comprendido entre 0 y 1 con los valores extremos correspondientes a las distribuciones límites IFR y DFR respectivamente, entonces los valores intermedios miden de alguna manera la proximidad de la variable aleatoria T a cada una de estas clases.

Algo similar puede aplicarse usando la razón de Pietra, que puede ser usado para medir el máximo grado de discrepancia entre la variable aleatoria T

y las clases IFR y DFR: si $0 \leq \rho < 1/e$, la variable T se aproxima a IFR y tanto más cuanto más se aproxime a cero; para $\rho = 1/e$, T es exponencial, y para $1/e < \rho < 1$ la variable T se aproxima a DFR.

Estas nociones anteriores indican aproximación entre las clases de distribuciones y magnitudes relacionadas con la curva de Lorenz. Pero también existen algunos resultados similares a los que hemos dado en el caso de la curva TTT. Resumimos dos resultados que serán aplicados en el capítulo 2.

La variable T es NBUE si y solo si para todo $0 \leq t \leq 1$,

$$\frac{t}{\mu} > \frac{F(t) - L(t)}{\bar{F}(t)}, \quad (1.27)$$

y esta desigualdad puede ser verificada sobre el gráfico de la curva de Lorenz. (Pham y Turkkan, 1994).

Si llamamos G a la función de distribución de la variable aleatoria exponencial de media unidad, la curva de Lorenz correspondiente es

$$L_G(p) = p + (1-p)\ln(1-p).$$

De la comparación con esta curva se obtiene una caracterización de la clase HNBUE. El resultado es el siguiente (Klefsjö, 1984),

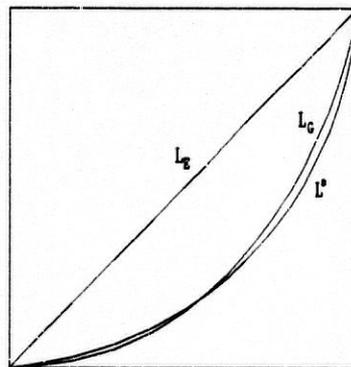
La variable T es HNBUE (HNWUE) si y solo si $L(p) \geq (\leq) L_G(p)$, $0 \leq p \leq 1$, donde L es la curva de Lorenz de la variable T.

Esta propiedad da una interesante caracterización de la clase HNBUE, que

puede ser fácilmente visualizada: T es HNBUE si la gráfica de su curva de Lorenz está entre la curva de Lorenz de la distribución exponencial de media unidad y la diagonal del cuadrado unidad. En términos económicos este resultado dice que si los ingresos siguen una distribución F que es HNBUE, estos están menos concentrados que si siguieran una distribución exponencial. No son conocidos otros resultados que caractericen algunas de las otras clases de distribuciones en términos de la curva de Lorenz.

En la gráfica siguiente se ilustra esta caracterización mediante la distribución logarítmiconormal. Se advierte que la curva de Lorenz de la distribución exponencial L_G no es una cota inferior para la correspondiente curva de la distribución lognormal. Esto indica que la distribución lognormal no es HNBUE, lo cual es conocido ya que no es una distribución caracterizada por sus momentos (Heyde, 1963).

FIG. 1



L' : Curva de Lorenz de la distribución lognormal de parámetros 0 y 1.

L_G : Curva de Lorenz de la distribución degenerada.

L_C : Curva de Lorenz de la distribución exponencial.

1.6. TESTS DE HIPÓTESIS

Los tests de hipótesis completan el estudio de la aplicación de la teoría de la fiabilidad a un conjunto de datos observados. Las caracterizaciones de las diferentes clases dadas a partir de la transformación TTT son las que dan lugar a los diferentes tests que se encuentran en la literatura sobre el tema, pues las propiedades de envejecimiento de las clases definidas anteriormente pueden ser trasladadas a propiedades sobre esta transformación, y esto sugiere los tests estadísticos para contrastar la exponencialidad contra la pertenencia a cada una de estas clases. La estructura de los tests es siempre la misma: se toma como hipótesis nula la exponencialidad de los datos y como alternativa la no exponencialidad y la pertenencia a alguna clase, estudiando después propiedades de estas estimaciones. Koul et al. (1980) plantean la alternativa NBUE con datos incompletos. Klefsjö (1983b) plantea la alternativa para las clases IFR, IFRA, NBUE y DMRL. Kumazawa (1983) contrasta la alternativa NBU mejorando resultados anteriores. Chen et al. (1983) plantean la alternativa NBU con datos aleatoriamente censurados. Basu et al. (1985) contrastan la alternativa HNBUE. Aly (1990) contrasta las alternativas IFRA y NBU con datos censurados tipo II, pero no utiliza la transformación TTT sino que establece unas expresiones que miden la diferencia entre la exponencialidad y las clases a partir de las caracterizaciones de estas. Aly (1992) contrasta la alternativa HNBUE usando unas expresiones que miden la diferencia de la exponencialidad con esta clase.

En las aplicaciones prácticas que llevamos a cabo en el capítulo 2 utilizamos la transformación TTT en lugar de los tests de hipótesis, se obtienen resultados similares pues estos últimos están basados en la transformación TTT.

1.7. CLASES DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS EN FIABILIDAD

En los capítulos 2 y 3 intervienen distribuciones discretas de probabilidad que modelizan nociones de envejecimiento. Se hace preciso por tanto dar la versión discreta de las clases definidas anteriormente para el caso continuo.

Consideramos una distribución discreta y sus probabilidades de supervivencia

$$\bar{P}_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j, \quad k=0,1,2,\dots \quad (1.28)$$

con $\bar{P}_0=1$, media finita

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k. \quad (1.29)$$

Las definiciones que siguen se refieren siempre a esta distribución sobre el conjunto de valores k para los que la supervivencia es estrictamente positiva:

$$\bar{P}_k > 0 .$$

DEFINICIÓN 12. La distribución tiene razón de fallo creciente (IFR discreta) si

$$\left(\frac{\bar{P}_k}{\bar{P}_{k-1}} \right), \quad k=1,2,\dots \quad (1.30)$$

es decreciente.

DEFINICIÓN 13. La distribución tiene razón de fallo creciente en promedio (IFRA discreta) si

$$(\bar{P}_k^{1/k}), \quad k=1,2,\dots \quad (1.31)$$

es decreciente.

DEFINICIÓN 14. La distribución es nueva mejor que usada (NBU discreta) si

$$\bar{P}_j \bar{P}_k \geq \bar{P}_{j+k}, \quad j,k=0,1,2,\dots \quad (1.32)$$

DEFINICIÓN 15. La distribución es nueva mejor que usada en esperanza (NBUE discreta) si

$$\bar{P}_k \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j \geq \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j, \quad k=0,1,2,\dots \quad (1.33)$$

DEFINICIÓN 16. La distribución tiene vida media residual decreciente (DMRL discreta) si

$$\frac{\left(\sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j \right)}{\bar{P}_k}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (1.34)$$

es decreciente.

DEFINICIÓN 17. La distribución es armónica nueva mejor que usada en esperanza (HNBUE discreta) si

$$\sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j \leq \mu(1-(1/\mu))^k \quad k=0,1,2,\dots \quad (1.35)$$

DEFINICIÓN 18. La distribución es nueva mejor que usada en orden convexo (NBUC discreta) si

$$\sum_{j=k+l}^{\infty} \bar{P}_j \leq \bar{P}_k \sum_{j=l}^{\infty} \bar{P}_j, \quad k,l=0,1,2,\dots \quad (1.36)$$

Las relaciones entre estas clases de distribuciones discretas son las mismas que en el caso continuo. Se consiguen las clases duales invirtiendo todas las desigualdades y las direcciones de la monotonía y eliminando el requerimiento

$\bar{P}_0=1$. Diferentes propiedades de estas clases son tratadas en las referencias sobre las clases para variables continuas.

CAPITULO 2

MODELOS ESTOCÁSTICOS DE FALLO Y DESGASTE

2.1. INTRODUCCIÓN

Estudiamos un modelo general de choque y desgaste. Sea un dispositivo sometido a golpes que llegan según un proceso general de llegadas $\{N(t), t \geq 0\}$ y tal que la probabilidad de sobrevivir a la llegada k -ésima es \bar{P}_k . La probabilidad de supervivencia del dispositivo en el intervalo $[0, t]$ viene dada por la expresión

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k P[N(t)=k]. \quad (2.1)$$

Es razonable suponer que $\bar{P}_0=1$ y que \bar{P}_k es decreciente para $k=0,1,2,\dots$

El problema que estudiamos es averiguar la clase de envejecimiento a la que pertenece $\bar{H}(t)$ en función del proceso y de la sucesión de probabilidades de supervivencia \bar{P}_k . Este problema ha dado lugar a una extensa literatura desde el año 1973, y algunas de las aportaciones originales de esta tesis han sido hechas en esta dirección. En general, los procesos de llegadas serán de tipo markoviano pero también se tratarán procesos generales de recuento.

En la sección 2 estudiamos el caso en que el proceso de llegadas es de Poisson. Este es el modelo original de Esary et al. (1973). Estudiamos algunas extensiones del mismo en lo que se refiere a la sucesión de probabilidades de supervivencia. Pero el interés nuestro está en la extensión cuando se modifica el proceso de llegadas para una sucesión \bar{P}_k general.

La sección 3 describe las sucesivas aportaciones que diversos autores han ido haciendo al modelo. La aparición de nuevas clases de distribuciones ha llevado consigo el considerar el comportamiento de las mismas con respecto a las operaciones de fiabilidad (formación de sistemas coherentes, convolución y mezclas), y también se ha extendido a estudiar el comportamiento de la clase con

respecto a este modelo; en concreto, si la sucesión \bar{P}_k pertenece a una clase discreta de envejecimiento, comprobar si $\bar{H}(t)$ pertenece a la clase continua correspondiente. De esta manera, el estudio de este modelo se ha convertido en un clásico dentro de la teoría general de la fiabilidad. Describiremos la situación actual del tema. Algunas de las clases de distribuciones que se comentan en esta sección no han sido introducidas antes; pero nuestro interés está en describir la situación del modelo (2.1) hasta el momento presente sin entrar en detalles que no vamos a usar posteriormente.

La sección 4 es completamente original. Estudiamos el modelo (2.1) en el caso en que el proceso de llegadas es un proceso de recuento general y damos condiciones sobre tal proceso para que la supervivencia pertenezca a la clase HNBUE. La originalidad radica en que no afecta a la clase de supervivencia de $\bar{H}(t)$ la clase a la que pertenece la sucesión \bar{P}_k . Hasta ahora, en todos los artículos que se citan en la sección 3, la clase continua de envejecimiento de $\bar{H}(t)$ venía determinada por la correspondiente clase discreta a la que pertenecía la sucesión \bar{P}_k , junto con condiciones sobre el proceso de llegadas, concretamente Klefsjö (1981b) estudia el caso armónico. Las condiciones que nosotros hemos encontrado son distintas a las dadas por Klefsjö y son más fáciles de verificar.

En la sección 5 estudiamos las importantes consecuencias de la sección anterior y es también otra aportación original.

Entre los procesos que satisfacen las condiciones que exigimos al teorema fundamental está el proceso de Yule (proceso lineal de nacimiento puro homogéneo), lo que supone que las condiciones exigidas no son especialmente restrictivas.

Eligiendo adecuadamente la sucesión \bar{P}_k podemos obtener resultados de interés, por ejemplo se caracteriza la distribución logística truncada en el origen a partir del modelo (2.1), y se obtienen otros resultados ya conocidos desde un punto de vista completamente distinto. Otras consecuencias de interés pensamos que pueden obtenerse si profundizamos el estudio en esta dirección.

Este mismo procedimiento permite obtener datos simulados de una distribución del tipo HNBUE, este resultado presenta la originalidad de que es el más simple posible para obtener muestras de este tipo, ya que la sucesión de probabilidades de supervivencia es elegida por el investigador con las hipótesis del teorema y no precisa pertenecer a una clase de envejecimiento dada. Acabamos esta sección dando una extensión del modelo al caso en que hay un umbral de daño acumulado.

La sección 6 también es una aportación original. Estudiamos un modelo bivalente como el introducido por Sumita y Shanthikumar (1985), donde intervienen dos procesos de renovación (tiempos de llegadas y daños en las llegadas) cuyas variables se encuentran correladas y el fallo del dispositivo se

produce cuando se supera un umbral, cuya distribución deseamos conocer. Damos condiciones suficientes para que el tiempo de fallo pertenezca a la clase HNBUE distintas de las que los autores citados dan, y corregimos con ello un resultado erróneo de los mismos. Construimos un contraejemplo que pone de manifiesto el error en el razonamiento, además interpretamos las condiciones que damos en el teorema en términos de la propiedad de envejecimiento para el proceso de renovación asociado con el daño producido por los golpes, que no era tratado por Sumita y Shanthikumar.

2.2. UN MODELO DE CHOQUES POISSONIANOS

Supongamos un dispositivo sujeto a choques que ocurren aleatoriamente en el tiempo según un proceso de Poisson de intensidad λ . La probabilidad de que sobreviva al golpe k -ésimo viene dada por \bar{P}_k . La probabilidad de supervivencia $\bar{H}(t)$ del dispositivo en el intervalo $[0,t]$ viene dada por

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-(\lambda t)} \quad (2.2)$$

para $0 \leq t < \infty$.

Supondremos que $\bar{P}_0=1$ y que \bar{P}_k es decreciente para $k=0,1,2,\dots$

2.2.1. El modelo general

En este modelo anterior no se establece ninguna hipótesis sobre la sucesión de probabilidades de supervivencia a los choques. Estamos interesados en la clase de supervivencia a la que pertenece $\bar{H}(t)$. Como es natural, viene determinada por la clase a la que pertenece \bar{P}_k . Un estudio sistemático en este sentido ha sido llevado a cabo por Esary et al. (1973) y Barlow y Proschan (1975), estos prueban que si la sucesión \bar{P}_k de sobrevivir a k choques pertenece a una clase

de envejecimiento discreta del tipo IFR, IFRA, DMRL, NBU, NBUE, entonces la probabilidad de supervivencia inducida $\bar{H}(t)$ pertenece a la correspondiente clase continua de envejecimiento. Klefsjö (1981b) prueba que si \bar{P}_k es HNBUE discreta entonces $\bar{H}(t)$ es HNBUE continua. Cao et al. (1991) prueban que si \bar{P}_k es NBUC discreta entonces $\bar{H}(t)$ es NBUC continua. También se verifica esta propiedad para las clases duales de las anteriores.

2.2.2. El modelo de choques con daño acumulado

Supongamos que el choque i produce un daño X_i . Los daños se acumulan aditivamente, y el dispositivo sobrevive al choque k si $X_1 + \dots + X_k$ no excede de un umbral de daño x .

El caso en que las X_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas es el más simple e interesante. En este caso,

$$\bar{P}_k = F^{(k)}(x), \quad k=0,1,2,\dots \quad (2.3)$$

donde $F^{(k)}$ es la k -convolución de F , $k=1,2,\dots$ y representa la probabilidad de que el daño total acumulado no exceda del umbral x , para $k=0$, $F^{(0)}=1$ para $x \geq 0$ y 0 en otro caso.

El principal resultado para este modelo establece que cualquiera que sea

la distribución F , la probabilidad de supervivencia $\bar{H}(t)$ es IFRA (Barlow y Proschan, 1975). Además, la función de supervivencia $\bar{H}(t)$ es exponencial si y solo si F no tiene masa en el intervalo $]0, x]$ (Esary et al. 1973).

Alternativamente puede ocurrir que sucesivos choques tengan un efecto creciente en el daño aún cuando sean independientes, entonces la distribución del daño i la representamos por $F_i(z)$, y es decreciente en $i=1,2,\dots$ para cada z . En este caso

$$\bar{P}_0 = 1 \quad \text{y} \quad \bar{P}_k = F_1 * F_2 * \dots * F_k(x) \quad k=1,2,\dots \quad (2.4)$$

donde $*$ designa la operación de convolución.

Si $F_i(z)$ es decreciente en $i=1,2,\dots$, entonces $\bar{H}(t)$ es IFRA (Barlow y Proschan, 1975).

Extensiones de este modelo resultan si consideramos que los sucesivos daños no son independientes ni idénticamente distribuidos, o bien si el umbral x de daño es aleatorio. Resultados en esta dirección pueden verse en las referencias de esta sección.

2.3. MODELOS DE CHOQUES GENERALES

Otra manera de extender el modelo anterior es considerar que los golpes llegan según procesos no poissonianos. En general, estos procesos de llegadas serán de tipo markoviano o procesos de renovación, incluiremos también el caso de un proceso general de recuento. La literatura sobre estos nuevos modelos es amplia. Diferentes autores han estudiado la clase de supervivencia $\bar{H}(t)$ en función del proceso de llegadas y de la sucesión \bar{P}_k . En esta sección resumimos los resultados ya conocidos. Nos referimos siempre al modelo (2.1). En general, se supone siempre que la sucesión \bar{P}_k pertenece a una clase de envejecimiento discreta, y se estudian condiciones sobre el proceso de llegadas para que $\bar{H}(t)$ pertenezca a la correspondiente clase continua. Generalmente, siempre que se prueba una propiedad para una clase se establece también para la clase dual.

A-Hameed y Proschan (1973) estudian el modelo (2.1) cuando el proceso de llegadas es de Poisson no homogéneo.

A-Hameed y Proschan (1975) suponen que el proceso de llegadas es de nacimiento puro no homogéneo, en el que las razones de nacimiento son de la forma $\lambda_k \lambda(t)$ y obtienen condiciones sobre \bar{P}_k , λ_k y $\lambda(t)$ para que $\bar{H}(t)$ pertenezca a algunas de las clases IFR, IFRA, NBU, NBUE, DMRL y los duales.

Block y Savits (1978) consideran como proceso de llegadas un proceso $\{N(t), t \geq 0\}$ de recuento general y dan condiciones sobre la sucesión \bar{P}_k y los tiempos entre llegadas de $N(t)$ para que $\bar{H}(t)$ pertenezca a las clases NBU y NBUE.

Klefsjö (1981a) sobre el modelo anterior de A-Hameed y Proschan (1975) da condiciones suficientes para la pertenencia de $\bar{H}(t)$ a las clases IFRA y DMRL. Estas condiciones son completamente distintas a las de los autores de arriba.

Klefsjö (1981b) estudia todos los modelos anteriores (proceso de llegadas de Poisson, de nacimiento puro no homogéneo y el de Block y Savits anterior) para la clase HNBUE.

Ghosh y Ebrahimi (1982) consideran el modelo de llegadas de Poisson generalizado (Parzen, 1962) y dan condiciones suficientes para que la supervivencia sea de la clase IFR. Estudian también el caso bivalente del modelo (2.1) y lo aplican a las clases IFR y DMRL.

Griffith y Srinivasan (1985) generalizan diferentes métodos usados antes para los casos IFR y NBUE cuando el proceso de llegadas es una cadena de Markov en tiempo continuo con probabilidades de transición estacionarias. Sugieren aplicaciones prácticas del modelo.

Marshall y Shaked (1983) dan un paso adelante en el estudio de un modelo

sometido a choque y desgaste. Suponen que las llegadas ocurren según un proceso de renovación y cada golpe produce un daño cuya magnitud viene regida por otro proceso de renovación independiente del primero. Entre estos golpes se produce una evolución del desgaste que viene dada por una magnitud determinística. Si los tiempos entre llegadas son NBU, da condiciones sobre la función determinística para que la supervivencia del modelo sea NBU. Con esto generaliza resultados anteriores a supervivencias no necesariamente de la forma (2.1). Un resultado de interés es el siguiente: un proceso de Markov con espacio de estados continuo con la propiedad de Markov fuerte y funciones muestrales sin saltos es tal que el proceso determinado por su valor absoluto es un proceso NBU. En particular, el proceso de Wiener en valor absoluto y el proceso de Bessel (ver Marshall y Shaked, 1983). Es aplicable este resultado a cadenas de Markov en tiempo discreto cuando no hay saltos en las trayectorias de tamaño superior a 1.

Shanthikumar y Sumita (1983) aplican el modelo de Marshall y Shaked anterior, pero en el caso en que el proceso renovación que gobierna la llegada de los golpes y el proceso que representa la magnitud del daño producido por cada golpe, también de renovación, están ligados por ciertas correlaciones entre las variables de los procesos. Estudian dos modelos distintos. Consideran los casos NBU, NBUE y HNBUE.

Klefsjö (1983) introduce una nueva clase de distribuciones basada en la transformación de Laplace. Esta es más amplia que la HNBUE. Estudia el comportamiento de la misma con respecto a las operaciones de fiabilidad y con respecto al modelo (2.1) para el caso de un proceso de llegadas de nacimiento puro y para un proceso de recuento general.

Shanthikumar y Sumita (1984, 1985) completan el estudio anterior hecho por ellos mismos para el caso HNBUE y especificando previamente un umbral de fallo.

Abouammoh y Ahmed (1988) introducen una nueva clase de distribuciones, nueva mejor que usada en razón de azar, NBUFR, y su dual.

Prueban que si la sucesión \bar{P}_k es NBUFR discreta y el proceso de llegadas es de Poisson entonces la supervivencia (2.1) es NBUFR, y lo mismo con el dual.

Cao y Wang (1991) definen la clase NBUC, nueva mejor que usada en orden convexo, y dan condiciones suficientes sobre el proceso de llegadas, que es un proceso de recuento general, para que si \bar{P}_k es NBUC discreta entonces $\bar{H}(t)$ es NBUC continua.

Pellerey (1994) extiende el resultado de Abouammoh y Ahmed anterior para las mismas clases al caso en que el proceso de llegadas es un proceso de recuento.

En artículos recientes, el modelo (2.1) está siendo usado en otras direcciones distintas de las que aquí hemos considerado. Así, Singh y Jain (1989) consideran dos modelos distintos como el (2.1) en el que las llegadas son de Poisson con el mismo parámetro para ambos pero tienen distintas probabilidades de supervivencia, y estudian si diferentes órdenes (como los que hemos definido en 1.4) entre las sucesiones de supervivencia se conservan para las funciones de supervivencia correspondientes. Entre los órdenes considerados está el orden de

razón de verosimilitudes, el orden en razón de azar y el orden estocástico. Este artículo es mejorado por Kochar (1990).

Pellerey (1993) extiende este resultado anterior al caso en que los procesos de llegada son procesos generales de recuento idénticos.

2.4. TEOREMA FUNDAMENTAL

2.4.1. Introducción.

Vamos a considerar dos modelos diferentes:

* En el primero, el modelo de choques es un caso particular del modelo discutido por A-Hameed y Proschan (1975), en el que los choques ocurren aleatoriamente en el tiempo gobernados por un proceso de nacimiento puro no homogéneo, que llamamos $N_1(t)$, de la siguiente forma: dado que k choques han ocurrido en $[0,t]$, la probabilidad de un nuevo choque en $(t,t+\Delta t]$ es $\lambda_k \lambda(t) \Delta + o(\Delta)$, con $k=0,1,2,\dots$, y la probabilidad de más de un choque en $(t,t+\Delta]$ es $o(\Delta)$. Suponemos que $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i \neq j$. La función de supervivencia de un dispositivo sujeto a un proceso de choques tal viene dada por

$$\bar{H}_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k P(N_1(t)=k). \quad (2.5)$$

A-Hameed y Proschan (1975) estudiaron las propiedades de envejecimiento para este tipo de procesos basándose en el proceso homogéneo de la siguiente forma: supongamos que los choques ocurren aleatoriamente en el tiempo de acuerdo con un proceso de nacimiento puro homogéneo de razones λ_k , $k=0,1,2,\dots$, entonces la función de supervivencia viene dada por

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k P(N(t)=k). \quad (2.6)$$

Para cada $t \geq 0$, definimos $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x) dx$, con lo que se puede

establecer la siguiente relación entre las dos funciones de supervivencia

$\bar{H}_1(t) = \bar{H}(\Lambda(t))$ y bajo ciertas condiciones sobre Λ , se puede probar que:

$$\bar{H}(t) \in \text{HNBUE} \rightarrow \bar{H}_1(t) \in \text{HNBUE} \quad (2.7)$$

* El otro modelo que consideraremos es un proceso de recuento general que llamaremos $N_2(t)$, en el que la distribución del tiempo de vida del dispositivo, que llamamos $\bar{H}_2(t)$, viene dada en la misma forma que las anteriores.

LLamaremos T_k el tiempo de espera hasta el k -ésimo choque, $k=0,1,2,\dots$, $T_0=0$, y $U_{k+1}=T_{k+1}-T_k$ los tiempos entre llegadas. Supondremos que U_k es HNBUE y que $A_k=E[U_{k+1}]$, $k=0,1,2,\dots$. De la misma manera que para el caso anterior, estudiaremos este tipo de procesos a través de un proceso de nacimiento puro homogéneo de razones $\lambda_k=1/A_k$.

A-Hameed y Proschan (1975) y Block y Savits (1978) probaron que si las probabilidades de supervivencia a los sucesivos choques $\{\bar{P}_k\}$ pertenece a la versión discreta de una determinada clase de fiabilidad PF_2 , IFR, IFRA, DMRL, NBU o NBUE (o sus duales), y N es un proceso de nacimiento puro no homogéneo, o en general un proceso de recuento no homogéneo, entonces $\bar{H}(t)$ pertenece a la versión continua de la misma clase.

Nosotros estamos interesados en la clase HNBUE, y vamos a demostrar

a continuación que si estamos en la situación descrita anteriormente, y además si $\lambda_i \neq \lambda_j$, para todo $i \neq j$, obtenemos una distribución HNBUE independientemente de la sucesión $\{\bar{P}_k\}$, formada por las probabilidades de supervivencia a los sucesivos choques. De modo que hemos conseguido condiciones para que el tiempo de vida de un dispositivo que soporta una serie de golpes, como el que acabamos de describir pertenezca a la clase HNBUE, condiciones que difieren de las encontradas por Klefsjö (1981b), y el hecho de poder utilizar cualquier distribución discreta como $\{\bar{P}_k\}$ nos permitirá obtener importantes resultados al elegir algunos casos particulares.

2.4.2. Teorema fundamental.

Antes de llegar al resultado principal, necesitamos probar el siguiente lema.

LEMA.

Sea $a_k(t) = P\{N(t) = k\}$, donde $N(t)$ es un proceso de nacimiento puro homogéneo de razones $\lambda_i \neq \lambda_j$ y S_k el tiempo de espera hasta el k -ésimo choque y sean $V_{k+1} = S_{k+1} - S_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, los tiempos entre llegadas, por tanto: $V_k = \exp\{-\lambda_{k-1}\}$, $k = 1, 2, \dots$. Entonces:

$$\sum_{j=0}^k a_j(t) = P\{N(t) \leq k\} = P\{S_{k+1} > t\} = \sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} \exp(-\lambda_j t) \quad (2.8)$$

donde $\alpha_{j,k}$ son números reales tales que:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_{jk} = 1 \quad (2.9)$$

Demostración.

Hacemos la demostración por inducción.

En primer lugar demostraremos que la expresión (2.8) se satisface para $k=1$:

$$\begin{aligned} P(S_2 > t) &= P(V_1 + V_2 > t) = \int_0^t P(V_1 > t-u) dP(V_2 \leq u) = \\ &= \int_0^t \exp(-\lambda_0(t-u)) \lambda_1 \exp(-\lambda_1 u) du + \int_t^\infty dP(V_2 \leq u) = \\ &= \lambda_1 \exp(-\lambda_0 t) \left[\frac{1}{\lambda_0 - \lambda_1} \exp((\lambda_0 - \lambda_1)t) - \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_1} \right] + \exp(-\lambda_1 t) = \\ &= \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1} \exp(-\lambda_1 t) + \frac{-\lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_1} \exp(-\lambda_0 t) = \\ &= \alpha_{0,1} \exp(-\lambda_0 t) + \alpha_{1,1} \exp(-\lambda_1 t) \end{aligned}$$

donde claramente $\alpha_{0,1} + \alpha_{1,1} = 1$.

Supongamos a continuación que (2.8) es cierta para $k-1$ y vamos a demostrarla para k .

$$\begin{aligned}
 P(S_{k+1} > t) &= P(S_k + V_{k+1} > t) = \int_0^{\infty} P(S_k > t-u) dP(V_{k+1} \leq u) = \\
 &= \int_0^t P(S_k > t-u) dP(V_{k+1} \leq u) + P(V_{k+1} > t) = \\
 &= \int_0^t \left(\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{j,k-1} \exp(-\lambda_j(t-u)) \right) \lambda_k \exp(-\lambda_k u) du + \exp(-\lambda_k t) = \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_k \alpha_{j,k-1} \exp(-\lambda_j t) \int_0^t \exp((\lambda_j - \lambda_k)u) du + \exp(-\lambda_k t) = \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_k \alpha_{j,k-1} \exp(-\lambda_j t) \left[\frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} (\exp((\lambda_j - \lambda_k)t) - 1) \right] + \exp(-\lambda_k t) = \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_k \alpha_{j,k-1}}{\lambda_j - \lambda_k} (\exp((\lambda_j - \lambda_k)t) - 1) \exp(-\lambda_j t) + \exp(-\lambda_k t) = \\
 &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_k \alpha_{j,k-1}}{\lambda_k - \lambda_j} \exp(-\lambda_j t) + \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_k \alpha_{j,k-1}}{\lambda_k - \lambda_j} \right) \exp(-\lambda_k t) = \\
 &= \sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} \exp(-\lambda_j t)
 \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la hipótesis de inducción en el paso 3 y hemos resuelto las

integrales exponenciales que aparecen.

Además se cumple que

$$\sum_{j=0}^k \alpha_{j,k} = 1$$

■

Llamamos μ al tiempo medio de vida del dispositivo, entonces

$$\mu = \int_0^{\infty} \bar{H}(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{P}_k}{\lambda_k} \quad (2.10)$$

Supongamos además que el dispositivo nunca falla antes de que llegue el primer choque, por tanto tendrá que ser $\mu \geq 1/\lambda_0$, ya que $1/\lambda_0$ es el tiempo medio hasta que el primer golpe ocurre.

Bajo las condiciones enunciadas hasta ahora tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA.

Sea $\bar{H}(t)$ la función de supervivencia de un dispositivo sometido a una sucesión de choques que llegan aleatoriamente en el tiempo gobernados por un proceso de nacimiento puro homogéneo, N , de razones $\{\lambda_j\}$, tales que $\lambda_k > \lambda_0$,

$k=1,2,\dots$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para cada $i \neq j$. Entonces $\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k a_k(t)$, donde \bar{P}_k es

la probabilidad de que el dispositivo sobreviva al golpe k , para $k=0,1,2,\dots$, es HNBUE.

Demostración.

H pertenece a la clase HNBUE siempre que se verifique para cada $t \geq 0$

$$\int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx \leq \int_t^{\infty} \exp(-x/\mu) dx \quad (2.11)$$

resolviendo la integral del segundo miembro, la desigualdad anterior queda

$$\int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx \leq \mu \exp(-t/\mu) . \quad (2.12)$$

Calculamos la integral del primer miembro:

$$\int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \int_t^{\infty} a_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=0}^k a_i(t) \quad (2.13)$$

donde la última igualdad puede comprobarse en A-Hameed y Proschan (1975). Usando ahora el resultado del lema probado anteriormente, la última expresión de la ecuación (2.13) queda de la siguiente forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=0}^k a_{j,k} \exp(-\lambda_j t) . \quad (2.14)$$

Por hipótesis hemos supuesto que $1/\lambda_0 \leq \mu$ y $\lambda_k > \lambda_0$, $k=1,2,\dots$, de modo que podemos probar que

$$\exp(-\lambda_j t) \leq \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) \quad (2.15)$$

y la expresión en (2.14) se puede acotar superiormente por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{1}{\lambda_k} \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) \sum_{j=0}^k \alpha_{jk} = \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\bar{P}_k}{\lambda_k} = \mu \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) \quad (2.16)$$

■

2.4.3. Consecuencias del teorema.

En los siguientes corolarios se extiende el teorema anterior a otros procesos más generales. Precisaremos de la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1. Una función no negativa $g(t)$ es starshaped si y sólo si $g(t)/t$ es creciente en $t \geq 0$ y $g(0)=0$.

COROLARIO 1.

La función de supervivencia

$$\bar{H}_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k P(N_1(t)=k) \quad (2.17)$$

donde $N_1(t)$ es un proceso de nacimiento puro no homogéneo con razones $\lambda_k(t)=\lambda_t \lambda(t)$, para $k=0,1,2,\dots$, $\lambda_k > \lambda_0$, para $k=1,2,\dots$ y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ y $\Lambda(t)$ starshaped, es HNBUE para cualquier sucesión $\{\bar{P}_k\}$.

Demostración.

La función de supervivencia $\bar{H}(t)$ es HNBUE como resultado del

teorema. Podemos establecer la siguiente relación $\bar{H}_1(t) = \bar{H}(\Lambda(t))$ que nos permite demostrar que $\bar{H}_1(t)$ es también una función de supervivencia de tipo HNBUE (Klefsjö, 1981b). ■

Si consideramos ahora el proceso de recuento general descrito anteriormente en el que los tiempos entre llegadas son variables aleatorias pertenecientes a la clase HNBUE, podemos establecer una consecuencia similar al teorema imponiendo condiciones sobre los tiempos medios entre llegadas.

COROLARIO 2.

Sea la función de supervivencia

$$\bar{H}_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k P\{N_2(t)=k\} \quad (2.18)$$

donde $N_2(t)$ es un proceso de recuento con tiempos entre llegadas U_k , variables aleatorias independientes y HNBUE, $k=1,2,\dots$. Supongamos además que $A_k = E[U_{k+1}]$, $k=0,1,2,\dots$ son tales que $A_k < A_0$ para todo $k=1,2,\dots$ y $A_i \neq A_j$ para $i \neq j$. Entonces $\bar{H}_2(t)$ pertenece a la clase HNBUE.

Demostración.

Basta con demostrar que

$$\int_t^{\infty} \bar{H}_2(x) dx \leq \int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx \quad \forall t \geq 0. \quad (2.19)$$

Con el fin de obtener la desigualdad anterior, escribimos

$$\begin{aligned} \bar{H}_2(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k P(N_2(t)=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k [P(N_2(t) \leq k) - P(N_2(t) \leq k-1)] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k P\left\{\sum_{j=1}^{k+1} U_j > t\right\} - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{P}_k P\left\{\sum_{j=1}^k U_j > t\right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k P\left\{\sum_{j=1}^{k+1} U_j > t\right\} - \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_{k+1} P\left\{\sum_{j=0}^{k+1} U_j > t\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^{k+1} U_j > t\right\} (\bar{P}_k - \bar{P}_{k+1}) \end{aligned}$$

por las hipótesis sobre U_k se puede demostrar que

$$\int_t^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^k U_j > x\right\} dx \leq \int_t^{\infty} P\left\{\sum_{j=1}^k V_j > x\right\} dx \quad (2.20)$$

donde V_j es una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $1/A_{j-1}$ para cada $j=1,2,\dots$. A partir de (2.20) la expresión en (2.19) se obtiene inmediatamente. ■

2.5. APLICACIONES DEL TEOREMA FUNDAMENTAL

2.5.1. El proceso de Yule y el proceso de Pòlya.

El teorema y los corolarios expuestos en el apartado anterior demuestran que la función de supervivencia (2.5) pertenece a la clase HNBUE imponiendo condiciones sólo sobre el modelo de choques y considerando una sucesión de supervivencia arbitraria. Estas hipótesis no son demasiado fuertes. Cuando las razones de fallo se obtienen a partir de observaciones es esperable que todas sean diferentes, igual ocurre con los tiempos entre llegadas en el proceso de recuento. A continuación analizamos el caso de dos importantes procesos como el proceso de Yule y el proceso de Pòlya.

El proceso de Yule. Es un proceso de nacimiento puro homogéneo con espacio de estados $\{1,2,\dots\}$ con razones de nacimiento lineales $\lambda_k = \lambda k$, con $\lambda > 0$ y $k \geq 1$. Este proceso satisface las hipótesis del teorema, de modo que si el modelo de choques es de este tipo, la función de supervivencia dada por la expresión (2.5) pertenece a la clase HNBUE.

El proceso de Pòlya. Se trata de un proceso de nacimiento puro no homogéneo con espacio de estados $\{0,1,2,\dots\}$ y cuyas probabilidades de transición en un intervalo infinitesimal $(t, t+\Delta]$, dado que han ocurrido k choques en el intervalo $[0,t]$, vienen dadas por

$$\lambda \frac{1 + \alpha k}{1 + \alpha \lambda t} \Delta + o(\Delta) \quad (2.21)$$

donde λ y α son reales positivos.

Si tomamos

$$\lambda_k = \lambda (1 + \alpha k) \quad (2.22)$$

obtendríamos las razones de fallo de un proceso del tipo considerado en el teorema fundamental con lo que obtendríamos un proceso de nacimiento puro homogéneo HNBUE. El proceso de Pólya es un proceso no homogéneo en el que podemos considerar

$$\lambda(t) = \frac{1}{1 + \alpha \lambda t} \quad (2.23)$$

En este caso $\Lambda(t)$ no es starshaped, de modo que no estamos bajo las condiciones del corolario 1, sin embargo, el proceso resultante, es decir con razones $\lambda_k(t) = \lambda_k \lambda(t)$, sigue siendo un proceso HNBUE (ver Klefsjö, 1981b).

2.5.2. Caracterización de algunas distribuciones de probabilidad.

Dado que las propiedades de envejecimiento de la distribución discreta $\{\bar{P}_k\}$ son irrelevantes en nuestro caso a la hora de determinar la clase de envejecimiento a la que pertenece la función de supervivencia, es posible obtener, para algunos casos particulares de esta sucesión, distribuciones pertenecientes a la clase HNBUE. Con ello se consigue la caracterización de distribuciones usuales en términos del modelo de choques.

Distribución logística truncada.

Vamos a considerar un proceso de nacimiento lineal con razones

$\lambda_k = \lambda(k+1)$, $k=0,1,2,\dots$; en ese caso la función de supervivencia se obtiene de la siguiente forma

$$\bar{H}(t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k (1 - e^{-\lambda t})^k \quad (2.24)$$

expresión que, tomando $\bar{P}_k = (1/2)^k$, $k=0,1,2,\dots$, resulta en

$$\bar{H}(t) = \frac{2}{e^{\lambda t} + 1} \quad (2.25)$$

que no es más que la función de supervivencia para una variable aleatoria con distribución logística truncada en 0. Como consecuencia, esta distribución es HNBUE. Además cualquier distribución logística truncada en 0 se puede escribir como en (2.25). De modo que hemos dado una caracterización para esta distribución.

En general si tomamos como sucesión de supervivencia

$$\bar{P}_k = \left(\frac{1}{p}\right)^k$$

para p cualquier número real mayor que 1, la correspondiente función de supervivencia toma la forma

$$\bar{H}(t) = \frac{p}{(p-1)e^{\lambda t} + 1}$$

Distribución Erlang.

La distribución Erlang de índice 2 y parámetro λ , cuya función de densidad viene dada por

$$f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \quad t \geq 0 \quad (2.26)$$

puede obtenerse igualmente considerando un proceso de nacimiento puro de razones lineales e iguales a $\lambda_k = \lambda(k+1)$, $k=0,1,2,\dots$ y $\bar{P}_k = 1/k$ $k=1,2,\dots$

Estadístico de mayor orden.

Obtenemos una propiedad ya conocida utilizando el corolario 2. Tomando

$$\bar{P}_k = \begin{cases} 1, & k=0,1,\dots,n-1 \\ 0, & k \geq n \end{cases} \quad (2.27)$$

y de nuevo $\lambda_k = \lambda(k+1)$, $k=0,1,2,\dots$ obtenemos

$$\bar{H}(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \quad (2.28)$$

que es la función de supervivencia del estadístico de mayor orden obtenido a partir de una distribución exponencial o, equivalentemente, la función de supervivencia de un sistema en paralelo de componentes independientes con tiempos de fallo exponenciales, y pertenece a la clase HNBUE. Aunque es un hecho conocido que el tiempo de fallo de un sistema en paralelo de componentes independientes con tiempos de fallo exponenciales se distribuye dentro de la clase IFRA (ver Barlow y Proschan, 1975, pag. 85), que es una condición más fuerte que la HNBUE.

2.5.3. Ejemplos prácticos.

El teorema fundamental nos ha permitido construir un método para obtener valores procedentes de una distribución HNBUE. Se tiene así un procedimiento para simular valores de una distribución armónica, lo que constituye una innovación en problemas de fiabilidad.

Vamos a comprobar si sería posible que los datos pertenecieran a una clase más restringida. Probamos, al menos desde un punto de vista empírico, que la clase NBUE es demasiado pequeña para nuestro teorema. Ilustramos más abajo que, para algunos valores numéricos de λ_k , obtenemos datos para los que no hay ninguna razón para pensar que no procedan de una distribución NBUE, y para otros valores de λ_k obtendremos datos que no parecen proceder de una distribución NBUE.

Como conclusión, podemos decir que, al menos desde un punto de vista empírico, la condición NBUE parece demasiado fuerte para el teorema.

Vamos a explicar en primer lugar cómo utilizamos el teorema para obtener valores simulados que proceden de una distribución HNBUE:

Supongamos que un dispositivo falla cuando recibe un número aleatorio de choques (entre cinco y diez). Suponemos que la llegada de los sucesivos choques se produce de acuerdo con un proceso de Yule cuyas razones de nacimiento son $\lambda_k = \lambda(k+1)$, $k=0,1,\dots$. En primer lugar consideraremos $\lambda=1/63.25$ y después $\lambda=1$.

Disponemos de 15 dispositivos idénticos bajo estas condiciones. Simulando para cada dispositivo un entero aleatorio en el intervalo [5,10] obtendremos el orden del choque fatal, que produce el fallo del dispositivo. Para un dispositivo fijo, el tiempo de fallo vendrá dado por una suma exponenciales de parámetros $\lambda_k = \lambda(k+1)$, con k desde 0 hasta el número que indique orden del choque que ha producido el fallo del dispositivo.

TABLA I

Item	Choque fatal	Tiempos de fallo ($\lambda=1$)	Tiempos de fallo ($\lambda=1/63.25$)
1	7	2.34765369	195.5169213
2	10	5.83412661	520.8302153
3	6	4.40353734	255.5012004
4	5	4.98505622	188.7551320
5	10	7.96996869	245.3384962
6	6	8.41951346	65.7975507
7	10	10.00376765	156.9142245
8	8	9.58477793	392.1278670
9	5	10.64712211	90.3876663
10	5	12.66244414	133.7089099
11	10	14.09076214	161.2904573
12	7	13.96422725	147.5345016
13	8	15.04402885	178.8131259
14	9	16.40430311	143.5799889
15	10	18.18663696	102.7506407

Como resultado del teorema, los datos en las dos últimas columnas de la tabla proceden de una distribución perteneciente a la clase HNBUE.

Usando las caracterizaciones de la clase NBUE a través de la transformación TTT (ver Bergman y Klefsjö, 1984) y la transformación de Lorenz (ver Pham y Turkkan, 1994) de una función de distribución, hemos construido las curvas TTT y de Lorenz.

Sean $0 = T^{(0)} \leq T^{(1)} \leq \dots \leq T^{(n)}$ los estadísticos ordenados de una muestra aleatoria y sea \bar{T} la media. La siguiente expresión se denomina TTT-valor

$$W_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\bar{T}} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) (T^{(i)} - T^{(i-1)}) \quad k=1,2,\dots,n \quad (2.29)$$

con $W_n(0)=0$.

A partir de la expresión (2.29), construimos la curva TTT de acuerdo con la transformación TTT (ver Klefsjö, 1984). Llamamos $W_{15}^{(1)}$ y $W_{15}^{(2)}$ a las curvas TTT para los datos simulados con $\lambda=1$ y $\lambda=1/63.25$, respectivamente, que hemos representado en la Figura 1. Los datos simulados proceden de una distribución NBUE si

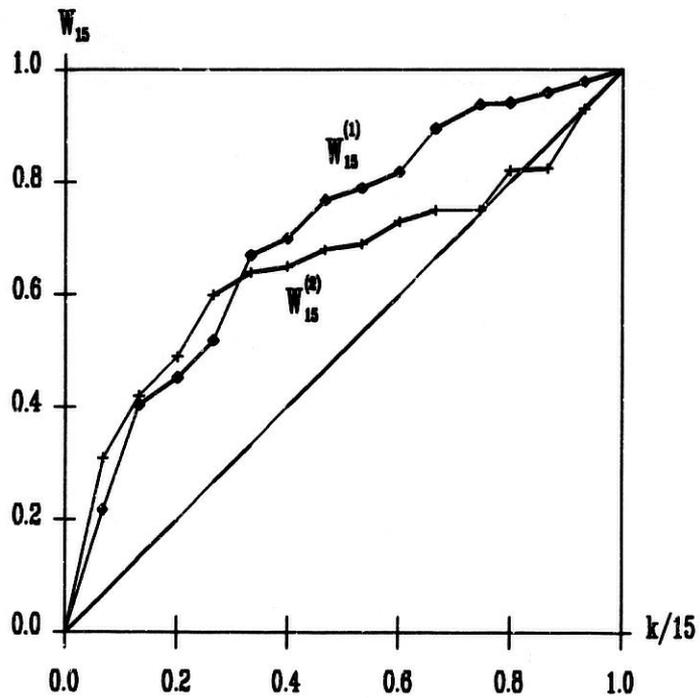
$$W_n\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{k}{n} \quad k=1,2,\dots,n \quad (2.30)$$

La Figura 1 no da ninguna razón para dudar que los datos cuya curva TTT

es $W_{15}^{(1)}$, proceden de una distribución NBUE, y aquellos cuya curva TTT es

$W_{15}^{(2)}$ no proceden de una distribución NBUE, ya que la curva no está sobre la diagonal del cuadrado unidad.

FIG. 1



—+— Curva TTT para los datos simulados con $\lambda = 1/63.25$.

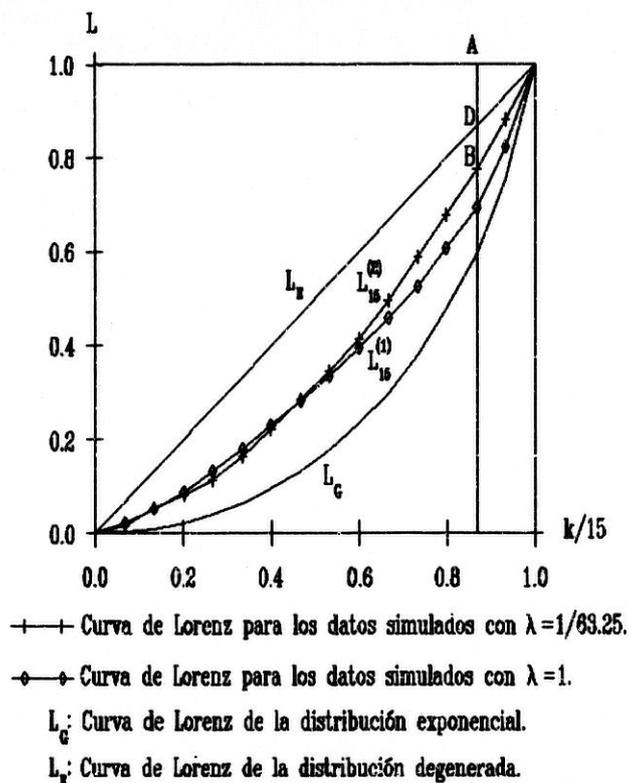
—●— Curva TTT para los datos simulados con $\lambda = 1$.

La correspondiente curva de Lorenz empírica, es el par $(k/n, L_n(k/n))$, donde k/n es el valor de la función de distribución empírica en $T^{(k)}$ y

$$L_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{i=0}^k T^{(i)}}{\sum_{i=0}^n T^{(i)}} \quad k=1,2,\dots,n \quad (2.31)$$

con $L_n(0)=0$.

FIG. 2



A partir de la expresión (2.31) construimos el Lorenz-plot correspondiente a la transformada de Lorenz (ver Pham y Turkkan (1994) y Klefsjö (1984)), para contrastar si los datos proceden o no de una distribución NBUE. Llamamos

$L_{15}^{(1)}$ y $L_{15}^{(2)}$ las curvas de Lorenz para los datos simulados con $\lambda=1$ y $\lambda=1/63.25$, respectivamente. Han sido representados en la Figura 2.

Los valores simulados corresponderían a una distribución NBUE si

$$\frac{\frac{k}{n} - L_n\left(\frac{k}{n}\right)}{1 - \frac{k}{n}} < \frac{T^{(k)}}{\bar{T}} \quad k=1,2,\dots,n-1 \quad (2.32)$$

La Figura 2 ilustra que los valores cuya curva de Lorenz es $L_{15}^{(1)}$ proceden de una distribución NBUE ya que para ellos la expresión (2.32) se satisface, pero los valores correspondientes a la curva de Lorenz $L_{15}^{(2)}$ no proceden de una distribución NBUE ya que en particular para $k=13$, el primer miembro de la expresión (2.32) toma el valor 1.299 mientras que el segundo miembro toma el valor 1.287, de modo que no se satisface la condición (2.32), o equivalentemente $DB/AD < T^{(k)}/\bar{T}$ en la Figura 2. Por otra parte, la Figura 2 indica que los dos conjuntos de valores simulados sí proceden de una distribución HNBUE, ya que las dos curvas están sobre la curva de Lorenz correspondiente a la distribución exponencial de parámetro 1 (Klefsjö, 1984). Lo que era un resultado esperado según el teorema fundamental.

Es posible también utilizar las caracterizaciones de otras clases de envejecimiento más restringidas, como por ejemplo IFRA, DMRL o exponencial (ver Bergman y Klefsjö (1984) y Aly (1992)) en términos de la transformación TTT.

2.5.4. Un proceso estocástico compuesto

Sea $\{Y_i; i=1,2,\dots\}$ una sucesión de variables aleatorias positivas independientes no necesariamente idénticamente distribuidas cuyas funciones de distribución representamos mediante F_1, F_2, \dots , respectivamente. Sea $N(t)$ un proceso de recuento general con tiempos medios entre llegadas todos diferentes e independiente de la sucesión $\{Y_i\}$. El proceso estocástico

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \quad (2.33)$$

se denomina *proceso estocástico compuesto*.

Este tipo de procesos son apropiados para modelizar una gran variedad de situaciones físicas, en particular estamos interesados en considerar aplicaciones en la teoría de fiabilidad. Suponemos de nuevo un dispositivo sujeto a choques que ocurren aleatoriamente en el tiempo de acuerdo con un proceso, $N(t)$. El k -ésimo choque causa una cantidad aleatoria positiva de daño, Y_k . El dispositivo falla cuando el daño total acumulado excede una capacidad específica o umbral de daño, x . En este caso, el proceso $X(t)$ representa el daño acumulado en el intervalo de tiempo $[0, t]$. Estamos interesados en considerar el tiempo de fallo del dispositivo.

Sea $\bar{H}(t)$ la probabilidad de que el dispositivo sobreviva después de un tiempo t . Entonces

$$\bar{H}(t) = P\{X(t) \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(t) = k\} F_1 * \dots * F_k(x) \quad (2.34)$$

para $0 \leq t < \infty$, donde $*$ denota la convolución.

Por tanto, en este caso, la probabilidad \bar{P}_k de que el dispositivo sobreviva los k primeros choques viene dada por

$$\bar{P}_0 = 1 \quad \text{and} \quad \bar{P}_k = F_1 * \dots * F_k(x) \quad (2.35)$$

para todo $k=1,2,\dots$

Una extensión inmediata del teorema fundamental es la siguiente.

COROLARIO 3.

Bajo las condiciones dadas anteriormente para el proceso $N(t)$ y la sucesión $\{Y_k\}$, si el tiempo medio hasta la llegada del primer golpe es el mayor de todos los tiempos medios entre llegadas, entonces la función de supervivencia $\bar{H}(t)$ es HNBUE.

Demostración.

La demostración es inmediata a partir del teorema. ■

Este procedimiento nos permite disponer de un nuevo método para obtener datos procedentes de una distribución de tipo HNBUE, datos a los que también podemos aplicar las técnicas conocidas para comprobar si pertenecen a una clase de envejecimiento más pequeña.

Supongamos un dispositivo sujeto a choques que ocurren aleatoriamente en el tiempo siguiendo un proceso de Yule de razón $\lambda=1$. Cada choque causa un daño de tamaño aleatorio Y_i , $i=1,2,\dots$, que se suponen forman una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de media 1.

TABLA 2

Item	Golpe fatal	Tiempos de fallo
1	8	41.293526
2	5	15.551475
3	8	42.124480
4	2	3.487090
5	6	14.222152
6	2	3.005463
7	3	1.226819
8	6	25.602412
9	6	39.527630
10	2	7.664879

El dispositivo falla cuando el daño total acumulado excede un umbral que hemos fijado en $x=5$. Los tiempos de fallo para 10 dispositivos de este tipo, idénticos y todos bajo las mismas condiciones, los expresamos en la tabla 2.

Por el teorema los valores contenidos en la última columna proceden de una distribución HNBUE.

Este tipo de procesos es estudiado también en Esary et al. (1973), donde además era necesario suponer que la sucesión $F_i(z)$ es decreciente en i para todo z . Bajo esta hipótesis los autores demuestran que el tiempo de vida del dispositivo es IFRA. Nosotros hemos eliminado la hipótesis de que los sucesivos choques sean cada vez más efectivos al causar desgaste o daño al sistema, obteniendo así supervivencias HNBUE.

2.5.5. Aplicaciones a la Economía.

El uso de las clases no paramétricas tiene interés no sólo en fiabilidad sino también en problemas de tipo económico. Si los valores de la tabla 2 se interpretan como los ingresos de una cierta población, pueden obtenerse varias medidas económicas, tales como el índice de Gini y la razón de Pietra, y pueden utilizarse para medir el grado de acercamiento de la variable T a ciertas clases de fiabilidad como IFR o DFR, interpretadas ahora desde el punto de vista económico.

2.6. UN MODELO CORRELADO DE CHOQUES ACUMULATIVOS

Suponemos un dispositivo o sistema sometido a una serie de choques regidos mediante un proceso correlado que explicaremos más adelante. Damos condiciones sobre el modelo bajo las cuales el tiempo de fallo del sistema es HNBUE. Este modelo fue introducido por Sumita y Shanthikumar (1985), sin embargo en la demostración del teorema principal se cometió un error que ponemos de manifiesto mediante un contraejemplo, además enunciamos las condiciones bajo las cuales la tesis del teorema, que también demostramos, es correcta.

2.6.1. Exposición del modelo

Consideramos un sistema o dispositivo sujeto a una sucesión de choques de magnitudes aleatorias en instantes de tiempo aleatorios. Denotamos por $\{X_n\}$ la sucesión de las magnitudes de los golpes y por $\{Y_n\}$ la sucesión de tiempos entre las sucesivas llegadas de los choques. De modo que disponemos de una sucesión de pares de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, $\{X_n, Y_n\}$, $n=0,1,2,\dots$ con $X_0=Y_0=0$, es decir, en el instante inicial se supone que el sistema es nuevo. Para cada par (x,y) tenemos la función de distribución y función de supervivencia conjuntas, que vienen dadas por

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

$$\bar{F}_{X,Y}(x,y) = P\{X > x, Y > y\}$$

y las correspondientes funciones de distribución marginales

$$F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty); \quad \bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$$

$$F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty, y); \quad \bar{F}_Y(y) = 1 - F_Y(y).$$

Supondremos además que las variables aleatorias X_n e Y_n son absolutamente continuas y denotamos a la función de densidad conjunta por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y).$$

El sistema o dispositivo falla cuando la cantidad de daño acumulado producida por los golpes exceda un nivel fijado z .

Pueden darse dos situaciones: que la cantidad de daño producida por el choque n -ésimo, X_n , está correlada con la longitud del intervalo desde el último choque, es decir Y_n , o bien con la longitud del intervalo hasta el siguiente choque, es decir Y_{n+1} . Nosotros nos centraremos en el primer caso únicamente. Sea $\{N(t), t > 0\}$ el proceso de recuento asociado al proceso de renovación $\{Y_n\}_{n \geq 0}$, de forma que $N(0) = 0$. Si el proceso $Z(t)$ determina en cada instante la cantidad de daño acumulada en el sistema, entonces

$$Z(t) = \sum_{j=0}^{N(t)} X_j \tag{2.36}$$

S_z , el tiempo de fallo del sistema, viene dado por

$$S_z = \inf\{t: Z(t) > z\} \tag{2.37}$$

cuya función de distribución denominamos

$$W(z,t) = P\{S_z \leq t\} = P\{Z(t) > z\}. \tag{2.38}$$

Nuestro propósito consiste en encontrar condiciones sobre los dos procesos

anteriores para que el tiempo de vida del sistema pertenezca a la clase HNBUE.

Asociado al otro proceso de renovación $\{X_n\}_{n \geq 0}$, tenemos también un proceso de recuento que representamos $\{M(x), x > 0\}$. Usando este proceso, puede expresarse también el tiempo de vida del sistema: si z representa el nivel de daño por encima del cual el sistema falla, el número de choques que producen el fallo del sistema viene dado por $M(z) + 1$, de manera que el tiempo de vida del sistema queda (ver Sumita y Shanthikumar, 1985)

$$S_z = \sum_{j=1}^{M(z)+1} Y_j \quad (2.39)$$

Para el proceso X llamamos

$$H_x(x) = E[M(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_x^{(n)}(x) \quad (2.40)$$

siendo $H_x(x) + 1$ la función de renovación asociada al proceso M , suponiendo que en el instante inicial hay una renovación, en el sentido de Çinlar (1975). Aquí

$F_x^{(n)}$ denota la convolución de F_x consigo misma n veces. La función de renovación determina el tiempo medio de vida del sistema de la siguiente forma (ver Sumita y Shanthikumar, 1985)

$$E(S_z) = \eta_Y \{1 + H_x(z)\}$$

Fijado $x > 0$, $M_x(x)$ es una variable aleatoria discreta con función de supervivencia

$$P\{M_x(x) > n\} = P\{X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x\} = F_x^{(n)}(x) \quad (2.41)$$

por tanto su media es precisamente la función de renovación asociada al proceso

M. La variable aleatoria $M_X(x)$ pertenece a la clase HNBUE si

$$\sum_{n=k}^{\infty} P(M_X(x) > n) \leq (1 + H_X(x)) \left\{ \frac{H_X(x)}{1 + H_X(x)} \right\}^k \quad (2.42)$$

para todo $k \geq 0$.

Necesitaremos algunos tipos de ordenaciones parciales entre distribuciones, introducidas por Barlow y Proschan (1975), y cuya definición recordamos a continuación:

DEFINICIÓN 1. Dadas dos variables aleatorias X e Y se dice que X es mejor que nuevo en la cola de la derecha en Y , y se nota $RTBN(X | Y)$, si

$$P\{X > x | Y > y\} \geq P\{X > x\} \quad (2.43)$$

para todo x e y . De igual forma se dice que X es peor que nuevo en la cola de la derecha en Y , y se nota $RTWN(X | Y)$ si

$$P\{X > x | Y > y\} \leq P\{X > x\} \quad (2.44)$$

para todo x e y .

El teorema que demostramos en el apartado siguiente establece condiciones sobre el modelo de choques descrito anteriormente para que el tiempo de vida del sistema sea una variable aleatoria de tipo HNBUE.

2.6.2. Supervivencia HNBUE bajo un modelo de choques correlado.

TEOREMA.

Supongamos que

- (i) Y_n tiene distribución exponencial con media $1/\lambda$, para todo $n=1,2,\dots$,
- (ii) fijado $x > 0$, la variable aleatoria determinada por $M_X(x)$ es HNBUE,
- (iii) RTBN $(X_n | Y_n)$, $n=1,2,\dots$

Entonces S_z es HNBUE para todo $z > 0$.

Demostración.

Sean las siguientes variables aleatorias:

$$R_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad \forall n \geq 0$$

y

$$D_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad \forall n \geq 0$$

y definimos para cada n

$$\bar{F}_Z(t) = P\{R_n > t \mid D_n \leq z\}. \quad (2.45)$$

Claramente

$$F_{X,Y}^{(n)}(z,t) = F_X^{(n)}(z)F_Z(t). \quad (2.46)$$

Según el teorema 2.A2 en Sumita y Shanthikumar (1985)

$$\bar{W}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_{X,Y}^{(n)}(z,t) - \int_0^t F_{X,Y}^{(n)}(z,t-y) dF_Y(y) \right\}, \quad (2.47)$$

al sustituir la expresión (2.46) en (2.47) aparece la siguiente función de

$$\bar{W}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_{X,Y}^{(n)}(z, t) - \int_0^t F_{X,Y}^{(n)}(z, t-y) dF_Y(y) \right\}, \quad (2.47)$$

$$F_{Z_n+Y_n}(t) = \int_0^t F_{Z_n}(t-y) dF_Y(y), \quad (2.48)$$

y escribiendo la expresión (2.47) en términos de las funciones de supervivencia se obtiene

$$\bar{W}(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \bar{F}_{Z_n+Y_n}(t) - \bar{F}_{Z_n}(t) \right\} F_X^{(n)}(z). \quad (2.49)$$

La condición (iii) también se puede escribir

$$P\{X_n \leq x | Y_n > t\} \leq P\{X_n \leq x\} \quad (2.50)$$

para todo $x, t > 0$, y para todo $n=1, 2, \dots$. Operando en el primer miembro de (2.50) obtenemos la desigualdad

$$\frac{P\{Y_n > t | X_n \leq x\} P\{X_n \leq x\}}{P\{Y_n > t\}} \leq P\{X_n \leq x\} \quad (2.51)$$

o equivalentemente

$$P\{Y_n > t | X_n \leq x\} \leq P\{Y_n > t\}. \quad (2.52)$$

A partir de aquí vamos a demostrar que se puede deducir que

$$\bar{F}_{Z_n}(t) \leq \bar{F}_Y^{(n)}(t) \quad (2.53)$$

es decir

$$P\{Y_1+Y_2+\dots+Y_n > t \mid X_1+X_2+\dots+X_n \leq x\} \leq P\{Y_1+Y_2+\dots+Y_n > t\} \quad (2.54)$$

para todo $x, t > 0$ y para todo $n \geq 1$. Vamos a demostrar que si (2.52) es cierta para $n=1$ y $n=2$, entonces (2.54) es cierta para $n=2$. En primer lugar vamos a probar que

$$P\{Y_n > t \mid X_1+X_2 \leq x\} \leq P\{Y_n > t\} \quad n = 1, 2. \quad (2.55)$$

Hacemos la demostración para $n=1$, para $n=2$ es análoga

$$\begin{aligned} P\{Y_1 > t \mid X_1+X_2 \leq x\} &= \int_0^x P\{Y_1 > t \mid X_1 = z, X_2 \leq x-z\} dF_X(z) = \\ &= \int_0^x P\{Y_1 > t \mid X_1 = z\} dF_X(z) = P\{Y_1 > t \mid X_1 \leq x\} \leq P\{Y_1 > t\} \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad viene dada del hecho de que X_1 y X_2 son variables independientes así como (X_1, Y_1) y X_2 son variables también independientes, de manera que los sucesos $A = \{Y_1 > t\}$, $B = \{X_1 = z\}$ y $C = \{X_2 \leq x-z\}$ son tales que $AB = \{X_1 = z, Y_1 > t\}$ y C son independientes y B y C son independientes, de forma que se obtiene que

$$P\{A \mid BC\} = \frac{P\{ABC\}}{P\{BC\}} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} = P\{A \mid B\}.$$

Entonces se puede aplicar el lema 3.A4 de Sumita y Shanthikumar (1985) a la expresión (3), con lo que se obtiene

$$\int_t^{\infty} \bar{W}(z, \tau) d\tau \leq \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{(n)}(z) \int_t^{\infty} (\bar{F}_Y^{(n+1)}(\tau) - \bar{F}_Y^{(n)}(\tau)) d\tau . \quad (2.56)$$

Dado que Y_n tiene distribución exponencial con media $1/\lambda$, para todo $n=1,2,\dots$, el integrando del segundo miembro puede verse como la $P\{N_1(\tau)=n\}$, siendo N_1 un proceso de Poisson de razón $1/\lambda$, que equivale a

$$\int_t^{\infty} (\bar{F}_Y^{(n+1)}(\tau) - \bar{F}_Y^{(n)}(\tau)) d\tau = \eta_Y \exp(-t/\eta_Y) \sum_{k=0}^n \left(\frac{t}{\eta_Y}\right)^k \frac{1}{k!} , \quad (2.57)$$

con lo que la expresión en (2.56) se puede acotar de la siguiente forma

$$\int_t^{\infty} \bar{W}(z, \tau) d\tau \leq \eta_Y \exp(-t/\eta_Y) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\eta_Y}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} F_X^{(n)}(z) . \quad (2.58)$$

Por último, a partir de la condición (ii) y sabiendo que

$$E(S_z) = \eta_Y \{1 + H_X(z)\} \quad (2.59)$$

se deduce que

$$\int_t^{\infty} \bar{W}(z, \tau) d\tau \leq E(S_z) \exp(-t/S_z) \quad (2.60)$$

que demuestra que para cualquier z , S_z , tiene distribución HNBUE, y por tanto el proceso Z es un proceso HNBUE. ■

Si el proceso de llegadas N está dominado en el sentido del siguiente corolario, las condiciones (ii) y (iii) del teorema son suficientes para que S_z sea HNBUE.

COROLARIO 1.

Si $N_1(t)$ es un proceso de llegadas de renovación y $N(t)$ es el proceso de Poisson con la misma media, y si se satisface la siguiente desigualdad

$$\int_0^{\infty} P(N_1(\tau)=n) d\tau \leq \int_0^{\infty} P(N(\tau)=n) d\tau \quad \forall t \geq 0, \quad (2.61)$$

entonces S_x es HNBUE.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema. ■

2.6.3. Comentarios.

1) La desigualdad (3.11) del teorema 3.A5 en Sumita y Shanthikumar (1985) no es cierta en general. Si Y es una variable aleatoria con distribución gamma de índice $\alpha=2$ y parámetro $\beta=2$, y llamamos F_Y a su función de distribución, entonces la función de supervivencia puede expresarse de la siguiente forma

$$\bar{F}_Y(t) = e^{-\beta t} \sum_{i=0}^{\alpha-1} \frac{(\beta t)^i}{i!} = e^{-\beta t} (1 + \beta t). \quad (2.62)$$

Como $\alpha > 1$, \bar{F} es IFR y por tanto HNBUE y, sin embargo, esta distribución no satisface la inecuación (3.11) de Sumita y Shanthikumar (1985).

En efecto, tomando $n=1$ en (3.11) se obtiene

$$\int_0^{\infty} (\bar{F}_Y^{(2)}(x) - \bar{F}_Y^{(1)}(x)) dx \leq e^{-1}(1+t) \quad (2.63)$$

donde $F^{(2)}$ es una distribución gamma de índice 4 y parámetro 2. Usando la expresión (2.62), la desigualdad en (2.63) se transforma en

$$e^{-2t(1+2t+2t^2+2t^3/3)} \leq e^{-t(1+t)} \quad (2.64)$$

y esta inecuación no se satisface para $t=1$, el primer miembro de la desigualdad (2.64) toma el valor 0.766899938 mientras que el segundo miembro toma el valor 0.7357588824.

2) Hemos interpretado la condición (ii) del teorema 3.A5 en Sumita y Shanthikumar (1985) en términos de la propiedad de envejecimiento del proceso de renovación asociado a la sucesión X_n .

3) La desigualdad (3.11) no puede obtenerse, como indican, de Klefsjö (1981b). Klefsjö demostró la desigualdad

$$\int_t^{\infty} \bar{H}(x) dx \leq \int_t^{\infty} \bar{S}(x) dx \quad (2.65)$$

donde H y S son las funciones de distribución de un modelo de choque donde las llegadas siguen un proceso de recuento $M(t)$ y un proceso de nacimiento puro homogéneo $M_1(t)$ respectivamente.

La inecuación (2.65) es equivalente a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \left[\int_t^{\infty} P\{M(x)=k\} dx - \int_t^{\infty} P\{M_1(x)=k\} dx \right] \leq 0, \quad (2.66)$$

pero obviamente esta condición no implica, en general, (3.11) de Sumita y Shanthikumar (1985).

CAPÍTULO 3

TIEMPOS DE PRIMER PASO EN PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV

3.1. INTRODUCCIÓN

Los procesos de Markov constituyen una estructura adecuada para modelar el deterioro o envejecimiento de sistemas sujetos a choque y desgaste. Por ejemplo, en un sistema con n componentes en que todas tienen tiempos de vida exponenciales independientes e idénticas, considerando el estado del sistema como un vector de unos y ceros correspondientes a situaciones de funcionamiento y fallo de las componentes, el conjunto de estados del sistema es el conjunto de las 2^n tuplas de unos y ceros. El proceso estocástico que describe el estado del sistema es una cadena de Markov. En general, todos aquellos sistemas cuya evolución futura, conocida la situación presente del sistema, sea independiente del pasado son procesos de tipo markoviano.

En un modelo de desgaste, los tiempos de primer paso representan de manera natural los tiempos de fallo del sistema ya que este falla tan pronto como se ha superado un umbral de fallo. El hecho de estudiar solo cadenas crecientes significa que no consideramos reparaciones en los sistemas, pero una extensión natural de los resultados de este capítulo, que nosotros no hacemos, es la consideración de reparación y tiempos de reparación, para los que también son un buen modelo los procesos markovianos. En las aplicaciones el conjunto de estados es siempre finito.

Las nociones de envejecimiento definidas en el Capítulo 1 referidas a distribuciones se extienden de manera natural al caso de procesos aplicando las definiciones a los tiempos de primer paso sobre cualquier conjunto creciente de estados. De esta manera se definen los procesos IFR, IFRA, NBU, DMRL, NBUE, NBUC, HNBUE, etc., y sus duales.

En la Sección 2 introducimos la notación a seguir a lo largo del capítulo y definimos las matrices que van a jugar un papel fundamental en los resultados que probamos.

En este capítulo estudiamos condiciones para que las cadenas de Markov en tiempo discreto pertenezcan a las clases DMRL y NBUC. Obtenemos resultados originales que expresamos en términos de los elementos más importantes del proceso (matriz de transición, matriz potencial), y extendemos los resultados al caso de tiempo continuo. Utilizamos el procedimiento de aleatorización o uniformización de Ross (1983) para extender al caso continuo utilizando los resultados obtenidos en el caso discreto cuando se considera la clase NBUC.

Con estos resultados ampliamos la literatura existente sobre este tema y que se ha iniciado en los últimos años. En las Secciones 3 y 4 repasamos la situación actual sobre condiciones bajo las cuales un proceso pertenece a alguna de las clases de envejecimiento usuales en fiabilidad (IFRA y NBUE). Así, Assaf et al. (1985) estudiaron procesos de Markov cuyos tiempos de primer paso tienen frecuencia de Pólya de orden r (PF $_r$). Brown y Chaganty (1983) encontraron condiciones suficientes sobre la matriz de transición de un proceso de Markov para que los tiempos de primer paso por cierta clase de estados tengan razón de azar creciente (IFR) o razón de azar en promedio creciente (IFRA). El caso IFRA fue considerado también por Shaked y Shanthikumar (1987) para procesos más generales no necesariamente markovianos. Marshall y Shaked (1983) y Shanthikumar (1984) se centraron en el caso nuevo mejor que usado (NBU) para procesos no markovianos en general. Este tipo de procesos fue estudiado más generalmente por Marshall y Shaked (1986b). Karasu y Özekici (1989) consideraron el tiempo de vida de un dispositivo cuyo deterioro o envejecimiento es modelado a partir de un proceso creciente de Markov y estudiaron condiciones suficientes para que el proceso perteneciera a la clase NBUE.

Los resultados de las Secciones 5, 6 y 7 son originales. Para el mismo tipo de procesos usados por Karasu y Özekici (1989), Pérez Ocón, R. y Gámiz Pérez, M.L. (1995b) han encontrado condiciones sobre nuevas matrices obtenidas a partir de las matrices potencial y potencial residual (las respectivas matrices acumuladas que definimos más adelante) que implican que el tiempo de primer paso pertenece a las clases nuevo mejor que usado en orden convexo (NBUC) y vida media residual decreciente (DMRL).

3.2. PARÁMETROS FUNDAMENTALES DE UN PROCESO DE MARKOV QUE MODELIZA EL DETERIORO DE UN SISTEMA

El deterioro o envejecimiento de un sistema o dispositivo sujeto a choques y desgaste a menudo se modeliza mediante un proceso creciente de Markov. Vamos a considerar el mismo modelo utilizado por Karasu y Özekici (1989), que describimos a continuación.

Sea $Z = \{Z_t; t \geq 0\}$ un proceso de Markov homogéneo sobre un conjunto numerable $E \subset [0, +\infty]$. Z_t representa el desgaste del sistema en el instante t . Supondremos que Z es un proceso creciente en E , regular en el sentido de Çinlar (1975). Por tanto, Z es continuo a la derecha y únicamente determinado por el proceso $(X, T) = \{(X_n, T_n); n=0,1,2,\dots\}$ donde X_n representa el n -ésimo estado visitado por el proceso Z y T_n es el tiempo transcurrido hasta la ocurrencia del n -ésimo salto, y es tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$. X es una cadena de Markov estrictamente creciente, por tanto su matriz de transición, P , es una matriz triangular superior. Además, dado $\{X_n\}$, los tiempos de permanencia $\{T_{n+1} - T_n\}$ son independientes y con distribución exponencial de parámetros $\{\lambda(X_n)\}$ para algún vector de razones de salto λ en E .

Suponemos que el dispositivo falla cuando se sobrepasa un umbral crítico, que representamos mediante el estado $j \in E$, de manera que estamos interesados en el estudio de los siguientes tiempos de primer paso

$$L_j = \inf \{t \geq 0; Z_t > j\}, \quad j \in E \quad (3.1)$$

cuya función de distribución denotamos por

$$H_t(i,j) = P\{L_j \leq t \mid Z_0 = i\}$$

para $t \geq 0$, $i, j \in E$, si nos estamos refiriendo al proceso en tiempo continuo, y

$$S_j = \inf\{n \geq 0; X_n > j\}, \quad j \in E \quad (3.2)$$

con función de distribución

$$G_n(i,j) = P\{S_j \leq n \mid X_0 = i\}$$

para $n \geq 0$, $i, j \in E$, para el proceso en tiempo discreto.

DEFINICIÓN 1. Se dice que el proceso $Z(X)$ pertenece a una clase de fiabilidad, C , si $L_j(S_j)$ pertenece a dicha clase, para todo $j \in E$.

Denotamos la función de transición del proceso en tiempo continuo mediante P_t , que es posible representar de diferentes formas. Si llamamos A al generador de Z , que viene definido por

$$A(i,j) = \lambda(i)[P_t(i,j) - I(i,j)] \quad (3.3)$$

para $i, j \in E$, donde $I(i,j)$ es la matriz identidad, entonces la función de transición se puede expresar

$$P_t(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{(n)}(i,j) \quad (3.4)$$

según las ecuaciones de Kolmogorov.

Si además suponemos que el proceso es uniformizable, esto es si $\lambda(i) \leq c$ para todo $i \in E$, para alguna constante c , entonces

$$P_t(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ct} (ct)^n}{n!} K^{(n)}(i,j) \quad (3.5)$$

donde $K=I+A/c$ es una matriz de transición de Markov. Esta representación implica que se puede ver Z como una cadena de Markov, Y , con una matriz de transición triangular superior K sometida a un proceso de Poisson ordinario N con razón c .

Definimos a continuación algunos elementos del proceso que necesitaremos más adelante:

DEFINICIÓN 2. Se define la matriz potencial de la cadena discreta X como la matriz

$$R(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(i,j), \quad i,j \in E. \quad (3.6)$$

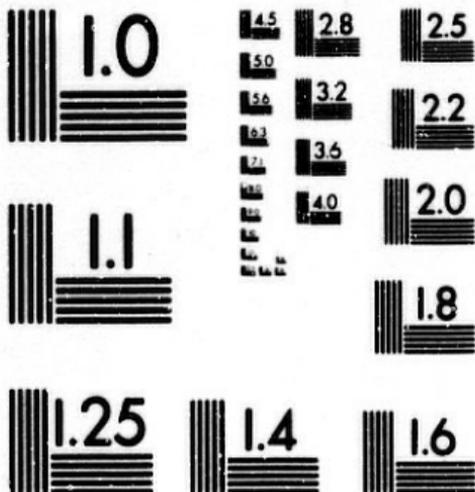
Para el proceso Z se define la matriz potencial

$$U(i,j) = \int_0^{\infty} P_t(i,j) dt, \quad i,j \in E \quad (3.7)$$

y se puede demostrar que

$$U(i,j) = \frac{R(i,j)}{\lambda(i)}, \quad i,j \in E \quad (3.8)$$

con el convenio de que $0/0=0$. Para la cadena X , $R(i,j)$ representa el número esperado de visitas al estado j partiendo del estado i . Mientras que para el proceso Z , $U(i,j)$ representa el tiempo medio de permanencia en el estado j , partiendo del estado i .



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

$$P_t(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ct} (ct)^n}{n!} K^{(n)}(i,j) \quad (3.5)$$

donde $K=I+A/c$ es una matriz de transición de Markov. Esta representación implica que se puede ver Z como una cadena de Markov, Y , con una matriz de transición triangular superior K sometida a un proceso de Poisson ordinario N con razón c .

Definimos a continuación algunos elementos del proceso que necesitaremos más adelante:

DEFINICIÓN 2. Se define la matriz potencial de la cadena discreta X como la matriz

$$R(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} P_t^{(n)}(i,j), \quad i,j \in E. \quad (3.6)$$

Para el proceso Z se define la matriz potencial

$$U(i,j) = \int_0^{\infty} P_t(i,j) dt, \quad i,j \in E \quad (3.7)$$

y se puede demostrar que

$$U(i,j) = \frac{R(i,j)}{\lambda(i)}, \quad i,j \in E \quad (3.8)$$

con el convenio de que $0/0=0$. Para la cadena X , $R(i,j)$ representa el número esperado de visitas al estado j partiendo del estado i . Mientras que para el proceso Z , $U(i,j)$ representa el tiempo medio de permanencia en el estado j , partiendo del estado i .

Igualmente, si $\lambda(i) \leq c$ para todo $i \in E$, para la cadena discreta Y , cuya matriz de transición es K podemos definir la matriz potencial, a la que llamamos V , y puede demostrarse también que

$$U(i,j) = \frac{V(i,j)}{c}, \quad i, j \in E \quad (3.9)$$

En general, vamos a trabajar, a lo largo de todo el capítulo, no con estas matrices sino con lo que vamos a llamar matrices acumuladas.

DEFINICIÓN 3. Dada una matriz, M , se define su matriz acumulada \bar{M} como

$$\bar{M}(i,j) = \sum_{k \leq j} M(i,k), \quad i, j \in E. \quad (3.10)$$

De esta forma definiremos las matrices acumuladas de P , P_t , R , U , K , V y A .

Las propiedades de la distribución de vida de estos procesos han sido consideradas ampliamente en la literatura existente. Así, Assaf et al. (1985) demostraron que si K es totalmente positiva de orden r (TP_r), entonces, la distribución de tiempo de vida $H_i(0,j)$, es decir, el tiempo que se tarda en sobrepasar el estado j partiendo de 0 (estamos considerando los estados superiores al estado j como el conjunto de estados que produce el fallo del sistema o dispositivo) tiene densidad PF_r para cualquier $j \in E$. Si la cadena de Markov X es tal que los elementos de la matriz de transición acumulada son tales que, fijada una columna, se tiene una sucesión decreciente, entonces Brown y Chaganty

(1983) demostraron que el tiempo de primer paso a cualquier conjunto superior tiene distribución de tipo IFRA. Si además la matriz de transición es una matriz TP_2 , entonces esos tiempos de primer paso son también IFR. En 1987 Shaked y Shanthikumar extendieron estos resultados para el caso de cadenas de Markov en tiempo continuo, y demostraron que si $\lambda(i)$ es decreciente en i y los elementos de la matriz de transición acumulada son decrecientes en el primer subíndice, fijado el segundo, entonces $H_i(i,j)$ es una distribución de tipo IFRA para todo $i,j \in E$. Karasu y Özekici (1989) demostraron que cuando la matriz potencial acumulada de la cadena X es tal que dentro de cada columna se tiene una sucesión decreciente, $G_n(i,j)$ es una distribución NBUE para todo $i,j \in E$. Estos resultados fueron extendidos de manera natural para el proceso en tiempo continuo.

Nuestro interés se centra pues, en el estudio de las demás clases de fiabilidad que no han sido consideradas anteriormente en la literatura, NBUC y DMRL, principalmente. Prestaremos también atención al caso NBU, que, aunque ha sido estudiado en otro tipo de procesos (Marshall y Shaked (1983) demostraron que el valor absoluto de un movimiento Browniano tiene tiempos de primer paso NBU, Shanthikumar (1984) y Marshall y Shaked (1986b) probaron que un tipo de procesos de choque en los que se consideraba un cierto comportamiento determinístico del proceso entre un salto y el siguiente, bajo ciertas condiciones, también era un proceso NBU), no se conocen condiciones para que un proceso del tipo descrito anteriormente pertenezca a la clase NBU, siendo éstas más débiles que las exigidas en el caso IFRA y más fuertes que las que implicarían la pertenencia del proceso a otras clases mayores como la NBUC o NBUE, que es lo que cabría esperar.

3.3. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV IFRA.

Las clases de procesos de Markov crecientes que han sido tratados hasta ahora desde el punto de vista del deterioro de sistemas se han limitado a PF_r , IFR, IFRA y NBUE. En lo que sigue comentaremos la situación para las clases IFRA y NBUE. En cuanto a las clases PF_r e IFR nos limitamos a comentar los resultados conocidos hasta ahora, con este fin damos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 4. Una función $K(x, y)$ de dos variables reales definida sobre conjuntos linealmente ordenados se dice que es TP_r , $r=1, 2, \dots$, si

$$K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_m \\ y_1, y_2, \dots, y_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \dots & K(x_1, y_m) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \dots & K(x_2, y_m) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ K(x_m, y_1) & K(x_m, y_2) & \dots & K(x_m, y_m) \end{vmatrix} \geq 0$$

para todo $1 \leq m \leq r$, $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, $y_1 < y_2 < \dots < y_m$.

DEFINICIÓN 5. Una matriz cuadrada de dimensión n se dice que es TP_r , $r=1, 2, \dots, n$ si todos los menores de orden menor o igual que r son no negativos.

DEFINICIÓN 6. Una función $K(u)$ definida sobre la recta real o sobre el conjunto de los enteros se dice que es PF_r , $r=1, 2, \dots$, si $K(x-y)$ es TP_r .

Brown et al. (1983) probaron que toda cadena de Markov en tiempo discreto con espacio de estados $\{1, 2, \dots\}$ y matriz de transición TP_2 pertenece a

la clase IFR.

Assaf et al. (1985) mejoraron los resultados de Brown y Chaganty (1983) y establecieron que un proceso de Markov en tiempo continuo con espacio de estados $\{0,1,\dots,m\}$ donde m es un estado absorbente, uniformizable, con la correspondiente matriz de transición de la cadena de Markov discreta TP_r tiene tiempos de primer paso desde el estado 0 hasta cualquier otro estado con densidad PF_r .

En ambos casos los procesos de Markov no eran necesariamente crecientes. No se conocen otros resultados en esta línea.

3.3.1. Cadenas crecientes de Markov IFRA.

DEFINICIÓN 7. Dada una cadena de Markov discreta creciente $X=\{X_n;n\geq 0\}$ se dice que pertenece a la clase IFRA (DFRA) si y sólo si $P\{S_j=0/X_0=i\}=0$ y

$$P\{S_j>n | X_0=i\}^{\frac{1}{n}} \tag{3.11}$$

es decreciente (creciente) en n para todo i,j estados.

Como estamos trabajando con cadenas crecientes, esta condición puede escribirse también

$$P\{X_n \leq j | X_0 = i\}^{\frac{1}{n}} = \left[\sum_{i \leq h \leq j} P\{X_n = h | X_0 = i\} \right]^{\frac{1}{n}} = (\bar{P}^{(n)}(i,j))^{\frac{1}{n}} \quad (3.12)$$

DEFINICIÓN 8. Dada una matriz $M=(M(i,j))$ se dice estocásticamente monótona si $\bar{M}(i,j)$ es decreciente en i para todo j . Lo que significa que las columnas de la matriz acumulada están formadas por sucesiones decrecientes.

Sea $E_j=\{h \in E; h \geq j\}$. El siguiente teorema establece condiciones suficientes para que una cadena de Markov creciente pertenezca a la clase IFRA.

TEOREMA 1.

Sea $X=\{X_n; n \geq 0\}$ una cadena de Markov creciente sobre un conjunto numerable $E \subset [0, +\infty[$, y sea $P=(P(i,j))$ su matriz de transición. Si P es una matriz estocásticamente monótona, entonces X es una cadena IFRA.

Demostración.

Este resultado fue probado por Brown y Chaganty (1983) en el caso en que E_j era un conjunto finito. Posteriormente Shaked y Shanthikumar (1987) extendieron el resultado al caso de procesos con espacio de estados cualesquiera, en los que E_j no es necesariamente finito, probando una conjetura obtenida por los anteriores autores en 1983. ■

3.3.2. Procesos crecientes de Markov IFRA.

DEFINICIÓN 9. Un proceso de Markov $Z = \{Z_t; t \geq 0\}$ en tiempo continuo, con funciones de transición $P_t(i, j)$, con $i, j \in E$ y $t > 0$, se dice que pertenece a la clase IFRA (DFRA) si y sólo si

$$(P\{L_j > t | Z_0 = i\})^{1/t} \quad (3.13)$$

es decreciente (creciente) en t para cada par de estados i, j . Condición que, por ser la cadena creciente, puede escribirse de forma equivalente

$$(\bar{P}_t(i, j))^{1/t} \quad (3.14)$$

La q -matriz asociada a los procesos con los que estamos trabajando, es una matriz uniformemente acotada, de modo que es posible expresar las funciones de transición en términos de las probabilidades de transición correspondientes a la cadena de Markov uniformada de la siguiente forma

$$P_t(i, j) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{n!} \exp(-ct) K^{(n)}(i, j) \quad (3.15)$$

donde c es la cota de la q -matriz.

El siguiente teorema permite obtener procesos en tiempo continuo IFRA, imponiendo condiciones a la cadena uniformada que es un proceso en tiempo discreto.

El estudio de las condiciones para que un proceso de Markov creciente en tiempo continuo pertenezca a la clase IFRA fué llevado a cabo en un caso particular por Brown et al. (1983) y extendido por Shaked et al. (1987)

considerando menos condiciones sobre el espacio de estados. La prueba se hace utilizando el procedimiento de uniformización de Ross (1983).

TEOREMA 2.

Sea $Z = \{Z_t; t \geq 0\}$ un proceso de Markov creciente en tiempo continuo y sea $K = (K(i,j))$ la matriz de transición asociada a la cadena uniformada. Si K es una matriz uniformemente monótona, entonces Z es un proceso IFRA.

Demostración.

La demostración puede verse en Shaked y Shanthikumar (1987). ■

3.4. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV NBUE.

3.4.1. Cadenas crecientes de Markov NBUE.

DEFINICIÓN 10. Una cadena de Markov $X = \{X_n; n=0,1,2,\dots\}$ se dice que pertenece a la clase NBUE (NWUE) si y sólo si, para cada i, j estados

$$\sum_{m=0}^{\infty} P\{S_j > n+m | X_0=i\} \leq (\geq) P\{S_j > n | X_0=i\} \sum_{m=0}^{\infty} P\{S_j > m | X_0=i\} \quad (3.16)$$

Dado que la cadena es creciente y por la definición de matriz potencial, la condición anterior puede escribirse también en la forma

$$\sum_{m=n}^{\infty} \bar{P}^{(m)}(i,j) \leq (\geq) \bar{R}(i,j) \bar{P}^{(n)}(i,j) \quad (3.17)$$

En el siguiente teorema se dan condiciones suficientes para que una cadena de Markov creciente pertenezca a la clase NBUE.

TEOREMA 3.

Sea $R=(R(i,j))$ la matriz potencial asociada a una cadena de Markov creciente $X = \{X_n; n \geq 0\}$. Si R es una matriz estocásticamente monótona, entonces X es un proceso NBUE.

Demostración.

Puede verse la demostración del resultado anterior en Karasu y Özekici (1989), la prueba se hace utilizando la ecuación de Chapman-Kolmogorov y el decrecimiento de la matriz potencial acumulada. ■

3.4.2. Procesos crecientes de Markov NBUE.

DEFINICIÓN 11. Dado Z un proceso de Markov, se dice que pertenece a la clase NBUE (NWUE) si y sólo si

$$\int_0^{\infty} P\{L_j > s+t | Z_0=i\} ds \leq (\geq) P\{L_j > t | Z_0=i\} \int_0^{\infty} P\{L_j > s | Z_0=i\} ds \quad (3.18)$$

para todo i, j estados. De nuevo por el crecimiento, podemos escribir esta condición en términos de las funciones de transición acumuladas y de la matriz potencial acumulada asociadas al proceso:

$$\int_0^{\infty} \bar{P}_s(i,j) ds \leq (\geq) \bar{P}_t(i,j) \bar{U}(i,j) \quad (3.19)$$

Damos a continuación dos resultados que establecen condiciones suficientes para que un proceso creciente de Markov en tiempo continuo pertenezca a la clase NBUE. En el primero estas condiciones son exigidas sobre los parámetros de la cadena uniformada asociada al proceso y en el segundo las condiciones son impuestas directamente sobre las matrices del proceso.

TEOREMA 4.

Sea $V=V(i,j)$ la matriz potencial de la cadena uniformada asociada al proceso en tiempo continuo Z . Si V es una matriz estocásticamente monótona, entonces Z es un proceso NBUE.

La prueba se hace por el procedimiento de uniformización.

TEOREMA 5.

Sea $U=(U(i,j))$ la matriz potencial asociada a un proceso creciente de Markov en tiempo continuo Z . Si U es una matriz estocásticamente monótona, entonces Z es un proceso NBUE.

La demostración de los resultados anteriores puede verse en Karasu y Özekici (1989).

Nota.

La condición de monotonía estocástica sobre la matriz potencial de un proceso implica que, fijado un estado j , el tiempo medio de primer paso por cualquier estado superior a j , va decreciendo si los estados de partida van creciendo.

3.5. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV NBU.

DEFINICIÓN 12. Una cadena de Markov X pertenece a la clase NBU (NWU) si y sólo si verifica para cada i, j estados y para cada $n, m \geq 0$ que

$$P\{S_j > n+m \mid X_0 = i\} \leq (\geq) P\{S_j > n \mid X_0 = i\} P\{S_j > m \mid X_0 = i\} \quad (3.20)$$

Un proceso en tiempo continuo Z pertenece a la clase NBU (NWU) si y sólo si para cada $i, j \in E$ y cada $t, s > 0$ se verifica que

$$P\{L_j > t+s \mid Z_0 = i\} \leq (\geq) P\{L_j > t \mid Z_0 = i\} P\{L_j > s \mid Z_0 = i\} \quad (3.21)$$

Estas condiciones se expresan gracias al crecimiento, de forma equivalente

$$\bar{P}^{(n+m)}(i, j) \leq (\geq) \bar{P}^{(n)}(i, j) \bar{P}^{(m)}(i, j) \quad (3.22)$$

y

$$\bar{P}_{t+s}(i, j) \leq (\geq) \bar{P}_t(i, j) \bar{P}_s(i, j) \quad (3.23)$$

respectivamente.

Para el caso NBU, no se conocen condiciones suficientes que impliquen la pertenencia de un proceso a esta clase, que sean más débiles que la monotonía estocástica sobre la matriz de transición del proceso que implica la pertenencia a la clase IFRA, como cabría esperar. Sin embargo, para el caso de cadenas de Markov con tres estados, puede demostrarse el siguiente resultado, que establece que, salvo en casos triviales, no hay cadenas crecientes NBU que no sean IFRA.

TEOREMA 6.

Sea X una cadena de Markov creciente con espacio de estados $E = \{1, 2, 3\}$. Sea $P = (p_{ij})$ la matriz de transición. Si X es una cadena NBU entonces o bien $p_{12} = 0$ o X es estocásticamente monótona.

Demostración.

El único caso posible en una cadena con tres estados es $i=1$ y $j=2$. De manera que X es una cadena NBU si y sólo si $S_2 = \inf\{k: X_k = 3\}$ es una variable aleatoria con distribución NBU. La matriz de transición debe ser una matriz triangular superior por ser un proceso creciente,

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Llamamos

$$\bar{P}^{(k)} = (\bar{p}_{ij}^{(k)}) \quad (3.25)$$

a la matriz de transición en k pasos acumulada. Si X es NBU, en particular tiene que ocurrir que

$$\bar{p}_{12}^{(2)} \leq \bar{p}_{12} \bar{p}_{12} \quad (3.26)$$

La matriz de transición en dos pasos acumulada, viene dada por

$$\bar{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} p_{11}^2 & p_{12}p_{11} + p_{12}p_{22} + p_{11}^2 & 1 \\ 0 & p_{22}^2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

por lo tanto la condición NBU se satisface siempre que

$$p_{11}p_{12} + p_{12}p_{22} + p_{11}^2 \leq (p_{11} + p_{12})^2 \quad (3.28)$$

ya que $\bar{p}_{12} = p_{11} + p_{12}$. La condición (3.26) es cierta siempre que

$$p_{12}\bar{p}_{22} \leq p_{12}\bar{p}_{12} \quad (3.29)$$

Para que esto ocurra o bien $p_{12}=0$ o bien $\bar{p}_{22} \leq \bar{p}_{12}$, pero en el caso de una cadena creciente con tres estados como el que estamos considerando, esto significa que la cadena es estocásticamente monótona.

Este es un primer resultado obtenido por nosotros para procesos de Markov crecientes de la clase NBU. Es claro que utilizar únicamente tres estados es una restricción, sin embargo, este tipo de cadenas modeliza bien determinados procesos de tipo biológico, como la evolución de una enfermedad donde se distinguen tres estados dos de ellos correspondientes a diferentes etapas de la enfermedad y un tercero de muerte.

3.6. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV NBUC

3.6.1. Introducción.

Cao y Wang (1991) definieron la clase de distribuciones nuevo mejor que usado en orden convexo, NBUC (NWUC), a partir de una comparación entre las variables tiempo de vida residual y tiempo de vida de un sistema.

Damos a continuación la definición de lo que se entiende por proceso NBUC (NWUC).

DEFINICIÓN 13. Dada una cadena de Markov $X = \{X_n; n=0,1,2,\dots\}$ se dice que pertenece a la clase NBUC (NWUC) si y sólo si

$$\sum_{k=n}^{\infty} P\{S_j > k+m \mid X_0=i\} \leq (\geq) P\{S_j > m \mid X_0=i\} \sum_{k=n}^{\infty} P\{S_j > k \mid X_0=i\} \quad (3.30)$$

para cada par de estados i, j y para todo $n, m \geq 0$.

La expresión (3.30), siguiendo la notación de la sección 3.2, queda de la forma

$$\sum_{k=n}^{\infty} \bar{G}_{m+k}(i,j) \leq (\geq) \bar{G}_m(i,j) \sum_{k=n}^{\infty} \bar{G}_k(i,j) \quad \forall n, m \geq 0,$$

con $i, j \in E$.

DEFINICIÓN 14. Sea $Z = \{Z_t; t \geq 0\}$ un proceso de Markov, como el descrito en el apartado 3.2. Se dice que Z es un proceso NBUC (NWUC) si y sólo si para todo $i, j \in E$ se verifica que

$$\int_t^{\infty} P\{L_j > s+y | X_0=i\} ds \leq (\geq) P\{L_j > y | X_0=i\} \int_t^{\infty} P\{L_j > s | X_0=i\} ds \quad (3.31)$$

para cada par de estados i, j , y todo $t, y \geq 0$. O equivalentemente

$$\int_t^{\infty} \bar{H}_{s,y}(i,j) ds \leq (\geq) \bar{H}_y(i,j) \int_t^{\infty} \bar{H}_s(i,j) ds \quad \forall t, y \geq 0,$$

es decir, cuando, fijado un estado $j \in E$, los tiempos de primer paso por cualquier estado superior a él, son variables aleatorias con distribución NBUC (NWUC).

Para la cadena de Markov en tiempo discreto $X = \{X_n; n=0,1,2,\dots\}$ con matriz de transición $P = (P(i,j))$, $i, j \in E$, llamaremos

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} P^n, \text{ a la matriz potencial, y}$$

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} P^n, \text{ a la matriz potencial residual.}$$

3.6.2. Cadenas crecientes de Markov NBUC.

El siguiente resultado es una extensión natural del teorema 3.4 de Karasu y Özekici (1989), para la clase de distribuciones NBUC.

TEOREMA 7.

Si $\bar{R}_n(i,j)$ es decreciente (creciente) en i para todo $n \geq 0$ y todo $j \in E$,

entonces X es un proceso NBUC (NWUC).

Demostración.

X es un proceso NBUC si y solo si

$$\sum_{k=n}^{\infty} P\{S_j > k+m \mid X_0=i\} \leq P\{S_j > m \mid X_0=i\} \sum_{k=n}^{\infty} P\{S_j > k \mid X_0=i\}, \quad (3.32)$$

para cada par de estados i, j, y para todo n, m ≥ 0.

Por ser la cadena creciente se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{G}_n(i,j) &= P\{S_j > n \mid X_0=i\} = P\{X_n \leq j \mid X_0=i\} = \\ &= \sum_{i \leq k \leq j} P\{X_n = k \mid X_0=i\} = \sum_{i \leq k \leq j} P^{(n)}(i,k) = \bar{P}^{(n)}(i,j), \end{aligned}$$

Si tomamos a como estado inicial, es suficiente estudiar para cada n el signo de la siguiente expresión,

$$\Theta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \bar{P}^{(k+m)}(a,j) - \bar{P}^{(m)}(a,j) \sum_{k=n}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(a,j). \quad (3.33)$$

Utilizando la ecuación de Chapman-Kolmogorov y por la definición de matriz acumulada, se puede demostrar que

$$\Theta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{a \leq i \leq j} P^{(m)}(a,i) \bar{P}^{(k)}(i,j) - \sum_{a \leq i \leq j} P^{(m)}(a,i) \sum_{k=n}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(a,j) \quad (3.34)$$

o equivalentemente

$$\Theta_n = \sum_{a \leq i \leq j} P^{(m)}(a,i) \sum_{k=n}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(i,j) - \sum_{a \leq i \leq j} P^{(m)}(a,i) \sum_{k=n}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(a,j), \quad (3.35)$$

que por la definición de matriz potencial residual, puede escribirse

$$\Theta_n = \sum_{a \leq i \leq j} P^{(m)}(a,i) [\bar{R}_n(i,j) - \bar{R}_n(a,j)], \quad (3.36)$$

que es menor o igual que cero a causa de la hipótesis sobre $\bar{R}_n(i,j)$. ■

El teorema anterior establece que si la matriz potencial residual de una cadena de Markov creciente es una matriz estocásticamente monótona, entonces la cadena pertenece a la clase NBUC.

Hemos dado la demostración para el caso NBUC, el caso dual se obtiene de forma análoga sin más que invertir las desigualdades.

3.6.3. Procesos crecientes de Markov NBUC.

Llamaremos a la matriz potencial asociada al proceso en tiempo continuo

$$U(i,j) = \int_0^{\infty} P_t(i,j) dt \quad \forall i,j \in E$$

y la matriz potencial residual

$$U_s(i,j) = \int_s^{\infty} P_t(i,j) dt \quad \forall s > 0 \quad \forall i,j \in E.$$

Para cada una de ellas denotamos mediante $\bar{U}(i,j)$ y $\bar{U}_s(i,j)$ sus respectivas matrices acumuladas.

Usando la expresión (3.5), es posible obtener (ver Karasu y Özekici (1989)) $U(i,j) = V(i,j)/c$, para todo $i,j \in E$, y además se puede probar que

$$U_s(i,j) = \frac{1}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cs)^n}{n!} e^{-cs} V_n(i,j) \quad (3.37)$$

donde $V_n(i,j) = \sum_{m=n}^{\infty} K^{(m)}(i,j)$ y $V_0(i,j) = V(i,j)$, son, respectivamente la matriz

potencial residual y la matriz potencial asociadas a la cadena uniformada.

TEOREMA 8.

Sea $Z = \{Z_t; t \geq 0\}$ un proceso de Markov creciente. Si $\bar{U}_s(i,j)$ es decreciente (creciente) en i , para todo $j \in E$, entonces Z es un proceso de Markov NBUC (NWUC).

Demostración.

El proceso en tiempo continuo será un proceso NBUC siempre que los tiempos de primer paso por conjuntos crecientes de la forma $E_j = \{k \in E, k > j\}$, partiendo de cualquier estado inferior a , sean variables aleatorias con distribución

NBUC, para cualquier $j \in E$. Es suficiente probar que

$$\Theta_s = \int_s^{\infty} \bar{P}_{t+x}(a_j) dt - \bar{P}_x(a_j) \int_s^{\infty} \bar{P}_t(a_j) dt \leq 0 \quad (3.38)$$

para todo $s > 0$ y todo j de E .

Igual que para el caso discreto, la desigualdad de (3.38) es cierta si

$\bar{U}_s(i,j)$ es decreciente en i para todo $s \geq 0$ y todo $j \in E$. ■

Al igual que el caso discreto, el teorema establece que la monotonía estocástica sobre la matriz potencial residual es una condición suficiente que implica la pertenencia del proceso a la clase NBUC.

TEOREMA 9.

Sea $Z = \{Z_t; t \geq 0\}$ un proceso creciente de Markov. Si $\bar{V}_n(i,j)$ es decreciente (creciente) en i para cualquier estado j de E , y para todo $n \geq 0$, entonces Z es un proceso de Markov NBUC (NWUC).

Demostración.

Debido a la relación entre $\bar{V}_n(i,j)$ y $\bar{U}_s(i,j)$, dada en (3.37), si el primero es decreciente en i , entonces el segundo también lo es. De manera que,

por el teorema 8, Z es un proceso de Markov NBUC. ■

En este teorema se obtiene la clase de fiabilidad a la que pertenece el proceso en tiempo continuo imponiendo condiciones sobre un proceso en tiempo discreto asociado.

3.7. PROCESOS CRECIENTES DE MARKOV DMRL

3.7.1. Introducción

En este apartado vamos a estudiar, en primer lugar, las condiciones suficientes que hacen que la cadena de Markov X pertenezca a la clase DMRL (IMRL), después las extendemos para el caso del proceso en tiempo continuo, Z . Precisamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 15. Dado el proceso $Z = \{Z_t; t \geq 0\}$, se dice que pertenece a la clase de procesos con vida residual media decreciente (creciente), DMRL (IMRL), si y sólo si, para todo $i, j \in E$

$$\frac{\int_0^{\infty} P\{L_j > y + t_1 | X_0 = i\} dy}{P\{L_j > t_1 | X_0 = i\}} \geq (\leq) \frac{\int_0^{\infty} P\{L_j > y + t_2 | X_0 = i\} dy}{P\{L_j > t_2 | X_0 = i\}} \quad (3.39)$$

para todo $t_2 \geq t_1 \geq 0$.

La ecuación (3.39) es equivalente a

$$\frac{\int_0^{\infty} \bar{H}_{t_1+y}(i,j) dy}{\bar{H}_{t_1}(i,j)} \geq (\leq) \frac{\int_0^{\infty} \bar{H}_{y+t_2}(i,j) dy}{\bar{H}_{t_2}(i,j)} \quad \forall t_2 \geq t_1 \geq 0. \quad (3.40)$$

De la misma forma, dada la cadena $X = \{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$, se dice que pertenece a la clase DMRL (IMRL) si y sólo si, para todo $i, j \in E$

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} P\{S_j > k + n_1 | X_0 = i\}}{P\{S_j > n_1 | X_0 = i\}} \geq (\leq) \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P\{S_j > k + n_2 | X_0 = i\}}{P\{S_j > n_2 | X_0 = i\}} \quad (3.41)$$

para todo $n_2 \geq n_1 \geq 0$. Siguiendo la notación de la sección 3.2, la expresión (3.41) es equivalente a

$$\frac{\sum_{n=n_1}^{\infty} \bar{G}_n(i,j)}{\bar{G}_{n_1}(i,j)} \geq (\leq) \frac{\sum_{n=n_2}^{\infty} \bar{G}_n(i,j)}{\bar{G}_{n_2}(i,j)}, \quad \forall n_1, n_2 \geq 0. \quad (3.42)$$

Como ya sabemos por ser X creciente

$$\bar{G}_n(i,j) = \sum_{i \leq k \leq j} P(X_n = k | X_0 = i) = \bar{P}^{(n)}(i,j),$$

de modo que la condición DMRL (IMRL) puede escribirse también en términos de la matriz de transición en n pasos acumulada de la siguiente forma

$$\frac{\sum_{n=n_1}^{\infty} \bar{P}^{(n)}(i,j)}{\bar{P}^{(n_1)}(i,j)} \geq (\leq) \frac{\sum_{n=n_2}^{\infty} \bar{P}^{(n)}(i,j)}{\bar{P}^{(n_2)}(i,j)}, \quad \forall n_1, n_2 \geq 0 \quad (3.43)$$

para todo par de estados i, j.

3.7.2. Cadenas crecientes de Markov DMRL

TEOREMA 10.

Sea $X = \{X_n; n=0,1,2,\dots\}$, una cadena de Markov creciente, entonces, si $(\bar{R}_n(i,j))/(\bar{P}^{(n)}(i,j))$ es decreciente (creciente) en $i \in E$ para todo $n \geq 0$ y todo $j \in E$, X es una cadena DMRL (IMRL).

Demostración.

Vamos a demostrar que, bajo las condiciones del teorema, la desigualdad (3.41) es cierta, con lo que X es una cadena DMRL.

Fijamos arbitrariamente el estado $a \in E$, como estado inicial. Por tanto, debe cumplirse

$$\frac{\sum_{k=n_1}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(a,j)}{\bar{P}^{(n_1)}(a,j)} \geq \frac{\sum_{k=n_2}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(a,j)}{\bar{P}^{(n_2)}(a,j)} \quad \forall n_2 \geq n_1 \quad (3.44)$$

para todo $j \in E$. Con el fin de probar la desigualdad (3.44), para todo $n_2 \geq n_1 \geq 0$, demostraremos que

$$\Theta = \bar{P}^{(n_2)}(a,j) \sum_{k=n_1}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(a,j) - \bar{P}^{(n_1)}(a,j) \sum_{k=n_2}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(a,j) \geq 0. \quad (3.45)$$

Ya que $n_2 \geq n_1 \geq 0$, se puede descomponer $n_2 = n_1 + (n_2 - n_1)$, siendo una suma de términos positivos, por tanto

$$\sum_{k=n_2}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(a,j) = \sum_{k=n_1}^{\infty} \bar{P}^{(k+(n_2-n_1))}(a,j).$$

Para cada k , podemos escribir

$$\begin{aligned} \bar{P}^{(k+(n_2-n_1))}(a,j) &= \sum_{a \rightarrow s \rightarrow h \rightarrow j} P^{(k+(n_2-n_1))}(a,h) = \\ &= \sum_{a \rightarrow s \rightarrow j} \sum_{a \rightarrow i \rightarrow h} P^{(n_2-n_1)}(a,i) P^{(k)}(i,h). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Donde la última igualdad en (3.46) es cierta por la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Podemos ahora intercambiar los sumatorios, con lo que nos quedaría

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq h \leq j} \sum_{a \leq i \leq h} P^{(n_2 - n_1)}(a, i) P^{(k)}(i, h) &= \sum_{a \leq i \leq j} P^{(n_2 - n_1)}(a, i) \sum_{i \leq h \leq j} P^{(k)}(i, h) = \\ &= \sum_{a \leq i \leq j} P^{(n_2 - n_1)}(a, i) \bar{P}^{(k)}(i, j) . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Utilizando un argumento análogo, se puede descomponer

$$\bar{P}^{(n_2)}(a, j) = \sum_{a \leq i \leq j} P^{(n_2 - n_1)}(a, i) \bar{P}^{(n_1)}(i, j) \quad (3.48)$$

Si sustituímos en Θ las expresiones obtenidas en (3.47) y en (3.48) y, sabiendo que

$$\bar{R}_n(i, j) = \sum_{k=n}^{\infty} \bar{P}^{(k)}(i, j) , \quad \forall i, j \in E, n \geq 0 , \quad (3.49)$$

obtenemos que

$$\Theta = \sum_{a \leq i \leq j} P^{(n_2 - n_1)}(a, i) \left[\bar{P}^{(n_1)}(i, j) \bar{R}_{n_1}(a, j) - \bar{P}^{(n_1)}(a, j) \bar{R}_{n_1}(i, j) \right] \geq 0 \quad (3.50)$$

Como $(\bar{R}_n(i, j))/(\bar{P}^{(n)}(i, j))$ es decreciente en i para todo $n \geq 0$ y todo $j \in E$,

la desigualdad en (3.50) es cierta. ■

3.7.3. Procesos crecientes de Markov DMRL

Sea $Z = \{Z(t), t \geq 0\}$ un proceso de Markov creciente en tiempo continuo, entonces $P_i(i, j) = 0$ para $i > j$. Supongamos también que $P\{Z(0) = a\} = 1$ para algún $a \in E$. Sea $U_s(i, j)$, la matriz potencial residual del proceso Z , el siguiente teorema establece las condiciones para que Z sea un proceso DMRL (IMRL).

TEOREMA 11.

Sea $Z = \{Z_s; t \geq 0\}$, el proceso creciente de Markov descrito en el apartado 3.2, entonces, si $\bar{U}_s(i, j) / \bar{P}_s(i, j)$ es decreciente (creciente) en $i \in E$ para todo $s \geq 0$ y todo $j \in E$, Z es un proceso DMRL (IMRL).

Demostración.

De manera análoga al caso discreto llegamos a que Z es un proceso DMRL siempre que se verifique la siguiente desigualdad

$$\Theta = \bar{P}_{t_2}(a, j) \int_{t_1}^{\infty} \bar{P}_s(a, j) ds - \bar{P}_{t_1}(a, j) \int_{t_2}^{\infty} \bar{P}_s(a, j) ds \geq 0 \quad (3.51)$$

para todo $t_2 \geq t_1 \geq 0$ y $a, j \in E$. La demostración es similar al caso discreto. ■

ANEXOS

ANEXO 1

SOBRE PROCESOS DE LA CLASE HNBUE

1. CADENAS CRECIENTES DE MARKOV HNBUE

Continuando con el trabajo del Capítulo 3 hemos obtenido condiciones suficientes para que una cadena de Markov sea HNBUE, estas condiciones vienen dadas en términos de las matrices acumuladas definidas a lo largo del Capítulo 3.

Hemos comparado estas condiciones con las que implican la pertenencia a otras clases más pequeñas, como la clase NBUE y DMRL, comprobando que las que hemos obtenido para el caso armónico son más débiles que las que implican la pertenencia a la clase DMRL, como es de esperar, y con respecto al caso NBUE, hemos comprobado que son condiciones distintas.

En este momento estamos tratando la extensión al caso continuo.

2. PROCESOS DE RENOVACIÓN HNBUE

Siguiendo la línea introducida por Deshpande et al. (1986), hemos probado que si la distribución de un proceso de renovación pertenece a la clase HNBUE, entonces la distribución de equilibrio correspondiente pertenece a la misma clase, ampliando así resultados obtenidos por los autores citados.

Estamos tratando de determinar qué clases de supervivencia se conservan al pasar de la distribución de un proceso de renovación a la distribución de equilibrio del mismo.

ANEXO 2

EXTENSIONES MULTIVARIANTES

Hay varias maneras de extender al caso multivariante las nociones de envejecimiento univariantes, debido a que en el caso univariante hay varias definiciones equivalentes, cada una de las cuales puede tener un significado diferente cuando se extiende al caso multivariante.

Ilustramos lo que decimos con la clase NBU. Una variable aleatoria T con función de distribución F y función de supervivencia $\bar{F}=1-F$ es NBU si y solo si se satisface alguna de las condiciones siguientes (hay alguna más):

$$\bar{F}(s+t) \leq \bar{F}(s)\bar{F}(t), \quad \forall s \geq 0, t \geq 0, \quad (1)$$

$$-\log \bar{F} \text{ es una función superaditiva para } t > 0, \quad (2)$$

$$[T-dT>t] \leq_{est} T \text{ para todo } t \geq 0. \quad (3)$$

Cada una de estas condiciones puede tener una o más extensiones multivariantes. Por ejemplo, a partir de (1) las extensiones posibles vienen de considerar s y t pertenecientes a conjuntos especiales como el cono convexo $[0, \infty]^n$ u otros conos convexos, o a conjuntos de vectores determinados. En esta dirección son los trabajos de Buchanan y Singpurwalla (1977), Marshall y Shaked (1979, 1986).

Algo similar ocurre con las otras caracterizaciones de esta clase. Así, las extensiones multivariantes de (2) y (3) pueden ser estudiadas en Arjas (1981). Savits (1984) extiende (2).

Con las otras clases de distribuciones IFR, IFRA, DMRL, NBUE, la situación es parecida. Referencias de estas son Gosh y Ebrahimi (1983), Basu y Ebrahimi (1986a), Zahedi (1985). Basu, Ebrahimi y Klefsjö (1983) y Basu y Ebrahimi (1986b) estudiaron algunas nociones multivariantes de la clase HNBUE.

Mukherjee y Chatterjee (1993) extienden la noción de dominancia estocástica que ha sido dada para el caso univariante al caso multivariante, estableciéndose un orden entre las funciones de supervivencia multivariantes. Obtienen caracterizaciones para las clases MIFR y MNBU tal como fueron introducidas por Buchanan y Singpurwalla (1977) en términos de esta relación de orden. Otras propiedades que relacionan las de envejecimiento con el orden son estudiadas, para ello se requieren la definición multivariante de la razón de azar, que ahora se denomina gradiente de azar. Se define un orden entre los gradientes de azar (equivalente al caso univariante) y se relaciona este orden con el orden estocástico definido antes, estableciendo una relación entre el orden de los gradientes de azar y la clase MMRL (vida media residual multivariante).

ANEXO 3

INFERENCIA EN MODELOS DE CHOQUES

El modelo de Esary, Marshall y Porschan (1973) ha sido estudiado desde el punto de vista de su comportamiento con respecto a las clases de fiabilidad, pero el estudio inferencial del mismo no ha sido muy tratado. Chikkagoudar y Palaniapan (1981) obtuvieron el estimador UMVU de fiabilidad de una componente sujeta a este modelo bajo la hipótesis de daño acumulado y un umbral de daño fijo.

La aportación más importante desde entonces es la de Kunchur y Munoli (1993), que consideran un sistema en paralelo con dos componentes cada una de las cuales tiene el mismo umbral de fallo. El sistema está sujeto a una sucesión aleatoria de choques que provienen de una misma fuente y causa daño a ambas componentes del sistema, la llegada de los golpes es de Poisson, pero ahora la probabilidad de supervivencia en cada golpe es una probabilidad bivalente en términos de los daños acumulados por cada una de las componentes. En este trabajo los autores construyen la función de supervivencia del modelo y calculan

los estimadores máximo verosímil y UMVUE.

No hay otras referencias sobre el tema. Por tanto, está abierta la investigación sobre inferencia en el caso en que las llegadas son procesos no Poissonianos, como son procesos de renovación, procesos de nacimiento puro homogéneos y no homogéneos.

BIBLIOGRAFÍA

Abouammoh, A.M. y Ahmed, A.N. (1988). The New Better than Used Failure Rate Class of Life Distribution, *J. Appl. Prob.*, **20**, 237-240.

A-Hameed, M. (1984a). Life Distribution Properties of Devices Subject to a Lévy Wear Process, *Math. Op. Res.*, **9**, 606-614.

A-Hameed, M. (1984b). Life Distribution Properties of Devices Subject to a Pure Jump Damage Process, *J. Appl. Prob.*, **21**, 816-825.

A-Hameed, M.S. y Proschan, F. (1973). Nonstationary Shock Models, *Stoch. Proc. Applic.*, **1**, 383-404.

A-Hameed, M.S. y Proschan, F. (1975). Shock Models with Underlying Birth Process, *J. Appl. Prob.*, **12**, 18-28.

Aly, E.-E., (1990). Testing Exponentiality Against IFRA or NBU Alternatives with Type II Censored Data, *Statistics & Decisions*, **8**, 265-269.

Aly, E.-E., (1992). On Testing Exponentiality Against HNBUE Alternatives, *Statistics & Decisions*, **10**, 239-250.

Alzaid, A., Kim, J.H. y Proschan, F. (1991). Laplace Ordering and its Applications, *J. Appl. Prob.*, **28**, 116-130.

Arjas, E. (1981). The Failure and Hazard Processes in Multivariate Reliability Systems, *Math. Oper. Res.*, **6**, 551-562.

Assaf, D., Shaked, M. y Shanthikumar, J.G. (1985) First Passage Times with PF, Densities. *J. Appl. Prob.* **22**, 185-196.

Barlow, R.E. (1979). Geometry of the Total Time on Test Transform, *Naval Res. Log. Quart.*, **26**, 393-402.

Barlow, R.E. y Campo, R. (1975). Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis. In *Reliability and Fault Tree Analysis*, Ed. R.E. Barlow, J. Fussel and N.D. Singpurwalla, 451-481. SIAM.

Barlow, R.E. y Marshall, A.W. (1964). Bounds for distributions with monotone hazard rate I. *Ann. of Math. Statistics*, **35**, 1234-1257.

Barlow, R.E. y Marshall, A.W. (1964). Bounds for distributions with monotone hazard rate II. *Ann. of Math. Statistics*, **35**, 1257-1274.

Barlow, R.E. y Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston.

Basu, S.K. y Bhattacharjee, M.C. (1984). On Weak Convergence Within the HNBUE Family of Life Distributions. *J. Appl. Prob.*, **21**, 654-660.

Basu, A.P., Ebrahimi, N. y Klefsjö, B. (1983). Multivariate Harmonic New Better than Used in Expectation Distributions, *Scand. J. Statist.*, **10**, 19-25.

Basu, A.P. y Ebrahimi, N. (1985). Testing Whether Survival Functions is Harmonic New Better than Used in Expectation, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **37**, 347-359.

Basu, A.P. y Ebrahimi, N. (1986a). Multivariate New Better than Used in Expectation Distributions, *Statist. & Prob. Letters*, **4**, 295-301.

Basu, A.P. y Ebrahimi, N. (1986b). HNBUE and HNWUE-A Survey. In: A.P. Basu (Ed.), *Reliability and Quality Control*, North-Holland, Amsterdam, 33-46.

Basu, A.P., Ebrahimi, N. y Klefsjö, B. (1983). Multivariate Harmonic New Better than Used in Expectation Distributions. *Scand. J. Statist.*, **10**, 19-25.

Basu, A.P. y Kirmani, S.N.U.A. (1986) Some Results Involving HNBUE Distributions, *J. Appl. Prob.*, **23**, 1038-1044.

Bergman, B. (1979). On Age Replacement and the Total Time on Test Concept, *Scand. J. Statist.*, **6**, 161-168.

Bergman, B. y Klefsjö, B. (1984). The Total Time on Test Concept and

Its Use in Reliability Theory, *Oper. Res.*, **32**, 596-606.

Bhattacharjee, M.C. y Sethuraman, J. (1990). Families of Life Distributions Characterized by Two Moments, *J. Appl. Prob.*, **27**, 720-725.

Block, H.W. y Savits, T.H. (1976). The IFRA Closure Problem, *Ann. Prob.*, **4**, 1030-1032.

Block, H.W. y Savits, T.H. (1978). Shock Models with NBUE Survival, *J. Appl. Prob.*, **15**, 621-628.

Block, H.W. y Savits, T.H. (1980a). Laplace Transform for Classes of Life Distributions, *Ann. Prob.*, **8**, 465-474.

Block, H.W. y Savits, T.H. (1980b). Multivariate Increasing Failure Rate Average Distributions, *Ann. Prob.*, **8**, 793-801.

Block, H.W. y Savits, T.H. (1981). Multidimensional IFRA Processes, *Ann. Prob.*, **9**, 162-166.

Boland, J., El-Newehi, E. y Proschan, F. (1994). Applications of the Hazard Rate Ordering in Reliability and Order Statistics, *J. Appl. Prob.*, **31**, 180-192.

Brown, M. (1980) Bounds, Inequalities and Monotonicity Properties for Some Specialized Renewal Processes, *Ann. Prob.*, **8**, 227-240.

Brown, M. y Chaganty, N. (1983). On the First Passage Time Distribution for a Class of Markov Chains, *Ann. Prob.* **11**, 1000-1008.

Buchanan, W.B. y Singpurwalla, N.D. (1977). Some Stochastic Characterization of Multivariate Survival. In C.P. Tsokos y I.N. Shimi (Eds.), *Theory and Applications of Reliability*. Academic Press, N. Y., 329-348.

Cao, J. y Wang, Y. (1991). The NBUC and NWUC Classes of Life Distributions, *J. Appl. Prob.*, **28**, 473-479.

Chandra, M. y Singpurwalla, N. (1981). Relationships Between Some Notions which are Common to Reliability Theory and Economics, *Math. Oper. Res.*, **6**, 113-121.

Chen, Y.Y., Hollander, M. y Langberg, N.A. (1983). Testing whether New is Better than Used with Randomly Censored Data, *Ann. Statist.*, **11**, 267-274.

Chiang, D.T. y Niu, S.-C. (1980). On the Distribution of Time to First System Failure, *J. Appl. Prob.*, **17**, 481-489.

Chikkagoudar, M.S. y Palaniappan, K. (1981). Uniformly Minimum Variance Umbiased Estimation of Reliability in Shock Models, *J. Indian Statist. Assoc.*, **19**, 9-13.

Çinlar, E. (1975) *Introduction to Stochastic Processes*. Prentice-Hall.

Deshpande, J.V., Kochar, S.C. y Singh, H. (1986). Aspects of Positive Ageing, *J. Appl. Prob.*, **23**, 748-758.

Epps, T.W. y Pulley, L.B. (1986). A Test of Exponentiality vs. Monotone-hazard Alternatives Derived from the Empirical Characteristic Function, *J. R. Statist. Soc. B*, **48**, 206-213.

Epstein, B. y Sobel, M. (1953). Life Testing, *Journal of the American Statistical Association*, **48**, 486-502.

Esary, J.D., Marshall, A.W. y Proschan, F. (1973). Shock Models and Wear Processes, *Ann. Prob.*, **1**, 627-649.

Esary, J.D. y Marshall, W. (1979). Multivariate Distributions with Increasing Hazard Rate Average, *Ann. Prob.*, **7**, 359-370.

Fagioli, E. y Pellerey, F. (1994). Mean Residual Life and Increasing Convex Comparison of Shock Models, *Stat. & Prob. Letters*, **20**, 337-345.

Feller, W. (1966). *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, J. Wiley, Vol.1.

Gámiz Pérez, M.L. (1993). Clasificación de Procesos Usados en Modelos de Fallo y Desgaste, *Tesina de Licenciatura*. Universidad de Granada.

Gertsbakh, I.B. (1989). *Statistical Reliability Theory*. Marcel Decker Inc.

Gosh, M. y Ebrahimi, N. (1982). Shock Models Leading to Increasing Failure Rate and Decreasing Mean Residual Life Survival, *J. Appl. Prob.*, **19**, 158-166.

Gosh, M. y Ebrahimi, N. (1983). Shock Models Leading To Multivariate NBU and NBUE Distributions. In: P.K. Sen (Ed.), *Contributions to Statistics*. North-Holland, Amsterdam, 175-184.

Gottlier, G. (1980). Failure Distributions of Shock Models, *J. Appl. Prob.*, **17**, 745-752.

Griffith, W. y Srinivasan, C. (1985). A Note on Survival Models Under a Markov Process, *J. Appl. Prob.*, **22**, 982-988.

Guess, F., Hollander, M. y Proschan, F. (1986). Testing Exponentiality versus a Trend Change in Mean Residual Life, *Ann. Statist.*, **14**, 1388-1398.

Haines, A. y Singpurwalla, N.D. (1974). Some Contributions to the Stochastic Characterization of Wear, In *Reliability and Biometry*, Ed. F. Proschan and R.J. Serfling, 47-80. SIAM.

Hendi, M.I., Mashhour, A.F. y Montasser, M.A. (1993). Closure of the NBUC Class Under Formation of Parallel Systems, *J. Appl. Prob.*, **30**, 975-978.

Heyde, C.C. (1963). On a property of the lognormal distribution, *J. R. Statist. Society*, **25**, 392-393.

Hollander, M. Park, D.H. y Proschan, F. (1986). A Class of Life Distributions for Aging, *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 91-95.

Karasu, I. y Özekici, S. (1989). NBUE and NWUE Properties of Increasing Markov Processes, *J. Appl. Prob.* **27**, 827-834.

Klefsjö, B. (1980). Some properties of the HNBUE and HNWUE classes of life distributions. Research Report 1980-8. Dept. of Mathematical Statistics, Univ. of Ulea. Sweden.

Klefsjö, B. (1981a). Survival Under the Pure Birth Shock Model, *J. Appl. Prob.*, **18**, 554-560.

Klefsjö, B. (1981b). HNBUE Survival Under Some Shock Models, *Scand. J. Statist.*, **8**, 39-47.

Klefsjö, B. (1981c). On Aging Properties and Total Time on Test Transforms, *Scand. J. Statist.*, **9**, 37-41.

Klefsjö, B. (1982). The HNBUE and HNWUE Classes of Life Distributions, *Naval Res. Log. Quart.*, **29**, 331-344.

Klefsjö, B. (1983a). A Useful Ageing Property Based on the Laplace Transform, *J. Appl. Prob.*, **20**, 615-626.

Klefsjö, B. (1983b). Some Tests against Aging Based on the Total Time

on Test Transform, *Commun. Statist.-Theor. Meth.*, **12**, 907-927.

Klefsjö, B. (1984). Reliability Interpretations of Some Concepts from Economics, *Nav. Res. Logist. Quart.*, 301-308.

Kochar, S.C. y Gupta, R.P. (1987). Some Results on Weighted Distributions for Positive-valued Random Variables, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **1**, 417-423.

Kochar, S.C. (1990). On Preservation of Some Partial Orderings under Shock Models, *Adv. Appl. Prob.*, **22**, 508-509.

Koul, H.L. y Susarla, V. (1980). Testing for Hew Better than Used in Expectation with Incomplete Data, *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 952-956.

Kovats, A. y Mori, T.F. (1992). Ageing Properties of Certain Dependent Geometric Sums, *J. Appl. Prob.*, **29**, 655-666.

Kumazawa, Y., (1983). A Class of Test Statistics for Testing Whether New is Better than Used, *Commun. Statist.-Theor. Meth.*, **12**, 311-321.

Kunchur, S.H. y Munoli S.B. (1993). Estimation of Reliability in a Shock Model for a Two Component System, *Stat. & Prob. Letters*, **17**, 35-38.

Lam, C.Y.T. (1992). New Better than Used in Expectation Processes, *J. Appl. Prob.* **29**, 116-128.

Langberg, N.A., León, R.V. y Proschan, F. (1980). Characterization of Nonparametric Classes of Life Distributions, *Ann. Prob.*, **8**, 1163-1170.

Loh, W.-Y. (1984). A New Generalization of the Class of NBU Distributions, *IEEE Trans. Reliab.*, **33**, 419-423.

Marshall, A.W. y Proschan, F. (1972). Classes of Distributions Applicable in Replacement with Renewal Theory Implications, *Proc. 6th Berkeley Sym. Statist. Prob.*, 395-415.

Marshall, A.W. y Shaked, M. (1979). Multivariate Shock Models for Distributions with Increasing Hazard Rate Average, *Ann. Prob.*, **7**, 343-359.

Marshall, A.W. y Shaked, M. (1983). New Better than Used Processes, *Adv. Appl. Prob.* **15**, 601-615.

Marshall, A.W. y Shaked, M. (1986a). Multivariate New Better than Used Distributions, *Math. Op. Res.*, **11**, 110-116.

Marshall, A.W. y Shaked, M. (1986b). NBU Processes with General State Space, *Math. Op. Res.*, **11**, 95-109.

Mukherjee, S.P. y Chatterjee, A. (1993). In: A.P. Basu (Ed.), *Advances in Reliability*, North Holland, Amsterdam, 281-290.

Neath, A.A. y Samaniego, F.J. (1992). On the Total Time on Test Transform of an IFRA Distribution, *Stat. & Prob. Letters*, **14**, 189-291.

Parzen, E. (1962). *Stochastic Processes*. Holden-Day, San Francisco.

Pellerey, F. (1993). Partial Orderings Under Cumulative Damage Shock Models, *Adv. Appl. Prob.*, **25**, 939-946.

Pellerey, F. (1994). Shock Models with Underlying Counting Process, *J. Appl. Prob.*, **31**, 156-166.

Pérez Ocón, R. y Gámiz Pérez, M.L. (1995a). Conditions on the Arrival Process to Obtain HNBUE Survival Using a Shock Model, *Comm. Statist. A-Theory-Methods*, **24**, Issue 4, (por aparecer)

Pérez Ocón, R. y Gámiz Pérez, M.L. (1995b). On First-Passage Times in Increasing Markov Processes, *Stat. & Prob. Letters*, (por aparecer).

Pham, T.G. y Turkkan, N. (1994). The Lorenz and the Scaled Total-Time-on-Test Transform Curves: A Unified Approach, *IEEE Trans. Reliab.*, **43**, 76-83.

Ringler, J. (1988). Sur un Petit Problème Pratique d'estimation en Fiabilité, *Rev. Statistique Appliquée*, **XXXVI** (4), 25-32.

Rolski, T. (1975). Mean Residual Life, *Bulletin of the International Statistical Institute*, **46**, 266-270.

Ross, S.M. (1981). Generalized Poisson Shock Models, *Ann. Prob.*, **9**, 896-898.

Ross, S.M. (1983). *Stochastic Processes*. Wiley and Sons, Inc.

Savits, T.H. (1984). Multivariate Life Classes and Inequalities. In: Y.L. Tong (Ed.), *Inequalities in Statistics and Probability*, IMS Lecture Notes-Monograph Series. IMS, Hayward, CA 193-198.

Sen, P.K. (1986). The Gini Coefficient and Poverty Indexes: Some Reconciliations, *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 1050-1057.

Sengupta, D. (1994). Another Look at the Moment Bounds on Reliability, *Applied Probability Trust*, 777-787.

Shaked, M. y Shanthikumar, J.G. (1987). IFRA Properties of Some Markov Jump Processes with General State Space, *Math. Operat. Res.* **12**, 562-568.

Shaked M. y Shanthikumar, J.G. (1988). On the First-Passage Times of Pure Jump Processes, *J. Appl. Prob.*, **25**, 501-509.

Shaked, M. y Shanthikumar, J.G. (1990). Reliability and Maintainability. In: D.P. Heyman y M.J. Sobel (Eds.), *Handbooks in OR & MS*, Vol. 2. North Holland, 653-713.

Shanthikumar, J.G. (1984) Processes with New Better than Used First-Passage Times, *Adv. Appl. Prob.*, **16**, 667-686.

Shanthikumar, J.G. y Yao, D.D. (1986). The Preservation of Likelihood

Ratio Ordering Under Convolution, *Stoch. Proc. Appl.*, **23**, 259-267.

Shanthikumar, J.G. (1988). DFR Property of First-Passage Times and Its Preservation Under Geometric Compounding, *Ann. Prob.*, **1**, 397-406.

Shanthikumar, J.G. y Sumita, U. (1983). General Shock Models Associated with Correlated Renewal Sequences, *J. Appl. Prob.*, **20**, 600-614.

Shanthikumar, J.G. y Sumita, U. (1984). Distribution Properties of The System Failure Time in a General Shock Model, *Adv. Appl. Prob.*, **16**, 363-377.

Shanthikumar, J.G. y Yao, D.D. (1991). Bivariate Characterization of Some Stochastic Order Relations, *J. Appl. Prob.*, **23**, 642-659.

Singh, H. y Deshpande, J.V. (1985). On Some New Ageing Properties, *Scand. J. Statist.*, **12**, 213-220.

Singh, H. y Jain, K. (1989). Preservation of Some Partial Ordering Under Poisson Shock Models, *J. Appl. Prob.*, **21**, 713-716.

Stein, W.E., Dattero, R. y Pfaffenberger, R.C. (1984). Inequalities Involving the Lifetime of Series and Paraller Systems, *Naval Res. Log. Quart.*, **31**, 647-651.

Sumita, U. y Shanthikumar, J.G. (1985). A Class of Correlated Cumulative Shock Models. *Adv. Appl. Prob.* **17**, 347-366.

Zahedi, H. (1985). Some New Classes of Multivariate Survival Distribution Functions. *J. Statist. Plann. Inference*, 11, 171-188.