Facultad de Ciencias

Departamento de Análisis Matemático

CONTINUIDAD

DE LA FUNCIÓN DE DUALIDAD

DE UN ESPACIO DE BANACH

Manuel D. Contreras Márquez

Universidad de Granada

1993

Tesis Doctoral dirigida por el Doctor D. Rafael Payá Albert, Profesor del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. Manuel D. Contreras Márquez el día 26 de Noviembre de 1993, ante el Tribunal formado por los siguientes profesores: D. Ángel Rodríguez Palacios (Presidente), D. Vicente Montesinos Santamaría, D. José Orihuela Calatayud, D. Pedro J. Paúl Escolano (Vocales) y D. Juan F. Mena Jurado (Secretario). Obtuvo la califición de Apto "cum laude".

A María José.

Contenido.

Introducción y resumen de la memoria.

El origen remoto de todos los conceptos y resultados que se van a tratar en la presente memoria puede situarse en 1936, año en que J. Clarkson [11] introdujo la noción de espacio de Banach uniformemente convexo, como una generalización de los espacios de Hilbert, con el objetivo de dar un análogo al Teorema Fundamental del Cálculo para funciones con valores vectoriales. Comienza así el estudio de las propiedades de los espacios de Banach que no necesariamente se conservan al sustituir la norma por otra equivalente, propiedades que se suelen llamar "geométricas", ya que se refieren en cierto modo a la "forma" de la bola unidad. En esta línea de investigación se han conseguido resultados de gran importancia, elegancia y dificultad, dando lugar a una extensa teoría que después de más de medio siglo de desarrollo muestra aún una gran vitalidad.

El principal atractivo de este tipo de resultados radica en la posibilidad de deducir propiedades topológicas de un espacio de Banach, de obtener información sobre su estructura, partiendo solamente de la "forma" de su bola unidad, un hecho que nunca deja de ser sorprendente. Baste recordar el clásico Teorema de Milman-Pettis, afirmando que *todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*, para tener una muestra de este fenómeno, pero citaremos dos ejemplos más que guardan relación directa con nuestro trabajo.

El primero es un resultado que a veces se ha atribuido a V. Šmulian, pero probablemente se debe a K. Fan e I. Glicksberg [20] y afirma que *todo espacio de Banach dual con norma Fréchet-diferenciable es reflexivo.*

El segundo ejemplo que queremos citar se inscribe en la teoría iniciada por E. Asplund [3], tratando de extender al caso infinito dimensional las propiedades de diferenciabilidad de las funciones convexas. Concretamente, recordemos que un espacio de Asplund es un espacio de Banach X tal que toda función convexa y continua definida en un subconjunto convexo y abierto de X es Fréchet-diferenciable en un subconjunto denso de su dominio. El trabajo de Asplund abrió el camino a una intensa actividad investigadora que culminó con un resultado, cuya forma definitiva se debe a C. Stegall [55], afirmando que *un espacio de Banach X es de Asplund si, y sólo si, su dual tiene la propiedad de Radon-Nikodým, lo que a su vez equivale a que todo subespacio separable de X tenga dual separable.* Paralelamente, ha habido un interés creciente en encontrar condiciones "geométricas" suficientes para que un espacio sea de Asplund. En un relevante trabajo [19], I. Ekeland y G. Lebourg probaron que *todo espacio de Banach con norma Fréchet-diferenciable es un espacio de Asplund.*

Queda pues de manifiesto que ciertas propiedades geométricas de un espacio de Banach (como la diferenciabilidad de la norma en el sentido de Fréchet) tienen importantes implicaciones sobre la estructura de dicho espacio. En la dirección contraria, durante muchos años se conjeturó que todo espacio de Asplund admite una norma equivalente Fréchet-diferenciable, conjetura errónea como ha demostrado recientemente R. Haydon [32], encontrando un espacio de Asplund que ni siquiera tiene una norma equivalente Gâteaux-diferenciable. A la vista del contraejemplo de Haydon gana interés el estudio de propiedades geométricas más débiles que la Fréchet-diferenciabilidad de la norma y que sean suficientes para que el espacio sea de Asplund, especialmente las que no supongan Gâteaux-diferenciabilidad de la norma. Para encontrar propiedades de este tipo basta pensar que, en general, las nociones de diferenciabilidad de la norma están en estrecha relación con distintas formas de "continuidad" de la correspondiente "función de dualidad", una función conjunto-valuada de la esfera unidad de un espacio de Banach en la esfera unidad de su dual, cuya definición veremos enseguida. De hecho, el estudio de tales propiedades de continuidad es el objetivo general de nuestro trabajo. Sea pues X un espacio de Banach (real o complejo), S_X su esfera unidad y X^* el dual topológico de X. Llamamos *función de dualidad* de X a la aplicación D definida por

$$D(x) = \{x^* \in S_{X^*} : \ x^*(x) = 1\} \qquad (x \in S_X).$$

Geométricamente, $D(x)$ representa al conjunto de los hiperplanos soporte de la bola unidad en el punto x. Cuando $D(x)$ tiene un único elemento se dice que x es un punto *suave* de X y es un hecho bien conocido (S. Mazur [43]) que esto ocurre si, y sólo si, la norma de X es Gâteaux-diferenciable en el punto x.

Desde el punto de vista del Análisis convexo, la función de dualidad de un espacio de Banach puede considerarse como caso particular de la noción de subdiferencial de una función convexa, que a su vez es el ejemplo más representativo de operador monótono [24], [49]. Ciertos resultados sobre la función de dualidad han encontrado utilidad en otras áreas del Análisis Matemático (Análisis no lineal, ecuaciones en derivadas parciales) y cabe citar al respecto una reciente monografía de I. Cioranescu [10].

Para estudiar la "continuidad" de la función de dualidad de un espacio de Banach uno dispone de las nociones de *semicontinuidad inferior* y *superior* de una función conjunto-valuada entre espacios topológicos arbitrarios, habituales en topología general y con las que suponemos familiarizado al lector, si bien las definiciones se recordarán en el Capítulo 1. Conviene precisar que cuando se aplican estas nociones a la función de dualidad de un espacio de Banach X siempre se dota a S_X de la topología de la norma, mientras que en el dual se considera la topología débil-$*$, la débil o la de la norma. El estudio sistemático de este tipo de propiedades fue iniciado en 1964 por D. Cudia [14] aunque, sin usar esta terminología, existen antecedentes en los trabajos de S. Mazur [43] y V. Šmulian [54], [53].

Cudia prueba que la función de dualidad D de un espacio de Banach X es semicontinua inferiormente en un punto $x \in S_X$ para la topología débil-$*$ de X^* si, y sólo si, x es un punto suave, un hecho bastante elemental. Resulta por tanto que D es semicontinua inferiormente para la topología débil de X^* si, y sólo si, D es univaluada (todo punto de S_X es suave) y continua para dicha topología. Los espacios con esta propiedad se conocen como espacios *muy suaves* y fueron estudiados por J. Diestel y B. Faires [17] (ver también [16]). Finalmente el propio Cudia probó también que D es semicontinua inferiormente en $x \in S_X$ para la topología de la norma de X^* si, y sólo si, la norma de X es Fréchet-diferenciable en el punto x. Por tanto, los espacios con norma Fréchet-diferenciable son aquellos cuya función de dualidad es semicontinua inferiormente para la topología de la norma del dual o, lo que es lo mismo, univaluada y continua para dicha topología. En resumen, la semicontinuidad inferior (global) de la función de dualidad siempre implica suavidad y, dependiendo de la topología que se considere en el dual, se corresponde con distintas formas de diferenciabilidad de la norma, Gâteaux-diferenciabilidad, espacios muy suaves o Fréchet-diferenciabilidad.

Si queremos, por así decirlo, "escapar" del ambiente de suavidad y tener cierta continuidad de la función de dualidad sin obligarla a ser univaluada, podemos considerar la semicontinuidad superior. El propio Cudia [14] prueba, también de forma muy elemental, que la función de dualidad de un espacio de Banach es siempre semicontinua superiormente para la topología débil-$*$ del dual. La semicontinuidad superior para la topología débil o la de la norma ha sido muy poco estudiada y sólo cabe reseñar un reciente trabajo de Zhibao Hu y Bor-Luh Lin donde se utilizan estas propiedades [33].

La razón de este desinterés hay que encontrarla en el hecho de que existe una versión menos restrictiva de la semicontinuidad superior que resulta ser la más apropiada para trabajar con la función de dualidad y que fue introducida por J. Giles, D. Gregory y B. Sims en un importante trabajo publicado en 1978 [25]. Concretamente, fijado un punto x de la esfera unidad de un espacio de Banach X y si τ denota cualquiera de las topologías que venimos considerando en X^*, dichos autores estudian la siguiente forma de continuidad de la función de dualidad D:

(∗) Para cada τ-entorno de cero U en X^* existe un $\delta > 0$ tal que $D(y) \subseteq D(x) + U$ para $y \in S_X$ con $\|y - x\| < \delta$.

Es claro que la propiedad anterior es formalmente más débil que la semicontinuidad superior para la topología τ, puesto que, en lugar de un conjunto τ-abierto arbitrario en X^* que contenga a $D(x)$, se consideran solamente conjuntos de la forma $D(x)+ U$ donde U es un τ-entorno de cero (abierto si se quiere). Claramente también, ambas nociones son equivalentes si $D(x)$ es compacto en la topología τ. En particular, la condición $(*)$, cuando τ es la topología débil-$*$ de X^*, coincide con la semicontinuidad superior de D en x para dicha topología. En general, si τ es la topología débil o la de la norma, Giles-Gregory-Sims no prueban que $(*)$ sea estrictamente más débil que la semicontinuidad superior, dejando abierto un problema que posteriormente ha sido planteado explícitamente en un trabajo de C. Franchetti y R. Payá [22]. Debido al protagonismo que la propiedad $(*)$ tendrá en la presente memoria, nos ha parecido oportuno usar una nomenclatura específica para referirnos a ella.

Si se verifica $(*)$ cuando τ es la topología débil de X^*, decimos que x es un punto *bastante suave*. Si todo punto de la esfera unidad es bastante suave decimos simplemente que X es bastante suave (o que la norma de X es bastante suave).

En cuanto al caso en que τ es la topología de la norma de X^*, D. Gregory [30] probó que se verifica $(*)$ si, y sólo si, el límite lateral

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\|-1}{t}$$

(que claramente existe para cualquier $y \in X$) es uniforme para y en la bola unidad de X. Se dice entonces que la norma de X es *fuertemente subdiferenciable* en el punto x, y si esto ocurre para todo punto $x \in S_X$, se dice simplemente que la norma de X es fuertemente subdiferenciable. Esta nomenclatura fue introducida por C. Franchetti y R. Payá en [22], un trabajo donde se hace un tratamiento sistemático de la subdiferenciabilidad fuerte de la norma, como debilitación muy natural de la Fréchet-diferenciabilidad, recopilando resultados anteriores de los trabajos de Giles-Gregory-Sims [25] y

D. Gregory [30] ya citados, junto con los obtenidos por C. Aparicio, F. Ocaña, R. Payá y A. Rodríguez [2].

Podemos ya pasar a comentar los resultados de esta memoria. Nuestro objetivo principal es el estudio de los espacios de Banach bastante suaves o con norma fuertemente subdiferenciable, tratando de obtener información sobre la estructura de un espacio de Banach que "disfrute" de una de estas propiedades. Por otra parte prestamos una atención muy especial a la subdiferenciabilidad fuerte de la norma de una C^*-álgebra, investigando la relación entre dicha propiedad geométrica y la estructura algebraica. Pasamos, sin más, a exponer brevemente el contenido de cada capítulo.

Las distintas formas de continuidad de la función de dualidad que se han mencionado anteriormente se presentan con todo detalle en el primer capítulo, consiguiendo familiarizarnos con cada una de ellas mediante una serie de caracterizaciones más o menos sugestivas. En general, el contenido de este tipo de resultados es bien conocido y, de hecho, algunos de ellos se han comentado anteriormente. Nos gustaría destacar aquí una nueva interpretación geométrica de la subdiferenciabilidad fuerte de la norma que nos parece interesante. Dado un punto x de la esfera unidad de un espacio de Banach X, podemos considerar el cono convexo y cerrado C con vértice en x generado por la bola unidad; más concretamente C es el cierre de la unión de las bolas cerradas de centro $(1-m)x$ y radio m con m natural. Pues bien, se tiene que la norma de X es fuertemente subdiferenciable en x si, y sólo si, cada conjunto convexo cerrado y acotado a distancia positiva del complemento de C, está contenido en una de esas bolas. La caracterización análoga de la Fréchet-diferenciabilidad de la norma en x, consistente en suponer además que C es un semiespacio, fue obtenida por J. Giles [23].

El resto del primer capítulo contiene una discusión minuciosa de las posibles implicaciones entre las distintas formas de continuidad de la función de dualidad, consiguiendo una visión bastante diáfana de la situación. Sólo hay una implicación cuya posible veracidad no hemos sabido decidir y que de hecho aparece como problema abierto en el trabajo de Giles-Gregory-Sims [25]: no se sabe si la semicontinuidad inferior en un punto, para la topología débil del dual, implica la superior. Dicha implicación sí se verifica tanto para la topología de la norma como (trivialmente) para la débil-∗. El resto de las implicaciones ciertas entre las distintas formas de continuidad son evidentes, pues se deben, bien al hecho de que la topología de la norma en el espacio dual contiene a la débil y ésta a su vez a la débil-∗, bien a que las nociones introducidas por Giles-Gregory-Sims (punto bastante suave y subdiferenciabilidad fuerte de la norma) son claramente más débiles que la semicontinuidad superior para la correspondiente topología. Probamos que cualquier otra implicación es falsa. Los contraejemplos necesarios para ello son conocidos, excepto el siguiente:

> *Existe un espacio de Banach con norma fuertemente subdiferenciable y tal que su función de dualidad no es superiormente semicontinua para la topología débil del dual.*

Nótese, en particular, que la función de dualidad de un espacio de Banach bastante suave puede no ser semicontinua superiormente para la topología débil del dual y que la norma puede ser fuertemente subdiferenciable sin que la función de dualidad sea semicontinua superiormente para la topología de la norma. Resolvemos pues, completamente, el problema abierto planteado en [22] y ya comentado. Además, la técnica usada para construir el contraejemplo muestra que la clase de los espacios bastante suaves (resp. con norma fuertemente subdiferenciable) es estable por sumas directas mediante normas absolutas, mientras que la semicontinuidad superior de la función de dualidad no siempre se conserva en tales sumas. Ello justifica nuestra opinión, ya apuntada, de que las formas débiles de semicontinuidad superior introducidas por Giles-Gregory-Sims son más adecuadas para trabajar con la función de dualidad que la semicontinuidad superior en sentido topológico clásico.

Concluimos el primer capítulo con una caracterización de los espacios de dimensión finita que nos parece oportuno destacar. Recuérdese que la función de dualidad es siempre semicontinua superiormente para la topología débil-$*$ y, por tanto, cualquier norma en un espacio de dimensión finita es fuertemente subdiferenciable. Recíprocamente, obtenemos:

En todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una norma equivalente que no es fuertemente subdiferenciable.

La demostración se reduce claramente al caso separable. Nos basta entonces usar una construcción ideada por C. Franchetti [21] que, ligeramente retocada, nos permite conseguir, en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita, una norma equivalente Gâteaux-diferenciable en todo punto de la esfera unidad, pero no Fréchet-diferenciable.

En suma, el Capítulo 1 nos ha permitido situar las dos nociones fundamentales de esta memoria (norma bastante suave y fuertemente subdiferenciable) en el contexto general de las propiedades de continuidad de la función de dualidad, lo que nos será de gran utilidad para poder comparar nuestros resultados con otros previos y, en general, permitirá comprender mejor el alcance de nuestro estudio. No obstante, conviene resaltar que este capítulo primero tiene, en gran parte, un carácter preliminar o introductorio y que los resultados más interesantes de la memoria empiezan a aparecer en el Capítulo 2, cuando realmente conseguimos obtener importantes propiedades de los espacios de Banach con norma bastante suave.

En la línea del resultado de Ekeland y Lebourg ya comentado (todo espacio de Banach con norma Fréchet-diferenciable es un espacio de Asplund), Giles-Gregory-Sims [25] plantean explícitamente el siguiente problema: ¿Es cierto que todo espacio de Banach bastante suave es un espacio de Asplund? Nuestro principal resultado en el Capítulo 2 es, literalmente, la respuesta afirmativa:

Todo espacio de Banach bastante suave es un espacio de Asplund.

Existen numerosos precedentes del resultado anterior que pasan a ser casos particulares del mismo. El Teorema de Ekeland y Lebourg fue mejorado primeramente por Diestel y Faires [17] probando que todo espacio muy suave es de Asplund. A su vez este resultado fue mejorado en dos direcciones independientes por Giles-Gregory-Sims [25], probando que un espacio de Banach bastante suave y tal que los valores de su función de dualidad, bien son todos débilmente compactos, o bien tienen todos diámetro menor o igual que una constante $k < 1$, es un espacio de Asplund. Más recientemente, Hu-Lin [33] han mejorado aún un poco más el primero de estos resultados, obteniendo que la semicontinuidad superior de la función de dualidad para la topología débil del dual ya es suficiente para que el espacio sea de Asplund. Finalmente, G. Godefroy [26] ha obtenido una mejora del resultado de Ekeland-Lebourg totalmente independiente de las anteriores, probando que todo espacio con norma fuertemente subdiferenciable es de Asplund. Como se ve, nuestro resultado, aparte de su generalidad, tiene un carácter unificador. La herramienta principal que usamos en la demostración es una importante desigualdad obtenida por S. Simons [51], mediante un fino análisis de la demostración del Teorema de James en caso separable. Damos una versión ligeramente diferente de la Desigualdad de Simons que involucra funciones con valores vectoriales, lo que la hace formalmente más general, pero su demostración es prácticamente la misma de la versión original. Presentamos también un par de aplicaciones directas de la Desigualdad de Simons que ilustran bastante bien su utilidad. Hemos de decir que la idea de usar dicha desigualdad para obtener condiciones suficientes para que un espacio sea de Asplund aparece por primera vez en un trabajo de G. Godefroy y V. Zizler [28], y que nuestros resultados se obtienen mediante una ligera mejora de las técnicas desarrolladas por Godefroy [26].

En la dirección contraria, teniendo presente el contraejemplo de Haydon ya comentado, cabe preguntarse cuales son las propiedades de la función de dualidad que pueden conseguirse renormando equivalentemente un espacio de Asplund. Para empezar, puede preguntarse si todo espacio de Asplund admite una norma equivalente bastante suave. Este problema también fue planteado por Giles-Gregory-Sims [25] y hasta la fecha no parece que se tenga mucha información al respecto.

El estudio de las propiedades geométricas (y en particular las de diferenciabilidad de la norma) que implican reflexividad tiene una larga tradición (recuérdese el resultado de Fan y Glicksberg [20] ya comentado). J. Diestel [16] prueba que todo espacio de Banach dual muy suave es reflexivo, resultado mejorado por W. Zhang [60], quien observa que la hipótesis de que el espacio sea muy suave se puede debilitar, suponiéndolo bastante suave, siempre que todos los valores de la función de dualidad sean débilmente compactos. Por otra parte, Aparicio-Ocaña-Payá-Rodríguez [2] probaron que todo espacio dual con norma fuertemente subdiferenciable es reflexivo, resultado mejorado a su vez por G. Godefroy [26], demostrando que en lugar de ser dual, basta que el espacio verifique la llamada propiedad de intersección finita-infinita, esto es, que de toda familia de bolas cerradas con intersección vacía pueda extraerse una subfamilia finita con intersección vacía. Nuestro principal resultado del Capítulo 3 engloba y generaliza los recién citados. Para obtenerlo, a las herramientas desarrolladas en el capítulo anterior, unimos resultados de G. Godefroy sobre subespacios propios normantes y su relación con la llamada "topología de la bola", ampliamente estudiada por el propio Godefroy junto con N. Kalton [27]. Probamos así:

Un espacio de Banach es reflexivo si (y sólo si) es bastante suave y satisface la propiedad de intersección finita-infinita.

Nuestra segunda caracterización de la reflexividad no supone la propiedad de intersección finita-infinita pero, a cambio, hay que exigir que toda norma equivalente en el espacio sea bastante suave. Así pues, mejorando un resultado de Hu-Lin [33] probamos:

Todo espacio de Banach no reflexivo tiene una norma equivalente que no es bastante suave.

Finalizamos la memoria con un capítulo dedicado al estudio de los puntos donde la norma de una C^*-álgebra es fuertemente subdiferenciable. Nuestro objetivo es obtener caracterizaciones algebraicas de tales puntos, así como de las C^*-álgebras que los poseen en abundancia. El precedente inmediato de este estudio se encuentra en dos trabajos de K. Taylor y W. Werner [56], [57] sobre diferenciabilidad (Gâteaux y Fréchet) de la norma de una C^*-álgebra. Hemos incluido una primera sección introductoria, en la que fijamos la notación y terminología sobre C^*-álgebras que hemos usado. Para mayor comodidad del lector y para facilitar las referencias, damos el enunciado de los resultados de la teoría general de C^*-álgebras que nos han sido imprescindibles, aunque se trata casi siempre de hechos básicos y bien conocidos. Hacemos especial hincapié en conceptos que pueden no ser tan familiares como, por ejemplo, el de proyección abierta en el bidual de una C^*-álgebra y su muy natural interpretación en el caso conmutativo.

Cada uno de los principales resultados de este último capítulo está claramente inspirado en lo que sucede cuando la C^*-álgebra es conmutativa. Un análisis de este caso particular (como se verá, con demostraciones bastante fáciles) sirve siempre de orientación para el caso general, e incluso en alguna demostración se hace una reducción del problema al caso conmutativo.

Probamos que la existencia de puntos donde la norma de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable equivale a la existencia de proyecciones no nulas en $\mathcal{A}$: la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en cualquier proyección y recíprocamente, en un sentido que enseguida se comprenderá, todos los puntos con esta propiedad se la deben a una proyección. Nuestra caracterización de tales puntos, resultado fundamental sobre el que se basan todos los del Capítulo 4, es la siguiente:

Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra, $a \in S_{\mathcal{A}}$ y notemos $|a|$ al valor absoluto de a. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *La norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en a.*

(ii) *a es un punto bastante suave en $\mathcal{A}$.*

(iii) *1 es un punto aislado del espectro de $|a|$.*

(iv) *Existe una proyección $p \in \mathcal{A}$ tal que*

$$p|a| = p \qquad y \qquad \| \, |a| - p \| < 1.$$

(v) *Existe una isometría parcial $v \in \mathcal{A}$ tal que*

$$av^* = vv^* \qquad y \qquad \|a - v\| < 1.$$

Nótese cómo las dos propiedades protagonistas de esta memoria, muy diferentes en general, resultan equivalentes en el contexto de las C^*-álgebras. La caracterización de dichas propiedades mediante la afirmación (iii), de naturaleza puramente algebraica, nos parece muy sugestiva y, en realidad, es el resultado clave del Capítulo 4. La afirmación (iv) explica el hecho ya comentado de que las proyecciones no nulas de una C^*-álgebra sean "responsables" de la existencia de puntos de subdiferenciabilidad fuerte. Finalmente, la menos intuitiva afirmación (v) guarda una estrecha relación con la descripción de las caras de la bola unidad de una C^*-álgebra recientemente conseguida por C. Akemann y G. Pedersen [1].

De entre las consecuencias inmediatas del teorema anterior destacamos la siguiente propiedad de estabilidad:

Si $\mathcal{A}$ es una C^*-subálgebra de $\mathcal{B}$ y la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en $a \in S_{\mathcal{A}}$, entonces también lo es la de $\mathcal{B}$.

Usando resultados de B. Aupetit [4], B. Yood [59] e I. Kaplansky [36], junto con técnicas de la teoría de M-ideales [31], conseguimos caracterizar de varias formas y describir completamente las C^*-álgebras con norma fuertemente subdiferenciable; destacamos dicha descripción:

Para una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *La norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable.*

(ii) *$\mathcal{A}$ es una c_0-suma de álgebras de operadores compactos en espacios de Hilbert.*

Nuestro último resultado es una caracterización, en términos de subdiferenciabilidad fuerte, de las C^*-álgebras que pertenecen a una clase de anillos que ha despertado cierto interés. Se dice que un anillo $\mathcal{R}$ es un I-anillo si para cada elemento no nilpotente $a \in \mathcal{R}$, existe $b \in \mathcal{R}$, $b \neq 0$, tal que $bab = b$. Este concepto parece haber sido introducido por G. Köthe [39], y su irrupción en el mundo de las álgebras de Banach se produce en trabajos de I. Kaplansky [37], [38]. Nuestra caracterización geométrica de las C^*-álgebras que son I-anillos es la siguiente:

La norma de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en un subconjunto denso de $S_{\mathcal{A}}$ si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es un I-anillo.

Merece la pena destacar que, basándose en los resultados contenidos en esta memoria sobre subdiferenciabilidad fuerte de la norma de una C^*-álgebra, W. Werner [58] ha conseguido una elegante demostración de un clásico teorema de Kadison sobre isometrías entre C^*-álgebras, que puede considerarse como la versión no-conmutativa del aún más clásico teorema de Banach-Stone.

Parte del contenido de la presente memoria será objeto de publicación independiente. En concreto, los resultados principales de los Capítulos 2 y 3 aparecerán en [12]. Además, gran parte del Capítulo 4, fruto de una estrecha colaboración con W. Werner, queda recogida en [13].

La presente memoria se ha beneficiado de la ayuda de varios matemáticos, cuya colaboración queremos agradecer aquí muy especialmente. En particular, nos han sido de gran utilidad las orientaciones y sugerencias de Gilles Godefroy y John R. Giles. Como ya se ha dicho, el Capítulo 4 se debe en gran parte a la colaboración con Wend Werner, pero también ha sido muy valiosa la ayuda de Ángel Rodríguez Palacios.

No quisiera dar por terminada esta introducción sin antes manifestar mi mayor gratitud al director del presente trabajo, Rafael Payá Albert, que orienta y dirige desde hace varios años toda mi labor investigadora, por su imprescindible ayuda, plasmada en innumerables sesiones de trabajo, y por su infatigable labor de mejora continua de esta memoria.

Finalmente, agradezco a mis compañeros de los Departamentos de Análisis Matemático de la Universidad de Granada y de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla su ánimo, estímulo y continuo apoyo.

Capítulo 1

Distintas formas de continuidad de la función de dualidad.

En lo que sigue recordamos la definición de la función de dualidad de un espacio de Banach y presentamos las diferentes nociones de "continuidad" de tal función que se van a manejar, junto con algunas caracterizaciones de las mismas. En la segunda sección discutimos las relaciones existentes entre las distintas formas de continuidad, resolviendo, en particular, un problema abierto referente a la relación entre las formas débiles de semicontinuidad superior introducidas por Giles, Gregory y Sims [25] y la semicontinuidad superior en sentido topológico clásico. Concluimos el capítulo con una caracterización de los espacios de dimensión finita en términos de su función de dualidad.

1.A. Conceptos y resultados básicos.

Numerosas propiedades geométricas de un espacio de Banach guardan relación directa con su función de dualidad, que es la aplicación conjunto-valuada de la esfera unidad del espacio en la esfera unidad de su dual, que definimos a continuación.

1.1 Definición. Sea X un espacio de Banach (real o complejo), B_X su bola cerrada unidad, S_X su esfera unidad y X^* el dual topológico de X. Para $x \in S_X$, $D(x, X)$ denotará el subconjunto de la esfera unidad de X^* dado por

$$D(x, X) = \{x^* \in S_{X^*} : x^*(x) = 1\}.$$

Cuando no exista ambigüedad, notaremos al conjunto $D(x, X)$ simplemente por $D(x)$. Llamaremos *función de dualidad* de X a la aplicación

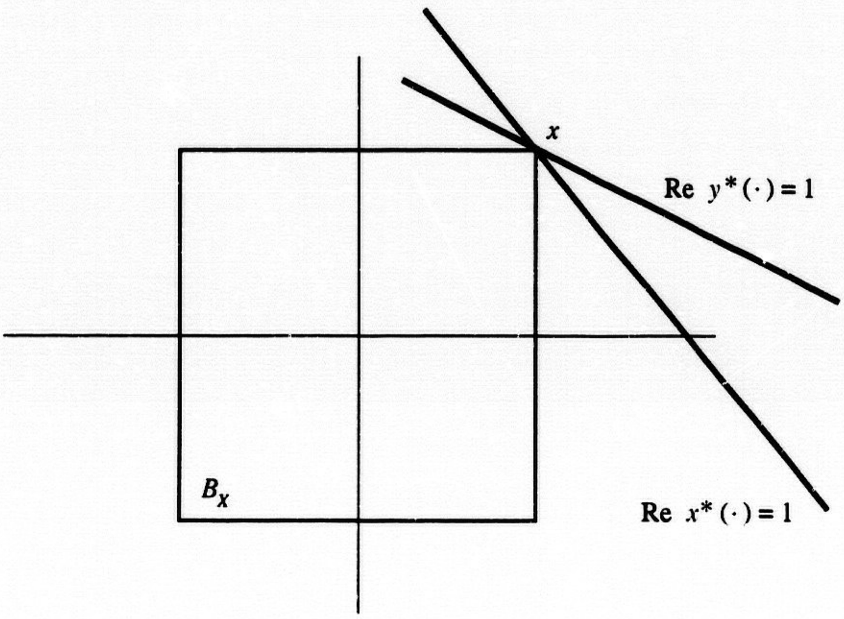
$$\begin{array}{rcl} D : S_X & \longrightarrow & 2^{S_{X^*}} \\ x & \longmapsto & D(x) \end{array}$$

donde $2^{S_{X^*}}$ denota al conjunto de las partes de S_{X^*}.

Para cada $x \in S_X$, el Teorema de Hahn-Banach nos permite asegurar que $D(x)$ es un conjunto no vacío, claramente es convexo y, por el Teorema de Banach-Alaoglú, débil-$*$ compacto. Para su interpretación geométrica, observemos que $x^* \in D(x)$ si, y sólo si,

$$\operatorname{Re} x^*(x) = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{Re} x^*(y) \leq 1 \quad \forall y \in B_X,$$

lo cual significa que el hiperplano real de ecuación $\operatorname{Re} x^*(\cdot) = 1$ pasa por el punto x y deja la bola unidad a un lado, es decir, es un hiperplano de soporte de B_X en el punto x.



Puede considerarse que el estudio sistemático de la función de dualidad de un espacio de Banach se inicia en 1964, cuando D. F. Cudia [14] se plantea la relación entre dicha función y propiedades de diferenciabilidad de la norma, si bien existían algunos precedentes en trabajos de S. Mazur [43] y V. Šmulian [53] [54].

Recordemos las nociones de continuidad para funciones conjunto-valuadas que se utilizan frecuentemente en Topología.

1.2 Definición. Sean (A,n) y (B,τ) dos espacios topológicos y Φ una función conjunto-valuada de A en B, esto es, una aplicación de A en el conjunto de las partes de B; supongamos que $\Phi(a) \neq \emptyset$ para todo a en A. Se dice que Φ es *superiormente semicontinua* (resp. *inferiormente* *semicontinua*) en un punto $x \in A$ si, para cada conjunto τ-abierto U con $\Phi(x) \subseteq U$ (resp. $\Phi(x) \cap U \neq \emptyset$), existe un n-entorno V de x tal que $\Phi(y) \subseteq U$ (resp. $\Phi(y) \cap U \neq \emptyset$) para todo $y \in V$.

Si B es un subconjunto de un espacio vectorial topológico, (Y, τ), podemos considerar otra noción de "continuidad" para Φ, que a la postre será la más interesante en el estudio de la función de dualidad, a la cual llamaremos de momento P_τ. Diremos que Φ tiene la ***propiedad*** P_τ en un punto $x \in A$ si para cada τ-entorno de cero U en Y existe un n-entorno V de x tal que $\Phi(y) \subseteq \Phi(x) + U$ para todo $y \in V$. Es claro que la semicontinuidad superior de Φ en un punto x implica la propiedad P_τ y, si $\Phi(x)$ es τ-compacto, ambas nociones coinciden. Nótese también que, si $\Phi(x)$ se reduce a un punto, la semicontinuidad superior de Φ en x implica la inferior.

Nos interesa solamente el caso en que Φ es la función de dualidad D de un espacio de Banach X. Siempre consideraremos en S_X la topología de la norma, mientras que en X^* usaremos la topología débil-$*$, la débil y la de la norma. Aparecen pues nueve formas de continuidad de la función de dualidad, cuyas caracterizaciones e interrelaciones analizaremos brevemente en el presente capítulo. La propiedad P_τ para la función de dualidad fue introducida por J. Giles, D. Gregory y B. Sims en 1978 [25] (con otra nomenclatura que aquí no resulta conveniente).

Comenzaremos viendo lo que ocurre cuando consideramos en el dual la topología débil-$*$.

1.3 Proposición (Cudia [14, Theorem 4.3]). *La función de dualidad de un* *espacio de Banach es siempre superiormente semicontinua para la topología débil-$*$. Equivalentemente, tiene la propiedad P_{w^*} en todo punto de la esfera unidad.*

Demostración. Supongamos que D no es superiormente semicontinua en un punto $x \in S_X$. Entonces existen un conjunto débil-$*$ abierto U con $D(x) \subseteq U$, una sucesión $\{x_n\}$ en S_X con $\|x_n - x\| \to 0$ y $x_n^* \in D(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tales que $x_n^* \notin U$ para todo n. Sea x^* un valor adherente a la sucesión $\{x_n^*\}$ en la topología débil-$*$; es claro que $x^* \in D(x)$, lo que nos lleva a contradicción con el hecho de ser U abierto. ■

Es claro, por tanto, que en todo espacio de Banach reflexivo la función de dualidad es siempre superiormente semicontinua para la topología débil y que en todo espacio de Banach de dimensión finita la función de dualidad es superiormente semicontinua para la topología de la norma. De este hecho se hará uso frecuente a lo largo de la memoria.

En cuanto a la semicontinuidad inferior de la función de dualidad para la topología débil-$*$, daremos una caracterización bastante intuitiva. Para ello necesitamos el siguiente resultado, consecuencia fácil, como veremos, del Teorema de Hahn-Banach.

1.4 Lema (Mazur [43]). *Sea X un espacio de Banach, $x \in S_X$, $y \in X$, $\mu \in \mathbb{R}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

(i) *Para $s, t \in \mathbb{R}$ con $s < 0 < t$, se verifica que*

$$\frac{\|x + sy\| - 1}{s} \leq \mu \leq \frac{\|x + ty\| - 1}{t}.$$

(ii)

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\|x+ty\|-1}{t} \leq \mu \leq \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\|-1}{t}.$$

(iii) *Existe* $x^* \in D(x)$ *tal que* $\mathrm{Re}\, x^*(y) = \mu$.

Como consecuencia obtenemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty\|-1}{t} = \max\left\{\mathrm{Re}\, x^*(y) : \ x^* \in D(x)\right\}.$$

Suele denotarse $\tau(x,y)$ *al límite anterior.*

Demostración. Basta evidentemente considerar el caso real.

La equivalencia entre (i) y (ii) es clara, una vez observado que la función $t \longmapsto \|x+ty\|$ es convexa.

Veamos que (i) implica (iii). Si $y = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces el resultado se sigue fácilmente. Por tanto podemos suponer que x e y son linealmente independientes. Sea $\lambda > 0$; aplicando (i) con $t = 1/\lambda$ y $s = -1/\lambda$, obtenemos:

$$\lambda - \|y-\lambda x\| \leq \mu \leq \|y+\lambda x\| - \lambda \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

La función $\lambda \mapsto \lambda - \|y - \lambda x\|$ es creciente (en $\mathbb{R}$) y la función $\lambda \mapsto \|y+\lambda x\| - \lambda$ es decreciente, luego las desigualdades (1) son también ciertas para todo λ real. Equivalentemente, cambiando λ por $-\lambda$ en la primera, tenemos

$$-\|y+\lambda x\| \leq \mu + \lambda \leq \|y+\lambda x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

esto es:

$$|\, \mu + \lambda \,| \leq \|y+\lambda x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, tomando $\lambda = \alpha/\beta$ tenemos

$$| \beta\mu + \alpha | \leq \|\beta y + \alpha x\|,$$

desigualdad que también se cumple, trivialmente, para $\beta = 0$. Así, el funcional $\alpha x + \beta y \mapsto \alpha + \beta\mu$, definido sobre el subespacio engendrado por x e y, tiene norma 1. Por el Teorema de Hahn-Banach existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = 1$ y $x^*(y) = \mu$, luego se cumple (iii).

Por último veamos que (iii) implica (i). Para $t > 0$ se tiene

$$1 + t\mu = \text{Re } x^*(x + ty) \leq \|x + ty\|,$$

luego

$$\mu \leq \frac{\|x + ty\| - 1}{t}.$$

Para $s < 0$ se razona de forma análoga. ■

Como consecuencia inmediata del lema anterior, se obtiene que la norma de X es Gâteaux-diferenciable en un punto $x \in S_X$, es decir, $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\|x + ty\| - 1}{t}$ existe para cada $y \in S_X$, si, y sólo si, $D(x)$ se reduce a un punto. Suele decirse en este caso que x es un punto *suave* de X.

La abundancia de puntos suaves en un espacio separable queda reflejada en el siguiente teorema clásico de Mazur.

1.5 Teorema (Mazur [43, Satz 2]). *Dado un espacio de Banach separable X los puntos suaves de X forman un conjunto G_δ-denso en S_X.* ■

La demostración puede también verse, por ejemplo, en [49, Theorem 1.20]. Por ahora sólo aplicamos el teorema anterior a un espacio normado real de dimensión 2. Para este caso particular puede verse una demostración muy elemental en [47, Lema 21.5].

Podemos ya caracterizar los puntos donde la función de dualidad es inferiormente semicontinua para la topología débil-$*$.

1.6 Proposición (Cudia [14, Corollary 4.5]). *Sea* X *un espacio de Banach y* $x \in S_X$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *La norma de* X *es Gâteaux-diferenciable en* x*.*

(ii) x *es un punto suave en* X*.*

(iii) *La función de dualidad* D *es inferiormente semicontinua en* x *para la topología débil-$*$.*

Demostración. La equivalencia entre (i) y (ii) ya se ha comentado y que (ii) $\Rightarrow$ (iii) es consecuencia de la Proposición 1.3. Veamos que (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Dados x_1^*, $x_2^* \in D(x)$, bastará probar que $\operatorname{Re} x_1^*(y) = \operatorname{Re} x_2^*(y)$ para cualquier y en X y podemos suponer que y es linealmente independiente de x. Notemos por Y al subespacio real de X generado por x e y. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos el débil-$*$ entorno de cero en X^* dado por

$$N = \{x^* \in X^* : \ |\operatorname{Re} x^*(y)| < \varepsilon\}.$$

Usamos la semicontinuidad inferior de la función D en x para encontrar un $\delta > 0$ tal que, para $z \in S_X$ con $\|x - z\| < \delta$, se verifique que $D(z) \cap (x_1^* + N) \neq \emptyset$ y $D(z) \cap (x_2^* + N) \neq \emptyset$. Por el Teorema de Mazur el conjunto de puntos suaves de S_Y es denso en S_Y. Existirá, por tanto, un $z \in S_Y$, punto suave de Y, tal que $\|z-x\| < \delta$. Por la elección de δ, existirán z_1^*, $z_2^* \in D(z)$ tales que $z_1^* \in x_1^* + N$, $z_2^* \in x_2^* + N$, esto es

$$|\text{Re } z_1^*(y) - \text{Re } x_1^*(y)| < \varepsilon \qquad |\text{Re } z_2^*(y) - \text{Re } x_2^*(y)| < \varepsilon,$$

pero, por la suavidad de z en Y, se tiene que $z_1^*(y) = z_2^*(y)$, de donde

$$|\text{Re } x_1^*(y) - \text{Re } x_2^*(y)| < 2\varepsilon.$$

La arbitrariedad de ε nos permite concluir la demostración. ■

Pasamos ahora a estudiar la continuidad de la función de dualidad D para la topología débil, w, en X^*. Comenzando por la propiedad más débil, P_w, es fácil encontrar espacios, que aparecerán a lo largo de la memoria, en los que no se verifica esta propiedad. Las caracterizaciones que aparecen en la siguiente proposición se deben a Giles, Gregory y Sims.

1.7 Proposición [25, Theorem 2.1, Theorem 3.1]. *Sea D la función de dualidad de un espacio de Banach X y $x \in S_X$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

(i) *D satisface la propiedad P_w en x, es decir, para cada entorno débil de cero N en X^* existe un $\delta > 0$ tal que $D(y) \subseteq D(x) + N$ para $y \in S_X$ con $\|x - y\| < \delta$.*

(ii) *Para cada entorno débil de cero N en X^*, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$y^* \in B_{X^*}, \ \ \text{Re } y^*(x) > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad y^* \in D(x) + N.$$

(iii) $D(x,X)$ *es denso en* $D(x,X^{**})$ *para la topología débil-$*$ de* X^{***}.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Podemos tomar N convexo y, por hipótesis, existe un $\eta > 0$ tal que $D(z) \subseteq D(x) + \frac{N}{2}$ siempre que $z \in S_X$ verifique $\|z - x\| < \eta$; podemos claramente suponer que $\eta B_{X^*} \subseteq \frac{N}{2}$. Basta ahora tomar $\delta = \frac{\eta^2}{4}$. En efecto, si $y^* \in B_{X^*}$ verifica que $\mathrm{Re}\, y^*(x) > 1 - \delta$, por el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás [6] existen $z \in S_X$, $z^* \in D(z)$ tales que $\|z - x\| < \eta$ y $\|y^* - z^*\| < \eta$; entonces

$$y^* \in z^* + \eta B_{X^*} \subseteq D(z) + \frac{N}{2} \subseteq D(x) + \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = D(x) + N.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sea A el cierre débil-$*$ de $D(x,X)$ en X^{***} y N^* un entorno cerrado de cero en la topología débil-$*$ de X^{***}. Como A es débil-$*$ compacto, $A + N^*$ es débil-$*$ cerrado. Por hipótesis existe un $\delta > 0$ tal que

$$y^* \in B_{X^*},\ \mathrm{Re}\, y^*(x) > 1 - \delta \ \Rightarrow\ y^* \in D(x,X) + (N^* \cap X^*) \subseteq A + N^*.$$

Una sencilla aplicación del Teorema de Goldstine nos da que

$$y^{***} \in B_{X^{***}},\ \mathrm{Re}\, y^{***}(x) > 1 - \delta \ \Rightarrow\ y^{***} \in A + N^*.$$

En particular

$$D(x, X^{**}) \subseteq A + N^*$$

y la arbitrariedad de N^* implica que

$$D(x, X^{**}) \subseteq A,$$

siendo evidente la inclusión contraria.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sea N un entorno de cero en la topología débil de X^* y N^* un débil-$*$-entorno convexo de cero en X^{***} tal que $N^* \cap X^* \subseteq N$. La función de dualidad de X^{**} es superiormente semicontinua para la topología débil-$*$ en X^{***} (Proposición 1.3), por tanto existe un $\delta > 0$ tal que

$$D(y, X^{**}) \subseteq D(x, X^{**}) + N^*/2$$

para cada $y \in S_X$ con $\|y - x\| < \delta$ (se podría tomar y en X^{**} pero no será necesario). La hipótesis nos da que

$$D(x, X^{**}) \subseteq D(x, X) + N^*/2,$$

luego tenemos que $D(y, X^{**}) \subseteq D(x, X) + N^*$, en particular $D(y, X) \subseteq D(x, X) + N^*$, de donde $D(y, X) \subseteq D(x, X) + N$, y esto para cualquier $y \in S_X$ con $\|y - x\| < \delta$, como queríamos demostrar. ■

En cuanto a la semicontinuidad superior de la función de dualidad para la topología débil nos será útil la siguiente caracterización, completamente elemental.

1.8 Proposición. *Sea X un espacio de Banach y $x \in S_X$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

(i) *La función de dualidad D es superiormente semicontinua en x para la topología débil de X^*.*

(ii) *Para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en S_X tal que $\|x_n - x\| \to 0$ y cualesquiera $x_n^* \in D(x_n)$, se verifica que, o bien existe un natural m tal que $x_n^* \in D(x)$ para $n \geq m$, o bien $\{x_n^*\}$ tiene un punto de $D(x)$ como valor adherente en la topología débil.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n^* \notin D(x)\}$$

es infinito. Pasando a una sucesión parcial si fuese necesario, podemos suponer que $x_n^* \notin D(x)$ para todo n. Si $\{x_n^*\}$ tiene un valor adherente en la topología débil, es claro que dicho valor adherente debe pertenecer a $D(x)$. Por tanto, si la tesis no fuese cierta, el conjunto $\Omega = X^* \setminus \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ sería abierto en la topología débil y, puesto que $D(x) \subseteq \Omega$, (i) implicaría que $D(x_n) \subseteq \Omega$, para n suficientemente grande, una contradicción.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que no es cierto (i). Entonces debe existir un abierto débil, Ω, con $D(x) \subseteq \Omega$, y una sucesión $\{x_n\}$ en S_X tales que $\|x_n - x\| \to 0$ y $D(x_n) \nsubseteq \Omega$ para todo n. Tomando $x_n^* \in D(x_n) \setminus \Omega$, las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{x_n^*\}$ muestran que no se verifica (ii). ■

En cuanto a la semicontinuidad inferior de la función de dualidad para la topología débil, no tenemos una caracterización puntual como para la topología débil-$*$, aunque sí una global. Obsérvese que si $x \in S_X$ es un punto suave en X^{**}, es decir, $D(x, X^{**})$ se reduce a un punto, se verifica (trivialmente) la afirmación (iii) de la Proposición 1.7 y deducimos que D es inferiormente semicontinua en x para la topología débil. No sabemos si es cierto el recíproco, pero sí lo es globalmente. En efecto: si la función de dualidad es inferiormente semicontinua en todo punto de S_X para la topología débil, entonces (Proposición 1.6) $D(x)$ se reduce a un punto para todo $x \in S_X$ y, aplicando la Proposición 1.7, también $D(x, X^{**})$ se reduce a un punto para todo $x \in S_X$. Obtenemos así el siguiente resultado.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n^* \notin D(x)\}$$

es infinito. Pasando a una sucesión parcial si fuese necesario, podemos suponer que $x_n^* \notin D(x)$ para todo n. Si $\{x_n^*\}$ tiene un valor adherente en la topología débil, es claro que dicho valor adherente debe pertenecer a $D(x)$. Por tanto, si la tesis no fuese cierta, el conjunto $\Omega = X^* \setminus \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ sería abierto en la topología débil y, puesto que $D(x) \subseteq \Omega$, (i) implicaría que $D(x_n) \subseteq \Omega$, para n suficientemente grande, una contradicción.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que no es cierto (i). Entonces debe existir un abierto débil, Ω, con $D(x) \subseteq \Omega$, y una sucesión $\{x_n\}$ en S_X tales que $\|x_n - x\| \to 0$ y $D(x_n) \not\subseteq \Omega$ para todo n. Tomando $x_n^* \in D(x_n) \setminus \Omega$, las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{x_n^*\}$ muestran que no se verifica (ii). ∎

En cuanto a la semicontinuidad inferior de la función de dualidad para la topología débil, no tenemos una caracterización puntual como para la topología débil-$*$, aunque sí una global. Obsérvese que si $x \in S_X$ es un punto suave en X^{**}, es decir, $D(x, X^{**})$ se reduce a un punto, se verifica (trivialmente) la afirmación (iii) de la Proposición 1.7 y deducimos que D es inferiormente semicontinua en x para la topología débil. No sabemos si es cierto el recíproco, pero sí lo es globalmente. En efecto: si la función de dualidad es inferiormente semicontinua en todo punto de S_X para la topología débil, entonces (Proposición 1.6) $D(x)$ se reduce a un punto para todo $x \in S_X$ y, aplicando la Proposición 1.7, también $D(x, X^{**})$ se reduce a un punto para todo $x \in S_X$. Obtenemos así el siguiente resultado.

1.9 Proposición. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *La funcion de dualidad de X es inferiormente semicontinua en todo punto de S_X para la topología débil.*

(ii) *Todo punto de S_X es suave en X^{**}.* ∎

Por el protagonismo que las propiedades de continuidad en la topología débil que acabamos de estudiar tendrán en esta memoria, parece oportuno darles un nombre más sugestivo:

1.10 Definición. Sea X un espacio de Banach y $x \in S_X$. Diremos que x es un *punto bastante suave* en X si se verifican cualesquiera de las afirmaciones equivalentes de la Proposición 1.7. Si todo punto de S_X es bastante suave (en X) diremos simplemente que la norma de X (o el propio X) es *bastante suave*. Siguiendo a J. Diestel y B. Faires [17] decimos que la norma de X (o el propio X) es *muy suave* cuando verifica una de las afirmaciones de la Proposición 1.9. Obsérvese que todo espacio muy suave es bastante suave, lo que justifica nuestra nomenclatura. No obstante, piénsese que un espacio bastante suave puede contener puntos no suaves.

Pasamos a considerar propiedades de "continuidad" de la función de dualidad cuando en el dual se toma la topología de la norma, n, empezando nuevamente por la menos restrictiva, P_n. Son bastantes los trabajos aparecidos al respecto; aparte del ya mencionado de Giles-Gregory-Sims [25] cabe citar, por orden cronológico, los de D. Gregory [30], C. Aparicio, F. Ocaña, R. Payá y A. Rodríguez [2], C. Franchetti y R. Payá [22] y por último el de G. Godefroy [26]. La siguiente nomenclatura se introdujo en [22].

1.11 Definición. Sea X un espacio de Banach y $x \in S_X$. Decimos que la norma de X es *fuertemente subdiferenciable en* x si el límite

$$\tau(x, y) := \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x + ty\| - 1}{t}$$

(que siempre existe) es uniforme para $y \in B_X$. Si esto ocurre para todo $x \in S_X$ decimos simplemente que *la norma de* X *es fuertemente subdiferenciable.*

El próximo resultado muestra, entre otras cosas, que la subdiferenciabilidad fuerte no es más que una reformulación de la propiedad P_n de la función de dualidad.

1.12 Proposición. *Sean* X *un espacio de Banach,* D *su función de dualidad y* $x \in S_X$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$y^* \in B_{X^*},\ \ \mathrm{Re}\, y^*(x) > 1 - \delta \ \ \Rightarrow\ \ y^* \in D(x) + \varepsilon B_{X^*}.$$

(ii) D *tiene la propiedad* P_n *en* x, *es decir, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$y \in S_X,\ \ \|y - x\| < \delta \ \ \Rightarrow\ \ D(y) \subseteq D(x) + \varepsilon B_{X^*}.$$

(iii) *Para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$y \in S_X, \quad \|y - x\| < \delta \quad \Rightarrow \quad dist(D(y), D(x)) < \varepsilon.$$

(iv) *La norma de* X *es fuertemente subdiferenciable en* x.

(v) *El conjunto*

$$C = \{y \in X : \tau(x, y) \leq 1\}$$

(un cono con vértice en x*) tiene la siguiente propiedad: todo conjunto convexo, cerrado y acotado* $K \subseteq C$*, tal que la distancia de* K *al complemento de* C *sea estrictamente positiva, está contenido en la bola de centro* $(1 - m)x$ *y radio* m*, para algún número natural* m*.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Es claro.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sea $0 < \delta < 2$ tal que $dist(D(z), D(x)) < \varepsilon$ siempre que $z \in S_X$ satisfaga $\|z - x\| < \delta$. Para $0 < t < \frac{\delta}{4}$ e $y \in B_X$ se tiene que $x + ty \neq 0$ y escribiendo $y_t = \dfrac{x + ty}{\|x + ty\|}$ tenemos un elemento en la esfera unidad de X satisfaciendo $\|y_t - x\| < \delta$, luego existen $y_t^* \in D(y_t)$, $x_t^* \in D(x)$ tales que $\|y_t^* - x_t^*\| < \varepsilon$. Entonces

$$\frac{\|x + ty\| - 1}{t} = \frac{\text{Re } y_t^*(x + ty) - 1}{t} \leq \frac{\text{Re } y_t^*(x + ty) - \text{Re } y_t^*(x)}{t} = \text{Re } y_t^*(y),$$

y además $\tau(x, y) \geq \text{Re } x_t^*(y)$, así que

$$0 \leq \frac{\|x + ty\| - 1}{t} - \tau(x, y) \leq \text{Re } (y_t^*(y) - x_t^*(y)) < \varepsilon.$$

Puesto que esta desigualdad se verifica para $y \in B_X$ arbitrario, $0 < t < \frac{\delta}{4}$ y δ sólo depende de ε, hemos obtenido (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Sea $\varepsilon > 0$ la distancia de K al complemento de C; para $0 < r < \varepsilon$ e $y \in K$ tenemos que $y + rx \in C$, luego $\tau(x,y) \leq 1 - r$ y, haciendo $r \to \varepsilon$ deducimos que

$$\sup\{\tau(x,y) : \ y \in K\} \leq 1 - \varepsilon.$$

Notando $M = \sup\{\|y\| : \ y \in K\}$, la definición de subdiferenciabilidad fuerte nos proporciona un $t_0 > 0$ tal que

$$t \leq t_0 \ \Rightarrow \ \|x + tz\| \leq 1 + t\tau(x,z) + t\frac{\varepsilon}{M} \quad \forall z \in B_X. \tag{1}$$

Si m es un número natural con $\frac{1}{m-1} \leq t_0/M$ probaremos que K está contenido en la bola de centro $(1-m)x$ y radio m. En efecto, para $y \in K$ podemos escribir $y = \|y\|z$ con $\|z\| = 1$ y tomar $t = \frac{\|y\|}{m-1} \leq t_0$, con lo que la desigualdad (1) nos da que

$$\|y - (1-m)x\| = \|(m-1)x + y\| = (m-1)\|x + tz\| \leq$$

$$\leq (m-1) + \|y\|\tau(x,z) + \varepsilon\frac{\|y\|}{M} \leq (m-1) + \tau(x,y) + \varepsilon \leq m,$$

como se quería.

(v) $\Rightarrow$ (i). Sea $y^* \in B_{X^*}$ tal que $y^* \notin D(x)$ y fijemos r tal que

$$0 < r < d(y^*, D(x)).$$

Entonces, $D(x)$ y la bola de centro y^* y radio r son conjuntos débil-$*$ compactos, convexos y disjuntos; el Teorema de Hahn-Banach de separación de conjuntos convexos nos proporciona un elemento $z \in S_X$ tal que

$$\sup\{\mathrm{Re}\, x^*(z) : \ x^* \in D(x)\} < \inf\{\mathrm{Re}\, x^*(z) : \ x^* \in X^*, \ \ \|x^* - y^*\| \leq r\},$$

esto es,

$$\tau(x,z) < \operatorname{Re} y^*(z) - r.$$

Entonces, para $t > 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} r &< \operatorname{Re} y^*(z) - \tau(x,z) \\ &= \frac{\operatorname{Re} y^*(x+tz) - 1}{t} + \frac{1 - \operatorname{Re} y^*(x)}{t} - \tau(x,z) \\ &\leq \frac{\|x+tz\| - 1}{t} - \tau(x,z) + \frac{1 - \operatorname{Re} y^*(x)}{t}. \end{aligned} \tag{2}$$

Por otra parte, sea

$$K = \left\{ u \in X : \|u\| \leq \frac{3}{r},\ \tau(x,u) \leq 0 \right\};$$

es claro que K es convexo, cerrado y que la distancia de K al complemento de C es igual a 1.

Por la hipótesis (v), K está contenido en la bola de centro $(1-m)x$ y radio m para conveniente número natural m. Nótese que dicha bola crece con m lo que permite suponer m tan grande como se quiera; concretamente, como veremos, convendrá tomar $m \geq 1 + \frac{3}{2r}$.

Fijamos $y \in B_X$ con $\tau(x,y) = 0$ y usando que $\frac{3}{r}y \in K$ obtenemos, para $0 < s \leq \frac{3}{(m-1)r}$ que:

$$\begin{aligned} \frac{\|x+sy\|-1}{s} &\leq \frac{\left\|x+\frac{3}{r(m-1)}y\right\|-1}{\frac{3}{r(m-1)}} \\ &= \frac{r}{3}\left(\left\|(1-m)x - \frac{3}{r}y\right\| - (m-1)\right) \leq \frac{r}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Podemos tomar ahora $y = \frac{1}{2}(z - \tau(x,z)x)$, que evidentemente verifica $y \in B_X$, $\tau(x,y) = 0$; tomamos también $s = \dfrac{2t}{1+t\tau(x,z)}$ con $t = \dfrac{3}{4(m-1)r} \leq \dfrac{1}{2}$

de forma que $1 + t\tau(x,z) \geq \frac{1}{2}$ y $s \leq 4t = \dfrac{3}{(m-1)r}$. Al sustituir en (3) obtenemos:

$$\frac{r}{3} \geq \frac{\|x+sy\|-1}{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\|x+tz\|-1}{t} - \tau(x,z)\right). \tag{4}$$

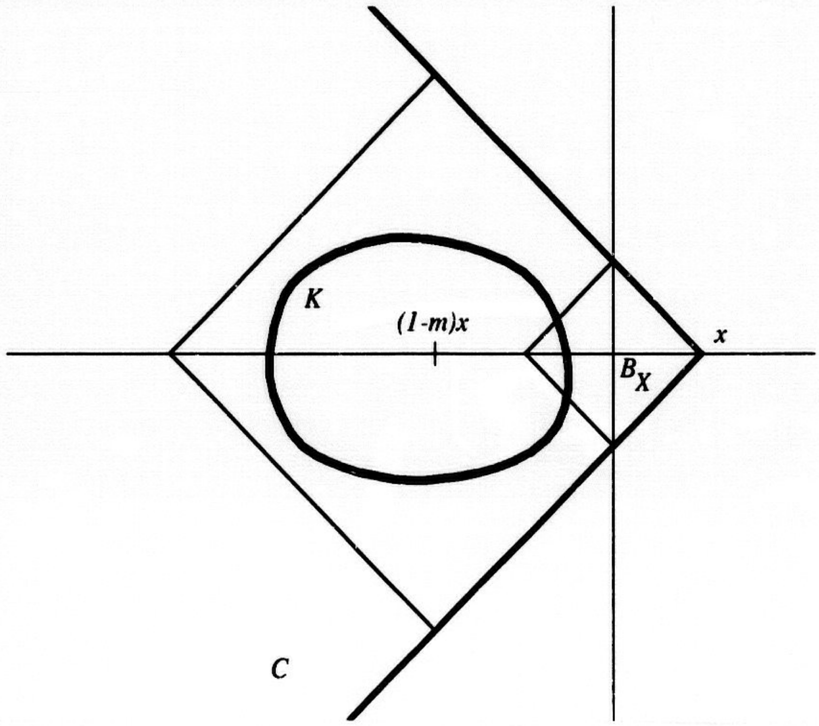
Enlazando (2) y (4) se obtiene fácilmente $\dfrac{r}{3} \leq \dfrac{1-\operatorname{Re} y^*(x)}{t}$, esto es,

$$\frac{1}{4(m-1)} \leq 1 - \operatorname{Re} y^*(x), \tag{5}$$

y conviene observar que m sólo depende de y^* a través de r.

Finalmente, si no se cumpliese (i), existiría una sucesión $\{y_n^*\}$ en B_{X^*} y un $r > 0$ tal que $y_n^*(x) \to 1$ mientras que $dist(y_n^*, D(x)) \geq r$ para todo natural n, lo que contradice (5). ∎

La equivalencia entre las afirmaciones (i) y (ii) de la proposición anterior fue obtenida por Giles-Gregory-Sims en [25, Theorem 2.1]. La demostración de dichos autores usa el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás que, como puede verse, no es necesario. Esta observación fue puesta de manifiesto por Gregory en [30, Corollary 4.4] donde aparece ya la equivalencia entre (i), (ii), (iii) y (iv). Conviene observar, no obstante, que Gregory trabaja en un ambiente ligeramente más general y enuncia (iii) de forma memos sugestiva. Dicha equivalencia, con la misma nomenclatura usada aquí, puede también verse en [22]. La afirmación (v) es novedosa y pasamos a comentarla. Nótese que el cono C es la unión de las bolas de centro $(1-m)x$ y radio m con m natural, es decir, para cada $y \in C$ siempre existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|(1-m)x-y\| \leq m$; la afirmación (v) consiste en la posibilidad de que m sea independiente de y siempre que y se mantenga en un conjunto acotado a distancia positiva del complemento de C.



Esta interesante interpretación geométrica de la subdiferenciabilidad fuerte de la norma es análoga a la dada por J. Giles en [23, Theorem 1] para la Fréchet-diferenciabilidad, con la única diferencia de cambiar la función $\tau(x,\cdot)$ por un funcional $\mathbb{R}$-lineal, con lo que el cono C es un semiespacio real.

Pasamos ahora a considerar la semicontinuidad superior de la función de dualidad con la topología de la norma en X^*. Tenemos una caracterización análoga a la dada para la topología débil, con idéntica demostración, aunque usando la metrizabilidad de la topología de la norma obtenemos el siguiente resultado.

1.13 Proposición. *Sea D la función de dualidad de un espacio de Banach X y $x \in S_X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *D es superiormente semicontinua en x para la topología de la norma de X^*.*

(ii) *Para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en S_X tal que $\|x_n - x\| \to 0$ y cualesquiera $x_n^* \in D(x_n)$ se verifica que, o bien existe un natural m tal que $x_n^* \in D(x)$ para $n \geq m$, o bien $\{x_n^*\}$ tiene una sucesión parcial convergente en la topología de la norma a un punto de $D(x)$.* ■

Por último tenemos la caracterización de la semicontinuidad inferior de la función de dualidad para la topología de la norma, la cual es una consecuencia fácil, como veremos, de las Proposiciones 1.6 y 1.12 y del hecho de que la norma de X es Fréchet-diferenciable en x si, y sólo si, es fuertemente subdiferenciable y Gâteaux-diferenciable en x. Este resultado aparece ya en el trabajo de Šmulian [54], si bien, con la terminología aquí usada puede verse en [14].

1.14 Proposición (Cudia [14, Corollary 4.11]). *Sea D la función de dualidad de un espacio de Banach X y $x \in S_X$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

(i) *D es inferiormente semicontinua en x para la topología de la norma de X^*.*

(ii) *La norma de X es Fréchet-diferenciable en x.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Por ser D inferiormente semicontinua en la topología débil-$*$ se sigue que x es un punto suave (Proposición 1.6); es claro, además, que se verifica la afirmación (iii) de la Proposición 1.12, luego la norma de X es fuertemente subdiferenciable en x. Tenemos así (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Por ser la norma de X fuertemente subdiferenciable en x se tiene (Proposición 1.12 (iv) $\Rightarrow$ (ii)) que D es superiormente semicontinua. Este hecho, junto con la suavidad de x (Proposición 1.6) nos da (i). ■

1.B. Relación entre las distintas nociones de continuidad.

Acabamos de concluir la exposición de las nociones de "continuidad" de la función de dualidad que vamos a estudiar, así como sus diferentes caracterizaciones. A partir de los resultados de la sección anterior, es claro que dado un espacio de Banach X con función de dualidad D y $x \in S_X$ se verifican las implicaciones que aparecen en la siguiente tabla.

D inferiormente semicontinua en x para la topología de la norma (1)	$\Rightarrow$	D inferiormente semicontinua en x para la topología débil (2)	$\Rightarrow$	D inferiormente semicontinua en x para la topología débil-$*$ (3)
$\Downarrow$				$\Downarrow$
D superiormente semicontinua en x para la topología de la norma (4)	$\Rightarrow$	D superiormente semicontinua en x para la topología débil (5)	$\Rightarrow$	D superiormente semicontinua en x para la topología débil-$*$ (6)
$\Downarrow$		$\Downarrow$		$\Updownarrow$
La norma de X es fuertemente subdifer. en x (7)	$\Rightarrow$	x es un punto bastante suave (8)	$\Rightarrow$	D tiene la propiedad P_{w^*} en x (9)

En primer lugar hemos de decir aquí que no sabemos si (2) $\Rightarrow$ (5) (o equivalentemente si (2) $\Rightarrow$ (8)), es decir:

1.15 Problema (Giles-Gregory-Sims, [25, Problem 1]). *Sea D la función de dualidad de un espacio de Banach X y $x \in S_X$. Si D es inferiormente semicontinua en x para la topología débil de X^*, ¿es cierto que D es superiormente semicontinua en x para la topología débil de X^*?*

Veremos a continuación que ninguna de las otras posibles implicaciones es cierta. Para ello daremos ejemplos mostrando que

$$\begin{array}{rl} (4) \not\Rightarrow (3) & \text{(Ejemplo 1.16)} \\ (7) \not\Rightarrow (5) & \text{(Ejemplo 1.18)} \\ (3) \not\Rightarrow (2) \text{ y } (3) \not\Rightarrow (8) & \text{(Ejemplo 1.19)} \\ (2) \not\Rightarrow (7) \text{ y } (5) \not\Rightarrow (7) & \text{(Ejemplo 1.21)} \end{array}$$

y puede comprobarse sin dificultad que de esta forma agotamos todas las posibilidades.

1.16 Ejemplo (La función de dualidad de c_0). Por comodidad trabajamos solamente en el caso real; el caso complejo presenta ligeras diferencias y se tratará en el Capítulo 4. Identificando c_0^* con ℓ_1 en la forma usual, dados $u \in S_{c_0}$, $y \in S_{\ell_1}$ se tiene que $y \in D(u)$ si, y sólo si,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)u(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = 1$$

esto es, $y(n)u(n) = |y(n)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $|u(n)| < 1$ se deberá tener $y(n) = 0$, mientras que, si $|u(n)| = 1$, será $y(n) = \alpha_n u(n)$ con $\alpha_n \geq 0$. Por tanto, notando $\Lambda(u) = \{n \in \mathbb{N} : |u(n)| = 1\}$ ($\Lambda(u)$ es un conjunto no vacío y finito) tenemos

$$D(u) = \left\{ \sum_{n \in \Lambda(u)} \alpha_n u(n) e_n : \alpha_n \geq 0 \ \forall n \in \Lambda(u), \ \sum_{n \in \Lambda(u)} \alpha_n = 1 \right\},$$

donde $\{e_n\}$ es la base canónica de ℓ_1. Si ahora tomamos

$$\rho = \max \{|u(n)| : n \in \mathbb{N} \setminus \Lambda(u)\} < 1,$$

para $x \in S_{c_0}$ con $\|x - u\| < 1 - \rho$ se tendrá que $\Lambda(x) \subseteq \Lambda(u)$ y que $x(n) = u(n)$ para $n \in \Lambda(x)$, de donde $D(x) \subseteq D(u)$. Así pues, la función de dualidad de c_0 es semicontinua superiormente en todo punto de S_{c_0} para la topología de la norma de c_0^*. Nótese también que $D(u)$ es compacto en la topología de la norma para todo $u \in S_{c_0}$. Por otra parte, si $\Lambda(u)$ tiene más de un elemento, el punto u no es suave en c_0. Tenemos así un sencillo ejemplo para mostrar que (4) $\not\Rightarrow$ (3) en el cuadro de la página 22.

Para el próximo ejemplo necesitamos el siguiente lema técnico cuya demostración, como se verá, es bastante rutinaria, pero conviene hacerla con detalle.

Recuérdese que una norma F en $\mathbb{R}^2$ es una norma ***absoluta*** si verifica:

$$F(a,b) = F(|a|,|b|) \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}$$
$$F(0,1) = F(1,0) = 1.$$

1.17 Lema. *Sean Y, Z espacios de Banach y consideremos el espacio producto $X = Y \times Z$ con la norma dada por:*

$$\|(y,z)\| = F(\|y\|,\|z\|) \qquad (y,z) \in X,$$

donde F es una norma absoluta en $\mathbb{R}^2$. Notando τ a la topología débil o a la de la norma en cualquiera de los espacios Y^*, Z^*, X^*, si las funciones de dualidad de Y, Z tienen la propiedad P_τ en todo punto de S_Y, S_Z respectivamente, entonces la función de dualidad de X tiene la propiedad P_τ en todo punto de S_X.

Demostración. Usaremos la identificación natural de X^* con $Y^* \times Z^*$ considerando ahora en el producto la norma dada por

$$\|(y^*,z^*)\| = F^*(\|y^*\|,\|z^*\|) \qquad (y^* \in Y^*, z^* \in Z^*)$$

donde F^* es la norma dual de F. La función de dualidad de X se determina fácilmente a partir de las de Y, Z y $\mathbb{R}^2$ con la norma F. Concretamente, para $(y,z) \in S_X$ es inmediato observar que:

$$(y^*, z^*) \in D(y,z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y^*(y) = \|y^*\|\,\|y\|, \quad z^*(z) = \|z^*\|\,\|z\| \\ (\|y^*\|, \|z^*\|) \in D(\|y\|, \|z\|). \end{cases} \tag{1}$$

Para probar que la función de dualidad de X tiene la propiedad P_τ en todo punto de S_X, sea $(y_0, z_0) \in S_X$ y W un τ-entorno de cero en X^*. Existirán sendos τ-entornos de cero equilibrados U, V en Y^*, Z^* respectivamente, y un $\eta > 0$ tales que

$$\eta B_{X^*} + U \times V \subseteq W. \tag{2}$$

Usando que la función de dualidad de $\mathbb{R}^2$ con la norma F es superiormente semicontinua en el punto $(\|y_0\|, \|z_0\|)$, sea $\delta_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &F(a,b) = 1, \; F(a - \|y_0\|, b - \|z_0\|) < \delta_0, \; (\alpha, \beta) \in D(a,b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists (\alpha_0, \beta_0) \in D(\|y_0\|, \|z_0\|) : \; F^*(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) < \eta. \end{aligned} \tag{3}$$

Si $y_0 \neq 0$, aplicando que la función de dualidad de Y tiene la propiedad P_τ en el punto $\frac{y_0}{\|y_0\|}$, encontramos δ_1, con $0 < \delta_1 < \|y_0\|$ tal que

$$u \in S_Y, \; \left\| u - \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| < \frac{2\delta_1}{\|y_0\|} \;\Rightarrow\; D(u) \subseteq D\left(\frac{y_0}{\|y_0\|}\right) + U. \tag{4}$$

Análogamente, si $z_0 \neq 0$, encontramos δ_2, con $0 < \delta_2 < \|z_0\|$ tal que

$$v \in S_Z, \; \left\| v - \frac{z_0}{\|z_0\|} \right\| < \frac{2\delta_2}{\|z_0\|} \;\Rightarrow\; D(v) \subseteq D\left(\frac{z_0}{\|z_0\|}\right) + V. \tag{5}$$

Sea finalmente $\delta > 0$ tal que $\delta < \delta_0$, $\delta < \delta_1$ si $y_0 \neq 0$ y $\delta < \delta_2$ si $z_0 \neq 0$. Fijado $(y,z) \in S_X$ con $\|(y,z) - (y_0, z_0)\| < \delta$, comprobaremos que $D(y,z) \subseteq D(y_0,z_0)+W$; sea pues $(y^*,z^*) \in D(y,z)$ también fijo y construyamos $(y_0^*,z_0^*) \in D(y_0,z_0)$ tal que $(y^*-y_0^*, z^*-z_0^*) \in W$.

Usando que la restricción de F al primer cuadrante es creciente en cada variable, una propiedad bien conocida de las normas absolutas [7, Lemma 21.2], tenemos

$$F(\|y\|-\|y_0\|, \|z\|-\|z_0\|) \leq F(\|y-y_0\|, \|z-z_0\|) < \delta < \delta_0$$

y, puesto que, por (1), $(\|y^*\|,\|z^*\|) \in D(\|y\|,\|z\|)$, podemos aplicar (3) para obtener

$$(\alpha_0,\beta_0) \in D(\|y_0\|,\|z_0\|), \quad F^*(\|y^*\|-\alpha_0, \|z^*\|-\beta_0) < \eta. \tag{6}$$

Si $y_0 \neq 0$ tenemos $\|y-y_0\| \leq \delta < \delta_1 < \|y_0\|$, luego también $y \neq 0$, pero además,

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} - \frac{y_0}{\|y_0\|} \right\| \leq \frac{2\|y-y_0\|}{\|y_0\|} < \frac{2\delta_1}{\|y_0\|};$$

poniendo $y^* = \|y^*\|u^*$ con $u^* \in D\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$ (si $y^* \neq 0$ esto se deduce de (1), si $y^* = 0$ se toma $u^* \in D\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$ arbitrario), podemos aplicar (4) para obtener $u_0^* \in D\left(\frac{y_0}{\|y_0\|}\right)$ tal que $u^* - u_0^* \in U$ y, por ser U equilibrado, $\alpha_0 u^* - \alpha_0 u_0^* \in U$. Tomamos entonces $y_0^* = \alpha_0 u_0^*$ con lo que tenemos

$$\|y_0^*\| = \alpha_0, \quad y_0^*(y_0) = \|y_0^*\|\,\|y_0\|, \quad \alpha_0 u^* - y_0^* \in U \tag{7}$$

donde, recuérdese, $y^* = \|y^*\|u^*$ con $u^* \in S_{Y^*}$. Si $y_0 = 0$ tomamos simplemente $y_0^* = \alpha_0 u^*$ con lo que (7) se cumple también, trivialmente.

Un razonamiento análogo en el espacio Z, usando (5), nos permite encontrar $z_0^* \in Z^*$ tal que

$$\|z_0^*\|\beta_0, \quad z_0^*(z_0) = \|z_0^*\|\,\|z_0\|, \quad \beta_0 v^* - z_0^* \in V \tag{8}$$

donde $v^* \in S_{Z^*}$ y $z^* = \|z^*\|v^*$.

Por una parte, las afirmaciones (6), (7) y (8) nos aseguran, en virtud de (1), que $(y_0^*, z_0^*) \in D(y_0, z_0)$, por otra nos dan

$$\|(y^*, z^*) - (\alpha_0 u^*, \beta_0 v^*)\| < \eta, \quad (\alpha_0 u^*, \beta_0 v^*) - (y_0^*, z_0^*) \in U \times V,$$

con lo que basta aplicar (2) para obtener $(y^*, z^*) - (y_0^*, z_0^*) \in W$, como se quería. ■

Con el siguiente ejemplo respondemos de forma negativa al problema planteado explícitamente en [22, Problem 5.3], donde se pregunta si la función de dualidad de todo espacio de Banach bastante suave (resp. con norma fuertemente subdiferenciable) es superiormente semicontinua para la topología débil (resp. de la norma) de X^*. De hecho este problema aparece ya implícitamente en el trabajo de Giles-Gregory-Sims [25] y con más claridad en el de Hu-Lin [33]. Como vamos a poner de manifiesto, ni siquiera se verifica que la subdiferenciabilidad fuerte de la norma implique la semicontinuidad superior de la función de dualidad para la topología débil.

1.18 Ejemplo. Sea Y un espacio de Banach no reflexivo cuya norma sea fuertemente subdiferenciable en todo punto de la esfera unidad (por ejemplo, c_0). Tomemos $X = Y \times \mathbb{K}$ con la norma dada por

$$\|(y, \lambda)\| = F(\|y\|, |\lambda|) \quad (y \in Y, \ \lambda \in \mathbb{K})$$

donde F es la norma absoluta en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$F(a, b) = \frac{1}{2}(|a| + |b|) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{1/2}.$$

Por el lema anterior, la norma de X es fuertemente subdiferenciable en S_X, pero vamos a ver que la función de dualidad de X no es semicontinua superiormente en (0,1) para la topología débil de X^*. Puesto que Y no es reflexivo, por el Teorema de Eberlein-Šmulian (no es estrictamente necesario usar dicho teorema), existe una sucesión $\{y_n^*\}$ en S_{Y^*} que no tiene valores adherentes para la topología débil y, por el Teorema de Bishop-Phelps, podemos suponer que $y_n^* \in D(y_n)$ para algún $y_n \in S_Y$. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales verificando:

$$\{a_n\} \to 0, \quad \{b_n\} \to 1, \quad 0 < a_n < b_n < 1, \quad F(a_n, b_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para cada n natural sean $(\alpha_n, \beta_n) \in D(a_n, b_n)$, $x_n = (a_n y_n, b_n)$. Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de S_X convergente a (0,1) y la descripción de la función de dualidad de X, dada en la prueba del lema anterior, nos dice que

$$(\alpha_n y_n^*, \beta_n) \in D(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es fácil comprobar que

$$\{\alpha_n\} \longrightarrow \frac{1}{2}, \qquad \beta_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde deducimos que $\{\alpha_n y_n^*\}$ no tiene valores adherentes en la topología débil de Y^*, luego $\{(\alpha_n y_n^*, \beta_n)\}$ no tiene valores adherentes en la topología débil de X^*, y que $(\alpha_n y_n^*, \beta_n) \notin D(0,1)$ para todo n, con lo que basta aplicar la Proposición 1.8.

Este ejemplo muestra que (7) $\not\Rightarrow$ (5) en el diagrama de la página 22. Obsérvese también que el análogo del Lema 1.17, sustituyendo la propiedad P_τ por la semicontinuidad superior de la función de dualidad para la topología

τ no es cierto. La estabilidad por sumas directas de la propiedad P_τ invita a pensar que dicha forma de continuidad es más adecuada para trabajar con la función de dualidad de un espacio de Banach que la semicontinuidad superior. Se comprenderá ahora nuestro interés en dar con todo detalle la prueba del lema anterior. Si bien dicha prueba puede considerarse rutina, se podría pensar, erróneamente, que la misma rutina serviría para la semicontinuidad superior.

1.19 Ejemplo (La función de dualidad de ℓ_1). Identificando ℓ_1^* con ℓ_∞ en la forma usual y razonando de forma muy similar a como se hizo en el Ejemplo 1.16 tenemos que, para $u \in S_{\ell_1}$,

$$D(u) = \{y \in S_{\ell_\infty} : \ u(k)y(k) = |u(k)| \ \ \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Por tanto u es suave si, y sólo si,

$$u(k) \neq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que u es suave y consideremos la sucesión $\{u_n\}$ de puntos suaves dada por

$$u_k = u - 2\sum_{k=n+1}^{\infty} u(k)e_k$$

donde $\{e_k\}$ es la base canónica de ℓ_1. Es claro que $\|u_n - u\| \to 0$ y, si y_n e y son los únicos elementos de $D(u_n)$ y $D(u)$ respectivamente, tenemos que $y_n + y \in c_0$ para todo n. Sea ahora $F \in \ell_\infty^*$ tal que $F(y) \neq 0$, $F(c_0) = \{0\}$. Entonces $F(y - y_n) = 2F(y)$ para todo n, luego la sucesión $\{y - y_n\}$ no converge a cero en la topología débil de ℓ_∞. Ello prueba que el punto u no es bastante suave. Este ejemplo muestra que (3) $\not\Rightarrow$ (8) y (3) $\not\Rightarrow$ (2) en el cuadro de la página 22.

Los ejemplos que restan para completar la discusión del cuadro de la página 22 se basarán en un resultado general sobre renormación de espacios de Banach separables. Su contenido es esencialmente conocido, como vamos a explicar, pero no aparece explícitamente en la bibliografía consultada. Usando una idea básica bien conocida (todo espacio de Banach separable admite una norma equivalente Gâteaux-diferenciable) C. Franchetti [21] consigue construir en cada espacio de Banach reflexivo de dimensión infinita una norma equivalente Gâteaux-diferenciable pero no Fréchet-diferenciable, incluso con algunas propiedades adicionales de convexidad. De hecho, trabaja en el dual y lo que construye es una norma equivalente en el dual que es estrictamente convexa y no verifica la llamada "propiedad de Kadec-Klee". Las mencionadas perfecciones adicionales conseguidas por Franchetti no nos son necesarias aquí, mientras que, para la parte de sus resultados que sí nos interesa, hemos conseguido sustituir la hipótesis de reflexividad por la de separabilidad. En suma, el enunciado que damos a continuación no es comparable con los resultados de Franchetti, pero la demostración está claramente inspirada en su trabajo.

1.20 Proposición. *Todo espacio de Banach separable, de dimensión infinita, admite una norma equivalente que es Gâteaux-diferenciable en todo punto de la esfera unidad, pero no es Fréchet-diferenciable.*

Demostración. Sea $(X, |\cdot|)$ un espacio de Banach separable, de dimensión infinita. Puesto que la topología débil-$*$ en B_{X^*} es metrizable y S_{X^*} es densa en B_{X^*}, existe una sucesión $\{x_n^*\}$ en S_{X^*} que converge a cero en la topología débil-$*$; fijemos también $x_0 \in S_X$ y $x_0^* \in S_{X^*}$ con $x_0^*(x_0) = 1$.

Definimos entonces una nueva norma en X^* de la siguiente forma

$$\|x^*\| = \max\left\{\frac{1}{4}|x^*|, |x^*(x_0)|\right\} \qquad (x^* \in X^*).$$

Es claro que $\|\cdot\|$ es una norma equivalente en X^*, de hecho

$$\frac{1}{4}|x^*| \leq \|x^*\| \leq |x^*| \qquad \forall x^* \in X^*,$$

pero también se comprueba sin ninguna dificultad que $\|\cdot\|$ es una norma dual en X^*.

Con respecto a la nueva norma se tiene, claramente,

$$\|x_n^* + x_0^*\| \longrightarrow 1, \qquad \|x_n^*\| \geq \frac{1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$1 = \|x_0^*\| = \|x_0\| = x_0^*(x_0). \tag{2}$$

Sea ahora $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable denso en la esfera unidad de $(X, \|\cdot\|)$ y consideremos el operador compacto T de ℓ_2 en X dado por

$$T(\{\lambda_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2^k} y_k \qquad (\{\lambda_k\} \in \ell_2).$$

definimos una nueva norma en X^* por

$$|||x^*||| = \|x^*\| + \|T^*x^*\| = \|x^*\| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x^*(y_k)|^2}{2^{2k}}\right)^{1/2}.$$

Es inmediato comprobar que $|||\cdot|||$ es una norma dual en X^*, equivalente a la de partida. Puesto que ℓ_2 es estrictamente convexo y T^* es inyectivo, se comprueba que la norma $|||\cdot|||$ es estrictamente convexa, luego la norma predual en X es Gâteaux-diferenciable en la esfera unidad y probaremos que no es Fréchet-diferenciable en un punto de la misma.

Puesto que $\{x_n^*\}$ converge a cero en la topología débil-$*$ y T^* es compacto, tenemos $\|T^*x_n^*\| \to 0$, luego $\|T^*(x_n^* + x_0^*)\| \to \|T^*x_0^*\|$ y, usando (1), deducimos que

$$|||x_n^* + x_0^*||| \longrightarrow |||x_0^*|||. \tag{3}$$

Consideremos el vector y_0 definido por

$$y_0 = x_0 + \frac{1}{\|T^*x_0^*\|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{x_0^*(y_k)}}{2^{2k}} y_k.$$

Para $x^* \in X^*$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$|x^*(y_0)| \leq |x^*(x_0)| + \frac{1}{\|T^*x_0^*\|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_0^*(y_k)||x^*(y_k)|}{2^{2k}} \leq$$

$$\leq \|x^*\| + \frac{1}{\|T^*x_0^*\|} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_0^*(y_k)|^2}{2^{2k}} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x^*(y_k)|^2}{2^{2k}} \right)^{1/2} =$$

$$= \|x^*\| + \|T^*x^*\| = |||x^*|||$$

luego $|||y_0||| \leq 1$, pero

$$x_0^*(y_0) = x_0^*(x_0) + \frac{1}{\|T^*x_0^*\|} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_0^*(y_k)|^2}{2^{2k}} = \|x_0^*\| + \|T^*x_0^*\| = |||x_0^*|||,$$

lo que prueba que $|||y_0||| = 1$ y que $D(y_0) = \left\{ \frac{x_0^*}{|||x_0^*|||} \right\}$ donde D es la función de dualidad de $(X, |||\cdot|||)$.

Finalmente, puesto que, aplicando (3), tenemos

$$\left\{ \frac{x_n^*(y_0) + x_0^*(y_0)}{|||x_n^* + x_0^*|||} \right\} \longrightarrow \frac{x_0^*(y_0)}{|||x_0^*|||} = 1,$$

si la norma $|||\cdot|||$ fuese Fréchet-diferenciable en el punto y_0, la sucesión $\left\{ \frac{x_n^* + x_0^*}{|||x_n^* + x_0^*|||} \right\}$ habría de converger a $\frac{x_0^*}{|||x_0^*|||}$ en la topología de la norma, esto es, $\{|||x_n^*|||\} \to 0$, cosa que obviamente no sucede. ∎

Usando que todo espacio reflexivo tiene una norma equivalente Fréchet-diferenciable (véase [16, p. 167, Corollary 3]) y un subespacio separable complementado (véase [16, p. 149, Theorem 3]) se puede sustituir la hipótesis de separabilidad por la de reflexividad en la proposición anterior.

1.21 Ejemplo. Podemos ya justificar fácilmente que (2) $\not\Rightarrow$ (7) y (5) $\not\Rightarrow$ (7) en el cuadro de la página 22. Basta considerar un espacio de Banach reflexivo, separable, de dimensión infinita, con la norma dada por la proposición anterior y tener en cuenta que tal espacio es muy suave (satisface (2) y también (5)) por la Proposición 1.3.

Así pues, hemos completado la discusión de la relación entre las distintas formas de continuidad de la función de dualidad, relación que queda completamente clarificada, a falta de la solución del Problema 1.15.

Recordemos que toda norma en un espacio de dimensión finita es fuertemente subdiferenciable; el siguiente recíproco también es cierto:

1.22 Corolario. *En todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una norma equivalente que no es fuertemente subdiferenciable.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita e Y un subespacio cerrado separable de X también de dimensión infinita. Por la Proposición 1.20 existe una norma equivalente $|||\cdot|||$ en Y que no es fuertemente subdiferenciable, con lo que basta considerar una norma equivalente en X que extienda a $|||\cdot|||$ y tener en cuenta que la subdiferenciabilidad fuerte de la norma es, claramente, una propiedad hereditaria para subespacios. ■

Capítulo 2

Función de dualidad y espacios de Asplund.

El objetivo del presente capítulo es obtener uno de los resultados más importantes de la memoria: *todo espacio de Banach bastante suave es un espacio de Asplund.* La herramienta principal que usaremos será la llamada "Desigualdad de Simons" [51], aunque la versión que aquí damos es ligeramente diferente a la que aparece en el trabajo de S. Simons. Ambas versiones parecen independientes, aunque la demostración sigue literalmente los mismos pasos. Daremos, de hecho, una generalización a funciones con valores vectoriales que ilustraremos con algunas aplicaciones.

2.A. Desigualdad de Simons.

El Teorema de James afirma que un subconjunto convexo, acotado y débilmente cerrado A, de un espacio localmente convexo real, separado y casi-completo X, es débilmente compacto si, y sólo si, cada funcional lineal continuo en X alcanza su supremo sobre A. Aún en el caso particular de que X sea un espacio de Banach y $A = B_X$, este teorema es uno de los más importantes del Análisis Funcional. La "Desigualdad de Simons" recoge la idea principal de la demostración del Teorema de James en el caso separable.

2.1 Teorema (Desigualdad de Simons con valores vectoriales). *Sean E un conjunto no vacío, B un subconjunto de E y X un espacio de Banach. Consideremos una sucesión $\{x_n\}$ en $\ell_\infty^E(X)$ (el espacio de Banach de las funciones acotadas de E en X con la norma del supremo, $\|\cdot\|_\infty$), verificando que*

$$\sup\{\|x_n\|_\infty : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

(así pues, $\{x_n\}$ no es más que una sucesión uniformemente acotada de funciones de E en X).

Supongamos que, para cualquier sucesión $\{\lambda_n\}$ de números reales no negativos con $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n = 1$, existe un elemento $b \in B$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n(b) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n \right\|_\infty .$$

Entonces se verifica la siguiente desigualdad:

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{b \in B} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\mathrm{Re}\, x^*(x_n(b))\right] \geq \inf\{\|g\|_\infty : g \in \mathrm{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\}.$$

En particular

$$\sup_{b \in B} \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n(b)\| \geq \inf\{\|g\|_\infty : g \in \mathrm{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\}.$$

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $C_m = \mathrm{co}\{x_n : n \geq m\}$ y pongamos

$$C = C_1 = \mathrm{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos también:

$$\eta = \inf\left\{\|g\|_\infty : \ g \in C\right\}, \qquad M = \sup\left\{\|x_n\|_\infty : \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Fijemos $\delta > 0$ arbitrario y sea $0 < \lambda < 1$ tal que

$$\eta - \delta(1+\lambda) - \lambda M \geq (\eta - 2\delta)(1-\lambda).$$

Construiremos por inducción dos sucesiones $\{h_m\}$ y $\{g_m\}$ en $\ell_\infty^E(X)$ de la siguiente forma: tomamos $h_0 = 0$ y, para $m \in \mathbb{N}$, construida h_{m-1}, tomamos $g_m \in C_m$ tal que

$$\left\|h_{m-1} + \lambda^{m-1} g_m\right\|_\infty \leq \inf\left\{\left\|h_{m-1} + \lambda^{m-1} g\right\|_\infty : \ g \in C_m\right\} + \delta\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m$$

y $h_m = h_{m-1} + \lambda^{m-1} g_m$. Es claro que

$$h_m = \sum_{n=1}^{m} \lambda^{n-1} g_n \qquad (m \in \mathbb{N})$$

luego $\{h_m\}$ converge en norma a la función $h = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} g_n$.

Fijado $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{g_m + \lambda g_{m+1}}{1+\lambda} \in C_m$$

y la definición de g_m nos da

$$\|h_m\|_\infty \leq \left\|h_{m-1} + \lambda^{m-1}\left(\frac{g_m + \lambda g_{m+1}}{1+\lambda}\right)\right\|_\infty + \delta\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m,$$

de donde

$$(1+\lambda)\|h_m\|_\infty \leq \left\|(1+\lambda)h_{m-1} + \lambda^{m-1} g_m + \lambda^m g_{m+1}\right\|_\infty + \delta(1+\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m =$$

$$= \|\lambda h_{m-1} + h_{m+1}\|_\infty + \delta(1+\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m \leq$$

$$\leq \lambda\|h_{m-1}\|_\infty + \|h_{m+1}\|_\infty + \delta(1+\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m,$$

esto es,

$$\|h_{m+1}\|_\infty - \|h_m\|_\infty \geq \lambda(\|h_m\|_\infty - \|h_{m-1}\|_\infty) - \delta(1+\lambda)\left(\frac{\lambda}{2}\right)^m ;$$

dividiendo ambos miembros por λ^m:

$$\frac{\|h_{m+1}\|_\infty - \|h_m\|_\infty}{\lambda^m} \geq \frac{\|h_m\|_\infty - \|h_{m-1}\|_\infty}{\lambda^{m-1}} - \delta\frac{1+\lambda}{2^m} \tag{1}$$

desigualdad que es válida, recordemos, para todo natural m. Notemos también que

$$\|h_1\|_\infty - \|h_0\|_\infty = \|h_1\|_\infty \geq \eta \tag{2}$$

ya que $h_1 = g_1 \in C$. Fijado ahora $n \in \mathbb{N}$, sumamos miembro a miembro las desigualdades (1) para $m = 1, 2, ..., n$ y, teniendo en cuenta (2), obtenemos:

$$\frac{\|h_{n+1}\|_\infty - \|h_n\|_\infty}{\lambda^n} \geq \eta - \delta(1+\lambda)\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2^m} \geq \eta - \delta(1+\lambda), \tag{3}$$

desigualdad válida, nuevamente, para $n \in \mathbb{N}$. Fijado otra vez $m \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|h\|_\infty - \|h_m\|_\infty &= \textstyle\sum_{n=m}^{\infty}[\|h_{n+1}\|_\infty - \|h_n\|_\infty] \\ &\geq \textstyle\sum_{n=m}^{\infty} \lambda^n[\eta - \delta(1+\lambda)] \\ &= \tfrac{\lambda^m}{1-\lambda}[\eta - \delta(1+\lambda)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Observemos que $(1-\lambda)h = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}(1-\lambda)g_n$ con $\lambda^{n-1}(1-\lambda) \geq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}(1-\lambda) = 1$. Teniendo además en cuenta el hecho de que $g_n \in C_n$ para cada natural n, es claro que podemos escribir

$$(1-\lambda)h = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k$$

donde $\{\lambda_k\}$ es una sucesión de números reales no negativos con $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$. Por hipótesis, existe $b \in B$ tal que $\|h(b)\| = \|h\|_\infty$ y el Teorema de Hahn-Banach nos da un $x^* \in B_{X^*}$ tal que $x^*(h(b)) = \|h\|_\infty$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} x^*(\lambda^m g_{m+1}(b)) &= \operatorname{Re} x^*[h(b) - h_m(b) - \textstyle\sum_{n=m+2}^{\infty} \lambda^{n-1} g_n(b)] \\
&\geq x^*(h(b)) - \|h_m(b)\| - \textstyle\sum_{n=m+2}^{\infty} \lambda^{n-1} \|g_n\|_\infty \\
&\geq \|h\|_\infty - \|h_m\|_\infty - \textstyle\sum_{n=m+2}^{\infty} \lambda^{n-1} M \\
&\geq \tfrac{\lambda^m}{1-\lambda}[\eta - \delta(1+\lambda)] - \tfrac{\lambda^{m+1}}{1-\lambda} M \\
&= \tfrac{\lambda^m}{1-\lambda}[\eta - \delta(1+\lambda) - \lambda M] \\
&\geq \lambda^m(\eta - 2\delta),
\end{aligned}$$

donde se ha usado (4) y la elección de λ. Por tanto,

$$\operatorname{Re} x^*(g_{m+1}(b)) \geq \eta - 2\delta.$$

Además, como $g_{m+1} \in \operatorname{co}\{x_n : n \geq m+1\}$, se tiene que, para todo $m \in \mathbb{N}$ deberá existir un natural $k \geq m+1$ tal que

$$\operatorname{Re} x^*(x_k(b)) \geq \eta - 2\delta.$$

Hemos probado que

$$\varlimsup_{n\to\infty} \operatorname{Re} x^*(x_n(b)) \geq \eta - 2\delta.$$

Con más razón se tendrá que:

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_{b \in B} \varlimsup_{n\to\infty} [\operatorname{Re} x^*(x_n(b))] \geq \eta - 2\delta$$

y el resultado se sigue de la arbitrariedad de δ. ∎

Como ya se ha dicho, la versión de la Desigualdad de Simons dada aquí es ligeramente diferente de la original. Simons [51, Lemma 2] sólo considera funciones con valores reales, es decir, el caso $X = \mathbb{R}$, supone que las series convexas de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ alcanzan su supremo en B y obtiene la desigualdad en la forma:

$$\sup_{b\in B} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n(b) \geq \inf\left\{\sup_{t\in E} g(t) : g \in \mathrm{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\right\}.$$

Así pues, tanto la hipótesis como la tesis del resultado original son ligeramente diferentes de las del teorema anterior, si bien ambas versiones tienen esencialmente la misma utilidad; optar por una u otra parece simplemente una cuestión de comodidad, dependiendo del tipo de aplicaciones que se quiera obtener. La generalización a funciones con valores vectoriales es también una cuestión de forma, la demostración no se simplifica en absoluto en el caso escalar. Para el principal resultado de este capítulo sólo usaremos el Teorema 2.1 en el caso $X = \mathbb{R}$ o $X = \mathbb{C}$, pero en algunas aplicaciones que se verán enseguida, la versión general clarifica notoriamente los argumentos.

La apariencia de la Desigualdad de Simons es bastante técnica, por lo que merece la pena tratar de explicar, aunque sea ambiguamente, la filosofía que encierra. Si se tiene en cuenta la expresión del límite superior como un ínfimo, se observa que, en cierto modo, se está intercambiando dicho ínfimo con un supremo y que de las dos desigualdades posibles se tiene la no trivial, pero además, debe notarse que el segundo miembro de la desigualdad involucra el comportamiento (podríamos decir "uniforme") de la sucesión $\{x_n\}$ en todo E, mientras el primer miembro sólo depende del comportamiento ("puntual") de $\{x_n\}$ en el conjunto B, e incluso no se altera si se suprime un número finito arbitrario de términos de la sucesión. La conjunción de todas esas ideas es la que da lugar a una amplia gama de consecuencias importantes.

El siguiente ejemplo muestra que el Teorema 2.1 deja de ser cierto si se sustituye la sucesión $\{x_n\}$ por una red, incluso fortaleciendo la hipótesis referente a las funciones que alcanzan su máximo.

2.2 Ejemplo. Sea Γ un conjunto dirigido tal que todo subconjunto numerable de Γ esté mayorado y Γ no tenga máximo; por ejemplo se puede tomar como Γ el primer ordinal no numerable. Sea E la bola unidad del espacio de Banach de las funciones acotadas de Γ en $\mathbb{R}$ con soporte acotado: así pues, una función $t : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ pertenece a E cuando $|t(\gamma)| \leq 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$ y existe un $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $t(\gamma) = 0$ para $\gamma \geq \gamma_0$. Consideremos la red $\{x_\gamma\}$ de elementos de $\ell_\infty^E(\mathbb{R})$ definida por

$$x_\gamma(t) = \sup\{t(\delta) : \ \delta \in \Gamma, \ \delta \geq \gamma\} \qquad (t \in E, \ \gamma \in \Gamma).$$

Es claro que $\{x_\gamma\}$ es una red uniformemente acotada de funciones de E en $\mathbb{R}$. Veamos que todo elemento de la envolvente convexa cerrada del conjunto $\{x_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\}$ tiene norma 1 y la alcanza en un punto de E. En efecto, si x es un tal elemento, fijado un natural n, encontramos $y_n \in \mathrm{co}\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ tal que $\|x - y_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ y un conjunto finito $J_n \subseteq \Gamma$ tal que $y_n \in \mathrm{co}\{x_\gamma : \ \gamma \in J_n\}$. Tomemos $\alpha \in \Gamma$ tal que $\alpha \geq \gamma$ para $\gamma \in \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$; sea $t \in E$ la función definida por

$$t(\alpha) = 1, \qquad t(\gamma) = 0 \qquad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\alpha\}.$$

Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_\gamma(t) = 1$ para todo $\gamma \in J_n$, luego $y_n(t) = 1$; pero $|x(t) - y_n(t)| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, así que $x(t) = 1$ y también $\|x\|_\infty = 1$.

Observemos finalmente que $\{x_\gamma(t)\} \to 0$ para todo $t \in E$, luego tomando $B = E$, el primer miembro de la Desigualdad de Simons (en cualquiera de sus versiones) se anula, mientras el segundo miembro vale 1 según se ha visto.

Pasamos a considerar algunas aplicaciones inmediatas del Teorema 2.1. Podemos dar una sencilla demostración del siguiente resultado.

2.3 Corolario (Bogdanowicz [5]). *Sean K un espacio topológico compacto de Hausdorff, X un espacio de Banach y $C(K,X)$ el espacio de Banach de las funciones continuas de K en X con la norma del máximo. Una sucesión acotada $\{f_n\}$ en $C(K,X)$ converge a $f \in C(K,X)$ en la topología débil de $C(K,X)$ si (y sólo si) $\{f_n(t)\}$ converge a $f(t)$ en la topología débil de X para todo $t \in K$.*

Demostración. Supongamos que $\{f_n(t)\}$ converge débilmente a $f(t)$ para todo t en K y, por reducción al absurdo, que existe $\mu \in C(K,X)^*$ con $\|\mu\| = 1$ tal que $\{\mu(f_n - f)\}$ no converge a cero. Salvo un giro, y pasando a una sucesión parcial si fuese necesario, podemos suponer que existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\operatorname{Re} \mu(f_n - f) \geq \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Se verifican claramente ~~las~~ hipótesis del Teorema 2.1 con $E = B = K$ y $x_n = f_n - f$. Puesto que, $x^*(f_n(t) - f(t)) \to 0$ para cada $t \in K$, obtenemos que

$$\inf\{\|g\| : g \in \operatorname{co}\{f_n - f : n \in \mathbb{N}\}\} = 0,$$

en particular, debe existir un elemento $g \in \operatorname{co}\{f_n - f : n \in \mathbb{N}\}$ con $\|g\| < \varepsilon$, luego $\operatorname{Re} \mu(g) < \varepsilon$, pero en vista de (1) también se tiene $\operatorname{Re} \mu(g) \geq \varepsilon$. ■

Otra aplicación de la Desigualdad de Simons, esta vez novedosa:

2.4 Corolario. *Sean* X *e* Y *espacios de Banach y* $\{T_n\}$ *una sucesión en el espacio* $L(X,Y)$ *de los operadores lineales acotados de* X *en* Y. *Supongamos que la sucesión* $\{T_n^*\}$ *converge a cero en la topología débil de operadores, esto es,*

$$x^{**}\left[T_n^*(y^*)\right] \longrightarrow 0 \qquad \forall y^* \in Y^*,\ \forall x^{**} \in X^{**},$$

y que para toda sucesión $\{\lambda_n\}$ *de números reales no negativos con* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ *se verifica que el operador* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n^*$ *alcanza su norma. Entonces, la sucesión* $\{T_n\}$ *converge a cero en la topología débil de* $L(X,Y)$.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $\varphi \in L(X,Y)^*$ con $\|\varphi\| = 1$ tal que $\{\varphi(T_n)\}$ no converge a cero. Salvo un giro, y pasando a una sucesión parcial si fuese necesario, podemos suponer que existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{Re } \varphi(T_n) \geq \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Se verifican claramente las hipótesis del Teorema 2.1 con $E = B = B_{Y^*}$ y $x_n = T_n^*$. Por tanto se tendrá que

$$\begin{aligned} \sup_{x^{**}\in B_{X^{**}}} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left[\text{Re } x^{**}(T_n^* y^*)\right] &\geq \inf\{\|S\| : S \in \text{co}\{T_n^* : n \in \mathbb{N}\}\} \\ &= \inf\{\|T\| : T \in \text{co}\{T_n : n \in \mathbb{N}\}\}. \end{aligned}$$

Puesto que el primer miembro de esta desigualdad es cero (recordemos que T_n^* converge a cero en la topología débil de operadores) debe existir un elemento $T \in \text{co}\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ con $\|T\| < \varepsilon$, luego $\text{Re } \varphi(T) < \varepsilon$, pero en vista de (1) también se tiene $\text{Re } \varphi(T) \geq \varepsilon$. ■

En el caso particular de que T_n sea un operador compacto para todo n, el resultado anterior se debe a N. Kalton [34, p. 269, Corollary 3]. Nótese que en ese caso la hipótesis de que los operadores de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n^*$ alcancen su norma se cumple automáticamente.

2.B. Espacios de Asplund.

Recordemos que una función convexa de variable real es derivable en todo punto de su dominio, con la posible excepción de un conjunto numerable de puntos. No es difícil ver que este resultado no es cierto en $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$, aunque sí se tiene la siguiente generalización: toda función convexa (automáticamente continua) definida en un subconjunto convexo y abierto de $\mathbb{R}^n$ es diferenciable en un subconjunto denso de su dominio. Este resultado no sigue siendo cierto en un espacio de Banach de dimensión infinita; así por ejemplo, la norma usual de ℓ_1 (una función convexa y continua) no es Fréchet-diferenciable en punto alguno. Tratando de obtener versiones infinito-dimensionales de los teoremas de diferenciación de funciones convexas, E. Asplund [3] introdujo en 1968 la noción de "espacio de diferenciabilidad fuerte". Posteriormente, a estos espacios se les conoce como "espacios de Asplund" y se definen como sigue.

2.5 Definición. Se dice que un espacio de Banach X es un *espacio de Asplund* si cada función convexa y continua definida sobre un subconjunto convexo y abierto de X es Fréchet-diferenciable en un subconjunto denso de su dominio.

A partir de la fecha citada se abre una línea de intensa investigación tratando de caracterizar los espacios de Asplund. En 1978, C. Stegall consigue dar forma definitiva a una larga serie de resultados previos, completando la demostración del siguiente resultado:

2.6 Teorema [55, Theorems 1, 2]. *Sea* X *un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) X *es un espacio de Asplund.*

(ii) X^* *tiene la propiedad de Radon-Nikodým.*

(iii) *Cada subespacio separable de* X *tiene dual separable.* ■

Las condiciones geométricas que implican que un espacio sea de Asplund tienen también una larga tradición en la literatura de los espacios de Banach. E. Asplund ya demostró que X es un espacio de Asplund siempre que X^* sea un espacio localmente uniformemente convexo, resultado que fue mejorado por I. Ekeland y G. Lebourg [19] demostrando que un espacio de Banach sobre el cual existe una función real Fréchet-diferenciable, con soporte no vacío y acotado, es un espacio de Asplund; en particular, un espacio de Banach con norma Fréchet-diferenciable es un espacio de Asplund. En vista del teorema anterior, la última afirmación se sigue también de un resultado de J. Diestel y B. Faires [17] quienes demostraron que si X es un espacio de Banach muy suave entonces X^* tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

En la dirección opuesta, la pregunta de si cada espacio de Asplund tiene una norma equivalente Fréchet-diferenciable ha permanecido abierta durante un largo periodo de tiempo. La respuesta es negativa como ha demostrado recientemente R. Haydon [32], encontrando un espacio de Asplund que no admite una norma equivalente Gâteaux-diferenciable. En vista de este contraejemplo, resulta ahora más interesante encontrar condiciones suficientes más débiles para que un espacio de Banach sea de Asplund, especialmente aquellas que no impliquen suavidad. Desde este punto de vista, tiene ahora más relevancia el estudio de la semicontinuidad superior de la función de dualidad (en la topología débil o de la norma de X^*) así como los conceptos de subdiferenciabilidad fuerte de la norma y de espacio bastante suave.

En [25], Giles-Gregory-Sims demostraron que un espacio de Banach bastante suave en el que, o bien $D(x)$ es débilmente compacto para todo $x \in S_X$, o bien existe una constante $k < 1$ tal que el diámetro de $D(x)$ es menor que k para todo $x \in S_X$, es un espacio de Asplund. Ambas afirmaciones mejoran el resultado de Diestel y Faires ya citado y la primera de ellas ha sido a su vez generalizada en un reciente trabajo de Zhibao Hu y Bor-Luh Lin [33], quienes prueban que X es un espacio de Asplund siempre que D sea superiormente semicontinua para la topología débil de X^*. Finalmente, G. Godefroy [26] demostró que un espacio de Banach cuya norma es fuertemente subdiferenciable en todo punto de la esfera unidad es un espacio de Asplund. En el citado trabajo de Giles-Gregory-Sims se plantea el problema de si todo espacio bastante suave es de Asplund [25, Problem 2]. El resultado central del presente capítulo responde afirmativamente a esta pregunta, englobando claramente los resultados antes mencionados de Hu-Lin, Giles-Gregory-Sims y Godefroy.

El siguiente lema es el paso crucial en las demostraciones de éste y el siguiente capítulo. Es una aplicación de la Desigualdad de Simons y mejora ligeramente un resultado de G. Godefroy [26, Lemma 4].

2.7 Lema. *Sea* B *una "frontera" para un espacio de Banach* X, *esto es,* $B \subseteq S_{X^*}$ *y* $B \cap D(x) \neq \emptyset$ *para cada* $x \in S_X$. *Supongamos que*

$$B \subseteq \overline{\text{co}}(F + \alpha B_{X^*})$$

para algún conjunto numerable $F \subseteq X^*$ *y algún* $\alpha < 1$. *Entonces, el subespacio engendrado por* F *es denso en* X^* *para la topología de la norma; en particular,* X^* *es separable.*

Demostración. Supongamos que F está contenido en un subespacio cerrado propio de X^*; el Teorema de Hahn-Banach nos da un elemento x^{**} en $S_{X^{**}}$ tal que $x^{**}(x^*) = 0$ para todo $x^* \in F$. Elegimos $\alpha < \beta < 1$ y $z^* \in S_{X^*}$ tales que $\text{Re}\, x^{**}(z^*) > \beta$. Como consecuencia del Teorema de Goldstine (w^*-densidad de B_X en $B_{X^{**}}$), B_X es densa en $B_{X^{**}}$ para la topología de la convergencia puntual sobre el conjunto $F \cup \{z^*\}$, topología que verifica el primer axioma de numerabilidad. Encontramos así una sucesión $\{x_n\}$ en B_X tal que

$$\{x^*(x_n)\} \longrightarrow x^{**}(x^*) = 0 \quad \forall x^* \in F, \qquad \{z^*(x_n)\} \longrightarrow x^{**}(z^*). \tag{1}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{x_n\}$ satisface

$$\text{Re}\, z^*(x_n) \geq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Consideremos ahora la función Φ definida sobre X^* por

$$\Phi(y^*) = \overline{\lim_{n \to \infty}} |y^*(x_n)| \qquad (y^* \in X^*).$$

Es inmediato comprobar que Φ es una función convexa. Veamos que Φ es inferiormente semicontinua para la topología de la norma de X^*; para ello, fijados un $r > 0$ y una sucesión $\{y_n^*\}$ que converja en la topología de la norma a $y^* \in X^*$ verificándose que

$$\Phi(y_n^*) \leq r \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

deberemos comprobar que $\Phi(y^*) \leq r$. Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$ debe existir $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_p^* - y^*\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y, puesto que $\Phi(y_p^*) < r + \frac{\varepsilon}{2}$, existirá también $m \in \mathbb{N}$ tal que $|y_p^*(x_n)| \leq r + \frac{\varepsilon}{2}$ para $n \geq m$. Es claro que, entonces, $|y^*(x_n)| < r + \varepsilon$ para $n \geq m$ de donde,

$$\Phi(y^*) \leq r + \varepsilon,$$

y basta tener en cuenta la arbitrariedad de ε.

En vista de (1), $\Phi(x^*) = 0$ para $x^* \in F$, de donde, claramente, $\Phi(y^*) \leq \alpha$ para $y^* \in F + \alpha B_{X^*}$. Las propiedades de Φ, ya comentadas, y la hipótesis sobre B nos dan:

$$\sup\{\Phi(y^*) : \ y^* \in B\} \leq \alpha.$$

Puesto que B es una frontera para X, podemos aplicar el Teorema 2.1 con $E = B_{X^*}$ y obtenemos que

$$\inf\{\|y\| : \ y \in \mathrm{co}\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}\} \leq \alpha.$$

Esto nos lleva a una contradicción, ya que por (2) se tiene que

$$\|y\| \geq \mathrm{Re}\ z^*(y) \geq \beta > \alpha$$

para $y \in \mathrm{co}\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$. ∎

La demostración del resultado principal de este capítulo se seguirá fácilmente del siguiente lema.

2.8 Lema. *Sea X un espacio de Banach bastante suave y separable. Entonces X^* es separable. De hecho, si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto denso en S_X y x_n^* es un punto arbitrario de $D(x_n)$ para cada n, entonces X^* es la envolvente lineal cerrada (en norma) del conjunto $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$.*

Demostración. Sean $\{x_n\}$ y $\{x_n^*\}$ como en el enunciado. Tomemos

$$F = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}\ , \quad A = \mathrm{co}\left(F + \frac{1}{2}B_{X^*}\right) \quad \text{y} \quad B = A \cap S_{X^*}.$$

Bastará probar que B es una frontera para X y aplicar el lema anterior. Supongamos, por el contrario, que hay algún $x \in S_X$ tal que $B \cap D(x) = \emptyset$, esto es, $A \cap D(x) = \emptyset$. Puesto que A es convexo con interior (en norma) no vacío y $D(x)$ es también convexo, podemos aplicar el Teorema general de separación de conjuntos convexos para encontrar un elemento $x^{**} \in S_{X^{**}}$ tal que

$$\sup\{\mathrm{Re}\ x^{**}(a) : a \in A\} \leq \inf\{\mathrm{Re}\ x^{**}(x^*) : x^* \in D(x)\}$$

y observando la definición de A se obtiene que

$$\mathrm{Re}\ x^{**}(x_n^*) + \frac{1}{2} \leq \inf\{\mathrm{Re}\ x^{**}(x^*) : x^* \in D(x)\} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

así que

$$|x^{**}(x_n^*) - x^{**}(x^*)| \geq \frac{1}{2}$$

para cualesquiera $x^* \in D(x)$ y $n \in \mathbb{N}$. Aplicamos ahora que x es un punto bastante suave en X tomando el entorno de cero en la topología débil de X^*

dado por

$$W = \left\{x^* \in X^* : |x^{**}(x^*)| < \frac{1}{2}\right\}$$

y encontramos un $\delta > 0$ tal que $D(y) \subseteq D(x) + W$ siempre que $y \in S_X$ satisfaga que $\|y - x\| < \delta$. Puesto que $D(x_n) \not\subseteq D(x) + W$, deducimos que $\|x_n - x\| \geq \delta$ para todo n, una contradicción. Así que B es una frontera para X, como se quería probar. ■

Por último necesitamos el siguiente hecho elemental.

2.9 Lema. *Todo subespacio cerrado de un espacio de Banach bastante suave es bastante suave.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach bastante suave e Y un subespacio cerrado suyo. Consideremos $y \in S_Y$ y sea W un entorno débil de cero en Y^*. La aplicación $x^* \mapsto x^*|_Y$, de X^* sobre Y^*, es continua para las topologías débiles, luego

$$W \supseteq \{x^*|_Y : x^* \in V\}$$

donde V es un entorno débil de cero en X^*. Por ser X bastante suave, existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in S_X$, $\|x - y\| < \delta$, entonces

$$D(x, X) \subseteq D(y, X) + V.$$

Se sigue que

$$D(z, Y) \subseteq D(y, Y) + W$$

para $z \in S_X$ con $\|z - y\| < \delta$. ■

Podemos ya probar:

2.10 Teorema. *Todo espacio de Banach bastante suave es un espacio de Asplund.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach bastante suave e Y un subespacio cerrado separable de X. Por el lema anterior, Y es bastante suave y, por el Lema 2.8, Y^* es separable. Basta ahora aplicar el Teorema 2.6. ■

Como ya se ha dicho, Giles-Gregory-Sims planteaban como problema abierto la posible validez del teorema anterior y daban respuesta afirmativa con ciertas hipótesis adicionales [25, Problem 2, Corollary 3.3]. También se han comentado las consecuencias directas que pasamos a enunciar:

2.11 Corolario (Hu-Lin [33, Theorem 10]). *Sea X un espacio de Banach cuya función de dualidad es superiormente semicontinua para la topología débil de X^*, entonces X es un espacio de Asplund.* ■

Conviene resaltar que en el trabajo de Hu-Lin recién citado se prueba también que, para un espacio de Banach bastante suave, ser de Asplund equivale a varias otras propiedades geométricas [33, Theorem 9]. Nuestro Teorema 2.10 establece que tales propiedades no son solamente equivalentes entre sí, sino que ¡todas ellas son ciertas!

2.12 Corolario (Godefroy [26, Proposition 8]). *Sea X un espacio de Banach cuya norma es fuertemente subdiferenciable en todo punto de S_X. Entonces X es un espacio de Asplund.* ■

Para ver que el Teorema 2.10 mejora estrictamente los resultados previamente conocidos, independientes a su vez entre sí, observemos que el Ejemplo 1.18 nos da un espacio de Banach bastante suave que no verifica la hipótesis del Corolario 2.11; c_0 es un espacio de Banach bastante suave con $diam(D(x)) = 2$ para ciertos puntos $x \in S_{c_0}$ (Ejemplo 1.16) y, por tanto, no verifica la hipótesis del citado resultado de Giles-Gregory-Sims. Finalmente, la Proposición 1.20 nos da que cualquier espacio de Banach reflexivo separable, de dimensión infinita, se puede renormar para que no verifique la hipótesis del Corolario 2.12 y en vista de la Proposición 1.3 es siempre bastante suave.

El posible "recíproco" del Teorema 2.10 queda abierto:

2.13 Problema (Giles-Gregory-Sims [25, Problem 3]). *¿Es cierto que todo espacio de Asplund admite una norma equivalente bastante suave?*

Para finalizar el capítulo, haremos notar que el Teorema de James para la bola unidad de un espacio de Banach separable es consecuencia inmediata del Lema 2.7, hecho éste que pone de manifiesto la "no trivialidad" de dicho lema. Supongamos que Y es un espacio de Banach separable tal que, para todo $y^* \in Y^*$, existe $y \in S_Y$ tal que $y^*(y) = \|y^*\|$; hemos de probar que Y es reflexivo. Para ello, consideremos el espacio de Banach $X = Y^*$, tomemos $B = S_Y \subseteq S_{X^*}$ y observemos que, por hipótesis, B es una frontera para X. Si F es cualquier conjunto numerable denso en S_Y, aplicando el Lema 2.7 (¡con $\alpha = 0$!) obtenemos que $X^* = Y^{**}$ es el cierre en la topología de la norma del subespacio engendrado por F, es decir, $Y^{**} = Y$.

Capítulo 3

Función de dualidad y reflexividad.

En este capítulo obtenemos dos caracterizaciones de la reflexividad de un espacio de Banach en términos de propiedades de continuidad de su función de dualidad. Nuestro principal resultado afirma que *todo espacio de Banach dual bastante suave es reflexivo.* De hecho, damos una versión ligeramente más general en la que la hipótesis de ser el espacio dual se sustituye por la de verificar la llamada "propiedad de intersección finita-infinita". Nótese que un espacio reflexivo siempre es bastante suave. Recíprocamente, probamos también que *todo espacio de Banach no reflexivo admite una norma equivalente que no es bastante suave.*

Además de las técnicas desarrolladas en el capítulo anterior, la demostración de las recién mencionadas caracterizaciones de la reflexividad hace uso de una serie de resultados de G. Godefroy y N. Kalton referentes a la llamada "topología de la bola".

3.A. Subespacios normantes. La topología de la bola.

Recordemos el siguiente concepto que se usará constantemente en este capítulo.

3.1 Definición. Sea X un espacio de Banach y N un subespacio de X^*. Se dice que N es un subespacio *normante*, si es cerrado (en la topología de la norma) y satisface que

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B_N\} \qquad \forall x \in X.$$

Equivalentemente, aplicando el Teorema de Hahn-Banach, un subespacio cerrado N de X^* es normante si, y sólo si, B_N es débil-$*$-densa en B_{X^*}. Notaremos N_X a la intersección de todos los subespacios normantes de X^*. En general N_X es un subespacio cerrado de X^*, pero no siempre es normante.

Claramente, si un espacio de Banach X admite un predual N, entonces N es un subespacio normante de X^*. Por tanto, si X es un espacio dual y X^* no contiene subespacios propios normantes, entonces X es reflexivo. Como veremos, la hipótesis de ser dual se puede debilitar, exigiendo solamente la propiedad siguiente:

3.2 Definición. Se dice que un espacio de Banach X tiene la *propiedad de intersección finita-infinita* (en breve, $\mathrm{IP}_{f,\infty}$) si toda familia de bolas cerradas en X, con intersección vacía, contiene una subfamilia finita con intersección vacía.

Usando el Teorema de Banach-Alaoglú, es fácil ver que, si existe una proyección lineal de norma 1 de X^{**} sobre X, entonces X verifica la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$. En particular, todo espacio dual tiene la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$.

El siguiente resultado se debe a G. Godefroy, si bien no aparece explícitamente en ninguno de sus trabajos. Notamos $B_X(x,r)$ a la bola cerrada de centro $x \in X$ y radio $r \geq 0$.

3.3 Lema (Godefroy). *Sea X un espacio de Banach verificando la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$ y tal que X^* no contiene subespacios propios normantes. Entonces X es reflexivo.*

Demostración. Fijemos $x^{**} \in X^{**}$; como consecuencia de tener X la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$ veremos en primer lugar que se verifica

$$\bigcap_{x \in X} B_X(x, \|x^{**} - x\|) \neq \emptyset. \tag{1}$$

Dados $x_1, ..., x_n \in X$, consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{B_X(x_i, \|x^{**} - x_i\| + \varepsilon) : \ i = 1, 2, ..., n, \ \varepsilon > 0\}.$$

Fijado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que

$$\delta\|x^{**} - x_i\| < \varepsilon \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Aplicando el Principio de Reflexividad Local (ver, por ejemplo, [15]) al subespacio E de X^{**} engendrado por $x^{**}, x_1, ..., x_n$ obtenemos una aplicación lineal T de E en X verificando que

$$T(x_i) = x_i \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

$$\|Te\| \leq (1+\delta)\|e\| \quad \forall e \in E.$$

Para $i = 1, 2, ..., n$, se tiene que

$$\|Tx^{**} - x_i\| = \|T(x^{**} - x_i)\| \leq (1+\delta)\|x^{**} - x_i\| \leq \|x^{**} - x_i\| + \varepsilon,$$

luego

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_X(x_i, \|x^{**} - x_i\| + \varepsilon) \neq \emptyset.$$

A partir de ésto, es ya fácil deducir que toda subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía. Aplicando la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$ se tendrá que

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{\varepsilon>0} B_X(x_i, \|x^{**} - x_i\| + \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} B_X(x_i, \|x^{**} - x_i\|).$$

En vista de la arbitrariedad de $x_1, x_2, ..., x_n$, hemos probado que la familia

$$\mathcal{G} = \{B_X(x, \|x^{**} - x\|) : x \in X\}$$

verifica que cualquier subfamilia finita tiene intersección no vacía. De nuevo por la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$ se obtiene (1).

Sea pues $y \in X$ verificando que

$$\|y - x\| \leq \|x^{**} - x\| \qquad \forall x \in X;$$

es claro que también se tiene

$$\|\lambda y - x\| \leq \|\lambda x^{**} - x\| \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \tag{2}$$

y sea $N = \ker(x^{**} - y)$. Para cada $z \in X$, aplicando el Teorema de extensión Hahn-Banach podemos encontrar $z^{**} \in X^{**}$ verificando:

$$z^{**}{}_{|N} = z_{|N}\,, \qquad \|z^{**}\| = \|z_{|N}\|.$$

Puesto que $z^{**} - z$ se anula en $\ker(x^{**} - y)$ existirá un escalar λ tal que

$$z^{**} - z = \lambda(x^{**} - y).$$

Tomando en (2) $x = \lambda y - z = \lambda x^{**} - z^{**}$ obtenemos que

$$\|z\| \leq \|z^{**}\| = \|z_{|N}\|.$$

En vista de la arbitrariedad de z hemos probado que $\ker(x^{**}-y)$ es normante. Puesto que, por hipótesis, X^* no contiene subespacios propios normantes, deducimos que $x^{**} = y \in X$. Como $x^{**} \in X^{**}$ era arbitrario, X es reflexivo.

■

A la vista del lema anterior, el principal resultado de este capítulo se seguirá inmediatamente del hecho de que, si X es un espacio de Banach bastante suave, X^* no contiene subespacios propios normantes. En el caso de que X sea separable, este hecho se deducirá fácilmente de los resultados del capítulo anterior. Sin embargo, eliminar la hipótesis de separabilidad no va a ser fácil. Supuesto que, para todo subespacio separable Y de X, Y^* no contenga subespacios propios normantes, queremos obtener que tampoco X^* contiene subespacios propios normantes. Ello se conseguirá utilizando resultados de Godefroy y Kalton referentes a la topología que a continuación se define:

3.4 Definición. Dado un espacio de Banach X se define la *topología de la bola*, b_X, como la mínima topología en X para la cual cada bola cerrada es cerrada. En otras palabras, los conjuntos de la forma

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_X(x_i, \rho_i),$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$ y $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n \geq 0$, forman una base de la topología b_X. Nótese que b_X depende esencialmente de la norma que se considere en X; al sustituir la norma de X por otra equivalente, la topología b_X puede cambiar.

En general, la topología de la bola puede no ser compatible con la estructura vectorial del espacio, sin embargo conviene observar para uso posterior que las homotecias son homeomorfismos para la topología de la bola, un hecho evidente.

La relación entre la topología de la bola y los subespacios normantes viene dada por el siguiente resultado.

3.5 Lema (Godefroy-Kalton [27, Theorem 2.4]). *Sea X un espacio de Banach y $x^* \in X^*$.*

(i) *Si $x^*_{|B_X}$ es b_X-continuo, entonces $x^* \in N_X$, es decir, x^* pertenece a todos los subespacios normantes.*

(ii) *Si $x^* \in N_X$ y X es separable, entonces $x^*_{|B_X}$ es b_X-continuo.* ∎

A la vista del lema anterior la reducción al caso separable, a la que nos referíamos anteriormente, quedará resuelta mediante el siguiente enunciado.

3.6 Lema (Godefroy-Kalton [27, Proposition 2.5]). *Sea X un espacio de Banach y $x^* \in X^*$. Si, para cada subespacio cerrado separable Y de X, se verifica que $x^*_{|B_Y}$ es b_Y-continuo, entonces $x^*_{|B_X}$ es b_X-continuo.* ∎

Para nuestra segunda caracterización de la reflexividad usaremos el siguiente lema, último resultado que tomaremos del trabajo de Godefroy-Kalton.

3.7 Lema (Godefroy-Kalton [27, Theorem 8.2]). *Sea X un espacio de Banach y W un subconjunto acotado de X. Supongamos que, para cada norma equivalente en X, W es cerrado en la correspondiente topología de la bola. Entonces W es débilmente compacto.* ■

3.B. Caracterizaciones de la reflexividad.

El estudio de propiedades geométricas de los espacios de Banach que implican reflexividad tiene una larga tradición. Centrándonos en propiedades de diferenciabilidad de la norma, cabe citar el hecho de que un espacio de Banach dual con norma Fréchet-diferenciable es reflexivo, un resultado bien conocido que algunas veces ha sido atribuido a V. Šmulian, pero probablemente se debe a K. Fan e I. Glicksberg [20, Theorem 3] (V. Šmulian demostró que si las normas de X y X^* son Fréchet-diferenciables, entonces X es reflexivo [54, Thèoréme 9]). Destaquemos dos generalizaciones conocidas de este resultado:

En primer lugar, J. Diestel [16, Theorem 1 p. 33] prueba que un espacio de Banach dual, muy suave, es reflexivo, y la demostración se puede modificar fácilmente para comprobar que, si la función de dualidad de un espacio de Banach dual X es superiormente semicontinua para la topología débil de X^*, entonces X es reflexivo. En particular, si X es un espacio de Banach bastante suave y su función de dualidad tiene valores débilmente compactos, entonces X es reflexivo, un resultado probado por W. Zhang [60, Theorem 2].

En segundo lugar, Aparicio-Ocaña-Payá-Rodríguez [2] demostraron que un espacio de Banach dual, con norma fuertemente subdiferenciable, es reflexivo. Este resultado fue mejorado por G. Godefroy [26], quien demostró que la hipótesis de ser el espacio dual puede debilitarse, exigiendo solamente la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$.

Pasamos ya a establecer el principal resultado del presente capítulo que, como se verá, engloba y generaliza los recién mencionados.

3.8 Teorema. *Un espacio de Banach es reflexivo si, y sólo si, es bastante suave y satisface la propiedad de intersección finita-infinita.*

Demostración. Es claro que todo espacio de Banach reflexivo es bastante suave y tiene la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$. Para obtener el recíproco, en vista del Lema 3.3, bastará probar que si X es un espacio de Banach bastante suave entonces X^* no contiene subespacios propios normantes. Empezamos por el caso separable.

Sea pues X un espacio de Banach separable, bastante suave, y $N \subseteq X^*$ un subespacio normante. Sea $x \in S_X$ un punto suave en X, x^* el único elemento de $D(x)$ y, usando que N es normante, tomemos una sucesión $\{y_n^*\}$ en B_N tal que $y_n^*(x) \to 1$. Aplicando la Proposición 1.7, obtenemos que $\{y_n^*\}$ converge a x^* en la topología débil de X^*, luego $x^* \in N$.

Por el Teorema 2.10, X es un espacio de Asplund, luego existe una sucesión $\{x_n\}$, cuyos términos forman un conjunto denso en S_X, tal que x_n

es un punto suave para cada $n \in \mathbb{N}$ (alternativamente se podría usar aquí el Teorema de Mazur). Si llamamos x_n^* al único elemento de $D(x_n)$, sabemos ya que $x_n^* \in N$ para todo natural . Por otra parte, aplicando directamente el Lema 2.8, tenemos que X^* es la envolvente lineal cerrada del conjunto $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, luego $X^* = N$, como queríamos.

Sea ya X un espacio de Banach bastante suave arbitrario, $x^* \in X^*$ y veamos que x^* pertenece a cualquier subespacio normante, esto es, $x^* \in N_X$. Si Y es un subespacio cerrado separable de X, Y es bastante suave (Lema 2.9) luego, por lo ya demostrado, Y^* no contiene subespacios propios normantes, esto es $Y^* = N_Y$. Por el Lema 3.5(ii) $x^*{}_{|B_Y}$ es continuo para la topología de la bola b_Y. En vista de la arbitrariedad de Y podemos aplicar el Lema 3.6 para obtener que $x^*{}_{|B_X}$ es continuo para la topología b_X. Aplicando ahora el Lema 3.5(i) tenemos que $x^* \in N_X$, como queríamos. ■

3.9 Corolario. *Todo espacio de Banach dual bastante suave es reflexivo.* ■

Como ya se ha dicho, el anterior resultado, con hipótesis adicionales, ha sido obtenido en [60, Theorem 2] y también se ha comentado la siguiente consecuencia directa del Teorema 3.8.

3.10 Corolario [26] [2, Corollary 3.5]. *Si X es un espacio de Banach cuya norma es fuertemente subdiferenciable y tiene la propiedad $\mathrm{IP}_{f,\infty}$ entonces X es reflexivo. En particular, si X es un espacio de Banach dual, con norma fuertemente subdiferenciable, entonces X es reflexivo.* ■

Resaltemos, por último, el hecho de que el Teorema 3.8 mejora este último resultado, debilitando la hipótesis hasta encontrar una condición que no sólo es suficiente para la reflexividad sino también necesaria.

Nuestra segunda caracterización de la reflexividad es una consecuencia fácil del Lema 3.7.

3.11 Teorema. *Un espacio de Banach X es reflexivo si, y sólo si, cualquier norma equivalente sobre X es bastante suave. Es decir, todo espacio de Banach no reflexivo admite una norma equivalente que no es bastante suave.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach tal que toda norma equivalente en X es bastante suave. Por el Teorema de Eberlein, basta probar que todo subespacio separable de X es reflexivo. Ahora bien, puesto que toda norma equivalente en un subespacio de X se extiende a una norma equivalente de X, el Lema 2.9 nos dice que toda norma equivalente en cualquier subespacio de X es bastante suave. En suma, podemos suponer que X es separable.

Fijemos una norma $\|\cdot\|$ en X que genere su topología. Como en el Teorema 3.8, sabemos que X^* no contiene subespacios propios normantes. Aplicando el Lema 3.5(ii) obtenemos que la restricción a B_X de cualquier elemento de X^* es continua para la topología de la bola b_X, luego la topología inducida en B_X por la débil de X está contenida en la inducida por b_X, pero la otra inclusión es obvia. Así pues, ambas topologías coinciden en B_X y, puesto que las homotecias son homeomorfismos para ambas, también coinciden en cada subconjunto acotado de X. Deducimos que cada subconjunto débilmente cerrado y acotado de X es b_X-cerrado para cualquier norma equivalente en X (no se olvide que b_X depende de la norma concreta elegida) y aplicamos el Lema 3.7 para obtener que todo subconjunto débilmente cerrado y acotado de X es débilmente compacto, es decir, X es reflexivo. ■

Este teorema mejora el obtenido por Hu-Lin [33, Theorem 11, (1) $\Leftrightarrow$ (3)], según el cual, X es reflexivo si, y sólo si, para cualquier norma equivalente sobre X, la función de dualidad es superiormente semicontinua para la topología débil de X^*.

Capítulo 4

La función de dualidad de una C^*-álgebra.

Dedicamos este capítulo al estudio de algunas propiedades de continuidad de la función de dualidad de una C^*-álgebra (que siempre se considerará definida sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$). En la primera sección recogemos algunos conceptos y resultados de la teoría de C^*-álgebras que usaremos más adelante. En las siguientes secciones caracterizamos algebraicamente los puntos de una C^*-álgebra donde la norma es fuertemente subdiferenciable, que veremos coinciden con los puntos bastante suaves, resultado que nos permitirá describir las C^*-álgebras con norma fuertemente subdiferenciable como aquellas que son una c_0-suma de álgebras de operadores compactos sobre espacios de Hilbert y obtendremos, por último, una caracterización geométrica de las C^*-álgebras que pertenecen a una interesante clase de anillos, la de los llamados "I-anillos".

4.A. Algunas notas sobre C^*-álgebras.

En lo que sigue recordamos algunos conceptos y resultados básicos de la teoría general de C^*-álgebras que se usarán, explícita o implícitamente, en el presente capítulo. Este breve repaso nos permitirá fijar la notación que vamos a utilizar y facilitará las referencias. En líneas generales, toda la información que aquí se da queda sobradamente cubierta por el texto de G. Pedersen [48], sin perjuicio de que, para algunas cuestiones concretas, demos otra referencia que nos parezca más apropiada.

4.1 Definición. Una *C^*-álgebra* es un álgebra de Banach compleja, $\mathcal{A}$, dotada con una involución, $*$, que es multiplicativa

$$(ab)^* = b^*a^* \qquad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

y verifica la llamada *propiedad estelar:*

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

La involución de una C^*-álgebra es siempre isométrica:

$$\|a\| = \|a^*\| \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Un subconjunto $\mathcal{B}$ de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es *autoadjunto* cuando $b^* \in \mathcal{B}$ para todo $b \in \mathcal{B}$. Una subálgebra cerrada y autoadjunta $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, con producto, norma e involución heredados de $\mathcal{A}$, es también una C^*-álgebra. Decimos que $\mathcal{B}$ es una *C^*-subálgebra* de $\mathcal{A}$.

Si L es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff, notaremos $C_0(L)$ al álgebra de Banach de las funciones complejas continuas en

L que se anulan en el infinito. $C_0(L)$ es una C^*-álgebra conmutativa con involución dada por

$$f^*(t) = \overline{f(t)} \qquad (t \in L,\ f \in C_0(L)).$$

Si H es un espacio de Hilbert complejo, el álgebra de Banach $L(H)$ de los operadores lineales continuos en H, con involución dada por $T \mapsto T^*$, donde T^* es el operador adjunto de $T \in L(H)$, es una C^*-álgebra. Destacamos la C^*-subálgebra $K(H)$ formada por los operadores compactos. $K(H)$ es conmutativa sólo si H es unidimensional.

Si una C^*-álgebra $\mathcal{A} \neq \{0\}$ tiene unidad, diremos que $\mathcal{A}$ es *unital*, la unidad se notará siempre por $\mathbf{1}$ y se verifica que $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ y $\|\mathbf{1}\| = 1$. $C_0(L)$ es unital si, y sólo si, L es compacto, en cuyo caso $C_0(L) = C(L)$ es la C^*-álgebra de todas las funciones continuas en L. $L(H)$ siempre es unital y $K(H)$ lo es si, y sólo si, H tiene dimensión finita.

4.2 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra sin unidad y sea $\tilde{\mathcal{A}}$ la unitización de $\mathcal{A}$. Entonces $\tilde{\mathcal{A}}$ es una C^*-álgebra unital con involuvión y norma dadas por*

$$(a + \lambda\mathbf{1})^* = a^* + \overline{\lambda}\mathbf{1}, \quad \|a + \lambda\mathbf{1}\| = \sup_{b \in B_{\mathcal{A}}} \|ab + \lambda b\| \quad (a \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

En el caso de que $\mathcal{A}$ sea ya unital, se entenderá que $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. ■

El *espectro* de un elemento a de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ se denotará por $\mathrm{sp}(a, \mathcal{A})$, o simplemente $\mathrm{sp}(a)$ si no hay lugar a confusión. Concretamente,

$\mathrm{sp}(a)$ es el conjunto de los números complejos λ tales que $\lambda\mathbf{1} - a$ no es inversible en $\tilde{\mathcal{A}}$. Recordemos que $\mathrm{sp}(a)$ es un subconjunto compacto, no vacío, de $\mathbb{C}$; la fórmula de Gelfand-Beurling para el radio espectral afirma que

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(a)\} = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \quad (a \in \mathcal{A}).$$

Cuando a es un elemento *normal*, $a^*a = aa^*$, se sigue que

$$\max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{sp}(a)\} = \|a\|.$$

Si u es un elemento *unitario* de $\mathcal{A}$, $u^*u = uu^* = \mathbf{1}$, el espectro de u está contenido en la circunferencia unidad. Si $a \in \mathcal{A}$ es *autoadjunto*, $a^* = a$, entonces $\mathrm{sp}(a) \subseteq \mathbb{R}$. Finalmente, si $\mathcal{A}$ es una C^*-subálgebra de otra C^*-álgebra $\mathcal{B}$, se tiene

$$\mathrm{sp}(a, \mathcal{A}) \setminus \{0\} = \mathrm{sp}(a, \mathcal{B}) \setminus \{0\} \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

El siguiente enunciado supone una perfecta descripción de todas las C^*-álgebras conmutativas. Recordemos que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son C^*-álgebras, un $*$-homomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ es un homomorfismo de álgebras Φ tal que

$$\Phi(a^*) = \Phi(a)^* \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Se verifica entonces que

$$\|\Phi(a)\| \leq \|a\| \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

En particular los $*$-isomorfismos son isométricos.

4.3 Teorema (de Gelfand-Naimark conmutativo). *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra conmutativa y sea L el conjunto de los funcionales lineales multiplicativos de $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$.*

(i) *$L \subseteq S_{\mathcal{A}^*}$ y, con la topología inducida por la débil-$*$ de $\mathcal{A}^*$, L es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff.*

Para cada $a \in \mathcal{A}$, sea $\hat{a}$ la transformada de Gelfand de a, es decir, $\hat{a} : L \longrightarrow \mathbb{C}$ viene dada por

$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a) \qquad (\varphi \in L).$$

(ii) *La aplicación $a \longmapsto \hat{a}$ es un $*$-isomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre la C^*-álgebra $C_0(L)$. Se tiene*

$$\hat{a}(L) \setminus \{0\} = \mathrm{sp}(a) \setminus \{0\} \qquad \forall a \in \mathcal{A}.$$

■

En el caso de la C^*-álgebra conmutativa engendrada por un sólo elemento, a, es fácil ver que el espacio localmente compacto L del teorema anterior se identifica con $\mathrm{sp}(a) \setminus \{0\}$ con la topología inducida por la usual de $\mathbb{C}$. Tenemos por tanto:

4.4 Corolario (Calculo funcional continuo). *Sea a un elemento normal de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, sea $\mathcal{B}$ la C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$ engendrada por a, y sea $L = \mathrm{sp}(a) \setminus \{0\}$. Entonces existe un único $*$-isomorfismo $\Phi : C_0(L) \longrightarrow \mathcal{B}$, tal que $\Phi(x_1) = a$ donde $x_1(t) = t$ para todo $t \in L$.*

Φ recibe el nombre de cálculo funcional continuo en el elemento a. Para $x \in C_0(L)$ se suele escribir

$$x(a) := \Phi(x).$$

Se verifica que

$$\mathrm{sp}(x(a)) \setminus \{0\} = x(L) \setminus \{0\}.$$

■

4.5 Definición. Se dice que un elemento de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es *positivo* si es autoadjunto y su espectro está contenido en el conjunto de los números reales no negativos. El conjunto, $Pos(\mathcal{A})$, de los elementos positivos de $\mathcal{A}$, es un cono convexo cerrado, verificando que $Pos(\mathcal{A}) \cap (-Pos(\mathcal{A})) = \{0\}$, luego si para dos elementos autoadjuntos $a, b \in \mathcal{A}$ definimos

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad b - a \in Pos(\mathcal{A})$$

se obtiene un orden en el conjunto de los elementos autoadjuntos de $\mathcal{A}$ compatible con su estructura de espacio vectorial real.

Usando el cálculo funcional continuo, es fácil ver que para $a \in Pos(\mathcal{A})$ existe un único $b \in Pos(\mathcal{A})$ tal que $b^2 = a$. Se dice que b es la *raíz cuadrada positiva* de a y se escribe $b = a^{1/2}$. Es claro que $\|a^{1/2}\| = \|a\|^{1/2}$.

4.6 Lema. *Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra y $a \in \mathcal{A}$ entonces a^*a es positivo.* ■

Podemos así introducir el siguiente concepto:

4.7 Definición. Para un elemento a de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ se define el *valor absoluto* de a, y se nota por $|a|$, como la única raíz cuadrada positiva del elemento a^*a:

$$|a| = (a^*a)^{1/2}.$$

Es claro que $\|\,|a|\,\| = \|a\|$.

Hasta aquí los conceptos y resultados de la teoría elemental de C^*-álgebras que vamos a utilizar. Dando, no lo negamos, un gran salto en el vacío, comentamos ahora otra serie de resultados que no se pueden calificar ya de elementales pero que nos serán igualmente necesarios.

El bidual de una C^*-álgebra tiene una estructura de C^*-álgebra que está determinada en forma única si se exigen ciertas condiciones completamente naturales:

4.8 Teorema. *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra. Existe un único producto y una única involución en el espacio de Banach $\mathcal{A}^{**}$, con los cuales $\mathcal{A}^{**}$ se convierte en una C^*-álgebra, verificando las siguientes condiciones:*

(i) *La inyección canónica de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{A}^{**}$ es un $*$-homomorfismo, es decir, el producto y la involución de $\mathcal{A}^{**}$ extienden a los de $\mathcal{A}$.*

(ii) *La involución de $\mathcal{A}^{**}$ es débil-$*$ continua.*

(iii) *El producto de $\mathcal{A}^{**}$ es separadamente continuo para la topología débil-$*$.*

■

Una demostración clásica de este resultado puede verse en el texto de S. Sakai [50, Theorems 1.17.2, 1.7.8]. Otra demostración, quizás más elegante, se basa en el Teorema de Vidav-Palmer [7, Theorem 12.5]. El producto de $\mathcal{A}^{**}$ es el llamado *producto de Arens*, definible en el bidual de cualquier álgebra de Banach, con la agradable particularidad de que las C^*-álgebras son Arens-regulares (los dos posibles productos de Arens coinciden). En cuanto a la involución de $\mathcal{A}^{**}$, no es otra que la doble transpuesta de la de $\mathcal{A}$.

4.9 Definición. Si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra, la estructura de $\mathcal{A}^{**}$ permite ver $\mathcal{A}^*$ como un $\mathcal{A}^{**}$-bimódulo. Para ello, dados $\varphi \in \mathcal{A}^*$, $u \in \mathcal{A}^{**}$, basta definir

$$[\varphi u](a) := [ua](\varphi) \quad \text{y} \quad [u\varphi](a) := [au](\varphi) \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

Notemos que

$$\|\varphi u\| = \sup_{a \in B_{\mathcal{A}}} [ua](\varphi) \leq \|u\| \, \|\varphi\|$$

y análogamente $\|u\varphi\| \leq \|u\| \, \|\varphi\|$, para cualesquiera $\varphi \in \mathcal{A}^*$, $u \in \mathcal{A}^{**}$.

La descomposición polar de un elemento de una C^*-álgebra se consigue con facilidad aprovechando la estructura de C^*-álgebra del bidual. Conviene previamente recordar algunos conceptos.

4.10 Definición. Una *proyección* en una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, es un idempotente autoadjunto, es decir, un elemento $p \in \mathcal{A}$ tal que

$$p^2 = p = p^*.$$

El orden entre proyecciones tiene una fácil caracterización; si p y q son proyecciones, se tiene

$$p \leq q \quad \Leftrightarrow \quad pq = p \quad \Leftrightarrow \quad qp = p.$$

Se dice que $v \in \mathcal{A}$ es una *isometría parcial* si v^*v es una proyección. Es fácil probar que, entonces, $vv^*v = v$, luego vv^* también es una proyección y v^* es una isometría parcial.

4.11 Teorema. *Sea* a *un elemento de una* C^**-álgebra* $\mathcal{A}$*. Existe una isometría parcial* $u \in \mathcal{A}^{**}$ *tal que*

$$a = u|a|, \qquad |a| = u^*a.$$

Si se exige que u^*u *sea la mínima proyección en* $\mathcal{A}^{**}$ *tal que* $u^*u|a| = |a|$ *entonces* u *es única. Se dice entonces que* $a = u|a|$ *es la descomposición polar de* a*.* ∎

Sólo nos queda presentar el concepto de proyección abierta en el bidual de una C^*-álgebra y explicar su utilidad. Empezaremos motivándolo en el caso conmutativo.

Sea L un espacio localmente compacto de Hausdorff y Ω un subconjunto abierto de L. La función característica de Ω puede considerarse, a todos los efectos, como un elemento de $C_0(L)^{**}$; de hecho, igual ocurre con cualquier función Borel-medible y acotada en L. La manera más fácil de explicar ésto involucra el Teorema de representación de Riesz, según el cual, $C_0(L)^*$ se identifica con el espacio de Banach $M(L)$ de las medidas de Borel complejas regulares en L con la norma de la variación total.

4.12 Proposición. *Sea* L *un espacio localmente compacto de Hausdorff y consideremos la* C^**-álgebra* $\mathcal{B}(L)$ *de las funciones Borel-medibles y acotadas en* L*. Para* $f \in \mathcal{B}(L)$ *definimos* $\Phi(f) \in C_0(L)^{**} \equiv M(L)^*$ *por*

$$\Phi(f)(\mu) = \int_L f d\mu \qquad (\mu \in M(L)).$$

Entonces Φ *es un* $*$*-homomorfismo isométrico de* $\mathcal{B}(L)$ *en* $C_0(L)^{**}$*, que extiende a la inyección canónica de* $C_0(L)$ *en su bidual.* ∎

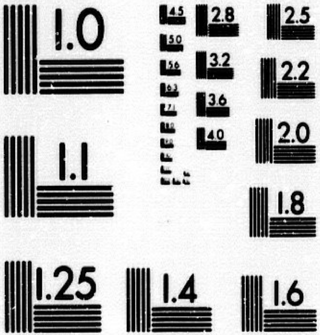
La demostración de que Φ es un $*$-homomorfismo (claramente isométrico) es un sencillo ejercicio, bien usando la definición del producto de Arens y la involución de $C_0(L)^{**}$, bien teniendo en cuenta que $C_0(L)$ es débil-$*$ denso en $C_0(L)^{**}$ y las propiedades de continuidad de dicho producto e involución para la topología débil-$*$. Así pues, identificando $\mathcal{B}(L)$ con su imagen mediante Φ podemos usar libremente la doble inclusión:

$$C_0(L) \subseteq \mathcal{B}(L) \subseteq C_0(L)^{**}.$$

Si ahora χ_Ω es la función característica de un abierto $\Omega \subseteq L$, es claro que χ_Ω es una proyección en $C_0(L)^{**}$. Vamos a ver que χ_Ω tiene una propiedad adicional que, de hecho, caracteriza a las proyecciones de este tipo. Usando el Lema de Urysohn, no es difícil construir una red creciente $\{x_\lambda\}$ de funciones no negativas de $C_0(L)$ que converge puntualmente a χ_Ω. Por el Teorema de Dini, la red $\{x_\lambda\}$ converge uniformemente a 1 en cada subconjunto compacto de Ω. Se sigue fácilmente, usando la regularidad de los elementos de $M(L)$, que $\{x_\lambda\}$ converge a χ_Ω en la topología débil-$*$ de $C_0(L)^{**}$. En suma, χ_Ω es límite débil-$*$ de una red creciente de elementos positivos de $C_0(L)$. Recíprocamente, sea p una proyección en $C_0(L)^{**}$ y $\{x_\lambda\}$ una red creciente de elementos positivos de $C_0(L)$ que converja a p en la topología débil-$*$ de $C_0(L)^{**}$. Se comprueba sin dificultad que, por ser p una proyección, para cada $t \in L$ la red $\{x_\lambda(t)\}$ converge a cero o a uno. Llamando

$$\Omega = \{t \in L : \{x_\lambda(t)\} \to 1\},$$

por ser $\{x_\lambda\}$ una red creciente, se obtiene que Ω es un subconjunto abierto de L y claramente la red $\{x_\lambda\}$ converge puntualmente a χ_Ω. El mismo argumento empleado anteriormente muestra que, de hecho, la red $\{x_\lambda\}$ converge a χ_Ω en la topología débil-$*$ de $C_0(L)^{**}$, luego $p = \chi_\Omega$.



MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

La demostración de que Φ es un $*$-homomorfismo (claramente isométrico) es un sencillo ejercicio, bien usando la definición del producto de Arens y la involución de $C_0(L)^{**}$, bien teniendo en cuenta que $C_0(L)$ es débil-$*$ denso en $C_0(L)^{**}$ y las propiedades de continuidad de dicho producto e involución para la topología débil-$*$. Así pues, identificando $\mathcal{B}(L)$ con su imagen mediante Φ podemos usar libremente la doble inclusión:

$$C_0(L) \subseteq \mathcal{B}(L) \subseteq C_0(L)^{**}.$$

Si ahora χ_Ω es la función característica de un abierto $\Omega \subseteq L$, es claro que χ_Ω es una proyección en $C_0(L)^{**}$. Vamos a ver que χ_Ω tiene una propiedad adicional que, de hecho, caracteriza a las proyecciones de este tipo. Usando el Lema de Urysohn, no es difícil construir una red creciente $\{x_\lambda\}$ de funciones no negativas de $C_0(L)$ que converge puntualmente a χ_Ω. Por el Teorema de Dini, la red $\{x_\lambda\}$ converge uniformemente a 1 en cada subconjunto compacto de Ω. Se sigue fácilmente, usando la regularidad de los elementos de $M(L)$, que $\{x_\lambda\}$ converge a χ_Ω en la topología débil-$*$ de $C_0(L)^{**}$. En suma, χ_Ω es límite débil-$*$ de una red creciente de elementos positivos de $C_0(L)$. Recíprocamente, sea p una proyección en $C_0(L)^{**}$ y $\{x_\lambda\}$ una red creciente de elementos positivos de $C_0(L)$ que converja a p en la topología débil-$*$ de $C_0(L)^{**}$. Se comprueba sin dificultad que, por ser p una proyección, para cada $t \in L$ la red $\{x_\lambda(t)\}$ converge a cero o a uno. Llamando

$$\Omega = \{t \in L : \{x_\lambda(t)\} \to 1\},$$

por ser $\{x_\lambda\}$ una red creciente, se obtiene que Ω es un subconjunto abierto de L y claramente la red $\{x_\lambda\}$ converge puntualmente a χ_Ω. El mismo argumento empleado anteriormente muestra que, de hecho, la red $\{x_\lambda\}$ converge a χ_Ω en la topología débil-$*$ de $C_0(L)^{**}$, luego $p = \chi_\Omega$.

Queda motivado el siguiente concepto.

4.13 Definición. Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y Q una proyección en $\mathcal{A}^{**}$. Diremos que Q es una *proyección abierta* si existe una red creciente de elementos positivos en $\mathcal{A}$ que converge a Q en la topología débil-$*$ de $\mathcal{A}^{**}$. Nótese que, si $\mathcal{B}$ es una C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$, mediante la identificación $\mathcal{B}^{**} \equiv \mathcal{B}^{oo} \subseteq \mathcal{A}^{**}$ toda proyección abierta en $\mathcal{B}^{**}$ lo es en $\mathcal{A}^{**}$.

Nuestra discusión previa se resume en el siguiente enunciado.

4.14 Proposición. *Sea L un espacio localmente compacto de Hausdorff. Las proyecciones abiertas de $C_0(L)^{**}$ son las funciones características de los subconjuntos abiertos de L.* ∎

Recordemos que existe una biyección entre los ideales cerrados de $C_0(L)$ y los subconjuntos abiertos de L (o las proyecciones abiertas en $C_0(L)^{**}$), cada abierto $\Omega \subseteq L$ se corresponde con el ideal formado por las funciones que se anulan en $L \setminus \Omega$. La siguiente proposición generaliza este hecho al caso de una C^*-álgebra arbitraria.

4.15 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra. La aplicación*

$$Q \longrightarrow \mathcal{A}^{**}Q \cap \mathcal{A}$$

establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las proyecciones abiertas en $\mathcal{A}^{**}$ y los ideales izquierdos cerrados de $\mathcal{A}$. ∎

La demostración de este resultado puede verse en [48, 3.10.7, 3.10.11]. Sin embargo, sólo usaremos que, si Q es una proyección abierta no nula en $\mathcal{A}^{**}$, entonces $\mathcal{A}^{**}Q \cap \mathcal{A}$ es un ideal izquierdo cerrado, no nulo, de $\mathcal{A}$, y esto es casi evidente.

4.B. Puntos de subdiferenciabilidad fuerte y bastante suaves.

En la presente sección vamos a caracterizar en términos algebraicos los puntos donde la norma de una C^*-álgebra es fuertemente subdiferenciable que, como veremos, coinciden con los puntos bastante suaves.

Tratemos previamente el caso conmutativo, bastante sencillo y orientativo.

4.16 Proposición. *Sea L un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff, x un punto de la esfera unidad de $C_0(L)$ y consideremos el conjunto compacto*

$$K_x = \{t \in L : \ |x(t)| = 1\}.$$

Entonces:

(a) *$D(x)$ es el cierre en la topología débil-$*$ de la envolvente convexa del conjunto*

$$\left\{\overline{x(t)}\delta_t : \ t \in K_x\right\},$$

donde, para $t \in L$, δ_t es el funcional de evaluación en el punto t.

(b) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *La norma de* $C_0(L)$ *es fuertemente subdiferenciable en* x.

(ii) x *es un punto bastante suave en* $C_0(L)$.

(iii) $\sup\{|x(t)| : t \in L \setminus K_x\} < 1$, *equivalentemente,* K_x *es abierto.*

Demostración. (a). Es bien conocido que el conjunto de los puntos extremos de $B_{C_0(L)^*}$ es

$$\{\lambda\delta_t : |\lambda| = 1, \ t \in L\}.$$

Notemos que uno de estos puntos extremos $\lambda\delta_t$ pertenece a $D(x)$ si, y sólo si, $t \in K_x$ y $\lambda = \overline{x(t)}$. Teniendo en cuenta que $D(x)$ es un subconjunto extremo de $B_{C_0(L)^*}$ y, por tanto, los puntos extremos de $D(x)$ también lo son de $B_{C_0(L)^*}$, basta aplicar el Teorema de Krein-Milman al conjunto convexo y débil-$*$ compacto $D(x)$.

(b). (i) $\Rightarrow$ (ii). Evidente.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Razonando por reducción al absurdo supongamos que existe una sucesión $\{t_n\}$ en $L \setminus K_x$ tal que $|x(t_n)| \to 1$. Poniendo

$$\varphi_n = \overline{x(t_n)}\delta_{t_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

se obtiene una sucesión $\{\varphi_n\}$ en $B_{C_0(L)^*}$ tal que $\{\varphi_n(x)\} \to 1$. Llegaremos a contradicción encontrando un entorno de cero U en la topología débil de $C_0(L)^*$ tal que

$$\varphi_n \notin D(x) + U$$

para n suficientemente grande (Proposición 1.7). Para cada natural n, el Lema de Urysohn nos permite encontrar una función y_n en $C_0(L)$ tal que

$$y_n(t_k) = 1 \quad \text{para } k = 1, 2, ..., n, \qquad y_n(K_x) = \{0\}, \qquad 0 \leq y_n \leq 1.$$

Sea F un valor adherente a la sucesión $\{y_n\}$ en la topología débil-$*$ de $C_0(L)^{**}$. Si $\xi \in D(x)$, tenemos que $\xi(y_n) = 0$ para todo n, así que $F(\xi) = 0$. Por otro lado, fijado un natural n se tiene $y_k(t_n) = 1$ para $k \geq n$, luego $F(\delta_{t_n}) = 1$ y $F(\varphi_n) = \overline{x(t_n)}$. Así pues $\{|F(\varphi_n)|\} \to 1$ y basta tomar

$$U = \left\{\varphi \in C_0(L)^* : \ |F(\varphi)| < \frac{1}{2}\right\}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Sea ε un número real positivo y tomemos

$$\delta = \min\{\varepsilon, 1 - \sup\{|x(t)| : \ t \in L \setminus K_x\}\}.$$

Para $y \in S_{C_0(L)}$, con $\|y - x\| < \delta$, es claro que $K_y \subseteq K_x$ y, tomando un punto arbitrario $t \in K_y$, tenemos que $\overline{x(t)}\delta_t \in D(x)$, $\overline{y(t)}\delta_t \in D(y)$, luego

$$dist(D(y), D(x)) \leq \left|\overline{y(t)} - \overline{x(t)}\right| < \varepsilon,$$

con lo que basta aplicar la Proposición 1.12 ((iii) $\Rightarrow$ (iv)). ■

Para que se comprenda la extensión del resultado anterior al caso no conmutativo, piénsese que la condición (iii) equivale a que el espectro de la función $|x|$ tenga a 1 como punto aislado, mientras que, cuando el compacto K_x es también abierto, su función característica es una proyección p en $C_0(L)$ tal que

$$p|x| = p \quad \text{y} \quad \|\,|x| - p\| < 1,$$

afirmación que tiene perfecto sentido en caso no conmutativo. Iniciamos pues el camino hacia una versión general de la proposición anterior, cuyo contenido se puede ya adivinar en gran parte.

El siguiente lema técnico mejora ligeramente un resultado de K. Taylor y W. Werner [56, Lemma 2.7]. La demostración, una aplicación directa de la propiedad estelar, está inspirada en el argumento de dichos autores. Recuérdese que el dual $\mathcal{A}^*$ de una C^*-álgebra tenía una estructura natural de $\mathcal{A}^{**}$-bimódulo (Definición 4.9).

4.17 Lema. *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra, $\varphi \in \mathcal{A}^*$ y p una proyección en $\mathcal{A}^{**}$. Entonces se verifican las siguientes desigualdades*

$$\|\varphi p\|^2 + \|\varphi - \varphi p\|^2 \leq \|\varphi\|^2,$$

$$\|p\varphi\|^2 + \|\varphi - p\varphi\|^2 \leq \|\varphi\|^2.$$

Demostración. Evidentemente podemos suponer que $\|\varphi\| = 1$. Sean α y β números reales positivos y tomemos $a, b \in S_{\mathcal{A}}$. Aplicando la igualdad estelar se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha \mathrm{Re}\ (\varphi p)(a) + \beta \mathrm{Re}\ (\varphi - \varphi p)(b) &= \mathrm{Re}\ [\alpha pa + \beta(b - pb)](\varphi) \\
&\leq \|\alpha pa + \beta(b - pb)\| \\
&= \|\alpha^2 a^* pa + \beta^2(b^* b - b^* pb)\|^{1/2} \\
&\leq (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Tomando supremo en el primer miembro en $a, b \in S_{\mathcal{A}}$ se tendrá que:

$$\alpha\|\varphi p\| + \beta\|\varphi - \varphi p\| \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.$$

En particular haciendo

$$\alpha = \frac{\|\varphi p\|}{(\|\varphi p\|^2 + \|\varphi - \varphi p\|^2)^{1/2}} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\|\varphi - \varphi p\|}{(\|\varphi p\|^2 + \|\varphi - \varphi p\|^2)^{1/2}}$$

se consigue la primera desigualdad. La segunda se obtiene de forma análoga.

■

La norma de una C^*-álgebra unital es siempre fuertemente subdiferenciable en la unidad. Este es un hecho bien conocido, incluso en ambientes mucho más generales; no obstante su demostración es tan sencilla que no cuesta nada recordarla: si $a \in S_{\mathcal{A}}$, para $\varphi \in D(a)$ se tiene que $\varphi a \in D(\mathbf{1})$, luego

$$dist(D(a), D(\mathbf{1})) \leq \|\varphi - \varphi a\| \leq \|\mathbf{1} - a\|.$$

De hecho, usando el lema anterior, podemos probar algo mejor.

4.18 Lema. *Sea p una proyección no nula en la C^*-álgebra $\mathcal{A}$. Entonces la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en p.*

Demostración. Consideremos la C^*-álgebra $\mathcal{B} = p\mathcal{A}p$ y nótese que p es la unidad de $\mathcal{B}$, luego, por lo ya comentado, la norma de $\mathcal{B}$ es fuertemente subdiferenciable en p. Así pues, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$\xi \in \mathcal{B}^*, \ \mathrm{Re}\, \xi(p) > 1 - \delta \ \Rightarrow \ dist(\xi, D(p, \mathcal{B})) < \varepsilon/2. \tag{1}$$

No hay inconveniente en suponer que $\delta < 1$ y $2\sqrt{2\delta} < \varepsilon/2$. Sea $\varphi \in B_{\mathcal{A}^*}$ con $\mathrm{Re}\, \varphi(p) > 1 - \delta$ y apliquemos (1) con $\xi = \varphi_{|\mathcal{B}}$ para obtener un $\xi' \in D(p, \mathcal{B})$ tal que $\|\xi - \xi'\| < \varepsilon/2$. Definimos entonces

$$\varphi'(a) = \xi'(pap) \qquad (a \in \mathcal{A}).$$

Es claro que $\varphi' \in D(p, \mathcal{A})$ y la demostración se concluirá probando que $\|\varphi - \varphi'\| < \varepsilon$. Observemos en primer lugar que

$$\|p\varphi p - \varphi'\| = \sup_{a \in B_{\mathcal{A}}} \{|(p\varphi p - \varphi')(a)|\} = \sup_{a \in B_{\mathcal{A}}} \{|(\xi - \xi')(pap)|\} = \|\xi - \xi'\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

luego bastará probar que

$$\|\varphi - p\varphi p\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Usando la primera desigualdad del Lema 4.17, junto con el hecho de que $\|\varphi p\| \geq \operatorname{Re} \varphi(p) > 1 - \delta$, se tiene que

$$\|\varphi - \varphi p\|^2 \leq 1 - \|\varphi p\|^2 < 1 - (1 - \delta)^2 < 2\delta.$$

Por otra parte, la segunda desigualdad del Lema 4.17, aplicada al funcional φp, junto con el hecho de que $\|p\varphi p\| \geq \operatorname{Re} \varphi(p) > 1 - \delta$, nos da

$$\|\varphi p - p\varphi p\|^2 \leq 1 - \|p\varphi p\|^2 < 1 - (1 - \delta)^2 < 2\delta.$$

Concluimos finalmente que

$$\|\varphi - p\varphi p\| \leq \|\varphi - \varphi p\| + \|\varphi p - p\varphi p\| < 2\sqrt{2\delta} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

■

Así pues, la norma de una C^*-álgebra que contenga proyecciones no nulas es fuertemente subdiferenciable en algunos puntos de la esfera unidad. El recíproco también es cierto, como se verá más adelante.

Consideremos el hecho (trivial) de que los puntos bastante suaves de un espacio de Banach (resp. los puntos donde la norma es fuertemente subdiferenciable) se conservan por biyecciones lineales isométricas. La multiplicación por un elemento unitario de una C^*-álgebra unital es un caso particular. Nuestro próximo lema muestra que la multiplicación por una isometría parcial también preserva algunos puntos bastante suaves (resp. de subdiferenciabilidad fuerte).

4.19 Lema. *Sea* $\mathcal{A}$ *una* C^**-álgebra,* $a \in S_{\mathcal{A}}$ *y* $v \in \mathcal{A}^{**}$ *una isometría parcial tal que* $va \in \mathcal{A}$ *y* $v^*va = a$*. Si* a *es un punto bastante suave (resp. la norma de* $\mathcal{A}$ *es fuertemente subdiferenciable en* a*) entonces* va *también es bastante suave (resp. la norma de* $\mathcal{A}$ *es fuertemente subdiferenciable en* va*).*

Demostración. Sea U un entorno de cero convexo en la topología débil (resp. de la norma) de $\mathcal{A}^*$, y sea V un entorno de cero en dicha topología tal que, para $\varphi \in V$, se tenga que $\varphi v^* \in U/2$ (la aplicación lineal $\varphi \mapsto \varphi v^*$ es continua en la topología de la norma y, por tanto, también en la débil). Por hipótesis, debe existir un $\delta > 0$ tal que si $\xi \in B_{\mathcal{A}^*}$ y $\operatorname{Re}\xi(a) > 1-\delta$ entonces $\xi \in D(a) + V$. Podemos suponer que $\delta < 1$ y que $\sqrt{2\delta}B_{\mathcal{A}^*} \subseteq U/2$.

Sea $\varphi \in B_{\mathcal{A}^*}$ tal que $\operatorname{Re}\varphi(va) > 1-\delta$. Puesto que $\operatorname{Re}[\varphi v](a) > 1-\delta$ existirá $\xi' \in D(a)$ tal que $\varphi v - \xi' \in V$. Tomando $\varphi' = \xi' v^*$ se tiene que $\|\varphi'\| \leq 1$ y

$$\varphi'(va) = \xi'(v^*va) = \xi'(a) = 1,$$

así que $\varphi' \in D(va)$. Terminaremos la demostración viendo que $\varphi - \varphi' \in U$. En primer lugar, puesto que $\varphi v - \xi' \in V$, se sigue que

$$\varphi vv^* - \varphi' = \varphi vv^* - \xi' v^* \in U/2.$$

Por otro lado, aplicando el Lema 4.17 a la proyección $p = vv^*$, se tiene

$$\|\varphi - \varphi vv^*\|^2 \leq 1 - \|\varphi vv^*\|^2 \leq 1 - |\varphi(vv^*va)|^2 =$$

$$= 1 - |\varphi(va)|^2 \leq 1 - (1-\delta)^2 < 2\delta,$$

por tanto,

$$\varphi - \varphi vv^* \in \sqrt{2\delta} B_{\mathcal{A}^*} \subseteq U/2.$$

Concluimos así que $\varphi - \varphi' \in U$. ■

Obsérvese, que para $a \in S_{\mathcal{A}}$, considerando la descomposición polar

$$a = u|a| \ , \qquad |a| = u^* a$$

tenemos que $uu^*a = a$ y $u^*u|a| = |a|$, luego podemos aplicar el lema anterior, con $v = u^*$ y $v = u$, para obtener el siguiente resultado:

4.20 Proposición. *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y $a \in S_{\mathcal{A}}$.*

(i) *a es bastante suave si, y sólo si, $|a|$ es bastante suave.*

(ii) *La norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en a si, y sólo si, lo es en $|a|$.* ■

Podemos ya establecer el resultado fundamental del presente capítulo:

4.21 Teorema. *Sea $\mathcal{A}$ una C^*-álgebra y $a \in S_{\mathcal{A}}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *La norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en a.*

(ii) *a es un punto bastante suave en $\mathcal{A}$.*

(iii) 1 *es un punto aislado del espectro de* $|a|$.

(iv) *Existe una proyección* $p \in \mathcal{A}$ *tal que*

$$|a|p = p \qquad y \qquad \| \, |a| - p\| < 1.$$

(v) *Existe una isometría parcial* $v \in \mathcal{A}$ *tal que*

$$av^* = vv^* \qquad y \qquad \|a - v\| < 1.$$

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Evidente.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Por la proposición anterior, $|a|$ es bastante suave en $\mathcal{A}$, luego también es bastante suave en la C^*-subálgebra $\mathcal{B}$ que engendra (ver la demostración del Lema 2.9). Teniendo en cuenta la identificación

$$\mathcal{B} \equiv C_0(\mathrm{sp}(|a|) \setminus \{0\})$$

y que $|a|$ se identifica con la función identidad de $\mathrm{sp}(|a|) \setminus \{0\}$ en $\mathbb{C}$ (Corolario 4.4), basta aplicar la Proposición 4.16.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sea $\mathcal{B}$ la C^*-álgebra engendrada por $|a|$, y consideremos nuevamente a los elementos de $\mathcal{B}$ como funciones continuas sobre el espacio localmente compacto $L = \mathrm{sp}(|a|) \setminus \{0\}$ que se anulan en infinito. Basta tomar como p la función característica del conjunto $\{1\}$, que pertenece a $C_0(L)$, ya que, por hipótesis, 1 es un punto aislado de L. Puesto que $|a|$ es la función identidad de L en $\mathbb{C}$, es claro que $|a|p = p$ mientras que:

$$\| \, |a| - p\| = \sup(\mathrm{sp}(|a|) \setminus \{1\}) < 1,$$

donde la última desigualdad se debe también al hecho de que 1 es un punto aislado de $\mathrm{sp}(|a|)$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Sea u la isometría parcial que aparece en la descomposición polar de a y tomemos $v = up$. Puesto que

$$v = u|a|p = ap,$$

tenemos que $v \in \mathcal{A}$. Además

$$v^*v = pu^*up = pu^*u|a|p = pu^*ap = p|a|p = p,$$

así que v es una isometría parcial.

Para ver que v cumple la primera de las condiciones de (v), observemos que

$$av^* = u|a|pu^* = upu^* = vv^*,$$

mientras que, para la segunda condición, puesto que $v^*a = pu^*a = p|a| = p$ y por tanto $a^*v = p$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\|a - v\|^2 &= \|a^*a - a^*v - v^*a + v^*v\| \\ &= \|\,|a|^2 - p\| \\ &= \|\,|a|(|a| - p)\| \leq \|\,|a| - p\| < 1.\end{aligned}$$

(v) $\Rightarrow$ (iv). Tomando $p = v^*v$ tenemos que p es una proyección en $\mathcal{A}$ y

$$p|a|^2p = v^*va^*av^*v = v^*(av^*)^*(av^*)v = v^*(vv^*)(vv^*)v = p.$$

Razonando en la unitización de $\mathcal{A}$, tenemos $p(\mathbf{1} - |a|^2)p = 0$, o lo que es lo mismo, llamando b a la raíz cuadrada positiva del elemento positivo $\mathbf{1} - |a|^2$, $0 = pb^2p = pb(pb)^*$, de donde $pb = 0$ y $p(\mathbf{1} - |a|^2) = pb^2 = 0$. Puesto que $\mathbf{1} + |a|$ es un elemento inversible, se tiene que

$$p(\mathbf{1} - |a|) = p(\mathbf{1} - |a|^2)(\mathbf{1} + |a|)^{-1} = 0.$$

Así pues, $p|a| = p$ y por tanto $|a|p = p$.

Por otro lado, puesto que $\|a - v\| < 1$ y

$$p = p|a|^2 = (v^*vv^*)a = v^*a,$$

tenemos que

$$\| \, |a| - p\|^2 = \|a^*a - p\| = \|a^*a - v^*a\| \leq \|a^* - v^*\| < 1.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i). Para probar (i) demostraremos que la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en $|a|$ y el resultado se seguirá de la Proposición 4.20. Puesto que la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en p (Lema 4.18), vamos a ver que es suficiente probar la igualdad

$$D(|a|) = D(p). \tag{1}$$

Esta observación es válida a nivel completamente general: si x e y son puntos de la esfera unidad de un espacio de Banach verificando que $D(x) = D(y)$, entonces la norma es fuertemente subdiferenciable en x si, y sólo si, lo es en y. La demostración aparece en [22, Proposition 3.1], pero es tan sencilla que podemos reproducirla fácilmente en nuestro caso particular. En efecto, sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión en $B_{\mathcal{A}^*}$ tal que $\varphi_n(|a|) \to 1$; bastará ver que $\varphi_n(p) \to 1$ pues entonces la subdiferenciabilidad fuerte de la norma en p nos dará que

$$dist(\varphi_n, D(|a|)) = dist(\varphi_n, D(p)) \longrightarrow 0.$$

Supongamos por el contrario que $\{\varphi_n(p)\}$ no converge a 1, tomamos una sucesión parcial $\{\varphi_{\sigma(n)}\}$ tal que $\mathrm{Re}\,\varphi_{\sigma(n)}(p) \to \lambda < 1$ y sea φ un valor adherente a $\{\varphi_{\sigma(n)}\}$ en la topología débil-$*$ de $\mathcal{A}^*$. Entonces $\varphi \in D(|a|)$, luego $\varphi(p) = 1$, mientras que $\mathrm{Re}\,\varphi(p) = \lambda$, una contradicción.

Así pues, basta probar la igualdad (1). Notemos $\mathcal{B}$ a la C^*-subálgebra de $\mathcal{A}$ engendrada por $|a|$ y p, en vista del Teorema de Hahn-Banach, bastará probar que

$$D(|a|, \mathcal{B}) = D(p, \mathcal{B}).$$

Ahora, puesto que $\mathcal{B}$ es conmutativa, podemos identificar $\mathcal{B}$ con $C_0(L)$ para conveniente espacio localmente compacto L (Teorema 4.3) y p se convierte en la función característica de un conjunto abierto y cerrado $\Omega \subseteq L$. Por ser $p|a| = p$ tenemos que $|a|(t) = 1$ para $t \in \Omega$, mientras que la condición $\| |a| - p\| < 1$ nos dice que $|a|(t) < 1$ si $t \in L \setminus \Omega$. En suma, se tiene que

$$\{t \in L : \ p(t) = 1\} = \Omega = \{t \in L : \ |a|(t) = 1\},$$

de donde $D(p, C_0(L)) = D(|a|, C_0(L))$ (Proposición 4.16), como se quería. ■

En vista de la equivalencia entre las afirmaciones (i) y (ii) del teorema anterior, en el ambiente de las C^*-álgebras hablaremos a partir de este momento solamente de puntos de subdiferenciabilidad fuerte. La afirmación (iv) nos permite justificar un hecho que ya habíamos anunciado: una C^*-álgebra cuya norma sea fuertemente subdiferenciable en algún punto de la esfera unidad contiene proyecciones no nulas; el recíproco venía ya dado por el Lema 4.18.

En [56] y [57], K. Taylor y W. Werner han obtenido, para la Fréchet-diferenciabilidad de la norma en una C^*-álgebra, resultados paralelos a los dados en el teorema anterior. De hecho, ellos prueban que la norma de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es Fréchet-diferenciable en $a \in S_{\mathcal{A}}$ si, y sólo si, existe una proyección $p \in \mathcal{A}$ tal que

$$|a|p = p, \qquad \| |a| - p\| < 1$$

y p es minimal en $\mathcal{A}^{**}$, equivalentemente, $p\mathcal{A}p = \mathbb{C}p$. El teorema anterior muestra que pasar de la Fréchet-diferenciabilidad a la subdiferenciablidad fuerte repercute solamente en eliminar la minimalidad de p. El caso conmutativo es especialmente clarificador, la norma de $C_0(L)$ es fuertemente subdiferenciable en $x \in S_{C_0(L)}$ cuando

$$\sup\{|x(t)| : |x(t)| < 1\} < 1,$$

la proyección p es la función característica del conjunto abierto y cerrado

$$K_x = \{t \in L : |x(t)| = 1\}$$

y la Fréchet-diferenciabilidad, o la minimalidad de p, se da cuando K_x se reduce a un punto.

Si la norma de $\mathcal{A}$ es Fréchet-diferenciable en un punto a y $\mathcal{B}$ es una C^*-álgebra más grande, entonces la norma de $\mathcal{B}$ no es necesariamente Fréchet-diferenciable en el punto a, pero sí que sigue siendo fuertemente subdiferenciable en a, como muestra la siguiente consecuencia inmediata del teorema anterior.

4.22 Corolario. *Sean $\mathcal{B}$ una C^*-álgebra, $\mathcal{A}$ una C^*-subálgebra de $\mathcal{B}$ y $a \in S_{\mathcal{A}}$. Si la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en a, también lo es la de $\mathcal{B}$.*

Desmotración. Basta recordar que $\operatorname{sp}(|a|, \mathcal{A}) \setminus \{0\} = \operatorname{sp}(|a|, \mathcal{B}) \setminus \{0\}$ y aplicar el teorema anterior. ■

Merece la pena comparar el corolario anterior con otros resultados del mismo tipo que se conocen en el ambiente general de los espacios de Banach.

Dado un subespacio cerrado X de un espacio de Banach Y podemos discutir la posible veracidad de la siguiente afirmación:

$(*)$ Si la norma de X es fuertemente subdiferenciable en un punto $x \in S_X$, también lo es la de Y.

En general $(*)$ está muy lejos de ser cierta (piénsese en el caso en que X es unidimensional). Citaremos dos resultados que dan condiciones suficientes para la veracidad de $(*)$. Giles-Gregory-Sims probaron que $(*)$ se cumple en el caso $Y = X^{**}$ [25, Corollary 2.1]. Por otra parte C. Franchetti y R. Payá [22, Proposition 2.3] prueban que $(*)$ es cierta siempre que X sea un semi-idealoide de Y. No es oportuno dar aquí la definición de semi-idealoide, basta saber que los semi-idealoides de una C^*-álgebra coinciden con sus ideales biláteros cerrados (en [44, Corollary 3.4] se demuestra algo más general). En suma, los resultados que conocemos sobre la veracidad de $(*)$ sólo permiten obtener el corolario anterior en el caso $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{**}$, o bien cuando $\mathcal{A}$ sea un ideal bilátero cerrado de $\mathcal{B}$.

4.C. C^*-álgebras con norma fuertemente subdiferenciable.

A continuación vamos a describir las C^*-álgebras que tienen una norma fuertemente subdiferenciable en todo punto de su esfera unidad. Empezaremos proporcionando abundantes ejemplos de álgebras de este tipo.

Es fácil caracterizar las C^*-álgebras conmutativas con norma fuertemente subdiferenciable. De hecho, se tiene:

4.23 Proposición. *Si* L *es un espacio localmente compacto de Hausdorff, la norma de* $C_0(L)$ *es fuertemente subdiferenciable si, y sólo si,* L *es discreto.*

Demostración. Si L es discreto y $x \in S_{C_0(L)}$, entonces el conjunto $\{t \in L : |x(t)| \geq 1/2\}$ es finito, luego

$$\sup\{|x(t)| : |x(t)| < 1\} < 1,$$

y la norma de $C_0(L)$ es fuertemente subdiferenciable (Proposición 4.16).

Recíprocamente, si L no es discreto, sea Ω un abierto relativamente compacto de L, con infinitos puntos, y sea $\{\Omega_n\}$ una sucesión de abiertos no vacíos, dos a dos disjuntos, contenidos en Ω. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $t_n \in \Omega_n$ y, usando el Lema de Urysohn, sea φ_n una función continua de L en $[0,1]$ tal que $\varphi_n(t_n) = 1$ y $\varphi_n(L \setminus \Omega_n) = \{0\}$. Usando también el Lema de Urysohn construimos una función continua φ de L en $[0,1]$ tal que $\varphi\left(\overline{\Omega}\right) = \{1\}$ y $\varphi \in C_0(L)$. Sea finalmente

$$x(t) = \varphi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\varphi_n(t) \qquad (t \in L);$$

$x \in C_0(L)$, puesto que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\varphi_n$ converge uniformemente (recuérdese que los abiertos Ω_n son disjuntos dos a dos). Es claro que $0 \leq x(t) \leq 1$ para todo $t \in L$ y $x(t_n) = 1 - \frac{1}{n} \to 1$, luego se verifica que $\|x\| = 1$ y

$$\sup\{|x(t)| : |x(t)| < 1\} = 1,$$

es decir, la norma de $C_0(L)$ no es fuertemente subdiferenciable en x. ∎

En ambiente no conmutativo aparece un nuevo ejemplo. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $K(H)$ la C^*-álgebra formada por todos los operadores compactos en H. Es bien sabido que el espectro de un elemento de $K(H)$ tiene a cero como único posible punto de acumulación, luego si $T \in S_{K(H)}$ es positivo, 1 es un punto aislado del espectro de T. Por tanto, la norma de $K(H)$ es fuertemente subdiferenciable. Para obtener nuevos ejemplos, recordemos la noción de c_0-suma de espacios de Banach: dada una familia arbitraria de espacios de Banach $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, llamaremos *$c_0$-suma* de dicha familia, y notaremos $\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)_{c_0}$, al subespacio del producto cartesiano $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ formado por las familias $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tales que, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$\{\lambda \in \Lambda : \|x_\lambda\| \geq \varepsilon\}$$

es finito, que es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\| = \sup\{\|x_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}.$$

La c_0-suma de C^*-álgebras tiene una estructura natural de C^*-álgebra, con producto e involución definidos coordenada a coordenada. Por otra parte, es sabido que la subdiferenciabilidad fuerte de la norma de un espacio de Banach se conserva por c_0-sumas [22, Corollary 2.6]. Así pues, si $\{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia arbitraria de espacios de Hilbert, $\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} K(H_\lambda)\right)_{c_0}$ es una C^*-álgebra con norma fuertemente subdiferenciable. A la familia de tales C^*-álgebras la notaremos en lo que sigue por $\mathcal{F}$. Obsérvese que el caso conmutativo queda englobado aquí, ya que si L es un espacio topológico discreto, $C_0(L)$ no es otra cosa que una c_0-suma de copias de $\mathbb{C}$, luego $C_0(L) \in \mathcal{F}$.

Nuestro objetivo será mostrar que, recíprocamente, cualquier C^*-álgebra con norma fuertemente subdiferenciable en todo punto de la esfera unidad pertenece a $\mathcal{F}$. De hecho, $\mathcal{F}$ es una clase de C^*-álgebras bien conocida y disponemos de varias caracterizaciones que conviene comentar.

En primer lugar, I. Kaplansky [36, Theorem 8.3 and p. 413, Corollary] demostró que $\mathcal{F}$ coincide con la familia de las C^*-álgebras "duales" que pasamos a definir. Dado un subconjunto E de un anillo $\mathcal{R}$, notaremos por $Lan(E)$ y $Ran(E)$ a los *anuladores izquierdo y derecho* de E respectivamente, esto es,

$$Lan(E) = \{r \in \mathcal{R} : \; rx = 0 \quad \forall x \in E\}$$

$$Ran(E) = \{r \in \mathcal{R} : \; xr = 0 \quad \forall x \in E\}.$$

Pues bien, se dice que una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es *dual* si verifica que

$$Lan(Ran(I)) = I \qquad Ran(Lan(J)) = J$$

para cualquier ideal izquierdo cerrado I de $\mathcal{A}$ y para cualquier ideal derecho cerrado J de $\mathcal{A}$. Este concepto, que tiene perfecto sentido en el ambiente más general de un anillo topológico, fue introducido también por Kaplansky [35]. En suma el resultado de Kaplansky nos permite decidir si una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ pertenece a la familia $\mathcal{F}$ en términos de la estructura de anillo topológico de $\mathcal{A}$.

De hecho, se conoce una caracterización puramente algebraica de la familia $\mathcal{F}$. Para comentarla necesitamos la siguiente nomenclatura.

4.24 Definición. Se dice que un anillo $\mathcal{R}$ es *modular anulador* si para cada ideal derecho modular maximal M de $\mathcal{R}$ se verifica que $Lan(M) \neq 0$. Recuérdese que un ideal derecho M de $\mathcal{R}$ es *modular* cuando existe $u \in \mathcal{R}$ tal que $x - ux \in M$ para todo $x \in \mathcal{R}$.

El concepto de anillo modular anulador se debe a B. Yood, quien demostró que en la anterior definición se puede sustituir "ideal derecho" por "ideal izquierdo" y anulador izquierdo por derecho, dando lugar a la misma clase de anillos [59, Theorem 3.4]. Es obvio que todo anillo topológico dual es modular anulador. En el ambiente de las C^*-álgebras, Yood [59, Theorem 4.1] demostró que, recíprocamente, toda C^*-álgebra modular anuladora es dual. En suma, $\mathcal{F}$ es la familia de las C^*-álgebras cuyo anillo subyacente es modular anulador.

Para probar que toda C^*-álgebra con norma fuertemente subdiferenciable pertenece a la familia $\mathcal{F}$, usaremos un resultado de B. Aupetit que afirma que si el espectro de cada elemento normal de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ tiene al cero como único posible punto de acumulación, entonces $\mathcal{A}$ es un anillo modular anulador. De hecho Aupetit trabaja en el ambiente más general de un álgebra de Banach con involución [4, Théorème 3, p.84]. Recíprocamente, es fácil ver que si una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ pertenece a la familia $\mathcal{F}$ y a es un elemento normal de $\mathcal{A}$, entonces $\mathrm{sp}(a)$ tiene al cero como único posible punto de acumulación.

Para completar el comentario de las distintas ideas que intervienen en nuestro próximo teorema, digamos que las C^*-álgebras de la familia $\mathcal{F}$, no solamente tienen norma fuertemente subdiferenciable, equivalentemente son bastante suaves (Teorema 4.21), sino que de hecho, para $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ las topologías débil y débil-$*$ coinciden en $S_{\mathcal{A}^*}$. Intervienen aquí ciertos resultados de la teoría de M-ideales que conviene resaltar. Recordemos que, dado un espacio de Banach Y, y un subespacio cerrado X de Y, se dice que X es un M-ideal de Y si existe una proyección lineal P de X^* sobre Y° (el anulador de Y) tal que

$$\|y^*\| = \|Py^*\| + \|y^* - Py^*\| \qquad (y^* \in Y^*).$$

Este concepto fue introducido por E. Alfsen y E. Effros tratando de unificar, sobre bases puramente geométricas, algunos aspectos de la teoría general de C^*-álgebras y de la teoría de conjuntos convexo-compactos. El estudio de los M-ideales ha tenido un espectacular desarrollo, debido en parte a sus sorprendentes aplicaciones en campos aparentemente tan distantes como el Análisis Complejo o el Análisis Armónico. El actual estado de conocimientos aparece recogido en la monografía de P. Harmand, D. Werner y W. Werner de reciente aparición [31]. En 1978, R. Smith y J. Ward probaron que los M-ideales de una C^*-álgebra coinciden con sus ideales biláteros cerrados [52, Theorem 5.3]. En particular, si H es un espacio de Hilbert complejo, $K(H)$ es un M-ideal de $L(H)$, un resultado que ya había probado J. Dixmier en 1950 (naturalmente sin usar la palabra M-ideal) [18]. En el mismo trabajo, Dixmier prueba que el bidual de $K(H)$ se identifica totalmente con $L(H)$, de tal forma que la inyección canónica de $K(H)$ en su bidual se convierte en la inyección natural de $K(H)$ en $L(H)$. De esta forma, $K(H)$ resulta ser un ejemplo de una clase de espacios de Banach que ha sido ampliamente estudiada en los últimos años, la clase de los espacios de Banach que son M-ideales de su bidual [31, Chapter III]; así pues, toda C^*-álgebra de la familia $\mathcal{F}$ es un M-ideal de su bidual. Finalmente, se prueba también sin demasiada dificultad que, si un espacio de Banach X es un M-ideal de X^{**}, entonces las topologías débil y débil-$*$ coinciden en S_{X^*} [31, Corollary III.2.15].

Podemos ya enunciar la descripción completa de las C^*-álgebras con norma fuertemente subdiferenciable. La mayor parte de la demostración ha quedado comentada.

4.25 Teorema. *Para una* C^**-álgebra* $\mathcal{A}$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *Las topologías débil y débil-$*$ coinciden en* $S_{\mathcal{A}^*}$.

(ii) *La norma de* $\mathcal{A}$ *es fuertemente subdiferenciable.*

(iii) *Para cada elemento normal* $a \in \mathcal{A}$*, cero es el único posible punto de acumulación de* $\mathrm{sp}(a)$.

(iv) $\mathcal{A}$ *es un anillo modular anulador.*

(v) $\mathcal{A}$ *es una* c_0*-suma de álgebras de operadores compactos en espacios de Hilbert. Es decir, existe una familia* $\{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *de espacios de Hilbert complejos, tal que*

$$\mathcal{A} = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} K(H_\lambda) \right)_{c_0}.$$

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). En vista de la Proposición 1.3, $\mathcal{A}$ es bastante suave y, en virtud del Teorema 4.21, la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que a es un elemento normal en $\mathcal{A}$ con $\|a\| = 1$ y $\alpha \neq 0$ un punto de acumulación de $\mathrm{sp}(a)$. Consideremos la función continua $x : \mathrm{sp}(a) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$x(t) = \frac{|t|}{|t| + |t - \alpha|}.$$

Es claro que $x \in C_0(\mathrm{sp}(a) \setminus \{0\})$ y por el Corolario 4.4 se verifica que $\mathrm{sp}(x(a)) \setminus \{0\} = x(\mathrm{sp}(a)) \setminus \{0\}$; por tanto, si $\{t_n\}$ es una sucesión de puntos de $\mathrm{sp}(a) \setminus \{\alpha, 0\}$ convergente a α, tenemos que $x(t_n) \in \mathrm{sp}(x(a)) \setminus \{1\}$ para todo natural n y $x(t_n) \to 1$, luego 1 es un punto de acumulación de $\mathrm{sp}(x(a))$ y basta aplicar el Teorema 4.21 para obtener que la norma de $\mathcal{A}$ no es fuertemente subdiferenciable en el elemento positivo $x(a)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Esto es un caso particular de un resultado de B. Aupetit, ya comentado [4, Théorème 3, p.84].

(iv) $\Rightarrow$ (v). La conclusión se sigue de los resultados de Yood (toda C^*-álgebra modular anuladora es dual [59, Theorem 4.1]) y Kaplansky (toda C^*-álgebra dual es de la forma que aparece en (v) [36, Theorem 8.3]).

(v) $\Rightarrow$ (i). Por [31, Proposition III.2.9] $\mathcal{A}$ es un M-ideal de $\mathcal{A}^{**}$ y basta usar que, para esta clase de espacios, la condición (i) siempre se verifica [31, Corollary III.2.15]. ■

Concluimos esta sección citando un resultado paralelo al teorema anterior. En 1981, C.-H. Chu [9] caracterizó las C^*-álgebras que son espacios de Asplund, es decir, aquellas cuyo dual tiene la propiedad de Radon-Nikodým. Concretamente, prueba que una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ es de Asplund si, y sólo si,

$$\mathcal{A}^* = \left[\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} K(H_\lambda)\right)_{c_0}\right]^* \tag{1}$$

para alguna familia $\{H_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de espacios de Hilbert. En general, pueden existir C^*-álgebras muy diferentes cuyo dual tiene la forma que aparece en (1). Para poder concluir de (1) que $\mathcal{A} = (\sum_{\lambda\in\Lambda} K(H_\lambda))_{c_0}$ es necesario y suficiente, según el teorema anterior, que la norma de $\mathcal{A}$ sea fuertemente subdiferenciable. El caso conmutativo es, como siempre, bastante clarificador: c_0 y c son C^*-álgebras de Asplund, de hecho $c_0^* = c^* = \ell_1$, la norma de c_0 es fuertemente subdiferenciable pero la de c no lo es.

4.D. I-anillos.

Al igual que, en la sección anterior, la subdiferenciabilidad fuerte de la norma de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ resultó ser equivalente a una propiedad puramente algebraica del anillo $\mathcal{A}$, vamos ahora a mostrar que la propiedad más débil de que la norma de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$ sea fuertemente subdiferenciable en un subconjunto denso de $S_{\mathcal{A}}$ equivale a que el anillo $\mathcal{A}$ pertenezca a una cierta clase previamente estudiada, la clase de los I-anillos que se define a continuación. Recuérdese que un elemento a de un anillo $\mathcal{R}$ es nilpotente cuando $a^n = 0$ para algún número natural n.

4.26 Definición. Se dice que un anillo $\mathcal{R}$ es un *I-anillo* si para cada elemento no-nilpotente a en $\mathcal{R}$, existe $b \in \mathcal{R}$, $b \neq 0$, tal que $bab = b$.

Esta clase de anillos se caracteriza por la abundancia de elementos idempotentes. De hecho, un anillo $\mathcal{R}$ es un I-anillo si, y sólo si, cada ideal derecho (izquierdo) que contenga un elemento no-nilpotente, contiene un elemento idempotente no nulo. En efecto, si $\mathcal{R}$ es un I-anillo, J un ideal derecho de $\mathcal{R}$ y $a \in J$ un elemento no nilpotente, tomando $b \neq 0$ tal que $bab = b$ tenemos que $ab \in J$ es un idempotente no nulo. Recíprocamente, dado un elemento no-nilpotente $a \in \mathcal{R}$ el ideal derecho $a\mathcal{R}$ contiene al elemento no-nilpotente a^2, luego existirá $c \in \mathcal{R}$ tal que $(ac)^2 = ac$ con $ac \neq 0$ y tomando $b = cac$ se tiene que $b \neq 0$ y $bab = b$.

La noción de I-anillo es muy antigua, parece haber sido introducida en 1930 en un trabajo de G. Köthe [39], quien demostró que todo I-anillo contiene lo que hoy en día se conoce como radical de Köthe. En ambiente puramente algebraico, sin ninguna estructura adicional, los I-anillos han sido investigados por J. Levitzki [42] y más recientemente por W. Nicholson [46]. Cabe citar también los trabajos de C. Lanski sobre I-anillos con involución [40], [41].

En el contexto de las álgebras de Banach, los I-anillos hacen su aparición en un trabajo de Kaplansky [37], publicado en 1949, como una debilitación de la regularidad en el sentido de von Neumann. Recuérdese que un anillo $\mathcal{R}$ es *von Neumann-regular* si para cada $a \in \mathcal{R}$ existe $x \in \mathcal{R}$ tal que $axa = a$. Si $a \neq 0$, tomando $b = xax$ es fácil ver que $b \neq 0$ y $bab = b$, lo que demuestra que todo anillo von Neumann-regular es un I-anillo. Englobando una serie de resultados previos, Kaplansky demuestra que toda álgebra de Banach von Neumann-regular tiene dimensión finita, propone una noción de "regularidad débil" ligeramente más restrictiva que la de I-anillo (para $a \neq 0$ existe $b \neq 0$ tal que $bab = b$) y prueba que $C(K)$ puede ser débilmente regular sin que el compacto K sea finito. En trabajos posteriores (ver, por ejemplo, [38]) olvida su noción de regularidad débil y usa solamente la de I-anillo, tal cual la hemos definido aquí. A pesar de la invitación de Kaplansky, las álgebras de Banach que son I-anillos han sido muy poco estudiadas. Sólo podemos citar un trabajo de P. Menal [45] donde se trata una clase más restrictiva: las álgebras de Banach espectrales. Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es *espectral* si para cada ideal bilátero cerrado J de $\mathcal{A}$, el anillo cociente $\mathcal{A}/J$ es un I-anillo.

Nuestro objetivo, como ya se ha dicho, es probar que una C^*-álgebra es un I-anillo si, y sólo si, su norma es fuertemente subdiferenciable en un subconjunto denso de la esfera unidad. Tratamos previamente el caso conmutativo que se resuelve con bastante facilidad y sirve muy bien como orientación para el caso general.

4.27 Proposición. *Sea L un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *La norma de $C_0(L)$ es fuertemente subdiferenciable en un subconjunto denso de la esfera unidad.*

(ii) *$C_0(L)$ es un I-anillo.*

(iii) *Todo abierto no vacío de L contiene un abierto compacto no vacío.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Dado $x \in C_0(L)$, con $x \neq 0$, hemos de encontrar $y \in C_0(L)$, $y \neq 0$, tal que $yxy = y$, y no se pierde generalidad suponiendo que $\|x\| = 1$. Aplicando (i), sea $z \in S_{C_0(L)}$ tal que $\|z-x\| < 1$ y la norma de $C_0(L)$ es fuertemente subdiferenciable en z, esto es, el conjunto

$$V = \{t \in L : \ |z(t)| = 1\}$$

es abierto y cerrado; de hecho, por ser $z \in C_0(L)$, V es compacto. La condición $\|z - x\| < 1$ implica que $x(t) \neq 0$ para $t \in V$. Basta entonces definir

$$y(t) = 0 \quad \forall t \in L \setminus V, \qquad y(t) = \frac{1}{x(t)} \quad \forall t \in V.$$

Es claro que $y \in C_0(L)$, $y \neq 0$ y que $yxy = y$.

Obsérvese que sólo hemos usado una forma aparentemente muy débil de la afirmación (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sea U un subconjunto abierto de L y consideremos el ideal J de $C_0(L)$ formado por las funciones que se anulan en $L \setminus U$. Puesto que J es distinto de cero, existe un idempotente no nulo $e \in J$. Entonces el conjunto

$$V = \{t \in L : \ e(t) = 1\}$$

es compacto, abierto, no vacío, y está contenido en U.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Si $x \in S_{C_0(L)}$ y $0 < \varepsilon < 1$, el conjunto abierto

$$U = \{t \in L : \ |x(t)| > 1 - \varepsilon\}$$

contendrá un compacto abierto no vacío V. Definiendo $y : L \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$y(t) \ = \ \begin{cases} (1 - \frac{\varepsilon}{2})x(t) & \text{si} \ \ t \in L \setminus V \\ \frac{x(t)}{|x(t)|} & \text{si} \ \ t \in V, \end{cases}$$

se tiene que $y \in C_0(L)$ y

$$\sup\{|y(t)| : \ |y(t)| < 1\} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1,$$

luego la norma de $C_0(L)$ es fuertemente subdiferenciable en y. Además, es fácil comprobar que $\|x - y\| < \varepsilon$. ■

En el trabajo ya citado de Kaplansky [37] se demuestra la equivalencia entre las afirmaciones (ii) y (iii) de la proposición anterior para el caso en que

L es compacto. De hecho, en (ii) $\Rightarrow$ (iii) hemos seguido la demostración de Kaplansky.

Pasamos ya a la versión no conmutativa del resultado anterior. Nótese que las afirmaciones (i) y (ii) siguen teniendo sentido cuando se sustituye $C_0(L)$ por una C^*-álgebra arbitraria. No ocurre así con la condición (iii) que, sin embargo, puede reformularse de varias formas (presentamos dos) que sí tienen sentido en general. Basta para ello pensar en la correspondencia biunívoca entre subconjuntos cerrados de L e ideales cerrados de $C_0(L)$, o lo que viene a ser lo mismo, entre subconjuntos abiertos de L y proyecciones abiertas de $C_0(L)^{**}$. Otra dificultad añadida del caso no conmutativo es la diferencia entre idempotentes y proyecciones, que no se presenta en caso conmutativo. Para resolverla usamos un resultado de K. Goodearl, según el cual, si un ideal (izquierdo o derecho) de una C^*-álgebra contiene un idempotente no nulo, también contiene una proyección no nula. De hecho, si $e^2 = e \neq 0$, Goodearl comprueba que

$$p = [\mathbf{1} + (e - e^*)(e^* - e)]^{-1} e^* e$$

es una proyección no nula y, evidentemente, pertenece a cualquier ideal izquierdo que contenga a e [29, Proposition 19.1].

4.28 Teorema. *Para una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) *La norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en un subconjunto denso de $S_{\mathcal{A}}$.*

(ii) *Para cada $a \in S_{\mathcal{A}}$ existe un elemento $x \in S_{\mathcal{A}}$ tal que $\|x - a\| < 1$ y la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en x.*

(iii) *$\mathcal{A}$ es un I-anillo.*

(iv) *Cada ideal izquierdo no nulo cerrado de $\mathcal{A}$ contiene una proyección distinta de cero.*

(v) *Para cada proyección abierta Q en $\mathcal{A}^{**}$, $Q \neq 0$, existe una proyección $q \in \mathcal{A}$, $q \neq 0$, tal que $q \leq Q$.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Para $a \in S_{\mathcal{A}}$ debe existir un elemento $x \in S_{\mathcal{A}}$ con $\|x-a\| < 1$ y tal que la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en x. Por el Teorema 4.21, existe una isometría parcial $v \in \mathcal{A}$ tal que

$$xv^* = vv^* \qquad \text{y} \qquad \|x - v\| < 1. \tag{1}$$

Puesto que

$$\|vv^*av^*vv^* - vv^*\| \leq \|av^* - vv^*\| = \|av^* - xv^*\| \leq \|a - x\| < 1,$$

el elemento $vv^*av^*vv^* = vv^*av^*$ es inversible en la C^*-álgebra unital $vv^*\mathcal{A}vv^*$, es decir, existe $c \in \mathcal{A}$, $c \neq 0$, tal que

$$vv^*av^*cvv^* = vv^*.$$

Tomando $b = v^*cvv^*$ es fácil deducir de la igualdad anterior que $bab = b$, y también que $b \neq 0$, ya que, si fuese $b = 0$ se tendría $vv^* = 0$, luego $v = 0$ en contradicción con (1).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Un ideal izquierdo no nulo de una C^*-álgebra siempre contiene un elemento no nilpotente. Por tanto, si se verifica (iii), cada ideal no nulo (cerrado o no) de $\mathcal{A}$ contiene un idempotente distinto de cero y, por el resultado ya comentado de Goodearl [29, Proposition 19.1], también contiene una proyeción no nula.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Si Q es una proyección abierta de $\mathcal{A}^{**}$ entonces $\mathcal{A}^{**}Q \cap \mathcal{A}$ es un ideal izquierdo cerrado, no nulo, de $\mathcal{A}$ (Proposición 4.15). Por (iv) existe una proyección no nula $q \in \mathcal{A}^{**}Q \cap A$ y es claro que $q \leq Q$.

(v) $\Rightarrow$ (i). Sea $a \in S_{\mathcal{A}}$ y $0 < \varepsilon < 2$. Denotemos por $\mathcal{B}$ la C^*-subálgebra engendrada por $|a|$, identifiquemos $\mathcal{B}$ con la C^*-álgebra $C_0(L)$, donde $L = \mathrm{sp}(|a|) \setminus \{0\}$ y recordemos que $|a|$ se identifica con la función identidad de L en $\mathbb{C}$ (Corolario 4.4). Sea $b \in \mathcal{B}$ la función dada por

$$b(t) = \min\left\{1, \frac{2t}{2-\varepsilon}\right\} \qquad (t \in L).$$

Es claro que b es un elemento positivo de $C_0(L)$ y se comprueba fácilmente que

$$\| \, |a| - b \| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos el subconjunto abierto de L dado por

$$\Omega = \left\{t \in L : \ t > 1 - \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

La función característica de Ω es una proyección abierta en $C_0(L)^{**}$ a la que denotamos por Q (Proposiciones 4.12 y 4.14) y, puesto que $b(t) = 1$ para $t \in \Omega$, se tiene que

$$bQ = Qb = Q.$$

Puesto que Q es también una proyección abierta en $\mathcal{A}^{**}$, podemos aplicar (v) para obtener una proyección no nula $q \in \mathcal{A}$ tal que $q \leq Q$, y también se tendrá que

$$qb = bq = q,$$

de donde

$$\|b-q\| = \|b-bq\| \leq 1.$$

Tomemos ahora

$$x = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)b + \frac{\varepsilon}{2}q$$

y notemos que x es un elemento positivo en la esfera unidad de $\mathcal{A}$ verificando que $xq = q$ y

$$\|x-q\| = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\|b-q\| < 1.$$

Por el Teorema 4.21, la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en x. Además se tiene que:

$$\|\,|a|-x\| \leq \|\,|a|-b\| + \|b-x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\|b-q\| \leq \varepsilon.$$

Hemos conseguido aproximar $|a|$ por puntos donde la norma es fuertemente subdiferenciable. Todo lo que queda es desandar el camino de $|a|$ hasta a. Para ello sea $a = v|a|$ la descomposición polar de a.

Puesto que $v^*v|a| = |a|$ y $v|a| \in \mathcal{A}$, por pertenecer b a la C^*-álgebra engendrada por a se tiene que $v^*vb = b$ y $vb \in \mathcal{A}$, luego

$$v^*vq = v^*vbq = bq = q\,, \quad vq = vbq \in \mathcal{A}.$$

Deducimos que $v^*vx = x$ y $vx \in \mathcal{A}$, y el Lema 4.19 nos muestra que la norma de $\mathcal{A}$ es fuertemente subdiferenciable en vx. Finalmente

$$\|a-vx\| = \|v|a|-vx\| \leq \|\,|a|-x\| \leq \varepsilon.$$

■

En primer lugar, hemos de observar que el teorema anterior nos muestra que no hay una versión topológica del concepto de I-anillo en el ambiente de las C^*-álgebras: Una C^*-álgebra que tiene la propiedad de que cada ideal izquierdo *cerrado* contiene un idempotente siempre es un I-anillo. Merece la pena mencionar que la clase de las C^*-álgebras así caracterizada comprende a las C^*-álgebras espectrales [45], una amplia familia de álgebras que contiene a todas las álgebras de von Neumann (de hecho, a todas las C^*-álgebras de Rickart (el anulador derecho de cada elemento está engendrado por una proyección)), AF-álgebras (límite directo de C^*-álgebras de dimensión finita) y C^*-álgebras con rango real cero (cada elemento autoadjunto de la unitización de $\mathcal{A}$ se puede aproximar por elementos autoadjuntos invertibles de dicha unitización) [45], [8]. Diremos por último, que en vista de la caracterización dada por Taylor-Werner [57] de puntos donde la norma de una C^*-álgebra es Fréchet-diferenciable, existen álgebras de von Neumann que no tienen ningún punto de este tipo y, sin embargo, en vista de lo anteriormente comentado la norma es fuertemente subdiferenciable en un subconjunto denso de la esfera.

Bibliografía

[1] C. A. Akemann y G. K. Pedersen. Facial structure in operator algebra theory. *Proc. London Math. Soc.* **64** (1992), 418–448.

[2] C. Aparicio, F. Ocaña, R. Payá y A. Rodríguez. A non-smooth extension of Fréchet-differentiability of the norm with applications to numerical ranges. *Glasgow Math. J.* **28** (1986), 121-137.

[3] E. Asplund. Fréchet differentiability of convex functions. *Acta Math.* **121** (1968), 31–47.

[4] B. Aupetit. *Propriétés spectrales des algèbres de Banach.* Lect. Notes Math. 735, Springer–Verlag, Berlín, 1979.

[5] W. M. Bogdanowicz. Representation of linear continuous functionals on the space $C(X,Y)$ of continuous functions from compact X into locally convex Y. *Proc. Japan Acad.* **42** (1967), 1122–1127.

[6] B. Bollobás. An extension to the theorem of Bishop and Phelps. *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 181–182.

[7] F. F. Bonsall y J. Duncan. *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras.* London Math. Soc. Lecture Note Series, No. 2, Cambridge University Press, 1971.

[8] L. G. Brown y G. K. Pedersen. C^*-algebras of real rank zero. *J. Funct. Anal.* **99** (1991), 131–149.

[9] C.-H. Chu. A note on scattered C^*-algebras and the Radon-Nikodým property. *J. London Math. Soc.* **24** (1981), 533–536.

[10] I. Cioranescu. *Geometry of Banach spaces, duality mappings and nonlinear problems.* Kluwer Academic Publishers, 62, Países Bajos, 1990.

[11] J. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936), 396–414.

[12] M. D. Contreras y R. Payá. On upper semicontinuity of duality mappings. Aparecerá en *Proc. Amer. Math. Soc.*

[13] M. D. Contreras, R. Payá y W. Werner. C^*-algebras that are I-rings. En preparación.

[14] D. F. Cudia. The geometry of Banach spaces. Smoothness. *Trans. Amer. Math. Soc.* **110** (1964), 284–314.

[15] D. W. Dean. The equation $L(E, X^{**}) = L(E, X)^{**}$ and the principle of local reflexivity. *Proc. Amer. Math. Soc.* **40** (1973), 146–148.

[16] J. Diestel. *Geometry of Banach spaces–Selected topics.* Lect. Notes Math. 485, Springer–Verlag, Berlín, 1975.

[17] J. Diestel y B. Faires. On vector measures. *Trans. Amer. Math. Soc.* **198** (1974), 253–271.

[18] J. Dixmier. Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert. *Ann. Math.* **51** (1950), 387–408.

[19] I. Ekeland y G. Lebourg. Generic Fréchet-differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **224** (1976), 193–216.

[20] K. Fan y I. Glicksberg. Some geometric properties of the spheres in a normed linear space. *Duke Math. J.* **25** (1958), 553–568.

[21] C. Franchetti. Duality mapping and homeomorphisms in Banach spaces. *Extracta Mathematicae.* II Congreso Análisis Funcional, Jarandilla, España, 1990, 73–80.

[22] C. Franchetti y R. Payá. Banach spaces with strongly subdifferentiable norm. *Bollettino U. M. I.* **VII B** (1993) 45–70.

[23] J. R. Giles. Strong differentiability of the norm and rotundity of the dual. *J. Austral. Math. Soc. (Series A).* **26** (1978), 302–308.

[24] J. R. Giles. *Convex Analysis with applications in differentiation of convex functions.* Research Notes in Math. 58. Pitman, Boston, 1982.

[25] J. R. Giles, D. A. Gregory y B. Sims. Geometrical implications of upper semi-continuity of the duality mapping on a Banach Space. *Pacific J. Math.* **79** (1978), 99–108.

[26] G. Godefroy. Some applications of Simons' inequality. Aparecerá en *Seminar of Functional Analysis*, Univ. Murcia.

[27] G. Godefroy y N. J. Kalton. The ball topology and its applications. *Contemporary Math.* **85** (1989), 195–237.

[28] G. Godefroy y V. Zizler. Roughness properties of norms on non-Asplund spaces. *Michigan Math. J.* **38** (1991), 461–466.

[29] K. R. Goodearl. *Notes on Real and Complex C^*-algebras.* Shiva Math. Series, 5, 1982.

[30] D. A. Gregory. Upper semi-continuity of subdifferential mappings. *Canad. Math. Bull.* **23** (1980), 11–19.

[31] P. Harmand, D. Werner y W. Werner. *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras.* Lect. Notes Math. 1547, Springer–Verlag, Berlín, 1993.

[32] R. Haydon. A counterexample to several questions about scattered compact spaces. *Bull. London Math. Soc.* **22** (1990), 261–268.

[33] Z. Hu y B. Lin. Smoothness and the asymptotic-norming properties of Banach spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.* **45** (1992), 285–296.

[34] N. J. Kalton. Spaces of compact operators. *Math. Ann.* **208** (1974), 267–278.

[35] I. Kaplansky. Dual rings. *Ann. Math.* **49** (1948), 689–701.

[36] I. Kaplansky. Normed algebras. *Duke Math. J.* **16** (1949), 399–418.

[37] I. Kaplansky. Regular Banach algebras. *J. Indian Math. Soc.* **12** (1949), 57–62.

[38] I. Kaplansky. Topological representation of algebras, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 62–75.

[39] G. Köthe. Die Struktur der Ringe deren Restklassenring nach dem Radikal vollständig reduzibel ist. *Math. Z.* **42** (1930), 161–186.

[40] C. Lanski. Rings with involution which are I-rings. *J. Alg.* **32** (1974), 109–118.

[41] C. Lanski. I-Rings with involution. *J. Alg.* **38** (1976), 85–92.

[42] J. Levitzki. On the structure of algebraic algebras and related rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **74** (1953), 384–409.

[43] S. Mazur. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. *Studia Math.* **4** (1933), 70–84.

[44] J. F. Mena-Jurado, R. Payá-Albert y A. Rodríguez-Palacios. Absolute subspaces of Banach spaces. *Quart. J. Math. Oxford.* **40** (1989), 43–64.

[45] P. Menal. Spectral Banach algebras of bounded index. *J. Alg.* **154** (1993), 27–66

[46] W. K. Nicholson. I-rings. *Trans. Amer. Math. Soc.* **207** (1975), 361–373.

[47] R. Payá Albert. *Técnicas de rango numérico y estructura en espacios normados.* Tesis Doctoral. Secretariado de publicaciones de la Universidad de Granada, 1981.

[48] G. K. Pedersen. *C^*-algebras and their automorphism groups.* London Math. Soc. Monographs. 14, Academic Press, Londres, 1979

[49] R. R. Phelps. *Convex functions, monotone operators and differentiability.* Lect. Notes Math. 1364, Springer–Verlag, Berlín, 1989.

[50] S. Sakai. *C^*-algebras and W^*-algebras.* Springer–Verlag, Berlín, 1971.

[51] S. Simons. A convergence theorem with boundary. *Pacific J. Math.* **40** (1972), 703–708.

[52] R. R. Smith y J. D. Ward. M-ideal structure in Banach Algebras. *J. Funct. Anal.* **27** (1978), 337–349.

[53] V. Šmulian. On some geometrical properties of the unit sphere in the space of type (B). *Math. Sbornik.* **6** (1939), 77–94. (En ruso).

[54] V. Šmulian. Sur la structure de la sphére unitaire dans l'espace de Banach. *Math. Sbornik.* **9** (1941), 545–561.

[55] C. Stegall. The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nikodým property. *Israel J. Math.* **29** (1978), 408–412.

[56] K. F. Taylor y W. Werner. Differentiability of the norm in von Neumann algebras. Aparecerá en *Proc. Amer. Math. Soc.*

[57] K. F. Taylor y W. Werner. Differentiability of the norm in C^*-algebras. Aparecerá en *Proc. Conf. Functional Analysis, Essen, 1991.*

[58] W. Werner. *Smooth points in spaces of bounded operators.* Habilitationsschrift, Univ. Paderborn, 1993.

[59] B. Yood. Ideals in topological rings. *Canad. J. Math.* **16** (1964), 28–45.

[60] W. Y. Zhang. On weakly very smooth Banach spaces. *Dongbei Shuxue.* **3** (1987), 140–142. (En chino).