ESTRUCTURA EXTREMAL DE LA BOLA UNIDAD EN ESPACIOS DE BANACH

Juan Carlos Navarro Pascual

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada
1994

A la memoria de mi hermano Antonio

Aún hoy, querido hermano, me alienta
el estímulo y la nobleza con que
siempre nos trataste

CONTENIDO

Introducción .... *i*

I Propiedades extremales de la bola unidad **1**
Generalidades 1
λ-Propiedad 7
λ-Función en l_p-sumas de espacios normados 16

II Puntos extremos y propiedad de extensión **29**
Isometrías entre espacios de funciones continuas 32
λ-Propiedad en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ 36
Propiedad de extensión 42
Dimensión topológica 54

III Estructura extremal de la bola unidad en espacios de funciones continuas **66**
Aplicaciones entre esferas 68
Propiedad de extensión y funciones que omiten el origen 73
Representación extremal de funciones continuas 76
La propiedad de Bade en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ 99

IV Espacios de sucesiones convergentes **106**
λ-Propiedad en $c(\mathcal{X})$: condiciones necesarias 107
λ-Propiedad en $c(\mathcal{X})$: condiciones suficientes 115
Estabilidad por paso a l_1-sumas 129

Algunas cuestiones y problemas abiertos **135**

Bibliografía **139**

INTRODUCCION

Hacia 1911, H. Minkowski ([36]) introduce el concepto de punto extremo y obtiene el primer resultado relativo a la estructura extremal de un conjunto convexo:

Todo subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^3$ *coincide con la envolvente convexa del conjunto de sus puntos extremos.*

Posteriormente, Carathéodory consigue una formulación más general y precisa:

Si C *es un subconjunto convexo y compacto de* $\mathbb{R}^n$*, todo punto de* C *es combinación convexa de, a lo sumo,* $n+1$ *puntos extremos de* C.

Transcurrirán varias décadas hasta que haga su aparición la generalización más importante del teorema de Minkowski-Carathéodory. Se trata, naturalmente, del teorema de Krein-Milman ([27]) publicado en 1940 y enseguida considerado como un clásico en el ámbito del Análisis Funcional.

A partir del teorema de Krein-Milman el estudio de los puntos extremos de conjuntos convexos cobra importancia y se convierte en un tema de investigación muy productivo y vigente hasta nuestros días. La propiedad de Krein-Milman, actualmente en pleno apogeo, así como su relación con la no menos interesante propiedad de Radon-Nikodym ([13] y [16]) son claros ejemplos de la trascendencia que el citado teorema ha conferido al tema que nos ocupa.

En muchos casos, el interés se ha centrado en un subconjunto muy concreto y característico de los espacios de Banach, su bola unidad.

El objetivo de numerosos trabajos de investigación ha sido precisamente la caracterización de los puntos extremos de la bola unidad en espacios de Banach clásicos. Uno de los resultados más representativos en este sentido lo constituye el teorema de Arens-Kelley ([4]) que describe los puntos extremos de la bola unidad del dual de los espacios de funciones reales continuas definidas en un espacio compacto Hausdorff, posteriormente extendido al caso de funciones complejas.

La consideración de los puntos extremos de la bola del dual de un espacio de Banach suele ser útil para probar resultados de indudable relevancia. Así, el teorema de Arens-Kelley posibilitó (como una de sus más brillantes aplicaciones) una nueva demostración del teorema de Banach-Stone, según el cual dos espacios de funciones continuas (reales o complejas) son isométricamente isomorfos si, y sólo si, los espacios compactos Hausdorff subyacentes son homeomorfos (véase [4] y también [20], teorema V 8.8).

Con objeto de entrar cuanto antes en el contenido y objetivos de la presente memoria necesitamos introducir los conceptos que detallamos a continuación:

Salvo especificación en contra, $\mathcal{X}$ denotará en lo sucesivo un espacio normado (no cero) sobre $\mathbb{R}$. Los símbolos $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ representarán la bola unidad cerrada y la esfera unidad de $\mathcal{X}$, respectivamente. Además, $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ será el conjunto de los puntos extremos de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Recordemos que $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo si $\mathcal{E}(\mathcal{X}) = \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Es conveniente advertir que una parte de la nomenclatura que usaremos ha venido impuesta por necesidades del lenguaje y no aparece en la literatura. Tal es el caso de la propiedad que sigue:

Diremos que $\mathcal{X}$ tiene la *propiedad de representación convexa* (P.R.C.) si $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = co(\mathcal{E}(\mathcal{X}))$.

Es digno de mencionar que todo espacio normado estrictamente convexo posee la P.R.C.. De hecho, todo punto de su bola unidad es combinación convexa de dos puntos extremos. Señalemos además que ciertos espacios de operadores y de funciones continuas gozan también de esta propiedad.

Recientemente, Aron y Lohman ([5]) han introducido el concepto de espacio de Banach que verifica la λ-propiedad. De alguna manera, esta noción, expresa la abundancia de puntos extremos en la bola unidad.

Dados $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, notemos

$$\lambda(e,x) = Sup\ \{\alpha \in [0,1] : \exists\ y \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ con } x = \alpha e + (1-\alpha)y\}.$$

Se dice que $\mathcal{X}$ tiene la *λ-propiedad* si, para todo $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, existe $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\lambda(e,x) > 0$, en cuyo caso se define la *λ-función* asociada a $\mathcal{X}$ mediante la expresión:

$$\lambda(x) = \text{Sup}\ \{\lambda(e,x) : e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})\},\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Si, además, $Inf\ \{\lambda(x) : x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\} > 0$, se dice que $\mathcal{X}$ tiene la *λ-propiedad uniforme*.

Merece la pena señalar que la λ-propiedad es equivalente (véase [6]) a otra propiedad de representación convexa que aparece ocasionalmente en algunas referencias, aunque sin ser objeto de un tratamiento sistemático. Se trata de la denominada *propiedad de representación en series convexas* (P.R.S.C.), consistente en la posibilidad de expresar todo punto de la bola unidad como suma de una serie convexa infinita de puntos extremos.

La memoria que presentamos se vertebra, en principio, en torno a la λ-propiedad, que analizaremos con detalle en el capítulo II para espacios de funciones continuas. Los resultados obtenidos en este capítulo serán la clave para profundizar en la estructura extremal de los espacios de funciones continuas y caracterizar la P.R.C. en tales espacios, tarea que se llevará a cabo en el capítulo III.

Pasamos, pues, a detallar, por capítulos, el contenido de la memoria.

En el capítulo I (de carácter introductorio) presentamos todos los conceptos que hemos comentado y estudiamos la relación entre ellos así como sus propiedades más relevantes. Con la intención de disponer de suficientes ejemplos con los que contrastar toda la exposición, llevamos a cabo un estudio de la estabilidad de la λ-propiedad y de la λ-propiedad uniforme respecto de las l_p-sumas. Aparece aquí una primera aportación novedosa que consiste en la determinación de la λ-función en l_1-sumas de espacios normados (corolario 1.18), resolviendo así un problema planteado en [5] (cuestión 4.2).

El objetivo principal del capítulo II es caracterizar la λ-propiedad (uniforme) en espacios de funciones continuas y acotadas de un espacio topológico $\mathcal{T}$ en un espacio normado estrictamente convexo $\mathcal{X}$, que notaremos por $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. El logro de este objetivo motivó la introducción de la siguiente propiedad topológica que involucra a los espacios $\mathcal{T}$ y $\mathcal{X}$:

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico y $\mathcal{X}$ un espacio normado. Se dice que el par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la *propiedad de extensión* si, para cada $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ continua tal que $f^{-1}(\mathcal{S}(\mathcal{X})) \neq \emptyset$ existe $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ continua tal que

$$g(t) = f(t),\ \forall\ t \in f^{-1}(\mathcal{S}(\mathcal{X})).$$

Una vez precisada esta importante propiedad, podemos ya enunciar el resultado esencial de este capítulo (teorema 2.8):

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico y $\mathcal{X}$ un espacio normado estrictamente convexo. Para $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\mathcal{Y}$ *tiene la λ-propiedad uniforme.*

ii) $\mathcal{Y}$ *tiene la λ-propiedad.*

iii) *El par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión.*

El resto del capítulo se dedica a un exhaustivo estudio de la propiedad de extensión. En una primera aproximación se observa un comportamiento diverso según que la dimensión de $\mathcal{X}$ sea o no finita. En concreto, la propiedad de extensión permite caracterizar la dimensión de $\mathcal{X}$ del siguiente modo:

Un espacio normado $\mathcal{X}$ es infinito-dimensional si, y sólo si, $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión, cualquiera que sea el espacio topológico $\mathcal{T}$.

Si $\mathcal{X}$ es de dimensión finita, la propiedad de extensión impone ciertas restricciones sobre las dos componentes del par. Una formulación precisa de este tipo de restricciones requiere la noción de "dimensión topológica", introducida en el ámbito de los espacios topológicos completamente regulares y que extiende la dimensión de los espacios euclídeos. Más precisamente, si denotamos por *dim* $\mathcal{T}$ la dimensión topológica de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{X}$ es un espacio n-dimensional, se verifica que

$\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión si, y sólo si,* $\dim \mathcal{T} \leq n$-1.

Teniendo en cuenta todo lo antedicho, obtenemos los siguientes resultados:

a) *Sea* $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo e infinito-dimensional, entonces* $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

b) *Sea* $\mathcal{T}$ *un espacio completamente regular y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo* n*-dimensional. Equivalen:*

i) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

ii) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

iii) dim $\mathcal{T} \leq$ n-1.

La parte a) fue obtenida por Aron y Lohman en [5] (teorema 1.6) para $\mathcal{T}$ métrico compacto. De los apartados a) y b) se sigue, en particular, que $\mathcal{C}([0,1],\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme, para $\mathcal{X}$ estrictamente convexo de dimensión mayor o igual que 2, lo cual constituye el teorema 1.9 de [5]. Por último, se obtiene de b) que, si $\mathcal{T}$ es compacto Hausdorff, $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ tiene la P.R.S.C. si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es cero-dimensional. Este resultado fue probado en [42] (teorema 4) y, posteriormente, en [39].

Pasamos a describir brevemente el contenido del capítulo III que, en nuestra opinión, contiene los resultados más interesantes de la memoria.

En este capítulo pretendemos caracterizar la P.R.C. en espacios $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. Algunos resultados previos, que comentaremos más adelante, nos sugirieron que la propiedad de extensión habría de caracterizar, no sólo la λ-propiedad, sino también la P.R.C. en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$, excluyendo, por razones obvias, el caso *dim* $\mathcal{X} = 1$. Para lograr nuestro objetivo, ha sido necesario probar algunos resultados de indudable interés intrínseco, como la existencia de aplicaciones continuas de la esfera unidad de cualquier espacio de Banach infinito-dimensional en sí misma que no tienen puntos fijos ni transforman punto alguno en su opuesto. Con esta y otras técnicas bastante laboriosas, conseguimos demostrar el siguiente enunciado (corolario 3.12):

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo con* $\dim \mathcal{X} \geq 2$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*:

i) $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

ii) $\mathcal{Y}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

iii) $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathrm{co}(\mathcal{E}(\mathcal{Y}))$.

iv) *El par* $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión.*

Y, en caso afirmativo, todo punto de $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$ *se expresa como media de ocho puntos extremos.*

Merece la pena señalar que nuestro, recién presentado, corolario 3.12 unifica el tratamiento de la estructura extremal en espacios de funciones continuas. De hecho, es el primer resultado que no requiere el uso de distintas técnicas según que $\mathcal{X}$ sea finito o infinito-dimensional.

Los datos que hemos facilitado sobre la propiedad de extensión en el resumen del capítulo II son suficientes para comprender las siguientes consecuencias del resultado anterior:

a) *Sea* $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo e infinito-dimensional. Entonces,*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathrm{co}(\mathcal{E}(\mathcal{Y})), \quad \textit{siendo} \quad \mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X}).$$

b) *Sea* $\mathcal{T}$ *un espacio completamente regular y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo* n-*dimensional. Equivalen:*

i) $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

ii) $\mathcal{Y}$ *tiene la* λ*-propiedad.*

iii) $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathrm{co}(\mathcal{E}(\mathcal{Y}))$

iv) $\dim \mathcal{T} \leq n-1$.

El apartado a) fue obtenido en [42] (teorema 5) para $\mathcal{T}$ compacto Hausdorff. La equivalencia entre iii) y iv) en el apartado b) fue probada en la misma referencia (teoremas 2 y 3) siendo $\mathcal{X}$ un espacio de Hilbert de dimensión finita par. En [15] (teorema II) se demuestra un resultado análogo pero, esta vez, para $\mathcal{X}$ espacio de Hilbert n-dimensional, con $n \geq 2$.

El siguiente objetivo en este capítulo es demostrar que si $\mathcal{X}$ es de dimensión infinita o de dimensión finita par, el número de puntos extremos de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ necesarios para expresar cualquier punto de la bola unidad puede rebajarse de ocho a cuatro. Más concretamente, probamos:

a) *Sea* $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo e infinito-dimensional. Entonces:*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{4}\big(\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})\big).$$

b) *Sea* $\mathcal{T}$ *un espacio topológico completamente regular y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo* 2n*-dimensional. Son equivalentes:*

i) $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{4}\big(\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})\big).$

ii) $\dim \mathcal{T} \leq 2n-1$.

Destacamos una bonita consecuencia (corolario 3.20), que es, de hecho, una formulación equivalente de la parte a):

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo e infinito-dimensional. Entonces existen cuatro retracciones* e_1, e_2, e_3, e_4 *de la bola unidad de* $\mathcal{X}$ *sobre la esfera unidad de* $\mathcal{X}$ *tales que*

$$x = \frac{1}{4}(e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) + e_4(x)), \ \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Permítasenos señalar que los enunciados probados en este capítulo generalizan todos los resultados conocidos acerca de la λ-propiedad o la P.R.C. en espacios $\mathcal{E}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ (con *dim* $\mathcal{X} \neq 1$). Además, tienen consecuencias que no pueden derivarse de ninguno de tales resultados. Este es el caso del corolario 3.20, cuyo contenido acabamos de expresar. Con relación al caso *dim* $\mathcal{X} = 1$ hemos de decir que la información que ofrece el teorema 2.8 (anteriormente comentado) es, en cierto sentido, la máxima posible.

El capítulo III llega a su término con la demostración de un resultado (teorema 3.23), parcialmente conocido, que obtenemos como aplicación sencilla de las técnicas desarrolladas. Concretamente probamos:

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo de dimensión distinta de uno. Entonces:*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \overline{\text{co}}(\mathcal{E}(\mathcal{Y})), \quad \textit{siendo} \quad \mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$$

La convexidad estricta de $\mathcal{X}$ ha sido una condición permanente a lo largo de los capítulos II y III. Esta hipótesis permite una cómoda descripción de los puntos extremos de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. No obstante, la importancia de la citada condición no se reduce a la mera caracterización de dichos puntos. Este hecho se pondrá de manifiesto en el capítulo IV en el que se intenta una primera aproximación a la estructura extremal de los espacios del tipo $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ sin exigir que $\mathcal{X}$ sea estrictamente convexo. Este estudio se lleva a cabo restringiendo nuestra atención al caso $\mathcal{T} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la compactificación de Alexandroff de los naturales. A pesar de que, en tales circunstancias, también se dispone de una descripción sencilla de los puntos extremos, la dificultad de no contar con la estricta convexidad de $\mathcal{X}$ nos ha impedido caracterizar la λ-propiedad en este tipo de espacios, por lo que sólo obtenemos resultados parciales sobre condiciones que fuerzan la λ-propiedad o que vienen forzadas por ésta. De manera usual, el espacio $\mathcal{C}(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\mathcal{X})$ se identifica con $c(\mathcal{X})$, el espacio de las sucesiones convergentes de elementos de $\mathcal{X}$ con la norma del supremo. Los principales resultados de este capítulo se pueden resumir como sigue:

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado.*

i) *Si* $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad (rep. uniforme), entonces* $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme).*

ii) *Si* $\dim \mathcal{X} < \infty$ *y* $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad, entonces* $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ *es cerrado.*

iii) *Si* $\lambda(x) = \dfrac{1+\|x\|}{2}, \ \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *(en particular, si* $\mathcal{X}$ *es estrictamente convexo), entonces* $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

iv) *Si* $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme) y, para todo* $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$*, la aplicación* $x \longmapsto \lambda(e,x)$ *de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *en* $[0,1]$ *es continua, entonces* $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme). En particular, si* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *es un poliedro, entonces* $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

v) $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad si, y sólo si* $c(l_1(\mathcal{X}))$ *tiene la* λ*-propiedad.*

Antes de finalizar esta introducción hemos de señalar que una parte del contenido de los capítulos II y III será objeto de publicación independiente en [12], fruto de nuestra colaboración con el profesor V.I. Bogachev. Del mismo modo, algunos resultados del capítulo III quedan recogidos en [35]. Por otra parte, en [34], fue publicada una primera versión de los resultados obtenidos en el capítulo IV.

Quiero, finalmente, manifestar mi gratitud:

En primer lugar, y de manera muy especial, al director de esta memoria, profesor Juan Francisco Mena Jurado, a quien deseo expresar mi admiración y respeto por la calidad profesional y humana que ha mostrado a lo largo de todos estos años. Su dedicación y entrega, materializadas en brillantes sugerencias y orientaciones, han hecho posible la culminación de este trabajo.

Al profesor Rafael Payá Albert, quien nos sugirió, en un primer momento, el tema que hemos desarrollado, como posible línea de investigación y al profesor V.I. Bogachev, cuya colaboración ha resultado muy valiosa para la realización de esta memoria.

Y a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada y del Departamento de Algebra y Análisis Matemático de la Universidad de Almería por su constante apoyo y estímulo. Especialmente, al profesor Pedro Jiménez Garijo, quien orientó mis primeros pasos hacia la investigación en el ámbito universitario y al profesor Antonio Lirola Terrez, quien, de manera desinteresada, ha procesado las figuras geométricas que aparecen en esta memoria.

Juan Carlos Navarro Pascual

Almería, mayo de 1994

CAPITULO I

PROPIEDADES EXTREMALES DE LA BOLA UNIDAD

GENERALIDADES

En lo sucesivo $\mathcal{X}$ denotará, salvo mención en contra, un espacio normado (no trivial) sobre $\mathbb{R}$. Ello sólo es restrictivo formalmente, toda vez que los resultados que expondremos en la presente memoria, aunque válidos también en el caso complejo, son propiedades que afectan tan sólo al espacio real subyacente. Si $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son espacios normados $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ expresará el espacio de todas las aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$; escribiremos $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ en lugar de $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{X})$. El símbolo $\mathcal{X}^*$ denotará, como es costumbre, el espacio de Banach dual de $\mathcal{X}$. Notaremos

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq 1\}$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{X}) = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| = 1\}$$

y nos referiremos a estos conjuntos con el nombre de bola unidad y esfera unidad de $\mathcal{X}$, respectivamente. Por otra parte, si A es un subconjunto de $\mathcal{X}$, $co(A)$ (resp. $\overline{co}(A)$) representará la envolvente convexa (resp. convexo-cerrada) del conjunto A.

La noción de punto extremo, que precisamos a continuación, aparece por vez primera en un trabajo de H. Minkowski publicado en 1911 (véase [36]). Se trata de un concepto básico y muy conocido, pero dado que será el centro de atención en esta memoria es conveniente fijarlo desde el principio.

1.1 DEFINICION.

Sea C *un subconjunto convexo de* $\mathcal{X}$. *Se dice que* $e \in C$ *es un punto extremo de* C *si dados* $\lambda \in]0,1[$ *y* $x,y \in C$ *tales que* $e = \lambda x + (1-\lambda)y$ *se verifica que* $e = x = y$.

Así pues, de forma más intuitiva, $e \in C$ es un punto extremo de C si e no pertenece al interior de ningún segmento contenido en C; equivalentemente, si $C \setminus \{e\}$ es convexo.

La siguiente caracterización de los puntos extremos es inmediata pero suele resultar de gran utilidad.

1.2. PROPOSICION.

Sea C *un subconjunto convexo de* $\mathcal{X}$ *y* $e \in C$. *Equivalen:*

i) e *es un punto extremo de* C

ii) $x,y \in C, \quad e = \frac{1}{2}(x+y) \quad \Rightarrow \quad e = x = y$

iii) $x \in \mathcal{X}, \quad e+x, e-x \in C \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

La existencia y caracterización de los puntos extremos, por una parte, y la posibilidad de representar cualquier punto de un cierto conjunto a través de ellos, por otra, han sido problemas que han motivado la realización de numerosos trabajos, algunos de ellos convertidos en auténticos pilares del Análisis Funcional. Como primer resultado en este sentido, Minkowski, en la referencia ya precisada, prueba que si C es un subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^3$, todo punto de C puede expresarse como combinación convexa de puntos extremos. Esto es, dado $x \in C$ existen $n \in \mathbb{N}$, $e_1,\dots,e_n$, puntos extremos de C y $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in [0,1]$ con $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ tales que $x = \sum_{K=1}^{n} \lambda_k e_k$. Este hecho, conocido en $\mathbb{R}^n$ como teorema de Minkowski, fue mejorado por Carathéodory en los siguientes términos:

1.3 TEOREMA (Minkowski-Carathéodory).

Sea n *un natural y* C *un subconjunto convexo y compacto de* $\mathbb{R}^n$. *Entonces, todo punto de* C *puede expresarse como combinación convexa de, a lo sumo,* n+1 *puntos extremos.*

Una demostración puede encontrarse en [41] donde además se incluye una aplicación a la teoría de matrices doblemente estocásticas.

Casi no es preciso mencionar que en el teorema anterior se puede sustituir $\mathbb{R}^n$ por cualquier espacio normado n-dimensional.

La más brillante generalización del resultado anterior a espacios infinito-dimensionales fue obtenida en 1940 por M. Krein y D. Milman. Concretamente, probaron que todo subconjunto convexo y compacto de cualquier espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff coincide con la envolvente convexo-cerrada del conjunto de sus puntos extremos.

Si $\mathcal{X}$ es un espacio normado, se tiene, como consecuencia del teorema de Krein-Milman (y del teorema de Banach-Alaoglú que establece la compacidad w* de la bola del dual de todo espacio normado) que $B(\mathcal{X}^*)$ es la envolvente convexa y w*-cerrada del conjunto de sus puntos extremos. Así pues, un espacio normado cuya bola unidad no posea puntos extremos no es (isométricamente isomorfo a) un espacio dual. Hechos como este ponen de manifiesto la transcendencia del teorema de Krein-Milman. Victor Klee señala en [26] que la importancia del estudio de puntos extremos reside en dos razones fundamentales, el teorema de Krein-Milman y el principio de Bauer, según el cual, toda función (real) cóncava e inferiormente semicontinua (resp. convexa y superiormente semicontinua), definida en un subconjunto convexo y compacto C de un espacio localmente convexo Hausdorff, alcanza su mínimo (resp. máximo) en un punto extremo de C.

El teorema de Krein-Milman ha suscitado una interesante propiedad que lleva este mismo nombre y que ha captado el interés de numerosos investigadores. Un espacio normado $\mathcal{X}$ tiene la propiedad de Krein-Milman si cada subconjunto convexo, cerrado y acotado de $\mathcal{X}$ es la envolvente convexo-cerrada de sus puntos extremos. Esta propiedad es objeto de estudio hoy día y, en particular, su relación con la (igualmente interesante) propiedad de Radon-Nikodym (véase [13] y [16]).

No obstante, el estudio que aquí haremos sobre puntos extremos estará referido a un subconjunto muy concreto de los espacios normados, su bola unidad. Ello da un carácter intrínsecamente geométrico a las propiedades que abordaremos (nada, como la bola unidad, depende tan directamente de la norma).

Si $\mathcal{X}$ es un espacio normado $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ denotará el conjunto de los puntos extremos de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

Los resultados comentados con anterioridad motivan la definición que sigue.

1.4 DEFINICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado. Diremos que* $\mathcal{X}$ *tiene la propiedad de representación convexa* (P.R.C.) *si*

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \mathrm{co}(\mathcal{E}(\mathcal{X})).$$

Así pues, si $\mathcal{X}$ tiene la P.R.C., dado $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, es posible encontrar un natural n, escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in [0,1]$ con $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ y $e_1,\ldots,e_n$ en $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ tales que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Además, diremos que $\mathcal{X}$ *tiene la propiedad de Bade si*

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{E}(\mathcal{X})).$$

Evidentemente la P.R.C. implica la propiedad de Bade. La afirmación recíproca no es cierta. Al final del presente capítulo aclararemos convenientemente la relación entre éstas y otras propiedades que iremos introduciendo.

Del propio teorema 1.3 se deduce que todo espacio normado de dimensión finita tiene la P.R.C.. Seguidamente recordaremos un concepto que introduce toda una gama de espacios normados (no necesariamente de dimensión finita) que poseen la citada propiedad. Además, tales espacios, desempeñarán un importante papel en los siguientes capítulos.

1.5 DEFINICION.

Un espacio normado $\mathcal{X}$ *se dice estrictamente convexo si* $\mathcal{E}(\mathcal{X}) = \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Nótese que, en general, $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Existen muchas caracterizaciones de la estricta convexidad, como puede verse, por ejemplo, en [25]. El enunciado que sigue ofrece una caracterización en términos de la norma, con independencia del concepto de punto extremo:

1.6 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado. Entonces,* $\mathcal{X}$ *es estrictamente convexo si, y sólo si, dados* $x,y \in \mathcal{X}$ *tales que* $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$ *existe* $\rho \geq 0$ *tal que* $x = \rho y$ *ó* $y = \rho x$.

En consecuencia, si $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo y $x,y \in \mathcal{X}$ no son colineales entonces $\|x+y\| < \|x\|+\|y\|$.

Todo espacio normado estrictamente convexo tiene la P.R.C.. En efecto, dado x en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ con $x \neq 0$ se tiene que

$$x = \frac{1+\|x\|}{2}\frac{x}{\|x\|} + \frac{1-\|x\|}{2}\left(-\frac{x}{\|x\|}\right)$$

y además $0 = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}(-e)$ cualquiera que sea $e \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$. Por tanto, todo punto de la bola unidad de $\mathcal{X}$ es combinación convexa de dos puntos extremos.

Entre los espacios estrictamente convexos cabe destacar los espacios de Hilbert y los espacios $L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ $(1 < p < \infty)$ y, en particular, los espacios de sucesiones l_p . Todos ellos tienen, en consecuencia, la P.R.C..

Otra importante gama de espacios (no estrictamente convexos) con esta propiedad es la constituida por los espacios $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert complejo (véase [23], problema 107).

λ-PROPIEDAD

Dedicamos este apartado a la propiedad geométrica que captó inicialmente nuestra atención y nos introdujo en el estudio de la estructura extremal de los espacios normados. Toda la exposición está vertebrada, como podrá apreciarse, en torno a dicha propiedad, pese a que, en el capítulo III perderá su protagonismo en favor de la P.R.C.. Intuitivamente, un espacio normado tiene la λ-propiedad si todo punto de su bola unidad pertenece a un segmento determinado por un punto extremo y algún otro punto de la bola.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado y e un punto extremo de la bola unidad de $\mathcal{X}$. Para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ se define

$$\lambda(e,x) = Sup \{\alpha \in [0,1] : \exists\, y \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ con } x = \alpha e + (1-\alpha)y\}.$$

Esta notación fue introducida en [5]. Aportamos aquí una sencilla reformulación que nos permitirá clarificar algunos resultados posteriores.

1.7 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado,* $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ *y* $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. *La función*

$$\alpha \longmapsto \alpha + \|x-\alpha e\|$$

es no decreciente y

$$\lambda(e,x) = \text{Max}\{\alpha \geq 0 : \alpha + \|x-\alpha e\| \leq 1\}$$

DEMOSTRACION:

Sean α_1 y α_2 números reales tales que $\alpha_1 < \alpha_2$. Entonces

$$\|x-\alpha_2 e\| = \|x-\alpha_1 e - (\alpha_2-\alpha_1)e\| \geq \|x-\alpha_1 e\| - (\alpha_2-\alpha_1)$$

de donde

$$\alpha_2 + \|x-\alpha_2 e\| \geq \alpha_1 + \|x-\alpha_1 e\|.$$

Sean

$$A = \{\alpha \in [0,1] : \exists\ y \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ con } x = \alpha e + (1-\alpha)y\} \quad \text{y}$$

$$B = \{\alpha \geq 0 : \alpha + \|x-\alpha e\| \leq 1\}.$$

Dado $\alpha \in A$ existe $y \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $x = \alpha e + (1-\alpha)y$, luego

$$\|x-\alpha e\| = (1-\alpha)\|y\| \leq 1-\alpha \quad \text{y así} \quad \alpha + \|x-\alpha e\| \leq 1;$$

por tanto $\alpha \in B$. Recíprocamente, si $\alpha \in B$ y es $\alpha < 1$ podemos tomar $y = \frac{1}{1-\alpha}(x-\alpha e)$ ya que evidentemente $y \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $x = \alpha e + (1-\alpha)y$. Si $\alpha = 1$ entonces, de la desigualdad $\alpha + \|x-\alpha e\| \leq 1$ se sigue que $x = e = \alpha e + (1-\alpha)e$ y así, en cualquier caso, $\alpha \in A$. Como consecuencia $\lambda(e,x) = Sup\ A = Sup\ B$ y teniendo en cuenta que B es cerrado, $\lambda(e,x) = Max\ B$.

Nótese en consecuencia que también

$$\lambda(e,x) = Max\ \{\alpha \in [0,1] : \exists\ y \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \text{ con } x = \alpha e + (1-\alpha)y\} \ \#$$

1.8 DEFINICION.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado tal que $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$. Para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ consideremos el escalar

$$\lambda(x) = \text{Sup } \{\lambda(e,x) : e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})\}$$

La aplicación $x \longmapsto \lambda(x)$ de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ en $[0,1]$ recibe el nombre de λ-función asociada al espacio $\mathcal{X}$.

Más adelante necesitaremos los siguientes hechos básicos extraidos con ligeras modificaciones de la proposición 1.2 de [5].

1.9 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado con* $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$. *Dado* $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ se *tiene que:*

i) $\|x\| < 1$ *implica* $\lambda(x) > 0$.

ii) *Si existen* $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, $y \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *con* $\|y\| < 1$ *y* $\alpha \in]0,1[$ *tales que* $x = \alpha e + (1-\alpha)y$ *entonces existe* $\rho \in]\alpha,1]$ *y* $z \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tales que*

$$x = \rho e + (1-\rho)z.$$

iii) *Si* $\lambda(x) > 0$ *y* $0 < \rho < \lambda(x)$, *existen* $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ *y* $z \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *tales que*

$$x = \rho e + (1-\rho)z.$$

iv) $\dfrac{1-\|x\|}{2} \leq \lambda(x) \leq \dfrac{1+\|x\|}{2}$.

v) $\lambda(x) = \lambda(-x)$.

vi) $\lambda(tx) \geq \dfrac{1+|t|}{2}\lambda(x)$, *para todo escalar* t *con* $|t| \leq 1$

vii) *Para* $x \neq 0$ *se verifica* $\lambda(x) \geq \dfrac{1+\|x\|}{2}\lambda(\dfrac{x}{\|x\|})$.

DEMOSTRACION:

i) Sea $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, supuesto $\|x\| < 1$, un sencillo argumento de continuidad garantiza la existencia de un número real positivo t tal que

$$t + \|x - te\| = 1.$$

por tanto (proposición 1.7), $\lambda(e,x) \geq t > 0$ y así $\lambda(x) > 0$.

ii) Supongamos $x = \alpha e + (1-\alpha)y$ tal como se indica en el enunciado. Entonces $\alpha + \|x - \alpha e\| < 1$ y, como antes, existe $\rho > \alpha$ tal que $\rho + \|x-\rho e\| = 1$. Si $\rho < 1$ podemos considerar $z = \dfrac{x-\rho e}{1-\rho}$. Si $\rho = 1$ entonces $x = e$ y z puede ser cualquier elemento de $\mathcal{S}(\mathcal{X})$.

iii) Supuestas las condiciones del enunciado existe $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\lambda(e,x) > \rho$, luego, de acuerdo con la proposición 1.7

$$\rho + \|x-\rho e\| \leq \lambda(e,x) + \|x-\lambda(e,x)e\| \leq 1,$$

así, tomando $z = \dfrac{x-\rho e}{1-\rho}$ es claro que $\|z\| \leq 1$ y $x = \rho e + (1-\rho)z$.

iv) Sean $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $\alpha \in [0,1]$ tales que $\alpha + \|x-\alpha e\| \leq 1$. Entonces, $\alpha-\|x\| \leq 1-\alpha$, de donde $\alpha \leq \dfrac{1+\|x\|}{2}$. En virtud de la proposición 1.7 se sigue que $\lambda(e,x) \leq \dfrac{1+\|x\|}{2}$ y, dada la arbitrariedad de e, $\lambda(x) \leq \dfrac{1+\|x\|}{2}$.

Por otra parte, si $\lambda(x) = 0$ entonces, de acuerdo con i), $\|x\| = 1$ y es obvio que $\dfrac{1-\|x\|}{2} \leq \lambda(x)$. Si $\lambda(x) > 0$ existen $\rho \in]0,1]$, $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $z \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que $x = \rho e + (1-\rho)z$. De acuerdo con ii) puede suponerse $\|z\| = 1$. Entonces, $1-\rho = \|(1-\rho)z\| = \|x-\rho e\| \leq \|x\|+\rho$ y así $\dfrac{1-\|x\|}{2} \leq \rho \leq \lambda(x)$.

v) Es inmediato sin más que tener en cuenta que la aplicación $x \longmapsto -x$ de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{X}$ es una biyección lineal isométrica.

vi) Del apartado iv) se deduce que $\lambda(0) = \dfrac{1}{2}$, así, si $t = 0$,

$$\frac{1+|t|}{2}\,\lambda(x) = \frac{1}{2}\,\lambda(x) \leq \frac{1}{2} = \lambda(0) = \lambda(tx).$$

Si $t \neq 0$ sea $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $\alpha \geq 0$ tal que $\alpha + \|\dfrac{t}{|t|}\,x - \alpha e\| \leq 1$. Entonces

$$\frac{1+|t|}{2}\,\alpha + \|\frac{1+|t|}{2}\,\frac{t}{|t|}\,x - \frac{1+|t|}{2}\,\alpha e\| \leq \frac{1+|t|}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $\|tx - \dfrac{1+|t|}{2}\,\dfrac{t}{|t|}\,x\| \leq \dfrac{1-|t|}{2}$ tenemos

$$\frac{1+|t|}{2}\,\alpha + \|tx - \frac{1+|t|}{2}\,\alpha e\| =$$

$$= \frac{1+|t|}{2}\,\alpha + \|tx - \frac{1+|t|}{2}\,\frac{t}{|t|}\,x + \frac{1+|t|}{2}\,\frac{t}{|t|}\,x - \frac{1+|t|}{2}\,\alpha e\| \leq$$

$$\leq \frac{1+|t|}{2}\,\alpha + \frac{1-|t|}{2} + \frac{1+|t|}{2} - \frac{1+|t|}{2}\,\alpha = 1.$$

Por tanto (proposición 1.7), $\lambda(tx) \geq \lambda(e,tx) \geq \dfrac{1+|t|}{2}\,\alpha$. Se sigue, dada la arbitrariedad de α que $\lambda(tx) \geq \frac{1+|t|}{2}\lambda(e,\frac{t}{|t|}x)$ $(\forall\ e \in \mathcal{E}(\mathcal{X}))$. Así pues,

$$\lambda(tx) \geq \frac{1+|t|}{2}\lambda(\frac{t}{|t|}x) = \frac{1+|t|}{2}\lambda(x).$$

vii) Teniendo en cuenta el apartado anterior, supuesto $x \neq 0$ tenemos

$$\lambda(x) = \lambda(\|x\|\frac{x}{\|x\|}) \geq \frac{1+\|x\|}{2}\lambda(\frac{x}{\|x\|}).\ \#$$

Si $\mathcal{X}$ es un espacio normado con $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ es obvio que $\lambda(e) = 1$, para todo $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$. Además, como indica el apartado i) de la proposición anterior, $\lambda(x) > 0$, $\forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ con $\|x\| < 1$. Sin embargo, la condición $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ no basta para garantizar que ello también ocurre con los restantes puntos de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Pueden, por tanto, existir elementos (de norma uno necesariamente) en la bola unidad de $\mathcal{X}$ que no admitan ninguna representación propia ($\alpha > 0$) como combinación convexa de un punto extremo y otro punto de la bola unidad.

1.10 DEFINICION.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado. Se dice que $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad si

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \lambda(x) > 0,\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Diremos que $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad uniforme si $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad y además $\lambda(\mathcal{X}) := \operatorname{Inf}\{\lambda(x) : x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\} > 0.$

Los conceptos anteriores fueron introducidos por R.M. Aron y R.H. Lohman en [5].

Obsérvese, como consecuencia del apartado iii) de la proposición 1.9, que si $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad, dado $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $\alpha \in\ ]0,\lambda(x)[$ es posible encontrar $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $z \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que

$$x = \alpha e + (1-\alpha)z .$$

Además, si $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad uniforme y $\alpha \in]0,\lambda(\mathcal{X})[$, dado x en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ existen $e_x \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $z_x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que

$$x = \alpha e_x + (1-\alpha)z_x .$$

Este hecho expresa muy bien la idea de uniformidad. Un mismo α es válido para representar todos los puntos de la bola unidad como combinación convexa de un punto extremo y algún otro punto de la bola.

El siguiente resultado permite reducir el estudio de la λ-propiedad en cualquier espacio a los puntos de su esfera unidad:

1.11 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado tal que* $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$.

i) $\mathcal{X}$ *tiene la λ-propiedad si, y sólo si,* $\lambda(x) > 0,\ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

ii) $\lambda(\mathcal{X}) \geq \frac{1}{2}\ \mathrm{Inf}\ \{\lambda(x) : x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})\}$. *Por tanto*

$\mathcal{X}$ *tiene la λ-propiedad uniforme si, y sólo si,* $\mathrm{Inf}\ \{\lambda(x) : x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})\} > 0$.

DEMOSTRACION:

i) Es consecuencia inmediata de la parte i) de la proposición 1.9.

ii) Basta recordar que $\lambda(0) = \frac{1}{2}$ y para $x \neq 0$ aplicar el apartado vii) de la citada proposición. #

Los espacios estrictamente convexos y los espacios normados de dimensión finita verifican la λ-propiedad uniforme ([5], proposición 1.2 (e) y teorema 1.16). Ambos hechos quedan recogidos como sigue:

1.12 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado.

i) *Si $\mathcal{X}$ es finito-dimensional entonces $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad uniforme.*

De hecho, $\lambda(\mathcal{X}) \geq \dfrac{1}{1 + \dim \mathcal{X}}$.

ii) *Si $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo*

$$\lambda(x) = \frac{1+\|x\|}{2}, \; \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Por tanto, $\lambda(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}$ *y $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad uniforme.*

DEMOSTRACION:

i) Sea $n = \dim \mathcal{X}$. Dado $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y de acuerdo con el teorema de Minkowski-Carathéodory existen escalares $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1} \in [0,1]$ y $e_1,\ldots,e_{n+1} \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ tales que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$ y $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n+1} e_{n+1}$. Sea m un natural con $1 \leq m \leq n+1$ tal que $\lambda_m \geq \dfrac{1}{n+1}$. Es claro que $\lambda_m + \|x - \lambda_m e_m\| =$

$$= \lambda_m + \|\sum_{k\neq m} \lambda_k e_k\| \leq 1. \text{ Por tanto, } \lambda(x) \geq \lambda(e_m,x) \geq \lambda_m \geq \frac{1}{n+1}.$$

ii) Sea $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ con $x \neq 0$ (para $x = 0$ el resultado es ya conocido). Los apartados iv) y vii) de la proposición 1.9 nos permiten poner

$$\frac{1+\|x\|}{2}\,\lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq \lambda(x) \leq \frac{1+\|x\|}{2}$$

de donde se sigue lo deseado sin más que tener en cuenta que $\lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 1$ pues $\dfrac{x}{\|x\|} \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$. #

Razonando como en el apartado i) de la proposición anterior se prueba que la P.R.C. implica la λ-propiedad.

Notemos, por otra parte, que los espacios $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ espacio de Hilbert complejo) tienen también la λ-propiedad uniforme pues todo elemento de su bola unidad es media de dos puntos extremos y por consiguiente $\lambda(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \frac{1}{2}$.

El siguiente enunciado, cuya demostración puede encontrarse en [5] (teorema 3.1) nos servirá de motivación para introducir un concepto estrechamente relacionado con la λ-propiedad.

1.13 TEOREMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado. Equivalen:*

i) $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

ii) *Existe* $\alpha \in]0,1[$ *con la siguiente propiedad:*

Para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *es posible encontrar una sucesión* $\{e_n\}$ *de puntos extremos de la bola unidad de* $\mathcal{X}$ *tal que*

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha(1-\alpha)^{k-1} e_k\| \leq (1-\alpha)^n, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

La demostración de i) $\Rightarrow$ ii) consiste básicamente en hacer uso reiterado de la proposición 1.9 iii). Por otra parte, ii) $\Rightarrow$ i) puede obtenerse con facilidad de la proposición 1.7.

Dado $\alpha \in]0,1[$ es claro que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{n-1} = 1$. Además, si se verifica la desigualdad del enunciado, se tiene obviamente $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^{n-1} e_n$.

1.14 DEFINICION.

Se dice que un espacio normado $\mathcal{X}$ *tiene la propiedad de representación en series convexas* (P.R.S.C.) *si dado* $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *existe una sucesión* $\{\alpha_n\}$ *de números reales no negativos con* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$ *y una sucesión* $\{e_n\}$ *de puntos extremos de la bola unidad de* $\mathcal{X}$ *tales que* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Es fácil probar que la P.R.S.C. implica la λ-propiedad. Por otra parte, tal como pone de manifiesto el teorema 1.13, la λ-propiedad uniforme equivale a (una versión uniforme de) la P.R.S.C.. Es natural plantearse si la λ-propiedad es equivalente a la P.R.S.C. Este problema quedó abierto en [5] y fue resuelto afirmativamente en [6] para espacios de Banach. Así pues:

1.15 TEOREMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach. Entonces* $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad si, y sólo si,* $\mathcal{X}$ *tiene la P.R.S.C..*

λ-FUNCION EN l_p-SUMAS DE ESPACIOS NORMADOS

En este apartado perseguimos dos objetivos esenciales. Por una parte, aportamos la respuesta a un problema abierto en [5] (Cuestión 4.2) que consiste en la determinación de la λ-función para l_1-sumas de espacios normados y por otra, incorporamos, sin demostración, resultados similares para el resto de las l_p-sumas de espacios normados, lo que nos permitirá disponer de suficientes ejemplos con los que ir contrastando toda la exposición.

Sea $\{\mathcal{X}_n\}$ una sucesión de espacios normados y p un número real tai que $1 \leq p < \infty$; por $(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_p}$ denotaremos el espacio de las sucesiones $\{x_n\}$ tales que $x_n \in \mathcal{X}_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum \|x_n\|^p$ es convergente, provisto de la norma:

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{1/p}, \quad \forall\ x = \{x_n\} \in (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_p} .$$

Puesto que no hay lugar a confusión hemos escrito un único símbolo $\|\cdot\|$, para referirnos tanto a la norma de cada espacio $\mathcal{X}_n$ como a la norma del espacio $\mathcal{X}$. Este mismo criterio se aplicará a las correspondientes λ-funciones.

Del mismo modo, $(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_\infty}$ será el espacio de las sucesiones $\{x_n\}$ tales que $x_n \in \mathcal{X}_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\{\|x_n\|\}$ está acotada. La norma en este caso viene dada por:

$$\|x\| = Sup\ \{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} , \quad \forall\ x = \{x_n\} \in (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_\infty} .$$

Si $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, los anteriores espacios se denotan por $l_p(\mathcal{X})$ y $l_\infty(\mathcal{X})$, respectivamente. Además, si $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ escribiremos, como es habitual l_p y l_∞ en lugar de $l_p(\mathbb{R})$ y $l_\infty(\mathbb{R})$.

Por otra parte, si $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ son espacios normados, $(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathcal{X}_k)_{l_p}$ y $(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathcal{X}_k)_{l_\infty}$ denotarán sencillamente, el producto cartesiano de los espacios $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ provisto de sus respectivas normas:

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\| = (\|x_1\|^p + \ldots + \|x_n\|^p)^{1/p}$$

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\| = Max\ \{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}$$

Si $\mathcal{X}_1 = \ldots = \mathcal{X}_n = \mathbb{R}$ estos espacios los denotaremos por l_p^n y l_∞^n (no son otra cosa que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$).

Para cubrir nuestro primer objetivo necesitaremos el siguiente resultado (sencillo y conocido) que caracteriza los puntos extremos de la bola unidad en l_1-sumas de espacios normados.

1.16 LEMA.

Sea $\{\mathcal{X}_n\}$ *una sucesión de espacios normados,* $\mathcal{X} = (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_1}$ *y* $e = \{e_n\}$ *un punto en* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$

ii) *Existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $e_k \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_k)$ *y* $e_n = 0, \ \forall\, n \neq k$.

1.17 TEOREMA.

Sean $\{\mathcal{X}_n\}$ *y* $\mathcal{X}$ *como en el lema anterior,* $e = \{e_n\} \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ *y sea* k *un natural tal que* $e_k \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_k)$. *Entonces, dado* $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *se tiene*

$$\lambda(e,x) = \begin{cases} (1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda\left(e_k\ ,\ \dfrac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}\right) & \text{si} \quad 1+\|x_k\|-\|x\| \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{si} \quad 1+\|x_k\|-\|x\| = 0 \end{cases}$$

DEMOSTRACION:

Dado $\alpha \geq 0$, $\alpha + \|x-\alpha e\| = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n-\alpha e_n\| = \alpha + \|x_k-\alpha e_k\| + \sum_{n\neq k} \|x_n\| =$ $= \alpha + \|x_k-\alpha e_k\| + \|x\| - \|x_k\|$. Por tanto, $\alpha + \|x-\alpha e\| \leq 1$, si, y sólo si, $(\bullet)$ $\alpha + \|x_k-\alpha e_k\| \leq 1+\|x_k\|-\|x\|$. Si $1+\|x_k\|-\|x\| = 0$ la anterior desigualdad se verifica tan solo para $\alpha = 0$ y por tanto (proposición 1.7) $\lambda(e,x) = 0$. Si $1+\|x_k\|-\|x\| \neq 0$ entonces $(\bullet)$ equivale a

$$\frac{\alpha}{1+\|x_k\|-\|x\|} + \left\|\frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|} - \frac{\alpha}{1+\|x_k\|-\|x\|} e_k\right\| \leq 1$$

lo cual, en virtud de la citada proposición, es a su vez equivalente a

$$\frac{\alpha}{1+\|x_k\|-\|x\|} \leq \lambda\left(e_k , \frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}\right) \quad \text{ó, lo que es lo mismo}$$

$$\alpha \leq (1+\|x_k\|-\|x\|)\, \lambda\left(e_k , \frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}\right).$$

Así, para $1+\|x_k\|-\|x\| \neq 0$, hemos establecido que el conjunto

$$\{\alpha \geq 0 : \alpha + \|x-\alpha e\| \leq 1\}$$

coincide con el intervalo cerrado de extremos

$$0 \quad \text{y} \quad (1+\|x_k\|-\|x\|)\, \lambda\left(e_k , \frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}\right), \quad \text{luego}$$

$$\lambda(e,x) = Max\, \{\alpha \geq 0 : \alpha + \|x-\alpha e\| \leq 1\} = (1+\|x_k\|-\|x\|)\, \lambda\left(e_k , \frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}\right). \ \#$$

1.18 COROLARIO.

Sea $\{\mathcal{X}_n\}$ *una sucesión de espacios normados tales que* $\mathcal{E}(\mathcal{X}_n) \neq \emptyset$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $\mathcal{X} = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n)_{l_1}$. *Dado* $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *se tiene que*

$$\lambda(x) = \operatorname{Sup} \left\{(1+\|x_k\|-\|x\|)\, \lambda\left(\frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}\right) : k \in \mathbb{N},\ 1+\|x_k\|-\|x\| \neq 0\right\}.$$

Como consecuencia $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad si, y sólo si,* $\mathcal{X}_n$ *tiene la* λ*-propiedad, para todo* $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACION:

Sea $\alpha = Sup\ \{(1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda(\frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}) : k \in \mathbb{N},\ 1+\|x_k\|-\|x\| \neq 0\}$ y sea $e = \{e_n\} \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$. Si $\lambda(e,x) = 0$ evidentemente $\lambda(e,x) \leq \alpha$. Si $\lambda(e,x) > 0$, de acuerdo con el teorema anterior, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $e_k \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_k)$, $1+\|x_k\|-\|x\| \neq 0$ y $\lambda(e,x) = (1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda(e_k\ ,\ \frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|})$, de donde se sigue que $\lambda(e,x) \leq (1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda(\frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}) \leq \alpha$. Por tanto, $\lambda(x) \leq \alpha$. Sea, para probar la desigualdad contraria, $k \in \mathbb{N}$ tal que $1+\|x_k\|-\|x\| \neq 0$. Dado un punto extremo arbitrario e_0 de la bola unidad de $\mathcal{X}_k$ podemos considerar $e = \{e_n\}$ en $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ definido por $e_n = 0$ si $n \neq k$, $e_k = e_0$ con lo que, en virtud del teorema precedente $\lambda(e,x) = (1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda(e_k\ ,\ \frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|})$ y así

$$\lambda(x) \geq (1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda(e_0\ ,\ \frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}),$$

la arbitrariedad de e_0 en $\mathcal{E}(\mathcal{X}_k)$ permite deducir que

$$\lambda(x) \geq (1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda(\frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}) \quad \text{y por tanto} \quad \lambda(x) \geq \alpha.$$

Supuesto que $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad sean $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathcal{S}(\mathcal{X}_n)$. Definimos $x = \{x_n\}$ por $x_n = z$, $x_k = 0$ si $k \neq n$. De la igualdad que acabamos de probar se deduce que $\lambda(x) = \lambda(x_n) = \lambda(z)$; por tanto, $\lambda(z) > 0$ y $\mathcal{X}_n$ tiene la λ-propiedad (corolario 1.11 i)). Finalmente, si $\mathcal{X}_n$ tiene la λ-propiedad para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ es claro que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $1+\|x_k\|-\|x\| \neq 0$, luego $\lambda(x) \geq (1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda(\frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}) > 0$ y así

$\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad. #

Los resultados anteriores son válidos (con ligeras modificaciones de notación) también para l_1-sumas finitas de espacios normados. En este caso podemos añadir lo siguiente:

1.19 COROLARIO.

Sean $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ *espacios normados y* $\mathcal{X} = (\bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{X}_k)_{l_1}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

ii) $\mathcal{X}_k$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme para todo* $k \in \{1,\ldots,n\}$.

DEMOSTRACION:

Se razona como en la última parte de la demostración anterior teniendo en cuenta que $\lambda(x) = Max\ \{(1+\|x_k\|-\|x\|)\ \lambda(\frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}) : k \in \{1,\ldots n\}\}$ para todo $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Para probar i) $\Rightarrow$ ii) puede usarse la afirmación ii) del corolario 1.11, mientras que, para ii) $\Rightarrow$ i), basta observar que dado $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $1+\|x_k\|-\|x\| \geq \frac{1}{n}$ y por tanto,

$$\lambda(x) \geq \frac{1}{n}\ \lambda(\frac{x_k}{1+\|x_k\|-\|x\|}) \geq \frac{1}{n}\ \lambda(\mathcal{X}_k) \geq \frac{1}{n}\ Min\ \{\lambda(\mathcal{X}_k) : k \in \{1,\ldots,n\}\} > 0. \ \#$$

Sin embargo, es importante señalar que las l_1-sumas de espacios normados (exceptuando, claro está, el caso de sumas finitas) no poseen bajo ningún concepto la λ-propiedad uniforme. En efecto, sea $\{\mathcal{X}_n\}$ una sucesión de espacios normados y sea $\mathcal{X} = (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_1}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos para cada k en $\{1,\ldots,n\}$ un elemento z_k de $S(\mathcal{X}_k)$ y sea

$$x = \left(\frac{1}{n} z_1 , \ldots, \frac{1}{n} z_n , 0 , 0 , \ldots \right) \in \mathcal{S}(\mathcal{X});$$

entonces, $1+\|x_k\|-\|x\| = \|\frac{1}{n} z_k\| = \frac{1}{n}$ si $k \leq n$ y $1+\|x_k\|-\|x\| = 0$ si $k > n$. Por tanto, $\lambda(x) = Sup \{ \frac{1}{n} \lambda(z_k) : k \in \{1,\ldots,n\} \} \leq \frac{1}{n}$. De ello se deduce claramente que $\lambda(\mathcal{X}) = 0$. Nótese en particular que l_1 tiene la λ-propiedad no uniforme.

El mismo razonamiento muestra que si $\mathcal{X}$ es una l_1-suma de n espacios normados entonces $\lambda(\mathcal{X}) \leq \frac{1}{n}$. En particular, $\lambda(l_1^n) \leq \frac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

En [5], teorema 1.11, Aron y Lohman prueban que $l_1(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad para todo espacio estrictamente convexo $\mathcal{X}$. Obtienen además que

$$\text{(1)} \quad \lambda(x) = \frac{1 - \|x\| + 2\, Sup \{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}}{2}, \ \forall\, x = \{x_n\} \in B(l_1(\mathcal{X})).$$

En la misma referencia (cuestión 4.2) proponen el estudio de la λ-propiedad y la determinación de la λ-función en espacios del tipo $(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_1}$, supuesto que los $\mathcal{X}_n$ no son estrictamente convexos.

Lohman y Shura ([32], teorema 3) demuestran que si cada $\mathcal{X}_n$ tiene la λ-propiedad entonces $(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_1}$ tiene también la λ-propiedad, pero no logran la expresión de la λ-función, sino acotaciones que, en el caso estrictamente convexo, coinciden con la igualdad (1) de Aron y Lohman. Un resultado similar, también sin la expresión de la λ-función, fue establecido por Suárez en [54] (proposición 4).

Así pues (en vista de los comentarios anteriores), nuestro corolario

1.18 es la primera respuesta completa a la cuestión planteada por Aron y Lohman. Puede comprobarse sin dificultad que la expresión de la λ-función que hemos obtenido coincide con (1) si $\mathcal{X}_n = \mathcal{X}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo.

A continuación resumimos el caso de l_p-sumas de espacios normados para $1 < p \leq \infty$.

La demostración del siguiente lema puede consultarse en [52].

1.20 LEMA.

Sea $\{\mathcal{X}_n\}$ *una sucesión de espacios normados,* $p \in]1,+\infty[$, $\mathcal{X} = (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_p}$ *y* $e = \{e_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Equivalen:*

i) $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$

ii) $\|e\| = 1$ *y* $\dfrac{e_n}{\|e_n\|} \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)$ *para cada natural* n *tal que* $e_n \neq 0$.

Las ideas que se precisan para probar el teorema que sigue pueden encontrarse en [1], si bien en [33] se considera una situación más general.

1.21 TEOREMA.

Sea $\{\mathcal{X}_n\}$ *una sucesión de espacios normados tales que* $\mathcal{E}(\mathcal{X}_n) \neq \emptyset$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $1 < p < \infty$. *Si* $\mathcal{X} = (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_p}$, *entonces, dado* $x = \{x_n\}$ *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *se tiene que:*

$$\lambda(x) = \operatorname{Inf}\,\{\lambda(\frac{x_n}{\|x_n\|}) : n \in \mathbb{N} \text{ y } x_n \neq 0\}.$$

Como consecuencia las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme).*

ii) $\mathcal{X}_n$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme),* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *y* $\underline{\lim}\ \lambda(\mathcal{X}_n) > 0$ (*resp.* $\text{Inf}\ \{\lambda(\mathcal{X}_n) : n \in \mathbb{N}\} > 0$).

En el caso de l_p-sumas finitas se tiene que $\mathcal{X} = (\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathcal{X}_k)_{l_p}$ tiene la λ-propiedad (resp. uniforme) si, y sólo si, $\mathcal{X}_k$ tiene la λ-propiedad (resp. uniforme), $\forall\ k \in \{1,\dots,n\}$ y en tal caso

$$\lambda(x) = Min\ \{\lambda(\frac{x_k}{\|x_k\|}) : k \in \{1,\dots,n\} \text{ y } x_k \neq 0\},\ \forall\ x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{S}(\mathcal{X}).$$

Hemos de reparar en el hecho de que la expresión de la λ-función que aparece en el resultado anterior es válida, en general, tan sólo para los elementos de la esfera unidad de $\mathcal{X}$. Nótese, en primer lugar, que dicha expresión carece de sentido para $x = 0$. Además, si se suponen estrictamente convexos los espacios $\mathcal{X}_n$ (ello equivale a que $\mathcal{X}$ sea estrictamente convexo, como puede verse, por ejemplo, en [25], teorema 2.1.7), dado $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ con $0 < \|x\| < 1$ se tiene que

$$Inf\ \{\lambda(\frac{x_n}{\|x_n\|}) : n \in \mathbb{N} \text{ y } x_n \neq 0\} = 1,$$

mientras que $\lambda(x) = \dfrac{1+\|x\|}{2} < 1$. No obstante, de acuerdo con la proposición 1.9 vii), dado $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}$

$$\lambda(x) \geq \frac{1+\|x\|}{2}\ Inf\ \{\lambda(\frac{x_n}{\|x_n\|}) : n \in \mathbb{N} \text{ y } x_n \neq 0\}.$$

La igualdad se da en los puntos de la esfera. No es conocida (que sepamos) la expresión exacta de la λ-función para este tipo de espacios.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior tenemos

1.22 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado y* $p \in]1,+\infty[$. *Equivalen:*

i) $l_p(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

ii) $l_p(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

iii) $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

Si $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo este resultado no añade nada sobre lo ya conocido pues en tal caso $l_p(\mathcal{X})$ es estrictamente convexo ($1 < p < \infty$).

Formalmente, el caso de l_∞-sumas de espacios normados es muy similar al que acabamos de tratar pero los resultados son más sencillos de obtener.

1.23 LEMA.

Sea $\{\mathcal{X}_n\}$ *una sucesión de espacios normados,* $\mathcal{X} = (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_\infty}$ *y* $e = \{e_n\}$ *un punto en* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Equivalen:*

i) $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$

ii) $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X}_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

El siguiente enunciado puede probarse siguiendo las ideas de [32] o [54].

1.24 TEOREMA.

Sea $\{\mathcal{X}_n\}$ *una sucesión de espacios normados tales que* $\mathcal{E}(\mathcal{X}_n) \neq \emptyset$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y sea* $\mathcal{X} = (\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \mathcal{X}_n)_{l_\infty}$. *Dado* $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *se tiene que*

$$\lambda(x) = \mathrm{Inf}\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como consecuencia, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme)*

ii) $\mathcal{X}_n$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme)*, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *y* $\underline{\lim}\ \lambda(\mathcal{X}_n) > 0$ (*resp.* $\mathrm{Inf}\ \{\lambda(\mathcal{X}_n) : n \in \mathbb{N}\} > 0$).

La expresión de la λ-función permite deducir fácilmente que

$$\lambda(\mathcal{X}) = \mathit{Inf}\ \{\lambda(\mathcal{X}_n) : n \in \mathbb{N}\},$$

De este modo, si los espacios $\mathcal{X}_n$ son todos estrictamente convexos entonces, de acuerdo con la proposición 1.12 ii), $\lambda(\mathcal{X}_n) = \frac{1}{2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\lambda(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}$, con lo que $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad uniforme.

Respecto de l_∞-sumas de espacios normados tenemos que $\mathcal{X} = (\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} \mathcal{X}_k)_{l_\infty}$ tiene la λ-propiedad (resp. uniforme) si, y sólo si, $\mathcal{X}_k$ tiene la λ-propiedad (resp. uniforme) para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$. También en este caso, si $\mathcal{X}_k$ es estrictamente convexo, $\forall\ k \in \{1,\ldots,n\}$, $\lambda(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}$. En particular, $\lambda(l_\infty^n) = \frac{1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.25 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado. Equivalen:*

i) $l_\infty(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

ii) $l_\infty(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

iii) $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

Obsérvese en particular que l_∞ tiene la λ-propiedad uniforme.

Hemos de señalar que la λ-propiedad ha sido estudiada en multitud de espacios normados además de los hasta ahora considerados, lo que pone de manifiesto que, lejos de ser una rara cualidad de ciertos espacios, se trata de una propiedad muy frecuente en el ámbito de los espacios normados. Véase a este respecto [14], [32], [33], [44], [49] y [55].

1.26 NOTA.

En [5] se planteó como problema abierto si la λ-propiedad se transfiere necesariamente desde un espacio a su dual. La respuesta es negativa y pueden encontrarse ejemplos de ello en [1], [9], y [53]. Pero son especialmente interesantes los que aparecen en [33] y [48], que comentaremos brevemente:

El espacio $\mathcal{X} = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} l_\infty^n)_{l_2}$ tiene, de acuerdo con los resultados anteriores la λ-propiedad uniforme. Sin embargo, su dual $\mathcal{X}^* = (\bigoplus_{n=1}^{\infty} l_1^n)_{l_2}$ no posee la λ-propiedad dado que $\lambda(l_1^n) \leq \frac{1}{n}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. El espacio $\mathcal{X}$ es reflexivo (véase [8]) y por tanto, también lo es $\mathcal{Y} = (\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}^*)_{l_2}$. Como espacio reflexivo, la bola unidad de $\mathcal{Y}$ es muy rica en puntos extremos ($\mathcal{E}(\mathcal{Y})$ es no numerable para todo espacio reflexivo infinito-dimensional $\mathcal{Y}$, véase a este respecto [28]) y sin embargo ninguno de los espacios $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}^*$ posee la λ-propiedad. Esto último pone de manifiesto, tal como se comenta en las referencias precisadas, que la λ-propiedad no presenta un comportamiento especialmente bueno en espacios de Banach reflexivos.

Acabaremos este primer capítulo clarificando la relación existente entre las distintas propiedades extremales que han aparecido. El siguiente esquema será útil a tal fin.

$$\begin{tikzcd}
 & & \boxed{\textit{estricta convexidad}} \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\textit{P.R.C.}} \arrow[dr, Rightarrow] & & \boxed{\lambda\textit{-propiedad uniforme}} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
 & \boxed{\textit{P.R.S.C.}} \arrow[r, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\lambda\textit{-propiedad}} \arrow[l, dashed, shift left] \\
 & \boxed{\textit{propiedad de Bade}} &
\end{tikzcd}$$

La implicación que aparece con trazo discontinuo es cierta en espacios de Banach (teorema 1.15) y se desconoce si lo es, al igual que las restantes, en cualquier espacio normado. Ninguna de las implicaciones (salvo las que relacionan la λ-propiedad y la P.R.S.C.) es reversible en general. Para ponerlo de manifiesto notemos, por ejemplo, que l_p^n con $p = 1$ ó $p = \infty$ tiene la P.R.C. y también la λ-propiedad uniforme (son espacios de dimensión finita, recuérdese el comentario que sigue a la definición 1.4 y la proposición 1.12 i)) y, sin embargo no son estrictamente convexos. Por otra parte, l_1 tiene la λ-propiedad y (dado que es completo) la P.R.S.C. pero no posee la λ-propiedad uniforme (comentario que sigue al corolario 1.19) ni tampoco la P.R.C. (a la vista de la caracterización de los puntos extremos en l_1-sumas, lema 1.16, un elemento de l_1 que sea combinación convexa de puntos extremos ha de tener todos sus términos nulos a partir de un cierto natural en adelante. La bola de l_1 contiene obviamente elementos que no cumplen esta condición). Es claro que todo espacio de Banach reflexivo tiene la propiedad de Bade; así pues, si $\mathcal{X}$ es el espacio considerado en la nota precedente, $\mathcal{X}^*$ tiene la propiedad de Bade, por ser reflexivo, y, sin embargo, no tiene la λ-propiedad y en consecuencia tampoco la P.R.S.C.. El estudio que realizaremos en los próximos capítulos de los espacios de funciones continuas proporcionará nuevos ejemplos de espacios con la propiedad de Bade que no poseen la λ-propiedad.

Finalmente, señalemos que la P.R.C. y la λ-propiedad uniforme son independientes. El espacio l_∞ tiene la λ-propiedad uniforme pero no la P.R.C., como fácilmente se comprueba y, por otra parte, en [48] se consigue (renormando l_2) un espacio con la P.R.C. que no posee la λ-propiedad uniforme.

CAPITULO II

PUNTOS EXTREMOS Y PROPIEDAD DE EXTENSION

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico y $\mathcal{X}$ un espacio normado, $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ denotará el espacio de todas las funciones continuas y acotadas de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$. En $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ consideraremos, como es costumbre, la norma del supremo:

$$\|f\| = \text{Sup}\,\{\|f(t)\| : t \in \mathcal{T}\}\,, \quad \forall\, f \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X}).$$

Si $\mathcal{T}$ es la compactificación de Alexandroff de los naturales entonces $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ es isométricamente isomorfo a $c(\mathcal{X})$, el espacio de todas las sucesiones convergentes de elementos de $\mathcal{X}$, con la norma

$$\|\{x_n\}\| = \text{Sup}\,\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{para cada} \quad \{x_n\} \quad \text{en} \quad c(\mathcal{X}).$$

La estructura extremal de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ ha sido ampliamente estudiada (propiedad de Bade, λ-propiedad, envolventes convexas de puntos extremos, etc.) bajo distintas condiciones adicionales, tanto sobre $\mathcal{T}$ como sobre $\mathcal{X}$. Precisamente Bade es autor de uno de los trabajos pioneros en esta línea. En concreto, suponiendo $\mathcal{T}$ compacto Hausdorff, probó que la bola unidad cerrada de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ es la envolvente convexo-cerrada del conjunto de sus puntos extremos si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es totalmente disconexo (sus únicos conexos son los puntos), véase a este respecto [7] y también [22]; en esta última referencia se prescinde de la compacidad de $\mathcal{T}$. Posteriormente Peck ([42], teorema 4) prueba que si $\mathcal{T}$ es un espacio métrico compacto totalmente disconexo entonces $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ tiene la propiedad de representación en series convexas. El mismo resultado fue también probado por David Oates ([39]) sin exigir la metrizabilidad de $\mathcal{T}$.

Por lo que respecta a la propiedad de Bade, el comportamiento de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ mejora ostensiblemente cuando se considera $\mathcal{X}$ con dimensión mayor o igual que dos. Así, para $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ (con la norma euclídea) y $\mathcal{T}$ compacto Hausdorff, Phelps ([40]) demuestra que la bola unidad cerrada de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ es siempre la envolvente convexo-cerrada de sus puntos extremos. No se precisa ahora que $\mathcal{T}$ sea totalmente disconexo. Ello es debido, naturalmente, a que $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ sufre un importante cambio al pasar de la dimensión uno a dimensión $n \geq 2$. En concreto, si bien en el primer caso $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ cuenta sólo con dos elementos, en el segundo es ya todo un subconjunto conexo de $\mathcal{X}$. Este resultado de Phelps fue ampliamente generalizado por Cantwell ([15], teorema I y comentarios siguientes al teorema II) y Peck ([42], teorema 1) que obtuvieron (independientemente) la misma conclusión con $\mathcal{T}$ Hausdorff y $\mathcal{X}$ un espacio de Hilbert de dimensión $n \geq 2$.

Aún podríamos mencionar otros resultados contenidos en estas últimas referencias pero tendremos ocasión de hacerlo en el capítulo III, donde nos servirán como punto de arranque.

Recientemente se ha retomado el estudio de la estructura extremal de la bola unidad en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$, aunque en este caso desde el punto de vista de la λ-propiedad. Así, en [5], teorema 1.6, suponiendo $\mathcal{T}$ métrico compacto y $\mathcal{X}$ estrictamente convexo e infinito-dimensional se prueba que $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme. Un detallado análisis de este resultado nos ha permitido poner a punto la pieza que, a nuestro juicio, es esencial en este contexto.

Este ingrediente, que será el centro de atención en el presente capítulo, nos permitirá, en primera instancia, obtener una generalización sustancial del citado teorema y relacionar la estructura extremal de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ con las dimensiones ("topológica") de $\mathcal{T}$ y (algebraica) de $\mathcal{X}$. Además, como comprobaremos en el siguiente capítulo, resultará muy útil para profundizar en el conocimiento de la estructura extremal de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ más allá, incluso, de la λ-propiedad.

Después de los comentarios anteriores en los que aparecen hipótesis muy diversas sobre el espacio topológico $\mathcal{T}$, creemos conveniente aclarar que cierto tipo de condiciones sobre $\mathcal{T}$ pueden asumirse sin que ello implique una pérdida de generalidad al estudiar espacios $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. A este fin dedicamos el siguiente apartado.

ISOMETRIAS ENTRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

En primer lugar, recordemos que un espacio topológico $\mathcal{T}$ es completamente regular si $\mathcal{T}$ es Hausdorff y dados $A \subset \mathcal{T}$, cerrado y $t_0 \in \mathcal{T}\setminus A$ existe una aplicación continua $f : \mathcal{T} \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$f(t_0) = 0 \quad \text{y} \quad f(t) = 1, \ \forall\, t \in A.$$

El siguiente enunciado recoge la información contenida en el teorema 1.6 y el corolario 1.8 de [57], como consecuencia inmediata obtendremos un interesante resultado en el sentido que ya hemos indicado.

2.1 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico arbitrario. Entonces existe un espacio topológico completamente regular* $\rho(\mathcal{T})$ *tal que:*

i) $\rho(\mathcal{T})$ *es imagen continua de* $\mathcal{T}$*, es decir, existe* $\pi : \mathcal{T} \longrightarrow \rho(\mathcal{T})$ *continua y sobreyectiva.*

ii) *Si* f *es una aplicación continua de* $\mathcal{T}$ *en un espacio completamente regular* $\mathcal{T}^*$ *existe una (única) aplicación continua* $\rho(\mathrm{f})$ *de* $\rho(\mathcal{T})$ *en* $\mathcal{T}^*$ *tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mathrm{f}"'] & \rho(\mathcal{T}) \arrow[d, "\rho(\mathrm{f})"] \\ & \mathcal{T}^* \end{tikzcd} \qquad \mathrm{f} = \rho(\mathrm{f})\circ\pi$$

2.2 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado. Los espacios* $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *y* $\mathcal{C}(\rho(\mathcal{T}),\mathcal{X})$ *son isométricamente isomorfos.*

DEMOSTRACION:

Sea $h \in \mathcal{C}(\rho(\mathcal{T}),\mathcal{X})$, dado $t \in \mathcal{T}$, $\|h\circ\pi(t)\| = \|h(\pi(t)\| \leq \|h\|$, de ello se deduce que la aplicación $h\circ\pi$ está acotada y por tanto, dado que también es continua, $h\circ\pi \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. Además, de acuerdo con lo anterior $\|h\circ\pi\| \leq \|h\|$. Por otra parte, si $s \in \rho(\mathcal{T})$, existe $t \in \mathcal{T}$ tal que $\pi(t) = s$, luego

$$\|h(s)\| = \|h(\pi(t))\| \leq \|h\circ\pi\| \text{ y así } \|h\| \leq \|h\circ\pi\|.$$

Sea $\Phi : \mathcal{C}(\rho(\mathcal{T}),\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ la aplicación definida por

$$\Phi(h) = h\circ\pi.$$

Según acabamos de probar $\|\Phi(h)\| = \|h\|$, $\forall\, h \in \mathcal{C}(\rho(\mathcal{T}),\mathcal{X})$ y es inmediato que Φ es lineal. Además, si $f \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ la proposición 2.1 ii) garantiza que existe una aplicación continua $\rho(f) : \rho(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{X}$ tal que $\rho(f)\circ\pi = f$. Evidentemente $\rho(f) \in \mathcal{C}(\rho(\mathcal{T}),\mathcal{X})$ (la acotación se deduce de la igualdad anterior) y

$$\Phi(\rho(f)) = f,$$

lo que prueba que Φ es sobreyectiva. #

El resultado precedente pone de manifiesto que, en general, para cualquier estudio que se realice del espacio $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$, puede suponerse $\mathcal{T}$ completamente regular. A continuación veremos que si el espacio $\mathcal{X}$ es de dimensión finita la situación es aún más propicia ya que, en este caso, $\mathcal{T}$ podrá suponerse compacto Hausdorff, sin que ello reste generalidad.

2.3 PROPOSICION (Teorema 1.11 de [57]).

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico completamente regular. Entonces existe un espacio compacto Hausdorff $\beta(\mathcal{T})$ (la compactificación de Stone-Čech de $\mathcal{T}$) y una aplicación $\eta : \mathcal{T} \longrightarrow \beta(\mathcal{T})$ tal que:

i) *η es un homeomorfismo de $\mathcal{T}$ en $\eta(\mathcal{T})$.*

ii) $\overline{\eta(\mathcal{T})} = \beta(\mathcal{T})$.

iii) *Si f es una aplicación continua de $\mathcal{T}$ en un espacio compacto Hausdorff $\mathcal{T}^*$ existe una única aplicación continua $\beta(f)$ de $\beta(\mathcal{T})$ en $\mathcal{T}^*$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & \beta(\mathcal{T}) \arrow[d, "\beta(f)"] \\ & \mathcal{T}^* \end{tikzcd} \qquad f = \beta(f)\circ\eta$$

2.4 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico completamente regular y $\mathcal{X}$ un espacio normado de dimensión finita. Los espacios $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ y $\mathcal{C}(\beta(\mathcal{T}),\mathcal{X})$ son isométricamente isomorfos.

DEMOSTRACION:

Dada $h \in \mathcal{C}(\beta(\mathcal{T}),\mathcal{X})$ puede comprobarse como en el corolario anterior que $h\circ\eta \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ y $\|h\circ\eta\| \le \|h\|$. Por otra parte, dado $s \in \eta(\mathcal{T})$ existe $t \in \mathcal{T}$ tal que $\eta(t) = s$; así $\|h(s)\| = \|h(\eta(t))\| \le \|h\circ\eta\|$ y es claro entonces que $h(\eta(\mathcal{T})) \subset B$ siendo $B = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \le \|h\circ\eta\|\}$. La continuidad de h nos permite deducir que $h(\overline{\eta(\mathcal{T})}) \subset \bar{B} = B$, es decir, $h(\beta(\mathcal{T})) \subset B$, de donde $\|h(s)\| \le \|h\circ\eta\|$, $\forall\ s \in \beta(\mathcal{T})$ y $\|h\| \le \|h\circ\eta\|$.

Sea $\Phi : \mathcal{C}(\beta(\mathcal{T}),\mathcal{X}) \to \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ la aplicación definida por

$$\Phi(h) = h\circ\eta.$$

Es obvio que Φ es lineal y de acuerdo con lo anterior

$$\|\Phi(h)\| = \|h\|, \ \forall\, h \in \mathcal{C}(\beta(\mathcal{T}),\mathcal{X}).$$

Finalmente, dada $f \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$, el conjunto $K = \{x \in \mathcal{X} : \|x\| \leq \|f\|\}$ es compacto Hausdorff (por ser $\mathcal{X}$ de dimensión finita) y f es una función continua de $\mathcal{T}$ en K. En virtud del teorema anterior existe una función continua $\beta(f) : \beta(\mathcal{T}) \to K$ tal que $\beta(f)\circ\eta = f$. Es claro que $\beta(f)$ es una función continua y acotada de $\beta(\mathcal{T})$ en $\mathcal{X}$ y $\Phi(\beta(f)) = f$. #

La última parte del comentario previo a la proposición 2.3 es consecuencia inmediata de los corolarios 2.2 y 2.4.

La inclusión de los resultados anteriores nos ha parecido conveniente puesto que permiten apreciar con facilidad si en las distintas referencias sobre este tema se imponen condiciones realmente restrictivas y si ciertos trabajos suponen algún avance con respecto a otros. No obstante, la propiedad de extensión, que definiremos más adelante, nos permitirá razonar a plena generalidad, sin necesidad de suponer (puesto que ello no nos reportará ningún beneficio) que $\mathcal{T}$ es completamente regular. Sólo impondremos esta condición cuando relacionemos la citada propiedad con la "dimensión topológica" de $\mathcal{T}$, pues la teoría correspondiente a este concepto está desarrollada, como veremos, para espacios completamente regulares.

λ-PROPIEDAD EN $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$

Como es lógico, nuestro primer requerimiento consiste en disponer de una conveniente caracterización de los puntos extremos de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. Seguidamente veremos que ello sólo es sencillo de conseguir si $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo.

Dado $e \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ y supuesto que $e(t) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, $\forall\, t \in \mathcal{T}$, es inmediato que e es un punto extremo de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. El siguiente ejemplo muestra que la afirmación recíproca no es cierta en general.

2.5 EJEMPLO.

Sea $\mathcal{T} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$ y sea $\mathcal{X}$ un espacio normado tal que el conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ no sea cerrado (en la nota 2.4 de [5] aparece un espacio con esta propiedad. Haremos uso del mismo en el capítulo IV y tendremos ocasión de comentarlo). Consideremos $x \in \overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})}\backslash\mathcal{E}(\mathcal{X})$ y sea $\{e_n\}$ una sucesión convergente a x tal que $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. La aplicación $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ definida por

$$f(n) = e_n\ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad , \quad f(\infty) = x$$

es, como fácilmente se comprueba, un punto extremo de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ y, sin embargo, $f(\infty) \notin \mathcal{E}(\mathcal{X})$.

En la línea del ejemplo anterior se puede llegar mucho más lejos. De hecho, en [11] (ejemplo que sigue al teorema 3) puede encontrarse un espacio normado $\mathcal{X}$ de dimensión cuatro y un operador extremo F de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tal que su adjunto $F^* : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})^* \longrightarrow \mathcal{X}^*$ verifica que

$$F^*(\delta_t) \notin \mathcal{E}(\mathcal{X}^*), \ \forall\, t \in [0,1],$$

donde $\delta_t : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es el funcional de evaluación en el punto t ($\delta_t(\varphi) = \varphi(t), \ \forall\, \varphi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$). Si $e : [0,1] \longrightarrow \mathcal{X}^*$ denota la aplicación definida por

$$e(t) = F^*(\delta_t), \ \forall\, t \in [0,1]$$

y para cada $x \in \mathcal{X}$, $\hat{x} : \mathcal{X}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ es el funcional determinado por la expresión

$$\hat{x}(f) = f(x), \ \forall\, f \in \mathcal{X}^*,$$

se tiene que $\hat{x}\circ e = F(x), \ \forall\, x \in \mathcal{X}$. De ello se sigue que e es continua ($\mathcal{X}$ es de dimensión finita y por tanto la topología de la norma y la topología w^* de $\mathcal{X}^*$ coinciden). Es sencillo probar que, de hecho, e es un punto extremo de la bola unidad de $\mathcal{C}([0,1],\mathcal{X}^*)$ y, sin embargo, como ya hemos indicado,

$$e(t) \notin \mathcal{E}(\mathcal{X}^*), \ \forall\, t \in [0,1].$$

En [38] se introduce el concepto de operador "nice":

Si $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ son espacios normados (no necesariamente reales) y $F \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, se dice que F es nice si $F^*(\mathcal{E}(\mathcal{Y}^*)) \subset \mathcal{E}(\mathcal{X}^*)$. Puede probarse con facilidad, sin más que tener en cuenta que F^* también es continuo si en $\mathcal{Y}^*$ y en $\mathcal{X}^*$ se consideran sus correspondientes topologías w^*, que todo operador nice es extremo (es decir, es un punto extremo de la bola unidad de $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$). El operador F que aparece en [11] y que acabamos de comentar es un ejemplo de operador extremo no nice (publicado, por cierto, cinco años antes de la introducción del concepto de operador nice).

Sin embargo, pese a todo lo anterior, sí es un hecho general que cualquier punto extremo de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ toma todos sus valores en la esfera de $\mathcal{X}$:

2.6 LEMA.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado*. Si $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *y* $e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$ *entonces*

$$\|e(t)\| = 1, \ \forall\ t \in \mathcal{T}.$$

DEMOSTRACION:

Fijemos un punto x_0 en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ y consideremos las aplicaciones f y g de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$ definidas por

$$f(t) = e(t) + (1-\|e(t)\|)\, x_0 \quad , \quad g(t) = e(t) - (1-\|e(t)\|)\, x_0$$

Evidentemente f y g son elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$ y $e = \dfrac{f+g}{2}$. Puesto que, por hipótesis, $e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$, de lo anterior se sigue que $e = f = g$; en particular, para cada $t \in \mathcal{T}$ se tiene

$$(1-\|e(t)\|)\, x_0 = -(1-\|e(t)\|)\, x_0 \ , \ \text{esto es,} \ 2(1-\|e(t)\|)\, x_0 = 0.$$

Ello nos permite concluir que $\|e(t)\| = 1, \ \forall\ t \in \mathcal{T}$. #

Existen ejemplos triviales que muestran con toda claridad que el recíproco del anterior resultado no es cierto en general. Piénsese, sin ir más lejos, en $\mathbb{R}^2$ con la norma del máximo y una función constantemente igual a $(0,1)$ definida en cualquier espacio topológico.

Este lema aparece demostrado en [5], para $\mathcal{T}$ compacto Hausdorff, mediante un razonamiento en el que se hace uso del lema de Urysohn. El enunciado que hemos establecido es por tanto más general y la demostración más sencilla.

Como consecuencia inmediata se obtiene la siguiente caracterización de los puntos extremos de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ para $\mathcal{X}$ estrictamente convexo.

2.7 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico,* $\mathcal{X}$ *un espacio normado y* e *un punto de* $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. *Considérense las siguientes condiciones:*

i) $e(t) \in \mathcal{E}(\mathcal{X}),\ \forall\, t \in \mathcal{T}$.

ii) $e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$.

iii) $\|e(t)\| = 1,\ \forall\, t \in \mathcal{T}$.

Entonces i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) *y si* $\mathcal{X}$ *es estrictamente convexo las tres condiciones son equivalentes.*

Tal como hemos anunciado anteriormente el teorema 1.6 de [5] admite una importante generalización que concretamos en el siguiente enunciado:

2.8 TEOREMA.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo. Para* $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{Y}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

ii) $\mathcal{Y}$ *tiene la* λ*-propiedad.*

iii) *Toda aplicación continua* $f : A \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *definida sobre un conjunto cerrado* A *de* $\mathcal{T}$ *y tal que exista una aplicación* $g \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ *con* $g(t) = f(t),\ \forall\, t \in A$, *posee una extensión continua* $e : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Además, si $\mathcal{Y}$ *tiene la* λ*-propiedad, entonces*

$$\lambda(y) = \frac{1+m(y)}{2},\ \forall\, y \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$$

donde $m(y) = \mathrm{Inf}\left\{ \|y(t)\| : t \in \mathcal{T} \right\}$.

DEMOSTRACION:

i) ⇒ ii). Evidente.

ii) ⇒ iii). Sea A un subconjunto cerrado de $\mathcal{T}$ y $f : A \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ una aplicación continua tal que existe $g \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ con $g(t) = f(t), \ \forall \ t \in A$. Entonces por ii), existen $e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$, $h \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ y $\alpha \in]0,1]$ tales que

$$g = \alpha e + (1\text{-}\alpha)h.$$

Así, para cada t en A, se tiene, $g(t) = \alpha e(t) + (1\text{-}\alpha)h(t)$. Puesto que $g(t) \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo, de lo anterior se deduce que $e(t) = g(t)$ para cada t en A. Por tanto, la aplicación $e : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ es una extensión continua de f (se ha hecho uso de la proposición anterior para garantizar que e toma todos sus valores en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$).

iii) ⇒ i). Sea $y \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, arbitrario y sea α un número real en la situación $0 < \alpha < \dfrac{1+m(y)}{2}$. Consideremos el conjunto (cerrado)

$$A = \{t \in \mathcal{T} : \|y(t)\| \geq 1\text{-}2\alpha\}.$$

Si $\alpha \geq \frac{1}{2}$ es obvio que $m(y) > 0$ y por tanto $\|y(t)\| > 0 \geq 1\text{-}2\alpha, \ \forall \ t \in \mathcal{T}$, con lo que, en este caso, $A = \mathcal{T}$. Si $\alpha < \frac{1}{2}$, $\|y(t)\| \geq 1\text{-}2\alpha > 0, \ \forall \ t \in A$.

Sea $f : A \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ la función definida por

$$f(t) = \frac{y(t)}{\|y(t)\|}, \ \forall \ t \in A$$

y consideremos la función $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ dada como sigue

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in A \\ \dfrac{y(t)}{1\text{-}2\alpha} & \text{si } t \notin A \end{cases}$$

nótese que la segunda línea sólo aparece en el caso $\alpha < \frac{1}{2}$ (en caso contrario $A = \mathcal{T}$) y consecuentemente g está bien definida. Además, es inmediato que

$g \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ y $g(t) = f(t)$, $\forall\ t \in A$. Por iii) existe una aplicación continua $e : \mathcal{T} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ tal que $e(t) = f(t)$, $\forall\ t \in A$. De acuerdo con la proposición 2.7 $e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$ y, si $t \in A$, tenemos

$$\alpha + \|y(t) - \alpha e(t)\| = \alpha + \|y(t) - \alpha \frac{y(t)}{\|y(t)\|}\| = \alpha + |\,\|y(t)\| - \alpha| \leq 1$$

del mismo modo, si $t \notin A$

$$\alpha + \|y(t) - \alpha e(t)\| \leq 2\alpha + \|y(t)\| < 2\alpha + 1 - 2\alpha = 1.$$

Por tanto, $\alpha + \|y - \alpha e\| \leq 1$ y aplicando la proposición 1.7 obtenemos que $\lambda(y) \geq \alpha$. La arbitrariedad de α permite deducir que $\lambda(y) \geq \dfrac{1+m(y)}{2}$. De ello se sigue que $\lambda(\mathcal{Y}) \geq \frac{1}{2}$ y en consecuencia $\mathcal{Y}$ tiene la λ-propiedad uniforme. Para demostrar la desigualdad restante sean, $y \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, $e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$ y $\alpha \geq 0$ tales que $\alpha + \|y - \alpha e\| \leq 1$. Entonces, dado $t \in \mathcal{T}$, se tiene

$$\alpha + \|y(t) - \alpha e(t)\| \leq 1 \quad \text{y, por tanto,} \quad 2\alpha - \|y(t)\| \leq 1$$

de donde de sigue que $\alpha \leq \dfrac{1+m(y)}{2}$ y así la proposición 1.7 permite concluir que $\lambda(y) \leq \dfrac{1+m(y)}{2}$. #

La parte iii) $\Rightarrow$ i) del resultado anterior se inspira en el teorema 1.6 de [5].

PROPIEDAD DE EXTENSION

El teorema 2.8 motiva la introducción del concepto esencial del presente capítulo:

2.9 DEFINICION.

Diremos que el par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión si* $\mathcal{T}$ *es un espacio topológico,* $\mathcal{X}$ *es un espacio normado y se satisface la condición iii) del teorema* 2.8, *es decir, toda aplicación continua* $f : A \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *definida en un conjunto cerrado* A *de* $\mathcal{T}$ *y tal que exista* $g : \mathcal{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *continua con* $g(t) = f(t)$, $\forall\ t \in A$, *admite una extensión continua* $e : \mathcal{T} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Seguidamente pondremos de manifiesto que la propiedad de extensión es "topológica":

2.10 PROPOSICION.

Sean $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ *espacios topológicos homeomorfos y* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *espacios normados topológicamente isomorfos. Entonces* $(\mathcal{T}_1,\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión si, y sólo si, la tiene* $(\mathcal{T}_2,\mathcal{Y})$.

DEMOSTRACION:

Sea $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un isomorfismo topológico. Las aplicaciones

$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ y $\psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ dadas por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{\|x\|}{\|F(x)\|} F(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \psi(y) = \begin{cases} \dfrac{\|y\|}{\|F^{-1}(y)\|} F^{-1}(y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

son claramente continuas y

$$\psi\circ\varphi(x) = x, \ \forall\, x \in \mathcal{X} \quad , \quad \varphi\circ\psi(y) = y, \ \forall\, y \in \mathcal{Y}.$$

En particular, φ es un homeomorfismo de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ y $\varphi^{-1} = \psi$. Además, $\|\varphi(x)\| = \|x\|$, $\forall\, x \in \mathcal{X}$ y $\|\psi(y)\| = \|y\|$, $\forall\, y \in \mathcal{Y}$. Por tanto,

$$\varphi(\mathcal{B}(\mathcal{X})) = \mathcal{B}(\mathcal{Y}) \ \text{ y } \ \varphi(\mathcal{S}(\mathcal{X})) = \mathcal{S}(\mathcal{Y}).$$

Sea $h : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ un homeomorfismo y supongamos que $(\mathcal{T}_1,\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión. Dada $f : A \to \mathcal{S}(\mathcal{Y})$ continua definida en un cerrado A de $\mathcal{T}_2$ y tal que existe $g : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ continua con $g(s) = f(s)$, $\forall\, s \in A$, es obvio que la aplicación

$$\psi\circ g\circ h : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$$

es continua y dado $t \in h^{-1}(A)$, $\|g(h(t))\| = 1$. Esto muestra que la restricción de $\psi\circ g\circ h$ al cerrado de $\mathcal{T}_1$, $h^{-1}(A)$, es una aplicación (continua) de $h^{-1}(A)$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ que admite una extensión (la propia aplicación $\psi\circ g\circ h$) de $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Por hipótesis, existe $e : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ continua tal que $e(t) = \psi\circ g\circ h(t)$, $\forall\, t \in h^{-1}(A)$. Entonces $\varphi\circ e\circ h^{-1}$ es una aplicación continua de $\mathcal{T}_2$ en $\mathcal{S}(\mathcal{Y})$ y dado $s \in A$,

$$\varphi\circ e\circ h^{-1}(s) = \varphi(e(h^{-1}(s))) = \varphi(\psi\circ g\circ h(h^{-1}(s))) = \varphi\circ\psi(g(s)) = g(s) = f(s).$$

Así pues, $(\mathcal{T}_2,\mathcal{Y})$ tiene la propiedad de extensión. #

Recordemos que un espacio topológico $\mathcal{T}$ se dice normal si $\mathcal{T}$ es Hausdorff y dados $A,B \subset \mathcal{T}$, cerrados y disjuntos, existen dos abiertos G_1 y G_2 tales que $A \subset G_1$, $B \subset G_2$ y $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico Hausdorff. Es conocido que las siguientes afirmaciones son equivalentes (véase por ejemplo [37], págs. 76 a 92):

1) $\mathcal{T}$ es normal.

2) Dados A y B, subconjuntos de $\mathcal{T}$ cerrados y disjuntos, existe una aplicación continua $f : \mathcal{T} \to [0,1]$ tal que $f(A) \subset \{0\}$ y $f(B) \subset \{1\}$.

3) Dado $\mathcal{X}$, espacio normado de dimensión finita y $f : A \to \mathcal{X}$ continua definida en un subconjunto cerrado A de $\mathcal{T}$, existe $g : \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ continua tal que $g(t) = f(t), \forall\, t \in A$.

4) Dado $\mathcal{X}$, espacio normado de dimensión finita y $f : A \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ continua definida en un cerrado A de $\mathcal{T}$, existe $g : \mathcal{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ continua tal que $g(t) = f(t), \forall\, t \in A$.

Entre los espacios normales cabe destacar los espacios métricos y los espacios compactos Hausdorff.

Como consecuencia inmediata tenemos:

2.11 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico normal y $\mathcal{X}$ un espacio normado de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión.*

ii) *Dada* $\mathrm{f} : \mathrm{A} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *continua definida en un subconjunto cerrado* A *de* $\mathcal{T}$ *existe* $\mathrm{e} : \mathcal{T} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *continua tal que* $\mathrm{e}|_{\mathrm{A}} = \mathrm{f}$.

Obsérvese que, en general, ii) $\Rightarrow$ i) para todo espacio topológico $\mathcal{T}$ y todo espacio normado $\mathcal{X}$ (no es necesario que se verifiquen las condiciones del enunciado anterior). Sin embargo, no siempre ocurre que la propiedad de extensión implique la afirmación ii), incluso siendo $\mathcal{T}$ normal. Señalemos, no obstante, que para $\mathcal{T}$ métrico i) y ii) son equivalentes, como veremos, cualquiera que sea $\mathcal{X}$ (finito o infinito-dimensional).

A continuación estudiaremos la propiedad de extensión y la propiedad ii) para $\mathcal{X}$ de dimensión infinita. Ello aclarará el comentario anterior y, lo que es más importante, nos proveerá de pares $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ con la propiedad de extensión cuyo conocimiento necesitaremos después.

Comencemos enunciando el siguiente resultado de Dugundji del que también haremos uso en el capítulo III:

2.12 PROPOSICION ([19], teorema 6.2).

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado infinito-dimensional. Entonces* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *es un retracto absoluto. Es decir, dado un espacio métrico* $\mathcal{T}$, *un subconjunto cerrado* A *de* $\mathcal{T}$ *y una aplicación continua* $f : A \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *existe una extensión continua* $e : \mathcal{T} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Existen consecuencias muy interesantes de la proposición anterior. Las que citamos a continuación caracterizan la dimensión de $\mathcal{X}$:

2.13 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado. Equivalen:*

i) $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *es contráctil, esto es, existe* $H : \mathcal{S}(\mathcal{X}) \times [0,1] \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *continua y* $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ tales que $H(x,0) = x$, $H(x,1) = x_0$, $\forall\, x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

ii) $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *es un retracto de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, *es decir, existe* $r : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *continua tal que* $r(x) = x, \ \forall \ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

iii) *Existe* $f : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *continua y sin puntos fijos.*

iv) $\mathcal{X}$ *es infinito-dimensional.*

Es sencillo probar que i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii). Por otra parte, iii) $\Rightarrow$ iv) es consecuencia inmediata del teorema del punto fijo de Brouwer y iv) $\Rightarrow$ i) se sigue con facilidad de la proposición 2.12 (véase [19]).

En [10] se prueba que, de hecho, (para $\mathcal{X}$ infinito-dimensional) existen aplicaciones H , r y f que, además de cumplir lo que para ellas se indica en los apartados i), ii) y iii), verifican una condición de Lipschitz (en particular son uniformemente continuas) y en el caso de f,

$$Inf \{\|x-f(x)\| \ : \ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\} > 0.$$

El siguiente enunciado expresa muy bien la importancia que, para nosotros, tiene el corolario 2.13:

2.14 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado infinito-dimensional. Entonces* $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión cualquiera que sea el espacio topológico* $\mathcal{T}$.

DEMOSTRACION:

De acuerdo con el corolario 2.13 $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ es un retracto de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$; por tanto, existe $r : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ continua tal que $r(x) = x, \ \forall \ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$. Dada $f : A \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ continua definida en un subconjunto cerrado A de $\mathcal{T}$ y tal que existe una aplicación continua $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ con $g(t) = f(t), \forall t \in A$, basta considerar $e = r \circ g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ que obviamente es continua y extiende a f. #

Por otra parte, en la línea de la proposición 2.11 podemos ahora afirmar lo siguiente.

2.15 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio métrico y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado. Equivalen:*

i) $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión.*

ii) *Dada* $\mathrm{f} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *continua definida en un subconjunto cerrado* A *de* $\mathcal{T}$ *existe* $\mathrm{e} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *continua tal que* $\mathrm{e}_{|\mathrm{A}} = \mathrm{f}$.

En el caso finito-dimensional es consecuencia de la proposición 2.11 y en el caso restante ambas propiedades son automáticas según se desprende del corolario anterior y de la proposición 2.12.

El enunciado anterior no se cumple, en general, para $\mathcal{T}$ normal y $\mathcal{X}$ de dimensión infinita, según puede deducirse de un resultado de Dowker (véase [17]). No obstante, dicho resultado permite probar que, siendo $\mathcal{X}$ un espacio de Banach, la proposición 2.15 se verifica para una clase de espacios topológicos intermedia entre los espacios normales y los espacios métricos. Son los llamados espacios colectivamente normales. Un espacio topológico $\mathcal{T}$ se dice colectivamente normal si es Hausdorff y dada una familia de cerrados de $\mathcal{T}$, $\mathfrak{F} = \{F_i : i \in \mathrm{I}\}$, con la propiedad de que todo punto de $\mathcal{T}$ tiene un entorno que corta, a lo sumo, a un elemento de $\mathfrak{F}$, existe una familia de abiertos, $\{G_i : i \in \mathrm{I}\}$, tal que $F_i \subset G_i$, $\forall\, i \in \mathrm{I}$ y $G_i \cap G_j = \emptyset$, para todo $i,j \in \mathrm{I}$ con $i \neq j$. En [37] puede encontrarse más información al respecto (aunque no incluyen la condición de Hausdorff para el concepto de espacio colectivamente normal y denominan espacio T_4^* a los que aquí hemos denominado colectivamente normales. Con este mismo criterio definen los restantes axiomas de separación).

Seguidamente consideraremos nuevos pares con la propiedad de extensión. Estudiaremos también cierta clase de pares que no poseen la citada propiedad.

2.16 EJEMPLOS.

i) Si $\mathcal{T}$ es un espacio topológico discreto entonces $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión cualquiera que sea el espacio normado $\mathcal{X}$. Esto es evidente pues todas las aplicaciones que parten de $\mathcal{T}$ con valores en cualquier otro espacio (topológico) son continuas.

ii) Sea $\mathcal{T} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compactificación por un punto de los naturales. Entonces, dado cualquier espacio normado $\mathcal{X}$, el par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión.

En efecto, sea $f : A \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ una aplicación continua definida en un subconjunto cerrado A de $\mathcal{T}$. Si $\infty \in A$, la aplicación $e : \mathcal{T} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ definida por $e(t) = f(t)$, si $t \in A$, $e(t) = f(\infty)$, si $t \notin A$ es claramente continua y extiende a f. Si $\infty \notin A$ consideremos $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ y sea $e : \mathcal{T} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ la aplicación dada por $e(t) = f(t)$, si $t \in A$, $e(t) = x_0$, si $t \notin A$. También en este caso e es una extensión continua de f.

Nótese que $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ coincide con $c(\mathcal{X})$, el espacio de todas las sucesiones convergentes de elementos de $\mathcal{X}$.

Obsérvese, por otra parte, que en los anteriores ejemplos $\mathcal{T}$ es metrizable y se verifica, como hemos comprobado, la versión fuerte de la propiedad de extensión (afirmación ii) de la proposición 2.15).

iii) Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado de dimensión finita y consideremos $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$. El par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ no tiene la propiedad de extensión:

Sea $A = \mathcal{S}(\mathcal{X})$ y $f : A \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ la aplicación (claramente continua) dada por $f(t) = t$, $\forall\, t \in A$. Sea $g : \mathcal{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ la identidad en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$; es obvio que $g(t) = f(t)$, $\forall\, t \in A$ y, sin embargo, no existe una aplicación continua $e : \mathcal{T} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ tal que $e(t) = f(t) = t$, $\forall\, t \in A$ ya que $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ no es un retracto de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ (corolario 2.13, puede verse también [18],corolario XVI 2.2.(1)).

Teniendo en cuenta el teorema 2.8, el corolario 2.14 y los ejemplos 2.16 obtenemos:

2.17 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado estrictamente convexo.

i) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la λ-propiedad uniforme cualquiera que sea el espacio topológico discreto $\mathcal{T}$.*

ii) $c(\mathcal{X})$ *tiene la λ-propiedad uniforme. De hecho, dada $\{x_n\}$ en la bola unidad de $c(\mathcal{X})$ se tiene que*

$$\lambda(\{x_n\}) = \frac{1+m}{2}, \quad \textit{donde} \quad m = \operatorname{Inf}\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

iii) *Si $\mathcal{X}$ es infinito-dimensional entonces, dado cualquier espacio topológico $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme.*

Además, en los casos i) y iii), para $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$, se tiene,

$$\lambda(y) = \frac{1+m(y)}{2}, \quad \forall\, y \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}).$$

$$\textit{donde} \quad m(y) = \operatorname{Inf}\{\|y(t)\| : t \in \mathcal{T}\}.$$

Como caso particular del apartado i) se tiene que $l_\infty(\mathcal{X}) = \mathcal{C}(\mathbb{N},\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme para todo espacio estrictamente convexo $\mathcal{X}$ (teorema 1.13 de [5]). No obstante, sobre este tipo de espacios disponemos de mejor información (corolario 1.25). Hemos de señalar que el apartado ii) fue probado en [5] para $\mathcal{X}$ infinito-dimensional y en [2] sin restricciones sobre la dimensión de $\mathcal{X}$. Finalmente, el apartado iii) fue probado en [5] suponiendo $\mathcal{T}$ métrico compacto.

El teorema 2.8 y, en consecuencia, el corolario anterior han sido establecidos para $\mathcal{X}$ estrictamente convexo. Es natural cuestionarse la validez de estos resultados si se prescinde de esta hipótesis. Los ejemplos que siguen ponen de manifiesto que, en tales circunstancias, el citado teorema puede fallar.

2.18 EJEMPLOS.

i) El par $(\mathbb{N},l_1)$ tiene la propiedad de extensión ($\mathbb{N}$ es un espacio topológico discreto), sin embargo, $\mathcal{C}(\mathbb{N},l_1) = l_\infty(l_1)$ no posee la λ-propiedad ya que, de acuerdo con el comentario que sigue al corolario 1.19 l_1 (posee la λ-propiedad pero) no tiene la λ-propiedad uniforme (véase también el corolario 1.25).

En el siguiente ejemplo consideraremos un espacio $\mathcal{X}$ con una estructura extremal más rica que la de l_1 ($\mathcal{X}$ tiene la P.R.C. y la λ-propiedad uniforme). Además, el par $([0,1],\mathcal{X})$ verifica la propiedad de extensión y, sin embargo, $\mathcal{C}([0,1],\mathcal{X})$ no posee la λ-propiedad:

ii) En [5], teorema 1.9, se prueba que $\mathcal{C}([0,1],\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme para todo espacio normado estrictamente convexo $\mathcal{X}$ de dimensión distinta de uno (si $\mathcal{X}$ es infinito-dimensional este teorema es un caso particular de nuestro corolario 2.17 iii), para $\mathcal{X}$ de dimensión finita quedará también como caso particular de un resultado que probaremos en el siguiente apartado, con total independencia del mencionado teorema). Así pues, de acuerdo con el teorema 2.8, el par $([0,1],\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión para todo espacio normado estrictamente convexo $\mathcal{X}$ de dimensión distinta de uno. Puesto que la propiedad de extensión es topológica (proposición 2.10), de ello se deduce que $([0,1],\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión para todo espacio normado (no necesariamente estrictamente convexo) de dimensión distinta de uno. Nótese que para $\mathcal{X}$ infinito-dimensional la propiedad de extensión es automática cualquiera que sea $\mathcal{T}$ y que, si $\mathcal{X}$ es de dimensión finita, entonces $\mathcal{X}$ es topológicamente isomorfo a un espacio estrictamente convexo.

Sea pues $\mathcal{T} = [0,1]$ y $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. El espacio $\mathcal{X}$ tiene la P.R.C. y la λ-propiedad uniforme (comentario que sigue a la definición 1.4 y proposición 1.12 i)). Además $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión tal como acabamos de comentar.

Veamos en primer lugar que para $e \in \mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ se tiene que

$$e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y}) \text{ si, y sólo si, } e(t) \in \mathcal{E}(\mathcal{X}),\ \forall\, t \in \mathcal{T}.$$

Obsérvese en consecuencia que los únicos puntos extremos de $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$ son las funciones constantes, valuadas en uno de los (cuatro) puntos extremos de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$.

De acuerdo con la proposición 2.7 (i) $\Rightarrow$ ii)) sólo hemos de probar que la condición es necesaria. Sea pues $e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$ y supongamos, razonando por reducción al absurdo, que existe $t_0 \in \mathcal{T}$ tal que $e(t_0) \notin \mathcal{E}(\mathcal{X})$. Si e_1 y e_2 son las funciones coordenadas de e, podemos escribir

$$e(t_0) = (e_1(t_0), e_2(t_0))$$

y dado que $\|e(t)\|_\infty = 1,\ \forall\, t \in \mathcal{T}$, en particular,

$$e_1(t_0) \in \{-1,1\} \text{ ó } e_2(t_0) \in \{-1,1\}.$$

Supongamos, por ejemplo, que $e_2(t_0) = 1$. La condición $e(t_0) \notin \mathcal{E}(\mathcal{X})$ implica entonces que $-1 < e_1(t_0) < 1$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{Min} \{1 + e_1(t_0), 1 - e_1(t_0)\}$ y $\alpha : \mathcal{X} \longrightarrow [0,1]$ una función continua tal que, $\alpha(x) = 1$ si $\|x - e(t_0)\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha(x) = 0$ si $\|x - e(t_0)\|_\infty \ge \varepsilon$. Consideremos las funciones g y h de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$ definidas, para cada t en $\mathcal{T}$, por

$$g(t) = (e_1(t) - \alpha(e(t))\varepsilon\ ,\ e_2(t))$$

$$h(t) = (e_1(t) + \alpha(e(t))\varepsilon\ ,\ e_2(t)).$$

Evidentemente ambas funciones son continuas y $e = \frac{g+h}{2}$. Veamos ahora que $g,h \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$. Para ello, sea $t \in \mathcal{T}$, arbitrario; si $\|e(t) - e(t_0)\|_\infty \le \varepsilon$, entonces $|e_1(t) - e_1(t_0)| \le \varepsilon$ y, por tanto,

$$e_1(t) - \alpha(e(t))\varepsilon = e_1(t) - e_1(t_0) + e_1(t_0) - \alpha(e(t))\varepsilon \leq$$

$$\leq \varepsilon + e_1(t_0) - \alpha(e(t))\varepsilon \leq \varepsilon + 1\text{-}2\varepsilon - \alpha(e(t))\varepsilon =$$

$$1 - \varepsilon - \alpha(e(t))\varepsilon \leq 1.$$ Por otra parte,

$$e_1(t) - \alpha(e(t))\varepsilon = e_1(t) - e_1(t_0) + e_1(t_0) - \alpha(e(t))\varepsilon \geq$$

$$\geq -\varepsilon + 2\varepsilon\text{-}1 - \alpha(e(t))\varepsilon = -1 + (1 - \alpha(e(t)))\varepsilon \geq -1.$$

De lo anterior se sigue que $|e_1(t) - \alpha(e(t))\varepsilon| \leq 1$ y de igual forma se prueba que $|e_1(t) + \alpha(e(t))\varepsilon| \leq 1$. Ambos resultados son evidentes si $\|e(t) - e(t_0)\|_\infty \geq \varepsilon$ pues, en estas condiciones, $\alpha(e(t)) = 0$. Es ahora claro que $\|g(t)\|_\infty \leq 1$ y $\|h(t)\|_\infty \leq 1$ de donde se sigue, dada la arbitrariedad de t, que g y h son elementos de la bola unidad de $\mathcal{Y}$. Además, es obvio que $g \neq h$, lo que contradice que e sea un punto extremo de $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$.

Sea la función $f : \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ dada por $f(t) = (2t\text{-}1,1)$, para todo t en $\mathcal{T}$. Supongamos que existe $\lambda \in]0,1]$ y $e,y \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$, con e extremo, tales que $f = \lambda e + (1\text{-}\lambda)y$. Entonces se tiene, en particular,

$$f(0) = (-1,1) = \lambda e(0) + (1\text{-}\lambda)y(0)$$

y puesto que $(-1,1)$ es un punto extremo de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ es obvio que $e(0) = (-1,1)$.

De acuerdo con lo anterior $e(t) = (-1,1)$, $\forall\, t \in \mathcal{T}$. Por otra parte,

$$f(1) = (1,1) = \lambda e(1) + (1\text{-}\lambda)y(1)$$

de donde se sigue, como antes, que $e(1) = (1,1)$. Contradicción. Por tanto, $\mathcal{Y}$ no tiene la λ-propiedad.

DIMENSION TOPOLOGICA

Dado un espacio topológico $\mathcal{T}$ y un espacio normado $\mathcal{X}$, a poco que se observen el corolario 2.14 y los ejemplos 2.16 es fácil adivinar que si el par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión entonces debe existir alguna relación entre la "dimensión topológica" de $\mathcal{T}$ y la dimensión algebraica de $\mathcal{X}$. Naturalmente, la formalización de esta idea requiere algunas definiciones previas que daremos a continuación. Todas ellas pueden encontrarse en [21].

Sea $\mathcal{T}$ un conjunto. Se denomina orden de una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\mathcal{T}$ al mayor entero n tal que $\mathcal{F}$ contiene $n+1$ conjuntos con intersección no vacía. Si tal entero no existe se dice que el orden de $\mathcal{F}$ es infinito. Así, por ejemplo, una familia de orden -1 consta tan solo del conjunto vacío y una familia de orden 0 está formada por conjuntos disjuntos dos a dos, no todos vacíos. Por otra parte, si $\mathcal{F}$ es de orden n, dados $A_1,\ldots,A_{n+2} \in \mathcal{F}$, distintos dos a dos, se tiene que $A_1\cap\ldots\cap A_{n+2} = \emptyset$.

Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ recubrimientos del conjunto $\mathcal{T}$. Se dice que $\mathcal{R}'$ es un refinamiento de $\mathcal{R}$ si todo elemento de $\mathcal{R}'$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{R}$. Evidentemente cualquier subrecubrimiento de $\mathcal{T}$ extraido de $\mathcal{R}$ es un refinamiento de $\mathcal{R}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{T}$ es un espacio topológico. Se dice que un subconjunto A de $\mathcal{T}$ es funcionalmente cerrado si existe una función continua $f : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ tal que $A = f^{-1}(\{0\})$. Y se dice que A es funcionalmente abierto si $\mathcal{T}\setminus A$ es funcionalmente cerrado. Obsérvese que todo conjunto funcionalmente cerrado (resp. funcionalmente abierto) es cerrado (resp. abierto) y nótese además que si $\mathcal{T}$ es un espacio métrico, A es funcionalmente cerrado si, y sólo si A es cerrado. Esto último es claro pues, para todo cerrado A de $\mathcal{T}$, $A = f^{-1}(\{0\})$ siendo $f : \mathcal{T} \longrightarrow [0,1]$ la aplicación dada por $f(t) = \dfrac{d(t,A)}{1 + d(t,A)}$. Como consecuencia, también los conjuntos abiertos y los conjuntos funcionalmente abiertos coinciden en espacios métricos.

Resumimos a continuación algunos hechos básicos sobre conjuntos funcionalmente cerrados que necesitaremos posteriormente:

2.19 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico.*

i) *Dado un subconjunto* A *de* $\mathcal{T}$, *son equivalentes:*

1) A *es funcionalmente cerrado.*

2) *Existen* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, $C \subset [a,b]$, *cerrado y* $g : \mathcal{T} \longrightarrow [a,b]$ *continua tales que* $A = g^{-1}(C)$.

3) *Existen* $C \subset \mathbb{R}$, *cerrado y* $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua tales que*

$$A = g^{-1}(C).$$

ii) *Si* A *y* B *son subconjuntos funcionalmente cerrados de* $\mathcal{T}$ *entonces* $A \cup B$ *es funcionalmente cerrado.*

iii) *Si* A *y* B *son funcionalmente cerrados y disjuntos, dados* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *existe* $\varphi : \mathcal{T} \longrightarrow [a,b]$ *continua tal que*

$$A = \varphi^{-1}(\{a\}) \text{ y } B = \varphi^{-1}(\{b\}).$$

DEMOSTRACION:

i) Es evidente que 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3). Supongamos que se verifica 3) y sea

$f : \mathcal{T} \longrightarrow [0,1]$ la aplicación definida por

$$f(t) = \frac{d(g(t),C)}{1 + d(g(t),C)}, \ \forall\, t \in \mathcal{T},$$

f es continua y dado $t \in \mathcal{T}$ se tiene que

$$t \in f^{-1}(\{0\}) \Leftrightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow g(t) \in C \Leftrightarrow t \in g^{-1}(C) = A$$

luego $A = f^{-1}(\{0\})$ y por tanto A es funcionalmente cerrado.

ii) Por hipótesis, existen $f_1, f_2 : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ continuas tales que $A = f_1^{-1}(\{0\})$ y $B = f_2^{-1}(\{0\})$. La aplicación $f : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ dada por

$$f(t) = f_1(t)f_2(t), \ \forall\, t \in \mathcal{T}$$

es continua y $A \cup B = f^{-1}(\{0\})$.

iii) Sean $f_1, f_2 : \mathcal{T} \rightarrow [0,1]$ continuas con $A = f_1^{-1}(\{0\})$ y $B = f_2^{-1}(\{0\})$ y sea $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow [a,b]$ dada por

$$\varphi(t) = a + \frac{f_1(t)}{f_1(t) + f_2(t)}\,(b-a), \ \forall\, t \in \mathcal{T},$$

φ está bien definida ($A \cap B = \emptyset$), es continua y $\varphi^{-1}(\{a\}) = A$, $\varphi^{-1}(\{b\}) = B$. #

Un recubrimiento $\mathcal{R}$ de un espacio topológico $\mathcal{T}$ se dice funcionalmente abierto si todos los elementos de $\mathcal{R}$ son subconjuntos funcionalmente abiertos de $\mathcal{T}$.

2.20 DEFINICION.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico completamente regular y $n \geq -1$, *un entero. Escribimos*

i) $\dim \mathcal{T} \leq n$ *si cada recubrimiento finito y funcionalmente abierto de* $\mathcal{T}$ *posee un refinamiento finito y funcionalmente abierto de orden menor o igual que* n.

ii) $\dim \mathcal{T} = n$ *si* $\dim \mathcal{T} \leq n$ *es cierto y* $\dim \mathcal{T} \leq n-1$ *es falso.*

iii) dim $\mathcal{T} = \infty$ *si* dim $\mathcal{T} \leq$ n *es falso cualquiera que sea* n.

El "número" *dim* $\mathcal{T}$ así definido recibe el nombre de dimensión de Čech-Lebesgue o dimensión recubridora del espacio $\mathcal{T}$. Se sigue inmediatamente de la definición que *dim* $\mathcal{T} = -1$ si, y sólo si, $\mathcal{T} = \emptyset$. Sin embargo, en general, afirmar que *dim* $\mathcal{T} = 0$ no equivale a decir que $\mathcal{T}$ es cero-dimensional en el sentido habitual, consistente en poseer una base de su topología formada por conjuntos abiertos y cerrados. De hecho, la primera afirmación es más restrictiva que la segunda y algunos autores dicen que $\mathcal{T}$ es fuertemente cero-dimensional si *dim* $\mathcal{T} = 0$. No obstante, si (además de ser completamente regular) $\mathcal{T}$ es de Lindelöf (de cada recubrimiento abierto de $\mathcal{T}$ puede extraerse un subrecubrimiento numerable), *dim* $\mathcal{T} = 0$ si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es cero-dimensional. Así, en ambientes propicios, la noción de dimensión que acabamos de introducir es una generalización de la (más conocida) noción de espacio cero-dimensional.

En teoría de la dimensión suelen estudiarse dos conceptos más de dimensión topológica, *ind* $\mathcal{T}$ e *Ind* $\mathcal{T}$ (notación de [21]), cuyos ambientes naturales son, repectivamente, los espacios regulares y los espacios normales. Ambas coinciden con la expuesta aquí en el ambiente de los espacios métricos separables ([21], teorema 7.3.3). Hurewicz y Wallman (véase [24]) realizaron un detallado estudio de la dimensión *ind* en estos últimos espacios (lo que equivale, en vista de lo anterior, a estudiar la propia dimensión recubridora *dim*). Si $\mathcal{X}$ es un espacio normado podemos ahora referirnos a la dimensión de $\mathcal{X}$ de dos formas distintas, aludiendo a su dimensión algebraica o bien a su dimensión recubridora. En el siguiente enunciado, cuya demostración se puede consultar en [21] y [24], recogemos algunos hechos de teoría de la dimensión que, en particular, aclaran esta situación. En concreto, afirmar que la dimensión algebraica de $\mathcal{X}$ es finita es equivalente a decir que la dimensión recubridora de $\mathcal{X}$ es finita y, en tal caso, ambas dimensiones coinciden. Esto justifica que hayamos usado el mismo símbolo, *dim* $\mathcal{X}$, para referirnos tanto a la dimensión recubridora como a la dimensión algebraica de $\mathcal{X}$. No obstante, si $\mathcal{X}$ es infinito-dimensional la notación *dim* $\mathcal{X}$ podría resultar confusa (puesto que la dimensión recubridora, a diferencia de la dimensión algebraica, no distingue diferentes tipos de infinitud). Para evitar este pequeño defecto de notación *dim* $\mathcal{X}$ representará, en cualquier caso, la dimensión algebraica de $\mathcal{X}$ (que coincide con su dimensión topológica si $\mathcal{X}$ es finito-dimensional).

2.21 PROPOSICION.

i) *Sean* $\mathcal{T}_1$ *y* $\mathcal{T}_2$ *espacios topológicos completamente regulares. Si* $\mathcal{T}_1$ *y* $\mathcal{T}_2$ *son homeomorfos entonces* $\dim \mathcal{T}_1 = \dim \mathcal{T}_2$.

ii) *Para todo espacio completamente regular* $\mathcal{T}$ *se verifica que*

$$\dim \mathcal{T} = \dim \beta(\mathcal{T}).$$

iii) a) *Sea* $\mathcal{T}$ *un espacio topológico normal y* A *un subconjunto cerrado de* $\mathcal{T}$, *entonces* $\dim A \leq \dim \mathcal{T}$.

b) *Si* $\mathcal{T}$ *es un espacio métrico separable y* A *es cualquier subconjunto de* $\mathcal{T}$ *entonces* $\dim A \leq \dim \mathcal{T}$.

iv) a) *La dimensión recubridora del espacio euclídeo* $\mathbb{R}^n$ *es* n *y coincide, por tanto, con su dimensión algebraica.*

b) *Una condición necesaria y suficiente para que la dimensión recubridora de un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}^n$ *sea* n *es que el interior de* A *sea no* *vacío.*

v) *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio normado. La dimensión algebraica de* $\mathcal{X}$ *es finita si, y sólo si, lo es su dimensión recubridora y, en caso afirmativo, coinciden.*

vi) *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio normado de dimensión finita y* A *un subconjunto de* $\mathcal{X}$. *Entonces* $\dim A \leq \dim \mathcal{X}$ *y la igualdad se verifica si, y sólo si,* A *tiene interior no vacío.*

Nuestro objetivo actual es, como indicábamos al comienzo de este apartado, relacionar la propiedad de extensión con la dimensión recubridora. Para ello necesitamos la caracterización de la dimensión que enunciaremos tras el siguiente concepto.

2.22 DEFINICION ([21], pág. 398).

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* (A,B) *un par de subconjuntos de* $\mathcal{T}$ *con* $A \cap B = \emptyset$. *Un subconjunto cerrado* L *de* $\mathcal{T}$ *se denomina partición entre* A *y* B *si existen abiertos* $U,V \subset \mathcal{T}$ *tales que* $A \subset U$, $B \subset V$ *y* $\mathcal{T} \setminus L = U \cup V$.

2.23 PROPOSICION ([21], teorema 7.2.15).

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio completamente regular y* $n \geq 0$, *un entero. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\dim \mathcal{T} \leq n$

ii) *Dados* $n+1$ *pares* $(A_1,B_1),\ldots,(A_{n+1},B_{n+1})$ *de subconjuntos funcionalmente cerrados de* $\mathcal{T}$ *tales que* $A_k \cap B_k = \emptyset$, $\forall\ k \in \{1,\ldots,n+1\}$ *existen conjuntos funcionalmente cerrados* $L_1,\ldots,L_{n+1}$ *tales que* $L_1 \cap \ldots \cap L_{n+1} = \emptyset$ *y* L_k *es una partición entre* A_k *y* B_k *para cada* $k \in \{1,\ldots,n+1\}$.

Haremos uso además del siguiente resultado:

2.24 LEMA.

Sean $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *espacios normados topológicamente isomorfos y sea* $\mathcal{T}$ *un espacio topológico. El conjunto* $A = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X}) : f(t) \neq 0, \forall\, t \in \mathcal{T}\}$ *es denso en* $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *si, y sólo si, el conjunto* $B = \{g \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{Y}) : g(t) \neq 0, \forall\, t \in \mathcal{T}\}$ *es denso en* $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{Y})$.

DEMOSTRACION:

Sea $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ un isomorfismo topológico y supongamos, por ejemplo, que A es denso en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. Si $h \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{Y})$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ es obvio que

$$F^{-1} \circ h \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X}),$$

luego existe $f \in A$ tal que $\|f - F^{-1} \circ h\| < \dfrac{\varepsilon}{\|F\|}$. Entonces $F \circ f \in B$ y dado $t \in \mathcal{T}$, $\|(F \circ f - h)(t)\| = \|F(f(t)) - h(t)\| = \|F(f(t)) - F(F^{-1} \circ h(t))\| =$

$$\|F(f(t) - F^{-1} \circ h(t))\| \leq \|F\| \|f(t) - F^{-1} \circ h(t)\| \leq \|F\|\ \|f - F^{-1} \circ h\| < \|F\| \frac{\varepsilon}{\|F\|} = \varepsilon,$$

luego $\|F \circ f - h\| \leq \varepsilon$. #

La equivalencia entre i) y iii) en el teorema que sigue fue probada por Smirnov ([51], teorema 9,) siendo $\mathcal{X}$ el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Ofrecemos aquí una demostración que incluye, además, la equivalencia con una propiedad de densidad de funciones continuas que omiten el origen. En los términos en que se enuncia y prueba este resultado creemos que completa, ordena y clarifica la información disponible a este respecto.

2.25 TEOREMA.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico completamente regular y $\mathcal{X}$ un espacio normado de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $1 + \dim \mathcal{T} \leq \dim \mathcal{X}$

ii) *El conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$ que omiten el origen es denso en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$.*

iii) *El par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión.*

DEMOSTRACION:

Sea $n = \dim \mathcal{X} - 1$.

i) ⇒ ii) El espacio $\mathcal{X}$ es topológicamente isomorfo a $(\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_\infty)$, luego, en virtud del lema anterior, podemos suponer que, de hecho, $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_\infty)$. Dada $f \in \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sean $f_1,\ldots,f_{n+1} : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Para cada $k \in \{1,\ldots,n+1\}$ sea

$$A_k = f_k^{-1}([\frac{\varepsilon}{2},+\infty[) \quad \text{y} \quad B_k = f_k^{-1}(]-\infty,-\frac{\varepsilon}{2}]).$$

De acuerdo con la proposición 2.19 i) los conjuntos A_k y B_k son funcionalmente cerrados y es obvio que $A_k \cap B_k = \emptyset$. Por hipótesis $\dim \mathcal{T} \leq n$ y así la proposición 2.23 garantiza la existencia de conjuntos funcionalmente cerrados $L_1,\ldots,L_{n+1}$ tales que $L_1 \cap \ldots \cap L_{n+1} = \emptyset$ y cada L_k es una partición entre A_k y B_k. Dado $k \in \{1,\ldots,n\}$ arbitrario, existen abiertos U_k y V_k tales que

$$A_k \subset U_k\ ,\ B_k \subset V_k\ ,\ U_k \cap V_k = \emptyset \ \text{ y } \ \mathcal{T} \backslash L_k = U_k \cup V_k\ .$$

Los conjuntos L_k y $A_k \cup B_k$ son funcionalmente cerrados (proposición 2.19 ii)) y $L_k \cap (A_k \cup B_k) = \emptyset$. Por tanto (proposición 2.19 iii)) existe

$$\varphi_k : \mathcal{T} \to [0,1] \quad \text{continua, tal que}$$

$$L_k = \varphi_k^{-1}(\{0\}) \quad \text{y} \quad A_k \cup B_k = \varphi_k^{-1}(\{1\}).$$

Sea $g_k : \mathcal{T} \longrightarrow [-1,1]$ la función definida por

$$g_k(t) = \begin{cases} f_k(t) & \text{si } t \in A_k \cup B_k \\ \frac{\varepsilon}{2}\, \varphi_k(t) & \text{si } t \in U_k \backslash A_k \\ -\frac{\varepsilon}{2}\, \varphi_k(t) & \text{si } t \in V_k \backslash B_k \\ 0 & \text{si } t \in L_k \end{cases}$$

y sea $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ la función cuyas coordenadas son $g_1,\ldots,g_{n+1}$. La función g es continua pues, como fácilmente se comprueba, lo son las funciones $g_1,\ldots,g_{n+1}$. Por otra parte, es inmediato que

$$|g_k(t) - f_k(t)| \leq \varepsilon, \ \forall\, k \in \{1,\ldots,n+1\}, \ \forall\, t \in \mathcal{T}, \ \text{luego}$$

$$\|g(t) - f(t)\| \leq \varepsilon, \ \forall\, t \in \mathcal{T}$$

(se trata, como ya hemos indicado con anterioridad, de la norma del máximo en $\mathbb{R}^{n+1}$). Además, para cada k en $\{1,\ldots,n+1\}$, $g_k(t) = 0$, si, y sólo si, $t \in L_k$, lo cual, teniendo en cuenta que $L_1 \cap \ldots \cap L_{n+1} = \varnothing$, implica que g omite el origen.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea A un subconjunto cerrado de $\mathcal{T}$, $f : A \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ continua y $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ una aplicación continua tal que $g(t) = f(t), \ \forall\, t \in A$. La hipótesis nos permite considerar una aplicación $G : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ continua tal que $G(t) \neq 0, \ \forall\, t \in \mathcal{T}$ y $\|G-g\| < \frac{1}{2}$. Sea $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ definida por

$$F(t) = \begin{cases} G(t) & \text{si} \quad \|g(t)\| \le \frac{1}{2} \\ 2(1-\|g(t)\|)G(t) - (1-2\|g(t)\|)g(t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} < \|g(t)\| \le 1 \end{cases}$$

F es continua y para $t \in \mathcal{T}$ con $\frac{1}{2} < \|g(t)\| \le 1$ tenemos,

$$\|F(t) - g(t)\| = \|2(1-\|g(t)\|)G(t) - 2(1-\|g(t)\|)g(t)\| =$$

$$= 2(1-\|g(t)\|)\|G(t)-g(t)\| \le 1 - \|g(t)\|, \quad \text{luego}$$

$$\|F(t)\| = \|g(t) - (g(t)-F(t))\| \ge \|g(t)\| - \|g(t)-F(t)\| \ge$$

$$\ge \|g(t)\| - (1 - \|g(t)\|) = 2\|g(t)\| - 1 > 0.$$

De ello se deduce que F omite el origen y podemos definir $e : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ mediante la expresión

$$e(t) = \frac{F(t)}{\|F(t)\|}, \ \forall \ t \in \mathcal{T}$$

que es continua y extiende a f como, sin dificultad, puede comprobarse.

iii) $\Rightarrow$ i) Puesto que la propiedad de extensión es topológica podemos suponer (como hicimos en i) $\Rightarrow$ ii)) que $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^{n+1}, \|\cdot\|_\infty)$.

Sean $(A_1,B_1),\ldots,(A_{n+1},B_{n+1})$ $n+1$ pares de subconjuntos de $\mathcal{T}$ funcionalmente cerrados y tales que $A_k \cap B_k = \emptyset$, $\forall \ k \in \{1,\ldots,n+1\}$. De acuerdo con la proposición 2.19 iii) para cada k existe $\varphi_k : \mathcal{T} \longrightarrow [-1,1]$ continua tal que $A_k = \varphi_k^{-1}(\{-1\})$ y $B_k = \varphi_k^{-1}(\{1\})$. Sea $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ definida por

$$g(t) = (\varphi_1(t),\ldots,\varphi_{n+1}(t)), \ \forall \ t \in \mathcal{T}$$

g es continua y $A = \{t \in \mathcal{T} : \|g(t)\| = 1\}$ es cerrado (nótese además que, $A_k, B_k \subset A$, $\forall \ k \in \{1,\ldots,n+1\}$). Sea $f = g_{|A}$. Naturalmente f es una función continua de A en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ que admite una extensión continua $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$, luego existe $e : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ continua tal que $e(t) = f(t)$, $\forall \ t \in A$. Sean

$e_1,\ldots,e_{n+1}$ las funciones coordenadas de e y definamos (para cada k en $\{1,\ldots,n+1\}$):

$$L_k = e_k^{-1}(\{0\}) \ , \quad U_k = e_k^{-1}(]-\infty,0[) \ \text{ y } \ V_k = e_k^{-1}(]0,+\infty[),$$

se tiene que $A_k \subset U_k$, $B_k \subset V_k$, $U_k \cap V_k = \emptyset$ y $\mathcal{T} \setminus L_k = U_k \cup V_k$, luego cada L_k es una partición entre A_k y B_k . Además, puesto que e omite el origen, $L_1 \cap \ldots \cap L_{n+1} = \emptyset$. Por tanto, se verifica la afirmación ii) de la proposición 2.23 y $\dim \mathcal{T} \leq n$. #

Como consecuencia inmediata del teorema anterior y del teorema 2.8 tenemos:

2.26 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico completamente regular, $\mathcal{X}$ un espacio normado estrictamente convexo de dimensión finita y sea $n = \dim \mathcal{X}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la λ-propiedad uniforme.*

ii) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la λ-propiedad.*

iii) *El par* $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión.*

iv) $\dim \mathcal{T} \leq n-1$.

v) *El conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{X}$ *que omiten el origen es denso en* $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$.

Además, en caso afirmativo, se verifica que

$$\lambda(y) = \frac{1+m(y)}{2}, \ \forall\, y \in \mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})) \quad (m(y) = \operatorname{Inf}\{\|y(t)\| : t \in \mathcal{T}\}).$$

Sea $\mathcal{T} = [0,1]$ y $\mathcal{X}$ un espacio estrictamente convexo de dimensión distinta de uno. De acuerdo con la proposición 2.21 vi) $dim\ \mathcal{T} = 1$. Así, si $\mathcal{X}$ es finito-dimensional se verifica la afirmación iv) del corolario anterior y en consecuencia $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme. Si $\mathcal{X}$ es infinito-dimensional esta misma conclusión es consecuencia inmediata del corolario 2.17 iii). Hemos obtenido así el teorema 1.9 de [5] tal como comentamos en el ejemplo 2.18 ii).

Un nuevo caso particular de nuestro corolario 2.26 y del teorema 1.15 es el siguiente enunciado que fue probado por Peck ([42], teorema 4), más tarde por David Oates ([39]) con ligeras modificaciones y recientemente por F. Benítez ([9]) y A. Suárez ([53]) que añaden algunas otras caracterizaciones:

2.27 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio compacto Hausdorff. Entonces $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ tiene la propiedad de representación en series convexas si, y sólo si, $\mathcal{T}$ es cero-dimensional.

CAPITULO III

ESTRUCTURA EXTREMAL DE LA BOLA UNIDAD EN ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

El capítulo anterior ha clarificado un aspecto de la estructura extremal de los espacios de funciones continuas. En concreto, dado un espacio topológico $\mathcal{T}$ y un espacio de Banach estrictamente convexo $\mathcal{X}$ (esta hipótesis estará presente aunque no se especifique en los comentarios que siguen) se han establecido condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tenga la λ-propiedad o, equivalentemente, la propiedad de representación en series convexas. La cuestión ahora es el estudio de otras propiedades extremales en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. Como primer objetivo estudiaremos la propiedad de representación convexa y posteriormente abordaremos la (mucho más débil) propiedad de Bade. Los precedentes de mayor importancia en este terreno son debidos a Peck y Cantwell. Para $\mathcal{T}$ compacto Hausdorff y $\mathcal{X}$ infinito-dimensional, Peck obtuvo que cada elemento de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ puede expresarse como media de cuatro puntos extremos ([42], teorema 5). Además, con $\mathcal{T}$ métrico compacto y $\mathcal{X}$ Hilbert n-dimensional, n par, probó que $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de representación convexa si, y sólo si, $dim\ \mathcal{T} \leq n$-1 ([42], teoremas 2 y 3). Este último resultado fue mejorado por Cantwell ([15], teorema II) que logró la misma equivalencia para $\mathcal{T}$ normal y $\mathcal{X}$ espacio de Hilbert de dimensión $n \geq 2$ (par o impar).

A la vista de estos resultados y de los obtenidos en el capítulo II es natural intuir que la propiedad de extensión ha de caracterizar no sólo la λ-propiedad en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$, sino también la propiedad de representación convexa, y ello sin restricciones sobre $\mathcal{T}$ y sin necesidad de exigir que $\mathcal{X}$ sea un espacio de Hilbert.

Así, para $\mathcal{X}$ espacio de Banach infinito-dimensional (estrictamente convexo), obtendremos que $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de representación convexa cualquiera que sea el espacio topológico $\mathcal{T}$. Para $\mathcal{X}$ n-dimensional, $n \geq 2$, probaremos que $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la citada propiedad si, y sólo si, $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión.

La propiedad de extensión es automática si $\mathcal{X}$ es de dimensión infinita, pero en el caso finito-dimensional es equivalente a la desigualdad $\dim \mathcal{T} < \dim \mathcal{X}$. Si $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ no tiene la propiedad de extensión ($\mathcal{X}$ es forzosamente de dimensión finita) entonces, de acuerdo con el teorema 2.8, $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ no tiene la λ-propiedad, mucho menos la propiedad de representación convexa. Sin embargo, obtendremos al final de este capítulo que $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de Bade cualquiera que sea el espacio topológico $\mathcal{T}$ y el espacio de Banach estrictamente convexo $\mathcal{X}$ con dimensión de $\mathcal{X}$ mayor o igual que dos (finita o infinita). Se trata pues de una generalización sustancial de los resultados de Peck y Cantwell comentados, a propósito de la propiedad de Bade, al comienzo del capítulo anterior. Obsérvese finalmente que, para $\mathcal{X}$ infinito-dimensional, tenemos un resultado mucho más potente como ya hemos indicado en el párrafo precedente.

APLICACIONES ENTRE ESFERAS

En este apartado obtendremos algunos resultados sobre aplicaciones continuas de la esfera unidad de un espacio de Banach en sí misma. Ello nos permitirá posteriormente alcanzar los resultados fundamentales de este capítulo.

Sea $n \geq 2$ un natural y sea S^{n-1} la esfera unidad de $\mathbb{R}^n$:

$$S^{n-1} = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

Dado $p = (p_1,\ldots,p_n) \in S^{n-1}$ consideremos el subespacio M de $\mathbb{R}^n$ ortogonal a p:

$$M = \{(z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{R}^n : p_1 z_1 + \ldots + p_n z_n = 0\},$$

la aplicación (proyección estereográfica) $\pi : S^{n-1}\backslash\{p\} \longrightarrow M$ definida por

$$\pi(x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_n)$$

donde $y_k = p_k + \dfrac{x_k - p_k}{1 - (p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n)}$, $\forall\, k \in \{1,\ldots,n\}$

es un homeomorfismo. Además, puede comprobarse con facilidad que

$$\|\pi(x) - \pi(-x)\| \geq 2, \ \forall\, x \in S^{n-1}\backslash\{p\} \quad (\text{con } x \neq -p)$$

donde, naturalmente, $\|\cdot\|$ es la norma euclídea. Sea $y_0 \in M$ con $\|y_0\| = 1$ y consideremos la aplicación $H : M \longrightarrow M$ dada por

$$H(y) = y + y_0 \,, \ \forall\, y \in M.$$

La aplicación $\nu = \pi^{-1} \circ H \circ \pi$ de $S^{n-1}\backslash\{p\}$ en S^{n-1} es continua y no tiene puntos fijos ni transforma punto alguno en su antípoda, es decir,

$$\nu(x) \neq x, \ \nu(x) \neq -x, \text{ para todo } x \text{ en } S^{n-1}\backslash\{p\}.$$

En efecto, supuesto que $\nu(x) = x$ (resp. $\nu(x) = -x$) para algún x en $S^{n-1}\backslash\{p\}$ se tiene que $H(\pi(x)) = \pi(x)$ (resp. $H(\pi(x)) = \pi(-x)$) de donde

$y_0 = 0$ (resp. $\|\pi(x) - \pi(-x)\| = \|y_0\| = 1$). Contradicción.

Si n es par es posible mejorar este resultado ya que, en tal caso, $n = 2k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y la aplicación v de S^{n-1} en S^{n-1} dada por

$$v(x_1,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots,x_{2k}) = (x_{k+1},\ldots,x_{2k},-x_1,\ldots,-x_k)$$

es continua y $v(x) \neq x$, $v(x) \neq -x$ para todo x en S^{n-1}.

No obstante, para n impar es conocido (véase [18],corolario XVI 3.4) que toda aplicación continua de S^{n-1} en S^{n-1} posee un punto fijo o transforma un punto en su antípoda.

Las anteriores consideraciones nos conducen al siguiente enunciado:

3.1 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado de dimensión finita con* $\dim \mathcal{X} \geq 2$.

i) *Dado* $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *existe una aplicación continua* $v : \mathcal{S}(\mathcal{X})\backslash\{x_0\} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tal que* $v(x) \neq x$, $v(x) \neq -x$, *para todo* x *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})\backslash\{x_0\}$.

ii) *Si* $\dim \mathcal{X}$ *es par, de hecho, puede encontrarse* $v : \mathcal{S}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *continua tal que* $v(x) \neq x$, $v(x) \neq -x$, *para todo* x *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$.

DEMOSTRACION:

Basta tener en cuenta los comentarios anteriores y recordar que siendo $n = \dim \mathcal{X}$ y F un isomorfismo topológico de $\mathcal{X}$ en $\mathbb{R}^n$, la aplicación φ de $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ en S^{n-1} dada por $\varphi(x) = \dfrac{F(x)}{\|F(x)\|}$, para todo x en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$, es un homeomorfismo tal que $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, cualquiera que sea x en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$. #

A continuación abordaremos el caso infinito-dimensional, para lo cual necesitaremos el siguiente resultado conocido:

3.2 LEMA ([29],proposición 1.f.3).

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach separable. Entonces existe una sucesión* $\{x_n\}$ *de elementos de* $\mathcal{X}$ *y una sucesión* $\{f_n\}$ *en* $\mathcal{X}^*$ *tales que*

$$f_n(x_m) = \delta_{nm}, \ \forall\ n,m \in \mathbb{N} \quad y\ además,$$

$$f \in \mathcal{X}^*,\ f(x_n) = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow f = 0$$

$$x \in \mathcal{X},\ f_n(x) = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$$

(esto es, $(\{x_n\},\{f_n\})$ es un sistema biortogonal, fundamental y total. Por supuesto la sucesión $\{x_n\}$ puede ser elegida con $\|x_n\| = 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$).

Por conveniencia para nuestra argumentación haremos uso de este resultado con una pequeña modificación que consiste en tomar el sistema biortogonal con índices en $\mathbb{Z}$ y no en $\mathbb{N}$ como aparece en el anterior enunciado.

3.3 TEOREMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach infinito-dimensional. Entonces existe una aplicación continua* $v : \mathcal{S}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tal que*

$$v(x) \neq x,\ v(x) \neq -x,\ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X}).$$

DEMOSTRACION:

Supongamos en primer lugar que $\mathcal{X}$ es separable. Entonces, de acuerdo con el lema 3.2, existe una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ y una sucesión $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{X}^*$ tales que $f_k(x_m) = \delta_{km}$, para cualesquiera $k,m \in \mathbb{Z}$ y $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ separa los puntos de $\mathcal{X}$. Sea $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_k = |k|^{-|k|}(1 + \|f_{k+1}\|)^{-1}$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Para cada natural n es claro que la aplicación $A_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$

definida por

$$A_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k f_{k+1}(x)\, x_k \,, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}$$

es lineal y continua. Además, dada la forma en que ha sido definida la sucesión $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y la complitud de $\mathcal{X}$, es inmediato que la sucesión $\{A_n\}$ converge en $\mathcal{L}(\mathcal{X})$. Su límite es la aplicación (lineal y continua) dada por,

$$A(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k f_{k+1}(x)\, x_k \,, \quad \forall\, x \in \mathcal{X}$$

(obsérvese que, de hecho, A es un operador compacto, por ser límite de operadores de rango finito, pero no necesitaremos hacer uso de ello en nuestro razonamiento).

Si $A(x) = 0$ entonces para cada $m \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$0 = f_m(A(x)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k f_{k+1}(x)\, f_m(x_k) = \alpha_m f_{m+1}(x)$$

de donde $f_{m+1}(x) = 0$ y por tanto $x = 0$. Si $A(x) = \lambda x$ para algún escalar $\lambda \neq 0$ y $x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ entonces $\alpha_m f_{m+1}(x) = \lambda f_m(x)$ para todo m en $\mathbb{Z}$. Un sencillo argumento de inducción prueba entonces que

$$f_{n+1}(x) = n^n \lambda^n f_1(x)(1+\|f_{n+1}\|) \prod_{k=1}^{n-1} k^k(1+\|f_{k+1}\|), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Así, para n suficientemente grande $|f_{n+1}(x)| > 1 + \|f_{n+1}\|$, lo cual es una contradicción. Podemos, en consecuencia, definir v de $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ por

$$v(x) = \frac{A(x)}{\|A(x)\|} \,, \ \forall\, x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$$

y es claro que v es continua y $v(x) \neq x$, $v(x) \neq -x$, $\forall\, x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Si $\mathcal{X}$ no es separable sea $\mathcal{X}_0$ un subespacio cerrado, infinito-dimensional y separable de $\mathcal{X}$. Entonces $\mathcal{S}(\mathcal{X}_0)$ es un cerrado de $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ y en virtud de la proposición 2.12 la aplicación $x \longmapsto x$ de $\mathcal{S}(\mathcal{X}_0)$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X}_0)$ puede extenderse a una aplicación continua $F : \mathcal{S}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X}_0)$. En consecuencia $F(x) = x$, $\forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X}_0)$. Por la primera parte de la demostración existe $v_0 : \mathcal{S}(\mathcal{X}_0) \to \mathcal{S}(\mathcal{X}_0)$ continua tal que $v_0(x) \neq x$, $v_0(x) \neq -x$, para cada x en $\mathcal{S}(\mathcal{X}_0)$. Sea $v = v_0 \circ F : \mathcal{S}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$, evidentemente v es continua y

$$v(x) \neq x,\ v(x) \neq -x, \text{ para todo } x \text{ en } \mathcal{S}(\mathcal{X}).\ \#$$

Como consecuencia del teorema anterior y de la proposición 3.1 i) obtenemos el siguiente resultado válido para cualquier dimensión, finita o infinita, exceptuando, claro está, la dimensión uno.

3.4 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y supongamos que la dimensión de $\mathcal{X}$ no es uno. Entonces, dado $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$, existe una aplicación continua v de $\mathcal{S}(\mathcal{X})\backslash\{x_0\}$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ tal que

$$v(x) \neq x,\ v(x) \neq -x,\ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})\backslash\{x_0\}.$$

Observemos antes de concluir este apartado que si $\mathcal{X}$ es un espacio normado complejo la aplicación $v : \mathcal{S}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ dada por

$$v(x) = ix,\ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$$

es continua y $v(x) \neq x$, $v(x) \neq -x$, para todo x en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$. Este hecho no nos ha sido útil puesto que, por una parte, excluye el caso de espacios reales de dimensión finita impar y por otra, existen espacios infinito-dimensionales que no admiten una estructura compleja, como puede verse en [56].

PROPIEDAD DE EXTENSION Y FUNCIONES QUE OMITEN EL ORIGEN

El resultado con el que comenzamos este apartado muestra, entre otras cosas, que si el par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión entonces el conjunto de las funciones continuas y acotadas de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$ que omiten el origen es denso en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. Este hecho es ya conocido para $\mathcal{T}$ completamente regular y $\mathcal{X}$ finito-dimensional (teorema 2.25 iii) $\Rightarrow$ ii)). Si se analizan los argumentos usados en la parte ii) $\Rightarrow$ iii) del teorema mencionado se observa que (esta parte de la demostración) no precisa ninguna restricción sobre $\mathcal{T}$ ni sobre $\mathcal{X}$. Seguidamente comprobaremos que lo mismo ocurre con iii) $\Rightarrow$ ii).

Usando la terminología de [24], el siguiente enunciado indica que "cero es un valor inestable de cualquier función continua de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$", para todo par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ con la propiedad de extensión.

3.5 PROPOSICION.

Supongamos que el par $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión. Dada una función continua* $f : \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ *y* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ *existe una aplicación continua* $g : \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ *tal que*

$$g(t) = f(t) \quad si \quad \|f(t)\| \geq \varepsilon \quad y \quad \|g(t)\| = \varepsilon \quad si \quad \|f(t)\| \leq \varepsilon.$$

DEMOSTRACION:

Sea $F : \mathcal{T} \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ definida por

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t)}{\|f(t)\|} & \text{si } \|f(t)\| \geq \varepsilon \\[2ex] \dfrac{1}{\varepsilon} f(t) & \text{si } \|f(t)\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Evidentemente F es continua y $A = \{t \in \mathcal{T} : \|f(t)\| = \varepsilon\}$ es cerrado. Puesto que $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión, existe $f_0 : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$, continua, tal que $f_0(t) = \dfrac{1}{\varepsilon} f(t)$, para todo t en A. Sea $g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } \|f(t)\| \geq \varepsilon \\ \varepsilon f_0(t) & \text{si } \|f(t)\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

es claro que g verifica todas las condiciones pedidas. #

La proposición anterior fue probada por Peck ([42], corolario a la proposición 2) suponiendo $\mathcal{T}$ compacto Hausdorff y $\mathcal{X}$ infinito-dimensional. Haciendo uso de este resultado e inspirándonos en la demostración del teorema 3 de [42] obtenemos a continuación que todo elemento de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ puede expresarse como media de dos funciones que omiten un entorno del origen.

3.6 COROLARIO.

Sea $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *un par con la propiedad de extensión y* f *una aplicación continua de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. *Entonces existen funciones continuas* g *y* h *de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *tales que* $\mathrm{f} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{g} + \mathrm{h})$ *y además,*

$$\|\mathrm{g}(\mathrm{t})\| \geq \frac{1}{9}, \quad \|\mathrm{h}(\mathrm{t})\| \geq \frac{1}{9}, \ \forall\ \mathrm{t} \in \mathcal{T}.$$

DEMOSTRACION:

En virtud de la proposición anterior, existe una aplicación continua $g_1 \colon \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ tal que

$$g_1(t) = f(t) \text{ si } \|f(t)\| \geq \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad \|g_1(t)\| = \frac{1}{3} \text{ si } \|f(t)\| \leq \frac{1}{3}.$$

Sea $h_1 = 2f - g_1$; dado $t \in \mathcal{T}$, si $\|f(t)\| \geq \frac{1}{3}$ tenemos que

$$\|h_1(t)\| = \|f(t)\| \leq 1,$$

y si $\|f(t)\| \leq \frac{1}{3}$ entonces,

$$\|h_1(t)\| \leq 2\|f(t)\| + \|g_1(t)\| \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Así pues, $\|h_1(t)\| \leq 1$, $\forall\, t \in \mathcal{T}$. Haciendo uso, una vez más, de la proposición anterior podemos encontrar una aplicación continua $h \colon \mathcal{T} \to \mathcal{X}$ tal que $h(t) = h_1(t)$ si $\|h_1(t)\| \geq \frac{1}{9}$ y $\|h(t)\| = \frac{1}{9}$ si $\|h_1(t)\| \leq \frac{1}{9}$. Es claro que $\frac{1}{9} \leq \|h(t)\| \leq 1$ y $\|h(t) - h_1(t)\| \leq \frac{2}{9}$, $\forall\, t \in \mathcal{T}$. Consideremos finalmente la función $g = 2f - h$; entonces g es continua y dado $t \in \mathcal{T}$ se tiene

$\|g(t)\| = \|2f(t) - h(t)\| = \|h_1(t) + g_1(t) - h(t)\| = \|g_1(t) - (h(t) - h_1(t))\| \geq$ $\geq \|g_1(t)\| - \|h(t) - h_1(t)\| \geq \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$. Por otra parte, si $\|f(t)\| \leq \frac{1}{3}$, es claro que $\|g(t)\| = \|g_1(t) - (h(t) - h_1(t))\| \leq \|g_1(t)\| + \|h(t) - h_1(t)\| \leq$ $\leq \frac{1}{3} + \frac{2}{9} < 1$, y si $\|f(t)\| \geq \frac{1}{3}$ entonces $f(t) = g_1(t) = h_1(t)$, por lo que $\|h_1(t)\| \geq \frac{1}{3}$ y de este modo $h_1(t) = h(t)$. En consecuencia,

$$\|g(t)\| = \|h_1(t) + g_1(t) - h(t)\| = \|g_1(t)\| \leq 1. \quad \#$$

REPRESENTACION EXTREMAL DE FUNCIONES CONTINUAS

Dados un espacio topológico $\mathcal{T}$ y un espacio de Banach estrictamente convexo $\mathcal{X}$ de dimensión distinta de uno, probaremos en este apartado que toda función continua, de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, que tome valores fuera de una bola centrada en el origen, puede ser expresada como combinación convexa de puntos extremos. De este modo, supuesto que $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión y teniendo en cuenta el corolario 3.6, habremos establecido la propiedad de representación convexa en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ bajo las condiciones reseñadas. Para conseguir esto necesitaremos algunos resultados previos. El siguiente lema (por desgracia tedioso, pero indispensable) está inspirado en el lema 3 de [42] que queda como caso particular.

3.7 LEMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo y sea* $v \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$. *Dado* $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}$ *tal que* $\frac{x}{\|x\|} \notin \{-v,v\}$ *existe, a lo sumo, un punto* $y \in \mathcal{X}$ *tal que* :

1) $\|y\| = \|2x-y\| = 1.$

2) $[0,y] \cap \left([v,\frac{x}{\|x\|}] \cup [v,-\frac{x}{\|x\|}]\right) \neq \emptyset.$

DEMOSTRACION:

Si $\|x\| = 1$, dado $y \in \mathcal{X}$ con $\|2x-y\| = \|y\| = 1$, se tiene que $x = \frac{1}{2}(y + (2x-y))$, por lo que, en virtud de la convexidad estricta de $\mathcal{X}$, $y = x$. El resultado queda probado de este modo para $\|x\| = 1$. En lo que sigue supondremos $\|x\| < 1$. Sean y_1 e y_2 elementos de $\mathcal{X}$ para los que se verifican las condiciones 1) y 2); entonces existen $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$ tales que

$$\alpha_1 y_1 \ , \ \alpha_2 y_2 \in [v,\frac{x}{\|x\|}] \cup [v,-\frac{x}{\|x\|}].$$

Supongamos, por ejemplo, que $\alpha_1 y_1 \in [v,-\frac{x}{\|x\|}]$ y $\alpha_2 y_2 \in [v,\frac{x}{\|x\|}]$ (los casos restantes pueden reducirse a éste como comprobaremos más adelante). Para convenientes $\lambda,\beta \in [0,1]$ tenemos

$$\alpha_1 y_1 = \lambda v - (1-\lambda)\frac{x}{\|x\|} \quad \text{y} \quad \alpha_2 y_2 = \beta v + (1-\beta)\frac{x}{\|x\|} \ . \qquad (1)$$

De la condición $\frac{x}{\|x\|} \notin \{-v,v\}$ se sigue inmediatamente que $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$. Además, $\lambda > 0$ y $\beta > 0$. En efecto, supuesto $\lambda = 0$ entonces $\alpha_1 y_1 = -\frac{x}{\|x\|}$, de donde $\alpha_1 = 1$ y así $y_1 = -\frac{x}{\|x\|}$. Por tanto,

$$1 = \|2x - y_1\| = \|2x + \frac{x}{\|x\|}\| = (2 + \frac{1}{\|x\|})\ \|x\| = 2\|x\| + 1,$$

lo que no es posible si $x \neq 0$. Del mismo modo, si $\beta = 0$ entonces $y_2 = \frac{x}{\|x\|}$ y así $1 = \|2x - y_2\| = \|2x - \frac{x}{\|x\|}\| = |2\|x\|-1|$, lo que implica $\|x\| = 0$ ó $\|x\| = 1$, pero ambos casos están descartados.

Por otra parte,

$$\alpha_1\alpha_2 y_1 = \alpha_2\lambda v - \alpha_2(1-\lambda)\frac{x}{\|x\|} \quad \text{y} \quad \alpha_1\alpha_2 y_2 = \alpha_1\beta v + \alpha_1(1-\beta)\frac{x}{\|x\|} \ ,$$

de donde, $\alpha_1\alpha_2(y_2-y_1) \overset{(2)}{=} (\alpha_1\beta - \alpha_2\lambda)v + (\alpha_1(1-\beta) + \alpha_2(1-\lambda))\ \frac{x}{\|x\|}$.

Supuesto que $\alpha_1\beta - \alpha_2\lambda = 0$ se tiene que $y_2-y_1 = \delta x$ con

$$\delta = \frac{\alpha_1(1-\beta) + \alpha_2(1-\lambda)}{\alpha_1\alpha_2\|x\|} \geq 0.$$ Puede comprobarse fácilmente que

$y_1 = \frac{\delta}{\delta+2}(y_1-2x) + \frac{2}{\delta+2}\, y_2$. Así, las relaciones $\|y_1\| = \|y_1-2x\| = \|y_2\| = 1$,

y_1-$2x \neq y_1$ junto con la estricta convexidad de $\mathcal{X}$ implican que $\delta = 0$ y, por tanto, $y_1 = y_2$.

La demostración concluye probando que el caso restante, a saber, $\alpha_1\beta - \alpha_2\lambda \neq 0$, no puede darse. Supongamos, para llegar a una contradicción, que se verifica la anterior desigualdad; entonces, forzosamente, $y_1 \neq y_2$ ya que, en otro caso, la igualdad (2) permitiría poner

$$v = - \frac{\alpha_1(1-\beta) + \alpha_2(1-\lambda)}{\alpha_1\beta - \alpha_2\lambda} \frac{x}{\|x\|},$$ de donde $v = \frac{x}{\|x\|}$ ó $v = -\frac{x}{\|x\|}$ en contra de la hipótesis.

Puede comprobarse en las actuales circunstancias (expresémoslo geométricamente para mantener un mínimo de intuición) que la recta que contiene al origen y al punto x y la recta que pasa por los puntos y_1 e y_2 se cortan en el punto

$$P = y_1 + \frac{\alpha_2\lambda}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta}(y_2-y_1) \overset{(3)}{=} \frac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} \frac{x}{\|x\|}.$$

Sólo hemos de comprobar que la igualdad (3) es correcta:

$$y_1 + \frac{\alpha_2\lambda}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta}(y_2-y_1) = \left(1 - \frac{\alpha_2\lambda}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta}\right) y_1 + \frac{\alpha_2\lambda}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} y_2 =$$

$$= - \frac{\alpha_1\beta}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} y_1 + \frac{\alpha_2\lambda}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} y_2 =$$

$$= - \frac{\beta}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta}\left(\lambda v - (1-\lambda)\frac{x}{\|x\|}\right) + \frac{\lambda}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta}\left(\beta v + (1-\beta)\frac{x}{\|x\|}\right) =$$

$$= \frac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} \frac{x}{\|x\|}.$$

Evidentemente, $\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) \geq 0$ y la igualdad se da si, y sólo si, $\lambda = \beta = 1$, pero esto no puede ocurrir ya que, en tal caso, de acuerdo con (1),

$\alpha_1 y_1 = v = \alpha_2 y_2$, de donde $\alpha_1 = \alpha_2$ y por tanto $y_1 = y_2$. La contradicción no deja más salida que $\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) > 0$. Ahora la igualdad (3) permite deducir que $x = -\dfrac{\alpha_1\beta\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)} y_1 + \dfrac{\alpha_2\lambda\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)} y_2$. Seguidamente comprobaremos que $\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta > 0$. En efecto,

$$1 = \|y_1 - 2x\| = \|y_1 + \frac{2\alpha_1\beta\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)} y_1 - \frac{2\alpha_2\lambda\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)} y_2\| =$$

$$= \|\Big(1 + \frac{2\alpha_1\beta\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}\Big) y_1 - \frac{2\alpha_2\lambda\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)} y_2\| \geq$$

$$1 + \frac{2\alpha_1\beta\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)} - \frac{2\alpha_2\lambda\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)} = 1 + \frac{2(\alpha_1\beta - \alpha_2\lambda)\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}$$ y la única posibilidad no contradictoria es $\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta > 0$.

Recordemos que $P = -\dfrac{\alpha_1\beta}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} y_1 + \dfrac{\alpha_2\lambda}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} y_2$. De ello se sigue fácilmente que $y_2 = \dfrac{\alpha_1\beta}{\alpha_2\lambda} y_1 + (1 - \dfrac{\alpha_1\beta}{\alpha_2\lambda}) P$ y por tanto

$y_2 - 2x = \dfrac{\alpha_1\beta}{\alpha_2\lambda}(y_1 - 2x) + (1 - \dfrac{\alpha_1\beta}{\alpha_2\lambda})(P - 2x)$. La convexidad estricta de $\mathcal{X}$ y la relación $y_1 \neq y_2$ nos permiten afirmar que $\|P\| > 1$ y $\|P-2x\| > 1$. Así, teniendo en cuenta que $P = \dfrac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta}\dfrac{x}{\|x\|}$ es claro que

$\dfrac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} \overset{(4)}{>} 1$. Por otra parte,

$$P - 2x = \Big(\frac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta}\frac{1}{\|x\|} - 2\Big) x, \text{ luego}$$

$\left|\dfrac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} - 2\|x\|\right| \overset{(5)}{>} 1$. Ahora bien, de (4) se sigue que $\dfrac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} - 2\|x\| > 1 - 2\|x\| > -1$, con lo que (5) se traduce en $\dfrac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta} - 2\|x\| > 1$. Llegamos, de este modo, a $\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) >$ $> 2\|x\|(\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta) + \alpha_2\lambda - \alpha_1\beta > 2\|x\|(\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta)$ y, en consecuencia,

$\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) - 2\|x\|(\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta) > 0$. Es rutinario probar que $y_2-2x =$

$$= \frac{2\alpha_1\beta\|x\|}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) + 2\alpha_1\beta\|x\|}(y_1-2x) + \frac{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) - 2\|x\|(\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta)}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) + 2\alpha_1\beta\|x\|}y_2 ,$$

de donde se deduce que

$$\|y_2-2x\| \leq \frac{2\alpha_1\beta\|x\| + \beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) - 2\|x\|(\alpha_2\lambda - \alpha_1\beta)}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) + 2\alpha_1\beta\|x\|} <$$

$$< \frac{2\alpha_1\beta\|x\| + \beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta)}{\beta(1-\lambda) + \lambda(1-\beta) + 2\alpha_1\beta\|x\|} = 1,$$ en contra de la hipótesis.

Al comienzo de la demostración habíamos supuesto que

$$\alpha_1y_1 \in [v,-\frac{x}{\|x\|}] \quad \text{y} \quad \alpha_2y_2 \in [v,\frac{x}{\|x\|}]$$

y se indicó que los casos restantes podían reducirse a éste. Veamos que, en efecto es así. Consideremos, por ejemplo, el caso α_1y_1 , $\alpha_2y_2 \in [v,\frac{x}{\|x\|}]$; entonces existen $\lambda,\beta \in [0,1]$ tales que

$$\alpha_1y_1 = \lambda v + (1-\lambda)\frac{x}{\|x\|} \quad \text{y} \quad \alpha_2y_2 = \beta v + (1-\beta)\frac{x}{\|x\|} .$$

Razonando como en la anterior situación se obtiene que $\alpha_1 \neq 0 \neq \alpha_2$, $\lambda > 0$ y $\beta > 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, $\lambda \geq \beta$. Es evidente que $\frac{x}{\|x\|} \notin \{-y_1,y_1\}$ (esto se observa al probar que $\lambda > 0$ y $\beta > 0$). Por otra parte, es claro que $y_1 \in [0,y_1] \cap [y_1,-\frac{x}{\|x\|}]$. Además, si consideramos

$s = \dfrac{\alpha_2\lambda}{\lambda-\beta+\alpha_1\beta}$ y $t = \dfrac{\alpha_1\beta}{\lambda-\beta+\alpha_1\beta}$ es fácil comprobar que $sy_2 = ty_1 + (1-t)\dfrac{x}{\|x\|}$ y dado que, evidentemente, $s,t \in [0,1]$ (si se toman normas en la igualdad anterior se comprueba que $s \leq 1$) tenemos $[0,y_2] \cap [y_1,\frac{x}{\|x\|}] \neq \emptyset$. Es ahora claro que nos encontramos en las condiciones del caso ya resuelto con y_1 haciendo el papel de v.

Análogamente se procede si $\alpha_1 y_1$, $\alpha_2 y_2 \in [v,-\frac{x}{\|x\|}]$. #

3.8 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach estrictamente convexo de dimensión distinta de uno y sea x_0 un punto en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$. Entonces existen aplicaciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 de $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ tales que

$$x = \frac{1}{2}(\phi_1(x) + \phi_2(x)),\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0].$$

DEMOSTRACION:

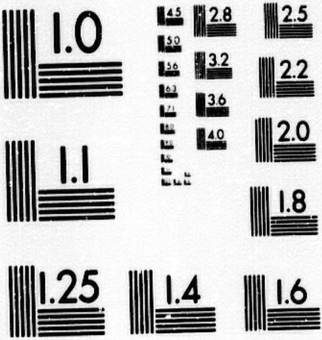
De acuerdo con el corolario 3.4, existe una aplicación continua $v : \mathcal{S}(\mathcal{X})\backslash\{x_0\} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ tal que $v(x) \neq x$, $v(x) \neq -x$, para todo x en $\mathcal{S}(\mathcal{X})\backslash\{x_0\}$. Sea r la aplicación de $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ definida por

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|},\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}.$$

Consideremos además la aplicación $\Gamma : [0,2] \times (\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ dada por

$$\Gamma(t,x) = \begin{cases} r((1-t)r(x) + tv(r(x))) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ r((2-t)v(r(x)) - (t-1)r(x)) & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Merece la pena comentar la idea geométrica de Γ (véase la figura):



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

$s = \dfrac{\alpha_2\lambda}{\lambda-\beta+\alpha_1\beta}$ y $t = \dfrac{\alpha_1\beta}{\lambda-\beta+\alpha_1\beta}$ es fácil comprobar que $sy_2 = ty_1 + (1-t)\dfrac{x}{\|x\|}$ y dado que, evidentemente, $s,t \in [0,1]$ (si se toman normas en la igualdad anterior se comprueba que $s \leq 1$) tenemos $[0,y_2] \cap [y_1,\dfrac{x}{\|x\|}] \neq \emptyset$. Es ahora claro que nos encontramos en las condiciones del caso ya resuelto con y_1 haciendo el papel de v.

Análogamente se procede si $\alpha_1 y_1$, $\alpha_2 y_2 \in [v,-\dfrac{x}{\|x\|}]$. #

3.8 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo de dimensión distinta de uno y sea* x_0 *un punto en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$. *Entonces existen aplicaciones continuas* ϕ_1 *y* ϕ_2 *de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus[0,x_0]$ *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tales que*

$$x = \frac{1}{2}(\phi_1(x) + \phi_2(x)),\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus[0,x_0].$$

DEMOSTRACION:

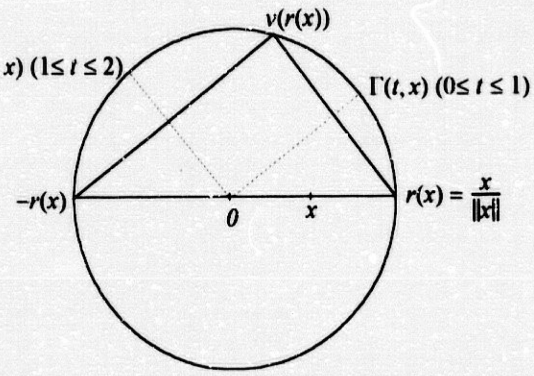
De acuerdo con el corolario 3.4, existe una aplicación continua $v : \mathcal{S}(\mathcal{X})\setminus\{x_0\} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ tal que $v(x) \neq x$, $v(x) \neq -x$, para todo x en $\mathcal{S}(\mathcal{X})\setminus\{x_0\}$. Sea r la aplicación de $\mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus\{0\}$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ definida por

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|},\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus\{0\}.$$

Consideremos además la aplicación $\Gamma : [0,2] \times (\mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus[0,x_0]) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ dada por

$$\Gamma(t,x) = \begin{cases} r((1-t)r(x) + tv(r(x))) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ r((2-t)v(r(x)) - (t-1)r(x)) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Merece la pena comentar la idea geométrica de Γ (véase la figura):



Para x fijo en $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]$, dado $t \in [0,1]$, $(1-t)r(x) + tv(r(x))$ es un punto del segmento $[r(x),v(r(x))]$ y $\Gamma(t,x)$ es la proyección (radial) de dicho punto sobre la esfera unidad de $\mathcal{X}$. Análogamente, dado $t \in [1,2]$, $(2-t)v(r(x)) - (t-1)r(x)$ es un punto del segmento $[v(r(x)),-r(x)]$ y $\Gamma(t,x)$ es la proyección sobre la esfera de dicho punto. En consecuencia, la aplicación $t \longmapsto \Gamma(t,x)$ es un arco en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ que une los puntos $r(x)$ y $-r(x)$. El objetivo es probar que dicho arco "contiene" un (único) punto $\Gamma(t(x),x)$ tal que $\|2x - \Gamma(t(x),x)\| = 1$. Con ello, el resultado se sigue de la igualdad evidente $x = \dfrac{\Gamma(t(x),x)}{2} + \dfrac{2x - \Gamma(t(x),x)}{2}$, una vez probada la continuidad de la aplicación $x \longmapsto t(x)$.

Hecho este paréntesis (a nivel intuitivo), continuemos la demostración: Evidentemente Γ es continua y dado $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]$ se tiene

$$\|2x - \Gamma(0,x)\| = \|2x - \frac{x}{\|x\|}\| = |2\|x\| - 1| \leq 1 \quad \text{y}$$

$$\|2x - \Gamma(2,x)\| = \|2x + \frac{x}{\|x\|}\| = 2\|x\| + 1 > 1,$$

por tanto, existe algún $t \in [0,2]$ tal que $\|2x - \Gamma(t,x)\| = 1$. El lema precedente garantiza que sólo puede existir un t con tal propiedad. Para comprobar que se cumplen las hipótesis de dicho resultado, nótese que

$$\frac{x}{\|x\|} = r(x) \notin \{v(r(x)) \ , \ -v(r(x))\} \quad \text{y} \quad \|\Gamma(t,x)\| = \|2x - \Gamma(t,x)\| = 1.$$

Además, si $t \in [0,1]$,

$$\|(1-t)r(x) + tv(r(x))\| \ \Gamma(t,x) = (1-t)r(x) + tv(r(x)) \in [v(r(x)), \frac{x}{\|x\|}].$$

Y si $t \in [1,2]$ entonces,

$$\|(2-t)v(r(x)) - (t-1)r(x)\| \ \Gamma(t,x) =$$

$$= (2-t)v(r(x)) - (t-1)r(x) \in [v(r(x)), -\frac{x}{\|x\|}].$$

Con ello es claro que $[0,\Gamma(t,x)] \cap \left([v(r(x)), \frac{x}{\|x\|}] \cup [v(r(x)), -\frac{x}{\|x\|}]\right) \neq \emptyset$.

Ha de tenerse en cuenta también que dados $t_1,t_2 \in [0,2]$ con $t_1 \neq t_2$ se tiene que $\Gamma(t_1,x) \neq \Gamma(t_2,x)$, lo cual se deduce, sin dificultad, de la independencia lineal de los vectores $\frac{x}{\|x\|}$ y $v(r(x))$.

Para cada $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]$ sea $t(x)$ el único elemento del intervalo $[0,2]$ tal que $\|2x - \Gamma(t(x),x)\| = 1$. A continuación probaremos que la aplicación $x \longmapsto t(x)$ de $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]$ en $[0,2]$ es continua. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]$ es un punto de discontinuidad de esta aplicación. Entonces, podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]$ y t en $[0,2]$ tales que $\{x_n\} \to x$ y $\{t(x_n)\} \to t \neq t(x)$. La continuidad de Γ permite deducir que

$$\{\|2x_n - \Gamma(t(x_n),x_n)\|\} \to \|2x - \Gamma(t,x)\|,$$

así $\|2x - \Gamma(t,x)\| = 1$ y esto contradice la unicidad de $t(x)$.

Ahora definimos ϕ_1 y ϕ_2 de $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0]$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ por

$$\phi_1(x) = \Gamma(t(x),x) \ , \ \phi_2(x) = 2x - \Gamma(t(x),x), \ \forall \ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash[0,x_0].$$

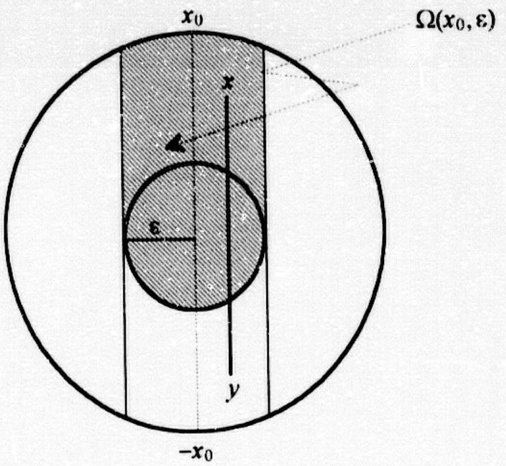
Es claro que ϕ_1 y ϕ_2 son continuas y $x = \dfrac{\phi_1(x) + \phi_2(x)}{2}$, para cada x

en $\mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus[0,x_0]$. #

Dado x_0 en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ y $0 < \varepsilon < 1$ usaremos la siguiente notación:

$$\Omega(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : d(x,[0,x_0]) \leq \varepsilon\}$$

La figura que sigue recoge el contenido geométrico del lema que probaremos a continuación:



3.9 LEMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado,* x_0 *un punto en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *y* ε *un número real en la situación* $0 < \varepsilon < 1$. *Dado* x *en* $\Omega(x_0,\varepsilon)$ *e* y *en* $\Omega(-x_0,\varepsilon)$ *existe* $z \in [x,y]$ *tal que* $\|z\| \leq \varepsilon$.

DEMOSTRACION:

Por hipótesis, $d(x,[0,x_0]) \leq \varepsilon$ y $d(y,[0,-x_0]) \leq \varepsilon$.

Sean $\alpha,\beta \in [0,1]$ tales que

$$\|x - \alpha x_0\| = d(x,[0,x_0]) \quad \text{y} \quad \|y + \beta x_0\| = d(y,[0,-x_0]).$$

Si $\alpha = \beta = 0$ podemos considerar $z = x$ ó $z = y$. Por otra parte, si $\alpha + \beta > 0$, sea $z = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} x + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} y$. Es claro que $z \in [x,y]$ y

$$\|z\| = \left\| \frac{\beta}{\alpha+\beta} x + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} y \right\| \leq$$

$$\left\| \frac{\beta}{\alpha+\beta} x - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \alpha x_0 \right\| + \left\| \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \beta x_0 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} y \right\| =$$

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta} \|x - \alpha x_0\| + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \|\beta x_0 + y\| \leq \frac{\beta}{\alpha+\beta} \varepsilon + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \varepsilon = \varepsilon \text{ . \#}$$

3.10 LEMA.

Dados un espacio normado $\mathcal{X}$, *un punto* x_0 *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *y* ε *en* $]0,1[$, *sea* x *un punto de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *tal que*

i) $\|x\| \geq \varepsilon$

ii) $x \in \Omega(x_0,\frac{\varepsilon}{4})$

iii) $x = \frac{1}{2}(a + b)$ *con* $a,b \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$

Entonces $[a,b] \cap \Omega(-x_0,\frac{\varepsilon}{4}) = \emptyset$.

DEMOSTRACION:

Supongamos, por el contrario, que existe algún elemento y en el conjunto $[a,b] \cap \Omega(-x_0,\frac{\varepsilon}{4})$. Por el lema anterior, es posible encontrar un punto $z \in [x,y]$ tal que $\|z\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Evidentemente $z \in [x,a]$ ó $z \in [x,b]$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $z \in [x,a]$. Entonces

$$\|x-a\| = \|x-z\| + \|z-a\| \geq \|x\| + \|a\| - 2\|z\| \geq \varepsilon + 1 - 2\frac{\varepsilon}{4} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Por otra parte, en virtud de iii),

$$\|x-a\| = \frac{\|b-a\|}{2} \leq 1. \text{ Contradicción. \#}$$

Estamos ya en condiciones de probar el siguiente teorema cuyo contenido responde fielmente al objetivo que nos proponíamos al comienzo del presente apartado.

3.11 TEOREMA.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico,* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo con* $\dim \mathcal{X} \geq 2$ *y sea* f *una aplicación continua de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *tal que* $\|f(t)\| \geq \varepsilon_0$ *para todo* t *en* $\mathcal{T}$ *y conveniente* $\varepsilon_0 \in]0,1[$. *Entonces existen aplicaciones continuas* e_1, e_2, e_3, e_4 *de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tales que*

$$f = \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$$

DEMOSTRACION:

Sea x_0 un punto en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$, entonces, de acuerdo con la proposición 3.8 podemos considerar

$$\phi_1 , \phi_2 : \mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus[0,x_0] \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X}) \quad \text{y} \quad \phi_1^* , \phi_2^* : \mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus[0,-x_0] \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$$

continuas tales que

$$x = \frac{1}{2}(\phi_1(x) + \phi_2(x)), \ \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus[0,x_0] \quad \text{y}$$

$$x = \frac{1}{2}(\phi_1^*(x) + \phi_2^*(x)), \ \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\setminus[0,-x_0].$$

Si definimos

$$A = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : d(x,[0,x_0]) \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\} \quad \text{y}$$

$$A^* = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) : d(x,[0,-x_0]) \geq \frac{\varepsilon_0}{4}\}$$

es claro que A y A^* son conjuntos cerrados en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ y además $A \cap [0,x_0] = \emptyset = A^* \cap [0,-x_0]$. Así pues, existen funciones continuas

$\lambda, \lambda^* : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to [0,1]$ tales que

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,x_0] \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \qquad \text{y}$$

$$\lambda^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,-x_0] \\ 1 & \text{si } x \in A^*. \end{cases}$$

Sean g y h las aplicaciones de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$ definidas por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) + \frac{1}{2}\lambda(f(t))\big(\phi_1(f(t)) - \phi_2(f(t))\big) & \text{si } f(t) \notin [0,x_0] \\ f(t) & \text{si } f(t) \in [0,x_0] \end{cases}$$

y $h = 2f-g$. Evidentemente g y h son continuas.

Además, si $f(t) \notin [0,x_0]$ es obvio que

$$g(t) = \frac{1}{2}\big(\phi_1(f(t)) + \phi_2(f(t))\big) + \frac{1}{2}\lambda(f(t))\big(\phi_1(f(t)) - \phi_2(f(t))\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(1 + \lambda(f(t))\big)\,\phi_1(f(t)) + \frac{1}{2}\big(1 - \lambda(f(t))\big)\,\phi_2(f(t)),$$

mientras que

$$h(t) = \frac{1}{2}\big(1 - \lambda(f(t))\big)\,\phi_1(f(t)) + \frac{1}{2}\big(1 + \lambda(f(t))\big)\,\phi_2(f(t))$$

con lo que, claramente, $\|g(t)\| \leq 1$ y $\|h(t)\| \leq 1$. Desigualdades ambas que son evidentes si $f(t) \in [0,x_0]$ puesto que en tal caso

$$g(t) = f(t) = h(t).$$

Obsérvese, por otro lado, que $f = \frac{1}{2}(g + h)$.

Si $f(t) \in A$ entonces

$$g(t) = \phi_1(f(t)) \ \text{ y } \ h(t) = \phi_2(f(t))$$

con lo cual $\|g(t)\| = \|h(t)\| = 1$. Por otra parte, si $f(t) \notin [0,x_0]$ las expresiones de $g(t)$ y $h(t)$ obtenidas con anterioridad muestran que

$$g(t),h(t) \in [\phi_1(f(t)),\phi_2(f(t))].$$

Definimos ahora cuatro funciones e_1 , e_2 , e_3 , e_4 de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{X}$ mediante las siguientes expresiones

$$e_1(t) = \begin{cases} g(t) + \frac{1}{2}\lambda^*(g(t))\big(\phi_1^*(g(t)) - \phi_2^*(g(t))\big) & \text{si } g(t) \notin [0,-x_0] \\ g(t) & \text{si } g(t) \in [0,-x_0] \end{cases}$$

$$e_3(t) = \begin{cases} h(t) + \frac{1}{2}\lambda^*(h(t))\big(\phi_1^*(h(t)) - \phi_2^*(h(t))\big) & \text{si } h(t) \notin [0,-x_0] \\ h(t) & \text{si } h(t) \in [0,-x_0] \end{cases}$$

$e_2 = 2g - e_1$ y $e_4 = 2h - e_3$. Evidentemente todas ellas son continuas, $\|e_i(t)\| \leq 1$, $\forall\, t \in \mathcal{T}$, $\forall\, i \in \{1,2,3,4\}$, $g = \frac{1}{2}(e_1+e_2)$, $h = \frac{1}{2}(e_3+e_4)$ y por consiguiente $f = \frac{1}{4}(e_1+e_2+e_3+e_4)$.

Sólo nos resta probar que $e_i(t) \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$, para cada t en $\mathcal{T}$ y cada $i \in \{1,2,3,4\}$:

Si $f(t) \in A$ entonces $\|g(t)\| = \|h(t)\| = 1$ y esto fuerza

$$\|e_i(t)\| = 1, \quad i = 1,2,3,4.$$

Si $f(t) \notin A$ entonces $f(t) \in \Omega(x_0,\frac{\varepsilon_0}{4})$. Supuesto ahora que $f(t) \in [0,x_0]$ es obvio que $f(t) = g(t) = h(t)$ con lo cual $g(t),h(t) \in [0,x_0]$ y de ello se obtiene $d(g(t),[0,-x_0]) = d(h(t),[0,-x_0]) = \|f(t)\| \geq \varepsilon_0$. Así $g(t),h(t) \in A^*$ y de esto se deduce que

$$\|e_i(t)\| = 1 \text{ para cada } i \in \{1,2,3,4\}.$$

Por otra parte, si $f(t) \notin [0,x_0]$ entonces $f(t) = \dfrac{\phi_1(f(t)) + \phi_2(f(t))}{2}$ y por el lema anterior,

$$[\phi_1(f(t)),\phi_2(f(t))] \cap \Omega(-x_0,\frac{\varepsilon_0}{4}) = \emptyset.$$

Puesto que $g(t),h(t) \in [\phi_1(f(t)),\phi_2(f(t))]$ se tiene entonces

$g(t),h(t) \notin \Omega(-x_0,\frac{\varepsilon_0}{4})$, es decir, $g(t),h(t) \in A^*$ y, por tanto,

$\|e_i(t)\| = 1$, $i = 1,2,3,4$ lo que concluye la demostración. #

Teniendo en cuenta los teoremas 2.8 y 3.11, el corolario 3.6 y los comentarios que preceden a la proposición 3.5, obtenemos

3.12 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo con* $\dim \mathcal{X} \geq 2$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

ii) $\mathcal{Y}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

iii) $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathrm{co}(\mathcal{E}(\mathcal{Y}))$.

iv) *El par* $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión.*

v) *El conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{X}$ *que omiten el origen es denso en* $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$.

De hecho, si se satisface cualquiera de las condiciones anteriores, dada $f \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ *existen* $e_i \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$ $(i = 1,\ldots,8)$ *tales que* $f = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} e_i$.

Los corolarios 2.14 y 3.12 nos conducen a este otro resultado.

3.13 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo e infinito-dimensional. Entonces*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathrm{co}(\mathcal{E}(\mathcal{Y}))$$

donde $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$.

Finalmente podemos ampliar la información dada en el corolario 2.26:

3.14 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico completamente regular y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo de dimensión finita. Si* $n = \dim \mathcal{X} \geq 2$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

ii) $\mathcal{Y}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

iii) $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \mathrm{co}(\mathcal{E}(\mathcal{Y}))$.

iv) *El par* $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión.*

v) $\dim \mathcal{T} \leq n-1$.

vi) *El conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{X}$ *que omiten el origen es denso en* $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$.

Como caso particular del corolario anterior, si $\mathcal{T}$ es normal (hipótesis no restrictiva siendo $\mathcal{X}$ de dimensión finita, corolarios 2.2 y 2.4) y $\mathcal{X}$ es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, la equivalencia entre iii) y v) nos da el teorema II de [15] (el resultado principal de Cantwell en la citada referencia). Recordemos también que Peck ([42], teoremas 2 y 3) había logrado la misma equivalencia que Cantwell para $\mathcal{T}$ métrico compacto y n par. Parece oportuno resaltar en este momento que el corolario 3.14 no sólo generaliza los resultados de Peck y Cantwell, sino que también muestra la equivalencia (bajo las condiciones del enunciado) entre la P.R.C. y otras propiedades, una de ellas también geométrica, la λ-propiedad, y dos topológicas, la propiedad de extensión y la densidad en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ de las funciones que omiten el origen.

3.15 NOTA.

Como puede apreciarse el corolario anterior no nos proporciona información sobre el caso $dim\ \mathcal{X} = 1$. A continuación mostraremos con un ejemplo que en el caso citado el resultado anterior no se verifica. Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico y sea $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$. Dada $f \in co(\mathcal{E}(\mathcal{Y}))$ se tiene que $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$ para convenientes $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ y $e_1, \ldots, e_k \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$. Para cada $t \in \mathcal{T}$ y para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$, $e_i(t) \in \{-1,1\}$ luego f toma a lo sumo 2^k valores.

Consideremos, por ejemplo, $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ con su topología usual. Evidentemente $dim\ \mathcal{T} = 0$ (proposición 2.21 vi), nótese que $\mathcal{T}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ con interior vacío). Basta considerar cualquier función f de $\mathbb{N}$ en $[-1,1]$ que tome infinitos valores, para concluir que

$$f \notin co(\mathcal{E}(\mathcal{Y})).$$

Así pues, para $dim\ \mathcal{X} = 1$ no podemos afirmar más de lo que se deduce del corolario 2.26, a saber, que $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad si, y sólo si, $dim\ \mathcal{T} = 0$.

Como objetivo final del presente apartado obtendremos algunos resultados que mejoran los anteriormente expuestos en el caso de espacios de Banach de dimensión par y de dimensión infinita.

3.16 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo y supongamos que existe una aplicación continua* $v : \mathcal{S}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tal que*

$v(x) \neq x$ *y* $v(x) \neq -x$ *para cada* x *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Entonces existen aplicaciones continuas ϕ_1 , ϕ_2 : $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\} \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tales que* $x = \frac{1}{2}(\phi_1(x) + \phi_2(x))$ *para cada* x *en* $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}$.

DEMOSTRACION:

Como en la proposición 3.8 sea r la aplicación de $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ definida por $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, $\forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}$. Consideremos además la aplicación $\Gamma : [0,2] \times (\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ dada por

$$\Gamma(t,x) = \begin{cases} r((1-t)r(x) + tv(r(x))) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ r((2-t)v(r(x)) - (t-1)r(x)) & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

A partir de este momento basta seguir los pasos de la citada proposición. #

3.17 TEOREMA.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo. Supongamos que:*

i) $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión.*

ii) *Existe una aplicación continua* $v : \mathcal{S}(\mathcal{X}) \to \mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tal que* $v(x) \neq x$ *y* $v(x) \neq -x$ *para cada* x *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Entonces $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \dfrac{\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})}{4}$.

(nótese que la condición ii) implica *dim* $\mathcal{X} \geq 2$)

DEMOSTRACION:

Sean ϕ_1 , ϕ_2 : $\mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ aplicaciones continuas tales que

$$x = \frac{1}{2}(\phi_1(x) + \phi_2(x)) \quad \text{para cada } x \text{ en } \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}$$

y sea $f \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$. En virtud del corolario 3.6 podemos encontrar aplicaciones continuas $g,h : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que

$$f = \frac{1}{2}(g+h) \quad \text{y} \quad \|g(t)\| \geq \frac{1}{9}, \ \|h(t)\| \geq \frac{1}{9}, \ \forall\, t \in \mathcal{T}.$$

Es claro entonces que

$$g(t) = \frac{1}{2}(\phi_1(g(t)) + \phi_2(g(t))) \ , \ h(t) = \frac{1}{2}(\phi_1(h(t)) + \phi_2(h(t))),$$

para todo $t \in \mathcal{T}$. Si tomamos $e_1 = \phi_1 \circ g$, $e_2 = \phi_2 \circ g$, $e_3 = \phi_1 \circ h$ y $e_4 = \phi_2 \circ h$ es inmediato que $e_i \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$, $\forall\, i \in \{1,2,3,4\}$ y $f = \frac{1}{4}(e_1+e_2+e_3+e_4)$. #

Recordemos que si $\mathcal{X}$ es finito-dimensional, la condición ii) del teorema anterior se verifica si, y sólo si, *dim* $\mathcal{X}$ es par (proposición 3.1 ii) y comentarios previos). Tenemos pues:

3.18 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico completamente regular y* $\mathcal{X}$ *un espacio normado estrictamente convexo con* $\dim \mathcal{X} = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

ii) $\mathcal{Y}$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

iii) $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{4}\big(\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})\big).$

iv) *El par* $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ *tiene la propiedad de extensión.*

v) $\dim \mathcal{T} \leq 2n-1.$

vi) *El conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathcal{X}$ *que omiten el origen es denso en* $\mathcal{E}(\mathcal{T},\mathcal{X})$.

Por otra parte, el corolario 2.14, el teorema 3.3 y el teorema 3.17 nos conducen a este refinamiento del corolario 3.13:

3.19 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico y* $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo e infinito-dimensional. Entonces:*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{4}\big(\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})\big).$$

Este último resultado fue probado por Peck ([42], teorema 5) suponiendo $\mathcal{T}$ compacto Hausdorff. El siguiente enunciado no puede deducirse (como se comprenderá seguidamente) del resultado de Peck. Ello constituye una curiosa y (si se nos permite) bella prueba de la potencia de nuestro corolario.

3.20 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach estrictamente convexo e infinito-dimensional. Entonces existen cuatro retracciones* e_1, e_2, e_3, e_4 *de la bola unidad de* $\mathcal{X}$ *sobre la esfera unidad de* $\mathcal{X}$ *tales que*

$$x = \frac{1}{4}(e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) + e_4(x)), \ \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

DEMOSTRACION:

Basta tomar $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y aplicar el corolario anterior. #

A propósito del corolario anterior (con ánimo de completar su contenido) es interesante señalar que, dado un espacio de Banach estrictamente convexo $\mathcal{X}$, son equivalentes:

i) Existen e_1 , e_2 , e_3 , e_4 : $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ continuas tales que

$$x = \frac{1}{4}\,(e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) + e_4(x)),\ \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

ii) Para todo espacio topológico $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = co(\mathcal{E}(\mathcal{Y}))$, donde $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$.

iii) $\mathcal{X}$ es infinito-dimensional.

Es inmediato que i) $\Rightarrow$ ii). Por otra parte, ii) $\Rightarrow$ iii) se sigue del ejemplo 2.16 iii), el corolario 3.12 y la nota 3.15. Finalmente iii) $\Rightarrow$ i) es el corolario anterior.

3.21 OBSERVACION.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico, $\mathcal{X}$ un espacio de Banach estrictamente convexo de dimensión distinta de uno y supongamos que $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión. Si $\mathcal{X}$ es infinito-dimensional o bien es de dimensión finita par entonces cada elemento de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ es media de cuatro puntos extremos (corolarios 3.19 y 3.18). Sin embargo, si $\mathcal{X}$ es de dimensión impar, dado un punto en la bola de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ sólo podemos asegurar (corolario 3.12) que es media de ocho puntos extremos. Cabe preguntarse si esta diferencia es consecuencia de algún defecto en nuestra argumentación que ha provocado una pérdida de fuerza en el caso impar o si, por el contrario, responde a la verdadera estructura de estos espacios. No disponemos de una respuesta concluyente pero podemos exponer algunas consideraciones que estimamos convenientes a este respecto. En primer lugar ha de observarse que el teorema 3.17 (del que se desprenden los casos de dimensión par y dimensión infinita) depende de dos hechos básicos, el primero de ellos es que todo elemento de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ puede expresarse como media de dos funciones que omiten el origen (corolario 3.6, aquí es donde se requiere que $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tenga la propiedad de extensión). Este resultado es válido para cualquier dimensión. No ocurre lo mismo con el segundo de ellos que consiste en que toda función que omite el origen puede expresarse como media de dos puntos extremos. Esto último no es válido para dimensión impar. Sea, para ponerlo de manifiesto, $\mathcal{T} = \{ x \in \mathcal{X} : \|x\| = \frac{1}{2} \}$ donde $\mathcal{X}$ se supone de dimensión impar. De la proposición 2.21 vi) se deduce que $\dim \mathcal{T} < \dim \mathcal{X}$ y por tanto (corolario 2.13) $(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión. Sea f la identidad de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Evidentemente f omite el origen (de hecho, todo un entorno del origen). Supongamos, para llegar a una contradicción que

$$f = \frac{e_1 + e_2}{2}$$

con e_1 y e_2 puntos extremos de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ y sea h de $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ la función definida por

$$h(x) = \frac{e_1(x/2) - (x/2)}{\|e_1(x/2) - (x/2)\|}, \ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X}).$$

Entonces h es continua y no posee puntos fijos ni transforma puntos en su antípoda. En efecto, supuesto que existe $x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ con $h(x) = x$, se tiene

$$e_1(x/2) - (x/2) = \|e_1(x/2) - (x/2)\|\ x \quad \text{de donde}$$

$$e_1(x/2) = \left(\frac{1}{2} + \|e_1(x/2) - (x/2)\| \right) x \quad \text{luego}$$

$\|e_1(x/2) - (x/2)\| = \frac{1}{2}$ y por tanto, $e_1(x/2) = x$. Por otra parte,

$f(x/2) = \frac{x}{2} = \frac{e_1(x/2) + e_2(x/2)}{2}$ y así $e_2(x/2) = 0$, lo que no es posible siendo e_2 un punto extremo. Supuesto que existe $x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ tal que $h(x) = -x$ se tiene

$$e_1(x/2) = \left(\frac{1}{2} - \|e_1(x/2) - (x/2)\| \right) x$$

y de ello se sigue que $\|e_1(x/2) - (x/2)\| = \frac{3}{2}$ y $e_1(x/2) = -x$. Por otro lado,

$f(x/2) = \frac{x}{2} = \frac{e_1(x/2) + e_2(x/2)}{2} = \frac{-x + e_2(x/2)}{2}$ y en consecuencia $e_2(x/2) = 2x$, lo cual tampoco es posible.

La existencia de una función h en tales circunstancias es una contradicción siendo $\mathcal{X}$, como hemos supuesto, de dimensión impar (véase [18], corolario XVI 3.4).

Cabe plantearse también si el número de puntos extremos necesarios para expresar los elementos de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ (supuesto $\mathcal{X}$ de dimensión finita par o de dimensión infinita) puede rebajarse de cuatro (ello fue conjeturado por Cantwell en [15]). No conocemos una respuesta general a esta cuestión; sin embargo, sí existen resultados para el caso $\mathcal{X} = \mathbb{C}$. Concretamente, Rordam ([46], corolario 3.6) prueba, entre otras cosas, que si $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{C})$ ($\mathcal{T}$ arbitrario) tiene la λ-propiedad entonces

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{3} (\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})).$$

(Ver también [14], teorema 5.7).

Por otra parte, como puede deducirse de un trabajo de Robertson ([45]), si $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{C})$ (supongamos $\mathcal{T}$ normal como en la citada referencia) tiene la λ-propiedad no es cierto, en general, que $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}))$, de hecho, esto ocurre si, y sólo si, *dim* $\mathcal{T} = 1$ y $\mathcal{T}$ es un F-espacio ($\mathcal{T}$ es un F-espacio si, y sólo si, cualesquiera dos subconjuntos funcionalmente abiertos y disjuntos de $\mathcal{T}$ tienen clausuras disjuntas). A título de ejemplo señalemos que $[0,1]$ no es un F-espacio, como puede comprobarse fácilmente. Por tanto, todo punto de la bola unidad de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ puede expresarse como media de tres puntos extremos pero no como media de dos.

LA PROPIEDAD DE BADE EN $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$

El resultado más importante en relación con la propiedad de Bade es debido a Morris y Phelps ([38], corolario 4.2). De dicho resultado se sigue, en particular, que si $\mathcal{T}$ es un espacio topológico compacto Hausdorff y $\mathcal{X}$ un espacio de Banach con la propiedad de Bade y tal que $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ es arco-conexo, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene también la propiedad de Bade. Como casos particulares se encuentran los resultados de Cantwell ([15], teorema I y comentarios al mismo), Peck ([42], teorema 1) y Lindenstrauss ([42], nota final) que habían obtenido previamente la propiedad de Bade en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ para $\mathcal{T}$ Hausdorff y $\mathcal{X}$ el espacio euclídeo real n-dimensional ($n \geq 2$) en el caso de Cantwell y Peck y para el mismo $\mathcal{T}$ y $\mathcal{X}$ un espacio normado de dimensión finita tal que $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ es arco-conexo, en el caso de Lindenstrauss.

En este apartado demostraremos que si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach estrictamente convexo de dimensión distinta de uno y $\mathcal{T}$ es cualquier espacio topológico entonces $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de Bade. En el caso finito-dimensional no se pierde generalidad si se supone $\mathcal{T}$ compacto Hausdorff (corolarios 2.2 y 2.4) con lo que, en tal caso, se trata de un caso particular del resultado de Lindenstrauss y por consiguiente del correspondiente a Morris y Phelps. Sin embargo, es más general que los de Cantwell y Peck. Por otra parte, si $\mathcal{X}$ es infinito-dimensional disponemos de mejor información (corolario 3.19). La razón fundamental de la inclusión de este apartado es que aporta una nueva demostración del resultado ya mencionado como aplicación sencilla de nuestro teorema 3.11.

Nos hemos inspirado en las ideas de Peck ([42], teorema 1) donde se utiliza una construcción geométrica en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, debida esencialmente a Sine (véase [50]), de difícil formalización analítica y que nosotros hemos sustituido por el lema siguiente que proporcionará el mismo rendimiento aún tratándose de una construcción bastante más simple.

3.22 LEMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado. Dado* $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$, $0 < \varepsilon < 1$ *y* $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{5}$ *existe* $r : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *continua tal que*

1) $\|r(x)\| \geq \delta, \ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$

2) $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),\ d(x,[0,2x_0]) \geq 2\delta \ \Rightarrow\ r(x) = x$

3) $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),\ \|x\| \leq \varepsilon \ \Rightarrow\ \|r(x)\| \leq \varepsilon.$

DEMOSTRACION:

Sea $\alpha : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to [0,1]$ una función continua tal que

$$\alpha(x) = 1 \quad \text{si} \quad d(x,[0,2x_0]) \leq \delta \quad \text{y}$$

$$\alpha(x) = 0 \quad \text{si} \quad d(x,[0,2x_0]) \geq 2\delta$$

y sea $r : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ la aplicación definida por

$$r(x) = x - \alpha(x)(\|x\|+\delta)x_0\ , \ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Evidentemente r es continua y verifica 2). Veamos en primer lugar que $\|r(x)\| \leq 1,\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Sea pues $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$; supuesto que $d(x,[0,2x_0]) \geq 2\delta$ entonces $r(x) = x$ y por tanto $\|r(x)\| \leq 1$. Si $d(x,[0,2x_0]) \leq 2\delta$ sea $\beta \in [0,1]$ tal que $\|x - 2\beta x_0\| = d(x,[0,2x_0])$. Entonces $\|x - 2\beta x_0\| \leq 2\delta$ y en consecuencia $|\,\|x\| - 2\beta| \leq 2\delta$. Se sigue que

$$\|x - (\|x\|+\delta)x_0\| = \|x - 2\beta x_0 + 2\beta x_0 - (\|x\|+\delta)x_0\| \leq$$

$$\leq \|x - 2\beta x_0\| + |2\beta - \|x\|| + \delta \leq 2\delta + 2\delta + \delta = 5\delta \leq \varepsilon.$$

Por otra parte, $r(x) = (1-\alpha(x))\, x + \alpha(x)\, (x - (\|x\|+\delta)x_0)$ luego

$$\|r(x)\| \le (1-\alpha(x))\, \|x\| + \alpha(x)\, \|x - (\|x\|+\delta)x_0\| \le$$

$$\le (1-\alpha(x))\, \|x\| + \alpha(x)\varepsilon < 1-\alpha(x) + \alpha(x) = 1.$$

A continuación probaremos 1). Sea, para ello $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, arbitrario. Si $d(x,[0,2x_0]) \le \delta$ entonces

$$\|r(x)\| = \|x - (\|x\|+\delta)x_0\| \ge \|x\| + \delta - \|x\| = \delta.$$

Si $d(x,[0,2x_0]) \ge \delta$, dado que $\alpha(x)(\|x\|+\delta)x_0 \in [0,2x_0]$ tenemos claramente $\|x - \alpha(x)(\|x\|+\delta)x_0\| \ge \delta$, esto es, $\|r(x)\| \ge \delta$.

Finalmente comprobemos 3). Sea $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ con $\|x\| \le \varepsilon$.

Si $d(x,[0,2x_0]) \ge 2\delta$ entonces $\|r(x)\| = \|x\| \le \varepsilon$.

Igualmente si $d(x,[0,2x_0]) \le 2\delta$, de acuerdo con lo probado con anterioridad, $\|r(x)\| \le (1-\alpha(x))\, \|x\| + \alpha(x)\varepsilon \le \varepsilon$. #

3.23 TEOREMA.

Sea $\mathcal{T}$ un espacio topológico y $\mathcal{X}$ un espacio de Banach estrictamente convexo de dimensión distinta de uno. Entonces el espacio $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de Bade:

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{E}(\mathcal{Y}))$$

DEMOSTRACION:

Sea $f \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\frac{\varepsilon}{2} < 1$. Sea n un natural con $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y sean n puntos $x_1, \dots, x_n$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ distintos dos a dos. Consideremos además los siguientes números reales positivos

$$\rho = \mathrm{Min}\left\{ d\Big([\tfrac{\varepsilon}{4}\, x_k\, ,\, 2x_k]\, ,\, [\tfrac{\varepsilon}{4}\, x_m\, ,\, 2x_m]\Big) : k,m \in \{1,\dots,n\},\ k \ne m \right\} \quad \text{y}$$

$$\delta = \text{Min}\,\{\rho/10, \varepsilon/10\}.$$

Sea $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ con $\|x\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ y supongamos que existe k en $\{1,\ldots,n\}$ tal que $d(x,[0,2x_k]) \leq 2\delta$. Entonces, para cada $m \in \{1,\ldots,n\}$ con $m \neq k$ se tiene que $d(x,[0,2x_m]) \geq 2\delta$. En efecto, dado $m \neq k$ sean β_1 y β_2 en $[0,1]$ tales que $\|x - 2\beta_1 x_k\| = d(x,[0,2x_k])$ y $\|x - 2\beta_2 x_m\| = d(x,[0,2x_m])$. Por hipótesis $\|x - 2\beta_1 x_k\| \leq 2\delta$, de ello se deduce que $2\beta_1 \geq \frac{\varepsilon}{4}$ (nótese que $\|x\| - 2\beta_1 \leq 2\delta$ implica $2\beta_1 \geq \|x\| - 2\delta \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2\varepsilon}{10} = \frac{3\varepsilon}{10} > \frac{\varepsilon}{4}$).

Si $2\beta_2 \geq \frac{\varepsilon}{4}$ entonces

$$\rho \leq d\Big([\tfrac{\varepsilon}{4}\, x_k\,,\, 2x_k]\,,\, [\tfrac{\varepsilon}{4}\, x_m\,,\, 2x_m]\Big) \leq \|2\beta_1 x_k - 2\beta_2 x_m\| \leq$$

$$\leq \|2\beta_1 x_k - x\| + \|x - 2\beta_2 x_m\| \leq 2\delta + \|x - 2\beta_2 x_m\|,$$

luego $\|x - 2\beta_2 x_m\| \geq \rho - 2\delta \geq 10\delta - 2\delta > 2\delta$.

Si $2\beta_2 \leq \frac{\varepsilon}{4}$ entonces

$$\|x - 2\beta_2 x_m\| \geq \|x\| - 2\beta_2 \geq \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4} > \frac{\varepsilon}{5} \geq 2\delta.$$

Aplicando el lema anterior (con $\frac{\varepsilon}{2}$ en lugar de ε) podemos considerar n aplicaciones continuas $r_1\,, \ldots\,, r_n$ de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que, para cada $m \in \{1,\ldots,n\}$

1) $\|r_m(x)\| \geq \delta,\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$

2) $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),\ d(x,[0,2x_m]) \geq 2\delta \ \Rightarrow\ r_m(x) = x$

3) $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),\ \|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \Rightarrow\ \|r(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Así, dado $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y supuesto $\|x\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ se tiene

$$\|x - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} r_m(x)\| \leq \|x\| + \frac{1}{n}\, n\,\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por otra parte, si $\|x\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, o bien existe $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $d(x,[0,2x_k]) \leq 2\delta$ en cuyo caso $d(x,[0,2x_m]) \geq 2\delta$ para cada $m \neq k$, o bien $d(x,[0,2x_m]) \geq 2\delta$, $\forall\, m \in \{1,\ldots,n\}$. En el primer caso

$$\|x - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} r_m(x)\| = \|x - \frac{1}{n}\sum_{m\neq k} r_m(x) - \frac{1}{n} r_k(x)\| =$$

$$= \|x - \frac{n-1}{n}x - \frac{1}{n} r_k(x)\| = \|\frac{1}{n}(x - r_k(x)\| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$$

y en el segundo $\|x - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} r_m(x)\| = \|x - \frac{1}{n} nx\| = 0 < \varepsilon$. Así pues, $\|x - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} r_m(x)\| \leq \varepsilon$, $\forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. En particular,

$$\|f(t) - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} r_m(f(t))\| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in \mathcal{T}.$$

Para cada $m \in \{1,\ldots,n\}$ la aplicación $r_m \circ f$ está en las condiciones del teorema 3.11 luego

$$r_m \circ f = \frac{1}{4}(e_1^{(m)} + e_2^{(m)} + e_3^{(m)} + e_4^{(m)})$$

para convenientes $e_1^{(m)}, e_2^{(m)}, e_3^{(m)}, e_4^{(m)} \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$. Finalmente es obvio que

$$h = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} r_m \circ f = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\Big(\frac{1}{4}(e_1^{(m)} + e_2^{(m)} + e_3^{(m)} + e_4^{(m)})\Big) \in co(\mathcal{E}(\mathcal{Y})) \quad \text{y}$$

$$\|f(t) - h(t)\| \leq \varepsilon, \ \forall\, t \in \mathcal{T}. \ \#$$

En el caso $dim\ \mathcal{X} = 1$ $(\mathcal{X} = \mathbb{R})$ no se verifica el resultado anterior, de hecho, la propiedad de Bade en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ impone restricciones sobre $\mathcal{T}$. Este caso presenta otra peculiaridad con respecto al caso $dim\ \mathcal{X} \geq 2$, y es que la propiedad de Bade en $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ equivale a la λ-propiedad pero ésta no equivale a la P.R.C. (como se deduce de la nota 3.15), mientras que, en el caso *dim* $\mathcal{X} \geq 2$, la propiedad de Bade no equivale a la λ-propiedad (tómese $\mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathcal{X}),\mathcal{X})$ y téngase en cuenta el teorema anterior, el ejemplo 2.16 iii) y el corolario 3.12) pero la λ-propiedad sí es equivalente a la P.R.C. (corolario 3.12). El siguiente enunciado resume la información correspondiente al caso que nos ocupa:

3.24 COROLARIO.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico compacto Hausdorff. Son equivalentes:*

i) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

ii) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ *tiene la P.R.S.C.*

iii) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

iv) $(\mathcal{T},\mathbb{R})$ *tiene la propiedad de extensión.*

v) *El conjunto de todas las funciones continuas y acotadas de* $\mathcal{T}$ *en* $\mathbb{R}$ *que omiten el origen es denso en* $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$.

vi) dim $\mathcal{T} = 0$.

vii) $\mathcal{T}$ *es cero-dimensional.*

viii) $\mathcal{T}$ *es totalmente disconexo.*

ix) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ *tiene la propiedad de Bade.*

La equivalencia entre las seis primeras afirmaciones es consecuencia del teorema 1.15 y del corolario 2.26. Por otra parte, vi) $\Leftrightarrow$ vii) $\Leftrightarrow$ viii) se sigue de los teoremas 6.2.1, 6.2.6, 6.2.7 y 6.2.9 de [21]. Finalmente, la equivalencia entre viii) y ix) es el resultado original de Bade ([7]). Señalemos, ya para terminar, que la equivalencia entre las afirmaciones i), ii), iii), iv), v) y ix) es válida sin restricciones sobre $\mathcal{T}$. Para convencerse de ello basta tener en cuenta la proposición anterior, los teoremas 1.15 y 2.8, el comentario que precede a la proposición 3.5 y los corolarios 2.2 y 2.4.

CAPITULO IV

ESPACIOS DE SUCESIONES CONVERGENTES

La convexidad estricta de $\mathcal{X}$ ha sido, en los dos capítulos anteriores, una condición permanente para el estudio de la estructura extremal de los espacios $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$. La proposición 2.7 establecía una sencilla caracterización de los puntos extremos de la bola unidad de $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ para $\mathcal{X}$ estrictamente convexo. Por otra parte, con el ejemplo 2.5, se puso de manifiesto que, en general, si $\mathcal{X}$ no es estrictamente convexo, no existe una tal caracterización.

Este inconveniente permite adivinar las dificultades que, sin duda, han de aparecer si prescindimos de la convexidad estricta de $\mathcal{X}$.

Sin embargo, restringiendo nuestra atención a los espacios de sucesiones convergentes, que constituyen una clase entre los espacios de funciones continuas, evitaremos, al menos, esta primera dificultad de caracterización de los puntos extremos, pues, para tales espacios, existe una descripción muy sencilla de dichos puntos que no requiere ninguna condición sobre $\mathcal{X}$.

Este último capítulo es pues una (modesta) aproximación al caso no estrictamente convexo. Nos centraremos, como ya hemos indicado, en espacios de sucesiones convergentes y estudiaremos condiciones necesarias y condiciones suficientes (por separado) sobre $\mathcal{X}$ para que $c(\mathcal{X})$ tenga la λ-propiedad. Con ello ampliaremos el conocimiento que hasta ahora se tenía de la estructura extremal de estos espacios.

Hemos de señalar, no obstante, que los resultados que obtendremos en este capítulo no aportan un conocimiento completo de la estructura extremal de los espacios de sucesiones convergentes. De hecho, ciertas cuestiones quedarán abiertas para futuros estudios.

λ-PROPIEDAD EN $c(\mathcal{X})$: CONDICIONES NECESARIAS.

La siguiente proposición nos conducirá a una descripción de los puntos extremos de la bola unidad en espacios $c(\mathcal{X})$.

4.1 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{T}$ *un espacio topológico,* $\mathcal{X}$ *un espacio normado y* $\mathrm{e} \in \mathcal{E}(\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X}))$. *Si* t_0 *es un punto aislado de* $\mathcal{T}$ *entonces* $\mathrm{e}(\mathrm{t}_0) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$.

DEMOSTRACION:

Supongamos que $e(t_0) = \lambda x + (1-\lambda)y$ para $x,y \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $\lambda \in]0,1[$. Sean $f,g : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{X}$ definidas por

$$f(t) = g(t) = e(t), \text{ si } t \neq t_0, \quad f(t_0) = x, \quad g(t_0) = y.$$

Evidentemente $f,g \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ y además $e = \lambda f + (1-\lambda)g$. Así pues, e : $f = g$ y, en particular, $e(t_0) = f(t_0) = g(t_0)$, esto es, $e(t_0) = x = y$. #

Como consecuencia, si $\mathcal{T}$ es un espacio topológico discreto

$$e \in \mathcal{E}(\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})) \text{ si, y sólo si, } e(t) \in \mathcal{E}(\mathcal{X}), \ \forall\, t \in \mathcal{T}.$$

En particular, haciendo $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, obtenemos la caracterización de los puntos extremos de la bola unidad de $l_\infty(\mathcal{X}) = \mathcal{C}(\mathbb{N},\mathcal{X})$ que se desprende del lema 1.23.

Sea $\mathcal{I} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandroff de los naturales, entonces, también como consecuencia de la proposición 4.1, dado $e \in \mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathcal{I},\mathcal{X}))$ es fácil probar que

$$e \in \mathcal{E}(\mathcal{C}(\mathcal{I},\mathcal{X})) \text{ si, y sólo si, } e(n) \in \mathcal{E}(\mathcal{X}),\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

(no es necesario que $e(\infty)$ sea un punto extremo)

Tenemos así:

4.2 LEMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado y* $\{e_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$. *Equivalen:*

i) $\{e_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{X}))$.

ii) $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X}),\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Del corolario 1.18 se deduce que un espacio normado $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad si, y sólo si, $l_1(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad. Por otra parte, los corolarios 1.22 y 1.25 afirman explícitamente que $l_p(\mathcal{X})$ $(1 < p \leq \infty)$ tiene la λ-propiedad si, y sólo si, $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad uniforme. Este comportamiento de los espacios de sucesiones $l_p(\mathcal{X})$ hace pensar en una situación análoga para el caso de los espacios $c(\mathcal{X})$. No tardaremos en proporcionar un pequeño disgusto a nuestra intuición, comprobando que equivalencias del tipo anterior no son ciertas en el caso que nos ocupa. No obstante, una de las implicaciones se cumple y es muy sencillo comprobarlo, como veremos enseguida:

4.3 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado con* $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$. *Para cada* $\{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$ *se verifica que:*

$$\lambda(\{x_n\}) \leq \mathrm{Inf}\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como consecuencia, si $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme) entonces* $\mathcal{X}$ *tiene la* λ*-propiedad (resp. uniforme).*

DEMOSTRACION:

Sea $\{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$, si $\lambda(\{x_n\}) = 0$ la desigualdad del enunciado se verifica de manera trivial. Supongamos $\lambda(\{x_n\}) > 0$ y sea $0 < \alpha < \lambda(\{x_n\})$. Entonces existe $\{e_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{X}))$ tal que $\lambda(\{e_n\},\{x_n\}) > \alpha$ y, por tanto, de acuerdo con la proposición 1.7, $\alpha + \|\{x_n\} - \alpha\ \{e_n\}\| \leq 1$. Así pues,

$$\alpha + \|x_n - \alpha e_n\| \leq 1\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (lema anterior), de la desigualdad precedente se sigue que $\lambda(x_n) \geq \lambda(e_n,x_n) \geq \alpha$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\mathit{Inf}\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \geq \alpha$$

y por la arbitrariedad de α,

$$\mathit{Inf}\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \geq \lambda(\{x_n\}).$$

Dado $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, podemos aplicar la desigualdad anterior a la sucesión $\{x\}$, constantemente igual a x, para obtener $\lambda(x) \geq \lambda(\{x\})$. Así, si $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad, $\lambda(\{x\}) > 0$ y, por tanto, $\lambda(x) > 0$, para todo x en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Ello prueba que $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad. Por otra parte, de la relación

$$\lambda(x) \geq \lambda(\{x\}) \geq \lambda(c(\mathcal{X})),\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

se sigue que $\lambda(\mathcal{X}) \geq \lambda(c(\mathcal{X}))$ y así, si $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme es claro que $\mathcal{X}$ también tiene la λ-propiedad uniforme. #

Sin embargo, existen espacios normados $\mathcal{X}$ con la λ-propiedad uniforme (y la P.R.C.) tales que $c(\mathcal{X})$ no tiene la λ-propiedad:

4.4 EJEMPLO.

El espacio $\mathcal{X}$ que vamos a considerar aparece en la nota 2.4 de [5] en relación con ciertas propiedades de continuidad de la λ-función. Se trata del espacio que mencionamos en el ejemplo 2.5. Como comprobaremos enseguida, también será útil para verificar la afirmación anterior.

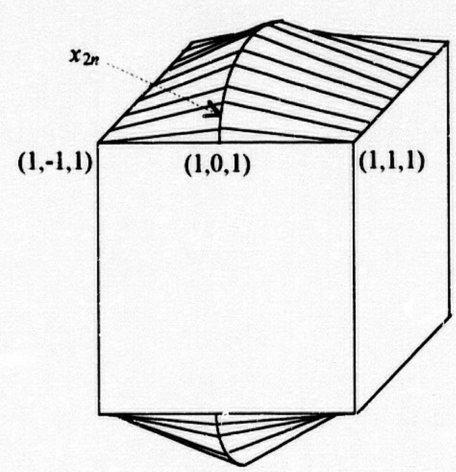
Consideremos los conjuntos

$$A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ z = 0\}$$

$$A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1,\ y = 0,\ z \geq 0\}$$

$$A = co(A_1 \cup A_2)\ ,\ B_1 = (0,0,1) + A\ ,\ B_2 = -B_1\ \text{ y }\ B = \text{co}(B_1 \cup B_2)$$

El conjunto B (véase la figura) es absorbente, absolutamente convexo y radialmente compacto. Por tanto, el funcional de Minkowski del conjunto B es una norma, denotémosla $\|\cdot\|$, sobre $\mathbb{R}^3$ cuya bola unidad es B. Sea $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$.



Puesto que $\mathcal{X}$ es de dimensión finita, tiene la P.R.C. y la λ-propiedad uniforme (comentario que precede a la definición 1.5 y proposición 1.12 i)). Sin embargo, $c(\mathcal{X})$ no tiene la λ-propiedad:

Sea $\{x_n\}$ la sucesión de elementos de $\mathcal{X}$ definida por

$$x_{2n} = \left(\cos\frac{1}{n} , 0 , 1 + \operatorname{sen}\frac{1}{n} \right) , \quad x_{2n-1} = (1,0,1) , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Es inmediato que $\{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$. Supongamos que $\lambda(\{x_n\}) > 0$ y sea α un número real en la situación $0 < \alpha < \lambda(\{x_n\})$. Entonces existe $\{e_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{X}))$ y $\{z_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$ tales que $\{x_n\} = \alpha\{e_n\} + (1-\alpha)\{z_n\}$. Por tanto,

$$x_n = \alpha e_n + (1-\alpha)z_n , \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

y dado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n} \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, necesariamente $x_{2n} = e_{2n}$. Por otra parte, sólo existen dos elementos en $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ para los que es posible la relación $(1,0,1) = x_{2n-1} = \alpha e_{2n-1} + (1-\alpha)z_{2n-1}$. En concreto, se trata de los puntos $(1,-1,1)$ y $(1,1,1)$. Así pues, $e_{2n-1} \in \{(1,-1,1),(1,1,1)\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es una contradicción (nótese que, en tales circunstancias, la sucesión $\{e_n\}$ no es convergente).

Si $\mathcal{X}$ es el espacio del ejemplo anterior es claro que

$$(1,0,1) \in \overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})}\backslash\mathcal{E}(\mathcal{X}).$$

Hemos aprovechado esta circunstancia para probar que $c(\mathcal{X})$ no tiene la λ-propiedad. Seguidamente comprobaremos que esto no es más que una manifestación de un hecho más general: si $\mathcal{X}$ es un espacio normado de dimensión finita y $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad entonces $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ es cerrado. Necesitaremos el siguiente resultado:

4.5 LEMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado tal que* $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad. Dado* $x \in \overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})}$, *existe un número real* α, *con* $0 < \alpha < 1$, *que verifica lo siguiente: Para cada* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, *pueden encontrarse* $y \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *y* $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ *tales que*

$$x = \alpha e + (1-\alpha)y \quad y \quad \|e-x\| < \varepsilon.$$

DEMOSTRACION:

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de puntos de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\{u_n\} \to x$ y consideremos la sucesión $\{z_n\}$ definida por

$$z_{2n-1} = u_n \ , \ z_{2n} = x \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $\{z_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$, existen $\{y_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$, $\{e_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{X}))$ y $0<\alpha<1$ tales que $\{z_n\} = \alpha\{e_n\} + (1-\alpha)\{y_n\}$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = z_{2n-1} = \alpha e_{2n-1} + (1-\alpha)y_{2n-1} \ , \ x = z_{2n} = \alpha e_{2n} + (1-\alpha)y_{2n} \ .$$

Puesto que $u_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, $u_n = e_{2n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y, en consecuencia, la sucesión $\{e_{2n-1}\}$ converge a x. Ello mismo ocurre entonces con la sucesión $\{e_{2n}\}$ y el resultado se sigue de la igualdad

$$x = \alpha e_{2n} + (1-\alpha)y_{2n} \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}. \ \#$$

Observemos, antes de probar el resultado prometido y con ánimo de facilitar su lectura, que si $\mathcal{X}$ es un espacio normado, $n \in \mathbb{N}$, y $a_1,\ldots,a_n$ son puntos de $\mathcal{X}$, el conjunto

$$M = \{t_1a_1 + \ldots + t_na_n : t_i \in \mathbb{R}, \forall\, i \in \{1,\ldots,n\} \ y \ t_1 + \ldots + t_n = 1\}$$

es una variedad afín que contiene a los puntos $a_1,\ldots,a_n$ (de hecho es la variedad que estos puntos generan). Además, el conjunto

$$A = \{t_1a_1 + \ldots + t_na_n : 0 < t_i < 1, \forall\, i \in \{1,\ldots,n\} \ y \ t_1 + \ldots + t_n = 1\}$$

es abierto en M (respecto de la topología relativa) y está contenido en $co(\{a_1,\ldots,a_n\})$. En particular,

$$A \subset Int_M\, co(\{a_1,\ldots,a_n\}),$$

el interior de $co(\{a_1,\ldots,a_n\})$ relativo a M.

4.6 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado de dimensión finita y supongamos que $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad. Entonces $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ es cerrado.

DEMOSTRACION:

Supongamos, para llegar a una contradicción, que $x \in \overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})}\backslash\mathcal{E}(\mathcal{X})$ y sea $\alpha \in]0,1[$ como en el lema anterior. A continuación probaremos que existe una sucesión $\{e_n\}$ de elementos de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ y una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, para las que se verifican las siguientes condiciones, cualquiera que sea n:

1) $x = \alpha e_n + (1-\alpha)y_n$ y $e_n \neq y_n$.

2) La variedad afín M_n generada por los puntos $e_1,\ldots,e_n,y_1,\ldots,y_n$ tiene dimensión n y $x \in Int_{M_n} co(\{e_1,\ldots,e_n,y_1,\ldots,y_n\})$.

Nótese que (en virtud de la condición 1)) M_n coincide con la variedad afín que generan los puntos $x,e_1,\ldots,e_n$. Nótese también que la existencia de una tal sucesión de variedades es una contradicción, pues $\mathcal{X}$ es de dimensión finita. Por tanto, una vez hayamos probado lo anterior, la demostración habrá concluido.

Sean (lema anterior) $e_1 \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, $y_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que

$$x = \alpha e_1 + (1-\alpha)y_1 \ ,$$

puesto que $x \notin \mathcal{E}(\mathcal{X})$ necesariamente $e_1 \neq y_1$. La variedad afín M_1 generada por los puntos e_1,y_1 es de dimensión 1 y, de acuerdo con la observación que precede al enunciado $(0 < \alpha < 1)$ $x \in Int_{M_1}co(\{e_1,y_1\})$.

Supongamos, razonando por recurrencia, que para $k \in \{1,\dots,n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ existen $e_k \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, $y_k \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que $x = \alpha e_k + (1-\alpha)y_k$, $e_k \neq y_k$, la variedad M_n generada por los puntos $e_1,\dots,e_n,y_1,\dots,y_n$ tiene dimensión n y $x \in Int_{M_n}co(\{e_1,\dots,e_n,y_1,\dots,y_n\})$. Por esta última condición existe ε en $\mathbb{R}^+$ tal que $B(x,\varepsilon)\cap M_n \subset co(\{e_1,\dots,e_n,y_1,\dots,y_n\})$. Podemos suponer

$$\varepsilon < Min\,\{\|e_k-x\|,\|y_k-x\|\},\ \forall\ k \in \{1,\dots,n\}.$$

En virtud del lema anterior, existen $y_{n+1} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ y $e_{n+1} \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, tales que $x = \alpha e_{n+1} + (1-\alpha)y_{n+1}$ y $\|e_{n+1} - x\| < \varepsilon$. Es claro, como antes, que $e_{n+1} \neq y_{n+1}$ y además $e_{n+1} \notin M_n$. Nótese que si $e_{n+1} \in M_n$ entonces $e_{n+1} \in co(\{e_1,\dots,e_n,y_1,\dots,y_n\})$ y ello implica (por ser e_{n+1} un punto extremo) que e_{n+1} coincide con algún e_k o algún y_k, lo cual no es posible ya que, $\|e_{n+1} - x\| < \varepsilon < Min\,\{\|e_k-x\|,\|y_k-x\|\}$, $\forall\ k \in \{1,\dots,n\}$. Así pues, la variedad M_{n+1} generada por los puntos $e_1,\dots,e_{n+1},y_1,\dots,y_{n+1}$ (que coincide con la generada por $x,e_1,\dots,e_{n+1}$) tiene dimensión $n+1$. Además,

$$x = \frac{1}{n+1}x \overset{(n+1}{+\dots+} \frac{1}{n+1}x =$$
$$= \frac{1}{n+1}(\alpha e_1 + (1-\alpha)y_1) + \dots + \frac{1}{n+1}(\alpha e_{n+1} + (1-\alpha)y_{n+1}) =$$
$$= \frac{\alpha}{n+1}(e_1 + \dots + e_{n+1}) + \frac{1-\alpha}{n+1}(y_1 + \dots + y_{n+1}),$$

lo que pone de manifiesto, teniendo en cuenta que $\frac{\alpha}{n+1}, \frac{1-\alpha}{n+1} \in]0,1[$ y la observación hecha justo antes de enunciar esta proposición, que

$$x \in Int_{M_{n+1}}co(\{e_1,\dots,e_{n+1},y_1,\dots,y_{n+1}\}).\ \#$$

La demostración del resultado precedente se inspira en el teorema 2.10 de [5], donde se razona de forma muy similar para probar que si $\mathcal{X}$ es un espacio normado de dimensión finita y $x \in \overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})}\backslash\mathcal{E}(\mathcal{X})$ entonces $\lambda(x) < 1$.

En el próximo apartado comprobaremos que la condición sobre la dimensión de $\mathcal{X}$ es esencial en la proposición 4.6.

λ-PROPIEDAD EN $c(\mathcal{X})$: CONDICIONES SUFICIENTES.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado estrictamente convexo. De acuerdo con el corolario 2.17 ii), $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme y, de hecho,

$$\lambda(\{x_n\}) = Inf\ \{ \frac{1+\|x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N} \}\ ,\ \ \forall\ \{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X})).$$

Además, si $dim\ \mathcal{X} \geq 2$, $c(\mathcal{X})$ tiene la P.R.C.. Es más, todo punto de su bola unidad se expresa como media de ocho puntos extremos (corolario 3.12). Este número de puntos extremos puede rebajarse a cuatro si $\mathcal{X}$ es de dimensión par o de dimensión infinita (corolarios 3.18 y 3.19).

En este apartado pondremos de manifiesto la existencia de una amplia gama de espacios no estrictamente convexos tales que $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad.

Supongamos ahora que $\mathcal{X}$ es un espacio normado de dimensión finita. Del teorema 2.10 de [5] (véase el comentario que sigue a la proposición 4.6) se deduce con facilidad que $x \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ si, y sólo si, $\lambda(x) = 1$ (la condición $\lambda(x) = 1$, con independencia de la dimensión de $\mathcal{X}$, implica que $x \in \overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})}$). Como consecuencia, un espacio normado de dimensión finita $\mathcal{X}$ es estrictamente convexo si, y sólo si, $\lambda(x) = 1, \ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Sin embargo, la situación es muy distinta en el caso infinito-dimensional, pues, como puede verse en [6], existen espacios de Banach con la λ-propiedad, que no son estrictamente convexos y tales que

$$\lambda(x) = 1, \ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X}).$$

Nótese que esta última condición es equivalente a

$$\lambda(x) = \frac{1+\|x\|}{2}, \ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \quad \text{(apartados iv) y vii) de la proposición 1.9).}$$

En vista de lo anterior, es claro que el siguiente teorema es una generalización del corolario 2.17 ii).

4.7 TEOREMA.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado con la λ-propiedad. Supongamos que

$$\lambda(x) = \frac{1+\|x\|}{2}, \ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Entonces $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme. De hecho,

$$\lambda(\{x_n\}) = \operatorname{Inf}\left\{ \frac{1+\|x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N} \right\} = \operatorname{Inf}\{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}, \ \forall\ \{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X})).$$

DEMOSTRACION:

Sea $\{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$ y $x_0 = \lim x_n$. Supongamos en primer lugar que $x_0 \neq 0$ y consideremos dos números reales α y β en la situación

$$0 < \alpha < \operatorname{Inf}\left\{ \frac{1+\|x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{y} \quad 0 < \beta < 1.$$

Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$ (obsérvese que $\mathbb{N}\backslash A$ es finito) y sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números reales tal que $\{\alpha_n\} \to 1$ y

$$\alpha_n \in]\beta,1[\ \text{ si } \ n \in A \ , \ \alpha_n = 1 \ \text{ si } \ n \in \mathbb{N}\backslash A.$$

Para cada $n \in A$, $0 < \alpha_n < 1 = \lambda(\frac{x_n}{\|x_n\|})$, luego existe $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\lambda(e_n, \frac{x_n}{\|x_n\|}) > \alpha_n$. Teniendo en cuenta la proposición 1.7:

$$\text{(1)} \qquad \alpha_n + \|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \alpha_n e_n\| \leq 1 \qquad (\forall\ n \in A).$$

Para $n \in \mathbb{N}\backslash A$, sea $e_n = e$, donde e es cualquier elemento (fijo) de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$.

De (1) se deduce que la sucesión $\{e_n\}$ así construida es convergente. Por tanto, $\{e_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{X}))$. A continuación probaremos que

$$\alpha\beta + \|x_n - \alpha\beta e_n\| \leq 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Si $n \in A$, haciendo uso, una vez más, de la proposición 1.7, obtenemos:

$$\alpha\beta + \|x_n - \alpha\beta e_n\| \leq \frac{1+\|x_n\|}{2}\alpha_n + \|x_n - \frac{1+\|x_n\|}{2}\alpha_n e_n\| =$$

$$= \frac{1+\|x_n\|}{2}\alpha_n + \|x_n\|\ \|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \alpha_n e_n + \alpha_n e_n - \frac{1+\|x_n\|}{2\|x_n\|}\alpha_n e_n\| \leq$$

$$\leq \frac{1+\|x_n\|}{2}\alpha_n + \|x_n\|\ \|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \alpha_n e_n\| + \|x_n\|\ \|\alpha_n e_n - \frac{1+\|x_n\|}{2\|x_n\|}\alpha_n e_n\| \leq$$

$$\leq \frac{1+\|x_n\|}{2}\alpha_n + \|x_n\|\ (1-\alpha_n) + \|x_n\|\ \alpha_n\ |1 - \frac{1+\|x_n\|}{2\|x_n\|}| =$$

$$= \frac{1+\|x_n\|}{2}\alpha_n + \|x_n\|\ (1-\alpha_n) + \|x_n\|\ \alpha_n \frac{1-\|x_n\|}{2\|x_n\|} = \alpha_n + \|x_n\|\ (1-\alpha_n) \leq 1.$$

Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}\backslash A$ (supuesto que este conjunto es no vacío, en cuyo caso, $\alpha < \frac{1}{2}$), $\alpha\beta + \|x_n - \alpha\beta e_n\| = \alpha\beta + \|-\alpha\beta e\| = 2\alpha\beta < \beta < 1$.

De lo anterior se deduce que $\alpha\beta + \|\{x_n\} - \alpha\beta\{e_n\}\| \leq 1$ y, por tanto,

$$\lambda(\{x_n\}) \geq \lambda(\{e_n\},\{x_n\}) \geq \alpha\beta,$$

así pues, dada la arbitrariedad de α y β,

$$\lambda(\{x_n\}) \geq Inf\ \{ \frac{1+\|x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N} \}.$$

Finalmente, si $\{x_n\} \to 0$, dado $\varepsilon \in]0,1[$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m \Rightarrow \|x_n\| < \varepsilon,$$

luego, considerando, para cada $n > m$, $e_n = e$ (con $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, fijo), tenemos

$$\frac{1-\varepsilon}{2} + \|x_n - \frac{1-\varepsilon}{2} e_n\| \leq \frac{1-\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{2} = 1,$$

y para $n \leq m$, puesto que $\frac{1-\varepsilon}{2} < \frac{1}{2} \leq \frac{1+\|x_n\|}{2} = \lambda(x_n)$, existe $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, tal que $\lambda(e_n,x_n) > \frac{1-\varepsilon}{2}$ y por consiguiente (proposición 1.7)

$$\frac{1-\varepsilon}{2} + \|x_n - \frac{1-\varepsilon}{2} e_n\| \leq 1.$$

La sucesión $\{e_n\}$ que acabamos de definir es convergente $(n > m \Rightarrow e_n = e)$ y

$$\frac{1-\varepsilon}{2} + \|\{x_n\} - \frac{1-\varepsilon}{2} \{e_n\}\| \leq 1,$$

en consecuencia, $\lambda(\{x_n\}) \geq \frac{1-\varepsilon}{2}$. Por la arbitrariedad de ε,

$$\lambda(\{x_n\}) \geq \frac{1}{2} = Inf \{ \frac{1+\|x_n\|}{2} : n \in \mathbb{N} \}.$$

La desigualdad restante es consecuencia de la proposición 4.3. #

Las hipótesis del teorema anterior implican que $\overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})} = \mathcal{S}(\mathcal{X})$. Veamos que, en efecto, es así, con lo cual aclaramos de paso una de las afirmaciones hechas poco antes de enunciar el teorema. Sea pues $\mathcal{X}$ con la λ-propiedad y tal que $\lambda(x) = \frac{1+\|x\|}{2}$, $\forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Entonces, dado $x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$, $\lambda(x) = 1$. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de elementos del intervalo $]0,1[$ tal que $\{\alpha_n\} \to 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, de acuerdo con el comentario que sigue a la definición 1.10, existe $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $z_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que $x = \alpha_n e_n + (1-\alpha_n)z_n$, luego,

$$\|x-e_n\| = \|(1-\alpha_n)(z_n-e_n)\| = (1-\alpha_n)\ \|z_n-e_n\| \leq 2\ (1-\alpha_n),$$

de ello se sigue que $\{e_n\} \to x$.

Consideremos ahora un espacio de Banach no estrictamente convexo $\mathcal{X}$ con la λ-propiedad y tal que $\lambda(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$ (véase [6]). Entonces,

$\overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})} = \mathcal{S}(\mathcal{X}) \neq \mathcal{E}(\mathcal{X})$. Tenemos así que $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ no es cerrado y, sin embargo, en virtud del teorema anterior, $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme. Queda pues establecido que la proposición 4.6 no se verifica en general si no se exige que $\mathcal{X}$ sea de dimensión finita.

Los espacios $\mathcal{X}$ que verifican las hipótesis del teorema 4.7 no son, necesariamente, estrictamente convexos (si contemplamos el caso infinito-dimensional) pero están muy cerca de serlo ($\overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})} = \mathcal{S}(\mathcal{X})$). Nuestro próximo resultado considera una clase de espacios que, como después comprobaremos, dista mucho de los estrictamente convexos.

4.8 TEOREMA.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado con la* λ*-propiedad (resp. uniforme). Para cada* $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, *supongamos que la aplicación* $x \longmapsto \lambda(e,x)$ *de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *en* $[0,1]$ *es continua. Entonces,* $c(\mathcal{X})$ *tiene la* λ*-propiedad (resp.uniforme) y dado* $\{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$, $\lambda(\{x_n\}) \geq \operatorname{Inf}\{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$ $(x_0 = \lim x_n)$. *Si además la* λ*-función asociada a* $\mathcal{X}$ *es continua entonces*

$$\lambda(\{x_n\}) = \operatorname{Inf}\{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}, \quad \forall \{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X})).$$

DEMOSTRACION:

Sea $\{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$ y $x_0 = \lim x_n$. Por hipótesis, $\lambda(x_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. En particular, $\lambda(x_0) > 0$ y, por tanto, existe $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\lambda(e,x_0) > 0$. De la continuidad de la aplicación $x \longmapsto \lambda(e,x)$ se sigue entonces que $\lambda(e,x_n) > \frac{1}{2}\lambda(e,x_0)$ para todo n mayor o igual que un conveniente natural. Como consecuencia inmediata de lo anterior,

$$Inf\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\} =: \beta > 0.$$

Sea α cualquier elemento del intervalo $]0,\beta[$. Puesto que $\alpha < \lambda(x_0)$ existe $e_0 \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ con $\lambda(e_0,x_0) > \alpha$. Así pues, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > m \Rightarrow \lambda(e_0,x_n) > \alpha.$$

Para cada $n > m$ sea $e_n = e_0$. Entonces (proposición 1.7),

$$\alpha + \|x_n - \alpha e_n\| = \alpha + \|x_n - \alpha e_0\| \leq \lambda(e_0,x_n) + \|x_n - \lambda(e_0,x_n)e_0\| \leq 1.$$

Por otra parte, si $n \leq m$ también $\lambda(x_n) > \alpha$ y podemos encontrar $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\lambda(e_n,x_n) > \alpha$. Por tanto,

$$\alpha + \|x_n - \alpha e_n\| \leq \lambda(e_n,x_n) + \|x_n - \lambda(e_n,x_n)e_n\| \leq 1.$$

La sucesión $\{e_n\}$ que acabamos de construir es un punto extremo de la bola unidad de $c(\mathcal{X})$ y, de acuerdo con lo ya probado,

$$\alpha + \|\{x_n\} - \alpha\{e_n\}\| \leq 1.$$

En consecuencia, $\lambda(\{x_n\}) \geq \alpha$ y (por la arbitrariedad de α) $\lambda(\{x_n\}) \geq \beta > 0$. Queda así establecido que $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad y que $\lambda(c(\mathcal{X})) \geq \lambda(\mathcal{X})$. Por tanto, si $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad uniforme $c(\mathcal{X})$ tiene también la λ-propiedad uniforme.

Si además la λ-función asociada a $\mathcal{X}$ es continua, dado $\{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$ y $x_0 = lim\ x_n$ se tiene que $Inf\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\} = Inf\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Así, la desigualdad probada anteriormente y la proposición 4.3 nos dan finalmente $\lambda(\{x_n\}) = Inf\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$. #

Como primera aplicación del teorema anterior, tenemos

4.9 COROLARIO.

i) $c(l_1)$ *tiene la λ-propiedad (no uniforme).*

ii) *Sea* $\mathcal{T}$ *cualquier espacio topológico. Son equivalentes:*

1) $c(\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R}))$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

2) $c(\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R}))$ *tiene la* λ*-propiedad.*

3) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ *tiene la* λ*-propiedad.*

4) $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ *tiene la* λ*-propiedad uniforme.*

Además, *si* $\mathcal{T}$ *es completamente regular, podemos añadir*

5) $\dim \mathcal{T} = 0$.

iii) $c(l_\infty)$ *y* $c(c)$ *tienen la* λ*-propiedad uniforme* $(c = c(\mathbb{R}))$.

(Nótese que ii) amplía la información recogida en el corolario 3.24)

DEMOSTRACION:

i) Sea $e = \{e_n\} \in \mathcal{E}(l_1)$. En virtud del lema 1.16, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, $e_k \in \{-1,1\} = \mathcal{E}(\mathbb{R})$ y $e_n = 0, \forall n \neq k$. Dado $x = \{x_n\} \in \mathcal{B}(l_1)$ es sencillo probar que $\lambda(e,x) = \dfrac{1-\|x\|}{2} + \dfrac{1}{2}(e_k x_k + |x_k|)$. La función $x \longmapsto \lambda(e,x)$ de $\mathcal{B}(l_1)$ en $[0,1]$ es continua (como pone de manifiesto la expresión anterior) y ello ocurre cualquiera que sea $e \in \mathcal{E}(l_1)$. Recordemos, por otra parte, que l_1 tiene la λ-propiedad no uniforme (comentario que sigue a la demostración del corolario 1.19). Habida cuenta de todo lo anterior, podemos aplicar el teorema 4.8 para obtener que $c(l_1)$ tiene la λ-propiedad. Finalmente, la proposición 4.3 nos permite afirmar que $c(l_1)$ no tiene la λ-propiedad uniforme.

ii) 1) $\Rightarrow$ 2) Evidente.

2) $\Rightarrow$ 3) Proposición 4.3.

3) $\Leftrightarrow$ 4) Teorema 2.8.

4) $\Leftrightarrow$ 5) Corolario 2.26 (para $\mathcal{T}$ completamente regular).

Probemos para terminar que 4) $\Rightarrow$ 1). Supongamos pues que $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R})$ tiene la λ-propiedad uniforme y sea $e \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$ (obsérvese que $e(t) \in \{-1,1\}$, $\forall\, t \in \mathcal{T}$). Dada $f \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ y $\alpha \geq 0$,

$$\alpha + \|f - \alpha e\| \leq 1 \Leftrightarrow \alpha + |f(t) - \alpha e(t)| \leq 1,\ \forall\, t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + |e(t)(e(t)f(t) - \alpha)| \leq 1,\ \forall\, t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \alpha + |e(t)f(t) - \alpha| \leq 1,\ \forall\, t \in \mathcal{T}$$

$$\Leftrightarrow -(1-\alpha) \leq e(t)f(t) - \alpha \leq 1-\alpha,\ \forall\, t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow 2\alpha-1 \leq e(t)f(t) \leq 1,\ \forall\, t \in \mathcal{T}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha-1 \leq e(t)f(t),\ \forall\, t \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, e(t)f(t),\ \forall\, t \in \mathcal{T}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mu(ef)$$

donde, para cada $g \in \mathcal{Y}$, $\mu(g) = Inf\, \{g(t) : t \in \mathcal{T}\}$.

Así pues,

$$\lambda(e,f) = Max\, \{\alpha \geq 0 : \alpha + \|f - \alpha e\| \leq 1\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mu(ef).$$

Es fácil comprobar que

$$|\lambda(e,f) - \lambda(e,g)| \leq \frac{1}{2}\, \|f-g\|,\ \forall\, f,g \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}),$$

en particular, la aplicación $f \longmapsto \lambda(e,f)$ de $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$ en $[0,1]$ es continua. Como, por hipótesis, $\mathcal{Y}$ tiene la λ-propiedad uniforme, el teorema anterior nos da que $c(\mathcal{Y}) = c(\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathbb{R}))$ tiene la λ-propiedad uniforme.

iii) $l_\infty = \mathcal{C}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ tiene la λ-propiedad uniforme (corolario 1.25), luego, en virtud del apartado anterior, $c(l_\infty) = c(\mathcal{C}(\mathbb{N},\mathbb{R}))$ tiene la λ-propiedad uniforme. Análogamente, $c = c(\mathbb{R}) = \mathcal{C}(\mathbb{N}\cup\{\infty\},\mathbb{R})$ tiene la λ-propiedad uniforme (corolario 2.17 ii)) y podemos aplicar el apartado anterior para obtener que $c(c)$ tiene también la λ-propiedad uniforme. #

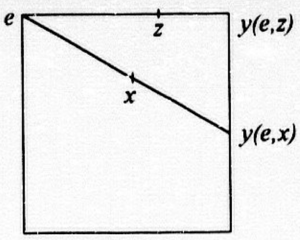
La parte ii) del corolario anterior junto con nuestro corolario 3.24 generalizan el corolario 3.5 de [3].

Antes de comentar las hipótesis y de obtener nuevas consecuencias del teorema 4.8, es conveniente hacer algunas consideraciones:

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado, $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. De acuerdo con la proposición 1.7, $\lambda(e,x) + \|x - \lambda(e,x)e\| \leq 1$. Supongamos $x \neq e$, entonces, de la desigualdad anterior se deduce que $\lambda(e,x) < 1$ y podemos definir (véase la figura)

$$y(e,x) = \frac{x - \lambda(e,x)e}{1 - \lambda(e,x)}$$

(esta notación se introduce en [5] de forma distinta pero equivalente).



Se verifica que:

i) $x = \lambda(e,x)e + (1 - \lambda(e,x))y(e,x)$

ii) $\|y(e,x)\| = 1$

iii) De todos los puntos de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, que junto con el punto e, determinan un segmento que contiene al punto x, $y(e,x)$ es el que más dista de e.

iv) Si $x \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ entonces $\lambda(e,x) = 0$ y, en consecuencia, $y(e,x) = x$. Por tanto, dados $e, e' \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ con $e \neq e'$, $\lambda(e,e') = 0$, $y(e,e') = e'$.

El apartado i) se sigue de la propia definición de $y(e,x)$. Para probar ii) sea $\alpha \geq 0$ tal que $\alpha + \|x - \alpha e\| = 1$, entonces $\alpha \leq \lambda(e,x)$ y

$$1 = \alpha + \|x - \alpha e\| \leq \lambda(e,x) + \|x - \lambda(e,x)e\| \leq 1,$$

luego $\lambda(e,x) + \|x - \lambda(e,x)e\| = 1$ y, por tanto, $\|y(e,x)\| = \dfrac{\|x - \lambda(e,x)e\|}{1 - \lambda(e,x)} = 1.$

Sea, para demostrar iii), $y \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tal que $x = \alpha e + (1-\alpha)y$ con $\alpha \in [0,1]$. Entonces $x-e = (1-\alpha)(y-e)$ y también $x-e = (1-\lambda(e,x))(y(e,x)-e)$. Luego, teniendo en cuenta que $\alpha \leq \lambda(e,x)$ (definición previa a la proposición 1.7),

$$(1-\alpha)\|y-e\| = (1-\lambda(e,x))\|y(e,x)-e\| \leq (1-\alpha)\|y(e,x)-e\|.$$

Puesto que $\alpha < 1$ (por ser $x \neq e$), de lo anterior deducimos que

$$\|y-e\| \leq \|y(e,x)-e\|.$$

Finalmente, supongamos para probar iv) que $x \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$. Si $\lambda(e,x) > 0$, la igualdad i) no deja más salida que $x = e$ $(= y(e,x))$ en contra de lo supuesto inicialmente. Así pues, $\lambda(e,x) = 0$ y, en consecuencia $y(e,x) = x$.

La condición sobre la continuidad de las funciones $x \longmapsto \lambda(e,x)$ en el teorema 4.8 tiene consecuencias inmediatas sobre el conjunto $\mathcal{E}(\mathcal{X})$. En concreto, si $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad y además verifica esta condición entonces $\mathcal{E}(\mathcal{X})'$, el conjunto de puntos de acumulación de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$, es vacío. En efecto, supuesto que $x \in \mathcal{E}(\mathcal{X})'$, existe una sucesión $\{e_n\}$ de elementos de $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\{e_n\} \rightarrow x$ y $e_i \neq e_j$, $\forall\, i,j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$. Puesto que $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad, $\lambda(e,x) > 0$ para algún $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y por la continuidad de la aplicación $x \longmapsto \lambda(e,x)$, $\{\lambda(e,e_n)\} \longrightarrow \lambda(e,x)$. Esto es absurdo pues la sucesión $\{\lambda(e,e_n)\}$ es (salvo, a lo sumo, para un valor de n) idénticamente nula.

Es interesante observar que si $\mathcal{X}$ es un espacio normado complejo con $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ entonces $\mathcal{E}(\mathcal{X})' \neq \emptyset$ (si $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ entonces $\beta e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, para todo $\beta \in \mathbb{C}$ con $|\beta| = 1$). Por tanto, ningún espacio normado que admita una estructura compleja verifica las condiciones del teorema 4.8. Del mismo modo, si $\mathcal{X}$ es un espacio normado (real) con $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ y

$$\lambda(x) = \frac{1+\|x\|}{2}, \ \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

entonces, como ya sabemos, $\overline{\mathcal{E}(\mathcal{X})} = \mathcal{S}(\mathcal{X})$ y si *dim* $\mathcal{X} \geq 2$, de ello se sigue que $\mathcal{E}(\mathcal{X})' = \mathcal{S}(\mathcal{X})$. Así pues, salvo para *dim* $\mathcal{X} = 1$, no existe solapamiento entre los teoremas 4.7 y 4.8 (sus hipótesis son mutuamente excluyentes).

Pese a lo restrictivas que son las hipótesis del teorema 4.8, engloban a una amplia gama de espacios. El corolario 4.9 nos ha proporcionado una primera justificación de ello. Para introducir nuevos espacios en las condiciones del citado teorema, necesitamos el siguiente concepto que puede hallarse en [30] (definición 2.1):

4.10 DEFINICION.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado con* $\mathcal{E}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$ *y sea* $\delta > 0$. *Se dice que* $\mathcal{X}$ *es* δ*-inclinado si para cada* $\mathrm{e} \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ *y cada* $\mathrm{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *con* $\mathrm{x} \neq \mathrm{e}$ *existe* $\mathrm{f} \in \mathcal{X}^*$ *tal que*

$$\|\mathrm{f}\| = 1 = \mathrm{f}(\mathrm{y}(\mathrm{e},\mathrm{x})) \quad y \quad \mathrm{f}(\mathrm{e}) \leq 1-\delta.$$

Supuesto que $\mathcal{X}$ es δ-inclinado, dados $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ y $x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ $(x \neq e)$, sea f como en la definición. es claro que

$$\delta \leq 1 - f(e) = f(y(e,x) - e) \leq \|y(e,x) - e\|$$

Como consecuencia, dados $e, e' \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ con $e \neq e'$,

$$\delta \leq \|y(e,e') - e\| = \|e' - e\|$$

y, en particular, $\mathcal{E}(\mathcal{X})' = \emptyset$.

Esta propiedad ha producido, sobre los puntos extremos, el mismo efecto que la continuidad de las aplicaciones $x \longmapsto \lambda(e,x)$. No es de extrañar, por tanto, alguna relación entre ambas propiedades. Lohman demuestra en [30] (teorema 2.3) que si $\mathcal{X}$ es un espacio normado con la λ-propiedad y además $\mathcal{X}$ es δ-inclinado, para algún $\delta > 0$, entonces,

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq \frac{1}{\delta} \|x-y\|, \ \forall\ x,y \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Además, en el transcurso de su razonamiento, establece que

$$|\lambda(e,x) - \lambda(e,y)| \leq \frac{1}{\delta} \|x-y\|, \ \forall\ x,y \in \mathcal{B}(\mathcal{X}),$$

cualquiera que sea $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$. Por tanto:

4.11 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado con la λ-propiedad (resp. uniforme) y supongamos que $\mathcal{X}$ es δ-inclinado, para algún $\delta > 0$. Entonces $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad (resp. uniforme) y

$$\lambda(\{x_n\}) = \text{Inf}\ \{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}\ , \ \forall\ \{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X})).$$

DEMOSTRACION:

Es consecuencia inmediata del teorema 4.8 y de los comentarios anteriores. #

En la referencia citada (proposición 2.2) Lohman demuestra que l_1 y l_∞ son δ-inclinados con $\delta = 2$ y prueba además que si $\mathcal{X}$ es un espacio normado cuya bola unidad es un poliedro ($\mathcal{E}(\mathcal{X})$ es finito y $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = co(\mathcal{E}(\mathcal{X}))$) entonces $\mathcal{X}$ es δ-inclinado para algún $\delta > 0$ (Obsérvese que si $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ es un poliedro, entonces $\mathcal{X}$ es finito dimensional y, necesariamente, real).

Así pues, lo correspondiente a l_1 y l_∞ en el corolario 4.9 puede también deducirse del corolario anterior tal como hacemos ahora con el caso poliédrico:

4.12 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado y supongamos que su bola unidad es un poliedro. Entonces $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad uniforme. Además,

$$\lambda(\{x_n\}) = \operatorname{Inf}\{\lambda(x_n) : n \in \mathbb{N}\}, \quad \forall \{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X})).$$

DEMOSTRACION:

De acuerdo con los comentarios precedentes $\mathcal{X}$ es δ-inclinado para algún $\delta > 0$. Además $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad uniforme (por ser de dimensión finita, proposición 1.12 i)). Basta pues aplicar el corolario anterior. #

Antes de acabar este apartado señalemos que para espacios de dimensión finita la δ-inclinación y la continuidad de las aplicaciones $x \longmapsto \lambda(e,x)$, son propiedades equivalentes que caracterizan a los espacios poliédricos. Este es el contenido del siguiente resultado:

4.13 PROPOSICION.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado de dimensión finita. Equivalen:

i) $\mathcal{X}$ *es δ-inclinado para algún* $\delta > 0$.

ii) *Para cada* $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$, *la aplicación* $x \longmapsto \lambda(e,x)$ *de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *en* $[0,1]$ *es continua.*

iii) $\mathcal{E}(\mathcal{X})' = \emptyset$.

iv) $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *es un poliedro.*

DEMOSTRACION:

i) $\Rightarrow$ ii) Comentario que precede al corolario 4.11 (nótese que $\mathcal{X}$ tiene la

λ-propiedad uniforme).

ii) $\Rightarrow$ iii) Como se recordará, fue probado poco antes de la definición 4.10.

iii) $\Rightarrow$ iv) La compacidad de $B(\mathcal{X})$ nos da que $\mathcal{E}(\mathcal{X})$ es finito y, de acuerdo con el teorema de Minkowski-Carathéodory (teorema 1.3), $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = co(\mathcal{E}(\mathcal{X}))$.

iv) $\Rightarrow$ i) [30], proposición 2.2 (c) (véanse los comentarios previos al corolario 4.12). #

Si $\mathcal{X}$ es un espacio normado con la λ-propiedad (de dimensión arbitraria) se tiene que, i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii). Teniendo en cuenta que l_1 y l_∞ son 2-inclinados (lo que fuerza $\|e - e'\| \geq 2$, $\forall\ e,e' \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ con $e \neq e'$, $\mathcal{X} = l_1$ o $\mathcal{X} = l_\infty$) es claro que iii) no implica iv) (al menos con el concepto de poliedro que manejamos aquí). Queda como problema abierto el estudio de la relación existente entre las afirmaciones i),ii) y iii) si sólo se supone que $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad.

ESTABILIDAD POR PASO A l_1-SUMAS

La convexidad estricta de $\mathcal{X}$ es una condición suficiente para que $c(\mathcal{X})$ tenga la λ-propiedad. Esto era conocido antes de iniciar el presente capítulo (corolario 2.17 ii)). Sin embargo, se ha puesto de manifiesto a lo largo del apartado anterior que dicha hipótesis dista mucho de ser una condición necesaria para obtener la λ-propiedad en $c(\mathcal{X})$. De hecho, $c(l_1)$ tiene la λ-propiedad y l_1, no sólo no es estrictamente convexo, sino que ni siquiera tiene la λ-propiedad uniforme. En este apartado comprobaremos que lo ocurrido con l_1 no es, ni mucho menos, casual. En concreto, introduciremos toda una clase de espacios normados $\mathcal{X}$ con la λ-propiedad no uniforme tales que $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad.

4.14 LEMA.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado con la λ-propiedad y sea $\{x_n\}$ un elemento de la bola unidad de $c(\mathcal{X})$. Si $\|\lim x_n\| < 1$ entonces $\lambda(\{x_n\}) > 0$.

DEMOSTRACION:

Sea $x_0 = lim\, x_n$ y supongamos $\|x_0\| < 1$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p \Rightarrow \|x_n - x_0\| < \frac{1-\|x_0\|}{2} \quad \left(\Rightarrow \|x_n\| < \frac{1+\|x_0\|}{2}\right).$$

Sea α un número real en la situación

$$0 < \alpha < Min\left\{ \frac{1-\|x_0\|}{4}, \lambda(x_1), \dots, \lambda(x_p) \right\}$$

y sea $e \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$. Para cada $n > p$ consideremos $e_n = e$ y para $n \le p$ sea $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\lambda(e_n,x_n) > \alpha$. Entonces, si $n \le p$, $\alpha + \|x_n - \alpha e_n\| \le 1$ y, si $n > p$, $\alpha + \|x_n - \alpha e_n\| = \alpha + \|x_n - \alpha e\| \leq \dfrac{1-\|x_0\|}{4} + \|x_n - \dfrac{1-\|x_0\|}{4} e\| \leq$

$$\frac{1-\|x_0\|}{4} + \|x_n\| + \frac{1-\|x_0\|}{4} < \frac{1-\|x_0\|}{2} + \frac{1+\|x_0\|}{2} = 1.$$

Es claro que $\{e_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{X}))$ y hemos probado que

$$\alpha + \|\{x_n\} - \alpha\{e_n\}\| \leq 1.$$

Por tanto, $\lambda(\{x_n\}) \geq \alpha > 0$. #

4.15 TEOREMA.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado. Equivalen:

i) $c(\mathcal{X})$ *tiene la λ-propiedad.*

ii) $c(l_1(\mathcal{X}))$ *tiene la λ-propiedad (no uniforme).*

DEMOSTRACION:

Para evitar posibles confusiones denotaremos $\mathcal{Y} = l_1(\mathcal{X})$, $\mathcal{Z} = c(l_1(\mathcal{X}))$ y $\mathcal{W} = c(\mathcal{X})$. Además, λ_X, λ_Y, λ_Z y λ_W representarán las respectivas λ-funciones de los espacios $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{W}$.

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $\{y_n\} \in c(\mathcal{Y})$ con $\|\{y_n\}\| \leq 1$ y sea $y_0 = \lim y_n$. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y_n es un elemento de $\mathcal{Y} = l_1(\mathcal{X})$, por tanto, una sucesión $\{y_n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $\|y_n\| = \sum_{m=1}^{\infty} \|y_n(m)\|$. Es claro que para cada m que fijemos la sucesión $\{y_n(m)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge (en $\mathcal{X}$) a $y_0(m)$. Puesto que $\mathcal{Y}$ tiene la λ-propiedad (corolario 1.18 y proposición 4.3) podemos, en virtud del lema anterior, suponer $\|y_0\| = 1$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $y_0(k) \neq 0$. Puesto que $y_0(k) = \lim y_n(k)$ $(n \to \infty)$ podemos encontrar $\rho > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$n > p \Rightarrow \|y_n(k)\| > \rho.$$

Sea β un número real tal que

$$0 < \beta < Min \{\rho , \lambda_Y(y_1) , \dots , \lambda_Y(y_p)\}.$$

La sucesión $\{x_n\} = \left\{ \frac{y_{n+p}(k)}{\|y_{n+p}(k)\|} \right\}$ es un elemento de la bola unidad de $W = c(\mathcal{X})$, luego, por hipótesis, $\lambda_W(\{x_n\}) > 0$. Así pues, existe $\{e_n\} \in \mathcal{E}(W)$ tal que $\alpha := \lambda_W(\{e_n\},\{x_n\}) > 0$. De ello se sigue que $\alpha + \|\{x_n\} - \alpha\{e_n\}\| \leq 1$ y, por tanto, $\alpha + \|x_n - \alpha e_n\| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\alpha + \left\|\frac{y_{n+p}(k)}{\|y_{n+p}(k)\|} - \alpha e_n\right\| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \|y_{n+p}(k)\| + \|y_{n+p}(k) - \alpha \|y_{n+p}(k)\| e_n\| \leq \|y_{n+p}(k)\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $\alpha\beta < \alpha\rho < \alpha \|y_{n+p}(k)\|, \forall n \in \mathbb{N}$, el crecimiento de la aplicación $t \longmapsto t + \|y_{n+p}(k) - te_n\|$ (proposición 1.7) nos permite deducir que

$$\alpha\beta + \|y_{n+p}(k) - \alpha\beta e_n\| \leq \|y_{n+p}(k)\|, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado $n > p$, podemos aplicar lo anterior cambiando n por n-p, para obtener,

$$\text{(1)} \quad \alpha\beta + \|y_n(k) - \alpha\beta e_{n-p}\| \leq \|y_n(k)\|, \quad (n > p).$$

Para cada $n > p$, sea $u_n = \{u_n(m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ la sucesión de elementos de $\mathcal{X}$ definida por, $u_n(m) = 0$ si $m \neq k$, $u_n(k) = e_{n-p}$. En virtud del lema 1.16 $u_n \in \mathcal{E}(\mathcal{Y}) = \mathcal{E}(l_1(\mathcal{X}))$.

Por otra parte, $\alpha\beta \leq \beta < Min \{\rho , \lambda_Y(y_1) , \dots , \lambda_Y(y_p)\}$, luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \leq p$, existe $u_n \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$ tal que $\lambda_Y(u_n,y_n) > \alpha\beta$. Por tanto

$$\alpha\beta + \|y_n - \alpha\beta u_n\| \leq 1 \quad (n \leq p).$$

Además, si $n > p$, teniendo en cuenta (1),

$$\alpha\beta + \|y_n - \alpha\beta u_n\| = \alpha\beta + \sum_{m=1}^{\infty} \|y_n(m) - \alpha\beta u_n(m)\| =$$

$$\alpha\beta + \|y_n(k) - \alpha\beta e_{n-p}\| + \|y_n\| - \|y_n(k)\| \leq \|y_n(k)\| + \|y_n\| - \|y_n(k)\| = \|y_n\| \leq 1.$$

La sucesión $\{u_n\}$ que hemos construido es convergente. De hecho, su límite, como puede comprobarse fácilmente, es el elemento u_0 de $\mathcal{Y}$ dado por $u_0(m) = 0$ si $m \neq k$, $u_0(k) = \lim e_n$. Como además, $u_n \in \mathcal{E}(\mathcal{Y})$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{u_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{Y})) = \mathcal{E}(\mathcal{Z})$. Anteriormente hemos demostrado que

$$\alpha\beta + \|\{y_n\} - \alpha\beta\{u_n\}\| \leq 1,$$

por tanto $\lambda_Z(\{y_n\}) \geq \alpha\beta > 0$ y queda establecido que $c(\mathcal{Y}) = c(l_1(\mathcal{X}))$ tiene la λ-propiedad.

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $\{x_n\} \in \mathcal{B}(c(\mathcal{X}))$ y sea $x_0 = \mathit{lim}\ x_n$. Puesto que $\mathcal{X}$ tiene la λ-propiedad, podemos limitarnos al caso $\|x_0\| = 1$ (lema anterior). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $y_n = \{y_n(m)\}$ la sucesión definida por

$$y_n(1) = x_n \quad , \quad y_n(m) = 0, \ \forall\ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

La sucesión $\{y_n\}$ es, como fácilmente se comprueba, un elemento de la bola unidad de $c(\mathcal{Y}) = c(l_1(\mathcal{X}))$. Por hipótesis, existe $\{u_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{Y}))$ tal que $\alpha := \lambda_Z(\{u_n\},\{y_n\}) > 0$. Entonces, $\alpha + \|y_n - \alpha u_n\| \leq 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \{u_n(m)\}_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}(l_1(\mathcal{X}))$, luego, en virtud del lema 1.16, $u_n(1) = 0$ ó $u_n(1) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$. Como la sucesión $\{u_n(1)\}$ es convergente, sólo caben dos posibilidades:

1.- Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, $n > p \Rightarrow u_n(1) = 0$ ó

2.- Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, $n > p \Rightarrow u_n(1) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$.

Supuesto que es cierta la primera, dado $n > p$, tenemos

$$\|x_n\| = \|y_n(1)\| = \|y_n(1) - \alpha u_n(1)\| \leq \|y_n - \alpha u_n\| \leq 1-\alpha,$$

de donde se deduce que $\|x_0\| \leq 1-\alpha < 1$, en contra de la hipótesis inicial. Por consiguiente se verifica la segunda posibilidad.

Sea β un número real en la situación

$$0 < \beta < \mathit{Min}\ \{\alpha\ ,\ \lambda_X(x_1)\ ,\ \dots\ ,\ \lambda_X(x_p)\}$$

Dado $n \leq p$, podemos encontrar $e_n \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$ tal que $\lambda_X(e_n,x_n) > \beta$. Por otra parte, dado $n > p$, sea $e_n = u_n(1) \in \mathcal{E}(\mathcal{X})$. La sucesión $\{e_n\}$ así construida es convergente y por ello $\{e_n\} \in \mathcal{E}(c(\mathcal{X}))$. Además, para $n \leq p$,

$$\beta + \|x_n - \beta e_n\| \leq 1$$

y, para $n > p$, $\beta + \|x_n - \beta e_n\| = \beta + \|y_n(1) - \beta u_n(1)\| \leq \beta + \|y_n - \beta u_n\| \leq$ $\leq \alpha + \|y_n - \alpha u_n\| \leq 1$. Se prueba así que

$$\beta + \|\{x_n\} - \beta\{e_n\}\| \leq 1.$$

Por tanto, $\lambda_Z(\{x_n\}) \geq \beta > 0$ y $c(\mathcal{X})$ tiene la λ-propiedad. #

El siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior y de los corolarios 2.17 ii) y 4.12.

4.16 COROLARIO.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado que verifique una de las dos condiciones siguientes:*

i) $\mathcal{X}$ *es estrictamente convexo o*

ii) *La bola unidad de* $\mathcal{X}$ *es un poliedro.*

Entonces, $c(l_1(\mathcal{X}))$ *tiene la* λ*-propiedad (no uniforme). En particular, volvemos a obtener que* $c(l_1)$ *tiene la* λ*-propiedad.*

Obsérvese que las condiciones i) y ii) son, salvo para $dim\ \mathcal{X} = 1$, incompatibles. Curiosamente, lo correspondiente a $c(l_1)$ cae dentro de esta excepción. En consecuencia, la λ-propiedad en $c(l_1)$ puede deducirse tanto de i) como de ii).

4.17 NOTA.

Del ejemplo 4.4 se sigue que, en general, ni la λ-propiedad ni la P.R.C. se transfieren de un espacio normado $\mathcal{X}$ al espacio $c(\mathcal{X})$. Sin embargo, la situación es diferente en el caso de la propiedad de Bade:

En [38], corolario 4.2, se demuestra, en particular, que si $\mathcal{T}$ es un espacio compacto Hausdorff totalmente disconexo y $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach con la propiedad de Bade, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ tiene la propiedad de Bade. Como consecuencia, haciendo $\mathcal{T} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la compactificación por un punto de los naturales, dado cualquier espacio de Banach $\mathcal{X}$ con la propiedad de Bade, se verifica que $c(\mathcal{X})$ tiene también la propiedad de Bade. Aizpuru y Benítez prueban en [3], corolario 2.4, que, de hecho, un espacio normado $\mathcal{X}$ tiene la propiedad de Bade si, y sólo si, la tiene $c(\mathcal{X})$.

Finalmente señalemos que queda abierto el problema de la determinación de las condiciones sobre $\mathcal{X}$ que caracterizan la λ-propiedad en $c(\mathcal{X})$.

ALGUNAS CUESTIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS

No es nuestra intención elaborar una lista exhaustiva con todos los problemas que, de un modo u otro, guarden relación con el contenido de la memoria. Nos ha parecido conveniente, por el contrario, centrar este apartado en las cuestiones que consideramos de mayor interés y que, a su vez, están directamente relacionadas con los resultados que hemos obtenido.

Si $\mathcal{X}$ es un espacio normado estrictamente convexo $(2n+1)$-dimensional y $\mathcal{T}$ es un espacio topológico compacto Hausdorff con $dim\ \mathcal{T} \leq 2n$, sabemos (corolarios 3.12 y 3.14) que todo punto de la bola unidad de $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$ es media de ocho puntos extremos.

PROBLEMA 1.

Bajo las condiciones anteriormente expuestas, ¿ existe k ≤ 7 *tal que*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{k}\,(\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \overset{(k}{\ldots} + \mathcal{E}(\mathcal{Y}))\ ?.$$

Una clara motivación de este problema la encontramos en los corolarios 3.18 y 3.19. Nótese, además, que no cabe esperar respuesta afirmativa con $k = 2$ (véase a este respecto la observación 3.21).

Supongamos ahora que $\mathcal{X}$ es (estrictamente convexo y) $2n$-dimensional y que $dim\ \mathcal{T} \leq 2n\text{-}1$ ($\mathcal{T}$ compacto Hausdorff). El corolario 3.18 garantiza que todo punto de $\mathcal{B}(\mathcal{Y})$, con $\mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})$, es media de cuatro puntos extremos.

PROBLEMA 2.

En las condiciones anteriores, ¿ es cierto que

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{3} (\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})) \ ?.$$

Si $\mathcal{X} = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2) = \mathbb{C}$, la respuesta es afirmativa ([46], corolario 3.6). En general, no es cierto, sin embargo, que $\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{2} (\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}))$ ([45]). véase la parte final de la observación 3.21.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach estrictamente convexo e infinito-dimensional. El corolario 3.20 establece la existencia de cuatro retracciones e_1 , e_2 , e_3 , e_4 de la bola unidad de $\mathcal{X}$ sobre la esfera unidad de $\mathcal{X}$ tales que $x = \frac{1}{4} (e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) + e_4(x))$, $\forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Este resultado motiva los dos problemas siguientes:

PROBLEMA 3.

En las condiciones reseñadas, ¿ existen tres retracciones e_1 , e_2 , e_3 *de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tales que* $x = \frac{1}{3} (e_1(x) + e_2(x) + e_3(x))$, $\forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ *?.*

Equivalentemente, dado cualquier espacio topológico $\mathcal{T}$, *¿ es cierto que*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{3} (\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})), \ \textit{con}\ \ \mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X}) \ ?.$$

PROBLEMA 4.

¿ Existen dos retracciones e_1 , e_2 *de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tales que*

$$x = \frac{1}{2}(e_1(x) + e_2(x)),\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\ ?.$$

Equivalentemente, dado cualquier espacio topológico $\mathcal{T}$, *¿ es cierto que*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})),\ \textit{con}\ \ \mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})\ ?.$$

Con objeto de motivar el siguiente problema, sea $\mathcal{X}$ un espacio normado complejo infinito-dimensional. De acuerdo con el corolario 2.14, el par $(\mathcal{B}(\mathcal{X}),\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión. Así, en virtud del corolario 3.6, existen dos aplicaciones continuas g y h de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que

$$x = \frac{1}{2}(g(x) + h(x))\ \ ,\ \ \|g(x)\| \geq \frac{1}{9}\ \ ,\ \ \|h(x)\| \geq \frac{1}{9}\ \ ,\ \ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

De hecho, si se analiza la demostración de este último corolario, se aprecia enseguida que

$$x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\ ,\ \|x\| \geq \frac{1}{3} \ \ \Rightarrow\ \ g(x) = x = h(x).$$

Por otra parte, las funciones $\varphi,\psi : \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ definidas por

$$\varphi(x) = (1 + i\sqrt{\|x\|^{-2} - 1}\,)\,x\ \ ,\ \ \psi(x) = (1 - i\sqrt{\|x\|^{-2} - 1}\,)\,x\ ,$$

son continuas y $\varphi(x) = x = \psi(x),\ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$. Además,

$$x = \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{2}\ ,\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}.$$

De lo anterior se deduce fácilmente que las aplicaciones $e_1 = \varphi\circ g$, $e_2 = \psi\circ g$, $e_3 = \varphi\circ h$, $e_4 = \psi\circ h$ son retracciones de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ y

$$\text{(1)}\quad x = \frac{1}{4}(e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) + e_4(x)),\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Por tanto, si $\mathcal{X}$ es cualquier espacio normado complejo de dimensión infinita (¡no necesariamente estrictamente convexo!) existen cuatro

PROBLEMA 4.

¿ Existen dos retracciones e_1 , e_2 *de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *tales que*

$$x = \frac{1}{2}(e_1(x) + e_2(x)),\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\ ?.$$

Equivalentemente, dado cualquier espacio topológico $\mathcal{T}$, *¿ es cierto que*

$$\mathcal{B}(\mathcal{Y}) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}(\mathcal{Y}) + \mathcal{E}(\mathcal{Y})),\ \text{con}\ \mathcal{Y} = \mathcal{C}(\mathcal{T},\mathcal{X})\ ?.$$

Con objeto de motivar el siguiente problema, sea $\mathcal{X}$ un espacio normado complejo infinito-dimensional. De acuerdo con el corolario 2.14, el par $(\mathcal{B}(\mathcal{X}),\mathcal{X})$ tiene la propiedad de extensión. Así, en virtud del corolario 3.6, existen dos aplicaciones continuas g y h de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ tales que

$$x = \frac{1}{2}(g(x) + h(x)) \quad , \quad \|g(x)\| \geq \frac{1}{9} \quad , \quad \|h(x)\| \geq \frac{1}{9} \quad , \quad \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

De hecho, si se analiza la demostración de este último corolario, se aprecia enseguida que

$$x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\ ,\ \|x\| \geq \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad g(x) = x = h(x).$$

Por otra parte, las funciones $\varphi,\psi : \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\} \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{X})$ definidas por

$$\varphi(x) = (1 + i\sqrt{\|x\|^{-2} - 1}\,)\,x \quad , \quad \psi(x) = (1 - i\sqrt{\|x\|^{-2} - 1}\,)\,x\ ,$$

son continuas y $\varphi(x) = x = \psi(x),\ \forall\ x \in \mathcal{S}(\mathcal{X})$. Además,

$$x = \frac{\varphi(x) + \psi(x)}{2}\ ,\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X})\backslash\{0\}.$$

De lo anterior se deduce fácilmente que las aplicaciones $e_1 = \varphi\circ g$, $e_2 = \psi\circ g$, $e_3 = \varphi\circ h$, $e_4 = \psi\circ h$ son retracciones de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ y

$$\text{(1)} \quad x = \frac{1}{4}(e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) + e_4(x)),\ \forall\ x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

Por tanto, si $\mathcal{X}$ es cualquier espacio normado complejo de dimensión infinita (¡no necesariamente estrictamente convexo!) existen cuatro retracciones e_1 , e_2 , e_3 , e_4 de $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ en $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ tales que se verifica la igualdad (1). El corolario 3.20 afirma que, en el caso real, este resultado es cierto para $\mathcal{X}$ estrictamente convexo.

PROBLEMA 5.

¿ Es cierto el corolario 3.20 *sin suponer* $\mathcal{X}$ *estrictamente convexo ?.*

Como ya hemos indicado, si $\mathcal{X}$ admite una estructura compleja, la respuesta es afirmativa.

Un primer paso para resolver el problema anterior es el siguiente

PROBLEMA 6.

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio de Banach infinito-dimensional, ¿ es cierto que existen cuatro aplicaciones continuas* f_1 , f_2 , f_3 , f_4 *de* $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ *en* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ *(no necesariamente retracciones) tales que*

$$x = \frac{1}{4}(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)), \ \forall\, x \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \ ?.$$

A partir de los problemas 5 y 6 pueden enunciarse otras cuatro cuestiones rebajando (a tres o a dos) el número de retracciones (problema 5) o de aplicaciones continuas (problema 6).

BIBLIOGRAFIA

[1] Aizpuru, A., *λ-propiedad, reflexividad y espacios* $(\prod_n X_n)_p$ $1 < p < \infty$, XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, 1.989.

[2] Aizpuru, A., *Una extensión del teorema de Tietze y la λ-propiedad en* C(K,X), XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, 1.989.

[3] Aizpuru, A. y Benítez, F., *The Bade property and the λ-property in spaces of convergent sequences*, Collect. Math. 42, 3 (1991), 245-251

[4] Arens, R.F. y Kelley, J.L., *Characterizations of the Space of Continuous Functions Over a Compact Hausdorff Space*, Trans. A.M.S., 62 (1947), 499-508.

[5] Aron, R.M y Lohman, R.H., *A geometric function determined by extreme points of the unit ball of a normed space*, Pacific J. Math., 127 (1987), 209-231.

[6] Aron, R.M.,Lohman, R.H. y Suárez, A., *Problems related to the convex series representation property and rotundity in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), nº 1, 151-155.

[7] Bade, W.G., *Functional Analysis Seminar Notes*, University of California, Berkeley, 1957 (no publicado).

[8] Beauzamy, B., *Introduction to Banach spaces and their Geometry*, North-Holland Publishing company, 1982.

[9] Benítez, F., *The λ-property in the* $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ *spaces*. Preprint.

[10] Benyamini, Y. y Sternfeld, Y., *Spheres in infinite-dimensional normed spaces are Lipschitz contractible*, Proc. Amer. Math. Soc., 88 (1983), 439-445.

[11] Blumenthal, R.M., Lindenstrauss, J y Phelps, R.R., *Extreme operators into* C(K), Pacific J. Math., 15 (1965), 747-756.

[12] Bogachev, V.I., Mena Jurado, J.F. y Navarro Pascual, J.C., *Extreme points in spaces of continuous functions*, aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.

[13] Bourgin, R. D., *Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym property*, Lecture Notes in Math. 993, Springer-Verlag (1983).

[14] Brown, L.G. y Pedersen, G.K., *On the Geometry of the Unit Ball of a C^*-Algebra*, Preprint.

[15] Cantwell, J., *A topological approach to extreme points in function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 19 (1968), 821-825.

[16] Diestel, J. y Uhl, Jr., *Vector Measures*, Math. Surveys 15, A.M.S. (1977).

[17] Dowker, C.H., *On a theorem of Hunner*, Arkiv för Matematik, 2 (1952), 307-313.

[18] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.

[19] Dugundji, J., *An extension of Tietze's Theorem*, Pacific J. Math., 1 (1951), 353-367.

[20] Dunford, N. y Schwartz, J.T., *Linear Operators. Part I: General Theory*, New York: Interscience, 1958.

[21] Engelking, R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[22] Goodner, D.B., *The closed convex hull of certain extreme points*, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 256-258.

[23] Halmos, P.R., *A Hilbert Space Problem Book* (Second ed.), Springer Verlag, New York, 1982.

[24] Hurewicz, W. y Wallman, H., *Dimension Theory*, Princeton University Press, 1969.

[25] Istrăţescu, V.I., *Strict Convexity and Complex Strict Convexity*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 89, Marcel Dekker, New York, 1984.

[26] Klee, V., *What is a convex set?*, Amer. Math. Monthly, 78 (1971) 616-631.

[27] Krein, M. y Milman, D., *On extreme points of Regular Convex Sets*, Studia Math., 9 (1940) 133-138.

[28] Lindenstrauss, J. y Phelps, R.R., *Extreme point properties of convex bodies in reflexive Banach spaces*, Israel Journal of Math., 6 (1968), 39-48.

[29] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., *Classical Banach spaces* I, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[30] Lohman, R.H., *The λ-function in Banach spaces*. Contemporary Mathematics: Banach space Theory, 85 (1989), 345-354.

[31] Lohman, R.H., *Examples related to strict convexity and the uniform λ-property*. Preprint.

[32] Lohman, R.H. y Shura, T.J., *Calculation of the λ-function for several classes of normed linear spaces*, Nonlinear and Convex Analysis: Proceedings in honor of Ky Fan, Marcel Dekker Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 1987, 167-174.

[33] Lohman, R.H. y Shura, T.J., *The λ-property for generalized directs sums of normed spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., 41 (1990), nº 3, 441-450.

[34] Mena Jurado, J.F. y Navarro Pascual, J.C., *On the λ-property and spaces of convergent sequences*, Extracta Mathematicae, Vol.5, Núm.3 (1990), 159-161.

[35] Mena Jurado, J.F. y Navarro Pascual, J.C., *The convex hull of extreme points for vector-valued continuous functions*. Preprint.

[36] Minkowski, H., *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. II, Leipzig, 1911. Reprinted Chelsea Publishing Co., New York, 1967.

[37] Margalef Roig, J., Outerelo Domínguez, E. y Pinilla Ferrando, J. L., *Topología* ••, Editorial Alhambra, Madrid, 1979.

[38] Morris, P.D. y Phelps, R.R., *Theorems of Krein-Milman type for certain convex sets of operators*, Trans. Amer. Math. Soc., 150 (1970) 183-200.

[39] Oates, D., *A sequentially convex hull*, Bull. London Math. Soc., 22 (1990) 467-468.

[40] Phelps, R.R., *Extreme points in function algebras*, Duke Math. J., 32 (1965), 267-277.

[41] Phelps, R.R., *Integral Representation for Elements of Convex Sets*, Studies in Functional Analysis, MAA Studies in Math., Vol. 21, Math. Assoc. Amer. (180), 115-157.

[42] Peck, N.T., *Extreme points and dimension theory*, Pacific J. Math., 25 (1968), 341-351.

[43] Peck, N.T., *Representation of functions in* C(X) *by means of extreme points*, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), 133-135.

[44] Pedersen, G.K., *The λ-function in Operator Algebras*, J. Operator Theory, 26 (1991), nº 2, 345-381.

[45] Robertson, A.G., *Averages of Extreme Points in Complex Function Spaces*, J. London Math. Soc. (2), 19 (1979), 345-347.

[46] Rordam, M., *Advances in the theory of unitary rank and regular approximation*, Annals of Mathematics, 128 (1988), 153-172.

[47] Roy, N.M., *Extreme points of convex sets in infinite dimensional spaces*, Amer. Math. Monthly (1987), 409-422.

[48] Shura, T.J., *The λ-property in normed linear spaces*, Ph. D. Dissertation, Kent State University, 1990.

[49] Shura, T.J. y Trautman, D., *The λ-property in Schreier's space* S *and the Lorentz space* d(a,1), Glasgow Math. Journal, 32 (1990), nº 3, 277-284.

[50] Sine, R.C., *On a paper of Phelps*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 484-486.

[51] Smirnov, Yu.M., *On the dimension of proximity spaces*, Mat. Sb.(N.S.) 38 (80) (1956), 283-302. English translation: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 21 (1962), 1-20.

[52] Smith, M. A., *Rotundity and extremicity in* $l^p(X_i)$ *and* $L^p(\mu,X)$, Contemporary Mathematics: Geometry of Normed Linear spaces, 52 (1986), 143-160.

[53] Suárez, A., *On the Aron-Lohman's λ-property*. Preprint.

[54] Suárez, A., *The λ-function in the spaces* $(\oplus\sum_{i\in I} X_i)_p$ *y* $L_p(\mu,X)$, $1\le p\le\infty$, preprint.

[55] Suárez, A., *λ-property in Orlicz spaces*. Bull. of Acad. of Sciences, 37 (1989), nº 7-12, 421-431 (1990).

[56] Szarek, S.J., *A superreflexive Banach space which does not admit complex structure*, Proc. Amer. Math. Soc., 97 (1986), 437-444.

[57] Walker, R.C., *The Stone-Cech Compactification* (Springer, Berlin, 1974).