

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA APLICADA

ANALISIS DE INVERSIONES:
TIPOS DE ACTUALIZACION ALEATORIOS

Memoria presentada por
Eduardo Pérez Rodríguez
para optar al grado de Doctor

Fdo: Eduardo Pérez Rodríguez

V^o.B^o. del Director

Fdo: Rafael Herrerías Pleguezuelo
Catedrático de Economía Aplicada

Granada, Septiembre de 1992



ACTA DE GRADO DE DOCTOR

DOCTORANDO D. EDUARDO PEREZ RODRIGUEZ
LICENCIADO EN CIENCIAS MATEMATICAS por la Universidad de GRANADA
PROGRAMA DE DOCTORADO AVANCES EN ECONOMIA APLICADA

DEPARTAMENTO RESPONSABLE ECONOMIA APLICADA
TITULO DE LA TESIS "ANALISIS DE INVERSIONES: TIPOS DE ACTUALIZACION ALEATORIOS"

DIRECTOR/ES DR. D. RAFAEL HERRERIAS PLEGUEZUELO

TUTOR DR. D. RAFAEL HERRERIAS PLEGUEZUELO

TRIBUNAL

PRESIDENTE DR. D. ANDRES DE PABLO LOPEZ
VOCALES DR. D. JOSE MIEVEL CASAS SANCHEZ
DR. D. MANUEL MARTIN RODRIGUEZ
DR. D. JOAQUIN ARANDA GALLEGO
SECRETARIO DR. D. FRANCISCO ABAD MONTEJ

Reunido el día de la fecha el Tribunal nombrado para el Grado de Doctor de D. EDUARDO PEREZ RODRIGUEZ éste procede al acto de mantenimiento y defensa de la Tesis Doctoral.

Terminado dicho acto y contestadas las objeciones formuladas por el Tribunal, éste le calificó APTO COM LAUDE (CON CALIFICACION)

Granada 29 de Septiembre de 1992

El Secretario del Tribunal.

EL PRESIDENTE,

Fdo. ANDRES DE PABLO LOPEZ

EL VOCAL,

Fdo. JOSE M. CASAS SANCHEZ

EL VOCAL,

Fdo. MANUEL MARTIN RODRIGUEZ

EL VOCAL,

Fdo. JOAQUIN ARANDA GALLEGO

A tu memoria, Fernando

AGRADECIMIENTOS

En el momento de escribir esta Memoria, cuando ya parece próximo el final de esta esperada y deseada etapa, quiero agradecer a la Providencia el haberme proporcionado tan buenos amigos. Entre ellos se encuentra el Dr. D. Rafael Herrerías Pleguezuelo, director de esta Tesis, al que aparte de su ayuda y apoyo constantes, le debo la segunda oportunidad de integración en la vida universitaria.

Como no agradecer a mis padres todas las penalidades sufridas para facilitarme la formación necesaria. ¡Qué gran sorpresa se llevaría Fernando si hubiese llegado a ver el tema de trabajo!

Finalmente, agradecer a mis hijos Fernando y Eduardo, este último si se lo hubieran permitido, los impedimentos que han puesto para que este trabajo pudiera finalizar en el tiempo debido.

INDICE

Capítulo I.-	INTRODUCCION.....	1
1.1.-	Métodos de valoración y selección de Inversiones.....	3
1.2.-	El concepto de Valor Capital.....	4
1.3.-	Ventajas e inconvenientes del criterio del Valor Capital.....	5
1.4.-	Introducción de la inflación.....	8
1.5.-	Introducción del riesgo.....	10
1.6.-	Metodología.....	12
1.7.-	Tratamiento del riesgo.....	16
Capítulo II.-	ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL DEL TRATAMIENTO DEL RIESGO.....	20
2.1.-	Modelos probabilísticos usados para el flujo de caja.....	24
2.1.1.-	El P.E.R.T. clásico.....	25
2.1.2.-	El modelo triangular.....	31
2.1.3.-	Críticas al P.E.R.T. clásico.....	34
2.1.4.-	Posibles soluciones.....	36
2.1.5.-	Modelos beta generalizada.....	40
2.1.6.-	Modelos con información adicional.....	42
2.2.-	Modelos probabilísticos usados para la duración del proyecto.....	47

Capítulo III.- LA VARIABLE ALEATORIA FACTOR DE ACTUALIZACION.....	52
3.1.- Distribución uniforme.....	53
3.2.- Distribución triangular.....	55
3.3.- Distribución beta.....	58
3.3.1.- Relación de recurrencia entre momentos.....	59
3.3.2.- Cálculo de la media.....	63
3.3.3.- Implantación.....	69
3.3.4.- Consideraciones empíricas.....	72
3.4.- El problema del Sr. Corto. (Ejemplo).....	78
3.5.- Comparación entre los diversos modelos.....	86

Capítulo IV.- PROYECTOS DE INVERSION MULTIPERIODO.....	91
4.1.- Resultados previos.....	91
4.2.- Proyectos de inversión uniperíodo con flujo de caja aleatorio.....	92
4.3.- Proyectos de inversión multiperíodo.....	93
4.4.- Ejemplo.....	95

Capítulo V.- EVALUACION ECONOMICA DE LAS OBRAS DE PUESTA

REGADIO DEL PANTANO DE LA BOLERA.....	102
5.1.- Evaluación económica alternativa.....	108

BIBLIOGRAFIA.....	119
--------------------------	------------

APENDICE.....	123
----------------------	------------

CAPITULO I

INTRODUCCION.

Siguiendo a Suarez (1989), el concepto de inversión, intimamente ligado al de capital, es uno de los conceptos económicos de más difícil delimitación, y como afirma P. Massé: "La definición más general que se puede dar del acto de invertir, es que, mediante el mismo, tiene lugar el cambio de una satisfacción inmediata y cierta, a la que se renuncia, por una esperanza que se adquiere, y de la cual el bien invertido es el soporte".

Sea cual fuere el concepto de inversión, y sea cual fuere la intencionalidad de la misma, toda inversión puede definirse por la corriente de flujos de caja, (cobros menos pagos), que origina. Esta es la dimensión financiera de la inversión, a la que ya prestaron atención autores como Schneider (1970), que puede considerarse como el fundador de la Teoría de la Inversión.

Naturalmente, los flujos de caja se irán produciendo de una forma, más ó menos, continua a lo largo de la vida económica de la inversión, y pueden modelarse mediante una función de repartición $R(t)$, que mide la suma algebraica de todos los flujos de caja producidos (expresados en unidades monetarias nominales), desde el instante de inicio, hasta el instante t .

Antes de continuar, aclarar las diferencias que separan a esta función de repartición con una función de distribución (en sentido estadístico). La función de repartición aludida no reúne las condiciones de positividad y monotonía, aunque sí la continuidad por la derecha.

Si la corriente de flujos de caja es discreta, concretándose en unos flujos de caja Q_1, Q_2, \dots, Q_n que se producen en los instantes t_1, t_2, \dots, t_n , entonces la función $R(t)$ será escalonada.

En los estudios de "Capital Budgeting" suele aceptarse, por comodidad y por no ser importantes los errores a los que conduce, la hipótesis de que los flujos de caja se producen en instantes discretos de tiempo, que usualmente corresponden con el final de un periodo de capitalización de intereses. Todos los flujos de caja, que tengan lugar dentro del periodo básico de tiempo, se acumulan algebraicamente para dar lugar a un único flujo de caja que, por convenio, tiene lugar al final del periodo.

Concretamente, si por comodidad se consideran periodos de tiempo anuales, y se nota por

A = el desembolso inicial ó tamaño de la inversión

Q_j = el flujo de caja neto del periodo j , que será igual a la diferencia entre los cobros y los pagos del periodo j .

n = la duración de la inversión, es decir el número de periodos que transcurren desde que se realiza el

desembolso inicial hasta que se produce el último cobro ó pago.

la inversión vendrá definida por el siguiente diagrama temporal de flujos de caja

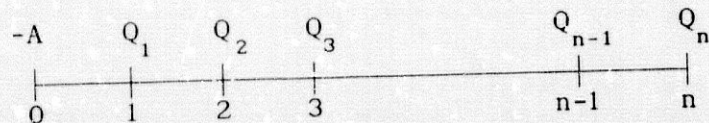


Figura 1.- Dimensión financiera de la inversión

MÉTODOS DE VALORACION Y SELECCION DE INVERSIONES.-

El problema fundamental que se presenta en toda decisión de invertir consiste en determinar, cuantitativamente, la aceptabilidad del proyecto de inversión. Al disponer de una medida de la aceptabilidad del proyecto, se podrá decidir si conviene, ó no, llevarlo a cabo, y en caso de disponer de varias alternativas de inversión, podrá servir de base para la selección de una cartera de proyectos. Esta última es una cuestión de vital importancia cuando el inversor no dispone de unos recursos financieros suficientes para realizar todas las oportunidades (aceptables) de inversión. Es decir, cuando existe racionamiento de capital.

Los criterios de valoración y selección de inversiones se pueden clasificar en dos grupos:

- 1.- criterios ó métodos aproximados que no tienen en cuenta

la cronología de los distintos flujos de caja y operan con ellos como si se tratara de cantidades de dinero percibidas en el mismo instante de tiempo.

2.- criterios ó métodos que tienen en cuenta la cronología de los flujos de caja y por ello utilizan el procedimiento de la actualización ó descuento con el objeto de homogeneizar las cantidades de dinero percibidas en diferentes instantes de tiempo.

Entre los criterios de este segundo grupo, se encuentra el criterio del Valor Capital, que, debido a su primacía universalmente reconocida, será el objeto de este estudio.

EL CONCEPTO DEL VALOR CAPITAL.-

Este término fué acuñado por Schneider en 1944, y el Valor Capital de una inversión es igual al valor actualizado, al instante de su inicio, de todos los rendimientos esperados de la misma.

En cuanto a la modelización del proceso de actualización, puede optarse por la consideración de la capitalización instantánea de intereses (descuento en tiempo continuo), ó por la existencia de un periodo de capitalización de amplitud no nula (descuento en tiempo discreto). Habida cuenta de la simplificación habitual, ya citada, en los estudios de "Capital Budgeting" parece

lógica la consideración del tiempo como una variable discreta.

Si con la notación que ya se arrastra, se notan por k_1, k_2, \dots, k_n los tipos de descuento, ó intereses calculatorios, para cada uno de los n futuros y sucesivos periodos de tiempo, se tiene que el valor capital de la inversión viene dado por la fórmula

$$VC = -A + \frac{Q_1}{1 + k_1} + \frac{Q_2}{(1+k_1)(1+k_2)} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)} \quad (1)$$

que bajo ciertas hipótesis (igualdad de los tipos de descuento, igualdad de los flujos de caja), es susceptible de atractivas simplificaciones.

Solo conviene realizar aquellas inversiones cuyo valor capital sea positivo, puesto que son las únicas que contribuyen a la consecución del objetivo del inversor, consistente en aumentar su riqueza.

VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL CRITERIO DEL VALOR CAPITAL.-

Una gran ventaja de este criterio, común a todos los que pertenecen al segundo de los grupos antes citados, es la de tener en cuenta, a través del mecanismo de la actualización, la cronología de los sucesivos flujos de caja, respetando el principio de que "una unidad monetaria, disponible hoy, vale más

que la misma unidad, disponible mañana".

Sin embargo, también ahí radica su inconveniente: en la dificultad de especificar un tipo de actualización ó descuento apropiado.

La idea primigenia es que ese tipo de descuento coincide con el coste de oportunidad del capital usado en el proyecto de inversión. Sin duda, el tipo de actualización adecuado es el tipo de interés efectivo que al inversor le supone la utilización de recursos financieros.

Ahora bien ¿cuál es el coste del capital?. El mercado de capitales es, posiblemente, uno de los más imperfectos, puesto que, como señala Peumans (1967), "se descompone en mercados parciales según la naturaleza y modalidades de los préstamos, a cada uno de los cuales le corresponde, a su vez, un precio ó tipo de interés diferente". ¿A cuál de estos submercados accederá el agente inversor?.

Además, el agente inversor tiene limitada su capacidad de endeudamiento, lo que dará lugar a la existencia de un racionamiento de capital. En estas condiciones, el agente inversor ha de seleccionar, de entre los proyectos aceptables, aquellos que integrarán la cartera óptima, quedando proyectos aceptables sin realizar.

Por otro lado, parte del capital usado en el proyecto de inversión procederá de fondos propios del agente inversor, y estos fondos también han de ser remunerados. De no hacerlo de forma adecuada, las acciones de la empresa bajarán de precio. ¿Cuál es la remuneración adecuada del capital propio?

Ante esta situación real, en la literatura especializada existe una extensa división de opiniones sobre cual es el tipo de actualización adecuado. Sobre esta polémica se volverá posteriormente.

En condiciones ideales (independencia de los diversos proyectos de inversión, ambiente de certeza, y perfección del mercado de capitales) no hay fragmentación del mercado de capitales, y el inversor puede obtener todos los fondos que desea al tipo corriente de interés. Por ello, no existe una multiplicidad de tipos de interés, ni tampoco racionamiento de capital, y el inversor acepta todos los proyectos rentables. Por tanto, el tipo de interés del mercado mide, con precisión, la rentabilidad de las oportunidades marginales de inversión del agente. Por otro lado, el agente inversor, en su condición de prestamista, puede invertir cuantos fondos desee en el mercado al tipo de interés corriente.

En esta situación ideal, los prestamistas no distinguirán entre acciones y obligaciones, haciendo innecesaria la distinción entre capital propio y capital ajeno.

En definitiva, en las citadas condiciones ideales el costo de capital, tipo de actualización a usar en el criterio del valor capital, es el tipo de interés libre de riesgos.

Para el análisis de las ventajas e inconvenientes del criterio del Valor Capital, dentro del grupo de criterios al que pertenece, nos remitimos a los textos habituales de la materia: P.e. Mao (1974), Brealey-Miers (1991).

INTRODUCCION DE LA INFLACION.-

La inflación afecta a todas aquellas magnitudes que definen la inversión : corriente de cobros y pagos, tasa de actualización y en menor medida a la duración y al desembolso inicial. A título de ejemplo se va a analizar el caso, relativamente frecuente, en el que la cuantía de los flujos de caja es independiente del grado de inflación.

En este caso se encuentran aquellas inversiones cuya corriente de pagos y cobros se halla prefijada, generalmente, por un contrato, no revisable ante el cambio del nivel general de precios, tal como ocurre con muchos contratos de suministro, arrendamiento, etc.

En estos casos, el inversor recibe los flujos de caja que en un principio esperaba, sin contar con la inflación, pero con un

valor real cada vez menor debido al incremento acumulativo del índice general de precios, y la consiguiente pérdida de poder adquisitivo de la moneda. Por tanto, a la hora de calcular el valor capital de una inversión, en particular al actualizar, habrá que tener en cuenta, no solo el tipo de descuento, que es el precio del tiempo, sino también un segundo factor de homogeneización debido al efecto acumulativo de la inflación.

Así, si g_i es la tasa acumulativa de inflación del periodo i , el valor capital de una inversión vendrá dado por

$$VC = -A + \frac{Q_1}{(1+k_1)(1+g_1)} + \frac{Q_2}{(1+k_1)(1+k_2)(1+g_1)(1+g_2)} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)(1+g_1)(1+g_2)\dots(1+g_n)} \quad (2)$$

Esta fórmula puede expresarse de la siguiente forma

$$VC = -A + \frac{Q_1}{1+r_1} + \frac{Q_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{Q_n}{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)} \quad (3)$$

donde r_i es el tipo de descuento aparente del periodo i , mientras que k_i es el tipo de descuento real. La relación entre ambos es

$$(1+r_i) = (1+k_i)(1+g_i) \quad i=1,2,\dots,n \quad (4)$$

ó lo que es lo mismo

$$k_i = \frac{r_i - g_i}{1 + g_i} \quad (5)$$

INTRODUCCION DEL RIESGO.-

En todo lo, hasta ahora, expuesto no se ha hecho ninguna consideración sobre las variables que intervienen en la fórmula del valor capital, y ello puede inducir a considerarlas deterministas. Esta sería una hipótesis inaceptablemente simplificadora de la realidad económica.

El futuro de la inversión difícilmente puede ser conocido con precisión, pues todo un cúmulo de factores y agentes externos e incontrolables, ajenos al propio proyecto y al inversor, condiciona los resultados del mismo. A todo este conjunto de factores externos, en Teoría de la Decisión, se le conoce como estado de la Naturaleza.

Analizando el grado de exposición, ante el estado de la Naturaleza, de las variables que aparecen en la fórmula del V.C., es obvio que:

- el desembolso inicial del proyecto, por su proximidad en el tiempo, suele ser conocido con bastante precisión por lo que, muy razonablemente, puede considerarse determinístico. De hecho, toda la literatura especializada así lo hace.
- los sucesivos flujos de caja son inciertos, tanto más cuanto más alejados estén en el tiempo. Constituyen la principal fuente de riesgo de un proyecto de inversión y su tratamiento exclusivo ha copado la práctica totalidad de los estudios sobre la inversión arriesgada.
- la duración de un proyecto tampoco es conocida con certeza al

comienzo del mismo, pues depende de factores tan diversos como pueden ser el grado de desarrollo tecnológico ó la moda. Sin embargo, esta fuente de riesgo apenas ha sido considerada en la literatura; como señala Andrés de Pablo (1986) "en los libros publicados sobre análisis de inversiones se suele abordar, en un capítulo específico, la toma en cuenta de la duración como variable de decisión, de carácter no aleatorio, dentro de la problemática de renovación de equipos industriales".

- los sucesivos tipos de descuento siempre se han supuesto perfectamente determinados por el agente inversor. Dejando al margen la polémica sobre cual es el tipo de descuento apropiado (el tipo de interés libre de riesgos, el coste medio de la estructura financiera del inversor, o cualquier otro) y sea cual fuere la opción elegida, p.e. el tipo de interés libre de riesgos, para nosotros es evidente la incertidumbre existente sobre el valor que tomará esa magnitud en periodos venideros. Incluso si nos referimos solo a un periodo, y es necesario tener en cuenta una actualización por inflación es evidente la necesidad de tener en cuenta el carácter incierto del tipo de actualización.

Es sabido el gran esfuerzo que las autoridades económicas dedican al control de los tipos de interés, por la importancia que estos tienen dentro del conjunto de la economía. También es sabido que, dentro de unos márgenes, estos esfuerzos son válidos. Por ello no deja de ser curioso que, a nivel de un proyecto de inversión, donde normalmente no se conocen con certeza ni siquiera

las intenciones al respecto de la autoridades económicas, no se considere la incertidumbre sobre estas magnitudes.

El objetivo de esta tesis doctoral es el desarrollo de modelos matemáticos para incorporar la incertidumbre en los tipos de actualización adecuados para la valoración de un proyecto de inversión.

METODOLOGIA.-

Bajo todo proyecto de inversión subyace un problema de decisión que puede desarrollarse en tres tipos de ambiente, según la información disponible sobre el estado de la Naturaleza:

-Ambiente de certidumbre, cuando es perfectamente conocido el estado de la Naturaleza, y por tanto son perfectamente conocidas todas las variables que intervienen en el problema.

-Ambiente de riesgo, cuando son conocidos todos los posibles estados de la Naturaleza, así como una distribución de probabilidad sobre los mismos. (Probabilidad de que un determinado estado, de entre todos los posibles, sea el que se presenta en el proyecto de inversión).

-Ambiente de incertidumbre, en el que solo son conocidos todos los estados que puede presentar la Naturaleza, y no se dispone de ninguna información adicional.

La Teoría Matemática de la Decisión dispone de unos criterios clásicos (de Laplace, de Wald, de Hurwicz, de Savage, etc) para abordar los problemas que se desenvuelven en ambiente de incertidumbre. Cada uno de estos criterios conduce a un resultado distinto, no pudiéndose afirmar la superioridad de uno de ellos sobre los otros. En este sentido, Milnor enunció diez axiomas, que se considera corresponden a un comportamiento racional y lógico, comprobando que ninguno de estos criterios los cumple en su totalidad. Por tanto, el comportamiento del decisor mantiene una componente arbitraria, que se manifiesta en el criterio elegido para tomar su decisión.

Puesto que, filosóficamente, la hipótesis de ignorancia total es tan irreal como la de certidumbre, ante una Naturaleza incierta resulta imposible evitar una ponderación de sus diversos estados. Por ello, y vista la imposibilidad de eliminar la subjetividad del decisor, se ha llegado a la conclusión de que lo más adecuado para tratar estas situaciones de incertidumbre es transformarlas en otras de riesgo, mediante la asignación de probabilidades "a priori" ó "subjetivas".

La probabilidad subjetiva es un número que cuantifica el concepto cualitativo de verosimilitud del sujeto decisor, y se basa en su experiencia, en su intuición, en sus sentimientos ó en sus conocimientos. Es frecuente que la asignación de estas probabilidades subjetivas sea el fruto de un proceso de acumulación de información, en el que se conjugan informaciones

objetivas y subjetivas mediante la aplicación del Teorema de Bayes.

Esta idea de probabilidad ha sido rehabilitada por los teóricos de la Decisión Estadística, al mostrarse tremendamente útil en la toma de decisiones económicas. Véanse las obras de Schlaifer (1959), Savage (1954), y Raiffa (1968).

Descartados, por utópicos, los ambientes de certidumbre y de incertidumbre, solo queda el ambiente de riesgo, en el que cada alternativa conduce a una distribución de probabilidad sobre los posibles resultados. En este ambiente, un criterio de decisión es el de la esperanza matemática, que solo tiene en cuenta el primer momento de la distribución citada. Es decir, el decisor elegirá aquella línea de acción que le proporcione la máxima esperanza matemática de beneficio.

El criterio de la esperanza matemática no puede aplicarse racionalmente nada más que a los fenómenos repetitivos, ya que solamente a través de esa reiteración se logra la convergencia de la ganancia media hacia la esperanza matemática de la ganancia. Por ello, este criterio tiene un valor práctico limitado, pues la mayoría de los problemas económicos, y en particular los de análisis de inversiones, no presentan ese carácter reiterativo.

Cuando el problema de decisión se presenta una sola vez se hace patente la deficiencia de este criterio, que no es otra que

la de caracterizar una distribución a través de su esperanza, desechando otras peculiaridades de la misma que pueden resultar de interés. Piénsese que, ni aún conociendo todos los momentos de una distribución, los que existan, puede afirmarse la completa caracterización de la misma. Ver Rohatgi (1976) pag 97-98.

Evidentemente dos inversiones con la misma esperanza de valor capital pueden no ser indiferentes para el inversor, debido precisamente al distinto grado de riesgo de una y otra. El riesgo de un proyecto de inversión viene definido por la variabilidad de su valor capital, y es habitual tomar como medida del mismo la varianza, ó la desviación típica, de dicha magnitud. Por tanto, una de las características ignoradas por el criterio de la esperanza, y que es de utilidad para el inversor, es la varianza de la distribución.

Para suplir estas deficiencias del criterio del valor esperado es útil la Teoría de la Utilidad de von Neumann y Morgenstern, surgida ante la evidencia empírica de que iguales valores monetarios, utilizados por distintos decisores, tienen un valor subjetivo distinto.

Según esta teoría, cada decisor tiene su propia función de utilidad, que es creciente, con el valor monetario, y suele ser cóncava, es decir la utilidad marginal es positiva y decreciente. Esta situación conduce a que la utilidad de la esperanza de un valor monetario sea superior a la esperanza de la utilidad, y

corresponde a los decisores con aversión al riesgo. Por supuesto, la teoría de la Utilidad contempla la existencia de decisores de todo tipo: los que tienen aversión al riesgo, los que son indiferentes ante el riesgo y los amantes del riesgo; pero lo habitual en el terreno de la inversión empresarial es que el riesgo no sea agradable y por tanto digno de penalización.

Debido a las dificultades de construcción de la función de utilidad, es habitual en análisis de inversiones suponer que esta pueden ser caracterizada por μ y σ , media y desviación típica de la distribución, y el criterio de decisión será la maximización de la utilidad.

TRATAMIENTO DEL RIESGO.-

Originariamente, el estudio del riesgo en los proyectos de inversión solo tuvo en cuenta el proveniente de los flujos de caja, y en la adecuación del criterio del valor capital a esta situación se han usado dos metodologías: el ajuste del tipo de descuento, y el equivalente cierto.

La más popular, por su fuerte soporte intuitivo, ha sido el ajuste del tipo de descuento. Consiste en exigir un tipo de descuento más alto a las inversiones con más riesgo, con lo cual a mayor riesgo disminuirá el valor capital del proyecto. Es habitual añadir, al tipo de interés libre de riesgo (utilizando, p.e., el

tipo de las obligaciones del Estado), una prima por riesgo, obteniéndose así el tipo de descuento adecuado.

El problema radica en la determinación de esa prima, que las más de las veces se hace subjetivamente. Naturalmente, el primer concepto que ha de aclararse, y medirse, para la determinación de esa prima, es el de riesgo del proyecto de inversión. El concepto se fija como la posible variabilidad de los resultados de la inversión y hay un acuerdo general de medirlo a través de la desviación típica de esos resultados. En otras palabras, previamente a la medición del riesgo, y por tanto a la determinación de la prima, hay que calcular el valor capital del mismo, y ¿que tipo de descuento hay que usar para ese cálculo?

Si solo se consideran los activos que cotizan en Bolsa, la situación mejora algo. Trás la Teoría de la Cartera de Markowitz, que formuló con rigor matemático el efecto de la diversificación sobre el riesgo de una cartera de títulos, apareció con fuerza el concepto de riesgo sistemático, como aquel que no puede eliminarse por diversificación. La modificación de Sharpe traspasó este concepto desde la cartera (conjunto de títulos) a un único título. En este contexto, el riesgo sistemático es la sensibilidad del rendimiento del título frente a un índice general (volatilidad). La medición de la volatilidad de un título es posible gracias a los registros históricos que se poseen de los títulos cotizados en Bolsa.

A partir de aquí, se han elaborado teorías, como el CAPM y el APT, que, bajo la idea de que la remuneración de un activo depende exclusivamente de su riesgo sistemático, ayudan en la determinación de la prima por riesgo. El contraste empírico de estas teorías con el mercado, en muchas ocasiones, es decepcionante, lo que ha llevado a sus autores a considerarlas, únicamente, como orientativas.

Si estos problemas aparecen en el mercado bursátil, fácil es imaginar lo que ocurrirá con la gran mayoría de los activos, que no cotizan en Bolsa. El inversor que compra en Bolsa tiene fácil la diversificación, en cambio para el inversor en esos otros activos productivos que no cotizan, y debido al tamaño de la inversión, es imposible. Este argumento hace que lo que era plausible para aquellos, remuneración en función del riesgo sistemático, no lo sea para estos, que deberán exigir la remuneración en función del riesgo total de la inversión. Con ello queda anulada la posible validez de estos modelos, basados en la volatilidad, en el análisis de los proyectos de inversión en activos no cotizables en Bolsa.

La metodología del equivalente cierto, en una formulación primitiva, consiste en sustituir cada uno de los flujos de caja arriesgados por su equivalente cierto, descontándolos posteriormente al tipo de interés libre de riesgos.

Para obtener el equivalente cierto de un flujo de caja

aleatorio habrá que tener en cuenta la función de utilidad del inversor. De este enfoque, aunque con una formulación más amplia, nos ocuparemos en el próximo capítulo, si bien ya puede apreciarse que es mucho más acorde con la Teoría de la Decisión que el ajuste del tipo de descuento.

CAPITULO II

ANTECEDENTES Y ESTADO ACTUAL DEL TRATAMIENTO DEL RIESGO

En el capítulo anterior, se ha esbozado la formulación primitiva de la metodología conocida como equivalente de certeza. Esta formulación solo daba cabida a la aleatoriedad de los N flujos de caja del proyecto de inversión. Para nuestro propósito, es conveniente una formulación más amplia, consistente en trabajar con la variable aleatoria Valor Capital de la inversión, obtenida descontando al tipo de interés sin riesgos de cada periodo de vida.

En el supuesto de que, para el inversor, solo sean relevantes, cara a tomar una decisión, la media y la desviación típica de la distribución seguida por el Valor Capital, son evidentes dos cosas:

- 1.- la función de utilidad propia del inversor, sea cual sea, queda perfectamente determinada por esos dos parámetros.
- 2.- cualquier distribución puede ser representada por un punto del semiplano superior del plano (μ, σ) .

Aparece, así, el concepto de curva de indiferencia, como el lugar geométrico de los puntos del plano que conducen a la misma utilidad esperada. El punto de corte de cada una de estas curvas

con el eje $\sigma=0$ se conoce con el nombre, tremendamente justificado, de equivalente cierto de todas las distribuciones cuya representación yace en la citada curva. Por tanto, el problema de decisión entre distribuciones, ambiente de riesgo, se transforma en un problema de decisión entre sus equivalentes ciertos, ambiente de certidumbre.

En el caso que nos ocupa, una vez calculados los dos primeros momentos de la variable aleatoria Valor Capital, quedará determinada la curva de indiferencia en la que yace, y por tanto su equivalente cierto; este será el que determine la deseabilidad, rentabilidad, del proyecto objeto de estudio.

Naturalmente, la aleatoriedad del Valor Capital puede proceder de cualquiera de las variables que intervienen en él. Históricamente, se comenzó suponiendo que la incertidumbre provenía exclusivamente de los flujos de caja. De hecho, la práctica totalidad de las obras y trabajos publicados, sobre el análisis de proyectos de inversión arriesgados (proyectos en ambiente de riesgo), se centran en el tratamiento de la aleatoriedad de los flujos de caja, considerando deterministas las demás variables que intervienen en la fórmula del Valor Capital.

La metodología seguida en ellos recorre las siguientes etapas:

- 1.- Especificación de las distribuciones de probabilidad (subjetiva) seguidas por los sucesivos flujos de caja.

- 2.- Formulación de hipótesis acerca del comportamiento mutuo de las n variables aleatorias Q_n .
- 3.- Cálculo de los dos primeros momentos de la variable aleatoria Valor Capital.
- 4.- Estudio de la distribución seguida por la variable aleatoria Valor Capital, lo que permitirá el cálculo de las probabilidades de que el Valor Capital sea superior ó inferior a una cantidad determinada.

Al análisis de la primera etapa se dedica el próximo apartado. Por ello, aquí solo se reflejan unos breves comentarios acerca de las restantes.

La segunda etapa es imprescindible para poder llevar a cabo la tercera, más concretamente para calcular la varianza de la variable Valor Capital. El cálculo de la varianza fué estudiado por F. S. Hillier (1963), distinguiendo tres casos:

- a) los distintos flujos de caja son independientes
 - b) los flujos de caja están perfectamente correlacionados
 - c) una parte de los flujos de caja está perfectamente correlacionada, mientras que otra parte es independiente.
- Este tercer caso es un híbrido de los dos anteriores, y es la situación en la que se encuentran la mayor parte de las inversiones.

En la cuarta etapa se estudia el comportamiento probabilístico del Valor Capital, que como puede observarse es la

suma de diversas variables aleatorias. En virtud del Teorema Central del Límite, la suma de variables aleatorias independientes tiende a la distribución normal cuando el número de sumandos tiende a infinito, siendo esta convergencia bastante rápida.

Si el número de sumandos es escaso, ó si los flujos de caja no son independientes, ya no se puede fundamentar la hipótesis de normalidad en el Teorema Central del Límite. La variable aleatoria Valor Capital puede seguir cualquier otra ley de probabilidad, y para descubrirla habrá que realizar contrastes de adherencia. Comoquiera que estos contrastes requieren unos datos de los que no se dispone, aunque podrían generarse por simulación, y de unos cálculos laboriosos, es muy frecuente que el analista de inversiones acepte la hipótesis de normalidad sin más.

En el supuesto de que no se conozca la ley de probabilidad del Valor Capital, y que tampoco se pueda aventurar ninguna conjetura acerca de la misma, siempre se podrá utilizar la desigualdad de Chebycheff para el cálculo (aproximado) de las probabilidades de que el Valor Capital esté comprendido en un determinado intervalo.

No puede dejarse en el olvido la gran utilidad de las metodologías de simulación para el cumplimiento de las etapas tres y cuatro. Cumplidas las dos primeras etapas, es decir, modeladas matemáticamente las características esenciales, se aplican técnicas de Monte Carlo a cada una de las variables del modelo,

con la intención de obtener una aproximación de la distribución de probabilidad seguida por el Valor Capital.

La simulación, para la cual es imprescindible el uso de computadores digitales, es el método más usado cuando los métodos analíticos no son factibles o son intratables.

MODELOS PROBABILISTICOS USADOS PARA EL FLUJO DE CAJA.-

Según la información de que se disponga el modelo usado será uno u otro. En un ambiente propiamente de riesgo el modelo más usado ha sido la distribución normal, por las indudables ventajas que presenta su tratamiento analítico posterior. En ambiente de incertidumbre, donde la información disponible es escasa, fundamentalmente, se han usado tres tipos de modelos:

- la distribución uniforme, que solo requiere dos estimaciones, una pesimista y otra optimista, (heredera directa del criterio de Laplace).
- modelos que usan tres estimaciones, una pesimista, otra optimista y otra más probable.
- modelos con información adicional (sobre las tres estimaciones clásicas)

A continuación se pasa revista a los modelos más frecuentes de entre los del segundo y tercer grupo.

1.- El PERT clásico.-

Mención especial, por ser el pionero en el paso de un ambiente de incertidumbre a otro de riesgo, merece el modelo probabilístico usado en el PERT clásico.

La, ya antigua, técnica PERT (Program Evaluation and Review Technique) surgió, a finales de la década de los cincuenta, con el fin de facilitar la dirección fructífera de proyectos a gran escala, que requiere la planificación, programación y coordinación de numerosas actividades interrelacionadas.

La característica más importante de cada una de estas actividades es su duración, que, habitualmente, no es bien conocida y está fuertemente sometida al azar. Dado que la técnica PERT se ideó para su aplicación inmediata a un proyecto de investigación, las actividades consideradas son totalmente nuevas, y sobre ellas no se poseen registros históricos que puedan dar una idea de cual es la distribución probabilística de su duración.

El tratamiento que diseñaron, los autores del PERT, para la duración aleatoria de cada actividad, fué duramente criticado desde los primeros tiempos. Véase Grubbs (1962). Estas críticas, aunque vivas, fueron acallándose debido a los muy buenos resultados prácticos obtenidos al aplicar la mencionada técnica. Pero, con el transcurso del tiempo, la técnica PERT, o más concretamente, el tratamiento que aplica a las duraciones aleatorias de las actividades se aplicó al análisis de los flujos de caja de un proyecto de inversión. Esta nueva aplicación agravó

las deficiencias del método resaltadas por las críticas ya existentes.

Este hecho junto con la pregunta abierta lanzada por Sasieni (1986), en 1986, en la que entonaba el "mea culpa" por haber reproducido, en su libro "Foundations of Operations Research" (1965), las fórmulas del tratamiento PERT original, sin haberlas analizado previamente, han revitalizado las críticas y han hecho renacer la atención prestada, en la literatura, hacia estos temas.

Littlefield y Kandolph (1987) respondieron a la pregunta de Sasieni, resumiendo el contenido del documento original de la Marina Norteamericana (1958), harto difícil de conseguir. El procedimiento, que se podría llamar "clásico", esquemáticamente, es el siguiente:

- 1) la duración de una actividad concreta es una v.a. de la que no se dispone de información muestral.
- 2) esa v.a., lo es sobre un intervalo finito y además es unimodal.
- 3) la mayoría de los autores están de acuerdo en usar la distribución beta como modelo para la distribución de esa v.a., por corresponder a una v.a. que reúne los requisitos anteriores (siempre que sus parámetros p y q sean mayores que uno) y porque la familia de las distribuciones beta

puede adoptar una amplia variedad de asimetrías y curtosis.

- 4) Las características aleatorias de la distribución beta, con $p > 1, q > 1$ (acampanada) son:

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1} \cdot \beta(p,q)} \cdot (x-a)^{p-1} \cdot (b-x)^{q-1} \quad \text{si } a < x < b \quad (1)$$

$$E(x) = \frac{pb + qa}{p+q} \quad (2)$$

$$V(x) = \frac{(b-a)^2 pq}{(p+q+1)(p+q)^2} \quad (3)$$

$$\text{(moda) } m = \frac{b(p-1) + a(q-1)}{p+q-2} \quad (4)$$

teniendo en cuenta las ecuaciones (2) y (4), tenemos que

$$E(x) = \frac{a + (p+q-2)m + b}{p+q} \quad (5)$$

- 5) Para seleccionar una distribución concreta, dentro de esta familia, a un experto, en la realización de actividades afines a la que nos ocupa, se le piden tres estimaciones de la duración de la misma: una duración optimista, a , otra pesimista, b , y una tercera más probable, m .

- 6) Conocidos a y b , mediante el cambio de variable

$$z = \frac{x - a}{b - a} \quad (6)$$

se puede "estandarizar" la distribución beta, quedando sus

características aleatorias como sigue

$$f(z) = \frac{1}{\beta(p,q)} \cdot z^{p-1} \cdot (1-z)^{q-1} \quad \text{si } 0 < z < 1 \quad (7)$$

$$\mu = E(z) = \frac{p}{p+q} \quad (8)$$

$$\sigma^2 = V(z) = \frac{pq}{(p+q+1) \cdot (p+q)^2} \quad (9)$$

$$m = \frac{p-1}{p+q-2} \quad (10)$$

$$\mu = \frac{1 + (p+q-2)m}{p+q} \quad (11)$$

Es conveniente resaltar que la m , que aparece en las fórmulas (4) y (5), no es la misma que aparece en las fórmulas (10) y (11). Esta última se obtendría de aquella, mediante el cambio de variable (6). No creyendo que haya posibilidad de confusión, se han notado ambas mediante la misma letra.

7) Una vez realizada la "estandarización", solo queda un dato por utilizar: m ; y con él, se han de determinar los dos parámetros, p y q , que individualizan al elemento concreto, de la familia de distribuciones beta, que va a utilizarse como modelo.

Obviamente, ello es imposible, por lo que llegados a este punto, ó bien se realiza alguna hipótesis simplificadora, ó bien se recaba más información del experto.

8) Teniendo en cuenta que el experto, al que se le pide información, no tiene porqué tener una formación estadística, es evidente la dificultad de diseñar cual será la información solicitada, pues por un lado debe tener un fuerte soporte intuitivo, y por otro lado debe incorporarse sin excesiva dificultad al armazón teórico de la familia beta. Esta dificultad, junto con la prisa que embargaba a los creadores del PERT, los hizo decantarse por la realización de una hipótesis simplificadora. Concretamente, que el intervalo de variabilidad es de una amplitud igual a seis desviaciones típicas, ó lo que es lo mismo, que la varianza de la distribución beta "estandarizada" es $1/36$.

¿ Por qué $1/36$? Simplemente por ser muy utilizada en los diagramas de control de calidad, y en definitiva, por analogía con la distribución normal, para la que se sabe que, entre -3σ y $+3\sigma$ está el 99'74% de la masa de la distribución.

9) Trás realizar esta hipótesis simplificadora, la situación analítica es la siguiente.

Al conocer m , disponemos de la siguiente relación lineal entre los parámetros p y q

$$q = \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \cdot p + \left(2 - \frac{1}{m} \right) \quad (12)$$

LLevando (12) a (9), resulta

$$\sigma^2 = \frac{m^2 p [p(1-m) + (2m-1)]}{(p+3m-1)(p+2m-1)^2} \quad (13)$$

Igualando a $1/36$, tenemos una ecuación cúbica en p , que para cada m , comprendido entre 0 y 1, solo tiene una solución $p > 1$. Este sería el valor del parámetro p , que junto con el valor de q , obtenido a partir de (12), individualizaría a la distribución beta adoptada como modelo.

- 10) En la metodología PERT, tan solo interesa la media y la varianza de la duración de la actividad, i.e. la media y la varianza de la distribución que se acaba de individualizar.

La varianza, ya se ha supuesto que, es $1/36$, y para obtener la media habría que ir, con el valor de p obtenido al resolver (13), y con el valor de q , obtenido a partir de p mediante (12), a la fórmula (8) ó bien a la fórmula (11).

- 11) Como puede verse, el camino es engorroso, y para hacerlo más cómodo al usuario, se representaron gráficamente los valores de la media, obtenidos por el largo camino antes indicado, frente a los valores de la moda, que a ellos conduce, y ello para todos los valores de m comprendidos entre 0 y 1, con un salto de 0.025. Encontrándose una relación casi lineal entre ambas variables.

La recta de regresión mínimo cuadrática, con esos 41

puntos muestrales es

$$\mu = 0.1736 + 0.6513 m \quad (14)$$

con un coeficiente de correlación lineal 0.998

12) Aún cuando ya se había simplificado mucho el paso desde la moda, m , a la media, μ , se optó por usar esta otra relación lineal

$$\mu = \frac{1 + 4m}{6} \quad (15)$$

que, siendo muy próxima a la mínimo cuadrática, es mucho más simple de recordar y tremendamente atractiva. En la fórmula (15) se obtiene la media de la distribución como una media ponderada de los extremos del intervalo y de la moda, concediéndole a esta última una ponderación 4, muy superior a la de los extremos.

Hasta aquí, la descripción del procedimiento clásico que, en resumen, considera que la duración de una actividad cualquiera es una variable aleatoria beta, cuya media se obtiene a partir de la fórmula (14), y cuya varianza es $1/36$.

2.- El modelo triangular.-

La distribución triangular constituye un modelo alternativo al de la beta. Para mejor comparación con la distribución beta "estandarizada", vamos a hablar de la distribución triangular entre 0 y 1, cuya gráfica puede verse en la Fig.1.

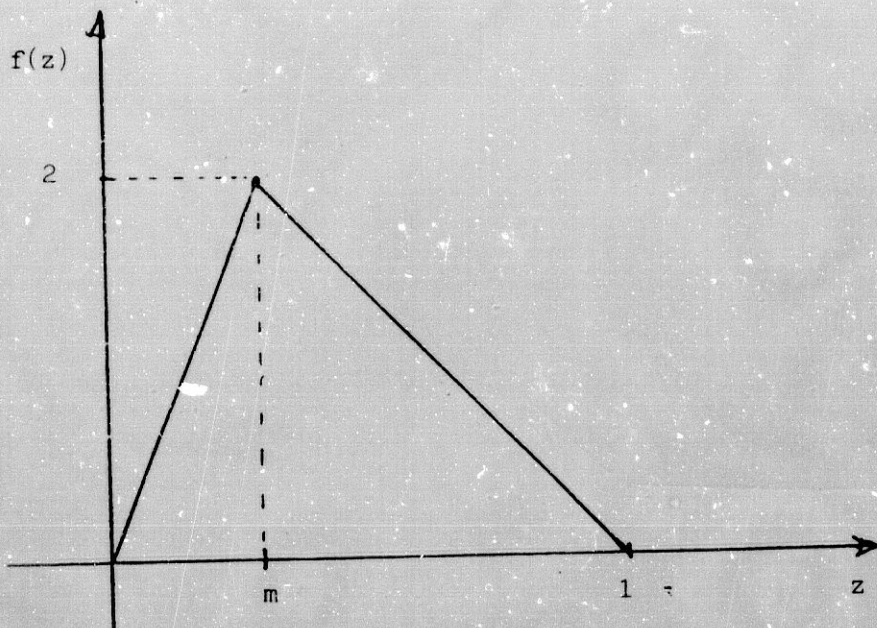


Fig. 1.- La distribución triangular

Las características aleatorias de esta distribución son las siguientes:

$$f(z) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{z}{m} & \text{si } 0 \leq z \leq m \\ 2 \cdot \frac{1-z}{1-m} & \text{si } m \leq z \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$\mu = \frac{1+m}{3} \quad (17)$$

$$\sigma^2 = \frac{m^2 - m + 1}{18} \quad (18)$$

Como puede apreciarse, este modelo es menos polémico que el clásico, por la sencilla razón de que queda perfectamente determinado con las tres estimaciones que se solicitan del experto, sin necesidad de hacer hipótesis arbitrarias. Otra característica de este modelo, es que su varianza es superior,

para todo m , a $1/36$, lo cual, desde el punto de vista de su aplicación al análisis del flujo de caja, supone una gran ventaja frente al PERT clásico.

¿Por qué no se ha usado este modelo alternativo?. Quizás porque la clase de las distribuciones beta es, esencialmente, más flexible, al disponer de más parámetros, pero como apuntaron MacCrimmon y Ryavec (1964), el procedimiento PERT no extrae ninguna ventaja de esta mayor flexibilidad. Quizás porque le otorga una menor ponderación al valor de m frente a la otorgada a los valores extremos, a y b . (Recuérdese que la ponderación 4 ha salido de una aproximación sobre una hipótesis arbitraria). Quizás, porque la función de densidad de la triangular no es derivable en la moda, y la de la distribución beta, si lo es. En este punto, cabe citar el trabajo de Herrerías y Pérez-Rodríguez (1991), en el que siguiendo el esquema clásico, que antes se ha expuesto, se sustituye la hipótesis de que la varianza es $1/36$, por la menos optimista de que la varianza de la distribución beta es la dada por la fórmula (18); el modelo obtenido es una beta (función de densidad derivable en cualquier punto de su dominio), cuya media puede calcularse, de forma aproximada, por la ecuación

$$\mu = \frac{71 + 108.m}{250} \quad (19)$$

siempre que $0.1162 < m < 0.8838$. Aunque esta ecuación no es excesivamente fácil de recordar, sigue manteniendo el atractivo de expresar la esperanza como una media ponderada entre los extremos del intervalo y del valor más probable. La ponderación otorgada al

valor más probable es $108/71 \cong 1.52$ (superior a la que le otorgaba el modelo triangular, pero inferior a la que le otorgaba el PERT clásico).

3.- Criticas al PERT clásico.-

La critica más feroz al modelo clásico, fué formulada por Grubbs en 1962. Si se comparan las fórmulas (11) y (15), es obvio que, al usar el PERT clásico, se está suponiendo que

$$p + q = 6 \quad (20)$$

como, además se suponía que la varianza es $1/36$, ello equivale a que

$$p \cdot q = 7 \quad (21)$$

Si se resuelve el sistema formado por las ecuaciones (20) y (21), se obtienen dos soluciones distintas,

$$\text{Solución 1 } \begin{cases} p = 3 + \sqrt{2} \\ q = 3 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Solución 2 } \begin{cases} p = 3 - \sqrt{2} \\ q = 3 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Esto quiere decir que, al aplicar el procedimiento clásico, no se elige libremente un miembro de la familia $\{\beta(p,q) / p,q > 1\}$, sino que solamente se puede elegir entre dos distribuciones: $\beta(3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$ y $\beta(3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$.

Como puede apreciarse, estos dos modelos son asimétricos, uno tiene asimetría positiva, y el otro negativa. El modelo elegido será aquel cuya asimetría coincide, en signo, con la que hace sospechar la posición del m , proporcionado por el experto, con respecto al punto medio del intervalo. Concretamente:

- si $m < 0.5$ se adoptará la $\beta(3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2})$
- si $m > 0.5$ se adoptará la $\beta(3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$

A la vista de esta situación, surgen tres preguntas:

- 1.-¿Dónde está la flexibilidad del modelo clásico?. Obsérvese que solo se dispone de dos trajes, uno para los que están cargados del hombro izquierdo, y otro para los cargados del hombro derecho. Cabe pensar que a nadie le sentaran bien estos trajes, pero cuanto mayores sean las necesidades de ir bien vestido, tanto más inadecuados serán estos trajes. (Nos referimos a la mayor inadecuación del PERT clásico cuando lo aplicamos al análisis de los flujos de caja de un proyecto de inversión).
- 2.-¿Qué modelo aplicamos cuando $m=0.5$? ¿Qué traje le ponemos a una persona que no tenga ningún hombro cargado?. A esta situación, se le puede dar una solución de urgencia considerando que en ella se cumple que $p=q$, (véase relación (12)) y que el resultado de la ecuación (11) siempre será el mismo, sea cual fuere el valor de p . Por tanto, en este caso, la relación (15) es irrelevante, (y por ende, la (20)), quedandonos tan solo con la relación (21). Resumiendo, si $m = 0.5$, los parámetros del modelo beta son $p = q = \sqrt{7} \cong 2.645751$. El Prof. Egon S. Pearson, sin duda redondeando, sugirió que los parámetros adecuados, en este caso simétrico, eran $p = q = 2$.
- 3.-Teniendo en cuenta que estos modelos están perfectamente determinados, y por tanto cada uno tiene su media y su

moda perfectamente determinadas, ¿para qué pedirle al experto un valor de m ? (que le cuesta mucho esfuerzo precisar), ¿no bastaría con preguntarle a qué lado de 0.5, cree él que se encontrará el valor más probable?

El uso de la fórmula (15), junto con una varianza igual a $1/36$, con un valor de m que no coincida con el de la moda de uno de estos dos modelos, nos hace cometer incoherencias, que como, ya detectó Thomas (1967), son la causa de los numerosos problemas que se presentan a la hora de simular la duración de una actividad, y por tanto una red PERT. Estos problemas no se presentarían si el modelo adoptado fuese el triangular.

4.- Posibles soluciones.-

Analizado el esquema clásico, y conocida la demoladora crítica de Grubbs, cabe pensar que el problema radica en que la aproximación lineal (15) es excesivamente forzada. Así lo pensaron Farnum y Stanton (1987), y para analizarla, eludiendo la resolución de la molesta ecuación cúbica, se basan en que la varianza de la distribución siempre es $1/36$, sean cuales fueren los valores de los parámetros de p y q (hipótesis clásica), en particular

$$\sigma^2(p-1, q-1) = \sigma^2(p, q) = 1/36 \quad (22)$$

y en la evidencia, que no deja de ser ingeniosa, de que la moda de la distribución $\beta(p, q)$ coincide con la media de la distribución $\beta(p-1, q-1)$. A partir de estas dos observaciones, llegan a la

siguiente relación entre la media y la moda

$$\mu = \frac{(36m^2+1)(1-m)}{(36m+1)(1-m) + m} \quad (23)$$

Sin más que representar gráficamente, puede verse que (15) es una buena aproximación de (23), siempre que m esté relativamente centrado; los autores afirman que siempre que $0.13 < m < 0.87$. Para los valores extremos de m , inferiores a 0.13 ó superiores a 0.87, Farnum y Stanton proponen sendas modificaciones tanto de la fórmula que permite calcular la media, a partir de la moda, como de la fórmula que permite calcular la varianza, que deja de ser una constante para depender de m .

Otra posibilidad que disminuiría la rigidez del modelo, sin eliminarla totalmente, y que resuelve todas las incoherencias, y por tanto los problemas a la hora de simular, es la esbozada por Gallagher (1987).

Consiste en sustituir la hipótesis de varianza $1/36$ por la de validez de la fórmula (15). En otras palabras, ahora se supone que $p+q=6$. Resolviendo el sistema, formado por esta ecuación junto con la (12), se obtiene

$$\begin{aligned} p &= 1 + 4.m & \text{si } 0 < m < 1 \\ q &= 5 - 4.m \end{aligned} \quad (24)$$

para todo m , inclusive para $m = 0.5$, con lo cuál queda perfectamente individualizado un elemento de la familia beta. La varianza de esta distribución se obtiene al sustituir (24) en (9)

$$\sigma^2 = \frac{(1 + 4.m)(5 - 4.m)}{7 \cdot 36} \quad (25)$$

La gráfica de esta función, que puede verse en la Fig.2, es

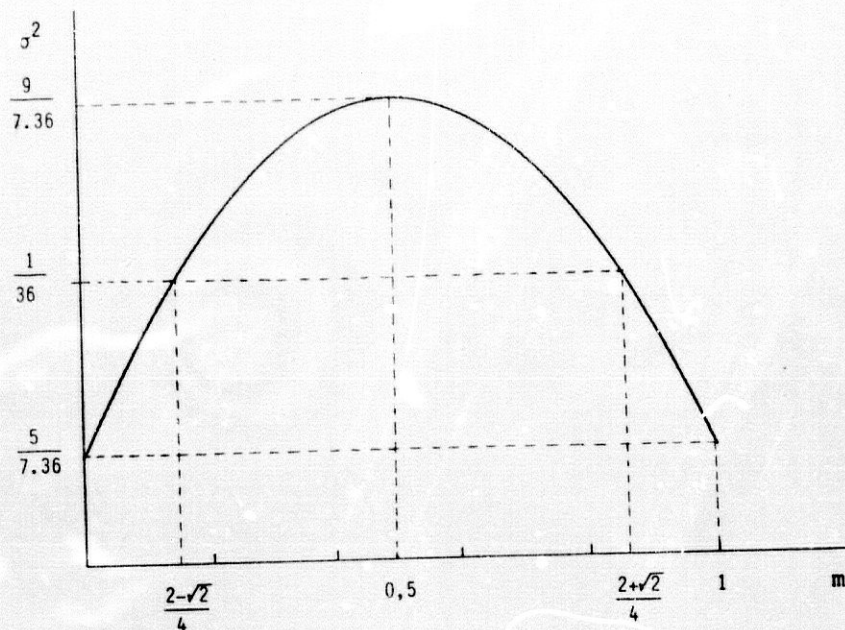


Figura 2.- varianza de la beta en función de m

una parábola cóncava cuyo vértice se encuentra en $m=0.5$. Como puede verse, la varianza toma valores en el intervalo $5/(7.36)$, $9/(7.36)$, cuyo punto medio es $1/36$.

A la vista de esta gráfica, y teniendo en cuenta que lo más frecuente, en la práctica, es que los valores de m se encuentren relativamente centrados, es obvio que al usar $1/36$, como aproximación de la varianza, lo que estamos haciendo es minorarla, cosa que por principio no es nada conveniente.

El inconveniente que tiene esta alternativa es la

"dificultad" de cálculo de la varianza, pero creemos que en los tiempos actuales, no estamos a finales de la década de los 50, esta dificultad ha desaparecido gracias a los minúsculos y rápidos medios de cálculo.

Nos encontramos, ahora mismo, en una situación muy parecida a la que, desde un principio, nos brindaba el modelo triangular. Es decir, se han eliminado rigideces del PERT clásico, pero aún no se saca ventaja de la mayor flexibilidad modeladora de la familia beta.

¿Qué efecto tiene la hipótesis $p+q = 6$?. La familia beta entre 0 y 1, con parámetros p y q mayores que 1, y con la moda situada en el punto m , incluye como casos extremos, véase Figura 3, los siguientes:

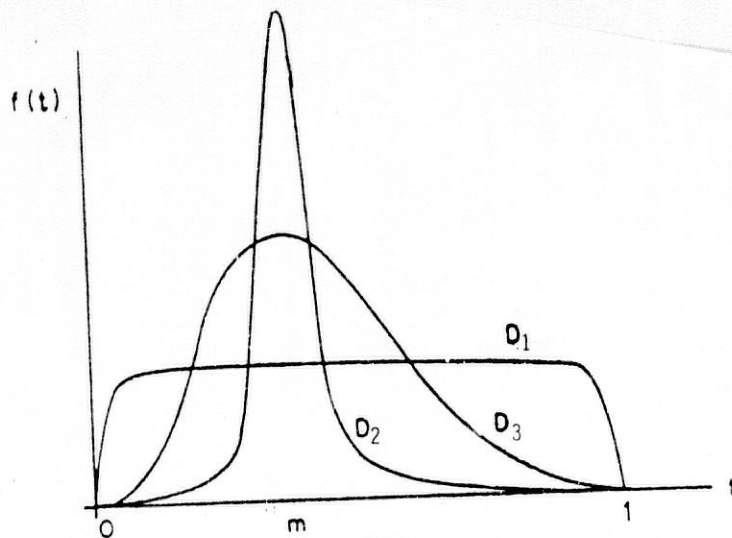


Fig.3.- Algunos elementos de la familia beta

- La distribución D_1 , que tiene un máximo muy suave en el punto de abscisa m , y es una distribución casi rectangular (uniforme). De hecho la distribución uniforme entre 0 y 1 está incluida dentro de la familia beta, entre 0 y 1, y se obtiene cuando $p = q = 1$.
- La distribución D_2 , cuyo máximo en el punto m es tremendamente puntiagudo. Esta distribución es casi degenerada en el punto $x=m$.

Evidentemente, la varianza de cualquier miembro de la familia estará acotada, por uno y otro lado, por las varianzas de estos dos elementos extremos. La varianza de D_2 es, prácticamente, cero, mientras que la varianza de D_1 es aproximadamente $1/12$. Por tanto, podemos afirmar que la varianza, σ^2 , de una distribución beta puede variar entre

$$0 < \sigma^2 < 1/12 \quad (26)$$

Volviendo la vista atrás, vemos que, con la hipótesis $p+q=6$, la varianza tomaba valores entre $5/7.36$ y $9/7.36$. En pocas palabras, esta hipótesis limita, fuertemente, la variabilidad de la varianza del modelo, siendo más grave, desde el punto de vista de la aplicación al análisis de los flujos de caja, la limitación efectuada por la parte superior del rango de variación. Es, pues, evidente la necesidad de eliminar esta restricción.

5.- Modelos beta generalizada.-

En la línea de eludir la hipótesis analizada en el apartado

anterior, cabe citar a los autores Golenko-Ginzburg (1988) y Herrerías (1989,1992). Ambos, simultáneamente y por caminos distintos, llegan a resultados similares.

El camino seguido por Golenko-Ginzburg es similar al expuesto anteriormente. Haciendo $p+q=K+2$, y recurriendo a la relación (12), se obtiene que

$$\begin{aligned} p &= 1 + K.m & \text{si } 0 < m < 1 & \quad (27) \\ q &= (K+1) - K.m \end{aligned}$$

Llevando estas expresiones a (11) y a (9), respectivamente, se obtienen

$$\mu = \frac{1 + K.m}{K + 2} \quad (28)$$

$$\sigma^2 = \frac{(1+K.m)((K+1)-K.m)}{(K+3)(K+2)^2} \quad (29)$$

Sigue en pie el problema de determinar el valor que ha de tomar K , y este autor propone adoptar aquel que verifica

$$\int_0^1 \frac{(1+K.m)((K+1)-K.m)}{(K+3)(K+2)^2} \cdot dm = \frac{1}{36} \quad (30)$$

(hipótesis armonizadora con la clásica). El resultado obtenido es $K = 4.55$, que redondea a $K = 4.5$.

Como puede apreciarse, el modelo de Golenko-Ginzburg no gana nada frente al esbozado por Gallagher. Ambos eliminan las incoherencias que provocaban los problemas a la hora de simular, y nada más. Se cambia la hipótesis de que $p+q=6$, por la (30).

Herrerias, por su parte, llegó a las ecuaciones (28) y (29) estudiando el sistema de distribuciones univariantes de Pearson, y en cuanto el problema de la determinación de K, la deja a nuestra confianza subjetiva en la pericia del experto.

6.- Modelos con información adicional.-

Trás lo hasta ahora visto, si se quiere aprovechar la flexibilidad modeladora que posee la familia de distribuciones beta, parece ser necesario el uso de información adicional, además de las tradicionales estimaciones optimista, a, pesimista, b, y más probable, m.

Ya hemos hecho referencia a las dificultades que entraña el diseño de la información adicional, a recabar del experto, para una más adecuada estimación de los parámetros de la distribución beta. Estas dificultades, junto con la muy satisfactoria aplicación del método clásico a los problemas, que llamaremos, PERT tiempo, han postergado el estudio de este tema. Tán es asi que, los primeros estudios, de los que se tiene referencia, datan del año 1990.

Con anterioridad, Berny (1988 y 1989), consciente de los problemas que tiene la estimación de la beta por el método clásico, y de las dificultades de incorporar información intuitiva al esquema teórico de esta distribución, optó por deducir, a partir de la beta, una nueva función de riesgo (función que modela el flujo de caja de un proyecto de inversión en un determinado

periodo de tiempo). Esta función de riesgo de Berny es una función de densidad de una v.a. de Weibull, que tiene la ventaja de poderse estimar con cuatro informaciones, que una persona no muy versada en estadística puede proporcionar fácilmente:

- la moda, m
- la probabilidad de exceder a la moda, $P(m)$
- el valor mínimo de la v.a.
- la probabilidad de exceder a la estimación de valor mínimo, $P(0)$

Además, esta cuarta información puede omitirse, pues por defecto puede hacerse igual a 1, siendo aceptablemente pequeño el error cometido con ello. El modelo de Berny es especialmente adecuado para aquellas situaciones en las que no está garantizada la acotación superior de la v.a.. En relación con este trabajo solo queda reseñar la polémica que ha suscitado en relación con la comodidad, y por tanto precisión, con la que un experto puede estimar la probabilidad de exceder a la moda. Véanse Berny (1991), Cowell (1991) y Williams (1992).

Volviendo a la distribución beta, Moitra (1990) expone un método de estimación cuando es posible recoger alguna información aproximada y cualitativa sobre la asimetría de la distribución esperada. P.e, si es alta media o baja.

En este trabajo, se considera el momento central de tercer orden, Ψ , como medida de la asimetría

$$\Psi = E(X-\mu)^3 = E(X)^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3 \quad (31)$$

Evidentemente, Ψ es función de los dos parámetros p y q , o bien teniendo en cuenta la relación (12), del capítulo anterior, Ψ puede considerarse como función de los parámetros p y m (conocido). Fijando m , y representando gráficamente Ψ en función de p , este autor observó que Ψ sigue el mismo modelo de decrecimiento con p , aunque no tome los mismos valores, para todos los valores de m inferiores a 0.5 (asimetría positiva). Esta observación, ignorando el tramo de curva correspondiente a los valores de p comprendidos entre 1 y 2, y siempre para valores de m inferiores a 0.5, le permite proponer como valores de p , los siguientes:

- Si se juzga que la asimetría es alta, el valor de p deberá estar entre 2 y 3, y puesto que estamos estimando una distribución subjetiva, podemos hacer $p = 2.5$.
- Si se juzga que la asimetría es moderada, el valor de p deberá estar entre 3 y 4, de forma que podemos hacer $p = 3.5$.
- Finalmente, si se juzga que la asimetría es baja, haremos $p = 4.5$.

Para los casos con asimetría negativa, es decir cuando $m > 0.5$, explotando el hecho de que los parámetros p y q , desempeñan papeles simétricos en la distribución beta, se procede de la misma forma, pero los valores, antes citados, se asignarán al parámetro q , en lugar de al parámetro p .

Naturalmente, al disponer del valor de uno de los parámetros, y de la moda de la distribución, usando la relación (12), podemos obtener el otro parámetro, y por tanto queda perfectamente determinada la distribución.

En su contrastación práctica, Moitra asegura que su modelo es algo mejor que el clásico, especialmente cuando el grado de asimetría es alto, notándose una escasa mejora cuando este grado es bajo.

Aunque este trabajo no deje de ser una observación empírica, es evidente que además de abrir camino en esta dirección de la información adicional, supone una mayor flexibilidad modeladora aprovechando una información, que en la mayoría de los casos, el experto puede tener de antemano, p.e mediante análisis previos o por alguna información sobre posibles fuentes de incertidumbre. El mayor inconveniente se presenta cuando $m=0.5$, caso en el que no hay asimetría y al que conducen una infinidad de parejas de valores para p y q , respectivamente, con la única condición de que las dos componentes de la pareja sean iguales.

El segundo, y último, trabajo en esta línea, del que se tiene constancia, es el de Chae y Kim (1990). Con el modelo formado por las ecuaciones (28) y (29) "in mente", estos autores proponen la siguiente razón de verosimilitud, como una estimación subjetiva adicional

$$r = \frac{f(m)}{f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad (32)$$

notando por $f()$ a la función de densidad de la beta. Si se trabaja con la distribución "estandarizada", el denominador sería $f\left(\frac{1}{2}\right)$. Esta r es la razón de verosimilitud de la moda y del punto medio del intervalo, y se sugiere esta estimación puesto que se supone que cuando alguien estima la moda, también tendrá cierta idea de cuanto más probable es con respecto a otro punto, p.e el punto medio.

Si la distribución beta es asimétrica, la razón r tomará un valor alto, y su estimación subjetiva será fácil. En cambio, cuando la distribución es moderadamente asimétrica, r tomará un valor próximo a 1 y ello dificultará su estimación subjetiva. Por este motivo, y en este caso, los autores proponen una razón de verosimilitud alternativa

$$r' = \frac{f(m)}{f(a+b-m)} \quad (33)$$

la existente entre la moda y su complementario.

Finalmente, Chae y Kim llegan a que

$$K = \frac{\ln r}{\ln M} \quad \text{ó} \quad K = \frac{\ln r'}{\ln M'} \quad (34)$$

siendo

$$M = 2 \cdot m^m \cdot (1-m)^{1-m} \quad \text{y} \quad (35)$$

$$M' = \left[\frac{m}{1-m} \right]^{2m-1} \quad (36)$$

En cuanto a la implantación práctica de su método, tras una detenida comparación con el método clásico, recomiendan los siguientes pasos:

- 1.-Pedir las tres estimaciones convencionales, a , b y m
- 2.-Si una vez "estandarizada" la moda es próxima a 0.5, seguir el procedimiento PERT tradicional.
- 3.-En caso contrario, sustituir m (moda "estandarizada") en las fórmulas (35) ó (36), según el caso.
- 4.-En caso de que puedan estimarse, con suficiente confianza, r ó r' , sustituir en (34) para obtener una estimación de K . Si esta estimación es próxima a 4, aplicar las fórmulas PERT.

A diferencia de sus autores, nosotros pensamos que, para un lego en la materia, no es nada fácil la estimación de una cualquiera de estas dos razones de verosimilitud.

MODELOS PROBABILISTICOS USADOS PARA LA DURACION DEL PROYECTO.-

En este apartado solo cabe citar dos trabajos, que a continuación se reseñan, el de Tanchoco, Buck y Egbelu (1982) y el de Andrés de Pablo (1986).

En el primero de ellos se describe una técnica analítica para el cálculo de los momentos estadísticos del VAN de proyectos arriesgados cuyos flujos de caja, instante de inicio, y duración

son variables aleatorias de distribución conocida. La tasa de descuento se considera conocida con certeza.

Se supone que la sucesión de los flujos de caja (formulación en tiempo discreto) tiene un término general conocido, como puede ser la serie gradiente ($C_n = n.C$) ó la serie amortiguada ($C_n = C.e^{-n.r}$), que comienza en el instante $n = s$ y tiene una duración d . La aleatoriedad solo afecta al parámetro C , siendo conocidos y constantes los demás parámetros que aparecen en el término general de la sucesión.

El Valor Actual de las sucesiones citadas puede expresarse mediante unas formas estandar. Así, el VA de la sucesión gradiente puede expresarse como

$$VA = C.H(s).L(d)$$

y el de la sucesión amortiguada como

$$VA = \frac{1}{1 + i - e^{-r}} C.H(s). \left[(1 + i)^{-e^{-r}.H(d)} \right]$$

siendo $H(n)$ y $L(n)$ las siguientes formas estandar:

$$H(n) = (1 + i)^{-n}$$

$$L(n) = b_1 + (b_2 + b_3 n)(1+i)^{-n}$$

donde b_1, b_2 y b_3 son constantes.

En estas fórmulas del VA se aprecia una separación entre -las variables aleatorias s y d (discretas) que se refieren a la cronología de los flujos de caja y no a su cuantía, y

-la variable aleatoria C (continua) que se refiere a la cuantía y no a la cronología de los flujos de caja.

Suponiendo la independencia estocástica mutua entre estas variables, pueden aplicarse los teoremas de sumas y productos de variables independientes para obtener los momentos del valor presente, una vez que se hayan calculado los momentos estadísticos de las formas estandar $H(n)$ y $L(n)$.

En el caso de $H(n)$, sus momentos estadísticos se obtiene a partir de la función generatriz de probabilidad de la distribución seguida por la variable aleatoria n . En el caso de $L(n)$ este cálculo es más complicado y remite a la bibliografía.

En el artículo se incluye una tabla en la que aparecen la media y varianza de las dos formas estandar para cuatro distribuciones de probabilidad (uniforme, Poisson, geométrica, y binomial negativa), para distintos valores de los parámetros definitorios de la correspondiente distribución, y siempre para una tasa de descuento fija del 10%.

En definitiva el procedimiento propuesto, por los autores, para el cálculo sistemático de la media y la varianza del Valor Actual de un proyecto de inversión es:

Paso 1.-Asignar las distribuciones de probabilidad (y sus parámetros correspondientes) que describen los flujos de caja, si es que son conocidos con incertidumbre.

- Paso 2.- Asignar las distribuciones de probabilidad que describen el instante de inicio, y la duración del proyecto.
- Paso 3.- Calcular la expresión, en forma estandar, del valor actual neto.
- Paso 4.- Determinar las medias y las varianzas de las formas estandar $H(n)$ y $L(n)$.
- Paso 5.- Usando los teoremas de sumas y productos de variables aleatorias independientes, calcular la media del Valor Actual Neto.
- Paso 6.- Usando los teoremas citados en el paso anterior, calcular la varianza del Valor Actual.

Este procedimiento se ilustra con múltiples ejemplos

Por su parte, Andrés de Pablo recurre a la matemática financiera y actuarial en busca del instrumental adecuado para el estudio de las inversiones cuando la aleatoriedad se manifiesta a la vez en los rendimientos netos y en la duración al ser una operación de inversión simétrica ó dual de una operación de financiación.

Por una parte, los rendimientos netos son asimilables a los términos de una renta de cuantías aleatorias, y por otra la duración incierta es análoga a la consideración del conjunto de rendimientos netos como una renta de final aleatorio.

A título de ejemplo, en la primera parte de este trabajo se

considera el caso en que los flujos de caja, dados por la función de repartición $R(t)$, son deterministas, y la duración del proyecto, representada por la variable aleatoria τ que puede tomar valores en el intervalo $[t_0, t_n]$, tiene una función de distribución $\phi(t) = \text{pr}\{\tau \leq t\}$. Considerando la función de pervivencia, $p(t)$, en lugar de la función de distribución y teniendo en cuenta el significado de la función $R(t)$, es obvio que en el intervalo $[t, t+dt)$, si la inversión perdura en el instante t , se recibirá un flujo de caja igual a $dR(t) = R(t+dt) - R(t)$. En caso contrario, i.e. si $\tau \leq t$ no se recibirá ningún flujo de caja. Por tanto, el flujo de caja esperado en ese intervalo diferencial será

$$p(t).dR(t)$$

expresado en unidades monetarias del instante t .

Teniendo en cuenta el factor financiero de actualización, $f^*(t_0; t)$, e integrando entre t_0 y t_n , se tiene que

$$E(\text{VAN}) = \int_{t_0}^{t_n} f^*(t_0, t).p(t).dR(t) - C_0$$

CAPITULO III

LA VARIABLE ALEATORIA FACTOR DE ACTUALIZACION

Parece lógico, una vez que se ha considerado plausible el carácter aleatorio del tipo de descuento, recurrir a las distribuciones más habituales para la transformación de una variable incierta en aleatoria mediante el uso de estimaciones subjetivas.

Entre estas distribuciones figuran la rectangular, la triangular, la beta del Pert clásico, y los modelos generalizados que surgen del sistema de Pearson univariante.

En este capítulo, se estudia la variable aleatoria factor de actualización bajo tres supuestos distintos:

- 1) el tipo de descuento sigue una distribución rectangular
- 2) el tipo de descuento sigue una distribución triangular.
- 3) el tipo de descuento sigue un modelo Pearson univariante.

Se nota por ξ una variable aleatoria, que representa al tipo de actualización correspondiente a un periodo (expresado en tanto por uno). Se supone que esta variable toma valores x , comprendidos en el intervalo (a,b) , siendo a y b reales positivos, según la función de densidad $f(x)$.

El factor de actualización correspondiente a ese periodo viene dado por

$$\zeta = \frac{1}{1+\xi} \quad (1)$$

Puede afirmarse que ζ es una variable aleatoria puesto que $z=1/(1+x)$ es una función Borel-medible al ser continua. (Loève (1963), pag 109).

Es evidente que ζ toma valores z , comprendidos en el intervalo

$$\frac{1}{1+b} < z < \frac{1}{1+a} \quad (2)$$

y, en cuanto a su función de distribución, se tiene que

$$F_{\zeta}(z) = \text{pr}\{ \zeta \leq z \} = \text{pr}\left\{ \frac{1}{1+\xi} \leq z \right\} = \text{pr}\left\{ \frac{1}{z} - 1 \leq \xi \right\}$$

Se va a estudiar esta función de distribución bajo las diferentes hipótesis, antes citadas, para la densidad $f(x)$.

1.-DISTRIBUCION UNIFORME.-

Se supone que la variable aleatoria ξ sigue la distribución uniforme en el intervalo (a,b) . Su función de densidad será

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (3)$$

Bajo esta hipótesis, la función de distribución de ζ es:

$$\begin{aligned}
 F_{\zeta}(z) &= \text{pr}\left\{\frac{1}{z} - 1 \leq \xi\right\} = 1 - \text{pr}\left\{\xi \leq \frac{1}{z} - 1\right\} = \\
 &= 1 - \int_a^{\frac{1}{z} - 1} \frac{1}{b-a} dx = 1 - \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{z} - (a+1)\right] = \quad (4) \\
 &= \frac{1+b}{b-a} - \frac{1}{b-a} \frac{1}{z}
 \end{aligned}$$

y, por tanto, la función de densidad es:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \frac{1}{z^2} & \text{si } \frac{1}{1+b} < z < \frac{1}{1+a} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (5)$$

Como puede apreciarse, esta función de densidad es decreciente, en el dominio de la variable, y por tanto no presenta moda.

En el estudio, a desarrollar, interesan fundamentalmente los dos primeros momentos de la variable, y en este caso son, especialmente, cómodos de calcular:

$$\begin{aligned}
 E(\zeta) &= \frac{1}{b-a} \int_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1+a}} \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z^2} dz = \\
 &= \frac{1}{b-a} \left[\ln z \right]_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1+a}} = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right) \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$E(\zeta^2) = \frac{1}{b-a} \int_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1+a}} z^2 \cdot \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{b-a} \left[z \right]_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1+a}} = \frac{1}{(1+a)(1+b)} \quad (7)$$

Por tanto, la varianza es

$$\text{Var}(\zeta) = E(\zeta^2) - E^2(\zeta) = \frac{1}{(1+a)(1+b)} - \frac{1}{(b-a)^2} \ln^2\left(\frac{1+b}{1+a}\right) \quad (8)$$

2.-DISTRIBUCION TRIANGULAR.-

Suponemos, ahora, que la variable aleatoria ξ , (tipo de actualización), sigue una distribución triangular, de moda m , en el intervalo $[a, b]$, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)} & \text{si } a < x \leq m \\ \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)} & \text{si } m < x < b \\ 0 & \text{si } b < x \end{cases} \quad (9)$$

En este caso, para el cálculo de la distribución de ζ conviene distinguir dos situaciones:

a) si $\frac{1}{z} - 1 > m$ ó lo que es lo mismo si $z < \frac{1}{1+m}$, en cuyo caso

$$\text{pr}\left\{\frac{1}{z} - 1 \leq \xi\right\} = \frac{2}{(b-m)(b-a)} \int_{\frac{1}{z} - 1}^b (b-x) dx = \frac{2}{(b-m)(b-a)} \left[bx - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{z} - 1}^b =$$

$$= \frac{2}{(b-m)(b-a)} \left[\frac{b^2}{2} - b \left(\frac{1}{z} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\left((1+b) - \frac{1}{z} \right)^2}{(b-m)(b-a)}$$

b) si $\frac{1}{z} - 1 \leq m$ ó lo que es lo mismo si $z \geq \frac{1}{1+m}$, en cuyo caso

$$\text{pr} \left\{ \frac{1}{z} - 1 \leq \xi \right\} = 1 - \text{pr} \left\{ \xi \leq \frac{1}{z} - 1 \right\} = 1 - \frac{2}{(m-a)(b-a)} \int_a^{\frac{1}{z}-1} (x-a) dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{(m-a)(b-a)} \left[\frac{x^2}{2} - ax \right]_a^{\frac{1}{z}-1} =$$

$$= 1 - \frac{2}{(m-a)(b-a)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)^2 - a \left(\frac{1}{z} - 1 \right) + \frac{a^2}{2} \right] = 1 - \frac{\left(\frac{1}{z} - (1+a) \right)^2}{(m-a)(b-a)}$$

Por tanto,

$$F_{\zeta}(z) = \begin{cases} F_1(z) = \frac{\left((1+b) - \frac{1}{z} \right)^2}{(b-m)(b-a)} & \text{si } \frac{1}{1+b} < z < \frac{1}{1+m} \\ F_2(z) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{z} - (1+a) \right)^2}{(m-a)(b-a)} & \text{si } \frac{1}{1+m} \leq z < \frac{1}{1+a} \end{cases} \quad (10)$$

Esta función es derivable en todos los puntos de su dominio,
en efecto:

$$\frac{dF_{\xi}}{dz} = \begin{cases} \frac{dF_1}{dz} = \frac{2}{(b-m)(b-a)} \frac{1}{z^2} \left((1+b) - \frac{1}{z} \right) & \text{si } \frac{1}{1+b} < z < \frac{1}{1+m} \\ \frac{dF_2}{dz} = \frac{2}{(m-a)(b-a)} \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z} - (1+a) \right) & \text{si } \frac{1}{1+m} < z < \frac{1}{1+a} \end{cases}$$

y en el punto $z = \frac{1}{1+m}$, se comprueba rápidamente que ambas derivadas, es decir la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha, coinciden. Por tanto, la función de densidad de la variable aleatoria ξ , es

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{(b-m)(b-a)} \frac{1}{z^2} \left((1+b) - \frac{1}{z} \right) & \text{si } \frac{1}{1+b} < z \leq \frac{1}{1+m} \\ \frac{2}{(m-a)(b-a)} \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{z} - (1+a) \right) & \text{si } \frac{1}{1+m} \leq z < \frac{1}{1+a} \end{cases} \quad (11)$$

En virtud del Teorema 1, pag.80, Rohatgi (1976), los dos primeros momentos de la variable aleatoria ζ , son

$$\begin{aligned} E(\zeta) &= \int_a^b \frac{1}{1+x} f(x) dx = \\ &= \frac{2}{(m-a)(b-a)} \int_a^m \frac{1}{1+x} (x-a) dx + \frac{2}{(b-m)(b-a)} \int_m^b \frac{1}{1+x} (b-x) dx = \\ &= \frac{2}{(m-a)(b-a)} \int_a^m \left(1 - \frac{a+1}{1+x} \right) dx + \frac{2}{(b-m)(b-a)} \int_m^b \left(\frac{b+1}{1+x} - 1 \right) dx = \\ &= \frac{2}{(m-a)(b-a)} \left[(m-a) - (a+1) \ln \left(\frac{1+m}{1+a} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{2}{(b-m)(b-a)} \left[(b+1) \ln \left(\frac{1+b}{1+m} \right) - (b-m) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(b-a)} \left[\frac{b+1}{b-m} \ln \left(\frac{1+b}{1+m} \right) - \frac{a+1}{m-a} \ln \left(\frac{1+m}{1+a} \right) \right] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E(\zeta^2) &= \int_a^b \left(\frac{1}{1+x} \right)^2 f(x) dx = \\ &= \frac{2}{(m-a)(b-a)} \int_a^m \left(\frac{1}{1+x} \right)^2 (x-a) dx + \frac{2}{(b-m)(b-a)} \int_m^b \left(\frac{1}{1+x} \right)^2 (b-x) dx = \\ &= \frac{2}{(m-a)(b-a)} \left[\ln \left(\frac{1+m}{1+a} \right) + \frac{a+1}{1+m} - 1 \right] + \\ &\quad + \frac{2}{(b-m)(b-a)} \left[-\ln \left(\frac{1+b}{1+m} \right) + \frac{b+1}{1+m} - 1 \right] = \\ &= \frac{2}{b-a} \left[\frac{1}{m-a} \ln \left(\frac{1+m}{1+a} \right) - \frac{1}{b-m} \ln \left(\frac{1+b}{1+m} \right) \right] \quad (13) \end{aligned}$$

Finalmente, la varianza de ζ puede obtenerse por el procedimiento habitual, es decir

$$\text{Var}(\zeta) = E(\zeta^2) - E^2(\zeta).$$

3.- DISTRIBUCIÓN BETA.-

Se supone que la variable ξ toma valores x , comprendidos en el intervalo $[a,b]$, siguiendo una distribución beta de parámetros p y q . Su función de densidad será:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^{p+q-1}} \frac{1}{\beta(p,q)} (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (14)$$

siendo a y b reales positivos, ($a < b$), y p, q reales y mayores que uno. (Es decir se supone que ξ sigue una beta de forma acampanada, y por ende unimodal).

La función de distribución de la variable ζ será

$$F_{\zeta}(z) = \text{pr}\left\{\frac{1}{z} - 1 \leq \xi\right\} = 1 - \text{pr}\left\{\xi \leq \frac{1}{z} - 1\right\} = 1 - F_{\xi}\left(\frac{1}{z} - 1\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(b-a)^{p+q-1} \beta(p,q)} \int_a^{\frac{1}{z}-1} (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1} dx \quad (15)$$

y, aplicando la fórmula de Leibnitz, de derivación bajo el signo integral (Véase Apostol), se obtiene la función de densidad de la variable aleatoria ζ :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^{p+q-1} \beta(p,q)} \frac{1}{z^2} \left[\frac{1}{z} - (a+1)\right]^{p-1} \left[(b+1) - \frac{1}{z}\right]^{q-1} & \text{si } \frac{1}{1+b} < z < \frac{1}{1+a} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (16)$$

3.1.- Relación de recurrencia entre momentos.-

Teniendo en cuenta la hipótesis de partida, de que ξ sigue una distribución $\beta(p,q)$, y que esta distribución pertenece a la familia univariante de Pearson (Tipo I), conviene averiguar, a la mayor brevedad, si la distribución seguida por la variable aleatoria ζ pertenece a esta ó a otra familia de distribuciones

conocida. Ello simplificaría, notablemente, el estudio a realizar al permitir el uso de toda la investigación de base existente sobre tales familias.

Para ello, basta con calcular la derivada de la función de densidad (16)

$$f'(z) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1} \beta(p,q)} \frac{1}{z^3} \left[\frac{1}{z} - (a+1) \right]^{p-2} \left[(b+1) - \frac{1}{z} \right]^{q-2} \cdot \left\{ \frac{p+q}{z^2} - \frac{(a+1)(q+1) + (b+1)(p+1)}{z} + 2(a+1)(b+1) \right\} \quad (17)$$

y analizar la expresión

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(p+q) - [(a+1)(q+1) + (b+1)(p+1)]z + 2(a+1)(b+1)z^2}{z \cdot [1 - (a+1)z] \cdot [(b+1)z - 1]} \quad (18)$$

La ecuación definitoria de la familia de Roy es

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2}{z \cdot [\delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2]} \quad (19)$$

sin más que comparar las ecuaciones (18) y (19), es evidente que la densidad de la variable aleatoria ζ pertenece a esta familia, siendo

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= p+q & \delta_0 &= -1 \\
\gamma_1 &= -[(a+1)(q+1) + (b+1)(p+1)] & \delta_1 &= (a+1)+(b+1) \\
\gamma_2 &= 2(a+1)(b+1) & \delta_2 &= -(a+1)(b+1)
\end{aligned} \tag{20}$$

Este resultado contiene un elemento alarmante. La derivada de la función de densidad se anula en dos puntos, además de en los extremos del intervalo. ¿Acaso la función de densidad tendrá una forma anómala?

Con fines tranquilizadores, se resuelve la ecuación

$$(p+q) - [(a+1)(q+1)+(b+1)(p+1)]z + 2(a+1)(b+1)z^2 = 0 \tag{21}$$

obteniéndose las raíces

$$z_1 = \frac{(a+1)(q+1) + (b+1)(p+1)}{4(a+1)(b+1)} - \frac{\sqrt{[(a+1)(q+1) + (b+1)(p+1)]^2 - 8(a+1)(b+1)(p+q)}}{4(a+1)(b+1)}$$

$$z_2 = \frac{(a+1)(q+1) + (b+1)(p+1)}{4(a+1)(b+1)} + \frac{\sqrt{[(a+1)(q+1) + (b+1)(p+1)]^2 - 8(a+1)(b+1)(p+q)}}{4(a+1)(b+1)}$$

Obviamente z_1 es menor que z_2 , y por simple manipulación algebraica, puede verse que

$$\frac{1}{1+b} < z_1 < \frac{1}{1+a}$$

$$z_2 > \frac{1}{1+a}$$

y por tanto, la densidad (16) es unimodal, presentando una forma acampanada.

Notando por α_n al momento de orden n respecto al origen, en la familia de Roy, (Véase Roy (1971)), es válida la siguiente relación de recurrencia

$$\alpha_n [\gamma_0 + (n+1)\delta_0] + \alpha_{n+1} [\gamma_1 + (n+2)\delta_1] + \alpha_{n+2} [\gamma_2 + (n+3)\delta_2] = 0 \quad (22)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$

que conocidos dos momentos consecutivos, permite calcular el siguiente. Por tanto, conocido α_1 , y teniendo en cuenta que $\alpha_0 = 1$, se pueden calcular, sucesivamente, todos los momentos de la distribución.

En el desarrollo posterior de este trabajo, solo se necesitarán los momentos de primer y segundo orden de la distribución (16). Por ello es de sumo interés particularizar la relación (22) para $n = 0$

$$[\gamma_0 + \delta_0] + \alpha_1 [\gamma_1 + 2\delta_1] + \alpha_2 [\gamma_2 + 3\delta_2] = 0 \quad (23)$$

y para los valores de los coeficientes que definen a la distribución (16), dentro de la familia de Roy

$$(p+q-1) + \alpha_1[(a+1)(1-q)+(b+1)(1-p)] - \alpha_2(a+1)(b+1) = 0 \quad (24)$$

de donde

$$\alpha_2 = \frac{p+q-1}{(a+1)(b+1)} - \left[\frac{q-1}{b+1} + \frac{p-1}{a+1} \right] \cdot \alpha_1 \quad (25)$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{p+q-1}{(a+1)(b+1)} - \left[\frac{q-1}{b+1} + \frac{p-1}{a+1} \right] \cdot \alpha_1 - \alpha_1^2 \quad (26)$$

Por tanto todo está resuelto a la espera de calcular el momento de orden 1 respecto al origen, es decir, la media.

3.2.- Cálculo de la media de la variable aleatoria ζ .

Notando por $\mu(p,q)$ a la media de la variable ζ , (coincide con el momento de primer orden respecto al origen, α_1), por definición se tiene que

$$\mu(p,q) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1} \beta(p,q)} \int_{\frac{1}{1+b}}^{\frac{1}{1+a}} z \frac{1}{z^2} \left[\frac{1}{z} - (a+1) \right]^{p-1} \left[(b+1) - \frac{1}{z} \right]^{q-1} dz \quad (27)$$

y en virtud del Teorema 1, pag.80, Rohatgi (1976), (que equivale a deshacer todos los cambios de variable hasta ahora realizados), se tiene que

$$\mu(p,q) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1}} \frac{1}{\beta(p,q)} \int_a^b \frac{1}{1+x} (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1} dx \quad (28)$$

expresión bastante más cómoda para trabajar.

Sea

$$I(p,q) = \int_a^b \frac{1}{1+x} (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1} dx \quad (29)$$

Al dividir $(x-a)$ entre $(1+x)$, se tiene que

$$\frac{x-a}{1+x} = 1 - \frac{a+1}{1+x}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \int_a^b \frac{x-a}{1+x} (x-a)^{p-2} (b-x)^{q-1} dx = \\ &= \int_a^b (x-a)^{p-2} (b-x)^{q-1} dx - (a+1) \int_a^b \frac{1}{1+x} (x-a)^{p-2} (b-x)^{q-1} dx = \\ &= \boxed{(b-a)^{p+q-2} \cdot \beta(p-1, q) - (a+1) \cdot I(p-1, q)} \quad (30) \end{aligned}$$

Análogamente, al dividir $(b-x)$ entre $(1+x)$, resulta que

$$\frac{b-x}{1+x} = -1 + \frac{b+1}{1+x}$$

y teniendo en cuenta (29), se tiene que

$$\begin{aligned}
\boxed{I(p,q)} &= \int_a^b \frac{b-x}{1+x} (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-2} dx = \\
&= - \int_a^b (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-2} dx + (b+1) \int_a^b \frac{1}{1+x} (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-2} dx = \\
&= \boxed{-(b-a)^{p+q-2} \cdot \beta(p,q-1) + (b+1) \cdot I(p,q-1)} \quad (31)
\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\mu(p,q) = \frac{1}{(b-a)^{p+q-1}} \frac{1}{\beta(p,q)} I(p,q) \quad (32)$$

las ecuaciones de recurrencia (30) y (31), quedan reducidas a

$$\begin{aligned}
\boxed{\mu(p,q)} &= \frac{(b-a)^{p+q-2}}{(b-a)^{p+q-1}} \frac{\beta(p-1,q)}{\beta(p,q)} - (a+1) \frac{(b-a)^{p+q-2}}{(b-a)^{p+q-1}} \frac{\beta(p-1,q)}{\beta(p,q)} \mu(p-1,q) \\
&= \boxed{\frac{1}{b-a} \frac{p+q-1}{p-1} \left[1 - (a+1) \cdot \mu(p-1,q) \right]} \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boxed{\mu(p,q)} &= - \frac{(b-a)^{p+q-2}}{(b-a)^{p+q-1}} \frac{\beta(p,q-1)}{\beta(p,q)} + (b+1) \frac{(b-a)^{p+q-2}}{(b-a)^{p+q-1}} \frac{\beta(p,q-1)}{\beta(p,q)} \mu(p,q-1) \\
&= \boxed{\frac{1}{b-a} \frac{p+q-1}{q-1} \left[(b+1) \cdot \mu(p,q-1) - 1 \right]} \quad (34)
\end{aligned}$$

Notando por λ y η a las mantisas respectivas de p y de q , las relaciones de recurrencia (33) y (34) permiten reducir el cálculo

de $\mu(p,q)$ al de $\mu(\lambda,\eta)$. En caso de que p y q sean enteros, es más cómodo el cálculo de $\mu(1,1)$ que el de $\mu(0,0)$. En general, las relaciones de recurrencia (33) y (34) reducen el cálculo de $\mu(p,q)$ al de $\mu(\lambda,\eta)$ siendo $\lambda,\eta \in (0,1]$, más concretamente, al cálculo de

$$I(\lambda,\eta) = \int_a^b \frac{1}{1+x} (x-a)^{\lambda-1} (b-x)^{\eta-1} dx \quad \text{siendo } \lambda,\eta \in (0,1] \quad (35)$$

No es posible resolver analíticamente esta integral para valores cualesquiera de λ y de η , aunque sí para algunos de ellos, como se verá después. Por este motivo, hemos de realizar una hipótesis simplificadora, cual es la de que

$$p + q \text{ sea un número natural}$$

Esta hipótesis se traduce en que:

- a) ó bien p y q son ambos naturales, en cuyo caso $\lambda = \eta = 1$
- b) ó bien ninguno de los dos es natural, en cuyo caso λ y η serían las mantisas respectivas de p y de q , y estarían obligadas a sumar la unidad

$$\lambda + \eta = 1 \quad (36)$$

En el caso a), ha de calcularse la integral

$$I(1,1) = \int_a^b \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_a^b = \ln \left(\frac{1+b}{1+a} \right) \quad (37)$$

En el caso b), más complicado, se puede aplicar el siguiente Teorema, cuya demostración figura en la página 188 de Mitrinović-Kečkiv (1984).

TEOREMA 1.-

se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) la función f es analítica en el plano complejo, siendo z_1, z_2, \dots, z_n sus singularidades.
- 2) la función f es regular en el segmento $\{ z / z \in [a, b] \}$.
- 3) $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{r+s+1} f(z) = A \neq \infty$
- 4) $r, s \in (-1, 1)$, y suman $-1, 0$, ó 1

entonces

$$\int_a^b (x-a)^r (b-x)^s f(x) dx = \frac{\Pi}{\text{sen } \Pi \cdot s} \left[\sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} (z-a)^r (z-b)^s f(z) - A \right]$$

Comparando la expresión (35) con la tesis del Teorema 1, es claro que la función de interés es

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

siendo evidente que cumple las hipótesis 1, y 2 del Teorema:

- 1) es analítica en el plano complejo, con un polo simple en el punto $z = -1$.
- 2) es regular en el segmento $\{ z / z \in [a, b] \}$, puesto que este segmento yace en la parte positiva del eje real.

En cuanto a los exponentes a considerar son

$$r = \lambda - 1 \qquad s = \eta - 1$$

que, evidentemente, ambos pertenecen al intervalo $(-1,1)$, y suman -1 .

Finalmente

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{(\lambda-1)+(\eta-1)+1} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0 \neq \infty$$

Se concluye la aplicabilidad del Teorema 1 para así calcular la integral (35), en el supuesto de que $\lambda + \eta = 1$.

Para terminar el cálculo de la integral citada, solo resta calcular

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-1} (z-a)^{\lambda-1} (z-b)^{\eta-1} \frac{1}{1+z} &= \lim_{z \rightarrow -1} (1+z)(z-a)^{\lambda-1} (z-b)^{\eta-1} \frac{1}{1+z} = \\ &= (-1-a)^{\lambda-1} (-1-b)^{\eta-1} = (-1-a)^{\lambda-1} (-1-b)^{-\lambda} = -\frac{1}{1+a} \left(\frac{1+a}{1+b} \right)^{\lambda} \end{aligned}$$

En definitiva, puede afirmarse que

$$I(\lambda, \eta) = -\frac{1}{1+a} \left(\frac{1+a}{1+b} \right)^{\lambda} \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\eta-1)\pi} = \frac{1}{1+a} \left(\frac{1+a}{1+b} \right)^{\lambda} \frac{\pi}{\operatorname{sen} \lambda \pi} \quad (38)$$

siendo $\lambda, \eta \in (0,1) / \lambda + \eta = 1$

Aplicando el mismo Teorema 1, puede calcularse $\beta(\lambda, \eta)$, siendo $\lambda, \eta \in (0,1) / \lambda + \eta = 1$. En efecto, por definición

$$\beta(\lambda, \eta) = \int_0^1 x^{\lambda-1} (1-x)^{\eta-1} dx$$

lo que indica que se ha de considerar la función $f(z) = 1$, que obviamente es analítica en el plano complejo, (no tiene ninguna singularidad), y regular en el intervalo $[0,1]$.

Los exponentes a considerar son los mismos de la aplicación anterior del Teorema 1, y en cuanto al límite

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} z^{\lambda-1+\eta-1+1} f(z) = 1$$

Por tanto

$$\beta(\lambda, \eta) = \frac{\Pi}{\text{sen } (\eta-1)\Pi} (-1) = \frac{\Pi}{\text{sen } \lambda\Pi} \quad (39)$$

(véase Abramowitz-Stegun (1970)).

En virtud de (32), (37), y de que $\beta(1,1) = 1$, resulta ser

$$\mu(1,1) = \frac{1}{b-a} \ln \left(\frac{1+b}{1+a} \right) \quad (40)$$

y teniendo en cuenta (32), (38), y (39), se llega a

$$\mu(\lambda, \eta) = \frac{1}{1+a} \left(\frac{1+a}{1+b} \right)^\lambda \quad \lambda, \eta \in (0,1) / \lambda + \eta = 1 \quad (41)$$

3.3.- Implantación.

Como se vió en el Capítulo 1, a' pretender ajustar una distribución beta con tan solo las estimaciones del menor valor posible (a), del mayor valor posible (b), y del valor más probable (m), se obtiene una subfamilia de distribuciones beta que reúnen

estas tres características.

Esta subfamilia depende del parámetro $K = p + q - 2$ real no negativo, y conforme aumenta este parámetro-índice aumenta el apuntamiento (disminuye la dispersión) del correspondiente elemento de la familia. Esa indeterminación es la que hace necesaria la formulación de una hipótesis ó la recogida de información adicional. Sin pretender entrar en detalles, esa información adicional debería dar alguna idea sobre la magnitud de la ordenada modal (máximo de la función de densidad). Como proponen Chae y Kim (1990), podría ser la razón de verosimilitud entre la moda y algún punto destacado del intervalo (a,b), p.e. el punto medio.

En este trabajo, por las razones desarrolladas en el apartado anterior, solo se consideran valores naturales del parámetro K , y por ahora, basta con la idea de que el valor de K depende de cuan apuntada sea la distribución, es decir de cuanto más verosímil sea la moda respecto a algun punto destacado tomado como referencia.

Por tanto, una vez recogidas las estimaciones de los valores pesimista, optimista y más probable, se han de seguir los siguientes pasos:

Paso 1.- Apoyandose en las consideraciones, de índole intuitiva, que aparecen más arriba, determinar un valor entero y positivo para el parámetro K .

En principio el valor asignado a K es arbitrario, aunque posteriormente aparecerán limitaciones de índole práctica.

Paso 2.- Calcular el valor "estandarizado" de m , mediante el cambio de variable

$$m' = \frac{m - a}{b - a}$$

Paso 3.- Determinar los valores de los parámetros p y q de la distribución beta, mediante las fórmulas (27) del Capítulo 1, es decir

$$p = 1 + K.m'$$

$$q = (K + 1) - K.m'$$

Paso 4.- Determinar las mantisas de p y de q

$$\lambda = p - [p]$$

$$\eta = q - [q]$$

Paso 5.- Si $\lambda \neq 0$ saltar al Paso 8

Paso 6.- Si $\lambda = 0$ calcular

$$\mu(1,1) = \frac{1}{(b-a)} \ln \left(\frac{1+b}{1+a} \right)$$

Paso 7.- Hacer $\lambda = 1$ y $\eta = 1$. Saltar al Paso 9

Paso 8.- Calcular

$$\mu(\lambda, \eta) = \frac{1}{1+a} \left(\frac{1+a}{1+b} \right)^\lambda$$

Paso 9.- Aplicar la relación de recurrencia

$$\mu(x+1, \eta) = \frac{1}{b-a} \frac{x+\eta}{x} \left[1 - (a+1) \mu(x, \eta) \right]$$

comenzando en $x=\lambda$ y terminando en $x=p-1$.

Por esta relación se pasará [p] veces.

Paso 10.- Aplicar la relación de recurrencia

$$\mu(p, y+1) = \frac{1}{b-a} \frac{p+y}{y} \left[(b+1) \mu(p, y) - 1 \right]$$

comenzando en $y=\eta$ y terminando en $y=q-1$.

Por esta relación se pasará [q] veces.

Paso 11.- Con el resultado final de la doble iteración anterior,

que es $\mu(p, q)$, calcular

$$\alpha_2 = \frac{p+q-1}{(a+1)(b+1)} - \left[\frac{q-1}{b+1} + \frac{p-1}{a+1} \right] \cdot \mu(p, q)$$

$$\sigma^2(p, q) = \alpha_2 - \mu^2(p, q)$$

En este punto se dispone de la media, $\mu(p, q)$, y de la varianza, $\sigma^2(p, q)$, de la variable aleatoria ζ , supuesto que ξ sigue una distribución beta caracterizada por las tres estimaciones clásicas, y por el valor asignado al parámetro K.

3.4.- Consideraciones empíricas.-

El algoritmo que acaba de exponerse, aunque teóricamente intachable, presenta algunos problemas de índole numérica. Estos problemas están causados por la propagación de los errores de redondeo, inevitables en cualquier máquina de cálculo.

Concretamente, las diferencias, encerradas entre corchetes, que aparecen en las fórmulas de recurrencia de los pasos 9 y 10 son operaciones muy peligrosas desde el punto de vista de la propagación de errores. En efecto, en ellas el minuendo y el sustraendo son números muy parecidos de forma que el resultado es un número con muchos ceros después de la coma decimal, y así aunque los operandos tengan un pequeño error relativo, el error relativo de la diferencia será elevado. Por tanto cada vez que se pasa por una de esas relaciones de recurrencia se pierde mucha precisión. Será conveniente pasar por ellas cuanto menos mejor.

Otro paso muy delicado en el algoritmo descrito es la fórmula para el cálculo de la varianza, en el paso 11; en ella ocurre lo mismo que en las anteriores pues el momento de segundo orden es bastante parecido al cuadrado de la esperanza. Por ello será conveniente que al aplicar esta fórmula aún se disponga de una precisión suficiente en los resultados intermedios.

Este segundo punto es especialmente grave cuando $b-a$ es de pequeña magnitud, (del orden de 10^{-2}), hasta el punto de poder conducir a varianzas negativas. Para captar cuan delicada es la situación es conveniente disponer de una acotación superior de la varianza de la variable aleatoria ζ , en función de la amplitud del intervalo (a,b) , y del valor de la constante K .

Teniendo en cuenta que la desviación cuadrática media es mínima cuando se toma como origen la esperanza de la variable

aleatoria, se tiene que

$$\begin{aligned}\text{Var}(\zeta) &= E\left[\frac{1}{1+\xi} - E\left[\frac{1}{1+\xi}\right]\right]^2 \leq E\left[\frac{1}{1+\xi} - \frac{1}{1+E[\xi]}\right]^2 = \\ &= E\left[\frac{E[\xi]-\xi}{(1+\xi)(1+E[\xi])}\right]^2 = \frac{1}{(1+E[\xi])^2} \cdot E\left[\frac{E[\xi]-\xi}{1+\xi}\right]^2\end{aligned}$$

como ξ solo toma valores positivos, es obvio que $1+\xi \geq 1$, y por tanto

$$E\left[\frac{E[\xi]-\xi}{1+\xi}\right]^2 \leq E[E[\xi]-\xi]^2$$

y en definitiva

$$\text{Var}(\zeta) \leq \frac{\text{Var}(\xi)}{(1+E[\xi])^2}$$

Comoquiera que ξ sigue una distribución $\beta(p,q)$

$$\text{Var}(\xi) = (b-a)^2 \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}$$

$$E[\xi] = \frac{pb + qa}{p + q} \quad 1 + E[\xi] = \frac{p(b+1) + q(a+1)}{p + q}$$

se llega a que

$$\text{Var}(\zeta) \leq \frac{(b-a)^2 pq}{(p+q+1)[p(b+1)+q(a+1)]^2}$$

Al ser $p+q = K+2$, el máximo valor posible de $p \cdot q$ es $(K+2)^2/4$,

y como

$$p(b+1) + q(a+1) = (1+a)(p+q) + p(b-a) \geq p + q$$

pues $1+a \geq 1$ y $b-a \geq 0$, finalmente, se obtiene la cota deseada

$$\text{Var}(\zeta) \leq \frac{(b-a)^2 (K+2)^2/4}{(K+3)(K+2)^2} = \frac{(b-a)^2}{4(K+3)}$$

Así, por ejemplo, si $b-a = 0.01$ y $K = 4$, se sabe de antemano que

$$\text{Var}(\zeta) \leq 3.57 \cdot 10^{-6}$$

lo que da idea de que si al llegar a este punto no se puede garantizar la precisión de, al menos, siete cifras decimales no tiene ningún sentido realizar los cálculos por este algoritmo.

La conclusión que se obtiene de ello es que, para valores cercanos de a y de b , han de usarse valores relativamente pequeños, pero enteros, de K para que los resultados obtenidos tengan alguna significación.

Esta afirmación tiene un importante soporte intuitivo pues, como antes se anunció, el valor de K indica cuanto más verosímil es el valor modal frente algún otro valor destacado dentro del intervalo (a,b) . Si a y b son tremendamente próximos cabe pensar que será difícil poder destacar una moda, pero si se lograra no habría motivos para pensar que esa moda sea mucho más verosímil que cualquier otro valor dentro del intervalo de todos los posibles.

Para nuestros cálculos hemos utilizado la hoja electrónica LOTUS 123, que trabaja con una precisión de quince dígitos y para conocer la precisión de los resultados hemos realizado un "análisis del error a posteriori", (ver Martínez Aroza (1985)), consistente en aplicar el algoritmo varias veces a los mismos datos iniciales, redondeando cada resultado intermedio, bien por

exceso, bien por defecto, bien aleatoriamente y permutando también aleatoriamente el orden de las operaciones encadenadas que así lo permiten. Además se ha calculado numéricamente la media de la variable ζ utilizando el Método Adaptativo de Simpson (véase Burden y Faires (1985)). De esta forma, al cabo de varias iteraciones, si se aprecia una coincidencia de los resultados en una cantidad suficiente de dígitos, podrá tenerse casi la completa certeza de que dichos dígitos son realmente exactos.

Los resultados obtenidos de ese análisis del error a posteriori, depende de los datos iniciales. Así, podemos afirmar que, para el intervalo $a = 0.05$ y $b = 0.06$ y para $K=1$, la media, $\mu(p,q)$, tiene una precisión de nueve cifras decimales y para la varianza las cinco primeras cifras significativas son exactas. Para $K=2$ la media tiene una precisión de ocho cifras decimales y la varianza tiene las dos primeras cifras significativas exactas. Para $K=3$ la situación empeora notablemente en lo que respecta a la varianza, pues ninguna cifra es exacta. Para cualquier otro intervalo de amplitud 0.01 los resultados son similares; por tanto para estas situaciones, no recomendamos el uso del algoritmo con valores de K superiores a 2.

Para otro intervalo que puede considerarse extremo, cual es $a=0$ y $b=1$, pueden usarse modelos beta caracterizados por valores de K más elevados. Las precisiones obtenidas en este caso son las siguientes:

para $K=1$, la media tiene 6 cifras decimales exactas y las cuatro primeras cifras significativas de la varianza son exactas;

para $K=2$, la media tiene cinco cifras decimales exactas y tambien lo son las primeras cuatro significativas de la varianza;

para $K=3$, son exactas las cuatro primeras cifras decimales de la media y las tres primeras significativas de la varianza;

para $K=4$, las cifras exactas de la media son las cuatro primeras, y las de la varianza las dos primeras que son significativas;

para valores superiores de K , el cálculo de la varianza no tiene ninguna cifra significativa, por lo que tampoco, en este caso, recomendamos el uso del algoritmo para modelos Beta con K superiores a 4.

Para intervalos de amplitud comprendida entre estos casos extremos tambien existe un valor máximo de K , con el cual es aplicable el algoritmo, existiendo una relación directa entre la amplitud del intervalo y ese valor máximo. De cualquier forma, como los posibles valores máximos de K tienen una pequeña dispersión, parece que, en situaciones de economía estable, solo sean aceptables valores de K inferiores a dos, para los cuales se obtiene una precisión en los resultados mucho más que sobrada, sobre todo si se tiene en cuenta que se está trabajando con estimaciones subjetivas.

Finalmente, reseñar que los resultados numéricos obtenidos para estas dos situaciones límite, expresados con todas sus cifras exactas, aparecen en el Apéndice.

EJEMPLO.-

Para mostrar la aplicación de los desarrollos teóricos efectuados hasta ahora, se enuncia a continuación un situación real que, a fuer de simple, resulta casi absurda.

El Sr. Corto dispone de 893.000 ptas, y desea invertirlas a un año. Una de las alternativas que se le presentan es la adquisición, por esa cuantía, de una Letra del Tesoro, con un nominal de 1.000.000 ptas que le será satisfecho dentro de un año.

Evidentemente, la rentabilidad nominal de esa inversión es

$$i_n = \frac{1.000.000}{893.000} - 1 = 0'12.$$

Habitualmente en este problema no se considera ningún tipo de incertidumbre, pero está subyacente:

¿cual es la rentabilidad real de esta inversión, i_r ?

¿en cuantas ptas de hoy aumentará su capital el Sr. Corto?.

La relación existente entre el tipo de interés nominal y el real es, (véase Barceló)

$$(1 + i_r) = \frac{(1 + i_n)}{(1 + g)}$$

siendo g la tasa de inflación en el periodo

En esta relación i_n es conocida al inicio del periodo, $t=0$, no así g que solo lo será cuando este finalice. Por tanto, en $t=0$, i_r es una variable sobre la que se tiene poca, o muy poca, información.

Si el Sr. Corto, por su experiencia inversora, piensa que la predicción del Gobierno, 5%, es una estimación optimista de la inflación (el menor valor posible), y que a lo sumo, esta solo podrá subir un punto por encima, 6%, con esas simples creencias, a la tasa de inflación se le puede ajustar un modelo subjetivo rectangular, con $a=0'05$ y $b=0'06$.

Por tanto, la variable aleatoria "deflactor"

$$\zeta = \frac{1}{1 + g}$$

seguirá la distribución dada por la densidad (5), para los valores de a y b antes indicados. Su media y su varianza (fórmulas (6) y (8)) serán:

$$E\left[\frac{1}{1+g}\right] = \frac{1}{0'01} \ln\left(\frac{1'06}{1'05}\right) = 0'947874395$$

$$\text{Var}\left[\frac{1}{1+g}\right] = \frac{1}{1'05 \cdot 1'06} - E^2\left[\frac{1}{1+g}\right] = 6'727 \cdot 10^{-6}$$

En cuanto a la variable tipo de interés real, se tiene que

$$E\left[1 + i_r\right] = 1'12 \cdot E\left[\frac{1}{1+g}\right] = 1,061619$$

$$\text{Var}\left[1 + i_r\right] = (1'12)^2 \cdot \text{Var}\left[\frac{1}{1+g}\right] = 8'438 \cdot 10^{-6}$$

Los momentos del Valor Actual de esta inversión son

$$E(\text{VA}) = 893.000 \cdot E\left[1 + i_r\right] = 948.026 \text{ ptas}$$

$$\text{Var}(\text{VA}) = (893.000)^2 \cdot \text{Var}\left[1 + i_r\right] = 6.728.875 \text{ (ptas)}^2$$

lo que proporciona un beneficio esperado = $948.026 - 893.000 = 55.026$ ptas con una desviación típica de 2.594 ptas.

Esto significa que esa incertidumbre mínima, una inflación entre el 5% y el 6%, en el tipo de descuento supone un riesgo, nada despreciable, del 4'7% en el beneficio esperado de la operación.

Hasta este punto cabía la siguiente duda: a la vista de la varianza tan pequeña del factor de actualización ¿no sería más cómodo considerarlo determinista?. Ahora, habida cuenta de la influencia que tiene en el riesgo de una operación tan simple, es evidente la importancia de seguir considerandolo aleatorio.

Continuando con el ejemplo, si además de la estimaciones anteriores, el Sr. Corto piensa que lo más probable es que el nivel de inflación se sitúe en el 5'25%, se tiene:

$$a=0'05 \quad b=0'06 \quad m=0'0525. \quad (42)$$

Con estas tres estimaciones subjetivas la oferta de modelos es más amplia: el modelo triangular y los modelos de la familia de las Betas, si bien, por dificultades de cálculo numérico, esta familia queda reducida a dos miembros, los correspondientes a $K=1$ y $K=2$.

¿Cuál es el modelo adecuado?. Esta duda ha de resolverla el propio Sr. Corto, según la verosimilitud relativa que considere tiene su moda estimada. A estos efectos puede serle útil conocer la forma de las funciones de densidad de los tres modelos ofertados para la tasa de inflación. Estas gráficas aparecen en las Figuras 1, 2 y 3 de la página siguiente.

Para una adecuada selección del modelo creemos conveniente, no solo observar y analizar las gráficas en la zona del máximo, sino también en las proximidades de los extremos de la distribución. ¿Cuán verosimiles, estima el Sr. Corto que, son los valores próximos a los extremos del intervalo?

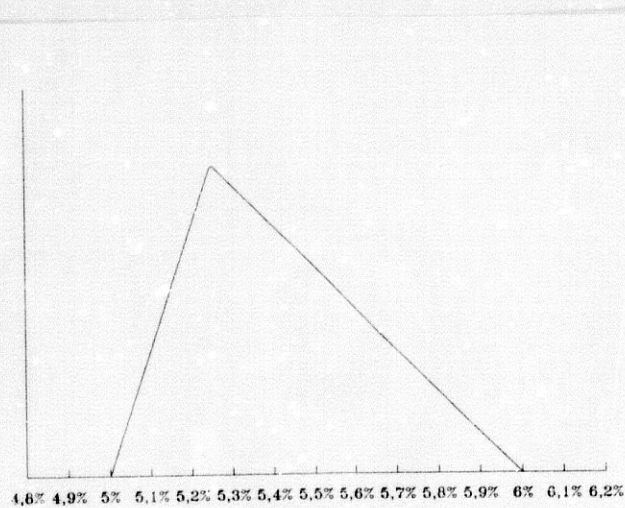


Figura 1.- Forma de la densidad del modelo triangular

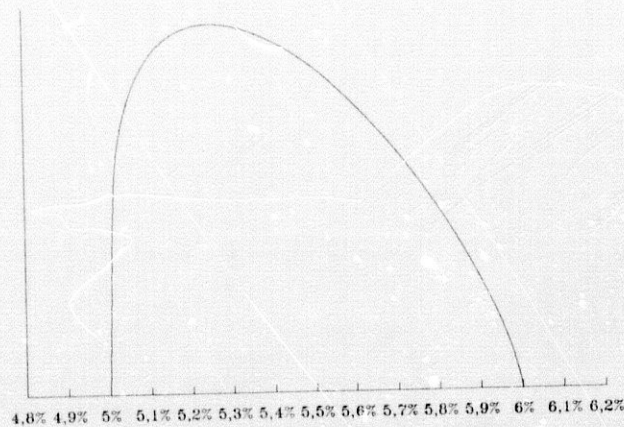


Figura 2.- Forma de la densidad del modelo beta K=1

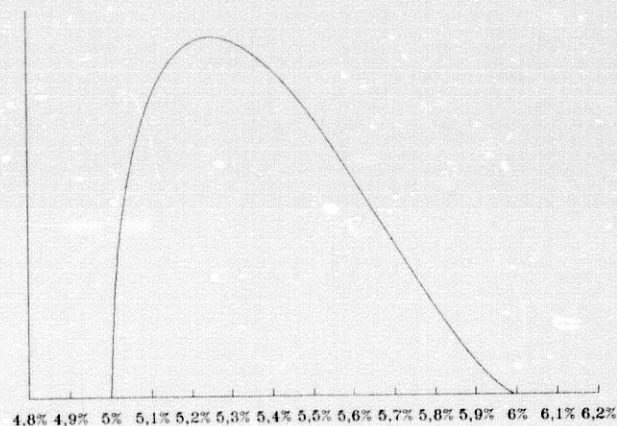


Figura 3.- Forma de la densidad del modelo beta K=2

A la espera de esa decisión, aquí se exponen los resultados obtenidos con cada una de las alternativas.

Modelo triangular.-

Llevando los datos (42) a las fórmulas (12) y (13), se obtiene

$$E\left[\frac{1}{1+g}\right] = 0'948620454$$

$$E\left[\frac{1}{1+g}\right]^2 = 0'899884406$$

$$\text{Var}\left[\frac{1}{1+g}\right] = E\left[\frac{1}{1+g}\right]^2 - E\left[\frac{1}{1+g}\right]^2 = 3'640 \cdot 10^{-6}$$

En consecuencia, los momentos para el tipo de interés real son:

$$E\left[1 + i_r\right] = 1'12 \cdot E\left[\frac{1}{1+g}\right] = 1'062454908$$

$$\text{Var}\left[1 + i_r\right] = (1'12)^2 \cdot \text{Var}\left[\frac{1}{1+g}\right] = 4'566 \cdot 10^{-6}$$

y para el Valor Actual

$$E(\text{VA}) = 893.000 \cdot E\left[1 + i_r\right] = 948.772 \text{ ptas}$$

$$\text{Var}(\text{VA}) = (893.000)^2 \cdot \text{Var}\left[1 + i_r\right] = 3.641.064 (\text{ptas})^2$$

lo que proporciona un beneficio esperado de 55.772 ptas con una desviación típica de 1.908 ptas.

Evidentemente en este modelo, al disponer de una mayor información, el riesgo es menor; tan solo un 3'4% del beneficio esperado. A la vista de las Figuras 1, 2 y 3, cabe esperar que este modelo sea el de mínima varianza entre los tres aplicables a esta situación.

Modelo beta con K=1.-

Siguiendo el algoritmo propuesto con las datos (42) y con K=1 se obtienen los siguientes resultados

$$E\left[\frac{1}{1+g}\right] = 0'948621785$$

$$E\left[\frac{1}{1+g}\right]^2 = 0'899888$$

$$\text{Var}\left[\frac{1}{1+g}\right] = E\left[\frac{1}{1+g}\right]^2 - E^2\left[\frac{1}{1+g}\right] = 4'914 \cdot 10^{-6}$$

En la Figura 4 se reproduce la salida de la hoja electrónica con la que se han realizado estos cálculos.

```

*****
      a      b      m      k
    0,05    0,06    0,0525    1
*****
      m'      p      q
    0,25    1,25    1,75
*****
Mant p  Mant q  seg orden  mu  var
0,25    0,75  0,902748  0,950126  0,0000075919
1,25    0,75  0,896346  0,946752  0,0000062917
1,25    1,75  0,899888  0,948621  0,0000049144

```

Figura 4.- Cálculos correspondientes al modelo beta K=1

Para el tipo de interés real se tiene que

$$E\left[1 + i_r\right] = 1'12 \cdot E\left[\frac{1}{1+g}\right] = 1'06245640$$

$$\text{Var} \left[1 + i_r \right] = (i'12)^2 \cdot \text{Var} \left[\frac{1}{1+g} \right] = 6'164.10^{-6}$$

y para el Valor Actual de la inversión

$$E(\text{VA}) = 893.000 \cdot E \left[1 + i_r \right] = 948.774 \text{ ptas.}$$

$$\text{Var}(\text{VA}) = (893.000)^2 \cdot \text{Var} \left[1 + i_r \right] = 4.915.970$$

por tanto, el beneficio esperado es de 55.773 ptas (el mismo que proporcionaba el modelo triangular) con una desviación típica de 2.217 ptas. En este caso, el riesgo supone aproximadamente el 4% del beneficio esperado.

Modelo Beta con K=2.-

Los resultados obtenidos en este caso pueden observarse en la Figura 5.

```

*****
      a      b      m      k
      0,05   0,06   0,0525   2
*****
      m'     p      q
      0,25   1,5    2,5
*****

Mant p  Mant q  seg orden  mu      var
0,5    0,5    0,898482  0,947877  0,0000100906
1,5    0,5    0,894224  0,945631  0,0000050214
1,5    1,5    0,898467  0,947872  0,0000050452
1,5    2,5    0,900596  0,948995  0,0000037919

```

Figura 5.- Cálculos correspondientes al modelo beta K=2

Estos resultados dan lugar a que

$$E\left[1 + i_r\right] = 1'06287518$$

$$\text{Var}\left[1 + i_r\right] = 4'757 \cdot 10^{-6}$$

$$E(\text{VA}) = 949.147 \text{ ptas.}$$

$$\text{Var}(\text{VA}) = 3.792.142$$

con lo que el beneficio esperado es de 56.147 ptas y la desviación típica 1.948 ptas, lo que supone un 3'5% del beneficio esperado.

COMPARACION ENTRE LOS DIVERSOS MODELOS.-

En este apartado van a compararse las medias y las varianzas de todos los modelos aplicables según la amplitud del intervalo.

Fijados a y b, empíricamente se ha hecho variar m entre ellos, y para cada valor de la moda se han calculado las medias y las varianzas que proporcionan cada uno de los modelos, i.e. se han considerado estas dos características como función de m.

En las Figuras 6 y 7 se presentan las gráficas de estas funciones, obtenidas empíricamente, para los cuatro modelos aplicables cuando $a=0,05$ y $b=0'06$. Las Tablas numéricas pueden verse en el Apéndice.

En lo que respecta a las medias, es de destacar la linealidad de todas las gráficas y la perfecta coincidencia del modelo triangular con el modelo beta en el que $K=1$. Dentro de la familia beta se observa que al variar K se obtiene un haz de rectas que se cortan en el punto medio del intervalo, y a medida que aumenta el valor de K aumenta el valor absoluto de la pendiente. (Téngase en cuenta que el modelo rectangular pertenece a la familia beta y está caracterizado por $K=0$)

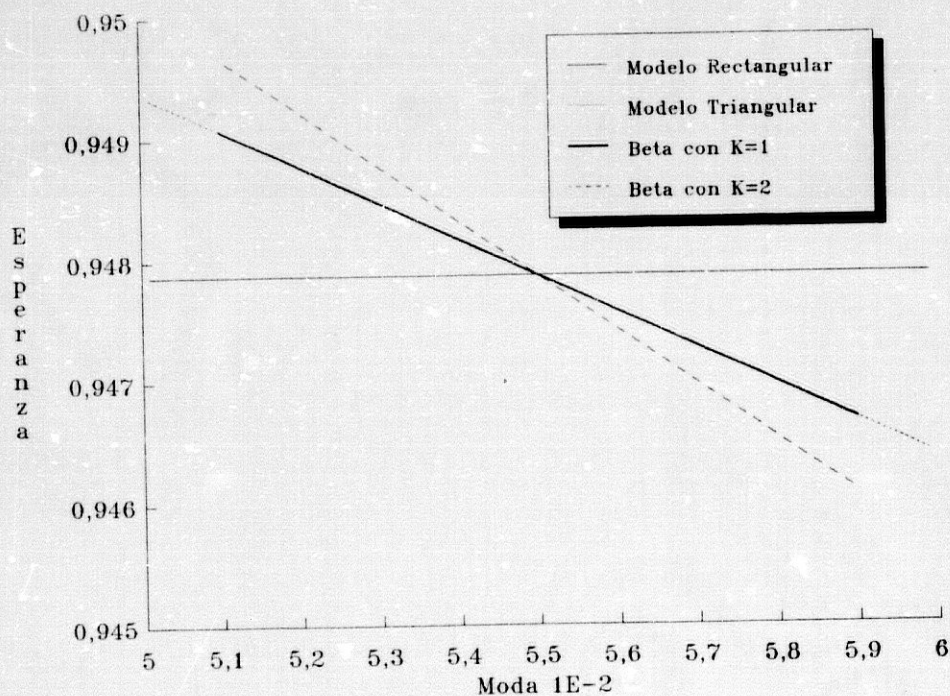


Figura 6.- La media de los diversos modelos como función de la moda. $a=0'05$ y $b=0'06$

Por lo que a las varianzas se refiere, han de reseñarse tres evidencias:

- 1) las gráficas correspondientes a los modelos beta, entre los que se incluye la distribución uniforme, constituyen una familia de curvas con forma "similar", con una representación gráfica cada vez más baja conforme aumenta el valor de K, y con una curvatura más acentuada.
- 2) el distinto comportamiento de la distribución triangular que conduce a varianzas menores para los valores centrales de m, mientras que los modelos beta conducen, para esos valores de m, a mayores varianzas.
- 3) la sensible reducción en la varianza, cualquiera que sea el modelo, por el simple hecho de poder destacar un valor más probable.

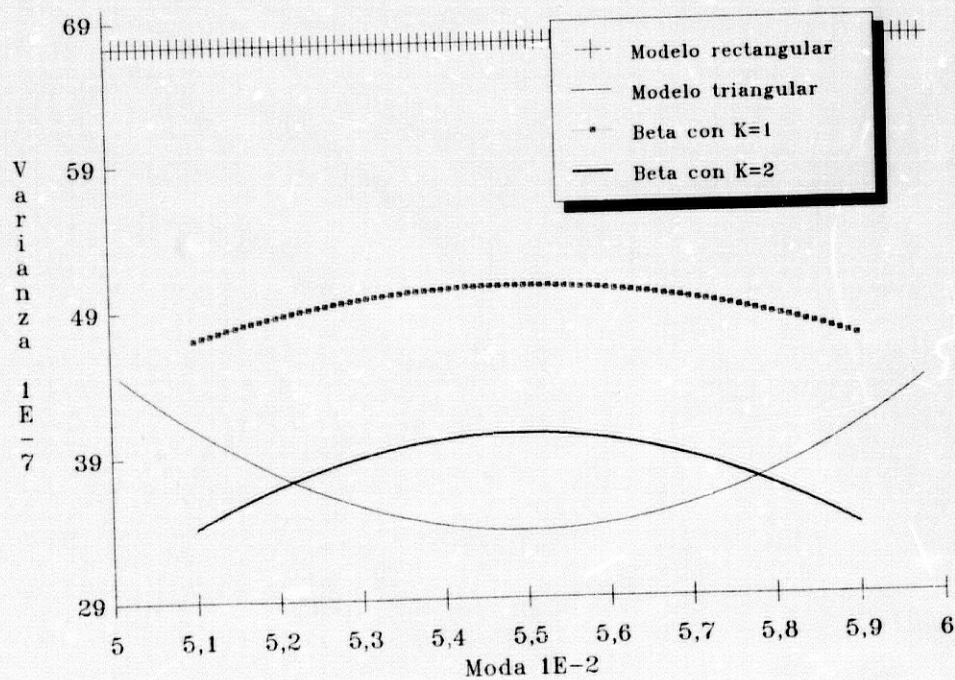


Figura 7.- La varianza de los diversos modelos. $a=0'05$ $b=0'06$

En las Figuras 8 y 9 aparecen las gráficas correspondientes a los valores $a=0$ y $b=1$. En este caso son seis los modelos aplicables. En cuanto a las medias se observa

- 1) un empeoramiento en la linealidad de todas las gráficas, excepto naturalmente la correspondiente al modelo rectangular. Ahora son curvas convexas.
- 2) desaparición de la estrecha concordancia, antes existente, entre los modelos triangular y beta con $K=1$
- 3) las gráficas de los miembros de la familia beta se siguen cortando en un punto, pero este ya no es el punto medio del intervalo, se ha esorado hacia la izquierda como consecuencia de la convexidad.
- 4) a medida que aumenta K , la gráfica correspondiente va elevándose y aumentando su curvatura.

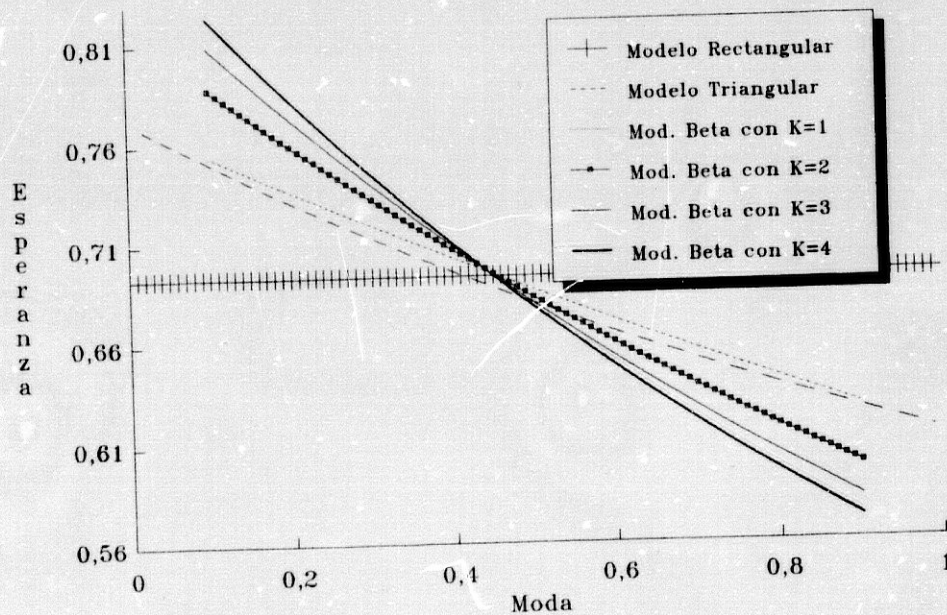


Figura 8.- La media de los distintos modelos en función de la moda. $a=0$ $b=1$

En cuanto a las varianzas sigue destacando el comportamiento de la familia beta: todos sus elementos tienen una gráfica de forma "similar" y conforme aumenta K se van desplazando hacia abajo y aumentando su curvatura.

Otra característica que se mantiene, con respecto al caso anterior, es la convexidad de la gráfica correspondiente al modelo triangular, frente a la concavidad de las gráficas correspondientes a los modelos beta.

Una novedad: las gráficas correspondientes a los modelos beta muestran un comportamiento decreciente (al menos entre $m=0,1$ y $m=0,9$, zona en la que han sido exploradas).

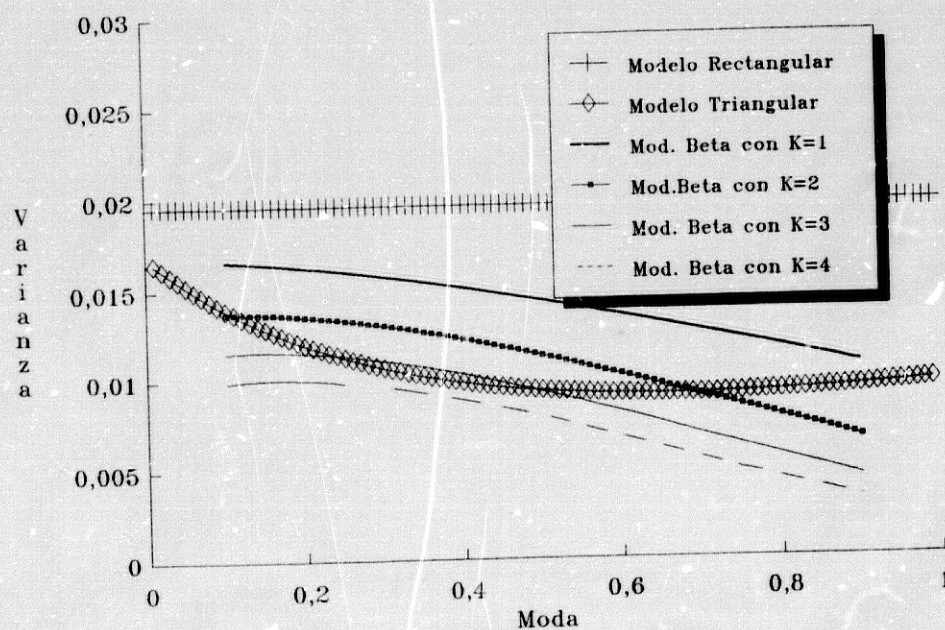


Figura 9.- La varianza de los distintos modelos en función de la moda. $a=0$ $b=1$

CAPITULO IV

PROYECTOS DE INVERSION MULTIPERIODO

En el capítulo anterior se estudió la variable aleatoria factor de actualización para un periodo bajo diversas hipótesis sobre la distribución seguida por el tipo de actualización. Con ello se consiguió el conocimiento de la distribución seguida por el VAN de proyectos uniperiodo con flujos de caja determinísticos.

En este capítulo se abordan proyectos de inversión más generales, como son los uniperiodo con flujo de caja aleatorio y los multiperiodo. La hipótesis clave será la independencia de todas las variables aleatorias que aparezcan, ya sean flujos de caja ó factores de actualización, y los resultados serán más pobres, pues solo se obtendrán la media y la varianza del VAN, renunciando al conocimiento exacto de su distribución.

RESULTADOS PREVIOS.-

Si ξ y η son variables aleatorias independientes es sabido que

$$E[\xi \cdot \eta] = E[\xi] \cdot E[\eta] \quad (1)$$

$$\text{Var}(\xi + \eta) = \text{Var}(\xi) + \text{Var}(\eta) \quad (2)$$

Además, para los propósitos de este estudio, es necesaria una expresión de la varianza del producto $\xi \cdot \eta$ en función de los

momentos de los factores. Esta relación es la siguiente:

$$\text{Var}(\xi \cdot \eta) = E^2[\xi] \cdot \text{Var}(\eta) + E^2[\eta] \cdot \text{Var}(\xi) + \text{Var}(\xi) \cdot \text{Var}(\eta) \quad (3)$$

En efecto:

$$\text{Var}(\xi \cdot \eta) = E \left[\xi \cdot \eta - E[\xi \cdot \eta] \right]^2 = E \left[\xi \cdot \eta - E[\xi] \cdot E[\eta] \right]^2$$

por la independencia de ambas variables aleatorias. Sumando y restando $\xi \cdot E[\eta]$, se tiene

$$\begin{aligned} E \left[\xi \cdot \eta - E[\xi] \cdot E[\eta] \right]^2 &= E \left[\xi \cdot \eta - \xi \cdot E[\eta] + \xi \cdot E[\eta] - E[\xi] \cdot E[\eta] \right]^2 = \\ &= E \left[\xi \cdot (\eta - E[\eta]) + (\xi - E[\xi]) \cdot E[\eta] \right]^2 = \\ &= E \left[\xi^2 \cdot (\eta - E[\eta])^2 + (\xi - E[\xi])^2 E^2[\eta] + 2 \cdot E[\eta] \cdot (\eta - E[\eta]) \cdot \xi \cdot (\xi - E[\xi]) \right] = \\ &= E[\xi^2] \cdot E \left[\eta - E[\eta] \right]^2 + E \left[\xi - E[\xi] \right]^2 E^2[\eta] + 2 \cdot E[\eta] \cdot E(\eta - E[\eta]) \cdot E \left[\xi \cdot (\xi - E[\xi]) \right] = \\ &= E[\xi^2] \cdot \text{Var}(\eta) + E[\eta]^2 \cdot \text{Var}(\xi) = \\ &= \left(\text{Var}(\xi) + E^2[\xi] \right) \cdot \text{Var}(\eta) + E^2[\eta] \cdot \text{Var}(\xi) = \\ &= E^2[\xi] \cdot \text{Var}(\eta) + E^2[\eta] \cdot \text{Var}(\xi) + \text{Var}(\xi) \cdot \text{Var}(\eta) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

PROYECTOS DE INVERSION UNIPERIDO CON FLUJO DE CAJA ALEATORIO.-

El Valor Actualizado Neto de un proyecto de estas características viene dado por

$$\text{VAN} = -A + \frac{Q}{1+k} = -A + Q \cdot \zeta \quad \text{siendo } \zeta = \frac{1}{1+k}$$

donde A es determinista y tanto Q como ζ son variables aleatorias cuyas medias y varianzas son conocidas.

Suponiendo la independencia estocástica de Q y ζ , y aplicando las relaciones (1) y (3), se tiene

$$E[\text{VAN}] = -A + E[Q \cdot \zeta] = -A + E[Q] \cdot E[\zeta]$$

$$\text{Var}(\text{VAN}) = \text{Var}(Q \cdot \zeta) = E^2[Q] \cdot \text{Var}(\zeta) + E^2[\zeta] \cdot \text{Var}(Q) + \text{Var}(\zeta) \cdot \text{Var}(Q)$$

Con lo que el problema queda resuelto en la práctica.

PROYECTOS DE INVERSION MULTIPERIODO.-

En un proyecto de inversión con n periodos, el Valor Actualizado Neto obedece a la fórmula

$$\text{VAN} = -A + \frac{Q_1}{1+k_1} + \frac{Q_2}{(1+k_1)(1+k_2)} + \dots + \frac{Q_n}{(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)}$$

donde A es determinista y tanto Q_1, Q_2, \dots, Q_n como k_1, k_2, \dots, k_n son variables aleatorias independientes. Notando por

$$\zeta_i = \frac{1}{1+k_i} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

el VAN puede expresarse como

$$\text{VAN} = -A + Q_1 \cdot \zeta_1 + Q_2 \cdot \zeta_1 \cdot \zeta_2 + \dots + Q_n \cdot \zeta_1 \cdot \zeta_2 \dots \zeta_n \quad (4)$$

donde $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ son variables aleatorias independientes de medias $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_n, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ y varianzas $\text{Var}(Q_1), \text{Var}(Q_2), \dots, \text{Var}(Q_n), \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ conocidas.

Para proceder al cálculo de los momentos del VAN es conveniente disponer la fórmula (4) de la siguiente forma

$$\text{VAN} = -A + \zeta_1 \left[Q_1 + \zeta_2 \left[Q_2 + \zeta_3 \left[Q_3 + \dots + \zeta_{n-1} \left[Q_{n-1} + Q_n \zeta_n \right] \dots \right] \right] \right]$$

Ello permite el cálculo recurrente de atrás hacia delante del VAN del proyecto. En efecto, haciendo

$$V_n = Q_n \quad (5)$$

$$V_{i-1} = Q_{i-1} + \zeta_i \cdot V_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

y siendo $Q_0 = -A$, es evidente que el VAN del proyecto será V_0 .

La relación (6) presenta la tremenda ventaja de que las tres variables que aparecen en su segundo miembro son independientes, pues V_i es una función medible de Q_1, Q_{i+1}, \dots, Q_n y de $\zeta_{i+1}, \zeta_{i+2}, \dots, \zeta_n$.

Notando por m_i la media de V_i , para $i = 0, 1, \dots, n$, y aplicando la fórmula (1) así como la linealidad del operador esperanza, se tiene

$$m_n = \bar{Q}_n \quad (7)$$

$$m_{i-1} = \bar{Q}_{i-1} + \mu_i \cdot m_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

siendo $E[\text{VAN}] = m_0$.

Notando por S_i^2 la varianza de V_i , para $i = 0, 1, \dots, n$, y aplicando las fórmulas (2) y (3), se tiene

$$S_n^2 = \text{Var}(Q_n)$$

$$S_{i-1}^2 = \text{Var}(Q_{i-1}) + \mu_i^2 \cdot S_i^2 + m_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sigma_i^2 \cdot S_i^2 \quad (8)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$

terminando en S_0^2 que es, precisamente, la varianza del VAN.

Si los flujos de caja del proyecto Q_1, Q_2, \dots, Q_n fuesen deterministas, se tendría que

$$\begin{aligned}\bar{Q}_i &= Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \text{Var}(Q_i) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

y ello simplificaría los dos procesos recurrentes. Así el proceso de obtención de las medias quedaría

$$\begin{aligned}m_n &= Q_n \\ m_{i-1} &= Q_{i-1} + \mu_i \cdot m_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ E[\text{VAN}] &= m_0\end{aligned} \tag{9}$$

y el de las varianzas

$$\begin{aligned}S_n^2 &= 0 \\ S_{i-1}^2 &= \mu_i^2 \cdot S_i^2 + m_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sigma_i^2 \cdot S_i^2 \\ &\quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n\end{aligned} \tag{10}$$

EJEMPLO.- (Con flujos de caja deterministas)

El Estado lanza una emisión de Bonos cuyas características son las siguientes:

Títulos de 50.000 ptas. nominales

Tipo de interés fijo del 10% pagadero anualmente

Vida del título: 4 años

Se va a estudiar la conveniencia de esta inversión al introducir la incertidumbre, que puede provenir de las tasas de inflación interanuales, en los factores de actualización.

El Valor Actualizado Neto de esta inversión es:

$$\text{VAN} = -50.000 + \frac{5.000}{1+g_1} + \frac{5.000}{(1+g_1)(1+g_2)} + \frac{5.000}{(1+g_1)(1+g_2)(1+g_3)} + \frac{50.000 + 5.000}{(1+g_1)(1+g_2)(1+g_3)(1+g_4)}$$

siendo g_1 , g_2 , g_3 y g_4 las tasas de inflación del año correspondiente.

Evidentemente esas tasas no son conocidas, y sería muy conveniente un análisis detenido de la situación económica general con vistas a asignar, a cada una de ellas, una distribución de probabilidad subjetiva. Como esto escapa de las posibilidades de esta Memoria, van a presentarse cuatro escenarios que pueden etiquetarse bajo los términos de incertidumbre, inflación en ascenso, inflación en descenso, e inflación estable.

El escenario que se ha denominado de incertidumbre está caracterizado por:

- la inexistencia de una opinión clara sobre la posible evolución temporal de la tasa de inflación interanual.
- la mayor amplitud del rango de variabilidad de una tasa cuanto más lejano sea el año al que se refiere.
- la existencia de un nivel mínimo por debajo del cual nunca bajará la tasa de inflación.

Una situación así pudiera ser la siguiente: todas las tasas de inflación siguen una distribución uniforme entre los límites que, para cada una de ellas, se indican

g_1 entre 0'05 y 0'07

g_2 entre 0'03 y 0'12

g_3 entre 0'03 y 0'20

g_4 entre 0'03 y 0'30

se tiene que

$$\mu_1 = E\left[\frac{1}{1+g_1}\right] = 0'9434242$$

$$\sigma_1^2 = \text{Var}\left[\frac{1}{1+g_1}\right] = 2'64352 \cdot 10^{-5}$$

$$\mu_2 = E\left[\frac{1}{1+g_2}\right] = 0'9307764$$

$$\sigma_2^2 = \text{Var}\left[\frac{1}{1+g_2}\right] = 5'06743 \cdot 10^{-4}$$

$$\mu_3 = E\left[\frac{1}{1+g_3}\right] = 0'8986044$$

$$\sigma_3^2 = \text{Var}\left[\frac{1}{1+g_3}\right] = 1'57155 \cdot 10^{-3}$$

$$\mu_4 = E\left[\frac{1}{1+g_4}\right] = 0'8622424$$

$$\sigma_4^2 = \text{Var}\left[\frac{1}{1+g_4}\right] = 3'36394 \cdot 10^{-3}$$

Bajo la hipótesis de independencia de las variables aleatorias implicadas, pueden aplicarse los procesos recurrentes (9) y (10), obteniéndose:

$$m_4 = 55.000$$

$$m_3 = 5.000 + \mu_4 \cdot (55.000) = 52.423'33$$

$$m_2 = 5.000 + \mu_3 \cdot m_3 = 52.107'84$$

$$m_1 = 5.000 + \mu_2 \cdot m_2 = 53.500'74$$

$$m_0 = -50.000 + \mu_1 \cdot m_1 = \boxed{473'90 = E[\text{VAN}]}$$

$$S_4^2 = 0$$

$$S_3^2 = \mu_4^2 \cdot S_4^2 + m_4^2 \cdot \sigma_4^2 + S_4^2 \cdot \sigma_4^2 = 10.175.918$$

$$S_2^2 = \mu_3^2 \cdot S_3^2 + m_3^2 \cdot \sigma_3^2 + S_3^2 \cdot \sigma_3^2 = 12.551.885$$

$$S_1^2 = \mu_2^2 \cdot S_2^2 + m_2^2 \cdot \sigma_2^2 + S_2^2 \cdot \sigma_2^2 = 12.256.542$$

$$S_0^2 = \mu_1^2 \cdot S_1^2 + m_1^2 \cdot \sigma_1^2 + S_1^2 \cdot \sigma_1^2 = \boxed{10.984.916 = \text{Var}(\text{VAN})}$$

Apoyandose en la idea intuitiva que se tiene de la desviación típica, es obvio el alto riesgo que supone una inversión con una ganancia esperada de 474 ptas. y con una desviación típica de 3.314 ptas. En este escenario, la inversión descrita no parece muy recomendable.

El escenario de tasa de inflación creciente bien pudiera corresponder a la siguiente situación:

g_1 se cree que tomará un valor entre el 5% y el 7%, siendo imposible destacar uno más probable.

g_2 se opina que tomará un valor entre el 6% y el 12% considerando que lo más probable es que sea el 10%.

g_3 estará entre el 8% y el 15%, considerando como lo más probable que sea del 12%.

g_4 variará entre el 11% y el 20% siendo lo más probable que sea del 17%.

Obsérvese que a medida que nos alejamos en el tiempo el rango de variabilidad de la tasa de inflación correspondiente sigue siendo más amplio. También es lógico que a medida que nos alejamos en el tiempo se tenga una menor confianza en la moda, en el sentido de que los valores próximos a ella serán casi tan probables como la propia moda. Estas consideraciones hacen que juzguemos adecuados los siguientes modelos subjetivos para cada una de las tasas:

g_1 seguirá una distribución uniforme entre los límites ya citados,

por tanto $\mu_1 = 0'9434242$

$$\sigma_1^2 = 2'644 \cdot 10^{-5}$$

g_2 seguirá un modelo beta ajustado a las tres estimaciones correspondientes, con $K=2$, por tanto

$$\mu_2 = 0'913375 \quad \sigma_2^2 = 1'225 \cdot 10^{-4}$$

g_3 seguirá un modelo beta respetuoso con las tres estimaciones de esta tasa y con $K=1$, por tanto

$$\mu_3 = 0'895742 \quad \sigma_3^2 = 1,972 \cdot 10^{-4}$$

g_4 seguirá una distribución beta con $K=1$ respetando las tres estimaciones efectuadas, por tanto

$$\mu_4 = 0'862390 \quad \sigma_4^2 = 2,786 \cdot 10^{-4}$$

Aplicando los procesos recurrentes (9) y (10), con estos datos se tiene:

$m_4 = 55.000$	$S_4^2 = 0$
$m_3 = 52.431'45$	$S_3^2 = 842.765$
$m_2 = 51.965'05$	$S_2^2 = 1.218.475'9$
$m_1 = 52.463'58$	$S_1^2 = 1.347.462'4$
$m_0 = -504'59$	$S_0^2 = 1.272.104$

es decir, en este escenario, el beneficio esperado de la inversión es de -505 ptas con una desviación típica de 1.127 ptas.

El escenario tasa de inflación descendente, tras las consideraciones realizadas en los casos anteriores, bien pudiera ser:

g_1 sigue una distribución uniforme entre el 5% y el 7%, con lo

$$\text{cual } \mu_1 = 0'9434242 \quad \sigma_1^2 = 2'644 \cdot 10^{-5}$$

g_2 sigue una distribución beta entre el 3% y el 6% con moda en el

4% y $K=2$, y por tanto

$$\mu_2 = 0'959271$$

$$\sigma_2^2 = 3'693 \cdot 10^{-5}$$

g_3 sigue una distribución beta entre el 2% y el 6%, con moda en el

3% y $K=1$, de donde

$$\mu_3 = 0'964717$$

$$\sigma_3^2 = 8'379 \cdot 10^{-5}$$

g_4 sigue una distribución beta entre el 1% y el 5%, con moda en el

2% y $K=1$, lo que ocasiona que

$$\mu_4 = 0'974115$$

$$\sigma_4^2 = 8'710 \cdot 10^{-5}$$

Aplicando los procesos recurrentes (9) y (10) se tiene:

$$m_4 = 55.000$$

$$S_4^2 = 0$$

$$m_3 = 58.576$$

$$S_3^2 = 2'635 \cdot 10^5$$

$$m_2 = 61.510$$

$$S_2^2 = 5'327 \cdot 10^5$$

$$m_1 = 64.004$$

$$S_1^2 = 6'300 \cdot 10^5$$

$$m_0 = 10.383$$

$$S_0^2 = 6'690 \cdot 10^5$$

es decir, el beneficio esperado de esta inversión es de 10.383 ptas con una desviación típica de 818 ptas. En este escenario la inversión puede ser tenida en cuenta.

Finalmente, el escenario de inflación estable pudiera estar caracterizado por la cuatro tasas independientes e idénticamente distribuidas siguiendo la uniforme entre el 5% y el 7%. En este caso se tendría

$$m_4 = 55.000$$

$$S_4^2 = 0$$

$$m_3 = 56.888$$

$$S_3^2 = 7'7 \cdot 10^4$$

$$m_2 = 58.670$$

$$S_2^2 = 1'57 \cdot 10^5$$

$$m_1 = 60.351$$

$$m_0 = 6.936$$

$$S_1^2 = 2'30.10^5$$

$$S_0^2 = 3'01.10^5$$

es decir, el beneficio esperado de esta inversión es de 6.936 ptas
con una desviación típica de 549 ptas.

CAPITULO V

EVALUACION ECONOMICA DE LAS OBRAS DE PUESTA EN REGADIO DEL PANTANO DE LA BOLERA

Está a punto de editarse, si es que a la lectura de esta memoria no se ha hecho ya, el libro titulado LOS REGADIOS DE LA PRESA DE LA BOLERA. UNA EVALUACION ECONOMICA "A POSTERIORI", del que son autores los profesores D. Manuel Martin Rodriguez y D^a. Noelina Rodríguez Ferrero; este libro es una versión abreviada de un amplio Informe fruto del trabajo desarrollado por el Instituto de Desarrollo Regional de la Universidad de Granada por encargo de la Confederación Hidrográfica del Guadalquivir, en diciembre de 1985, y en su Capítulo 4, párrafo 1, contiene una evaluación económica del Plan de Regadío, basada en el criterio del Valor Actualizado Neto.

En lo que respecta a las inversiones, en el Capítulo 2 y en el Apéndice 1 del citado libro, se realiza una evaluación económica pormenorizada de todas y cada una de las obras públicas realizadas hasta llegar a la situación actual de los regadíos. En resumen la metodología seguida ha sido, en términos de los propios autores:

- 1.- "tener en cuenta las inversiones realizadas, año a año, por los dos organismos que tenían encomendado el desarrollo del Plan Coordinado, el Instituto Nacional de Colonización,

dependiente del Ministerio de Agricultura, y la Confederación Hidrográfica del Guadalquivir, dependiente del Ministerio de Obras Públicas y Urbanismo".

- 2.- Aunque las obras comenzaron en 1960, se toma como origen de tiempo el año 1968 , por lo que todas las inversiones realizadas con anterioridad se han actualizado y acumulado a esa fecha.
- 3.- Para la realización de esa actualización, "se han distinguido dos tipos de inversiones, las destinadas al pago de indemnizaciones por la expropiación de terrenos, uso temporal de los mismos, afecciones a servicios establecidos, etc, y las que tenían por objeto la construcción de las obras civiles previstas en el Plan".
- 4.-"La actualización de las indemnizaciones se ha hecho utilizando el índice de precios elaborado por el Instituto Nacional de Estadística. Para actualizar las inversiones en obra civil, se han empleado las correspondientes fórmulas polinómicas de revisión de precios aprobadas por el Decreto 3.650/1970 de 19 de diciembre (BOE del 20) que tienen en cuenta una serie de elementos fundamentales del coste de las obras (mano de obra, energía, cemento, acero, etc) ponderando el peso de cada uno de estos elementos en los costes según el tipo de obra que se trata".

5.- Para obtener la inversión actualizada estrictamente imputable a la ejecución del Plan Coordinado deben introducirse algunas correcciones.

5.1.- "En primer lugar, debe tenerse en cuenta que las presas de embalse son obras que, además de atender al objetivo concreto que las motiva, proporcionan otros beneficios de carácter general, como son, entre otros, la mejora de la regulación general de la cuenca hidrográfica en que se ubican y la defensa contra avenidas del territorio situado aguas abajo. En casos como el que nos ocupa, el Ministerio de Obras Públicas imputa a la zona regable solamente el 50% del coste de la presa".

5.2.- "El largo período de ejecución de una obra hidráulica para regadío hace posible que se lleven a cabo obras de mantenimiento como si fueran obras de primera planta, lo cual falsea el coste real, ya que aquellas deberán imputarse a las correspondientes cuentas de explotación".

5.3.- "Cuando se ejecuta un plan de esta importancia, por razones de diversa índole se ejecutan a su cargo obras que no son imputables al mismo".

Trás estas consideraciones, los resultados obtenidos figuran en la columna 6 de la Tabla 1, expresados en pesetas corrientes.

En cuanto a los beneficios del regadío, se define el beneficio marginal por hectárea como la diferencia entre los beneficios por hectárea obtenidos en regadío y en secano. Excluyéndose de este concepto determinados beneficios públicos, que se consideran en la evaluación ambiental.

El cálculo del beneficio marginal requiere:

- 1.- el conocimiento de las superficies puestas en regadío progresivamente. Para ello, los autores han utilizado los Informes anuales de la zona regable del Guadalentín realizados por la Confederación Hidrográfica del Guadalquivir. Los datos son los que figuran en la columna 2 de la Tabla 1.
- 2.- la composición de la hectárea media, tanto de regadío como de secano, para lo cual analizan la superficie destinada a cada uno de los cultivos, tanto en regadío como en secano, a lo largo de las sucesivas campañas. Ello permite obtener, en cada campaña, un coeficiente de ponderación para cada cultivo.
- 3.- la estimación de los costes de producción de los distintos cultivos para lo que "hemos descompuesto aquellos en cinco grandes grupos: mano de obra, equipos, materias primas, costes fijos y otros costes". Dentro de los costes de las materias primas se han considerado las semillas, los fertilizantes, los fitosanitarios, y el agua. Entre los costes fijos están la

Contribución Rústica, la Cuota de Seguridad Agraria y los costes de mantenimiento de la explotación y en el apartado de otros costes se han considerado los de primer establecimiento, el precio y la renta de la tierra. Finalmente "para las estimaciones directas, se han utilizado como años de referencia las campañas agrícolas 1968-69, 1969-70, 1974-75, 1979-80 y 1984-85. Los costes de las restantes campañas cuando han sido necesarios, se han obtenido por extrapolación".

4.- la estimación de los ingresos y rendimientos históricos de cada cultivo, a la que se dedica Apéndice 3 de la citada obra.

Trás todos estos estudios previos se han obtenido los beneficios por hectárea que figuran en las columnas 3 y 4 de la Tabla 1, expresados en pesetas corrientes.

En cuanto a la vida de las inversiones y al tipo de interés: "En general, para los proyectos hidráulicos que tienen como finalidad la puesta en regadío, suelen considerarse períodos de vida útiles entre 30 y 35 años,...". "Pese a ello, hemos considerado un ámbito temporal de 50 años en una matriz de doble entrada en la que las variables son el tiempo y el tipo de interés. Con ello se ha pretendido disponer de la posibilidad de realizar evaluaciones alternativas sin más que tomar hipótesis históricas distintas".

V.A.N. DATOS FINALES DE CALCULO.

B. SUPERFICIE AÑADIDA DE REGADÍO.

AÑO	SUPERFICIE REGADÍO Has.	BENEFICIOS REGADÍO Ptas./Ha.	BENEFICIOS SECAÑO Ptas./Ha.	FLUJO CAJA Ptas.	INVERSION REALIZADA(*) Ptas.
1968	92	11.814	1.787	922.484	197.483.700
1969	1.412	12.745	2.178	14.920.604	15.356.360
1970	1.409	12.719	1.851	15.313.012	38.126.680
1971	1.404	14.786	2.262	17.583.696	46.829.950
1972	1.404	15.547	1.340	19.946.628	60.015.720
1973	1.836	6.205	1.058	9.449.892	81.772.680
1974	2.320	15.667	6.285	21.766.240	66.757.090
1975	2.150	22.584	670	47.115.100	79.967.180
1976	2.168	27.357	1.199	56.710.544	60.261.090
1977	2.156	33.232	4.887	61.111.820	24.704.620
1978	2.298	24.667	2.684	50.516.934	28.324.190
1979	2.467	24.944	3.134	53.805.270	11.105.320
1980	2.966	13.985	-2.249	48.150.044	17.378.940
1981	3.028	45.559	6.830	117.271.412	16.028.620
1982	3.046	18.981	-2.227	64.599.568	12.347.500
1983	3.677	54.698	13.537	151.348.997	19.993.900
1984	3.736	22.042	4.978	63.751.104	13.308.130
1985	3.736	33.392	6.683	99.784.824	35.740.630

(*) Inversiones imputables al regadío.

FUENTE: "Los regadíos de la presa de La Bolera. Una evaluación económica a posteriori".

TABLA 1.

EVALUACION ECONOMICA ALTERNATIVA.-

El estudio de los profesores Martín Rodríguez y Rodríguez Ferrero se llevó a cabo en 1986, y todos sus datos pueden ser considerados deterministas por referirse a períodos anteriores a esa fecha. Por este motivo, en la vida del proyecto vamos a considerar dos períodos: desde 1968 hasta 1985, y desde 1986 en adelante.

Período 1968-85.-

Ignorando los beneficios que puedan aparecer con posterioridad a 1985, para valorar el Plan de Regadíos no hay más que actualizar todos los flujos de caja, habidos en ese período, a pesetas de 1985. Esta valoración servirá de punto de partida para la evaluación global.

Reconociendo las dificultades que tiene la elección del tipo de actualización adecuado para un proyecto cuyas inversiones proceden de los Presupuestos Generales del Estado, y cuyos beneficios van a parar a manos privadas (agricultores) se presentan dos alternativas: 1) olvidar la procedencia de los fondos destinados a la inversiones, suponiendo que se los procuran los propios agricultores a través del Crédito Oficial, ó 2) ignorar el destino de los beneficios, suponiendo que revierten directamente en las Arcas del Estado.

En la primera alternativa el tipo de descuento apropiado sería el aplicado a nuevas operaciones por el Crédito Oficial y en la segunda el tipo a un año de la Deuda Pública. Como no nos ha sido posible encontrar series históricas de estas magnitudes, al menos de una longitud suficiente, es por lo que hemos usado los tipos nominales a largo plazo de la Economía Española 1964-1985 de Baiges (1987). Los cálculos pueden verse en la Tabla 2

Año	Beneficio	Inversión	Flujo de Caja	Tipo Actual	Flujo de caja acumulado y actualizado
1968	922484	197483700	-196561216	9,11	-196561216
1969	14920604	15356360	-435755	9,56	-214903699
1970	15313012	38126680	-22813668	11,05	-258262160
1971	17583696	46829930	-29246234	11,31	-316046363
1972	19946628	60015720	-40069092	10,55	-391860299
1973	9449892	81772680	-72322788	10,71	-505524348
1974	21766240	66757090	-44990850	12,74	-604656856
1975	47115100	79967180	-32852080	13,40	-714542219
1976	56710544	60261090	-3550546	12,46	-813841423
1977	61111820	24704620	36407200	11,97	-878838864
1978	50516934	28324190	22192744	13,82	-961843132
1979	53805270	11105320	42699950	14,92	-1052069903
1980	48150044	17378940	30771104	15,10	-1178267629
1981	117271412	16028620	101242792	15,34	-1254943248
1982	64599568	12347500	52252068	17,57	-1395199475
1983	151348997	19993900	131355097	18,74	-1508980926
1984	63751104	13308130	50442974	20,76	-1741320977
1985	99784324	35740630	64044194		-2038775018

TABLA 2

El resultado final es que, sin tener en cuenta los posibles beneficios futuros, en 1985 el Plan de regadío había supuesto unas pérdidas de 2.038.775.018 ptas de 1985.

Período 1985 en adelante.-

Vamos a realizar nuestros cálculos suponiendo una vida útil de 30 años, por lo que el estudio abarcará hasta el final de la campaña agrícola 1996-97.

Consideramos como desembolso inicial las pérdidas sufridas hasta el año 1985, y para obtener los flujos de caja de las sucesivas campañas hemos de realizar predicciones. Teniendo en cuenta que la extensión de la superficie de regadío es harto improbable que aumente de forma significativa, pues ello requeriría fuertes inversiones, estas predicciones deben centrarse en el beneficio marginal por hectárea de regadío.

A la vista de los datos existentes y teniendo en cuenta lo rudimentarias que eran las técnicas de cultivo de regadío en la zona (susceptibles de una mejora apreciable), hemos optado por realizar un análisis de tendencia, Figura 1, para obtener las predicciones que nos son necesarias. Los resultados obtenidos figuran en la Tabla 3.

Aún cuando es sabido que, bajo las hipótesis MCO, la predicción (conocida) es la variable aleatoria mientras que el valor tomado por la variable, en cuestión, es su esperanza (desconocida), nos permitimos alterar los términos considerando a la predicción como la esperanza de la variable aleatoria beneficio marginal por hectárea de regadío en el año i . Hecha esta

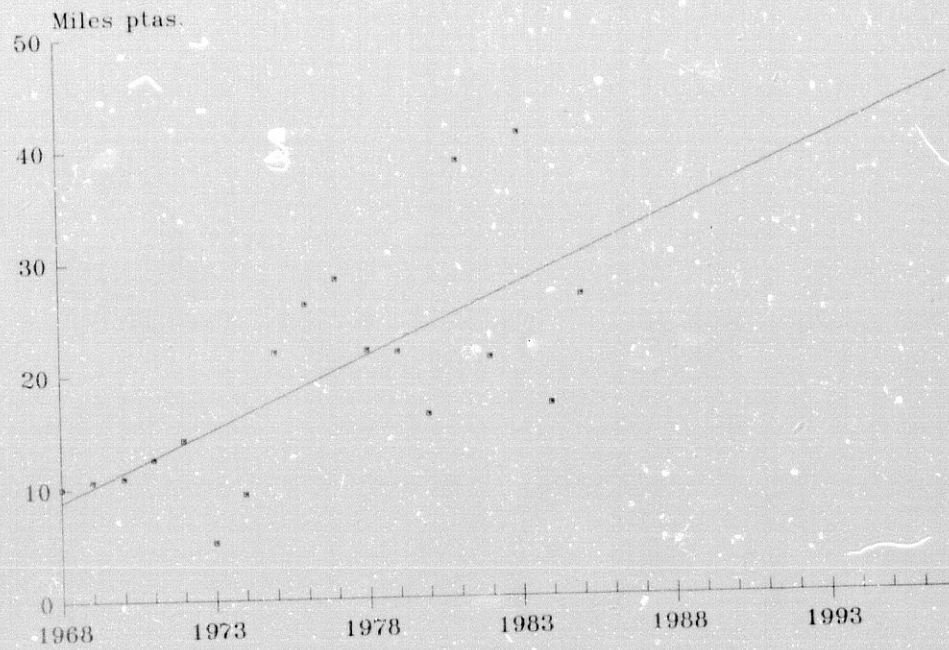


FIGURA 1

alteración, consideramos como varianza del beneficio marginal por Hectárea de regadío la que, en realidad, correspondería a su predicción. Este dato figura en la columna 3 de la Tabla 3.

Año	Predicc.	Varianza Predicc.	Desv. tip.
1986	31759	69402157	8331
1987	33032	71709154	8468
1988	34304	74246850	8617
1989	35577	77015247	8776
1990	36850	80014343	8945
1991	38123	83244138	9124
1992	39395	86704634	9312
1993	40668	90395829	9508
1994	41941	94317723	9712
1995	43213	98470318	9923
1996	44486	102853612	10142
1997	45759	107467606	10367

TABLA 3

Para terminar con el apartado dedicado a los flujos de caja solo queda obtener las predicciones de la variable beneficio marginal por puesta en regadío, para lo cual hay que multiplicar por el número de hectáreas. Los resultados correspondientes figuran en la Tabla 4.

i	Año	Flujo de caja esperado (\bar{Q}_i)	Varianza del flujo de caja ($\text{Var}(Q_i)$)	Desv. Típica
1	1986	118651624	9,686942072E+14	31123853
2	1987	123407552	1,000894569E+15	31636918
3	1988	128159744	1,036314966E+15	32191846
4	1989	132915672	1,074955400E+15	32786512
5	1990	137671600	1,116815870E+15	33418795
6	1991	142427528	1,161896376E+15	34086601
7	1992	147179720	1,210196918E+15	34787885
8	1993	151935648	1,261717497E+15	35520663
9	1994	156691576	1,316458111E+15	36283028
10	1995	161443768	1,374418762E+15	37073154
11	1996	166199696	1,435599448E+15	37889305
12	1997	170955624	1,500000171E+15	38729836

TABLA 4

En cuanto a los tipos de actualización adecuados, que en esta Tesis se consideran aleatorios, son necesarias tres estimaciones subjetivas para cada período. Para las estimaciones de los valores más bajos posibles y más altos posibles, (omitimos todo juicio de valor en cuanto a pesimistas u optimistas), adoptamos el 2% y el 20% para todos los períodos, pues estos son los valores extremos a los que suelen ajustarse todos los estudios de viabilidad de proyectos de este tipo.

Para la tercera estimación, la más probable, e intentando eliminar toda subjetividad malsana, (al escribir esta Memoria gran

parte de lo en ella considerado como futuro ya es pasado), recurrido a la predicción a partir de una serie histórica.

A la hora de elegir la serie histórica a considerar, y teniendo en cuenta las consideraciones hechas más arriba sobre las dificultades para encontrar la realmente adecuada, ha primado el criterio de la longitud. Por ello la elegida ha sido la serie EUR12 de tipos de interés nominales a largo plazo, publicada por la revista *ECONOMIE EUROPEENNE*, N.º.42 de noviembre de 1989, en su Anexo Estadístico. Entre los problemas que presenta el uso de esta serie no es pequeño el de que en el período muestral, 1961-1985, la Economía Española era un sistema muy cerrado y por tanto muy distinto de la media europea, pero a cambio, y debido al Proceso de Integración de la Economía Española si creemos que las predicciones obtenidas sean aplicables.

Para la predicción se ha usado la Técnica de Alisado Exponencial Lineal con Doble Parámetro ó Técnica de Holt-Winters, disponible en la versión 5 de STATGRAPHICS, cuya descripción puede verse en la literatura especializada, p.e. Pulido (1989) ó Harvey (1990). Los valores asignados a los parámetros, $\alpha=0'9$ y $\beta=0'1$, lo han sido después de probar con otras muchas parejas, y corresponden con la predicción que presenta el mínimo Error Cuadrático Medio de entre las exploradas. En la Figura 2 puede verse la gráfica de la serie original y de las predicciones.

Los resultados numéricos de las predicciones hemos preferido

considerarlos como los valores más probables (Tabla 5), en lugar de los esperados, de las correspondientes variables aleatorias para evitar algunos cálculos, si bien nada complicados, poco ilustrativos de la metodología aquí propuesta.

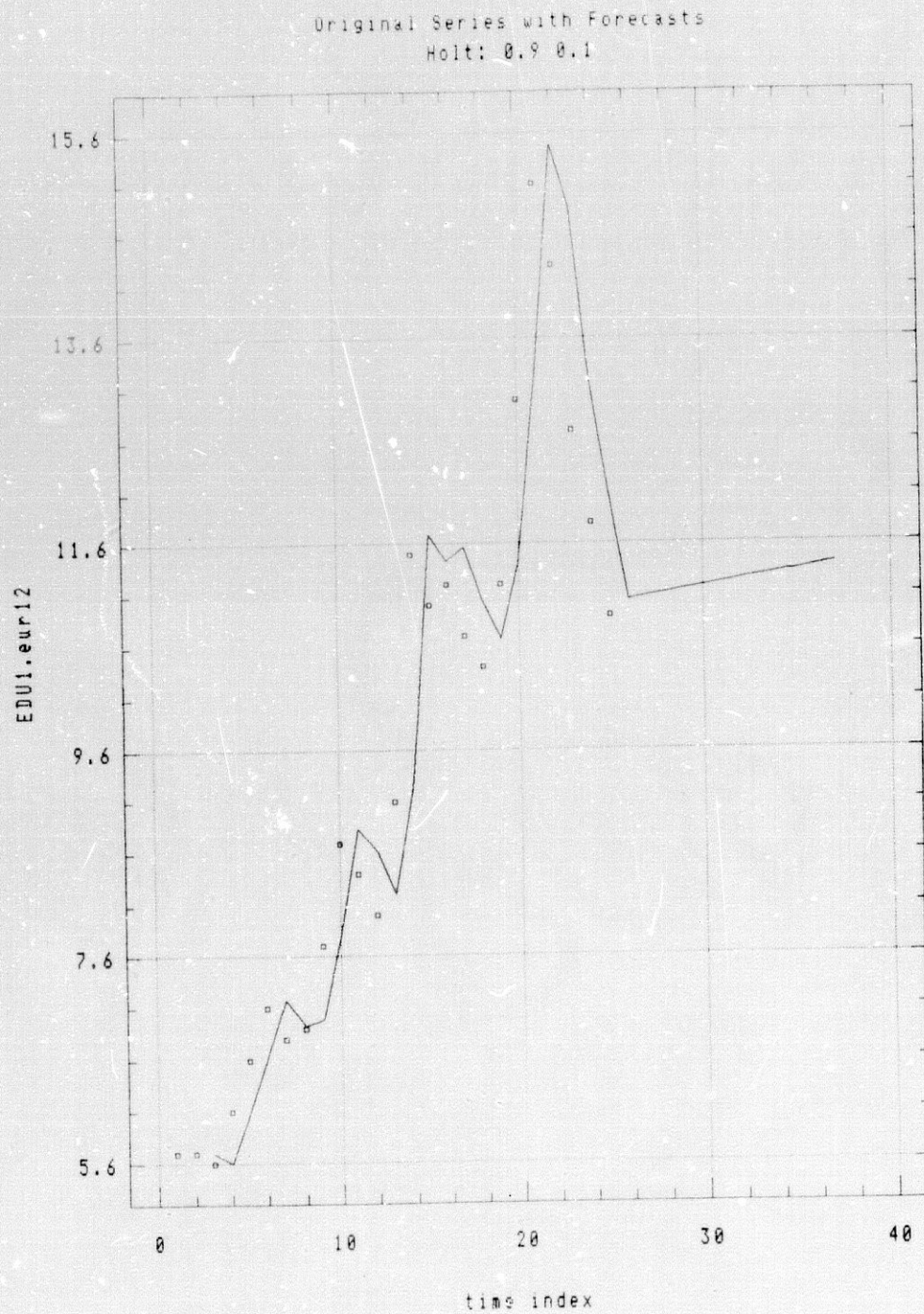


FIGURA 2

Antes de observar la Tabla 5 conviene hacer una precisión, las predicciones realizadas se refieren al tipo EUR12 vigente en el año en cuestión, y permiten convertir unidades monetarias del período en unidades monetarias del período siguiente. Al correr el tiempo en sentido inverso, el tipo predicho para un año será el tipo de descuento apropiado para el año siguiente. Así, el tipo de descuento apropiado para el año 1986 será el tipo de interés vigente en el año 1985, que es conocido y por tanto no presenta ninguna incertidumbre. Este dato lo hemos tomado de la serie Tipos nominales a largo plazo de la Economía Española de Baiges (1987).

i	Año	Bajo	Alto	Mas Proba.	K	Media (μ_1)	Varianza (σ_1^2)
1	1986	-	-	0,1623	-	0,86036	0,000E+00
2	1987	0,02	0,20	0,1105	3	0,90165	8,942E-04
3	1988	0,02	0,20	0,1108	2	0,90176	1,074E-03
4	1989	0,02	0,20	0,1111	2	0,90164	1,073E-03
5	1990	0,02	0,20	0,1114	2	0,90152	1,073E-03
6	1991	0,02	0,20	0,1118	1	0,90190	1,343E-03
7	1992	0,02	0,20	0,1121	1	0,90182	1,343E-03
8	1993	0,02	0,20	0,1124	1	0,90174	1,343E-03
9	1994	0,02	0,20	0,1127	0	0,90288	1,796E-03
10	1995	0,02	0,20	0,1130	0	0,90288	1,796E-03
11	1996	0,02	0,20	0,1133	0	0,90288	1,796E-03
12	1997	0,02	0,20	0,1137	0	0,90288	1,796E-03

TABLA 5

Una vez se dispone de las tres estimaciones del tipo de descuento apropiado para cada período, se supone que este sigue un modelo beta, para cuya perfecta caracterización aún falta por determinar un parámetro: K.

El algoritmo propuesto se basa en la hipótesis de K natural,

y recordemos que, intuitivamente, valores de K elevados indican una moda muy destacada dentro del intervalo, y valores bajos dan lugar a una moda suave (poco más verosímil que otros valores situados en un entorno suyo), hasta llegar a $K=0$, que corresponde a la distribución uniforme en la que no hay una moda única.

Teniendo en cuenta:

- 1.- la amplitud del intervalo de valores posibles para el tipo de descuento y las limitaciones de cálculo numérico que presenta nuestro algoritmo ($K \leq 3$), y
 - 2.- las predicciones son tanto más imperfectas cuanto más alejadas en el tiempo, y por tanto es sensato que la moda, suministrada por ellas, sea cada vez ponderada por un menor valor de K ,
- creemos que pudiera ser adecuada la sucesión de valores de K que aparecen en la columna 6 de la Tabla 5. Esta sucesión de valores es tal que conduce a desechar (no usar) las estimaciones de los valores más probables a partir del noveno período. (Modelo Uniforme).

Caracterizados perfectamente los modelos que proceden en cada período se ha aplicado, a cada uno de ellos, el algoritmo recurrente descrito en el Capítulo III de esta Memoria. Los resultados obtenidos figuran en las columnas 7 y 8 de la Tabla 5.

Finalmente, con las esperanzas y varianzas de los flujos de caja, columnas \bar{Q}_i y $\text{Var}(Q_i)$ de la Tabla 4, y con las medias y varianzas de los sucesivos factores de actualización, columnas μ_i

i	Año	$E(Q_i)$	$Var(Q_i)$	μ_i	σ_i^2	m_i	S_i^2
0	1985	-2038775018	0,0000E+00	-	-	-1172439360	6,808E+15
1	1986	118651624	9,6869E+14	0,86036	0,000E+00	1006945532	9,197E+15
2	1987	123407552	1,0009E+15	0,90165	8,942E-04	985187054	9,044E+15
3	1988	128159744	1,0363E+15	0,90176	1,074E-03	955663927	8,673E+15
4	1989	132915672	1,0750E+15	0,90164	1,073E-03	917776699	8,271E+15
5	1990	137671600	1,1168E+15	0,90152	1,073E-03	870597465	7,843E+15
6	1991	142427528	1,1619E+15	0,90190	1,343E-03	812646485	7,167E+15
7	1992	147179720	1,2102E+15	0,90182	1,343E-03	743184845	6,461E+15
8	1993	151935648	1,2617E+15	0,90174	1,343E-03	660950080	5,727E+15
9	1994	156691576	1,3165E+15	0,90288	1,796E-03	563767535	4,766E+15
10	1995	161443768	1,3744E+15	0,90288	1,796E-03	450863857	3,776E+15
11	1996	166199696	1,4356E+15	0,90288	1,796E-03	320552110	2,714E+15
12	1997	170955624	1,5000E+15	0,90288	1,796E-03	170955624	1,500E+15

TABLA 6

y σ_i^2 de la Tabla 5, se ha aplicado el algoritmo recurrente descrito en el Capítulo IV. Los cálculos intermedios, así como el resultado final, aparecen en la Tabla 6. Es conveniente aclarar que en el cálculo de las columnas m_i y S_i^2 se ha procedido de abajo arriba.

En resumen, admitiendo todas las hipótesis realizadas a lo largo del proceso de cálculo, si el PLAN DE REGADIOS DEL EMBALSE DE LA BOLERA es útil hasta el final de la campaña agrícola de 1996-97, su Valor Actualizado Neto Esperado, en el año 1985 (fecha del estudio base), es de -1.172'5 millones de pesetas con una desviación típica de 82'5 millones de pesetas.

Si además se admitiese la hipótesis de normalidad de la variable aleatoria VAN, las dos características antes reseñadas permitirían calcular todo tipo de probabilidades, como por ejemplo: la probabilidad de que el VAN fuese positivo, i.e. la probabilidad de que fuese un proyecto económicamente rentable. Dicha probabilidad, obviamente, es cero lo que corrobora la tesis de la página 148 del estudio mencionado.

BIBLIOGRAFIA

- ABRAMOWITZ, M. y STEGUN, I.A. (1970).- Handbook of Mathematical Functions.- Dover Publications, New York.
- APOSTOL, T.M. (1975).- Calculus.- Editorial Reverté, Barcelona.
- BAIGES, J., MOLINAS, C. y SEBASTIAN, M. (1987).- La Economía Española 1964-1985: Datos, fuentes y análisis.- Ministerio de Economía y Hacienda. Instituto de Estudios Fiscales, Madrid.
- BARCELO, A. (1991).- Tipo de interés nominal y tipo de interés real (Lógica, pedagogía y chapucería).- Cuadernos de Economía, Vol. 19, n^o.54, pp 161-166.
- BERNY, J. (1988).- Forecasting and risk analysis applied to management planning and control.- Ph.D. Thesis, University of Aston.
- BERNY, J. (1989).- A New Distribution Function for Risk Analysis.- J.Opl.Res.Soc., Vol 40, n^o.12, pp 1121-1127.
- BERNY, J. (1991).- Response to F.B. Cowell.- J.Opl.Res.Soc., Vol 42, n^o.3, pp 267-269.
- BREALEY, R. y MYERS, S. (1991).- Fundamentos de financiación empresarial.- Ed. McGraw-Hill. Madrid.
- BURDEN, R.L. y FAIRES, J.D. (1985).- Análisis numérico.- Grupo Editorial Iberoamerica. México.
- COWELL, F.B. (1991).- Distribution Functions in Risk Analysis.- J.Opl.Res.Soc., Vol 42, n^o.3, p 267.
- CHAE, K.C. y KIM, S. (1990).- Estimating the Mean and Variance of PERT Activity Time Using Likelihood-Ratio of the Mode and the Midpoint.- IIE Transactions, Vol 22, n^o.3, pp 198-203.

- FARNUM, N.R. y STANTON, L.W. (1987).- Some Results Concerning the Estimation of Beta Distribution Parameters in PERT.- J. Opl. Res. Soc., Vol.38, n^o.3, pp 287-290.
- GALLAGHER, C. (1987).- A Note on PERT Assumptions.- Management Science, Vol.33, n^o.10, p 1360.
- GOLENKO-GINZBURG, D. (1988).- On the Distribution on Activity Time in PERT.- J.Opl.Res. Soc., Vol 39, n^o.8, pp 767-771.
- GRUBBS, Frank E. (1962).- Attempts to Validate Certain PERT Statistics or "picking on PERT".- Opns. Res. 10, pp 912-915.
- HARVEY, A. C. (1990).- Forecasting, structural time series models and the Kalman filter.- Cambridge University Press.
- HERRERIAS, R. (1989).- Modelos probabilísticos alternativos para el método PERT. Aplicación al análisis de Inversiones.- Estudios de Economía Aplicada. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid. pp 89-112.
- HERRERIAS, R. (1992).- Utilización de los modelos probabilísticos para el PERT, que permiten una ponderación variable del valor más probable en análisis de inversiones.- Ponencias de la III Reunión Anual de la Asociación Científica Europea de Economía Aplicada (Asepelt-España).- Diputación de Sevilla. pp 557-562.
- HERRERIAS, R. y PEREZ RODRIGUEZ, E. (1991).- Estimación de una Distribución Beta como modelo para su utilización en el Método PERT.- Ponencias de la V Reunión ASEPELT- España.- Ed. La Caja de Canarias. Gran Canaria. pp 1191-1199.
- HILLIER, F.S. (1963).- The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investment.- Management Science

n^o.9, pp 443-457.

- LITTLEFIELD, T.K. y RANDOLPH, P.H. (1987).- An Answer to Sasiemi's question on PERT Times.- Management Science 33, pp 1357-1359.
- LOEVE, M. (1963).- Probability Theory.- D. Van Nostrand Company, New York.
- MACCRIMMON, K.R. y RYAVEC, C.A. (1964).- An Analytical Study of the PERT assumptions.- Opns. Res. 12, pp 16-37.
- MAO, J.C.T. (1974).- Análisis financiero.- Ed. "El Ateneo". Buenos Aires.
- MARTIN RODRIGUEZ, M. y RODRIGUEZ FERRERO, N. (1992).- Los regadíos de la presa de La Bolera. Una evaluación económica "a posteriori".- En prensa.
- MARTINEZ AROZA, J. y colab.(1985).- Errores de redondeo: problemas y soluciones.- Revista de informática y Automática, n^o.65, pp 7-16.
- MITRINOVIC, D.S. y KEČKIC, J.D. (1984).- The Cauchy Method of Residues. Theory and Applications.- D. Reidel Publishing Co.
- MOITRA, S.D. (1990).- Skewness and the Beta Distribution.- J.Opl.Res.Soc., Vol 41, n^o.10, pp 953-961.
- PABLO, Andrés de (1986).- Criterios para el análisis de inversiones cuando el riesgo está en su duración.- Cuadernos Aragoneses de Economía n^o. 10, pp 133-139.
- PEUMANS, H. (1967).- Valoración de proyectos de inversión.- Ed. Deusto. Bilbao.
- PULIDO, A. (1989).- Predicción Económica y Empresarial.- Ed. Pirámide. Madrid
- RAIFFA, H. (1968).- Decision Analysis.- Ed. Addison-Wesley.

Massachusetts.

- ROHATGI, V.K. (1976).- An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics.- Ed. Wiley. New York.
- ROY, L.K. (1971).- An Extension of the Pearson System of Frequency Curves.- Trabajos de Estadística e I.O., Vol. 12, Cuadernos 1 y 2, pp 113-123.
- SASIENI, M.W. (1986).- A Note on PERT Times.- Management Science 32, pp 1652-1653.
- SAVAGE, L.J.(1954).- The Foundations of Statistics.- Ed. Wiley. New York.
- SAVAGE,L.J. (1954).- Probability and the Weighi. of Evidence.- Ed. Wiley. London.
- SCHLAIFER, R.O.(1959).- Probability and Statistics for Business Decisions.- Ed. McGraw-Hill. New York.
- SCHNEIDER, Erich (1970).- Teoría de la Inversión.- Ed. "El Ateneo". Buenos Aires.
- SUAREZ SUAREZ, Andrés S (1989).- Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa.- Ediciones Pirámide. Madrid.
- TANCHOCO, J.M., BUCK, J.R. y EGBELU, P.J. (1982).- Analysis of Capital Expenditure Projects with Uncertain Discrete Cash Flows.- OMEGA The Int.Jl. of Mgmt Sci., Vol 10, n^o.3, pp 299-307.
- THOMAS, Gilles (1967).- Introduction de l'aléatoire dans les problèmes d'ordonnancement. Méthode de Simulation.- Les Méthodes de Simulation. Monographies de Recherche Operationnelle n^o.7.- Ed. Dunod. pp 107-124.
- WILLIAMS, T.M. (1992).- Practical Use of Distributions in Network Analysis.- J. Opl.Res. Soc., Vol 43, n^o.3, pp 265-270.

APENDICE

Media y Varianza del modelo Beta con $K = 1$
 en función de la moda, para $a = 0'05$ y $b = 0'06$

Moda	Media	Varianza
0,0510	0,949071709	4,701E-06
0,0511	0,949041704	4,718E-06
0,0512	0,949011701	4,735E-06
0,0513	0,948981698	4,752E-06
0,0514	0,948951698	4,768E-06
0,0515	0,948921699	4,783E-06
0,0516	0,948891701	4,798E-06
0,0517	0,948861704	4,813E-06
0,0518	0,948831709	4,827E-06
0,0519	0,948801716	4,841E-06
0,0520	0,948771724	4,854E-06
0,0521	0,948741733	4,867E-06
0,0522	0,948711744	4,880E-06
0,0523	0,948681756	4,892E-06
0,0524	0,948651770	4,903E-06
0,0525	0,948621785	4,914E-06
0,0526	0,948591801	4,925E-06
0,0527	0,948561819	4,935E-06
0,0528	0,948531838	4,945E-06
0,0529	0,948501859	4,954E-06
0,0530	0,948471881	4,963E-06
0,0531	0,948441904	4,971E-06
0,0532	0,948411929	4,979E-06
0,0533	0,948381956	4,987E-06
0,0534	0,948351984	4,994E-06
0,0535	0,948322013	5,000E-06
0,0536	0,948292043	5,007E-06
0,0537	0,948262075	5,012E-06
0,0538	0,948232109	5,018E-06
0,0539	0,948202144	5,022E-06
0,0540	0,948172180	5,027E-06
0,0541	0,948142218	5,031E-06
0,0542	0,948112257	5,034E-06
0,0543	0,948082297	5,037E-06
0,0544	0,948052339	5,039E-06
0,0545	0,948022383	5,042E-06
0,0546	0,947992428	5,043E-06
0,0547	0,947952474	5,044E-06
0,0548	0,947932522	5,045E-06
0,0549	0,947902571	5,045E-06
0,0550	0,947872621	5,045E-06
0,0551	0,947842673	5,045E-06
0,0552	0,947812726	5,044E-06
0,0553	0,947782781	5,042E-06
0,0554	0,947752837	5,040E-06
0,0555	0,947722895	5,038E-06
0,0556	0,947692954	5,035E-06
0,0557	0,947663015	5,032E-06
0,0558	0,947633076	5,028E-06
0,0559	0,947603140	5,024E-06
0,0560	0,947573204	5,019E-06
0,0561	0,947543270	5,014E-06
0,0562	0,947513338	5,008E-06

Moda	Media	Varianza
0,0563	0,947483407	5,002E-06
0,0564	0,947453477	4,996E-06
0,0565	0,947423543	4,989E-06
0,0566	0,947393622	4,982E-06
0,0567	0,947363697	4,974E-06
0,0568	0,947333773	4,966E-06
0,0569	0,947303850	4,957E-06
0,0570	0,947273929	4,948E-06
0,0571	0,947244010	4,938E-06
0,0572	0,947214091	4,929E-06
0,0573	0,947184174	4,918E-06
0,0574	0,947154259	4,907E-06
0,0575	0,947124345	4,896E-06
0,0576	0,947094432	4,884E-06
0,0577	0,947064521	4,872E-06
0,0578	0,947034611	4,859E-06
0,0579	0,947004703	4,846E-06
0,0580	0,946974796	4,832E-06
0,0581	0,946944891	4,818E-06
0,0582	0,946914986	4,804E-06
0,0583	0,946885084	4,789E-06
0,0584	0,946855182	4,774E-06
0,0585	0,946825283	4,758E-06
0,0586	0,946795384	4,742E-06
0,0587	0,946765487	4,725E-06
0,0588	0,946735591	4,708E-06
0,0589	0,946705697	4,690E-06
0,0590	0,946675805	4,672E-06

Media y Varianza del Modelo Beta con $K = 2$
 en función de la Moda para $a = 0'05$ y $b = 0'06$

Moda	Media	Varianza
0,0510	0,94967121	3,4E-06
0,0511	0,94962615	3,4E-06
0,0512	0,94958110	3,5E-06
0,0513	0,94953605	3,5E-06
0,0514	0,94949100	3,5E-06
0,0515	0,94944595	3,6E-06
0,0516	0,94940091	3,6E-06
0,0517	0,94935587	3,6E-06
0,0518	0,94931084	3,6E-06
0,0519	0,94926581	3,7E-06
0,0520	0,94922078	3,7E-06
0,0521	0,94917576	3,7E-06
0,0522	0,94913074	3,7E-06
0,0523	0,94908572	3,8E-06
0,0524	0,94904071	3,8E-06
0,0525	0,94899570	3,8E-06
0,0526	0,94895069	3,8E-06
0,0527	0,94890569	3,8E-06
0,0528	0,94886069	3,9E-06
0,0529	0,94881569	3,9E-06
0,0530	0,94877070	3,9E-06
0,0531	0,94872571	3,9E-06
0,0532	0,94868072	3,9E-06
0,0533	0,94863574	3,9E-06
0,0534	0,94859076	3,9E-06
0,0535	0,94854579	4,0E-06
0,0536	0,94850081	4,0E-06
0,0537	0,94845585	4,0E-06
0,0538	0,94841088	4,0E-06
0,0539	0,94836592	4,0E-06
0,0540	0,94832096	4,0E-06
0,0541	0,94827600	4,0E-06
0,0542	0,94823105	4,0E-06
0,0543	0,94818610	4,0E-06
0,0544	0,94814116	4,0E-06
0,0545	0,94809622	4,0E-06
0,0546	0,94805128	4,0E-06
0,0547	0,94800634	4,0E-06
0,0548	0,94796140	4,1E-06
0,0549	0,94791648	4,1E-06
0,0550	0,94787156	4,1E-06
0,0551	0,94782663	4,1E-06
0,0552	0,94778173	4,1E-06
0,0553	0,94773680	4,1E-06
0,0554	0,94769189	4,0E-06
0,0555	0,94764698	4,0E-06
0,0556	0,94760208	4,0E-06
0,0557	0,94755718	4,0E-06
0,0558	0,94751228	4,0E-06
0,0559	0,94746739	4,0E-06
0,0560	0,94742250	4,0E-06
0,0561	0,94737761	4,0E-06
0,0562	0,94733272	4,0E-06

Moda	Media	Varianza
0,0563	0,94728784	4,0E-06
0,0564	0,94724297	4,0E-06
0,0565	0,94719809	3,9E-06
0,0566	0,94715322	3,9E-06
0,0567	0,94710835	3,9E-06
0,0568	0,94706349	3,9E-06
0,0569	0,94701863	3,9E-06
0,0570	0,94697378	3,9E-06
0,0571	0,94692892	3,9E-06
0,0572	0,94688407	3,8E-06
0,0573	0,94683923	3,8E-06
0,0574	0,94679438	3,8E-06
0,0575	0,94674954	3,8E-06
0,0576	0,94670471	3,8E-06
0,0577	0,94665987	3,7E-06
0,0578	0,94661504	3,7E-06
0,0579	0,94657022	3,7E-06
0,0580	0,94652540	3,7E-06
0,0581	0,94648058	3,6E-06
0,0582	0,94643576	3,6E-06
0,0583	0,94639095	3,6E-06
0,0584	0,94634614	3,6E-06
0,0585	0,94630133	3,5E-06
0,0586	0,94625653	3,5E-06
0,0587	0,94621173	3,5E-06
0,0588	0,94616694	3,4E-06
0,0589	0,94612214	3,4E-06
0,0590	0,94607736	3,4E-06

Media y Varianza del modelo Beta con $K = 1$
 en función de la moda, para $a = 0$ y $b = 1$

Moda	Media	Varianza
0,10	0,754089	1,660E-02
0,11	0,752275	1,657E-02
0,12	0,750468	1,654E-02
0,13	0,748667	1,650E-02
0,14	0,746872	1,647E-02
0,15	0,745084	1,643E-02
0,16	0,743301	1,639E-02
0,17	0,741526	1,635E-02
0,18	0,739756	1,630E-02
0,19	0,737993	1,626E-02
0,20	0,736236	1,622E-02
0,21	0,734485	1,617E-02
0,22	0,732740	1,612E-02
0,23	0,731002	1,607E-02
0,24	0,729269	1,602E-02
0,25	0,727543	1,597E-02
0,26	0,725823	1,591E-02
0,27	0,724109	1,586E-02
0,28	0,722400	1,580E-02
0,29	0,720698	1,574E-02
0,30	0,719002	1,568E-02
0,31	0,717312	1,562E-02
0,32	0,715627	1,556E-02
0,33	0,713949	1,550E-02
0,34	0,712276	1,544E-02
0,35	0,710609	1,537E-02
0,36	0,708948	1,531E-02
0,37	0,707293	1,524E-02
0,38	0,705644	1,517E-02
0,39	0,704000	1,510E-02
0,40	0,702362	1,503E-02
0,41	0,700730	1,496E-02
0,42	0,699103	1,489E-02
0,43	0,697482	1,482E-02
0,44	0,695867	1,475E-02
0,45	0,694257	1,467E-02
0,46	0,692653	1,460E-02
0,47	0,691054	1,452E-02
0,48	0,689461	1,444E-02
0,49	0,687874	1,436E-02
0,50	0,686292	1,429E-02
0,51	0,684715	1,421E-02
0,52	0,683144	1,413E-02
0,53	0,681578	1,404E-02
0,54	0,680018	1,396E-02
0,55	0,678463	1,388E-02
0,56	0,676913	1,380E-02
0,57	0,675369	1,371E-02
0,58	0,673830	1,363E-02
0,59	0,672296	1,354E-02
0,60	0,670767	1,346E-02
0,61	0,669244	1,337E-02
0,62	0,667726	1,328E-02

Moda	Media	Varianza
0,63	0,666213	1,320E-02
0,64	0,664706	1,311E-02
0,65	0,663203	1,302E-02
0,66	0,661706	1,293E-02
0,67	0,660214	1,284E-02
0,68	0,658727	1,275E-02
0,69	0,657245	1,266E-02
0,70	0,655767	1,257E-02
0,71	0,654296	1,247E-02
0,72	0,652829	1,238E-02
0,73	0,651367	1,229E-02
0,74	0,649910	1,220E-02
0,75	0,648457	1,210E-02
0,76	0,647010	1,201E-02
0,77	0,645568	1,191E-02
0,78	0,644131	1,182E-02
0,79	0,642698	1,172E-02
0,80	0,641271	1,163E-02
0,81	0,639848	1,153E-02
0,82	0,638430	1,144E-02
0,83	0,637017	1,134E-02
0,84	0,635608	1,124E-02
0,85	0,634204	1,115E-02
0,86	0,632805	1,105E-02
0,87	0,631411	1,095E-02
0,88	0,630022	1,085E-02
0,89	0,628637	1,075E-02
0,90	0,627256	1,066E-02

Media y Varianza del modelo Beta con $K = 2$
 en función de la moda, para $a = 0$ y $b = 1$

Moda	Media	Varianza
0,10	0,78745	1,372E-02
0,11	0,78452	1,372E-02
0,12	0,78160	1,371E-02
0,13	0,77870	1,370E-02
0,14	0,77582	1,368E-02
0,15	0,77295	1,366E-02
0,16	0,77010	1,364E-02
0,17	0,76726	1,361E-02
0,18	0,76444	1,358E-02
0,19	0,76164	1,354E-02
0,20	0,75886	1,351E-02
0,21	0,75609	1,347E-02
0,22	0,75333	1,342E-02
0,23	0,75060	1,337E-02
0,24	0,74787	1,332E-02
0,25	0,74517	1,327E-02
0,26	0,74247	1,321E-02
0,27	0,73980	1,315E-02
0,28	0,73714	1,309E-02
0,29	0,73449	1,303E-02
0,30	0,73186	1,296E-02
0,31	0,72924	1,289E-02
0,32	0,72664	1,282E-02
0,33	0,72406	1,275E-02
0,34	0,72148	1,267E-02
0,35	0,71893	1,259E-02
0,36	0,71638	1,251E-02
0,37	0,71385	1,243E-02
0,38	0,71134	1,235E-02
0,39	0,70884	1,226E-02
0,40	0,70635	1,217E-02
0,41	0,70388	1,208E-02
0,42	0,70142	1,199E-02
0,43	0,69898	1,190E-02
0,44	0,69654	1,180E-02
0,45	0,69413	1,171E-02
0,46	0,69172	1,161E-02
0,47	0,68933	1,151E-02
0,48	0,68695	1,141E-02
0,49	0,68459	1,131E-02
0,50	0,68223	1,121E-02
0,51	0,67989	1,110E-02
0,52	0,67757	1,100E-02
0,53	0,67525	1,089E-02
0,54	0,67295	1,078E-02
0,55	0,67067	1,068E-02
0,56	0,66839	1,057E-02
0,57	0,66613	1,046E-02
0,58	0,66388	1,035E-02
0,59	0,66164	1,023E-02
0,60	0,65941	1,012E-02
0,61	0,65720	1,001E-02
0,62	0,65499	9,895E-03

Moda	Media	Varianza
0,63	0,65280	9,780E-03
0,64	0,65062	9,665E-03
0,65	0,64846	9,550E-03
0,66	0,64630	9,433E-03
0,67	0,64416	9,317E-03
0,68	0,64203	9,199E-03
0,69	0,63991	9,082E-03
0,70	0,63780	8,964E-03
0,71	0,63570	8,845E-03
0,72	0,63361	8,726E-03
0,73	0,63154	8,607E-03
0,74	0,62947	8,488E-03
0,75	0,62742	8,368E-03
0,76	0,62537	8,248E-03
0,77	0,62334	8,128E-03
0,78	0,62132	8,008E-03
0,79	0,61931	7,888E-03
0,80	0,61731	7,767E-03
0,81	0,61532	7,646E-03
0,82	0,61334	7,526E-03
0,83	0,61137	7,405E-03
0,84	0,60942	7,284E-03
0,85	0,60747	7,163E-03
0,86	0,60553	7,043E-03
0,87	0,60360	6,922E-03
0,88	0,60169	6,801E-03
0,89	0,59978	6,681E-03
0,90	0,59788	6,560E-03

Media y Varianza del modelo Beta con $K = 3$
 en función de la moda, para $a = 0$ y $b = 1$

Moda	Media	Varianza
0,10	0,8087	1,15E-02
0,11	0,8050	1,16E-02
0,12	0,8013	1,16E-02
0,13	0,7977	1,16E-02
0,14	0,7941	1,16E-02
0,15	0,7905	1,16E-02
0,16	0,7869	1,16E-02
0,17	0,7834	1,16E-02
0,18	0,7798	1,16E-02
0,19	0,7763	1,15E-02
0,20	0,7729	1,15E-02
0,21	0,7694	1,15E-02
0,22	0,7660	1,14E-02
0,23	0,7626	1,14E-02
0,24	0,7592	1,14E-02
0,25	0,7559	1,13E-02
0,26	0,7526	1,13E-02
0,27	0,7493	1,12E-02
0,28	0,7460	1,12E-02
0,29	0,7428	1,11E-02
0,30	0,7395	1,10E-02
0,31	0,7363	1,10E-02
0,32	0,7331	1,09E-02
0,33	0,7300	1,08E-02
0,34	0,7268	1,07E-02
0,35	0,7237	1,07E-02
0,36	0,7206	1,06E-02
0,37	0,7176	1,05E-02
0,38	0,7145	1,04E-02
0,39	0,7115	1,03E-02
0,40	0,7085	1,02E-02
0,41	0,7055	1,01E-02
0,42	0,7025	1,00E-02
0,43	0,6996	9,93E-03
0,44	0,6967	9,83E-03
0,45	0,6938	9,73E-03
0,46	0,6909	9,62E-03
0,47	0,6880	9,52E-03
0,48	0,6852	9,41E-03
0,49	0,6824	9,31E-03
0,50	0,6796	9,20E-03
0,51	0,6768	9,09E-03
0,52	0,6740	8,98E-03
0,53	0,6713	8,87E-03
0,54	0,6685	8,75E-03
0,55	0,6658	8,64E-03
0,56	0,6631	8,53E-03
0,57	0,6605	8,41E-03
0,58	0,6578	8,29E-03
0,59	0,6552	8,18E-03
0,60	0,6525	8,06E-03
0,61	0,6499	7,94E-03
0,62	0,6474	7,83E-03

Moda	Media	Varianza
0,63	0,6448	7,71E-03
0,64	0,6422	7,59E-03
0,65	0,6397	7,47E-03
0,66	0,637	7,35E-03
0,67	0,6347	7,23E-03
0,68	0,6322	7,11E-03
0,69	0,6298	6,99E-03
0,70	0,6273	6,87E-03
0,71	0,6249	6,75E-03
0,72	0,6225	6,62E-03
0,73	0,6201	6,50E-03
0,74	0,6177	6,38E-03
0,75	0,6153	6,26E-03
0,76	0,6129	6,14E-03
0,77	0,6106	6,02E-03
0,78	0,6083	5,90E-03
0,79	0,6060	5,78E-03
0,80	0,6037	5,66E-03
0,81	0,6014	5,54E-03
0,82	0,5991	5,42E-03
0,83	0,5969	5,30E-03
0,84	0,5946	5,18E-03
0,85	0,5924	5,06E-03
0,86	0,5902	4,94E-03
0,87	0,5880	4,83E-03
0,88	0,5858	4,71E-03
0,89	0,5837	4,59E-03
0,90	0,5815	4,47E-03

Media y Varianza del modelo Beta con $K = 4$
 en función de la moda, para $a = 0$ y $b = 1$

Moda	Media	Varianza
0,10	0,3236	9,2E-03
0,11	0,8193	9,9E-03
0,12	0,8151	1,0E-02
0,13	0,8108	1,0E-02
0,14	0,8067	1,0E-02
0,15	0,8026	1,0E-02
0,16	0,7985	1,0E-02
0,17	0,7944	1,0E-02
0,18	0,7904	1,0E-02
0,19	0,7864	1,0E-02
0,20	0,7824	1,0E-02
0,21	0,7785	1,0E-02
0,22	0,7746	1,0E-02
0,23	0,7707	9,9E-03
0,24	0,7669	9,9E-03
0,25	0,7631	9,7E-03
0,26	0,7594	9,8E-03
0,27	0,7556	9,8E-03
0,28	0,7519	9,7E-03
0,29	0,7482	9,6E-03
0,30	0,7446	9,6E-03
0,31	0,7410	9,5E-03
0,32	0,7374	9,4E-03
0,33	0,7339	9,4E-03
0,34	0,7303	9,3E-03
0,35	0,7268	9,2E-03
0,36	0,7234	9,1E-03
0,37	0,7199	9,1E-03
0,38	0,7165	9,0E-03
0,39	0,7131	8,9E-03
0,40	0,7098	8,8E-03
0,41	0,7065	8,7E-03
0,42	0,7032	8,6E-03
0,43	0,6999	8,5E-03
0,44	0,6966	8,4E-03
0,45	0,6934	8,3E-03
0,46	0,6902	8,2E-03
0,47	0,6870	8,1E-03
0,48	0,6839	8,0E-03
0,49	0,6808	7,9E-03
0,50	0,6776	7,9E-03
0,51	0,6746	7,7E-03
0,52	0,6715	7,6E-03
0,53	0,6685	7,5E-03
0,54	0,6655	7,4E-03
0,55	0,6625	7,2E-03
0,56	0,6596	7,1E-03
0,57	0,6566	7,0E-03
0,58	0,6537	6,9E-03
0,59	0,6508	6,8E-03
0,60	0,6480	6,7E-03
0,61	0,6451	6,6E-03
0,62	0,6423	6,4E-03

Moda	Media	Varianza
0,63	0,6395	6,3E-03
0,64	0,6367	6,2E-03
0,65	0,6339	6,1E-03
0,66	0,6312	6,0E-03
0,67	0,6285	5,9E-03
0,68	0,6258	5,8E-03
0,69	0,6231	5,6E-03
0,70	0,6204	5,5E-03
0,71	0,6178	5,4E-03
0,72	0,6152	5,3E-03
0,73	0,6126	5,2E-03
0,74	0,6100	5,1E-03
0,75	0,6075	4,8E-03
0,76	0,6049	4,8E-03
0,77	0,6024	4,7E-03
0,78	0,5999	4,6E-03
0,79	0,5974	4,5E-03
0,80	0,5949	4,4E-03
0,81	0,5925	4,3E-03
0,82	0,5900	4,2E-03
0,83	0,5876	4,0E-03
0,84	0,5852	3,9E-03
0,85	0,5828	3,8E-03
0,86	0,5805	3,7E-03
0,87	0,5781	3,6E-03
0,88	0,5758	3,5E-03
0,89	0,5735	3,4E-03
0,90	0,5712	3,3E-03