UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

MODELOS DE EXTRACCION DE SEÑALES DINAMICAS Y EXPECTATIVAS

Tesis que para optar al Grado de Doctor en Ciencias Economicas y Empresariales presenta:

D. Carlos Sánchez González

bajo la dirección del Profesor Dr:

D. Rafael Herrerias Pleguezuelo

Granada, Diciembre de 1.991

UNIVERSIDAD DE GRANADA

ACTA DEL GRADO DE DOCTOR EN Ciencias Económicas y Empresariales

urso de 1991 a 1992 Folio 1 Número 1

Reunido en el día de la fecha el Tribunal nombrado para el Grado de Doctor de D. Carlos Sánchez González, el aspirante leyó un discurso sobre el siguiente ema, que libremente había elegido: Modelo de Extracción de Señales Dinámicas y Expectativas

Terminada la lectura y contestadas las objecciones formuladas por los Jueces del Tribunal, éste le lificó de APTO "cum laude"

Granada 21 de diciembre de 1991

EL PRESIDENTE,

Fdo: José Miguel Casas Sánchez

EL SECRETARIO DEL TRIBUNAL,

Fdo: José Mª Moreno Jiménez

EL VOCAL,

Fdo: Miguel A. Fajardo Caldera

EL VOCAL,

Fdo: Manuel Martín

EL VOCAL,

Fdo: Ramón Gutiérrez Jáimez

FIRMA DEL GRADUANDO,

Fdo: Carlos Sánchez González.

En el día de la fecha se ha conferido a D. ____________

VESTIDURA . . ____________ el Grado de Doctor en la Facultad de ____________ conforme a lo prevenido en las disposiciones vigentes.

Granada ____ de ____________ de 19 ____

EL DECANO,

Fdo: ____________

ERTIFICO: Que el Acta que antecede concuerda con la del expediente del interesado remitida a la Secretaría de la Universidad.

Granada ____ de ____________ de 19 ____

El Catedrático Secretario,

V.º B.º
EL DECANO,

Fdo: ____________

do: ____________

A ti Antonio, siempre Amigo...
A ti Milagros, todo Amor......

INDICE

INTRODUCCION

INTRODUCCION.-

Mi interés por el estudio de los modelos de extracción de señales dinámicas se inició durante mi estancia en el Dapartamento de Economía de la Universidad Estatal de Nueva York durante los Cursos Académicos 1988-1989 y 1989-1990, especialmente en el Seminario de Macroeconomía Avanzada. Allí comencé este trabajo de investigación recopilando información bibliográfica sobre el tema y llevando a cabo discusiones y comentarios con los Profesores del Departamento con intereses investigadores en este área.

Desde el comienzo de la investigación se hizo notar una característica peculiar de este tema: esta metodología aparece en el ámbito de la matemática aplicada hace mas de treinta años, y sólo de manera muy reciente ha ido despertándose un interés creciente por la aplicación de este tipo de técnicas de caracter dinámico a problemas en el ámbito de la economía con lo que la literatura específicamente económica sobre el tema es aún muy escasa. Con estas circunstancias se despertó en mi el interés por tratar de estudiar con un mayor detalle la posible adecuación de esta metodología a distintos problemas de caracter económico que reproducen de alguna manera las hipótesis bajo las cuales se formularon originariamente los modelos de extracción de señales dinámicas.

Esta tesis se estructura de la siguiente manera:

- En el Capítulo 0 se hace una introducción general a la teoría del control óptimo, describiendo previamente la noción sistema y la definición de dinámica del mismo. A continuación se hace un repaso muy general de la teoría del control óptimo, del algoritmo de la programación dinámica y su fundamento en el principio de optimalidad, definiendo los conceptos de función objetivo a optimizar, la dinámica del vector de estado del sistema y las restricciones a que se encuentra sometido tanto el vector de estado como el vector de control. A continuación se abordan una serie de casos particulares, comenzando con una aplicación al problema de las variables retardadas y continuando con el caso más específico de los sistemas lineales, donde se introduce el principio de equivalencia cierta. En el siguiente apartado de este capítulo se aborda el problema de la información imperfecta para completarse posteriormente con el caso particular de los sistemas lineales y las funciones de coste cuadrático.

- En el capítulo I se estudia la metodología de estimación en el espacio de los estados y en particular la técnica del filtro de Kalman, haciendo especial referencia a los supuestos que se introducen respecto de los términos de perturbación y de control. Se desarrolla el marco analítico correspondiente al caracter recursivo de esta metodología, que será aplicada posteriormente en el resto de los capítulos. En este capítulo se incluye un apartado de aplicaciones de esta técnica a distintos problemas de aplicación específicos del ámbito de la econometría como son la estimación recursiva, los cambios estructurales y el tratamiento de la autocorrelación. Finaliza el capítulo con algumas ideas acerca de los criterios para la elección de valores iniciales y de la estimación de parámetros, así como un apartado en que se analizan los nexos de unión de esta metodología con los modelos de series temporales.

- En el capítulo II se estudian desde esta óptica los modelos de juegos dinámicos en los cuales dos sujetos que brevemente denominamos gobierno y agentes interactuan en la economía y el resultado de esa interacción se deja sentir sobre la evolución final del sistema económico que queda descrito mediante la dinámica de un vector de estado. Para llevar a cabo esta interacción tanto agentes como gobierno formulan expectativas respecto del comportamiento del uno frente a la actuación del otro. Se consideran en principio dos situaciones que se corresponden con los dos apartados de este capítulo. En primer lugar se estudia lo que denomino modelos con control centralizado, donde solamente uno de los sujetos (gobierno) es capaz de llevar a cabo controles que afecten de modo directo a la dinámica de la economía. Este apartado , a su vez, se subdivide en distintos casos según que los agentes tengan perfecta información o no acerca de la evolución del sistema y previsión perfecta o no respecto del control aplicado por el gobierno. En el segundo de los apartados se estudia un modelo que denomino de control compartido, donde tanto agentes como gobierno tienen influencia directa sobre el estado del sistema a traves del manejo de variables de control respectivo.

- El capitulo III se dedica por completo al tratamiento de la hipótesis de la renta permanente como un problema de extracción de señales dinámicas al que puede aplicarse el algoritmo de resolución iterativa del filtro de Kalman. El apartado que denominamos "el modelo" supone una formulación alternativa de la hipótesis de la renta permanente donde la ecuación de la misma tiene en cuenta las expectativas formuladas por los agentes para la evaluación de su renta futura. Dependiendo del modo en que los agentes formulan estas expectativas podemos reconstruir distintas series de renta permanente, tarea que se lleva a cabo en el último apartado de este capítulo donde se utilizan dos de los mecanismos de formación de expectativas propuestos en el modelo.

- El capítulo IV muestra algunos otros ejemplos de aplicación práctica de los modelos de extracción de señales dinámicas: en primer lugar se propone un modelo macroeconómico sencillo de determinación de la renta y de análisis de la política económica y en segundo lugar se propone en la segunda parte del capítulo una metodología basada en en el caracter iterativo del filtro de Kalman para la construcción de números índice de caracter sectorial, ofreciéndose un ejercicio de simulación al final del mismo.

Se cierra esta tesis con un epígrafe dedicado a conclusiones de caracter general.

En el apartado de los agradecimientos quisiera, en primer lugar destacado, mostrar el más sincero para el Director de esta Tesis: Dr. D. Rafael Herrerías Pleguezuelo, quien en todo momento prestó su apoyo y dedicación más entusiasta, así como a mis compañeros del Departamento de Economía Aplicada de la Universidad de Granada por su estímulo y colaboración. En segundo lugar quisiera agradecer al Estado de Nueva York su apoyo financiero al concederme la fianaciación necesaria para la realización de estudios de postgrado en los Estados Unidos, donde germinaron las primeras notas de esta Tesis. Finalmente agredecer a mis padres su apoyo y comprensión.

CAPITULO 0

CAPITULO 0.- INTRODUCCION A LA TEORIA DEL CONTROL OPTIMO, PROGRAMACION DINAMICA, Y PRINCIPIO DE OPTIMALIDAD.-

Desde el comienzo de los tiempos el [illegible] sentido la necesidad de conocer cúal va a ser [illegible] de los acontecimientos futuros. Una vez que es [illegible] hacer predicciones acerca del futuro, surge una [illegible] inevitable: ¿qué podemos hacer para modificar [illegible] de los acontecimientos si es que tenemos [illegible] hacerlo?. Los gobiernos, por ejemplo, [illegible] durante largos periodos de tiempo sus [illegible] política económica inalterados en [illegible] valores constantes, por el contrario [illegible] variables a situaciones cambiantes [illegible] consiga estabilizar la economía. Si el [illegible] elevado es probable que se incremente [illegible] la tasa de crecimiento de la cantidad [illegible] tasa de inflación es elevada se [illegible] contrapuesta. No cabe duda de que [illegible] control de cualquier sistema debe [illegible] técnicas de predicción lo suficientemente [illegible] para tener un conocimiento lo más [illegible] futuro y así poder aplicar los [illegible] de un modo más preciso y con un [illegible] método con el cual hagamos las predicciones [illegible] el adecuado para el problema específico [illegible] tratando, sin embargo los métodos [illegible] elevado número de ventajas, entre otras:

1. los métodos matemáticos permiten conocer [illegible] supuestos que se han hecho para llevar a cabo [illegible] predicciones.

2. los métodos matemáticos permiten, [illegible] efectuar las predicciones, conocer las [illegible] comportamiento que gobiernan el sistema.

3. los modelos matemáticos pueden ser [illegible] fácilmente y pueden tomar en consideración [illegible] número de factores que cualquier otro [illegible] de hacer predicciones no podría contemplar.

4. a posteriori, se puede comprobar [illegible] fiabilidad que merece un determinado [illegible] sin más que observar cual ha [illegible] aproximación alcanzado por las predicciones [illegible] con el modelo.

0.1 Problema básico.-

La dinámica de un sistema puede describirse mediante un modelo matemático. Tal modelo representa la relación que existe entre tres conjuntos de variables: las variables de estado, las variables de control y las variables observadas.

La propiedad esencial de cualquier sistema dinámico es que su comportamiento en cualquier instante del tiempo depende no sólo de las variables que en ese momento están actuando sobre él, sino también de aquellas que lo hicieron en el pasado. Si se conoce el estado del sistema en un instante de tiempo inicial y los controles que le han sido aplicados, podemos conocer cúal es su estado en el momento actual.

Se dice que un sistema es fisicamente realizable si su variable observable y su variable de estado en el instante de tiempo t_o depende únicamente de aquellas variables de control que han venido actuando hasta el instante t_o. Del mismo modo se dice que el sistema es determinístico si las variables de estado y las variables observadas pueden determinarse con certeza a partir de las variables de estado y de control en instantes de tiempo anteriores, si por el contrario sólo pudiera determinarse con una cierta probabilidad o por cualquier otro método estadístico, se dice que el sistema es estocástico.

Una primera aproximación a la teoría de la estabilización en su nivel más sencillo podría ser el caso de un sistema estático no estocástico para despues introducir los casos dinámico y aleatorio. En resumen:

sistema	estático	dinámico
no estocástico	no sujeto a fluctuaciones	dinámica predictible
estocástico	sujeto a fluctuación	dinámica no predictible

Del estudio del primero de estos casos[1] se obtiene la conocida proposición de que bajo certidumbre si se quieren alcanzar determinados valores de las variables objetivo se debe contar con al menos el mismo número de intrumentos.

Para ver esto consideremos el siguiente sistema lineal[2]:

$y=Ax$ donde y es un vector $nx1$ de variables objetivo, x es un vector $mx1$ de instrumentos, y A una matriz nxm de coeficientes constantes. Supongamos que se han elegido unos valores y^* para las variables objetivo. Estos valores sólo podrán alcanzarse mediante la fijación de las variables instrumento en los valores x^* que satisfacen la ecuación:

$$x^*=A^{-1}y^*$$

pero como sabemos por el algebra elemental, ello sólo será posible en el caso de m sea mayor o igual que n.

En este apartado vamos a tratar situaciones donde las decisiones se toman secuencialmente. El resultado de cada decisión no es predecible con certeza, pero puede observarse antes de que la siguiente decisón tenga lugar.

El objetivo va a ser optimizar cualquier expresión matemática que se considere como una representación adecuada al objetivo del problema. Representemos por x_k, u_k, w_k, los vectores de estado, control y de perturbaciones aleatorias respectivamente y sea la ecuación que rige la trayectoria del sistema:

$$x_{k+1}=f(x_k,u_k,w_k) \quad , \; k=0,1,2,3,....$$

y sea además:

$$g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k,u_k,w_k)$$

un funcional aditivo que representa el coste de adoptar una determina trayectoria. $g_N(x_N)$ es el coste terminal en que se incurre. Dado que interviene w_k que es una variable aleatoria, normalmente se optimiza:

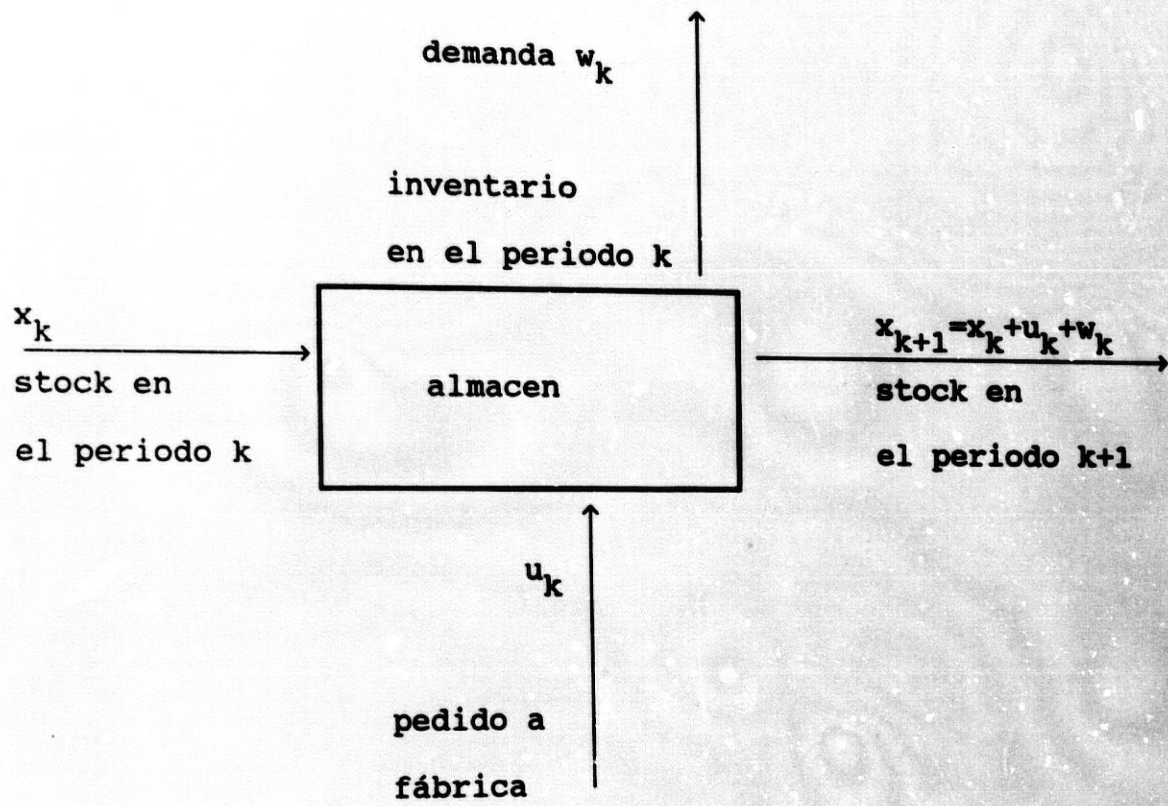
$$E\left[g_N(x_N)+\sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k,u_k,w_k)\right]$$

Sea por ejemplo[3] el problema de control de inventarios siguiente. Definamos las variables:

x_k= El stock disponible a comienzo del periodo k.

u_k= El pedido ordenado a fábrica a principios del periodo k

w_k= La demanda durante el periodo k, que es una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida.



los costes del periodo están compuestos por:

cu_k= es el coste de compra donde c es el coste unitario.

$H(x_{k+1})$= es el coste de inventario si x_{k+1} es positivo o el coste de rotura en caso de ser negativo.

En este caso

$$cu_k+H(x_k+u_k-w_k)$$

y el coste esperado:

$$E\left[\sum_{k=0}^{N-1} cu_k+H(x_k+u_k-w_k)\right]$$

el objetivo sería minimizar el coste esperado eligiendo los valores de $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{N-1}$ con la restricción de que $u_k \geq 0$, $k=0,1,\ldots N-1$.

Estamos interesados en conocer una regla de actuación para u_k una vez que en cada periodo se conoce x_k. Es decir encontrar una secuencia de funciones μ_k que nos minimicen el valor esperado del coste, dado x_k, $\mu_k(x_k)$. La secuencia $\pi=\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{N-1}$ se denomina ley de control o política a seguir.

Para cada π el coste esperado correspondiente dado un stock inicial x_0 es:

$$J_\pi(x_0)=E\left[\sum_{k=0}^{N-1} c\mu_k(x_k)+H(x_k+\mu_k(x_k)-w_k)\right]$$

El objetivo es minimizar $J_\pi(x_0)$ sobre todos los posibles π, para un x_0 dado.

En general $u_k \in U_k(x_k)$ será el conjunto de restricciones.

Definiremos $P_{ij}(u,k)$ como la probabilidad en el instante k de que en el siguiente periodo el estado sea j dado que en k es i, y que se ha aplicado el control u_k, es decir:

$$P_{ij}(u,k)=P(x_{k+1}=j \;/\; x_k=i, u_k=u)$$

si el sistema es estacionario estas probabilidades no dependen de k.

El problema básico queda recogido de la siguiente manera:

$$x_{k+1}=f_k(x_k,u_k,w_k) \quad k=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$x_k \in S_k, u_k \in C_k, \; w_k \in D_k \;, \; u_k \in U_k(x_k) \subset C_k \;, \text{ para todo } x_k \in S_k$$

w_k se caracteriza por una medida de probabilidad $P(./x_k,u_k)$

pero que no puede depender de perturbaciones previas $w_{k-1},w_{k-2},...,w_1,w_0$.

Las políticas son $\pi=(\mu_0,\mu_1,\mu_2,...,\mu_{N-1})$ con $u_k=\mu_k(x_k)/$

$/\mu_k(x_k)\in U_k(x_k)\subset C_k$ para todo $x_k\in S_k$ y se denominan admisibles. Dado un estado inicial x_0, el problema es encontrar una ley $\pi=(\mu_0,\mu_1,...,\mu_{N-1})$ que minimice el funcional de coste:

$$J_\pi(x_0)=\underset{w_k}{E}\left[g_N(x_N)+\sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k,\mu_k(x_k),w_k)\right]$$

$k=0,1,2,..,N-1$

s.a. $x_{k+1}=f(x_k,\mu_k(x_k),w_k)$ $k=0,1,2,...,N-1$

g_k, $k=0,1,...,N-1$ dadas.

La política π^*, para un x_0 dado es tal que:

$J_{\pi^*}(x_0)=\min\limits_{\pi\in\Pi}J_\pi(x_0)$donde Π es el conjunto de todos los controles admisibles. Tambien se denota por $J^*(x_0)=\min\limits_{\pi\in\Pi} J_\pi(x_0)$

suponemos que no se pierde ninguna información, y que en k, cuando se adopta la política u_k, se conoce $x_0,u_0,x_1,u_1,...,x_{k-1},u_{k-1},x_k$

La programación dinámica se basa en el "principio de optimalidad de Bellman", que se establece de la siguiente manera: sea $\pi^*=(\mu_0^*,\mu_1^*,...,\mu_{k-1}^*)$ una política óptima, consideremos el problema en el cual estamos en el estado x_i, en i y queremos minimizar el coste de ir del estado i al estado N:

$$E\left[g_N(x_N)+\sum_{k=i}^{N} g_k(x_k,\mu_k(x_k),w_k)\right]$$

entonces la política $\mu_i^*,\mu_{i+1}^*,\mu_{i+2}^*,\ldots,\mu_N^*$ también es óptima para este subproblema. "Toda porción de trayectoria óptima es óptima", por tanto, sea $J^*(x_0)=J_0(x_0)$ el coste óptimo siendo J_0 el último paso en el algoritmo iterativo desde el periodo N-1 al periodo 0.

$$J_N(x_N)=g_N(x_N)$$

$$J_k(x_k)= \min_{u_k\in U_k(x_k)} \mathop{E}_{w_k} \left[g_k(x_k,u_k,w_k)+J_{k+1}(f_{k+1}(x_k,u_k,w_k)) \right]$$

$$k=0,1,2,\ldots,N-1.$$

Si $u_k^*=\mu_k^*(x_k)$minimiza el lado derecho de la expresión para cada x_k y k, entonces la política $\pi^*=(\mu_0^*,\mu_1^*,\ldots,\mu_{N-1}^*)$ es óptima. y $J_k(x_k)$ es el coste óptimo para un problema en (N-k) etapas que comenzara en x_k y terminara en N (el coste de ir desde x_k hasta N).

0.2. Caso particular: variables retardadas.-

supongamos que solamente hay un retardo en el vector de estado y vector de control.

$$x_{k+1}=f_k(x_k,x_{k-1},u_k,u_{k-1},w_k) \qquad k=1,2,\ldots,N-1$$

podríamos hacer aumentar la dimensión del vector de estado de la siguiente manera:

$$x_{k+1}=f_k(x_k,y_k,u_k,s_k,w_k)$$

$$y_{k+1}=x_k$$

$$s_{k+1}=u_k$$

y es como si tuviéramos un nuevo vector de estado:

$$\check{x}_{k+1}=\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ s_{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_k(x_k,y_k,u_k,s_k,w_k) \\ x_k \\ u_k \end{bmatrix}$$

y podemos expresar $\check{x}_{k+1}=f_k(\check{x}_k,\check{u}_k,w_k)$; con lo cual la formulación es la del problema estandard, y el algoritmo de programación dinámica quedaría:

$$J_N(x_N)=g_N(x_N)$$

......

$$J_{N-1}(x_{N-1},x_{N-2},u_{N-2})= \min_{u_{N-1}\in U_{N-1}(x_{N-1})}$$

$$\mathop{E}_{w_{N-1}} \left[g_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1},w_{N-1})+\right.$$

$$\left.+J_N\left[f_{N-1}(x_{N-1},x_{N-2},u_{N-1},u_{N-2},w_{N-1})\right]\right]$$

......

$$J_k(x_k,x_{k-1},u_{k-1})= \min_{u_k\in U_k(x_k)} \mathop{E}_{w_k} \left\{\left[g_k(x_k,u_k,w_k)+\right.\right.$$

$$\left.\left.J_{k+1}\left[f_k(x_k,x_{k-1},u_k u_{k-1},w_k),x_k,u_k\right]k\right\} \qquad k=1,2,\ldots,N-2$$

......

$$J_0(x_0)=\min_{u_0\in U_0(x_0)} \mathop{E}_{w_0} \left\{g_0(x_0,u_0,w_0)+\right.$$

$$\left.+J_1\left[f_0(x_0,u_0,w_0),x_0,w_0\right]\right]\right\}$$

0.3 Sistemas lineales: funciones de coste cuadráticas, el principio de equivalencia cierta.-

consideremos ahora el caso particular de la ecuación de estado:

$$x_{k+1}=A_k x_k+B_k u_k+w_k \quad ; \qquad k=0,1,2,\ldots,N-1$$

y que el objetivo sea minimizar el funcional:

$$\underset{w_k}{E}\left[x_N' Q_N x_N+\sum_{k=0}^{N-1}(x_k' Q_k x_k+u_k' R u_k)\right]$$

$k=0,1,2,\ldots,N-1$

x_k y u_k son vectores de dimensiones n y m respectivamente; A_k,B_k,Q_k, R estan dadas y Q es simétrica y semidefinida positiva. w_k es un vector de perturbaciones independientes con distribución de probabilidad conocida y con media cero y segundos momentos finitos.

Por ejemplo cuando se desea llevar el vector de estado por una determinada trayectoria la expresión del funcional a minimizar sería:

$$E\left[(x_N-\bar{x}_N)' Q_N (x_N-\bar{x}_N)+\sum_{k=0}^{N-1}\left[(x_k-\bar{x}_k)' Q_k (x_k-\bar{x}_k)+u_k' R_k u_k\right]\right]$$

donde $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_N)$ es la trayectoria óptima.

Aplicando el algoritmo de programación dinámica:

$J_N(x_N)=x'_N Q_N x_N$

$\ldots\ldots$

$$J_k(x_k)=\min_{u_k} E\left[x'_k Q_k x_k+u'_k R_k u_k+J_{k+1}(A_k x_k+B_k u_k+w_k)\right]$$

para N-1:

$$J_{N-1}(x_{N-1})=\min_{u_{N-1}} E\left[x'_{N-1}Q_{N-1}x_{N-1}+u'_{N-1}R_{N-1}u_{N-1}+\right.$$

$$\left.+(A_{N-1}x_{N-1}+B_{N-1}u_{N-1}+w_{N-1})'Q_N(A_{N-1}x_{N-1}+B_{N-1}u_{N-1}+w_{N-1})\right]$$

$$=x'_{N-1}Q_{N-1}x_{N-1}+\min_{u_{N-1}}\left[u'_{N-1}R_{N-1}u_{N-1}+u'_{N-1}B'_{N-1}Q_N B_{N-1}+\right.$$

$$+x'_{N-1}A'_{N-1}Q_N A_{N-1}x_{N-1}+2x'_{N-1}A'_{N-1}Q_N B_{N-1}u_{N-1}+E[w_{N-1}Q_N w_{N-1}]$$

la condición necesaria de óptimo es:

$$(R_{N-1}+B'_{N-1}Q_N B_{N-1})u_{N-1}=-B'_{N-1}Q_N A_{N-1}x_{N-1}$$

entonces: $u^*_{N-1}=-(R_{N-1}+B'_{N-1}Q_N B_{N-1})^{-1}B'_{N-1}Q_N A_{N-1}x_{N-1}$

si desarrollamos secuencialmente el algoritmo de programción dinámica para N-2 y así sucesivamente, encontraríamos la ley de control óptimo que vendría dada por la expresión:

$$\mu^*_k(x_k)=L_k x_k$$

con $L_k=-(B'_k K_{k+1}B_k+R_k)^{-1}B'_k K_{k+1}A_k$

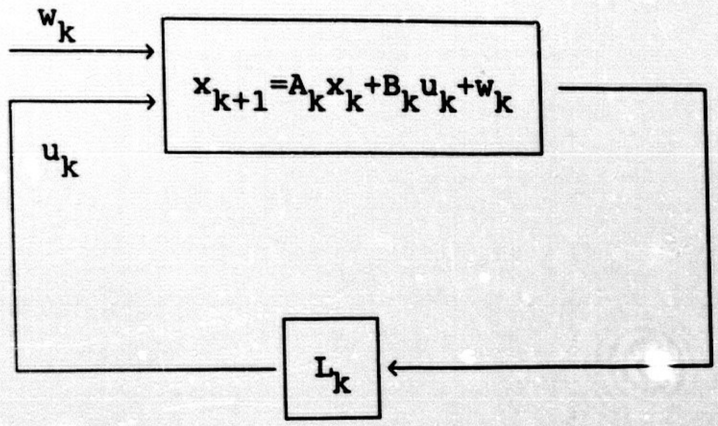
y $K_N=Q_N$

$$K_k=A'_k\left[K_{k+1}-K_{k+1}B_k(B'_k K_{k+1}B_k+R_k)^{-1}B'_k K_{k+1}\right]A_k+Q_k$$

y el coste óptimo:

$$J_0(x_0)=x_0'K_0x_0+\sum_{k=0}^{N-1} E[w_k'K_{k+1}w_k]$$

Gráficamente la política óptima en cada instante k incorpora un efecto feed-back.



A la ecuación de K_k se le denomina ecuación de Riccati en tiempo discreto, y puede demostrarse (véase Bertsekas (1987)) que cuando las matrices A_k, B_k, Q_k, R_k son constantes e iguales a A,B,Q,R respectivamente, entonces cuando k tiende a infinito, la solucción de K_k converge hacia una solucción de steady-state dada por la ecuación:

$$K=A'\left[K-KB(B'KB+R)^{-1}B'K\right]A+Q$$

y por tanto cuando el número de periodos N es elevado, se puede aproximar la ley de control óptimo mediante el operador lineal:

$$\mu^*(x)=Lx \text{ , con } L=-(B'KB+R)^{-1}B'KA$$

0.4.-Problemas con información imperfecta sobre el estado. Problema básico.-

Hasta ahora hemos venido suponiendo que el controlador del sistema contaba con acceso para conocer cual era el verdadero estado del sistema. En ocasiones las mediciones acerca del estado del sistema pueden incorporar errores, o simplemente el coste de obtención de la información acerca del estado del sistema puede ser prohibitivo. Vamos a modelizar esta situación diciendo que lo que percibe el controlador del sistema es:

$$z_k=h_k(x_k,u_{k-1},v_k)$$

siendo h_k una función y v_k una perturbación aleatoria.

El problema denominado básico se convierte ahora en el siguiente: supongamos que el controlador tiene acceso a la información:

$$z_o=h_o(x_o,v_o);\ z_k=h_k(x_k,u_k,v_k);\ k=1,2,\ldots,N-1$$

la observación z_k pertenece al espacio Z_k y la perturbación v_k pertenece al espacio V_k caracterizado por la medida de probabilidad:

$$P_{v_k}(\circ/x_k,x_{k-1},\ldots,x_o,u_{k-1},\ldots,u_o,w_{k-1},w_{k-2},\ldots,w_o,v_{k-1},\ldots,v_o)$$

que depende de cúal es el estado actual del sistema y de cuales fueron los estados, controles y perturbaciones aleatorias en instantes de tiempo anteriores.

El estado inicial es x_o, y es tambien aleatorio, y puede caracterizarse por una medida de probabilidad P_{x_o}.

Supondremos que la medida de probabilidad $P_{w_k}(\circ/x_k,u_k)$

de w_k está dada tambien y puede depender explícitamente de x_k y u_k pero no de las perturbaciones anteriores $w_{k-1}, w_{k-2}, \ldots, w_o, v_{k-1}, v_{k-2}, \ldots, v_o$. El control u_k debe pertenencer al conjunto no vacio U_k de espacio de los controles C_k.

Denotaremos por I_k a la información de que dispone el controlador en el instante de tiempo k que será un vector:

$I_k=(z_o, z_1, \ldots, z_k, u_o, u_1, \ldots, u_{k-1})$; $k=1,2,\ldots,N-1$

$I_o=z_o$

consideremos la clase de controles que consisten en la secuencia de funciones: $\pi=\{\mu_o, \mu_1, \ldots, \mu_{N-1}\}$ donde cada función μ_k está definida desde el espacio de la información en el espacio de los controles.

$\mu_k(I_k) \in C_k$ para todo I_k; $k=0,1,2,\ldots,N-1$

tales leyes de control se denominan admisibles. El problema consiste en encontrar una ley de control admisible:

$\pi=\{\mu_o, \mu_1, \ldots, \mu_{N-1}\}$ que minimiza el funcional de costes:

$$J_{\pi_o} = \underset{x_k, w_k, v_k}{E} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k[x_k, \mu_k(I_k), w_k] \right\}$$

$k=0,1,\ldots,N-1$

sujeto a la ecuación del sistema:

$x_{k+1}=f_k[x_k, \mu_k(I_k), w_k]$; $k=0,1,\ldots,N-1$

y la ecuación de medida:

$$z_o=h_o(x_o,v_o)$$

$$z_k=h_k(x_k,\mu_{k-1}(I_{k-1}),v_k) \qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

mientras antes buscábamos el control condicionados por el estado del sistema, ahora lo hacemos para cada conjunto de información posible. Como vemos:

$$I_{k+1}=(I_k,z_{k+1},u_k) \qquad k=0,1,2,\ldots,N-2 \qquad I_o=z_o$$

además este problema es análogo la problema básico; ahora I_k puede considerarse como el estado del sistema, el control u_k y la observación z_{k+1} pueden considerarse como si fueran perturbaciones aleatorias; además:

$$P(z_{k+1}\in \bar{Z}_{k+1} \;/\; I_k,u_k)=P(z_{k+1}\in \bar{Z}_{k+1} \;/\; I_k,u_k,z_o,z_1,\ldots.z_k)$$

para cualquier observación en un subconjunto $\bar{Z}_{k+1}\subset \bar{Z}_k$, dado que $z_o,z_1,\ldots,z_k$ son parte del vector de información I_k.

Por tanto la medida de probabilidad de z_{k+1} depende explícitamente únicamente del estado I_k y del control u_k y no de perturbaciones previas $z_o,z_1,\ldots,z_k$.

Ahora el funcional de costes en cada periodo k puede escribirse como una función del estado y del control.

$$E\left\{g_k(x_k,\ u_k,w_k)\right\}=E\left\{\underset{x_k,w_k}{E}\left\{g_k(x_k,u_k,w_k)/I_k,u_k\right\}\right\}$$

y el algoritmo de programación dinámica puede escribirse como:

$$J_{N-1}(I_{N-1}) = \min_{u_{N-1}\in U_{N-1}} \left[E \left\{ g_N[f_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1},w_{N-1})] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + g_{N-1}(x_{N-1},u_{N-1},w_{N-1}) / I_{N-1},u_{N-1} \right\} \right]$$

......

$$J_k(I_k) = \min_{u_k\in U_k} \left[\underset{x_k,w_k,z_{k+1}}{E} \left\{ g_k(x_k,u_k,w_k) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J_{k+1}(I_k,z_{k+1},u_k) / I_k,u_k \right\} \right]$$

0.5. Información imperfecta, sistemas lineales y costes cuadráticos.-

Supongamos el sistema:

$$x_{k+1}=A_k x_k+B_k u_k+w_k \quad ; \quad k=0,1,\ldots,N-1$$

y el coste cuadrático:

$$E\left\{x_N' Q_N x_N+\sum_{k=0}^{N-1}(x_k' Q_k x_k+u_k' R_k u_k)\right\}$$

y que el observador percibe las señales al principio de cada periodo

$z_k=C_k x_k+v_k$; $k=0,1,2,\ldots,N-1$ con $z_k \in R^s$, C_k está dada de dimensión sxm; $v_k \in R^s$ tiene distribución de probabilidad conocida, v_k se distribuye independientemente y también es independiente de x_o y de w_k.

En este caso tendremos:

$$J_{N-1}(I_{N-1})=\min_{u_{N-1}}\left[\underset{x_{N-1},w_{N-1}}{E}\left\{(A_{N-1}x_{N-1}+B_{N-1}u_{N-1}+w_{N-1})'Q_N\right.\right.$$

$$(A_{N-1}x_{N-1}+B_{N-1}u_{N-1}+w_{N-1})+x_{N-1}'Q_{N-1}x_{N-1}+$$

$$\left.\left.+u_{N-1}'R_{N-1}u_{N-1}/\ I_{N-1}\right\}\right]$$

teniendo en cuenta que:

$E\left\{w_{N-1}/I_{n-1}\right\}=E\left\{w_{N-1}\right\}=0$; podemos escribir:

$$J_{N-1}(I_{N-1})=\underset{x_{N-1}}{E}\left\{x'_{N-1}(A'_{N-1}Q_NA_{N-1}+Q_{N-1})x_{N-1}/I_{N-1}\right\}+$$

$$+\underset{w_{N-1}}{E}\left\{w'_{N-1}Q_Nw_{N-1}\right\}+\min_{u_{N-1}}\left[u'_{N-1}(B'_{N-1}Q_NB_{N-1}+R_{N-1})\right.$$

$$\left.u_{N-1}+2E\left\{x_{N-1}/I_{N-1}\right\}A'_{N-1}Q_NB_{N-1}u_{N-1}\right]$$

y por tanto el control óptimo en el periodo sería:

$$u^*_{N-1}=\mu^*_{N-1}(I_{N-1})=-(B'_{N-1}Q_NB_{N-1}+R_{N-1})^{-1}B'_{N-1}Q_NA_{N-1}E\{x_{N-1}/I_{N-1}\}$$

operando

$$J_{N-1}(I_{N-1})=\underset{x_{N-1}}{E}\left\{x'_{N-1}K_{N-1}x_{N-1}/I_{N-1}\right\}+$$

$$+\underset{x_{N-1}}{E}\left\{[x'_{N-1}-E\{x_{N-1}/I_{N-1}\}]'P_{N-1}[x'_{N-1}-E\{x_{N-1}/I_{N-1}\}]+\right.$$

$$+\underset{w_{N-1}}{E}\left\{w'_{N-1}Q_Nw_{N-1}\right\}$$ con

$$K_{N-1}=A'_{N-1}Q_NA_{N-1}-P_{N-1}+Q_{N-1}$$

$$P_{N-1}=A'_{N-1}Q_NB_{N-1}(R_{N-1}+B'_{N-1}Q_NB_{N-1})^{-1}B'_{N-1}Q_NA_{N-1}$$

de modo análogo podríamos hacer para N-2

$$J_{N-2}(I_{N-2})=\min_{u_{N-2}} \left[\underset{x_{N-2},w_{N-2},z_{N-1}}{E} \left\{ x'_{N-2}Q_{N-2}x_{N-2}+u'_{N-2}R_{N-2}u_{N-2}+\right.\right.$$

$$\left.+J_{N-1}(I_{N-1}) \;/\; I_{N-2},u_{N-2}\right]=$$

$$\min_{u_{N-2}} \left[\underset{x_{N-2},w_{N-2}}{E} \left\{ x'_{N-2}Q_{N-2}x_{N-2}+u'_{N-2}K_{N-2}u_{N-2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(A_{N-2}x_{N-2}+B_{N-2}u_{N-2}+w_{N-2})'K_{N-1}(A_{N-2}x_{N-2}+B_{N-2}u_{N-2}+w_{N-2})/I_{N-2}\right\}\right]$$

$$+E\left\{\left[x_{N-1}-E(x_{N-1}/I_{N-1})\right]'P_{N-1}\left[x_{N-1}-E(x_{N-1}/I_{N-1})\right]/ I_{N-2},w_{N-2}\right\}+$$

$$+\underset{w_{N-1}}{E}\left\{ w'_{N-1}Q_N w_{N-1}\right\}$$

el control óptimo u^*_{N-2} viene dado por:

$$u^*_{N-2}=\mu^*_{N-2}(I_{N-2})=$$

$$=-(R_{N-2}+B'_{N-2}K_{N-1}B_{N-2})^{-1}B_{N-2}K_{N-1}A_{N-2}E(x_{N-2}/I_{N-2})$$

y en general:

$$\mu^*_k(I_k)=L_kE(x_k/I_k) \text{ con:}$$

$$L_k=-(R_k+B'_kK_{k+1}B_k)^{-1}B'_kK_{k+1}A_k$$

$$K_k=A'_k[K_{k+1}-K_{k+1}B_k(R_k+B'_kK_{k+1}B_k)^{-1}B'_k\;K_{k+1}]A_k+Q_k$$

$$K_N=Q_N$$

NOTAS AL CAPITULO 0.-

[1] recogido de modo sistemático por Timbergen (1952) "On the Theory of Economic Policy".

[2] seguimos la notación de Turnovsky (1977)

[3] este ejemplo y la subsiguiente notación están tomadas de Bertsekas (1987).

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO 0.-

-Anderson, B.D.O. & Moore J.B. Optimal Filtering. Prentice Hall. Englewood Cliffs N.J. 1979.

-Aoki, M. Optimization of Stochastic Systems- Topics in Discrete-Time Systems. Academic Press. New York. 1967.

-Bellman, R. Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton, N.J. 1957.

-Bertsekas, D.P. Infinite Time Reachability of state space regions by using feed-back control, IEEE Trans. Automatic Control AC-17 (1972) 604-613.

-Bertsekas D.P. Stochastic optimization problems with non differentiable cost functionals, J. Optimization Theory Appl. 12 (1973) 218-231.

-Bertsekas D.P. & Shreve S.E. Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case. Academic Press. New York 1978.

-Blackwell, D. Discrete dynamic programming, Ann. Math. Statist.33 (1962) pp 719-726.

-Turnovsky, Macroeconomic Theory And Stabilization Policy. Cambridge University Press 1977.

CAPITULO I

CAPITULO I.-ESTIMACION EN EL ESPACIO DE LOS ESTADOS EL FILTRO DE KALMAN Y SUS APLICACIONES.-

1.1 Introducción.-

La denominación "métodos en el espacio de los estados" es de hecho sólamente una denominación con la que la literatura econométrica pretende designar a toda una familia de procedimientos metodológicos que ya habian sido utilizados con anterioridad en los ámbitos del análisis dinámico, la mecánica cuántica, la teoría de la estabildad, la resolucción de ecuaciones diferenciales ordinarias, etc.

La aplicación de estos métodos a los problemas de control fue potenciada durante la segunda mitad de la decada de los cincuenta, principalmente a raiz de los trabajos de Pontryagin, de la programación dinámica de Bellman y de la teoría general del control desarrollada por Kalman.

Entre los aspectos más interesantes que hacen atractiva toda esta metodología, mencionaremos, por ejemplo, el hecho de que supongan una formulación uniforme para diferentes tipos de problemas y la posibilidad de soluccionar fácilmente problemas de control que incluyan gran número de variables objetivo, que de otra forma, con métodos de corte clásico hubieran sido de dificil solucción.

Por otro lado, al ser métodos que emplean en gran medida procedimientos del álgebra matricial son susceptibles de ser tratados con técnicas de cálculo automático.

Sin embargo, como en cualquier otro tipo de análisis, no podemos solamente resaltar sus múltiples ventajas, sino que además debemos ser conscientes de sus diversas limitaciones, que se agravan aún más en el ámbito específico de la ciencia económica, donde no conocemos con certeza cuales van a ser las distintas variables que componen los vectores de estado y de control, y menos aún cúal es la "verdadera" relacion que liga estas variables, ni tampoco resulta convincente el supuesto de que esta es una relación de tipo lineal.

A pesar de la complejidad del problema sirvan estas páginas para hacer una presentación del mismo.

1.2 Descripción analítica del problema.-

Vamos a representar el conjunto de variables que son relevantes para nuestro análisis, mediante un vector que denominaremos vector de estado. Imaginemos que el número de variables de estado es n. El vector de estado será por tanto nx1, ahora bien, el estado del sistema no es inamovible sino que sigue una evolución temporal; de tal manera, que cada una de las variables que lo describen se ve afectada, en primer lugar por la propia dinámica del sistema, por otro lado por las perturbaciones de caracter aleatorio a las que se encuentra sometido. Además cabe la posibilidad de que el sistema sea de alguna manera controlable, es decir, que pueda verse afectado por la modificación de determinadas variables exógenas a la propia dinámica del sistema y que sin embargo influyen en él.

Tenemos que, por tanto, dada una situación del sistema (estado), ésta puede ser explicada por tres partes claramente diferenciadas: por un lado el propio estado del sistema en el periodo anterior (componente que denominaremos sistemática), por las accciones ejercidas sobre el sistema en el periodo anterior (componente que denominaremos de control), y por último por una componente en general no predictible que denominaremos componente aleatoria. Podemos entonces expresar la "ecuación de estado" del sistema como:

$$x_{t+1}=\phi x_t+\Gamma u_t+G w_t$$

con:

$E(w_t)=0$

$E(w_t w_{t'}^{'})=\delta_{tt'}Q$ y $\delta_{tt'}=I$ si $t=t'$; 0 si $t\neq t'$

x_t es nx1

Φ es nxn

Γ es nxr

u_t es rx1

G es nxp

w_t es px1

0 es px1

Q es pxp

Como puede observarse ésta es una ecuación dinámica. A la matriz G se le denomina matriz de distribución del ruido. El número de variables disponibles para controlar el sistema es r.

Pero no siempre las variables que describen de alguna manera nuestro sistema son directamente observables, por lo tanto nos veremos obligados a fijarnos en otro conjunto de variables (proxy) que guarden estrecha relación con las anteriores y que sin embargo cumplan con el requisito de observabilidad.

Además puede ser que no observemos correctamente estas variables de referencia, sino que nuestra visión se encuentre de alguna manera distorsionada, de modo que la relación entre las variables de estado y las variables observadas se ve perturbada aleatoriamente por el hecho de su observación en si. A la expresión que liga las variables de estado con las variables observadas la denominaremos ecuación de observación, que en su forma analítica más general podemos expresar como:

$$z_{t+1}=Hx_{t+1}+v_{t+1}$$

con:

$$E(v_{t+1})=0$$

$$E(v_{t+1}v'_{t+1})=\delta_{tt'}R$$

y donde:

z_{t+1} es mx1

H es mxn

v_{t+1} es mx1

R es mxm

Como se ve es una ecuación estática, en la que el número de variables observadas y el número de variables de estado no necesariamente tiene por qué coincidir.

Cabe además la posibilidad de que efectuemos hipótesis acerca de cual va a ser el comportamiento en probabilidad de cada uno de los términos de perturbación que aparecen en estas relaciones. En general supondremos que su valor esperado sea nulo, sin embargo permitiremos que exista cualquier tipo de correlación entre los diferentes términos que integran los vectores w_t y v_{t+1} respectivamente para un mismo instante de tiempo, no así para distintos instantes. De aquí el sentido de las expresiones $\delta_{tt'}$ de Kronecker, es decir estamos en presencia de homocedasticidad y ausencia de autocorrelación en tiempo.

Con arreglo a los supuestos establecidos, el sistema se propaga del instante t al instante t+1, condicionado por la dinámica interna del sistema, los controles aplicados y las perturbaciones a que éste se encuentra sometido.

En el instante de tiempo t podemos hacer una predicción acerca de cual puede ser el estado del sistema en el instante de tiempo t+1. El criterio de predicción que vamos a seguir será el de valor esperado del vector de estado condicionado al conjunto de información disponible (observaciones y controles aplicados) con que contamos en el instante de tiempo t, y lo denotaremos por:

$$\hat{x}_{t+1/t}=E(x_{t+1}/Z^t,U^t)=\phi E(x_t/Z^t,U^t)+\Gamma u_t+GE(w_t)=\phi\hat{x}_{t/t}+\Gamma u_t$$

Del mismo modo en el instante de tiempo t+1 contaríamos con una nueva observación de las variables z. Así podríamos actualizar la predicción con arreglo al mismo criterio del valor esperado pero ahora con un conjunto de información más amplio, por lo que expresaríamos:

$$\hat{x}_{t+1/t+1}=E(x_{t+1}/Z^{t+1},U^t)$$

Sin embargo este no va a ser el criterio[1], sino que introduciremos una hipótesis determinista de la que hablaremos más adelante, aunque podemos adelantar que su expresión analítica vendrá dada por:

$$\hat{x}_{t+1/t+1}=\hat{x}_{t+1/t}+K_{t+1}(z_{t+1}-H\hat{x}_{t+1/t}).$$

En este contesto pueden definirse los errores de predicción y los denominados errores de actualización como:

$$\tilde{x}_{t+1/t}=x_{t+1}-\hat{x}_{t+1/t} \text{ error de predicción}$$

$$\tilde{x}_{t+1/t+1}=x_{t+1}-\hat{x}_{t+1/t+1} \text{ error de actualización}$$

que serán vectores nx1 y cuya expresión analítica sería:

$$\tilde{x}_{t+1/t}=\phi x_t+\Gamma u_t+Gw_t-\phi\hat{x}_{t/t}-\Gamma u_t$$
$$=\phi(x_t-\hat{x}_{t/t})+Gw_t$$
$$=\phi\tilde{x}_{t/t}+Gw_t$$

de igual modo:

$$\tilde{x}_{t+1/t+1}=x_{t+1}-\hat{x}_{t+1/t+1}$$

$$=x_{t+1}-\hat{x}_{t+1/t}-K_{t+1}(z_{t+1}-H\hat{x}_{t+1/t})$$

$$=(x_{t+1}-\hat{x}_{t+1/t})-K_{t+1}(Hx_{t+1}+v_{t+1}-H\hat{x}_{t+1/t})$$

$$=(x_{t+1}-\hat{x}_{t+1/t})-K_{t+1}(H(x_{t+1}-\hat{x}_{t+1/t})+v_{t+1})$$

$$=\tilde{x}_{t+1/t}-K_{t+1}(H\tilde{x}_{t+1/t}+v_{t+1})$$

$$=(I-K_{t+1}H)\tilde{x}_{t+1/t}-K_{t+1}v_{t+1}$$

Así mismo podrían definirse las matrices de varianzas covarianzas de estos errores como:

$$P_{t+1/t}=E(\tilde{x}_{t+1/t}\tilde{x}'_{t+1/t})$$

$$P_{t+1/t+1}=E(\tilde{x}_{t+1/t+1}\tilde{x}'_{t+1/t+1})$$

que serán matrices nxn cuya expresión analítica puede deducirse fácilmente:

$$P_{t+1/t}=E(\phi\tilde{x}_{t/t}+Gw_t)(\phi\tilde{x}_{t/t}+Gw_t)'$$
$$=\phi E(\tilde{x}_{t/t}\tilde{x}'_{t/t})\phi'+GE(w_tw'_t)G'$$
$$=\phi P_{t/t}\phi'+GQG'$$

$$P_{t+1/t+1}=E((I-K_{t+1}H)\tilde{x}_{t+1/t}-K_{t+1}v_{t+1})$$
$$((I-K_{t+1}H)\tilde{x}_{t+1/t}-K_{t+1}v_{t+1})'$$
$$=(I-K_{t+1}H)E(\tilde{x}_{t+1/t}\tilde{x}'_{t+1})(I-K_{t+1}H)'+$$
$$+K_{t+1}E(v_{t+1}v'_{t+1})K'_{t+1}-$$
$$-2K_{t+1}E(v_{t+1})\tilde{x}'_{t+1}(I-K_{t+1}H)'$$

teniendo en cuenta que al tomar valores esperados los productos cruzados se anulan, conjuntamente con las propiedades de la esperanza matemática podemos escribir entonces:

$$=(I-K_{t+1}H)E(\tilde{x}_{t+1/t}\tilde{x}'_{t+1})(I-K_{t+1}H)'+$$
$$+K_{t+1}E(v_{t+1}v'_{t+1})K'_{t+1}$$

en definitiva:

$$P_{t+1/t+1}=(I-K_{t+1}H)P_{t+1/t}(I-K_{t+1}H)'+K_{t+1}RK'_{t+1}$$

Ahora bien, podríamos preguntarnos sobre el significado del mecanismo mediante el cual actualizamos nuestras predicciones. En este punto hemos introducido una hipótesis que parece bastante realista: nuestra actualización del estado del sistema en el instante t+1 será para ese mismo instante, la predicción que en el instante de tiempo t habíamos hecho sobre éste, mas un término corrector que será directamnete proporcional al error cometido en la predicción una vez que observemos las denominadas variables proxy, y cuyo coeficiente de proporcionalidad será la matriz K_{t+1} de dimensiones nxm. Es decir:

$$\hat{x}_{t+1/t+1}=\hat{x}_{t+1/t}+K_{t+1}(z_{t+1}-H\hat{x}_{t+1/t})$$

Nuestro problema consiste en determinar el valor numérico de esta matriz K que en lo sucesivo denominaremos ganancia del filtro, pero ¿cómo calcularla?, ¿con arreglo a qué criterio?, pues bien, este será un criterio de eficiencia, es decir, se trata de minimizar la varianza:

$$P_{t+1/t+1}=(I-K_{t+1}H)P_{t+1/t}(I-K_{t+1}H)'+K_{t+1}RK'_{t+1}$$

para lo cual podríamos establecer las condiciones necesarias, derivando parcialmente la expresión de dicha varianza con respecto de K_{t+1} tendríamos:

$$\underset{K_{t+1}}{\mathrm{Min}}\ tr(P_{t+1/t+1})$$

y la condición necesaria:

$$@tr(P_{t+1/t+1})/@K'_{t+1}=-2P_{t+1/t}H'+2K_{t+1}HP_{t+1/t}H'+2K_{t+1}R=0$$

entonces: $K_{t+1}(R+HP_{t+1/t}H')=P_{t+1/t}H'$

y por tanto:

$$K_{t+1}=P_{t+1/t}H'(R+HP_{t+1/t}H')^{-1}$$

expresión que conocemos con el nombre de "filtro de Kalman".

Podríamos resumir por orden las ecuaciones relevantes de este modo:

$$(1)\quad \overset{\prime\prime}{x}_{t+1/t}=\phi\overset{\prime\prime}{x}_{t/t}+Gw_t$$

$$(2)\quad P_{t+1/t}=\phi P_{t/t}\phi'+GQG'$$

$$(3)\quad K_{t+1}\ =P_{t+1/t}H'(R+HP_{t+1/t}H')^{-1}$$

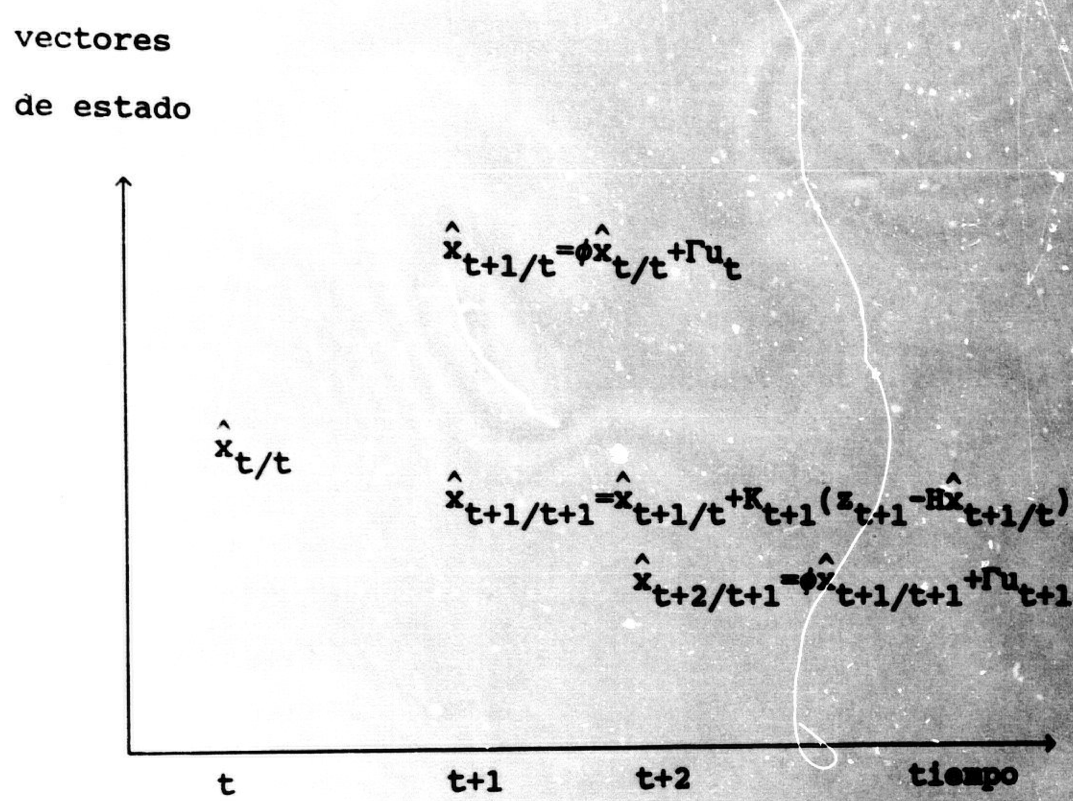
$$(4)\quad \hat{x}_{t+1/t+1}=\hat{x}_{t+1/t}+K_{t+1}(z_{t+1}-H\hat{x}_{t+1/t})$$

$$(5)\quad P_{t+1/t+1}=(I-K_{t+1}H)P_{t+1/t}(I-K_{t+1}H)'+K_{t+1}RK'_{t+1}$$

que a efectos de cálculo no es mas que un algoritmo de resolucción iterativa.

Gráficamente podemos visualizar el proceso de la siguiente manera:

EVOLUCION DEL ESTADO DEL SISTEMA



1.3. Aplicaciones.-

Dentro de este apartado vamos a tratar el problema de los mínimos cuadrados recursivos desde la óptica de esta metodología. Antes de nada situemos más concretamente cúal es la problemática de la estimación recursiva.

Como sabemos, en un medelo lineal general del tipo

$$y_t = x_t\beta + \varepsilon_t$$

la estimación del vector de parámetros viene dada por la expresión:

$$\hat{\beta} = (X_t'X_t)^{-1}X_t'y_t$$

A efectos de cálculo, el problema con que nos encontramos es la inversión de la matriz $X_t'X_t$. Por otro lado lo que nos planteamos es la posibilidad de soslayar la inversión de la matriz $X_{t+1}'X_{t+1}$ cuando incorporamos una nueva observación al modelo.

El problema podríamos plantearlo como sigue: supongamos que contamos con t observaciones muestrales. A la estimación realizada con "t" observaciones la denominaremos:

$\hat{\theta}_t = (\hat{\beta}_t, \hat{\sigma}_t)'$. Supongamos que contamos con una nueva observación ¿cómo podemos ahora calcular la estimación del vector de parámetros?. Pues bien, una estimación recursiva sería del tipo:

$$\hat{\theta}_{t+1} = f(K_{t+1}, \hat{\theta}_t)$$

donde K_{t+1} es la ganancia del filtro, que es una función de la ganancia del filtro en el periodo anterior y de la nueva información muestral, es decir:

$$K_{t+1}=g(K_t, x'_{t+1}, y_{t+1}).$$

Esta es, en resumen, la filosofía básica de la estimación recursiva. Es decir, para estimar el vector de parámetros en el instante t+1 sólo necesitamos la estimación correspondiente al instante t y la ganancia del filtro que a su vez es función de la ganancia en el periodo anterior y de la nueva información muestral.

Trasladados estos conceptos al modelo de regresión lineal uniecuacional tenemos:

$$\hat{\beta}_t=(X'_tX_t)^{-1}X'_ty_t= P_tX'_tY_t$$

con $P_t=(X'_tX_t)^{-1}$

$$\mathrm{cov}(\hat{\beta}_t)=\sigma^2_\varepsilon P_t$$

y $\quad \hat{\beta}_{t+1}=(X'_{t+1}X_{t+1})^{-1}X'_{t+1}Y_{t+1}$

donde:

$$X_{t+1}=\begin{bmatrix} X_t \\ x'_{t+1} \end{bmatrix}\begin{matrix} nxk \\ 1xk \end{matrix} \qquad Y_{t+1}=\begin{bmatrix} Y_t \\ y_{t+1} \end{bmatrix}\begin{matrix} nx1 \\ 1x1 \end{matrix}$$

$$(n+1)xk \qquad\qquad (n+1)x1$$

$$\hat{\beta}_{t+1}=P_{t+1}X'_{t+1}Y_{t+1}$$

$$\mathrm{cov}(\hat\beta_{t+1})=\sigma_c^2 P_{t+1}$$

$$X'_{t+1}Y_{t+1}=(X'_t \; x_{t+1})\begin{pmatrix} Y_t \\ y_{t+1}\end{pmatrix}=X'_tY_t+x_{t+1}y_{t+1}=$$

$$P_{t+1}=(X'_{t+1}X_{t+1})^{-1}=(X'_t \; x_{t+1})\begin{pmatrix} X_t \\ x'_{t+1}\end{pmatrix}=(X'_tX_t+x_{t+1}x'_{t+1})^{-1}=$$

$$=(P_t^{-1}+x_{t+1}x'_{t+1})^{-1}$$

aplicando el lema de inversión de matrices:

$$(A+BC)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}B(I+CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

e identificando:

$$A=P_t^{-1}$$

$$B=x_{t+1}$$

$$C=x'_{t+1}$$

la expresión anterior se convierte en:

$$P_{t+1}=P_t-P_tx_{t+1}(1+x'_{t+1}P_tx_{t+1})^{-1}x'_{t+1}P_t$$

$$=P_t-K_{t+1}x'_{t+1}P_t$$

donde:

$$K_{t+1}=P_tx_{t+1}/(1+x'_{t+1}P_tx_{t+1})$$

por tanto:

$$\hat\beta_{t+1}=(P_t-K_{t+1}x'_{t+1}P_t)(X'_tY_t+x_{t+1}y_{t+1})$$

$$=\hat\beta_t-K_{t+1}x'_{t+1}\hat\beta_t+P_tx_{t+1}y_{t+1}-K_{t+1}x'_{t+1}P_tx_{t+1}y_{t+1}=$$

$$=(I-K_{t+1}x'_{t+1})\hat\beta_t+K_{t+1}(1+x'_{t+1}P_tx_{t+1})y_{t+1}-$$

$$-K_{t+1}x'_{t+1}P_tx_{t+1}y_{t+1}$$

que reordenando queda:

$$\hat{\beta}_{t+1}=\hat{\beta}_t+K_{t+1}(y_{t+1}-x'_{t+1}\hat{\beta}_t)$$

pero como x'_{t+1} es un vector fila y x_{t+1} es un vector columna, todo este paréntesis es por tanto un número, por lo que ahora no es preciso invertir ninguna nueva matriz para la obtención de P_{t+1} además $A^{-1}=P_t^{-1}=X_t'X_t$ es el producto de dos matrices, lo cual no tiene un coste de cálculo excesivo.

En resumen, ya en la expresión:

$$\hat{\beta}_{t+1}=\hat{\beta}_t+K_{t+1}(y_{t+1}-x'_{t+1}\hat{\beta}_t)$$

podemos dilucidar algo de lo que hemos visto en el apartado anterior, es decir: la estimación del vector de parámetros en el instante de tiempo t+1 viene dada por la expresión de la estimación correspondiente al instante de tiempo t, mas una ponderación determinada del error de predicción un periodo hacia delante, utilizando para ella el vector de parámetros estimado en el instante de tiempo t, cuando contábamos con t observaciones muestrales.

Tenemos, por tanto, un algoritmo de resolución iterativa que vendrá dado por las ecuaciones siguientes:

$$K_{t+1}=P_t x_{t+1}/(1+x'_{t+1}P_t x_{t+1})$$

$$\hat{\beta}_{t+1}=\hat{\beta}_t+K_{t+1}(y_{t+1}-x'_{t+1}\hat{\beta}_t)$$

$$P_{t+1}=(I-K_{t+1}x'_{t+1})P_t$$

si el error de predicción es nulo, entonces $\hat{\beta}_{t+1} = \hat{\beta}_t$, la nueva información no nos pone de manifiesto la necesidad de cambiar la estimación de β.

A los mismos resultados podríamos llegar sin mas que plantear el problema de acuerdo con la terminología de la estimación en el espacio de los estados. Así:

$$\beta_{t+1}=\phi\beta_t$$

sería la ecuación de estado del sistema, donde hay ausencia de términos de control. Pero el modelo de regresión lineal simple supone como hipótesis que los parámetros del modelo son constantes a lo largo del tiempo, por lo tanto podemos escribir la ecuación:

$$\beta_{t+1}=\beta_t$$

luego $\phi=I$, y además:

$$y_{t+1}=x'_{t+1}\beta_{t+1}+\varepsilon_{t+1}$$

sería la ecuación de observación, ecuación estática que no sería otra cosa que la especificación del modelo de regresión lineal simple.

Podríamos establecer la siguiente tabla de analogías:

(1) $\hat{x}_{t+1/t}=\phi\hat{x}_{t/t}+\Gamma u_t$

(2) $P_{t+1/t}=\phi P_{t/t}\phi'+GQG'$

(3) $K_{t+1}\ =P_{t+1/t}H'(R+HP_{t+1/t}H')^{-1}$

(4) $\hat{x}_{t+1/t+1}=\hat{x}_{t+1/t}+K_{t+1}(z_{t+1}-H\hat{x}_{t+1/t})$

(5) $P_{t+1/t+1}=(I-K_{t+1}H)P_{t+1/t}(I-K_{t+1}H)'+K_{t+1}RK'_{t+1}$

(1') $\hat{\beta}_{t+1}=\hat{\beta}_t$

(2') $\sigma^2\ P_{t+1}=\ \sigma^2\ P_t$

(3') $K_{t+1}=P_t x_{t+1}/(1+x'_{t+1}P_t x_{t+1})$

(4') $\hat{\beta}_{t+1}=\hat{\beta}_t+K_{t+1}(y_{t+1}-x'_{t+1}\hat{\beta}_t)$

(5') $P_{t+1}=(I-K_{t+1}x'_{t+1})P_t$

claramente podríamos identificar:

$\phi=I$

$z_{t+1}=y_{t+1}$

$H=x'_{t+1}$

$v_{t+1}=\varepsilon_{t+1}$

$\sigma^2 P_t=\sigma^2(X'_t X_t)^{-1}=P_{t+1/t}$

en resumen, en cada instante de tiempo tenemos que conocer los valores numéricos de las expresiones: β_t, P_t, K_{t+1}.

1.4 Origen de la estimación recursiva: criterios para la elección de valores iniciales.-

Por ahora todo el análisis partía de que nos encontrábamos en un instante de tiempo t, en el cual teníamos especificado el modelo, y para el que comenzábamos a realizar todo el análisis. Pero la pregunta que se nos plantea es la siguiente: si nos retrotraemos en el tiempo, ¿de qué situación inicial hemos partido?, ¿cómo habremos elegido los valores iniciales de K_o, P_o, β_o para emprender el algoritmo iterativo?. Pues bien: existen varios criterios muy genéricos para dar respuesta a estos interrogantes:

a) un primer criterio sería el siguiente: supongamos que disponemos de, por ejemplo, veinte observaciones. Podríamos tomar una submuestra de diez observaciones y calcular con ellas las expresiones β_o, K_o, P_o. A partir de ellas propagaríamos el modelo, con la ventaja adicional que supone contar con el resto de las observaciones para poder comparar los resultados a que conduce el modelo con los resultados observados en la realidad y darnos una idea acerca de la fiabilidad de nuestra especificación inicial. De este modo si los resultados obtenidos mediante el proceso de propagación difieren mucho de los resultados empíricos nos cuestionaríamos la validez del modelo especificado.

b) un segundo criterio consistiría en elegir de manera arbitraria los valores de β_o. Pero de este modo cabría esperar que la incertidumbre de esos parámetros iniciales fuera muy grande y por tanto los valores numéricos de la matriz de varianzas covarianzas serían muy elevados. Como:

$$cov(\hat{\beta}_o)=\sigma_u^2 P_o=\sigma_u^2(X_o' X_o)^{-1}$$

si esta elección de β_o nos merece escasa fiabilidad podríamos tomar:

$$P_o=(1/u_o)I$$

con un valor de u_o muy próximo a cero. Además se demuestra empíricamente que la elección de $P_o=(1/u_o)I$ con valores numéricos tan altos no tiene gran influencia cuando se han procesado gran número de observaciones.

Este segundo criterio nos permitiría la introducción de información teórica a priori, estableciendo como valor inicial de β aquel que creamos en principio que va a tomar como valor final. Esta información podría provenir de estimaciones de estudios anteriores análogos, información exógena, etc.

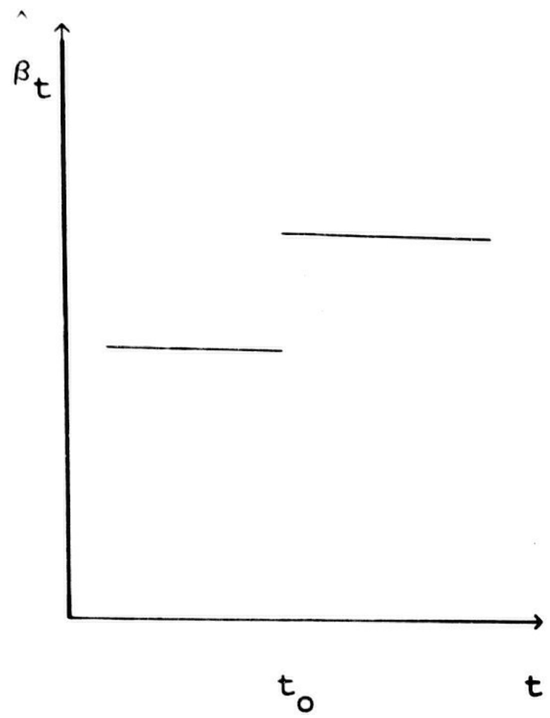
1.5 Ventajas e inconvenientes de estos procedimientos.-

En primer lugar podemos resaltar la ventaja que a nuestro juicio parece mas relevante, cual es el hecho de soslayar el problema numérico que supone la inversión de $X_t'X_t$ cuando incorporamos observaciones adicionales al modelo.

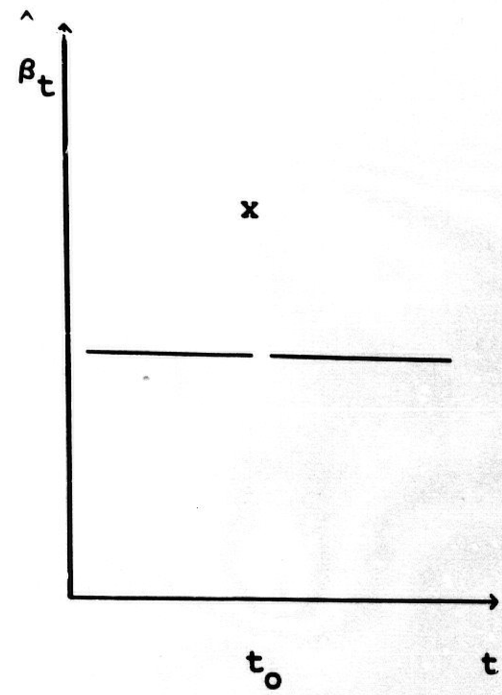
Además, y dentro tambien ámbito operacional, nos evita los problemas de multicolinealidad que dependen en gran medida del conjunto de observaciones muestrales, no siendo necesario aplicar el método de los regresores cresta:

$$\hat{\beta}=(X'X+kI)^{-1}X'y$$

de otro modo puede verificarse fácilmente la hipótesis de parámetros cambiantes (ausencia de cambio estructural) homocedasticidad en los residuos y detectar la presencia de valores atípicos sin más que representar en unos ejes cartesianos los valores $\hat{\beta}_t$, P_t respectivamente.



cambio estructural



presencia de valor atípico

La detección de errores de especificación funcional también es posible en al ámbito de este análisis. Sea por ejemplo el modelo:

$$y_t=\alpha_1+\alpha_2 x_t+\alpha_3 x_t^2+\varepsilon_t$$

el modelo correctamente especificado (modelo "ideal") y supongamos que nuestra especificación haya sido:

$$y_t=\beta_1+\beta_2 x_t+u_t^*$$

entonces el parámetro β guardará en nuestra representación una dependencia en el tiempo, poniendo de relieve un error de especificación funcional, ya que:

$dy_t/dx_t=\alpha_2+2\alpha_3 x_t$ en el modelo correcto

$dy_t/dx_t=\beta_2$ en el modelo incorrectamente especificado.

luego:

$$\hat{\beta}_2=\alpha_2+2\alpha_3 x_t$$

entonces β_2 va a ser dependiente en el tiempo con los valores de x_t.

El problema de autocorrelación en los residuos tambien es tratable en el marco de este análisis. Sea por ejemplo el modelo:

$$x_{t+1}=\mu x_t+w_t$$

y supongamos que w siga un proceso autorregresivo de primer orden de manera que:

$$w_{t+1}=\delta w_t+a_t$$

con a_t ruido blanco.

Aumentando la dimensión del vector de estado y reformulando las matrices correspondientes podríamos escribir:

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ w_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_t \end{bmatrix}$$

si somos capaces de estimar la nueva matriz ϕ para este modelo, podríamos conocer la estructura de auto correlación y su influencia en el modelo.

1.6.- Algunas ideas acerca del proceso de estimación del modelo.-

El procedimento que se seguirá en este apartado es el de máxima verosimilitud, es decir, tenemos [illegible] observaciones muestrales, y a partir de ellas tenemos que estimar los valores numéricos de las [illegible] ϕ,Γ,G,R,Q.

Suponiendo que las perturbaciones se distri[illegible] normalmente podemos escribir su función de distri[illegible] como:

$$L(\theta)=P(Z^N/\theta)=P(z_n/Z^{N-1},\theta)\ P(Z^{N-1}/\theta)$$

donde θ son todos los parámetros del modelo y Z^N [illegible] observaciones muestrales..

$$Z^N=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$$

podemos escribir:

$$L(\theta)=\prod_{j=1}^{N} P(z_j/Z^{j-1},\theta)$$

y tomando logaritmos neperianos:

$$\mathrm{Ln}\ L(\theta)=\sum_{j=1}^{N} \mathrm{Ln}P(z_j/Z^{j-1},\theta)$$

bajo la hipótesis de normalidad de las pertur[illegible] segunda función de verosimilitud tiene la expre[illegible]

$$l(\theta)=-1/2\sum_{j=1}^{N} \tau_j' P_{j/j-1}\tau_j+\mathrm{Ln}|P_{j/j-1}|$$

y $\tau_j=z_j-H\hat{x}_{j/j-1}$

para maximizar esta función tenemos que conocer [illegible] por tanto $\hat{x}$. Esta maximización es un problema de optimización no lineal. El proceo se detendrá cuando la modificación de la función de verosimilitud en términos relativos sea menor que una cierta cantidad fijada de antemano.

1.7. Relación entre los modelos en el espacio de los estados y los modelos ARMA de series temporales.-

Supongamos el modelo ARMA(p,q) m-vectorial[2], que por comodidad supondremos estacionario con media cero

con
$$\Phi(B)z_t=\Theta(B)a_t$$

$$\Phi(B)=I-\Phi_1B-\Phi_2B^2-\ldots-\Phi_pB^p \;;$$

$$\Theta(B)=I-\Theta_1B-\Theta_2B^2-\ldots-\Theta_qB^q$$

y a_t un proceso multivariante m-dimensional de ruido blanco con media cero.

Podríamos reformular la ecuación del proceso en forma de medias móviles como:

$$z_t=\Phi^{-1}(B)\Theta(B)a_t=\Psi(B)a_t=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j a_{t-j} \quad \text{con } \Psi_o=I$$

para el instante t+i tenemos:

$$z_{t+i}=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j a_{t+i-j}$$

sean:

$$z_{t+i/t}=E[z_{t+i}/z_k;\ k\leq t\ ]$$

$$z_{t+i/t+1}=E[z_{t+i}/z_k;\ k\leq t+1\ ]$$

por tanto teniendo en cuenta que a_t es ruido blanco, tenemos:

$$z_{t+i/t}=\sum_{j=i}^{\infty} \psi_j a_{t+i-j}$$ y de modo análogo:

$$z_{t+i/t+1}=\sum_{j=(i-1)}^{\infty} \psi_j a_{t+i-j}$$

por lo tanto

$$z_{t+i/t+1}=\sum_{j=i}^{\infty} \psi_j a_{t+i-j} + \psi_{i-1} a_{t+1}$$

$$=z_{t+i/t} + \psi_{i-1} a_{t+1}$$

y también:

$$z_{t+1/t+1}=z_{t+1/t} + a_{t+1}$$

$$z_{t+2/t+1}=z_{t+2/t} + \psi_1 a_{t+1}$$

$$z_{t+3/t+1}=z_{t+3/t} + \psi_2 a_{t+1}$$

$$\vdots$$

$$z_{t+p-1/t+1}=z_{t+p-1/t} + \psi_{p-2} a_{t+1}$$

$$z_{t+p/t+1}=z_{t+p/t} + \psi_{p-1} a_{t+1}$$

$$=\phi_p z_{t/t}+\phi_{p-1} z_{t+1/t}+\cdots+\phi_1 z_{t+p-1/t}+\psi_{p-1} a_{t+1}$$

así:

$$z_{t+p/t}=\phi_1 z_{t+p-1/t}+\cdots+\phi_p z_t$$

$$z_{t+p+1/t}=\phi_1 z_{t+p/t}+\cdots+\phi_p z_{t+1/t}$$
$$=f(z_t, z_{t+1/t},\ldots, z_{t+p-1/t})$$

y podemos escribir

$$\begin{bmatrix} z_{t+1/t+1} \\ z_{t+2/t+1} \\ \vdots \\ z_{t+p/t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ & & & & \\ \phi_p & \phi_{p-1} & \dots & & \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t+1/t} \\ \\ z_{t+p-1/t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \psi_1 \\ \\ \psi_{p-1} \end{bmatrix} a_{t+1}$$

$$y \quad z_t = [I_m, 0, 0, \dots, 0] \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t+1/t} \\ \vdots \\ z_{t+p-1/t} \end{bmatrix}$$

supongamos ahora que z_t pudiera representarse como:

$$y_{t+1} = Ay_t + Ga_{t+1}$$

$$z_t = Hy_t \qquad \text{con } y_t (p\times 1)$$

tenemos:

$$y_{t+i}=Ay_{t+i-1}+Ga_{t+i}$$
$$=A(Ay_{t+i-2}+Ga_{t+i-1})+Ga_{t+i}$$
$$\vdots$$
$$=A^i y_t+A^{i-1}Ga_{t+1}+\ldots.+Ga_{t+i}$$

y

$$z_{t+p}=Hy_{t+p}$$
$$=H(A^p y_t+A^{p-1}Ga_{t+1}+\ldots.+Ga_{t+p})$$

$$\phi_1 z_{t+p-1}=H\phi_1 y_{t+p-1}$$
$$=H\phi_1(A^{p-1}y_t+A^{p-2}Ga_{t+1}+\ldots.+Ga_{t+p-1})$$
$$\vdots$$

$$\phi_{p-1}z_{t+1}=H\phi_{p-1}y_{t+1}$$
$$=H\phi_{p-1}(Ay_t+Ga_{t+1})$$

$$\phi_p z_t=H\phi_p y_t$$

por tanto z_t tiene una representación **ARMA:**

$$z_{t+p}+\phi_1 z_{t+p-1}+\ldots.+\phi_{p-1}z_{t+1}+\phi_p z_t=H(A^p+\phi_1 A^{p-1}+\ldots.+\phi_{p-1}A+\phi_p I)y_t$$
$$+H(A^{p-1}+\phi_1 A^{p-2}+\ldots.+\phi_{p-1}I)Ga_{t+1}$$
$$+HGa_{t+p}$$

$$=\Theta_o a_{t+p}+\Theta_1 a_{t+p-1}+\Theta_2 a_{t+p-2}+\ldots.+\Theta_{p-1}a_{t+1}$$

con

$$\Theta_i=H(A^i+\phi_1 A^{i-1}+\ldots.+\phi_i I)G$$

NOTAS AL CAPITULO I.-

[1] para mayor detalle puede consultarse Brockwell & Davis (1987) pp.450 y siguientes.

[2] ver Wei (1989)

BIBLIOGRAFIA CAPITULO I.-

- Brockwell, P J. & Davis, R.A. (1987) Time Series: Theory and Methods. Springer-Verlag.

- Goodwin, G.C. & Sin, K.S.S. Adaptative Filtering: Prediction and Control. Prentice Hall. Englegood Cliffs, N.J. 1984.

- Jazwinsky, A.H. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press. New York. 1970.

- Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems, Trans ASME Ser. D.J. Basic Engrg.82 (1960) pp 35-45.

Kumar, P.R. A survey of some results in adaptive control, SIAM J.Control Optimization 21 (1983) pp 163-178.

- Kumar, P.R. & Varaiya, P.P. Stochastic Systems: Estimation, Identification and Adptive Control. Prentice Hall. Englegood Cliffs N.J. 1986.

- Wei, W. (1989) Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods. Adison-Wesley.

CAPITULO II

CAPITULO II.-EXTRACCION DE SEÑALES DINAMICAS Y EXPECTATIVAS: UNA FORMULACION EN EL ESPACIO DE LOS ESTADOS.-

En este capítulo vamos a modelizar situaciones que a menudo representan la evolución real de una economía. Vamos a considerar a la economía en su conjunto como un sistema dinámico que pudiera ser descrito mediante un vector de estado que recoge el conjunto de variables que resultan relevantes para el análisis. La economía encuentra su dinámica influenciada como consecuencia de la actuación de dos tipos de sujetos: de un lado el gobierno y de otro cualesquiera agentes económicos que adoptan decisiones de caracter privado. El modo en que los distintos agentes formulan expectativas acerca del comportamiento de los otros configura diferentes resultados finales acerca de la evolución del sistema económico.

2.1. Modelos con control centralizado.-

Supongamos una economía integrada por dos tipos de sujetos económicos que brevemente denominaremos de modo genérico gobierno y agentes:

-gobierno: que está encargado de llevar a cabo los controles u_t en la economía (política ecorómica), teniendo en cuenta para ello las expectativas formuladas por todo otro tipo de sujetos que componen la economía, de modo que:

$$u_t=g_t(x_t,\hat{x}_{t+1/t})$$

donde x_t es un vector de estado y $\hat{x}_{t+1/t}$ es la expectativa que los distintos agentes efectuan en t acerca del estado del sistema en el instante de tiempo t+1 [1], y, simplemente,

-agentes: que formulan expectativas acerca del estado del sistema en el periodo siguiente teniendo en cuenta para ello cual es el estado del sistema en el momento actual y los controles que esperan observar que sean efectuados por el gobierno en el periodo, es decir:

$$\hat{x}_{t+1/t}=N_t(x_t,\hat{u}_{t/t})$$

Tanto gobierno como agentes tienen conocimiento de la evolución del sistema económico, los primeros lo utilizan para formular controles y los segundos para formarse expectativas.

El estado del sistema evoluciona de acuerdo con[2]:

$$x_{t+1}=f_t(x_t,u_t,w_t)$$

donde w_t es una perturbación de caracter aleatorio. Las expectativas formadas por los agentes no son directamente observables por el gobierno sino que éste último percibe solamente las variables z_t observables y que guardan con las expectativas formuladas por los agentes la relación siguiente[3]:

$$z_t=h_t(\hat{x}_{t+1/t})+v_t$$

el gobierno pretende manejar los controles de manera óptima, tratando de alejarse lo menos posible de una senda de las variables de estado que resulte óptima[4] y que denotamos por

$$x_t^* \ , \ t=1,2,\dots,N$$

para ello el gobierno tratará de optimizar un funcional[5]:

$$J(x_{t+1},x_{t+1}^*)$$

el problema queda planteado de la siguiente forma:

$$\underset{u_t}{\text{opt}}\ J(x_{t+1},x_{t+1}^*) \qquad t=0,1,2,\dots,N-1$$

s.a.

$$x_{t+1}=f_t(x_t,u_t,w_t)$$

$$z_t=h_t(\hat{x}_{t+1/t})+v_t$$

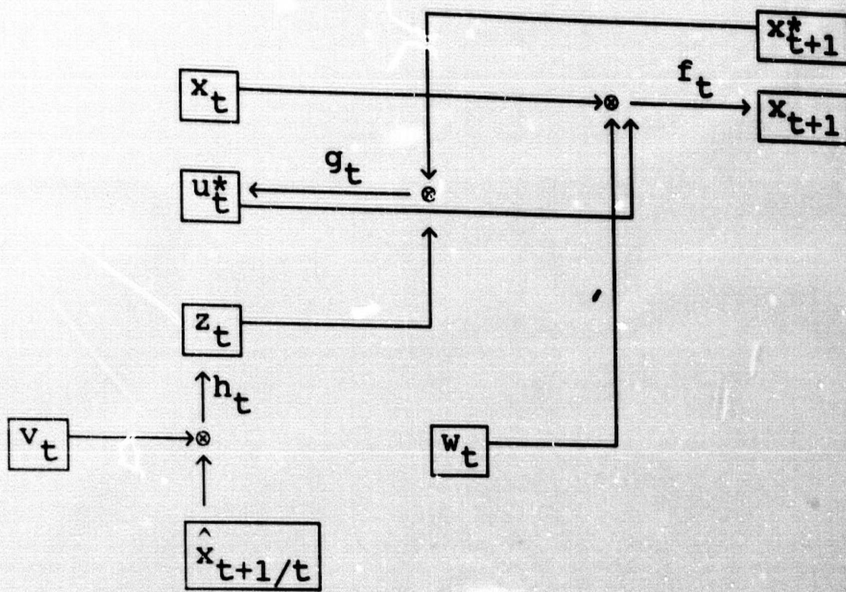
x_{t+1}^* conocido

x_o conocido

la solución de este problema en cada instante de tiempo nos proporciona la secuencia de controles óptimos:

$$u_t^*=g_t(x_t,z_t,x_{t+1}^*) \qquad t=0,1,\dots,N-1$$

gráficamente el problema pudiera representarse de la siguiente manera:



(fig II.1)

nos queda encontrar un criterio de optimalidad que nos permita determinar los controles u^*_t $t=0,1,2...,N-1$

Una manera sencilla sería reconstruir hacia atrás, de manera recursiva, la secuencia de controles óptimos. Supongamos que estamos en N-1 y que queremos encontrar

u^*_{N-1}

conocemos x^*_N y x_{N-1} y el gobierno observa:

$$z_{N-1}=h_{N-1}(\hat{x}_{N/N-1})+v_{N-1}$$

supongamos además que todos los controles u^*_j $j=1,2,...,N-2$ hubieran sido óptimos[6]. Nuestro problema es:

$$\operatorname*{opt}_{u_{N-1}} J(x_N, x_N^*)$$

s.a. $x_N = f_{N-1}(x_{N-1}, u_{N-1}, w_{N-1})$

$z_{N-1} = h_{N-1}(\hat{x}_{N/N-1}) + v_{N-1}$

x_N^* es conocido

x_{N-1} es conocido

de este problema determinamos $u_{N-1}^* = g_{N-1}(x_{N-1}, z_{N-1}, x^*_N)$ de este modo hubiéramos determinado el control óptimo para N-1. Del mismo modo sabiendo que tenemos el control óptimo para el periodo N-1, podemos encontrar el control óptimo para N-2, que será el resultado de resolver el problema:

$$\operatorname*{Opt}_{u_{N-2}} J(x_{N-1}, x^*_{N-1})$$

s.a. $x_{N-1} = f_{N-2}(x_{N-2}, u_{N-2}, w_{N-2})$

$z_{N-2} = h_{N-2}(\hat{x}_{N-1/N-2}) + v_{N-2}$

x_{N-1}^* conocido

x_{N-2} conocido

cuya solución determinará el valor de u_{N-2}^* de este modo podemos retroceder en el tiempo e ir resolviendo recursivamente para el periodo N-2, N-3, hasta llegar a determinar el control óptimo en el periodo 0.

Como vemos en este problema hemos soslayado la necesidad de computar todos los controles de manera simultánea para todos los periodos.

Esto sólo es posible en el caso de que la función objetivo a optimizar sea de tipo aditivo [7]

$$\text{opt } J_1(x_1,x_1^*)+\ldots+J_N(x_N,x_N^*)$$

donde $J_t(x_t,x_t^*)$ es una función cóncava, y las ecuaciones:

$$x_{t+1}=f_t(x_t,u_t,w_t)$$

determinan un conjunto compacto y convexo en espacio de los controles.

Con objeto de hacer el tratamiento del problema más sencillo vamos a suponer nuevamente linealidad en las ecuaciones de estado y de observación[8] y escribimos[9]:

$$x_{t+1}=\Phi x_t+\Gamma u_t+Gw_t$$

$$z_t=H\hat{x}_{t+1/t}+v_t$$

y el problema queda expresado:

$$\underset{u_t}{\text{opt}}\ J_{t+1}(x_{t+1},x_{t+1}^*) \text{ para todo } t=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\text{s.a. } x_{t+1}=\Phi x_t+\Gamma u_t+Gw_t$$

$$z_t=H\hat{x}_{t+1/t}+v_t$$

$$x_t \text{ conocido}$$

$$x_{t+1}^* \text{ conocido}$$

para todo $t=0,1,2,\ldots,N-1$

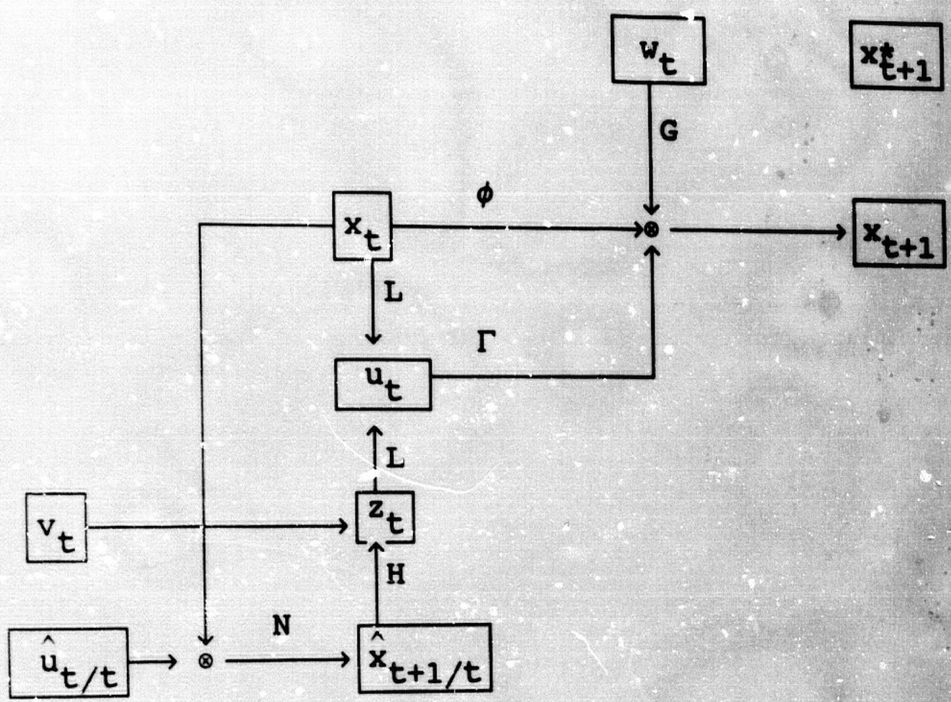
De la solución de este problema obtenemos $u_t^*=L(x_t,z_t,x_t^*)$ el inconveniente con que nos encontramos es que las expectativas $\hat{x}_{t+1/t}$ no se formulan exógenamente sino que se relacionan con los controles aplicados. Ambos procesos se determinan simultáneamente. Vamos a describir el proceso de manera secuencial.

Ante todo estamos suponiendo que el gobierno que diseña el control a aplicar no tiene vínculo ninguno con los agentes que formulan las expectativas.

Los agentes, por su parte, al formular su expectativa, suponemos que no conocen cúal es la política (control) que el gobierno va a llevar a cabo, por ello toman como punto de partida el estado del sistema en el momento actual y sus expectativas acerca del control que creen que va a ser aplicado en ese instante, por los decisores de la política económica, es decir:

$$\hat{x}_{t+1/t}=N_t(x_t,\hat{u}_{t/t})$$

en tanto que los decisores toman en cuenta las variables observables en el mismo instante de tiempo. Esta situación se reproduce con frecuencia en el mundo real. Imaginemos que los empresarios toman la evolución del tipo de redescuento del banco central como un indicador mas de la evolución futura del tipo de interés para la formulación de sus expectativas. A su vez el banco central comc decisor puede fijarse entre otras cosas en las opiniones empresariales a la hora de fijar el tipo de redescuento. El objetivo del gobierno es seleccionar las variables de control de manera que junto con las expectativas formuladas por los agentes, conduzcan las variables de estado hacia una senda que se aleje lo menos posible de la trayectoria considerada óptima por el gobierno. En este marco teórico los agentes se limitan a formular expectativas, pero los decisores reconocen la influencia que ejercen sobre los agentes en el proceso de formación de expectativas a través del manejo de las variables de control. De manera gráfica:



(fig II.2)

en resumen:

1) los agentes formulan su expectativa:

$$\hat{x}_{t+1/t}=N(x_t,\hat{u}_{t/t})$$

2) los deciscres observan z_t y formulan su control óptimo:

$$u^*_t=L(x_t,z_t)$$

3) el sistema evoluciona de acuerdo con:

$$x_{t+1}=\Phi x_t+\Gamma u^*_t+Gw_t$$

-caso 1 - los agentes tienen perfecta información acerca de la evolución del sistema.-

Si los agentes tienen perfecta información acerca de la evolución del sistema; entonces:

1) los agentes formularán la expectativa:

$$\hat{x}_{t+1/t}=\Phi x_t+\Gamma\hat{u}_{t/t} \qquad (2.1)$$

2) los decisores observarán:

$$z_t=H\hat{x}_{t+1/t}+v_t \qquad (2.2)$$

y formularán su control óptimo $u_t^*=L(x_t,z_t)$

3) el sistema evoluciona de acuerdo con:

$$x_{t+1}=\Phi x_t+\Gamma u_t^*+Gw_t \qquad (2.3)$$

supongamos que el gobierno sabe que los agentes formulan sus expectativas de acuerdo con (2.1). La expectativa que los agentes tienen acerca del control $\hat{u}_{t/t}$ será observada por los decisores a través de:

$$z_t=H(\Phi x_t+\Gamma\hat{u}_{t/t})+v_t$$

asi, las expectativas que formulan los agentes acerca del estado están condicionadas por la expectativa que formulan acerca del control.

Vamos a suponer que el criterio optimizador que los decisores tienen en mente es apartarse periodo a periodo lo menos posible de la trayectoria óptima de las variables de estado, pero como sólo observan las variables z, querrán que z_t se aparte lo menos posible del valor óptimo que se correspondería con x_{t+1}^* es decir:

$$z_t^*=Hx_{t+1}^*+v_t$$

pero x^*_{t+1} debiera ser el resultado de la evolución del sistema desde su estado óptimo anterior:

$$x_{t+1}^*=\Phi x_t^*+\Gamma u_t^*+Gw_t$$

por lo que en definitiva el problema que tratarán de resolver los decisores es:

$$\min_{u_t^*} E\left[|z_t-z_t^*|\right]=$$

$$=\min_{u_t^*} E\left[|H(\Phi x_t+\Gamma\hat{u}_{t/t})+v_{t+1}-H(\Phi x_t^*+\Gamma u_t^*+Gw_t)|\right] \quad [10]$$

de acuerdo con este modelo y teniendo en cuenta las propiedades de las variables aletorias v_{t+1} y w_t que son ruido blanco nos quedaría:

$$\min |H\Phi(x_t-x_t^*)+H\Gamma(\hat{u}_{t/t}-u_t^*)|$$

y dado que $(x_t-x_t^*)$ es algo ya acaecido, y por tanto no controlable; es decir, si existe conocimiento perfecto por parte de los agentes, respecto del comportamiento del sistema en cuanto a su evolución lo mejor que pueden hacer los decisores del gobierno es tomar como control óptimo el que resulta de igualar la expresión:

$$H\Phi(x_t-x_t^*)+H\Gamma(\hat{u}_{t/t}-u_t^*)=0$$

y entonces $u_t^*=\Gamma^{-1}\Phi(x_t-x_t^*)+\hat{u}_{t/t}$

-*caso 2 - los agentes no tienen perfecta información acerca de la evolución del sistema.-*

Supongamos ahora que los agentes no conocen cúal es el verdadero modelo que gobierna la evolución del sistema sino que por el contrario creen que:

$$x_{t+1}=Fx_t+Ju_t+Mw_t$$

y por tanto formularán sus expectativas de acuerdo con:

$$\hat{x}_{t+1}=Fx_t+J\hat{u}_{t/t}$$

y los decisores tratarán con la misma metodología de hacer:

$$\min E\left[|H(Fx_t+J\hat{u}_{t/t})+v_{t+1}-H(\Phi x_t^*+\Gamma u_t^*+Gw_t)|\right]$$

para lo cual es necesario que:

$$Fx_t+J\hat{u}_{t/t}=\Phi x_t^*+\Gamma u_t^*$$

es decir: $u_t^*=\Gamma^{-1}(Fx_t+J\hat{u}_{t/t}-\Phi x_t^*)$

como vemos en esta regla de control óptimo se recoge analíticamente el hecho de que las percepciones de los agentes respecto de la evolución del sistema se aparta de la realidad, esta faceta queda reflejada mediante la aparición en la expresión de control óptimo de las matrices F y J. De modo obvio si $F=\Phi$ y $J=\Gamma$ tenemos la expresión del apartado anterior.

Si suponemos ahora que los agentes tienen previsión perfecta respecto del control efectuado por el gobierno podemos plantear los siguientes casos:

-caso 3 .-Ademas de perfecta información sobre la evolución del sistema hay previsión perfecta respecto del control aplicado por el gobierno

Con previsión perfecta tenemos que $\hat{u}_{t/t}=u^*_t$, por tanto ahora el gobierno lleva a cabo sin mas su política económica que siempre será anticipada por los agentes. En cierto modo, la igualdad de conjuntos de información de gobierno y agentes lleva a un "consenso implícito" a la hora de diseñar la política económica (control) óptima.

- caso 4 - los agentes no conocen el verdadero modelo que rige la evolución del sistema pero tienen previsión perfecta respecto del control aplicado por el gobierno.-

En este caso la ecuación:

$$Fx_t+J\hat{u}_{t/t}=\Phi x^*_t+Ju^*_t$$

al ser $u^*_t=\hat{u}_{t/t}$ nos queda reducida a la expresión:

$$Fx_t-\Phi x^*_t=(\Gamma-J)u^*_t$$

finalmente tenemos:

$$u^*_t=[\Gamma-J]^{-1}[Fx_t-\Phi x^*_t]$$

el gobierno formula su control óptimo ponderando de esta manera especial la desviación del estado del sistema x_t respecto de su valor objetivo x^*_t. En esa ponderación $[\Gamma-J]^{-1}$ intervienen tanto la verdadera matriz de transmisión del control Γ como la que perciben los agentes J.

Por ahora los resultados que hemos obtenido se basaban, o mejor dicho, eran consecuencia del hecho de que el criterio optimizador seguido por el gobierno era el de minimizar periodo a periodo el diferencia entre las variables observadas z_t y las que se corresponderían con el estado óptimo x^*_{t+1}, en caso de este producirse.

Podríamos ahora efectuar nuestro análisis introduciendo la metodología del filtro de Kalman, que no es otra cosa que cambiar el criterio de optimalidad anterior por el criterio de eficiencia en el error de actualización, minimizando la traza de su matriz de varianzas-covarianzas.

Supongamos que el modelo evoluciona de acuerdo con:

$x_{t+1}=\Phi x_t+\Gamma u_t+Gw_t$ ecuación de estado del sistema

el gobierno percibe:

$z_t=H\hat{x}^e_{t+1/t}+v_t$ ecuación de observación

ahora notamos $\hat{x}^e_{t+1/t}$ para distinguirlo como valor esperado del vector de estado por parte de los agentes frente a predicción sobre t+1 cuando estamos en t como veíamos en la metodología de Kalman en el capítulo I

$$\hat{x}^e_{t+1/t}=\phi x_t+\Gamma\hat{u}_{t/t}$$

es la ecuación que rige el cómputo de expectativas por parte de los agentes cuando tienen perfecta información, caso de no ser así la ecuación relevante sería:

$$\hat{x}^e_{t+1/t}=Fx_t+J\hat{u}_{t/t}$$

donde $\hat{u}_{t/t}$ sigue siendo la expectativa de los agentes en el periodo sobre el control que el gobierno va a aplicar en ese mismo periodo, así:

$$x_{t+1}=\phi x_t+\Gamma u_t+Gw_t$$

la ecuación de estado del sistema queda inalterada y sustituyendo lo anterior en la ecuación de observación:

$$z_t=H[Fx_t+J\hat{u}_{t/t}]+v_t$$

las dos ecuaciones de arriba constituyen las dos ecuaciones de estado y de observación, que teníamos a la hora de abordar la discusión teórica acerca del filtro de Kalman. Por tanto ahora el algoritmo de Kalman se recoge en el siguiente paralelismo:

(1) $\hat{x}_{t+1/t}=\phi\hat{x}_{t/t}+\Gamma u_t$

(2) $P_{t+1/t}=\phi P_{t/t}\phi'+GQG'$

(3) $K_{t+1}=P_{t+1/t}H'(R+HP_{t+1/t}H')^{-1}$

(4) $\hat{x}_{t+1/t+1}=\hat{x}_{t+1/t}+K_{t+1}(z_{t+1}-H\hat{x}_{t+1/t})$

(5) $P_{t+1/t+1}=(I-K_{t+1}H)P_{t+1/t}(I-K_{t+1}H)'+K_{t+1}RK'_{t+1}$

estas eran las ecuaciones del algoritmo de solución iterativa que siguen siendo válidas ahora, pero exploremos algo más en la ecuación (4) que se convierte en:

$$\hat{x}_{t+1/t+1}=\hat{x}_{t+1/t}+K_{t+1}(H(Fx_{t+1}+J\hat{u}_{t+1/t+1})+v_{t+1}-H\hat{x}_{t+1/t})$$
$$=[I-K_{t+1}H]\hat{x}_{t+1/t}+K_{t+1}H(Fx_{t+1}+J\hat{u}_{t+1/t+1})+K_{t+1}v_{t+1}$$

y si consideramos:

$$\ddot{x}_{t+1/t+1}=\hat{x}_{t+1/t+1}-x_{t+1}=$$
$$=[I-K_{t+1}H]\hat{x}_{t+1/t}-[I-K_{t+1}HF]x_{t+1}+K_{t+1}HJ\hat{u}_{t+1/t+1}+K_{t+1}v_{t+1}$$
$$=(\hat{x}_{t+1/t}-x_{t+1})-K_{t+1}H[\hat{x}_{t+1/t}-Fx_{t+1}]+K_{t+1}HJ\hat{u}_{t+1/t+1}+$$
$$+K_{t+1}v_{t+1}=$$
$$=\hat{x}_{t+1/t}-K_{t+1}H[\hat{x}_{t+1/t}+(I-F)x_{t+1}]+K_{t+1}HJ\hat{u}_{t+1/t+1}+K_{t+1}v_{t+1}$$
$$=[I-K_{t+1}H]x_{t+1/t}+K_{t+1}(I-F)x_{t+1}+K_{t+1}HJ\hat{u}_{t+1/t+1}+K_{t+1}v_{t+1}$$

si consideramos ahora la varianza del error de actualización y teniendo en cuenta las características de los términos de perturbación.

$$P_{t+1/t+1}=E[\ddot{x}_{t+1/t+1}\ddot{x}'_{t+1/t+1}]=[I-K_{t+1}H]P_{t+1/t}[I-K_{t+1}H]'+$$
$$+K_{t+1}[I-F]GQG'[I-F]'K'_{t+1}+K_{t+1}RK'_{t+1}$$

igualmente la ganancia del filtro se obtendrá resolviendo el problema:

$$\min_{K_{t+1}}\ \mathrm{tr}\ P_{t+1/t+1}=\min_{K_{t+1}}\ [I-K_{t+1}H]P_{t+1/t}[I-K_{t+1}H]'+$$
$$+K_{t+1}[I-F]GQG'[I-F]'K'_{t+1}+K_{t+1}RK'_{t+1}$$

cuya condición necesaria de óptimo es:

$$-2P_{t+1/t}H'+2K_{t+1}HP_{t+1/t}H'+2K_{t+1}[I-F]GQG'[I-F]'+2K_{t+1}R=0$$

y podemos despejar K_{t+1} y simplificando queda:

$$K_{t+1}[HP_{t+1/t}H'+[I-F]GQG'[I-F]'+R]=P_{t+1/t}H'$$

y por tanto:

$$K_{t+1}=P_{t+1/t}H'[HP_{t+1/t}H'+[I-F]GQG'[I-F]'+R]^{-1}$$

en este caso las ecuaciones de la estructura recursiva nos quedarían:

predición un periodo hacia delante:

$$(1)\hat{x}_{t+1/t}=\phi\hat{x}_{t/t}+\Gamma u^{*}_{t}$$

cómputo de la matriz de varianzas-covarianzas del error de predición:

$$(2)P_{t+1/t}=\phi P_{t/t}\phi'+GQG'$$

estimación de la ganacia del filtro cuando se incorpora una nueva observación:

$$(3)K_{t+1}=P_{t+1/t}H'[HP_{t+1/t}H'+[I-F]GQG'[I-F]'+R]^{-1}$$

actualización de la predición del estado del sistema:

$$(4)\hat{x}_{t+1/t+1}=[I-K_{t+1}H]\hat{x}_{t+1/t}+K_{t+1}H(Fx_{t+1}+J\hat{u}_{t+1/t+1})+$$
$$+K_{t+1}v_{t+1}$$

cómputo de la matriz de varianzas covarianzas del error de actualización:

$$(5)P_{t+1/t+1}=[I-K_{t+1}H]P_{t+1/t}[I-K_{t+1}H]'+$$
$$+K_{t+1}[I-F]GQG'[I-F]'K'_{t+1}+K_{t+1}RK'_{t+1}$$

2.2. Modelos con control compartido.-

En numerosos fenómenos económicos las variables de estado se ven afectadas por acciones (controles) que llevan a cabo distintos agentes, sin que exista exclusividad en cuanto al control a ejercer por ninguno de ellos. Supongamos dos sujetos con capacidad de control en la economía y que brevemente continuaremos mencionando como gobierno y agentes.

Supongamos que la ecuación que gobierna el estado del sistema fuera [11]:

$$x_{t+1}=\phi x_t+\gamma_1 u_{1t}+\gamma_2 u_{2t}+w_t$$

pero que las ecuaciones de observación fueran distintas para gobierno y agentes, de modo que respectivamente pudieran formularse como:

$$z_{1t}=h_1 x_t+v_{1t}$$
$$z_{2t}=h_2 x_t+v_{2t}$$

x_t es la variable de estado relevante tanto para gobierno como para los agentes, pero las variables de observación son distintas para cada uno de ellos, z_{1t} es la correspondiente al gobierno y z_{2t} la correspondiente a los agentes.

Los controles que cada uno ejerce se establecen en un juego dinámico en que cada uno de ellos determina su estrategia óptima[12].¿Cómo elige cada uno u_{1t}, u_{2t} respectivamente?, ¿cúal es el mecanismo que hay detrás de la elección de un control en concreto por parte de cada agente?. En definitiva, dependiendo de cúal sea el mecanismo mediente el cual se fijan los controles por parte de agentes y gobierno tendremos una solucción distinta a un mismo problema[13].

Agentes y gobierno tienen distintas trayectorias deseadas para la variable de estado que se corresponden con distintas variables observadas z^*_{1t}, z^*_{2t}. Cada uno de ellos determina sus controles óptimos u^*_{1t}, u^*_{2t} fijándose en la evolución de sus respectivas variables observadas y en la expectativa que cada uno intuye acerca del control que va a llevar a cabo el otro sujeto.

Vamos a suponer que cada uno de ellos tiene una función objetivo que depende de cual sea la percepción que cada uno tiene del estado del sistema y del control aplicado. Como caso más sencillo, y para hacer analíticamente tratable el problema, vamos a suponer que esas funciones son cuadráticas e invariantes en el tiempo.

$$\left[a_1E_1(z_{1t+1})-b_1u_{1t}-c_1E_1(u_{2t})\right]^2 \quad \text{para el gobierno}$$

$$\left[a_2E_2(z_{2t+1})-b_2u_{2t}-c_2E_2(u_{1t})\right]^2 \quad \text{para los agentes}$$

son las valoraciones instantáneas que cada agente hace del sistema.

Vamos a suponer que el horizonte temporal que los agentes utilizan para tomar sus decisiones es limitado, por lo que de manera secuencial intentan resolver en cada periodo el problema de optimización:

$$\underset{u_{1t}}{\text{Max}} \left[a_1E_1(z_{1t+1})-b_1u_{1t}-c_1E_1(u_{2t})\right]^2$$

s.a $\quad z_{1t+1}=h_1x_{t+1}+v_{1t+1}$

$$x_{t+1}=\phi x_t+\gamma_1u_{1t}+\gamma_2u_{2t}+w_t \quad ;$$

$$\underset{u_{2t}}{\text{Max}} \left[a_2E_2(z_{2t+1})-b_2u_{2t}-c_2E_2(u_{1t})\right]^2$$

s.a $\quad z_{2t+1}=h_2x_{t+1}+v_{2t+1}$

$$x_{t+1}=\phi x_t+\gamma_1u_{1t}+\gamma_2u_{2t}+w_t$$

por simple sustitución de las ecuaciones de estado y de observación:

$$\underset{u_{1t}}{\text{Max}} \left[a_1(h_1(\phi x_t+\gamma_1u_{1t}+\gamma_2E_1(u_{2t}))-b_1u_{1t}-c_1E(u_{2t})\right]^2 \quad ;$$

$$\underset{u_{2t}}{\text{Max}} \left[a_2(h_2(\phi x_t+\gamma_1E_2(u_{1t})+\gamma_2u_{2t})-b_2u_{2t}-c_2E(u_{1t})\right]^2$$

trabajando únicamente en el primer problema y reagrupando términos nos queda:

$$\underset{u_{1t}}{\text{Max}} \left[a_1h_1\phi x_t+(a_1h_1\gamma_1-b_1)u_{1t}+(a_1h_1\gamma_2-c_1)E_1(u_{2t})\right]^2$$

y la condición necesaria de máximo para el gobierno nos queda:

$$\left[a_1h_1\phi x_t+(a_1h_1\gamma_1-b_1)u_{1t}+(a_1h_1\gamma_2-c_1)E_1(u_{2t})\right](a_1h_1\gamma_1-b_1)=0$$

por tanto el control óptimo u^*_{1t} satisface la ecuación:

$(a_1h_1\gamma_1-b_1)u^*_{1t}=(c_1-a_1h_1\gamma_2)E_1(u_{2t})-a_1h_1\phi x_t$

y de modo análogo para los agentes, su control óptimo satisfacerá la expresión

$(a_2h_2\gamma_2-b_2)u^*_{2t}=(c_2-a_2h_2\gamma_1)E_2(u_{1t})-a_2h_2\phi x_t$

aparecen así los controles que cada uno ejerce como una función de reacción que depende del estado del sistema y del control esperado por parte del otro agente.

Fijémonos ahora en el caso más general en el que [illegible] ecuación de estado del sistema viene dada por [illegible] expresión:

$x_{t+1}=\Phi x_t+\Gamma_1u_{1t}+\Gamma_2u_{2t}+Gw_t$

donde el número de variables de control no tiene por [illegible] ser el mismo para gobierno y agentes, ni tampoco [illegible] variables en si.

Las ecuaciones de observación son distintas [illegible] gobierno y agentes, y las describimos respectivamente como:

$z_{1t}=H_1x_t+v_{1t}$

$z_{2t}=H_2x_t+v_{2t}$

tanto gobierno como agentes fijan sus controles óptimos en función de las variables observadas por cada uno [illegible] ellos y de las expectativas de cada uno acerca [illegible] control a ejercer por el otro.

Denominamos $E_1(u_{2t})$ a la expectativa que [illegible] gobierno tiene acerca del control a efectuar por los agentes en el periodo t. De modo análogo $E_2(u_{1t})$ [illegible] correspondiente a los agentes respecto del gobierno.

Vamos a suponer que tanto gobierno como agentes tienen una distribución de probabilidad subjetiva acerca de los controles a aplicar por el otro sujeto, de manera que cada uno de ellos en el periodo t formula su predición acerca del estado del sistema en el periodo t+1 del siguiente modo [14]:

$$\hat{x}^1_{t+1/t}=\Phi\hat{x}_{t/t}+\Gamma_1 u_{1t}+\Gamma_2 E_2(u_{2t})$$
$$\hat{x}^2_{t+1/t}=\Phi\hat{x}_{t/t}+\Gamma_1 E_2(u_{1t})+\Gamma_2 u_{2t}$$

Centremos nuestra atención en el sujeto 1. Definimos por analogía con lo tratado en el cap.I el error de predición como:

$$x^1_{t+1/t}=x_{t+1}-\hat{x}^1_{t+1/t}=\Phi(x_t-\hat{x}_{t/t})+\Gamma_2(u_{2t}-E_1(u_{2t}))+Gw_t$$

llamando $u_{2t}=u_{2t}-E_1(u_{2t})$

$$x^1_{t+1/t}=\Phi x^1_{t/t}+\Gamma_2 u_{2t}+Gw_t$$

de la misma manera podemos definir la ecuación de actualización del estado del sistema:

$$\hat{x}^1_{t+1/t+1}=\hat{x}^1_{t+1/t}+K^1_{t+1}(z_{1t+1}-H_1\hat{x}^1_{t+1/t})$$

y el correspondiente error de actualización:

$$\begin{aligned}x^1_{t+1/t+1}&=x_{t+1}-\hat{x}^1_{t+1/t+1}\\&=x_{t+1}-(\hat{x}^1_{t+1}+K^1_{t+1}((H_1x_{t+1}+v_{1t+1})-H_1\hat{x}^1_{t+1/t}))\\&=(I-K^1_{t+1}H_1)x^1_{t+1/t}-K^1_{t+1}v_{1t+1}\end{aligned}$$

definiendo ahora las matrices de varianzas covarianzas [15]:

$$P^1_{t+1/t}=E(x^1_{t+1/t})(x^1_{t+1/t})'=\Phi P^1_{t/t}\Phi'+\Gamma_2 S_2\Gamma_2'+GQG'$$

con $S_2=E(u_{2t}u_{2t}')$

$$P^1_{t+1/t+1}=(I-K^1_{t+1}H_1)P^1_{t+1/t}(I-K^1_{t+1}H_1)'+K^1_{t+1}R_1K^{1\prime}_{t+1}$$

si determinamos K^1_{t+1} minimizando la traza de $P^1_{t+1/t+1}$

tenemos al igual que en el cap.I:

$K^1_{t+1}=P_{t+1/t}H_1(R_1+H_1P^1_{t+1/t}H_1')^{-1}$

las ecuaciones relevantes quedarían:

(1) $\hat{x}^1_{t+1/t}=\Phi\hat{x}^1_{t/t}+\Gamma_1u_{1t}+\Gamma_2E_1(u_{2t})$

(2) $P^1_{t+1/t}=\Phi P^1_{t/t}\Phi'+\Gamma_2S_2\Gamma_2'+GQG'$

(3) $K^1_{t+1}=P^1_{t+1/t}H_1(R_1+H_1P^1_{t+1/t}H_1')^{-1}$

(4) $\hat{x}^1_{t+1/t+1}=\hat{x}^1_{t+1/t}+K^1_{t+1}(z_{1t+1}-H_1\hat{x}^1_{t+1/t})$

(5) $P^1_{t+1/t+1}=(I-K^1_{t+1}H_1)P^1_{t+1/t}(I-K^1_{t+1}H_1)'+K^1_{t+1}R_1K^1_{t+1}$

como vemos la expectativa que (1) tiene sobre el control a aplicar por (2), se recoge tanto en $\hat{x}_{t+1/t}$ como en $P^1_{t+1/t}$. De modo similar podrían determinarse las ecuaciones del filtro de Kalman relevantes para los agentes:

(1) $\hat{x}^2_{t+1/t}=\Phi\hat{x}^2_{t/t}+\Gamma_1E_2(u_{1t})+\Gamma_2u_{2t}$

(2) $P^2_{t+1/t}=\Phi P^2_{t/t}\Phi'+\Gamma_1S_1\Gamma_1'+GQG'$

(3) $K^2_{t+1}=P^2_{t+1/t}H_2(R_2+H_2P^2_{t+1/t}H_2')^{-1}$

(4) $\hat{x}^2_{t+1/t+1}=\hat{x}^2_{t+1/t}+K^2_{t+1}(z_{2t+1}-H_2\hat{x}^2_{t+1/t})$

(5) $P^2_{t+1/t+1}=(I-K^2_{t+1}H_2)P^2_{t+1/t}(I-K^2_{t+1}H_2)'+K^2_{t+1}R_2K^2_{t+1}$

como vemos las estructuras recursivas para ambos sujetos dependen del impacto que cada uno cree que van a tener los controles llevados a cabo por el otro sujeto y del modo en que se formulan las expectativas.

NOTAS AL CAPITULO II:

[1] vamos a suponer que el tiempo evoluciona de manera discreta, y que todo tipo de variables, en lo sucesivo, toman valores en los distintos instantes de tiempo.

[2] puede relajarse este supuesto si las percepciones del gobierno y los agentes no son las mismas. En ese caso la forma funcional de de f_t puede ser distinta para cada uno de ellos.

[3] el gobierno observa en t, z_t, que es el valor de las variables proxy relativas a la predicción que en t hacen los agentes para el periodo siguiente.

[4] o simplemente aquella que el gobierno se haya planteado como objetivo. Resulta imaginable pensar que el gobierno determina unos valores objetivo óptimos para las variables de estado, de un periodo para el siguiente o siguientes, de manera que puede reconstruirse la trayectoria óptima x^*_{t+1} , $t=0,1,2,...,N-1$.

[5] este funcional podría ser cualquier medida de distancia entre x_{t+1} y x^*_{t+1}

[6] en este punto seguiremos la metodología de Sargent (1987)

[7] véase Bertsekas (1987).

[8] haciendo los supuestos adecuados acerca de la continuidad de estas funciones podemos tomar como aproximaciones el primer término de la expansión de Taylor.

[9] tomamos por analogía la notación de capitulos anteriores y además suponemos que las funciones f_t y h_t por simplicidad son invariantes con respecto al tiempo que en notación simplificada pudieran representarse por Φ y H.

[10] en esta expresión no hay error de observación para z_t^* puesto que es una relación ex-post.

[11] ahora por simplicidad vamos a considerar el caso de que x_t, u_{1t}, u_{2t} son escalares en lugar de vectores.

[12] ver Sargent (1987) pp 47.

[13] Reiko Aoki (1988) en este mismo sentido muestra un modelo muy interesante, donde dos empresas compiten para mejorar la calidad de sus respectivos productos. La variable de estado es "el estado de la técnica" y las variables de control las inversiones llevadas a cabo en

I+D en cada empresa.

[14] suponemos que el gobierno (1) conoce con exactitud la repercuasión que tiene el control de (2) sobre el estado del sistema a través de Γ_2.

[15] haciendo los supuestos adecuados acerca de la independencia de los errores en los términos de control respecto de los correspondientes al vector de estado.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITULO II.-

- Sargent, T.J. (1987) "Dynamic Macroeconomic Theory". Harvard University Press.
- Bertsekas, D.P. (1987) "Dynamic Programming". Prentice Hall.
- Aoki, Raiko (1988) "R&D rivalry over time: stochastic dynamic game approach". Department of Economics (working paper). The Ohio State University.

CAPITULO III

CAPITULO III: RENTA PERMANENTE, EXTRACCION DE SEÑALES DINAMICAS Y EXPECTATIVAS: UN EJEMPLO DE APLICACION.-

3.1. Introducción.-

En este capítulo examinamos la hipótesis de la renta permanente dentro del marco del problema de la extracción de señales dinámicas. Tendremos en cuenta la especificación de Hansen & Sargent (1982) para el modelo de renta permanente y lo relacionaremos con la técnica del filtro de Kalman para estimar y actualizar los parámetros cuando el conjunto de información incorpora nuevas observaciones de las variables observables cada periodo. Se consideran tres esquemas alternativos para la formación de expectativas. Cuando las técnicas de filtrado son aplicadas, el modo en que los agentes predicen su renta permanente cambia, pero las fórmulas de actualización permanecen iguales en los tres métodos considerados.

3.2. La hipótesis de la renta permanente.-

La hipótesis de renta permanente de Milton Friedman establece entre otras cosas:

$c_{pt}=hy_{pt}$

$E(c_{Tt})=0$ para todo t

$E(c_{Tt}c_{Ts})=0$ para todo t,s

$c_t=c_{pt}+c_{Tt}$

$E(y_{Tt})=0$ para todo t

$E(c_{Tt}y_{Ts})=0$ para todo t,s

$y_t=y_{pt}+y_{Tt}$

$E(y_{Tt}y_{Ts})=0$ para todo t,s

donde "c" denota consumo actual (observado), "y" renta, "p" permanente, "T" transitoria y "t" y "s" denotan subíndices temporales.

Por lo general en el instante de tiempo t+1, nosotros no observamos cual es el valor de y_{pt+1}, pero suponemos que los agentes tienen algún mecanismo para actualizar su percepción acerca de cúal es su renta permanente.

Si nosotros lo que queremos es una estimación de la renta permanente supondremos que lo que la renta permanente es hoy tiene que ver con lo que la renta permanente fué en el pasado. Cada periodo los agentes actualizan lo que ellos perciben como renta permanente.

Pero lo que observamos por lo general es consumo actual, que es una variable altamente relacionada con la

renta. De acuerdo con la hipótesis
permanente de Friedman podemos escribir:

$$c_t=hy_{pt}+c_{Tt}$$

donde $c_{pt}=hy_{pt}$

y ahora c_{Tt} juega el papel de un tér
que es, por hipótesis del modelo,

Esta ecuación establece el
variable observable c_t y la no ob

Este planteamiento se
extracción de señales dinámicas.
de Kalman nos suministran una
estimar la variable no observada
analizar las posibles impli
económica. Por estas razones

1) Desarrollar el marco
son las conclusiones de política

2) Resolver la estructura
A estos propósitos dedicaremos los

3.3.-Consideraciones metodológicas.-

Comencemos con una breve descripción que sirva de aproximación general a la técnica de predicción de "estimación en el espacio de los estados"[1] para este caso concreto.

Supongamos que el estado del sistema es desconocido y viene dado por la variable de estado y_{pt} que resume toda la información del pasado necesaria para predecir el futuro.

El modelo de espacio de los estados viene descrito por dos ecuaciones:

1) la ecuación de medida: que relaciona la variable de estado no conocida y_{pt} con la variable observada c_t.

2) la ecuación del sistema: que describe la evolución de la variable de estado y_{pt}.

Supongamos que conocemos cual es el valor de la variable de estado en el instante de tiempo t=0, y_{po}, y supongamos así mismo que tenemos una idea acerca de su distribución de probabilidad $P(y_{po})$. Esta representa nuestro conocimiento previo acerca de y_{po} antes de haber observado los valores de $C_t=\{c_t,c_{t-1},\ldots,c_o\}$. Si tomamos $P(y_{po})$ junto con la ecuación del sistema, podemos determinar $P(y_{pt})$. Tanto $P(y_{po})$, como $P(y_{pt})$ son distribuciones a priori.

Después de que el proceso ha sido observado a través de C_t, nosotros queremos revisar nuestra distribución a priori de y_{pt}. Podemos expresar esta hecho a través de la distribución condicional: $P(y_{pt}/C_t)$[2].

Finalmente nos encontramos con el proceso iterativo:

$$P(y_{pt}/C_t) \longrightarrow P(y_{pt+1}/C_t) \longrightarrow P(y_{pt+1}/C_{t+1})$$

donde C_t resume toda la información previa acerca de la variable observable c_t.

Si suponemos normalidad para los términos de perturbación, y que la distribución a priori $P(y_{po})$ es normal con media $\hat{y}_{po/o}$ y varianza $\sigma^2_{o/o}$, entonces las distribuciones condicionales son también normales y pueden caracterizarse por sus dos primeros momentos. Denotemos la media y la varianza de las distribuciones $P(y_{pt}/C_t)$, $P(y_{pt+1}/C_t)$ mediante $\hat{y}_{pt/t}$, $\hat{\sigma}^2_{t/t}$ e $\hat{y}_{pt+1/t}$, $\hat{\sigma}^2_{t+1/t}$, respectivamente.

De manera obvia, $\hat{y}_{pt+1/t}$ también denota la predicción hecha en el instante de tiempo t para y_{pt+1}.[3]

3.4.- Estimación de los parámetros.-

Sería de interés si pudiéramos encontrar una estimación de la variable de estado que precisara solamente tener conocimiento acerca de la variable observable c_t y que fuera óptima con arreglo a ciertos criterios. Es necesario asegurarse de que las estimaciones poseen ciertas propiedades de convergencia con respecto al verdadero valor del estado[4].

El primer problema con que nos encontramos en la ecuación de medida es que no conocemos cual es la relación existente entre c_t e y_{pt}. Hemos supuesto que la relación es constante en el tiempo, por lo tanto, la relación entre consumo y renta permanente es una proporción fija, y si supiéramos cual es la renta permanente, podríamos siempre inferir el consumo actual excepto por un término de error. Dicho de otra forma, podríamos decir que si esta relación es constante entonces nuestra observación acerca del consumo actual difiere de la correspondiente al valor inducido por y_{pt} en el término de perturbación o que cometemos errores de observación cuando observamos c_t.

Cuando tenemos información sólamente acerca de las variables de control y de la variable observable c_t, nos encontramos con un problema de estimación de gran complejidad. No sólo es necesario determinar la variable de estado sino que también se hace necesario contar con una estimación de los parámetros, y dado que el sistema tiene carácter estocástico necesitamos estimar las varianzas de los términos de perturbación. Si asumimos homoscedasticidad en los términos de perturbación, las varianzas de estos términos de perturbación permanecerán constantes a lo largo del tiempo.

Teniendo en mente todas estas consideraciones acerca de la estimación de parámetros, y tal y como señaló Friedman (1957), a lo sumo lo más que podemos observar es el consumo actual "acompañado, quizás, con algunos argumentos verbales acerca de las expectativas respecto al futuro"[5]. Milton Friedman supuso que tenía observaciones respecto del consumo y renta de las unidades consumidoras, para las cuales la relación entre c_p e y_p puede considerarse numéricamente como la misma. De estos datos de sección cruzada se estima una relación entre consumo y renta[6] mediante mínimos cuadrados ordinarios MCO.

$c=\hat{\alpha}+\beta\hat{y}$ donde $\hat{\beta}=\Sigma(c-c^*)(y-y^*)/\Sigma(y-y^*)^2$

y c^* e y^* representan valores medios.

$\hat{\alpha}=c^*-\hat{\beta}y^*$ pero:

$$\Sigma(c-c^*)(y-y^*)=\Sigma(c_p+c_T-c_p^*-c_T^*)(y_p+y_T-y_p^*-y_T^*)=$$

$$=\Sigma(c_p-c_p^*)(y_p-y_p^*)+\Sigma(c_p-c_p^*)(y_T-y_T^*)+$$

$$+\Sigma(c_T-c_T^*)(y_p-y_p^*)+\Sigma(c_T-c_T^*)(y_T-y_T^*)$$

y $c_p=hy_p$, entonces,

$$\Sigma(c-c^*)(y-y^*)=h\Sigma(y_p-y_p^*)^2+h\Sigma(y_p-y_p^*)(y_T-y_T^*)+$$

$$+(1/h)\Sigma(c_T-c_T^*)(c_p-c_p^*)+\Sigma(c_T-c_T^*)(y_T-y_T^*)$$

y de acuerdo con las hipótesis que él hizo acerca de los términos de perturbación entre los componentes permanentes y transitorios, podemos escribir:

$$\hat{\beta}=h\Sigma(y_p-y_p^*)^2/\Sigma(y-y^*)^2=h\ P_y$$

donde P_y puede interpretarse como el cociente de las varianzas entre la renta permanente y la renta total.

De manera análoga podemos escribir:

$$\hat{\alpha}=(c_p^*+c_T^*)-hP_y(y_p^*+y_T^*)$$

$$=hy_p^*+c_T-hP_yy_p^*-hP_yy_T^*$$

$$=c_T^*-hP_yy_T^*+h(1-P_y)y_p^*$$

pero la elasticidad del consumo con respecto a la renta es:

$\varepsilon_{c,y}=(dc/dy)(y/c)=\hat{\beta}\ (y/c)=hP_y(y/c)$

si $y^*_T=c^*_T=0$ entonces:

$(y^*/c^*)=(1/h)$ y ademas $\varepsilon_{c,y}=P_y$

donde P_y puede interpretarse como la varianza de la renta permanente con respecto a la renta actual.

Supongamos por el momento que no tenemos términos de control. El problema de estimación consiste en determinar el valor de la variable y_{pt} en cada momento del tiempo, y al mismo tiempo dar estimaciones del parámetro h y de las varianzas de los términos de perturbación.

Existe un pequeño número de referencias que abordan este problema[7], pero estan disponibles tres categorias de estimadores:

1) funciones ventana.

2) acotamiento del término de error.

3) estimación adaptativa.

Las funciones ventana restringen los filtros de Kalman en el sentido de corregir las predicciones utilizando sólamente la información más reciente. Las técnicas de acotamiento evitan que la ganancia de Kalman se aproxime a cero de manera que la nueva información resultaría ignorada. La técnica de estimación adaptativa intenta estimar directamente la ecuación del sistema. Veamos cual es el resultado de emplear este último procedimiento en nuestro problema particular.

Tal y como hemos visto en el modelo de Friedman tenemos la oportunidad de hacer una estimación del parámetro h utilizando sólamente las variables observables y_t, c_t, donde c_t, y_t son los valores corrientes observados para el consumo y la renta respectivamente.

3.5.- El modelo.-

Supongamos el modelo de renta permanente tal y como consideran Hansen y Sargent (1982). Queremos explicar como se forma la renta permanente. Nosotros observamos la variable consumo.

$$c_t=\beta y_{pt}+a_t$$

donde c_t es consumo en t, y_{pt} renta permanente en t, y a_t consumo transitorio.

Suponemos que:

$$y_{pt}=(\delta/1+\delta)\left[A_t+\sum_{j=0}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_t y_{t+j}\right]$$

donde A_t representa activos en manos de los agentes en el instante de tiempo t, y por tanto:

$$y_{pt+1}=(\delta/1+\delta)\left[A_{t+1}+\sum_{j=0}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_{t+1}y_{t+j+1}\right],$$

y restando:

$$y_{pt+1}=y_{pt}+(\delta/1+\delta)\left[(A_{t+1}-A_t)+\sum_{j=0}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_{t+1}y_{t+j+1}-\right.$$

$$(1)\qquad \left.-\sum_{j=0}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_t y_{t+j}\right]$$

nos encontramos con una ecuación de estado como en el problema de extracción de señales dinámicas donde (1) es la ecuación de estado y:

$$(2)\qquad c_t=\beta y_{pt}+a_t=\beta\left[(\delta/1+\delta)\left[A_t+\sum_{j=0}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_t y_{t+j}\right]\right]+a_t$$

es la ecuación de observación.

El económetra observa c_t y A_t, pero los agentes forman sus expectativas en el instante de tiempo t acerca de su renta futura, y esos mecanismos de formación de expectativas no son conocidos por el económetra.

Supongamos que el mecanismo con que cuentan los agentes para la formación de expectativas es simplemente:

$E_t y_{t+j} = y^*$ para todo t,j

entonces nuestras ecuaciones de estado y de observación se convierten en:

$$(3) \quad y_{pt+1} = y_{pt} + (\delta/1+\delta)[A_{t+1} - A_t]$$

$$(4) \quad c_t = \beta[(\delta/1+\delta)[A_t + y^* \sum_{j=o}^{\infty} (1+\delta)^{-j}]] + a_t$$

teniendo en cuenta que $\sum_{j=o}^{\infty} (1+\delta)^{-j} = (1+\delta/\delta)$

entonces:

$$(5) \quad y_{pt+1} = y_{pt} + (\delta/1+\delta)[A_{t+1} - A_t]$$

$$(6) \quad c_t = \beta[(\delta/1+\delta)[A_t + y^*(1+\delta/\delta)] + a_t$$

$$= \beta(\delta/1+\delta)A_t + \beta y^* + a_t$$

donde a_t se supone distribuido normalmente con media 0 y varianza σ_a^2.

Finalmente podemos escribir estas dos ecuaciones como:

(7) $y_{pt+1}=y_{pt}+(\delta/1+\delta)[A_{t+1}-A_t]$

(8) $c_t=\beta(\delta/1+\delta)A_t+\beta y^*+a_t=\beta(y^*+(\delta/1+\delta)A_t)+a_t$

La ecuación (7) nos dice que la renta permanente este periodo es lo que la renta permanente fué en el periodo pasado mas el incremento en los activos multiplicado por un factor de descuento.

Como vemos en este caso particular tenemos el siguiente esquema de filtro de Kalman:

a) la ecuación de estado no presenta término de perturbación.

b) sólamente la ecuación de observación tiene término de perturbación.

En general la ecuación del filtro de Kalman viene dada por[9]:

(9) $y_t=x_t\theta_t+e_t$ $\qquad\qquad e_t\,iidN(0,R)$

(10) $\theta_{t+1}=F\theta_t+Gv_t+\Gamma n_t$ $\qquad n_t\,iidN(0,Q)$

donde v_t representa los términos de control y e_t, n_t son perturbaciones estocásticas.

En nuestro caso nos encontramos con los siguientes términos:

$x_t=A_t$, $e_t=a_t$, $y_t=c_t$, $\theta_{t+1}=y_{pt+1}$, $F=1$, $v_t=[A_{t+1}-A_t]$

$n_t=0$, $\Gamma=0$

y entonces podemos establecer el paralelismo entre las ecuaciones:

$(11)\ y_{pt+1}=y_{pt}+(\delta/1+\delta)[A_{t+1}-A_t]$ —— $\theta_{t+1}=F\theta_t+Gv_t+\Gamma n_t$

$(12)\ c_t=\beta[(\delta/1+\delta)A_t+y^*]+a_t$ —— $y_t=x_t\theta_t+e_t$

en este paralelismo identificamos:

$\theta_{t+1}=y_{pt+1}$, $F=1$, $y_t=c_t$, $\theta_t=y_{pt}$, n_t no está presente $G=(\delta/1+\delta)$, $\Gamma=0$, $x_t=\beta$, $v_t=(A_{t+1}-A_t)$ es la variable de control,

$y_{pt}=[(\delta/1+\delta)A_t+y^*]$, $a_t=e_t$

En este planteamiento particular, de acuerdo con la clasificación de Bennett nos encontramos con la categoría de problema correspondiente al observador del filtro de Kalman. Este problema se denomina determinístico debido a que $\Gamma=0$, es decir no tenemos ningún tipo de ruido en la ecuación de los parámetros o ecuación del sistema.

La estimación del modelo en el instante de tiempo t, basada en la información disponible en el instante t-1 viene dada por las ecuaciones:

-extrapolación de parámetros:

$$\hat{\theta}_{t/t-1}=\hat{\theta}_{t-1}+Gv_t$$

-extrapolación de la varianza de los parámetros:

$$P_{t/t-1}=FP_{t-1}F'+\Gamma Q\Gamma'$$

la estimación del modelo en el instante t+1:

-actualización de parámetros:

$$\hat{\theta}_t=\hat{\theta}_{t/t-1}-K_t(x_t\hat{\theta}_{t/t-1}-y_t)$$

-actualización de la varianza de los parámetros:

$$P_t=P_{t/t-1}-K_t x'_t P_{t/t-1}$$

-ganancia de Kalman:

$$K_t=P_{t/t-1}x_t[R+x'_t P_{t/t-1}x_t]^{-1}$$

en nuestro caso particular tenemos $\Gamma=0$, $R=\sigma_a^2$. Si traducimos estas ecuaciones a nuestro modelo tenemos:

(13) $\hat{y}_{pt/t-1}=\hat{y}_{pt-1}+(\delta/1+\delta)[A_{t+1}-A_t]$

(14) $P_{t/t-1}=P_{t-1}$

(15) $\hat{y}_{pt}=\hat{y}_{pt/t-1}-K_t(\beta\hat{y}_{pt/t-1}-c_t)$

(16) $P_t=P_{t/t}-K_t\beta P_{t/t-1}$

(17) $K_t=P_{t/t-1}\beta[\sigma_a^2+\beta^2 P_{t/t-1}]^{-1}$

podríamos obtener el siguiente diagrama de flujo:

1) tomar una estimación inicial $\hat{y}_{po}$(podría ser y_o por ejemplo)

2) computar $\hat{y}_{p1/o}=\hat{y}_{po}+(\delta/1+\delta)[A_1-A_o]$ (A_o está dado)

3) tomar $P_{1/o}=P_o$ (P_o puede ser un número muy grande si se supone una gran ignorancia acerca de y_{po}).

4) calcular la ganancia de Kalman a través de:

$$K_1=P_{1/o}\beta[\sigma_a^2+\beta^2 P_{1/o}]^{-1}$$

5) actualizar las estimaciones de los parámetros cuando la observación del consumo está disponible:

$$\hat{y}_{p1}=\hat{y}_{p1/o}-K_1(\beta\hat{y}_{p1/o}-c_1)$$

6) actualizar la estimación para la varianza de los parámetros:

$$P_1=P_{1/c}-K_1\beta P_{1/o}$$

en el segundo periodo seguiríamos las siguientes etapas

$$\boxed{\hat{y}_{p1}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\hat{y}_{p2/1}=\hat{y}_{p1}+(\delta/1+\delta)[A_2-A_1]}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{P_{2/1}=P_1}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{K_2=P_{2/1}\beta(\sigma_a^2+\beta^2P_{2/1})^{-1}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\hat{y}_{p2}=\hat{y}_{p2/1}-K_2(\beta\hat{y}_{p2/1}-c_2)}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{P_2=P_{2/1}-K_2\beta P_{2/1}}$$

utilizando esta estructura recursiva podríamos recomponer la serie de renta permanente.

Resaltemos que en este modelo particular los únicos parámetros que tenemos que estimar son: δ,β,σ_a^2. δ Generalmente viene dado exógenamente como un factor de descuento (son valores razonables 0.90, 0.95). σ_a^2 y β pueden estimarse mediante MCO o incluso mediante estimación recursiva en la ecuación:

$$c_t=\beta(\delta/1+\delta)A_t+\beta y^*+a_t$$

la estimación recursiva resulta ser el método más razonable dado que en el instante de tiempo por ejemplo t=1, solamente tenemos una observación, en t=2 dos observaciones y así sucesivamente. De este modo podemos estimar mediante mínimos cuadrados recursivos (MCR) los parámetros β y σ_a^2 del siguiente modo.

Consideremos por el momento la ecuación:

$$c_t=\beta(\delta/1+\delta)A_t+\beta y^*+a_t$$

en desviaciones con respecto a la media. Redefinimos $\beta^*=\beta(\delta+1+\delta)$ donde δ es un factor de descuento. La estimación MCO de β^* cuando tenemos información hasta el instante de tiempo t-1 viene dada por:

$$\beta^*_{t-1}=\sum_{i=o}^{t-1} c_i A_i \Big/ \sum_{i=o}^{t-1} A_i^2 = P^*_{t-1} b_{t-1}, \text{ donde:}$$

$$P^*_{t-1}=\left(\sum_{i=o}^{t-1} A_i^2\right)^{-1} \quad \text{y} \quad b_{t-1}=\sum_{i=o}^{t-1} c_i A_i$$

supongamos que tenemos observaciones disponibles de A_t y c_t,
tenemos:

$$b_t=b_{t-1}+c_t A_t$$

$$P^*_t=\left[P^{*-1}_{t-1}+A_t^2\right]^{-1}$$

como resultado final[10] tenemos:

$$\hat{\beta}^*_t=\hat{\beta}^*_{t-1}-K^*_t(A_t\hat{\beta}^*_{t-1}-c_t)$$

$$P^*_t=P^*_{t-1}-K_t A_t P^*_{t-1}$$

$$K^*_t=P^*_{t-1}A_t[1+A_t^2 P^*_{t-1}]^{-1}$$

introduzcamos ahora otro mecanismo de formación de expectativas. Tenemos dos ecuaciones fundamentales (1) y

(2). Supongamos ahora que los agentes tienen el siguiente mecanismo de formación de expectativas:

(18) $E_{t+k}y_{t+j}=(1+\alpha_{j-k})E_t y_{t+j}$, $j=1,2,\dots$, $k=0,1,2,\dots,j$

(19) $E_t y_{t+j}=(1+\gamma_j)y_t$, $j=1,2,\dots$

resaltemos que la ecuación (1) incluía las expresiones:

$$\sum_{j=o}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_{t+1}y_{t+j+1}=\sum_{j=o}^{n}(1+\delta)^{-j}E_{t+1}y_{t+j+1}+\sum_{j=n+1}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_{t+1}y_{t+j+1}$$

$$\sum_{j=o}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_t\ y_{t+j}=\sum_{j=o}^{n}(1+\delta)^{-j}E_t\ y_{t+j}+\sum_{j=n+1}^{\infty}(1+\delta)^{-j}E_t\ y_{t+j}$$

si suponemos que los últimos sumandos de estas expresiones son comparativamente muy pequeños y recordando que:

$E_{t+1}y_{t+j}=(1+\alpha_1)E_t y_{t+j}$, podemos escribir:

$$\sum_{j=o}^{n}(1+\delta)^{-j}[E_{t+1}y_{t+j}-E_t y_{t+j}]=$$

$$=\sum_{j=o}^{n}(1+\delta)^{-j}[(1+\alpha_1)-1]E_t y_{t+j}=\alpha_1\sum_{j=o}^{n}(1+\delta)^{-j}\prod_{i=1}^{j}(1+\gamma_i)y_t$$

finalmente podemos escribir las ecuaciones (1) y (2) como:

(20) $y_{pt+1}=y_{pt}+(\delta/1+\delta)[(A_{t+1}-A_t)+\alpha_1\sum_{j=o}^{n}(1+\delta)^{-j}\prod_{i=1}^{j}(1+\gamma_i)y_t]$

(21) $c_t=\beta[(\delta/1+\delta)(A_t+\sum_{j=o}^{n}(1+\delta)^{-j}\prod_{i=1}^{j}(1+\gamma_i)y_t]+a_t$

supongamos ahora por simplicidad que

$\gamma_i=\gamma, i=1,2,3,\ldots,$entonces tenemos:

$$(22)y_{pt+1}=y_{pt}+(\delta/1+\delta)[(A_{t+1}-A_t)+\alpha_1\sum_{j=o}^{n}(1+\gamma/1+\delta)^j y_t]$$

$$(23)c_t=\beta[(\delta/1+\delta)(A_t+\sum_{j=o}^{n}(1+\gamma/1+\delta)^j y_t)]+a_t$$

si además suponemos que n tiende a infinito:

$$\sum_{j=o}^{n}(1+\gamma/1+\delta)^j=(1+\delta/\delta-\gamma)$$

y $\gamma<\delta$ para tener una solucción estable, nuestras ecuaciones de estado y de observación se convierten en:

$$(24)\ y_{pt+1}=y_{pt}+(\delta/1+\delta)[(A_{t+1}-A_t)+\alpha_1(1+\delta/\delta-\gamma)y_t]$$

$$(25)\ c_t=\beta[(\delta/1+\delta)(A_t+(1+\delta/1+\gamma)y_t)]+a_t$$

si comparamos este modelo con las ecuaciones del filtro de Kalman:

$$(26)\ y_t=x_t\theta_t+e_t\ ,\ e_t\ \text{iid } N(0,R)$$

$$(27)\ \theta_{t+1}=F\theta_t+Gv_t+\Gamma n_t,\ n_t\ \text{iid } N(0,Q)$$

e igualamos ahora coeficientes:

$\theta_t=y_{pt}$, $y_t=c_t$, $x_t=\beta$, $a_t=e_t$, $G=((\delta/1+\delta),\alpha_1\delta/(\delta-\gamma))$, $v_t=((A_{t+1}-A_t),y_t)'$, $\Gamma=0$ podríamos esribir las ecuaciones del filtro de Kalman como:

(28) $\hat{y}_{pt/t-1}=\hat{y}_{pt-1}+(\delta/1+\delta)[A_{t+1}-A_t]+(\alpha_1\delta/(\delta-\gamma))y_t$

(29) $P_{t/t-1}=P_{t-1}$

(30) $\hat{y}_{pt}=y_{pt/t-1}-K_t(\beta\hat{y}_{pt/t-1}-c_t)$

(31) $P_t=P_{t/t}-K_t\beta P_{t/t-1}$

(32) $K_t=P_{t/t-1}\beta[\sigma_a^2+\beta^2P_{t/t-1}]^{-1}$

como podemos observar la única diferencia con respecto al modelo visto anteriormente es que ahora la variable de control y_t interviene a la hora de actualizar la predicción en (28). β puede calcularse del mismo modo adaptativo visto anteriormente.

Finalmente consideremos el caso de predicción perfecta, es decir las expectativas acerca de la renta futura se generan de tal modo que los agentes predicen perfectamente cúal va a ser la renta futura:

$E_ty_{t+j}=y_{t+j}$ para todo t,j, j>t

en este caso las ecuaciones correspondientes a la renta permanente y de observación se convierten en:

$$y_{pt}=(\delta/1+\delta)[A_t+\sum_{j=o}^{\infty}(1+\delta)^{-j}y_{t+j}]$$

$$c_t=\beta[(\delta/1+\delta)\ [A_t+\sum_{j=o}^{\infty}(1+\delta)^{-j}y_{t+j}]]+a_t$$

y si consideramos la ecuación de estado tenemos:

$$y_{pt+1}=y_{pt}+(\delta/1+\delta)[(A_{t+1}-A_t)+\sum_{j=o}^{\infty}(1+\delta)^{-j}(y_{t+j+1}-y_{t+j})]$$

y esta última suma entre corchetes puede expresarse como:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1+\delta)^{-j}\ (y_{t+j+1}-y_{t+j})=\sum_{j=1}^{\infty}\ y_{t+j}(\delta/(1+\delta)^{j})-y_t=B_t$$

y entonces:

(33) $y_{pt+1}=y_{pt}+(\delta/1+\delta)[(A_{t+1}-A_t)+B_t]$

(34) $c_t=\beta y_{pt}+a_t$

si comparamos esta estructura con (9) y (10) tenemos ahora las mismas equivalencias en los parámetros que anteriormente excepto para v_t y G que ahora pueden identificarse como:

$v_t=[(A_{t+1}-A_t),B_t]'$, $G=[(\delta/1+\delta),(\delta/1+\delta)]$ y podemos escribir las ecuaciones recursivas como:

- extrapolación de parámetros:

(35) $\hat{y}_{pt/t-1}=\hat{y}_{pt/t}+(\delta/1+\delta)[A_{t+1}-A_t]+(\delta/1+\delta)B_t$

- extrapolación de la covarianza de los parámetros:

(36) $P_{t/t-1}=P_{t-1}$

- actualización de parámetros:

(37) $\hat{y}_{pt}=\hat{y}_{pt/t-1}-K_t(\beta\hat{y}_{pt/t-1}-c_t)$

- actualización de covarianzas:

(38) $P_t=P_{t/t}-K_t\beta P_{t/t-1}$

- ganancia de Kalman:

(39) $K_t=P_{t/t-1}\beta[\sigma_a^2+\beta^2P_{t/t-1}]^{-1}$

de nuevo la única diferencia aparece cuando los agentes predicen su renta permanente, donde ahora incluyen en la predicción el término adicional

3.6.- Un ejemplo de aplicación.-

Se tomaron datos correspondientes a la economía española para el periodo 1964-1965[11] relativos a la renta nacional el consumo y los activos liquidos en poder del público en términos reales (en la tabla III.1 aparecen los datos correspondientes) Con estos datos se obtuvo una estimación por MCO de la ecuación (6). Tomando como valor de $\delta=0.95$ se estimaron los valores numéricos de las ecuaciones (13) a (17) correspondientes a la estructura recursiva del filtro de Kalman. Para ello partimos como valor inicial de la renta permanente la renta correspondiente a 1964. y para considerar un valor elevado de la matriz de varianzas-covarianzas tomamos el valor correspondiente a la varianza de la renta nacional para la muestra considerada. Los resultados de la estimación de la ecuación (6) se muestran en la tabla III.2 y los correspondientes a las ecuaciones (13) a (17) en la III.3, en esta última tabla hemos incluido el cociente de la renta permanente calculada sobre la renta corriente para cada periodo. En la tabla III.4 y utilizando los mismos datos del ejemplo anterior se obtuvieron las ecuaciones (28) a (32) correspondientes a la estructura recursiva de Kalman para la segunda de las hipótesis de formulación de expectativas por parte de los agentes. Los valores que arbitrariamente hemos dado los parámetros α y γ son respectivamente 0.05 y 0.04 en este ejemplo. Como podemos apreciar en ambos ejercicios la ganancia de Kalman disminuye rápidamente, tomando valores mas o menos estables en torno al décimo periodo. Si comparamos los valores obtenidos para la renta permanente con ambos mecanismos de formación de expectativas vemos como el segundo de ellos nos proporciona valores mas próximos a la renta corriente para cada periodo, lo cual no es de extrañar puesto que este segundo mecanismo incorpora en la ecuación de actualización el valor correspondiente a la renta corriente del periodo.

TABLA III.1

Año	Y_t	C_t	A_t
1964	1791.8	1224.7	781.5
1965	1905.3	1309.8	845.4
1966	2040.0	1400.3	893.1
1967	2127.0	1483.9	958.3
1968	2272.0	1572.2	1078.0
1969	2475.2	1681.6	1250.3
1970	2576.2	1751.9	1350.6
1971	2703.8	1838.5	1554.6
1972	2923.9	1991.3	1760.7
1973	3153.6	2154.4	1966.6
1974	3333.9	2262.8	2025.2
1975	3370.5	2317.2	2068.8
1976	3472.0	2425.1	2109.0
1977	3586.5	2486.3	2037.7
1978	3650.9	2519.8	2029.5
1979	3657.7	2549.6	2056.9
1980	3714.2	2582.5	2111.3
1981	3730.3	2559.7	2175.2
1982	3763.5	2576.7	2231.4
1983	3842.6	2595.6	2315.4
1984	3921.2	2565.9	2347.5
1985	3999.6	2604.	2434.8

TABLA III.2

análisis de regresión para el modelo:

$$C_t=\beta\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)A_t+\beta y^*+a_t$$

parámetro	estimación	error estandard	valor de t
βy^*	604.525	79.9485	7.56143
$\beta\left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)$	0.865272	0.0429794	20.1322
$\hat{var}(a_t)$	98.6605	R^2=95.52%	

TABLA III.3

estimaciones de la renta permanente (1964-1985)

valor de δ =0.95

$\hat{var}(a_t)$ =9866.05

$var(y_t)=P_{o/o}$ =505292.2

valor de β =1.776084

$y_{p_{i/i-1}}$	$P_{i/i-1}$	K_i	y_{p_i}	P_i	y_p/y_i
			1791.8	505292.3	
1913.2	505292.3	0.5596	744.7	3108.4	0.3909
835.3	3108.4	0.2806	811.9	1559.0	0.3980
935.8	1559.0	0.1873	902.4	1040.4	0.4243
1129.9	1040.4	0.1405	1068.8	780.7	0.4704
1396.2	780.7	0.1125	1306.4	624.8	0.5278
1497.0	624.8	0.0937	1412.0	520.7	0.5481
1799.6	520.7	0.0804	1690.5	446.4	0.6252
2082.1	446.4	0.0703	1962.0	390.7	0.6710
2353.2	390.7	0.0625	2223.6	347.3	0.7061
2338.0	347.3	0.0563	2231.7	312.6	0.6694
2314.5	312.6	0.0512	2222.7	284.2	0.6595
2299.1	284.2	0.0469	2221.4	260.5	0.6398
2085.9	260.5	0.0433	2033.1	240.5	0.5669
2017.6	240.5	0.0402	1974.8	223.3	0.5409
2026.9	223.3	0.0375	1987.5	208.4	0.5434
2090.8	208.4	0.0352	2051.0	195.4	0.5522
2172.4	195.4	0.0331	2129.4	183.9	0.5708
2236.2	283.9	0.0313	2192.6	173.7	0.5826
2352.2	173.7	0.0296	2305.3	164.6	0.5999
2366.3	164.6	0.0281	2320.3	156.3	0.5917
2486.1	156.3	0.0268	2437.6	148.9	0.6095

TABLA III.4

estimaciones de la renta permanente (1964-1985)

valor de δ =0.95 valor de α =0.05

$\hat{var}(a_t)$ =9866.05 valor de γ =0.04

$var(y_t)=P_{o/o}$ =505292.2

valor de β =1.776084

$y_{p_{i/i-1}}$	$P_{i/i-1}$	K_i	y_{p_i}	P_i	y_p/y_i
			1791.8	505292.3	
2006.7	505292.3	0.5596	745.3	3108.4	0.3912
935.4	3108.4	0.2806	862.1	1559.0	0.4226
1092.5	1559.0	0.1873	1007.0	1040.4	0.4734
1345.4	1040.4	0.1405	1230.6	780.7	0.5416
1676.5	780.7	0.1125	1530.8	624.8	0.6184
1850.5	624.8	0.0937	170[illegible].7	520.7	0.6625
2228.7	520.7	0.0804	2058.4	446.4	0.7613
2591.1	446.4	0.0703	2407.5	390.7	0.8234
2951.3	390.7	0.0625	2758.3	347.3	0.8747
3034.3	347.3	0.0563	2858.3	312.6	0.8574
3115.2	312.6	0.0512	2950.7	284.2	0.8755
3203.0	284.2	0.0469	3050.0	260.5	0.8784
3095.7	260.5	0.0433	2965.3	240.5	0.8268
3137.0	240.5	0.0402	3014.3	223.3	0.8256
3256.9	223.3	0.0375	3135.5	208.4	0.8572
3429.8	208.4	0.0352	3306.4	195.4	0.8902
3621.7	195.4	0.0331	3493.5	183.9	0.9364
3795.0	183.9	0.0313	3664.8	173.7	0.9738
4020.8	137.7	0.0296	3886.2	164.6	1.0113
4147.7	164.6	0.0281	4012.6	156.2	1.0233
4393.2	156.3	0.0268	4244.3	148.9	1.06120

NOTAS AL CAPITULO III.-

[1] Un tratamiento completo de este tema puede encontrarse en Abraham (1983).

[2] tambien llamada distribución posterior.

[3] de modo similar $\hat{\sigma}^2_{t+1/t}$, este punto resultará aclarado posteriormente.

[4] Este aspecto se discute en Maghmoud (1984).

[5] Friedman (1957) cap 3. pp 20.

[6] Por simplicidad seguimos la notación de Friedman (1957) y omitimos el subíndice temporal t.

[7] Ver Bennett (1979) pp 358.

[9] ver Bennett para este punto.

[10] deducida originalmente por Plackett(1950) BIOMETRICA " On some theorems in least squares" vol.37,pp 149-152.

[11] ver Baiges et als (1987)

NOTAS AL CAPITULO III.-

[1] Un tratamiento completo de este tema puede encontrarse en Abraham (1983).

[2] tambien llamada distribución posterior.

[3] de modo similar $\hat{\sigma}^2_{t+1/t}$, este punto resultará aclarado posteriormente.

[4] Este aspecto se discute en Maghmoud (1984).

[5] Friedman (1957) cap 3. pp 20.

[6] Por simplicidad seguimos la notación de Friedman (1957) y omitimos el subíndice temporal t.

[7] Ver Bennett (1979) pp 358.

[9] ver Bennett para este punto.

[10] deducida originalmente por Plackett(1950) BIOMETRICA " On some theorems in least squares" vol.37,pp 149-152.

[11] ver Baiges et als (1987)

BIBLIOGRAFIA CAPITULO III.-

- Abraham, Boras (1983) Statistical Models for Forecasting. Willey.

- Mehra, R.K. (1979) Kalman filters and their application to forecasting. TIMS studies in the management sciences, vol 12, Forecasting. North Holland, Amsterdam, pp 75-94.

- Ogata, K. (1987) Discrete Time Control Systems. Prentice Hall.

- Maghmoud, M.S., Singh, M.G. (1984). Discrete Systems Analysis Control and Optimization. Communications and Control Engeneering Series. Springer-Verlag.

- Friedman, M. (1957) A theory of the consumption function. Princeton University Press.

- Bennett, R.J. (1979) Spatial Time Series Analysis Forecasting Control. Pion Ed.

- Hansen, L.P., Sargent, T.J. (1982). Instrumental variables procedures for estimating linear rational expectation models. Journal of Monetary Economics vol 9, pp 263-296

- Baiges, J. , Molinas, C. , Sebastian, M.
economía española 1964-1985: datos, fuentes y
Ministerio de Economía y Hacienda, Instituto
Fiscales.

CAPITULO IV

CAPITULO IV.- APLICACION DE LAS TECNICAS DE EXTRACCION DE SEÑALES DINAMICAS A OTROS MODELOS ECONOMICOS.-

4.1.- Un modelo macroeconómico sencillo de determinación de la renta.-

En el presente capítulo vamos a mostrar un ejemplo de aplicación de la metodología del filtro de Kalman a un modelo macroeconómico de determinación de la renta. Por simplicidad supondremos una economía cerrada integrada por tres tipos de agentes: economías domésticas, empresas y gobierno. Las economías domésticas llevan a cabo decisiones respecto al consumo, las empresas respecto de la inversión, y finalmente el gobierno lleva a cabo la política económica a través del manejo del gasto público, la cantidad de dinero en circulación, y determinando el nivel de endeudamiento con el sector privado.

Supongamos en el siguiente modelo[1], cuyas variables estan expresadas en datos anuales, que las funciones de consumo e inversión son las siguientes:

$C_t=c(1-u)Y_t \qquad 0<c'<1 \ ; \ 0<u<1$

$I_t=iY_t+\gamma r_t \qquad i>0 \ ; \qquad \gamma<0$

con:

Y_t= renta real en el periodo t

I_t= inversión real en el periodo t

C_t= consumo real en el periodo t

r_t= tipo de interés en el periodo t

u= tipo impositivo proporcional sobre la renta en el periodo t

Estas ecuaciones de comportamiento expresan el consumo como una función creciente de la renta disponible para el gasto por parte de las familias y la inversión positivamente relacionada con la renta en el periodo (componente acelerador) e inversamente con el tipo de interés en el periodo.

Igualando la producción del periodo al gasto agregado de los agentes (que debe incluir al gasto del gobierno o gasto público) tenemos la condición de equilibrio en el mercado de bienes. A la representación gráfica de las combinaciones de tipo de interés y renta nacional capeces de equilibrar el mercado de bienes la denominamos curva IS y su expresión analítica vendría dada por la ecuación:

$$Y_t=c(1-u)Y_t+iY_t+\gamma r_t+G_t$$
$$Y_t(1-c(1-u)-i)=\gamma r_t+G_t$$

suponiendo que $(1-c(1-u)-i)>0$ nos aseguramos que la pendiente de la curva IS es negativa.

Del mismo modo, podemos suponer que la demanda de dinero en términos reales en un determinado periodo t es una función positivamente relacionada con la renta de ese mismo periodo (demanda por motivo de transacción) pero inversamente correlacionada con el tipo de interés real del periodo (demanda por motivo de especulación). Si, por simplicidad, suponemos que la demanda de dinero en términos reales es lineal en estos componentes podemos escribir la condición de equilibrio del mercado monetario mediante la igualdad entre demanda y oferta de dinero en términos reales.

La curva LM nos representaría el lugar geométrico de las combinaciones de renta del periodo y tipo de interés capaces de equilibrar dicho mercado monetario y que vendría dada por la expresión:

$M_t=\alpha Y_t+\beta r_t \qquad \alpha>0 \quad , \qquad \beta<0$

con M_t igual a la oferta real de dinero en el periodo t.

En términos matriciales podríamos escribir ambas ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(1-c(1-u)-i)Y_t-\gamma r_t&=G_t\\ \alpha Y_t+\beta r_t \qquad &=M_t\end{aligned}$$

Diferenciando ambas ecuaciones completamente:

$$\begin{bmatrix}(1-c(1-u)-i) & -\gamma\\ \alpha & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}@Y_t\\ @r_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}@G_t\\ @M_t\end{bmatrix}$$

Resolviendo el anterior sistema para $@y_t$, $@r_t$ por la regla de Kramer y llamando:

$\Omega=(1-c(1-u)-i)\beta+\gamma\alpha)<0$, tenemos:

$$@Y_t=\frac{\begin{bmatrix}@G_t & -\gamma\\ @M_t & \beta\end{bmatrix}}{\Omega}=\frac{\beta @G_t+\gamma @M_t}{\Omega}$$

$$
@r_t = \frac{\begin{bmatrix} (1-c(1-u)-i) & @G_t \\ \alpha & @M_t \end{bmatrix}}{\Omega} = \frac{(1-c(1-u)-i)@M_t - \alpha @G_t}{\Omega}
$$

con lo que:

$$
\frac{@Y_t}{@G_t} = \frac{\beta}{\Omega} > 0
$$

$$
\frac{@r_t}{@G_t} = \frac{-\alpha}{\Omega} > 0
$$

los efectos de la política fiscal sobre la renta y el tipo de interés serían los mostrados arriba.

Del mismo modo el signo de los coeficientes:

$$
\frac{@Y_t}{@M_t} = \frac{\gamma}{\Omega} > 0
$$

$$
\frac{@r_t}{@M_t} = \frac{(1-c(1-u)-i)}{\Omega} < 0
$$

nos indicarán los efectos de la política monetaria sobre esas variables.

Supongamos en nuestro modelo que el gobierno esta interesado en analizar cual es el comportamiento de la variables renta y_t y tipo de interés r_t que considera estratégicas para el control de la economía. Sin embargo el conocimiento que el gobierno tiene de estas variables se efectua a traves de la relación que existe entre las variables fiscales y monetarias que queda resumida en las curvas IS y LM que habíamos escrito más arriba:

$$(1-c(1-u)-i)Y_t - \gamma r_t = G_t \qquad \text{ecuación de la curva IS}$$
$$\alpha Y_t + \beta r_t = M_t \qquad \text{ecuación de la curva LM}$$

Estas ecuaciones de las curvas IS y LM pueden considerarse como ecuaciones de observación en el modelo del filtro de Kalman sin mas que añadir ... correspondientes términos de perturbación ... respectivas propiedades descritas en ... anteriores:

$$\begin{bmatrix} G_t \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-c(1-u)-i) & -\gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ r_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}$$

En cuanto a la ecuación de estado que ... dinámica de las variables Y_t, r_t, podríamos ... distintas formulaciones a priori cada una ... reflejo de la teoría económica subyacente ... sustenta. Por comodidad vamos a suponer en ... la siguiente formulación:

$$Y_t = aY_{t-1} - br_{t-1} \qquad a>0, \quad b>0$$
$$r_t = cY_{t-1} + dr_{t-1} \qquad c>0, \quad d>0$$

En la primera de las ecuaciones la renta ... periodo t presenta una componente sistemática ...

relaciona la renta actual con la renta en el periodo anterior y el segundo sumando podría interpretarse como un efecto enfriamiento de la economía basado en la hipótesis de que el componente de inversión en la renta del periodo actual será altamente sensible al comportamiento del tipo de interés real en el periodo anterior, que actua como una señal para los inversores.

En la segunda ecuación el tipo de interés del periodo se relaciona positivamente tanto con la renta en el periodo anterior como con el tipo de interés.

Además de las componentes sistemáticas recogidas en las dos ecuaciones anteriores, para explicar la evolución temporal de estas dos variables de estado podemos incluir el efecto de determinadas variables de control. En el ámbito de este modelo las únicas variables de control introducidas serían precisamente el gasto público y la cantidad de dinero en circulación. Estos efectos quedarían recogidos en los coeficientes de la matriz Γ o matriz de control. Estos coeficientes indicarán el efecto sobre cada una de las variables de estado de una modificación unitaria en las variables de control. Para conocer la magnitud de estos coeficientes tendríamos que recurrir a la estática comparativa que hemos efectuado lineas arriba. Si añadiéramos a las dos ecuaciones de las variables Y_t, r_t los correspondientes términos de perturbación, tendríamos la siguiente formulación de las ecuaciones de estado del sistema de

Kalman:

$$\begin{bmatrix} Y_{t+1} \\ r_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ r_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} @Y_t/@G_t & @Y_t/@M_t \\ @r_t/@G_t & @r_t/@M_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_t \\ M_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

y sustituyendo los valores de estas derivadas parciales por las expresiones obtenidas mediante estática comparativa en el modelo IS-LM:

$$\begin{bmatrix} Y_{t+1} \\ r_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ r_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta/\Omega & \gamma/\Omega \\ -\alpha/\Omega & 1-c(1-u)-i/\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_t \\ M_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

en estas condiciones claramente podemos efectuar una analogía entre las matrices correspondientes a las ecuaciones del filtro de Kalman y las que aparecen en nuestro modelo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} (1-c(1-u)-i) & -\gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \beta/\Omega & \gamma/\Omega \\ -\alpha/\Omega & 1-c(1-u)-i/\Omega \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de observación constituyen un sistema de ecuaciones que pudieran ser estimadas simultáneamente

[2], donde las ecuaciones de observación serían precisamente la forma reducida de un modelo cuya forma estructural sería:

$$[G_t, M_t] = [Y_t, r_t] \begin{bmatrix} 1-c(1-u)-i & -\gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} + [v_{1t}, v_{2t}]$$

la estimación de los coeficientes de la forma [illegible]

de este modelo viene dada por:

$$\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} \Sigma Y_t^2 & \Sigma Y_t r_t \\ \Sigma Y_t r_t & \Sigma r_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma G_t Y_t & \Sigma G_t r_t \\ \Sigma M_t Y_t & \Sigma M_t r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}_{11} & [illegible] \\ \hat{\Pi}_{21} & [illegible] \end{bmatrix}$$

e identificando coeficientes:

$$\hat{\Pi}_{11} = (1-c(1-u)-i)^{\wedge} \qquad \hat{\Pi}_{12} = \hat{\alpha} \qquad \hat{\Pi}_{21} = -\hat{\gamma} \qquad \hat{\Pi}_{22} = \hat{\beta}$$

en resumen podríamos decir que $\hat{H} = \hat{\Pi}$. Una vez [illegible] las estimaciones de los parámetros (1-c(1-u)-i), [illegible] podemos completar los elementos de la matriz [illegible] ecuación de estado.

Otra manera de recoger la dinámica que [illegible] entre estas variables podría consistir en la [illegible] partiendo del esquema IS-LM:

$$\begin{aligned} (1-c(1-u)-i)Y_t & -\gamma r_t = G_t \\ \alpha Y_t & +\beta r_t = M_t \end{aligned}$$

podemos construir las ecuaciones de observación(4) [illegible]

$$\begin{bmatrix} G_t \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-c(1-u)-i) & -\gamma \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ r_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \end{bmatrix}$$

Además la restricción presupuestaria impone[5]:

$$(M_{t+1}-M_t)+B_{t+1}=G_{t+1}-U_{t+1}+r_{t+1}B_t$$

si suponemos que toda la imposición es directa y que se fijan los impuestos a un tipo u_t proporcional sobre la renta[6]:

$$(M_{t+1}-M_t)+B_{t+1}=G_{t+1}-u_tY_{t+1}+r_{t+1}B_t$$

las variables de control por parte del gobierno en cada periodo son: B_{t+1}, G_{t+1}, M_{t+1}, u_{t+1}.

Si sustituimos M_t en esta ecuación tenemos reordenando:

$$u_tY_{t+1}-B_tr_t=\alpha Y_t+\beta r_t+G_{t+1}-B_{t+1}-M_{t+1}$$

que es una ecuación dinámica en las variables de estado Y, r . En cada periodo tenemos ahora en la matriz de transición coeficientes cambiantes u_t, B_t que vienen determinados por los controles aplicados en periodos anteriores.

En forma matricial podemos escribir el modelo:

$$\begin{bmatrix} u_t & 0 \\ 0 & -B_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{t+1} \\ r_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ r_t \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \Gamma^*_{11} & \Gamma^*_{12} & \Gamma^*_{13} \\ \Gamma^*_{21} & \Gamma^*_{22} & \Gamma^*_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{t+1} \\ B_{t+1} \\ M_{t+1} \end{bmatrix}$$

pero ello nos obliga a establecer hipótesis acerca de los efectos aislados de las variables de control sobre las variables de estado, efectos que vienen determinados por los valores numéricos de los elementos de la matriz Γ^*.

Premultiplicando la ecuación de estado por:

$$\begin{bmatrix} u_t & 0 \\ 0 & -B_t \end{bmatrix}^{-1}$$

tenemos:

$$\begin{bmatrix} Y_{t+1} \\ r_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha/u_t & 0 \\ 0 & -\beta/B_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ r_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{t+1} \\ B_{t+1} \\ M_t \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \Gamma = \begin{bmatrix} u_t & 0 \\ 0 & -B \end{bmatrix}^{-1} \Gamma^*$$

suponiendo ahora que todo el efecto de B_{t+1} sobre la economía queda recogido dentro del término $-\beta/B_{t+1}$ en cada periodo correspondiente a la nueva matriz Φ, tenemos el modelo [7]:

$$\begin{bmatrix} Y_{t+1} \\ r_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha/u_t & 0 \\ 0 & -\beta/B_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ r_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{t+1} \\ M_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

4.2.- Utilización de la técnica del filtro de Kálman para la determinación de números índices sectoriales.-

En el presente apartado vamos a mostrar un ejemplo sencillo sobre cómo construir una determinada serie de números índices de un determinado sector de actividad a partir del conocimiento de un número índice de caracter más general. Esta técnica resulta útil cuando pensemos que los costes de la obtención de determinada información sobre un sector en concreto de los que pueden integrar un número índice más general puede resultar excesivamente costosa. A los efectos del modelo que vamos a plantear aquí, vamos a suponer que estamos tratando con números indices de precios. Hemos partido de una ecuación de demanda de dinero en tiempo discreto[3]:

$(\pi_t - p_t) = \alpha \pi_t$

donde α es un parámetro y π_t es la tasa esperada de inflación. m_t y p_t representan respectivamente la cantidad de dinero y los precios en el instante de tiempo t.

De existir previsión perfecta por parte de los agentes en la economía podemos escribir:

$$(m_t - p_t) = \alpha (p_{t+1} - p_t)$$

y haciendo $\phi = 1/\alpha$;

$$(p_{t+1} - p_t) = \phi (m_t - p_t)$$

y reordenando:

$$p_{t+1}=(1-\phi)p_t+\phi m_t$$

podríamos incluir en la ecuación un término de perturbación aleatoria:

$$p_{t+1}=(1-\phi)p_t+\phi m_t+w_t$$

esta ecuación nos estaría indicando que el nivel de los precios en el momento actual esta relacionado con los precios del periodo anterior y que la cantidad de dinero en el periodo tiene que ver con el nivel de precios en el periodo siguiente.

Por comodidad supongamos que p_t representa el nivel de precios del sector que estamos analizando y del cual no podemos observar valores concretos, pero que éste se encuentra relacionado a través de una determinada ponderación con un índice más general y para el cual contamos con información disponible. Esta relación puede recogerse mediante la ecuación de observación siguiente:

$$y_{t+1}=hP_{t+1}+v_{t+1}$$

donde h sería la ponderación que este determinado sector tendría sobre el indice más general, y v una perturbación aletoria con las propiedades habituales.

La utilidad del modelo se manifiesta a la hora de hacer predicciones sobre si la senda que seguirán los precios que estamos estudiando será estable o inestable, o por ejemplo, al analizar las repercusiones que pueden tener determinadas políticas monetarias sobre la senda a seguir por los precios.

En la siguiente tabla se muestra un ejercicio de simulación para determinados valores de los parámetros ϕ, h, etc.

En concreto se estimaron las ecuaciones recursivas para el modelo:

$$P_{t+1}=(1-\phi)P_t+\phi m_t+w_t$$

$$y_{t+1}=hP_{t+1}+v_{t+1}$$

tomando como valor inicial de $P_t=100$, y suponiendo que los valores numéricos de las variables observadas se habian generado añadiendo un valor aleatorio comprendido entre 0 y 1 al valor del instante de tiempo anterior. De otra parte la política monetaria seguida en cuanto a la evolución de la cantidad de dinero, se ha supuesto que seguía un esquema de crecimiento exponencial a una tasa del 1%. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla V.1.

TABLA IV.1

modelo:

$P_{t+1}=(1-\phi)P_t+\phi m_t+w_t$ $m_o=100$ $m_t=1.01\ m_{t-1}$

$y_{t+1}=hP_{t+1}+v_{t+1}$ $y_1=100$ $y_t=y_{t-1}+\text{aleat}(0,1)$

valores de los parámetros:

$(1-\phi)=0.9$ $\sigma^2_{w_t}=30$; $\sigma^2_{v_t}=20$; $x_o=100$; $\sigma_{o/o}=10$
$h=0.8$

resultados de la simulación:

t+1	$\hat{P}_{t+1/t}$	$\hat{\sigma}^2_{t+1/t}$	K_{t+1}	$\hat{P}_{t+1/t+1}$	$\hat{\sigma}^2_{t+1/t+1}$
1	100	38.1	0.6867	113.7346	17.1683
2	112.4612	43.9063	0.7302	120.1153	18.2562
3	118.3048	44.7875	0.7362	122.6203	18.4068
4	120.6612	44.9095	0.7370	123.8555	18.4274
5	121.8760	44.9262	0.7372	124.6282	18.4302
6	122.6755	44.9284	0.7372	125.4525	18.4305

NOTAS AL CAPITULO IV.-

[1] véase Turnovsky (1977)

[2] véase Intrilligator (1978)

[3] ver Sargent & Wallace (1973) para una formulación en tiempo contínuo.

[4] el gobierno en cada periodo tiene conocimiento (observa) las variables que estan bajo su control.

[5] el deficit presupuestario junto con el pago del servicio de la deuda debe financiarse bien recurriendo al endeudamiento con el sector privado (B_{t+1}) o aumentando la cantidad de dinero en circulación.

[6] por comodidad notacional suponemos que se fija de un periodo para el siguiente, cualquier otro tipo de impuestos indirectos podrían recogerse a través de G, reflejando su caracter autónomo frente a la renta.

[7] en esta última formulación introducimos la componente aleatoria.

BIBLIOGRAFIA CAPITULO IV.-

-Turnovsky, S.J. "Macroeconomic Analysis and stabilization policy". Cambridge University Press (1977).

-Intriligator, M.D. "Econometric models, Techniques, and Applications".
Advanced textbooks in economics vol 9. Prentica Hall (1978).

- Sargent & Wallace (1973) The stability of models of money and growth with perfect foresight. Econometrica vol.41. No 6 (Nov-73).

CONCLUSIONES

CAPITULO V.- CONCLUSIONES.

La ciencia económica precisa de soluciones concretas a los problemas de asignación temporal. A menudo los problemas de caracter económico envuelven situaciones en las que la variable tiempo es un factor decisivo para la consecución de un determinado fin. Las economías modernas son mecanismos sujetos a constantes perturbaciones a lo largo del tiempo. Esas perturbaciones hacen que la evolución temporal de una determinada economía no siga un determinado sendero fijado de antemano o que ni siquiera la evolución final de las variables que integran el sistema económico pueda conocerse con un mínimo de certidumbre. Si entendemos que para cualquier sociedad el curso de los acontecimientos de caracter económico condiciona prácticamente todos los ámbitos de la vida social, es lógico pensar que los poderes públicos o los órganos responsables en materia económica pretendan contar con instrumentos adecuados que les permitan de una parte conocer la realidad económica en la que se desenvuelven y predecir su evolución, y de otra contar con los instrumentos de política económica adecuados para conducir al sistema hacia los objetivos económicos en que se materializan las directrices de caracter político-social que emanan de la sociedad en su conjunto.

La evolución de las técnicas utilizadas para la resolucción de problemas de caracter económico, al igual que en otras muchas ciencias, a ido ligada al desarrollo de las herramientas de caracter anlítico que han permitido abordar problemas en los que el planteamiento inicial o las hipótesis de partida presentan ciertas similitudes . Llegados a este punto podemos preguntarnos cuales son las características mas relevantes que incluye un problema de elección social como el que enfrentan los responsables de las decisiones de caracter económico en una sociedad.

En priemr lugar se hace necesario confeccionar un catálogo de partida que recoja todas aquellas variables que resultan relevantes para la sociedad. Probablemente no todas ellas sean susceptibles de ser introducidas en el modelo definitivo que vaya a manejarse para el cómputo de simulaciones, predicciones y determinación de actuaciones en materia de política económica. Seguidamente se hace necesario enumerar todas aquellas otras magnitudes económicas que van a servir de instrumentos con los que encauzar la economía de acuerdo con los objetivos predominantes en cada momento. Unicamente nos quedaría entonces conocer como se relacionan en el tiempo todas estas variables, es decir, de un lado conocer cúal es el influjo del pasado sobre el estado actual de las variables relevantes (lo que denominaremos dinámica interna del propio sistema económico) y de otro las repercusiones que tendrán determinadas actuaciones sobre los instrumentos con que cuentan los poderes públicos para la dirección de la economía, es decir, el efecto de las denominadas variables de control.

Hasta aquí el problema resultaría en extremo sencillo si sólamente necesitáramos de conocer cuales son esas relaciones que ligan variables relevantes y variables de control, bastaría, en el ámbito económico, con recurrir a las series de tiempo que recogen los valores que en cada periodo han ido tomando las distintas variables y a partir de estos datos inferir relaciones de comportamiento entre las mismas. De este modo la política económica consistiría en la resolución de un problema algébrico: "dados unos valores objetivo de las variables de estado o variables relavantes deberíamos resolver un conjunto de ecuaciones y el resultado de este problema nos arrojaría los valores concretos de los instrumentos para lograr los objetivos fijados de antemano".

Sin embargo tal manera de proceder no es posible porque en el ámbito en que nos movemos las variables de estado por un lado, y las ecuaciones de comportamiento de otro, a menudo tienen caracter estocástico, no puede predecirse de antemano cual es el resultado de la dinámica interna de las variables de estado y cuanto menos la repercusión de las variables de control. Cabe sólamente que efectuemos hipótesis acerca del comportamiento probable del sistema y de los instrumentos de control para tratar de hacer pronósticos acerca del curso de los acontecimientos. Dependiendo de cúal sea el comportamiento en probabilidad del sistema en su conjunto y de cuales sean los criterios mediante los cuales se fijan los valores concretos de las variables de control, la evolución temporal de la economía y las predicciones que se hagan acerca del comportamiento de la misma serán unas u otras.

Añadido a todas estas vicisitudes, nuestros problemas dinámicos en el ámbito de la economía, presentan además el inconveniente de que la información sobre determinadas variables relevantes en la economía no se encuentran disponibles para su observación y medición directa. En todo caso, y en numerosas ocasiones, tenemos que contentarnos con mediciones de otras magnitudes que estando relacionadas con las que son objeto de nuestro interés son susceptibles de ser cuantificadas. Ejemplos de estas situaciones son el índice de opiniones empresariales para evaluar las expectativas de inversión, la matriculación de vehiculos automóviles para el consumo, las cifras de paro registrado en las oficinas de empleo para cuantificar el desempleo etc.

En definitiva si queremos resumir en pocas palabras cuales son las características que presenta la evolución dinámica de una economía nos encontramos con incertidumbre y observabilidad limitada. En estas circunstancias los modelos de extracción de señales dinámicas resultan ser un instrumento analítico válido con el cual abordar el estudio de la evolución temporal de un modelo económico, puesto que en cierto modo muchos de ellos reproducen las condiciones bajo las cuales se desarrollaron las técnicas de extracción de señales dinámicas.

En esta Tesis hemos mostrado cómo, ademas, los modelos de extracción de señales dinámicas nos permiten mejorar las técnicas de estimación de relaciones económicas, en concreto dando soluciones sencillas para el tratamiento econométrico de determinados problemas que aparecen de manera aislada o de manera conjunta en la práctica totalidad de los ejercicios econométricos que se efectuan con datos empíricos.

los mecanismos de estimación recursiva que incorpora la técnica del filtro de Kalman han tenido un profundo impacto tanto en el análisis de series temporales como de los métodos econometricos en general. Este procedimiento tiene la ventaja de que para actualizar los valores de los parámetros del modelo sólo necesitamos información relativa a las observaciones del periodo en el cual se está trabajando, incorporando como información relevante para la actualización de las estimaciones de los parámetros precisamente la capacidad predictiva del modelo, al ponderar con la ganancia del filtro las desviaciones que se han producido entre el dato observado y la correspondiente predicción que utiliza los parámetros estimados en el periodo anterior e incorporando toda la información disponible más reciente. El criterio que guia las nuevas actualizaciones de los valores de los parámetros es precisamente la capacidad predictiva del modelo; si el modelo predice de un modo aceptable las observaciones que van generándose de manera empírica, es porque las estimaciones de los parámetros con que contábamos hasta el momento eran las adecuadas, no poniéndose de manifiesto la necesidad de revisarlas. La mera inspección visual de la evolución temporal de las estimaciones periodo a periodo nos permitirá además poder poner de manifiesto la existencia de cambios estructurales en el modelo o por el contrario la presencia de valores atípicos en las observaciones del mismo. También por mera inspección visual seremos capaces de detectar posibles errores de especificación sin más que relacionar de manera gráfica la evolución de los distintos regresores del modelo con la evolución de los diferentes parámetros.

Una vez vistas las ventajas que tienen los procedimientos de estimacion recursiva derivados de la aplicación de las técnicas de filtrado, podemos pasar a la aplicación que consideramos central dentro del ámbito de los juegos dinámicos. De ello nos hemos ocupado en el capítulo II. En este segundo capítulo hemos introducido junto a los aspectos dinámicos y estocásticos de la modelización en el espacio de los estados la posibilidad de introducir las expectativas que cada sujeto económico tiene respecto de las actuaciones de aquellos otros que tambien intervienen en la economía.

Dependiendo del modo en que se formulan las expectativas por parte de los agentes y de la manera de percibir por parte del gobierno y los agentes las expectativas generadas, así como de la manera en que tanto unos como otros conocen cúales son los mecanismos que guian la evolución del sistema económico, tendremos distintas soluciones para un mismo problema. En este capítulo hemos introducido dos tipos de hipótesis respecto del comportamiento optimizador del gobierno. En un primer momento se ha adoptado un criterio sencillo que supone que el gobierno intenta apartarse periodo a periodo lo menos posible de una senda de las variables objetivo que a lo sumo se fija en adelanto con un número finito de periodos. Planteamos cuatro casos diferentes en este apartado. Primeramente tanto agentes como gobierno tienen perfecta información acerca del mecanismo que rige la evolución del sistema; en este caso el control óptimo de acuerdo con este criterio depende de cúal es la expectativa de los agentes y de la desviación que se produce entre el valor del vector de estado óptimo y el registrado, ponderada esa diferencia por el producto de la matriz de transición Φ multiplicada por la inversa de la matriz de control Γ:

$$u_t^* = \Gamma^{-1}\Phi(x_t - x_t^*) + \hat{u}_{t/t}$$

En segundo lugar analizamos el caso en que los agentes no tienen perfecta información acerca de la evolución del sistema. En esa eventualidad la política de control óptimo no se aparta demasiado de la analizada en el primer caso. Unicamente que ahora la inversa de la matriz de control premultiplica a una expresión en la que intervienen las matrices de transición y de control que son relevantes para los agentes. Llamando a estas F y J, tenemos que:

$$u_t^* = \Gamma^{-1}(Fx_t + J\hat{u}_{t/t} - \Phi x_t^*)$$

expresión que se reduce al caso anterior cuando $F=\Phi$ y $J=\Gamma$.

En el tercero de los casos analizados suponemos que además de perfecta información acerca de la evolución del sistema tanto por parte del gobierno como de los agentes, además por parte de estos últimos existe previsión perfecta respecto de la política de control óptima adoptada por el gobierno. En este caso se plantea la igualdad entre $\hat{u}_{t/t}$ y u_t^*, con lo cual el vector de estado x_t no se aparta del valor del vector de estado óptimo x_t^*. Hablamos de un "consenso implícito" provocado por la igualdad en los conjuntos de información de gobierno y agentes.

En cuarto y último lugar

en que pese a que los agentes

respecto del control aplicado

embargo no conocen cúal es la

rige la evolución del sistema.

de la diferencia entre las matrices

el sistema y la percibida por los

a la diferencia $Fx_t - \Phi x_t^*$, es decir

$$u_t^* = [\Gamma - J]^{-1}(Fx_t - \Phi x_t^*)$$

Cuando se trata de

eficiencia propugnado por la

aparece en la ecuación que

filtro, un término adicional

posibilidad de que el modelo

mente para efectuar sus predicciones

pueda diferir del manejado

predicciones efectuadas por

control a efectuar por el

ecuación que actualiza el

estas predicciones están

correspondiente a las nuevas

gobierno para actualizar el

Cuando levantamos la

gobierno pueda llevar a cabo

el manejo de variables de

capacidad también para los

denominado "modelos con control

En cuarto y último lugar presentamos la situación en que pese a que los agentes tienen previsión perfecta respecto del control aplicado por el gobierno, sin embargo no conocen cúal es la verdadera estructura que rige la evolución del sistema. En este caso la [illegible] de la diferencia entre las matrices de control que [illegible] el sistema y la percibida por los agentes [illegible] a la diferencia $Fx_t - \Phi x_t^*$, es decir:

$$u_t^* = [\Gamma - J]^{-1}(Fx_t - \Phi x_t^*)$$

Cuando se trata de aplicar el [illegible] eficiencia propugnado por la metodología de [illegible] aparece en la ecuación que determina la [illegible] filtro, un término adicional que [illegible] posibilidad de que el modelo que los agentes [illegible] mente para efectuar sus predicciones acerca [illegible] pueda diferir del manejado por el [illegible] predicciones efectuadas por los agentes [illegible] control a efectuar por el gobierno se [illegible] ecuación que actualiza el estado del sistema, [illegible] estas predicciones están incorporadas en el [illegible] correspondiente a las nuevas observaciones que [illegible] gobierno para actualizar el valor del vector de [illegible]

Cuando levantamos la restricción de que [illegible] gobierno pueda llevar a cabo actuaciones que [illegible] el manejo de variables de control, y [illegible] capacidad también para los agentes, tenemos lo que [illegible] denominado "modelos con control compartido". [illegible] escenario tanto agentes como gobierno efectuan sus propias observaciones respecto de las variables de estado a través de sus respectivas ecuaciones de observación. Si recogemos en la ecuación de estado del sistema la posibilidad de que de manera diferenciada los controles del gobierno y agentes influyan sobre el valor del vector de estado e introducimos como criterio optimizador para ambos sujetos, la minimización de una función cuadrática que dependa de los valores esperados de las variables observadas y del control efectuado por el otro sujeto, así como del control propio, obtenemos como resultado del problema de optimización dos relaciones que denominamos funciones de reacción que determinan cada una de ellas los controles óptimos a aplicar por parte de los agentes. Cuando a este mismo problema aplicamos la metodología de Kalman obtenemos dos conjuntos de ecuaciones recursivas, uno para el gobierno y otro para los agentes. En cada uno de estos conjuntos, el impacto que cada uno cree que va a tener el control efectuado por el otro sujeto se recoge en las ecuaciones de predicción del vector de estado, así como en la ecuación correspondiente a la matriz de varianzas-covarianzas. Nuevamente la evolución del sistema dependerá de cúal es el impacto que cada uno cree que van a tener los controles efectuados por el otro sujeto y del modo en que se formulan las distintas expectativas.

En el capítulo III hemos querido reflejar un caso particular que muestre cómo el modo en que se formulan las expectativas influye de modo decisivo en la estructura recursiva del filtro de Kalman. Para ello hemos escogido el modelo de la hipótesis de la renta permanente. En este modelo hemos introducido como variable de estado no observable a la renta permanente y hemos considerado a la relación que existe entre el consumo corriente y la renta permanente como ecuación de observación. Así, la renta permanente o variable de estado en el instante t+1 se hace depender de su valor en el periodo t mas una ponderación que afecta tanto al cambio que experimentan los activos en manos de los agentes de un periodo al otro, como de las variciones en la renta futura esperada entre t y t+1. A partir de aquí vamos introduciendo distintos mecanismos de formación de expectativas acerca de la renta futura esperada y vamos viendo cúales son los efectos sobre la estructura recursiva del filtro de Kalman.

El primero de los mecanismos de formación de expectativas que analizamos consiste en que los agentes en cualquier instante consideran que su renta dentro de j periodos va a continuar siendo un determinado valor constante. Así, la renta permanente en un determinado periodo va a ser el resultado de sumar a la correspondiente al periodo anterior la variación experimentada por los activos en manos del publico actualizada por un determinado factor de descuento.

En el segundo de los mecanismos que introducimos para la formación de expectativas se hace depender a la expectativa de renta futura del número de periodos que distan entre el momento en el cual se efectua y el momento para el cual se hace la misma. Además las expectativas se relacionan con la renta corriente del periodo t a través de un coeficiente que varía de acuerdo con el número de periodos del horizonte temporal de predicción. Se imponen además condiciones de estabilidad en los coeficientes para evitar comportamientos dinámicos de caracter divergente y obtener soluciones estables del problema. Finalmente el tercero de los mecanismos incorpora la posibilidad de predicción perfecta por parte de los agentes respecto de la renta futura.

Podríamos comparar los resultados obtenidos bajo los distintos esquemas de formación de expectativas. Como podemos observar la única diferencia entre estos esquemas es el modo en que se computa la predicción para el periodo siguiente. Cuando consideramos el modelo estático de formación de expectativas solamente una fracción $0<(\delta/1+\delta)<1$ del cambio en los activos se incorpora en la predicción de la renta permanente. De otra parte, cuando introducimos expectativas adaptativas tenemos la misma expresión que antes, mas un término adicional que depende de la renta en ese periodo, y que viene dado por la fracción $(\alpha_1\delta/\delta-\gamma)y_t$.

Tenemos que decir que el modelo en el cual se calcula y actualiza la varianza, así como la ganancia del filtro, es el mismo en ambos esquemas.

Nótese sin embargo que las observaciones actuales acerca del consumo corriente se incorporan de la misma manera en ambos casos cuando actualizamos la predicción acerca de la renta permanente. La única diferencia es que bajo el segundo de los esquemas $\hat{y}_{pt/t-1}$ tambien incorpora y_t a traves de la fracción $(\alpha_1\delta/\delta-\gamma)y_t$. Esto es lo mismo que decir que, al igual que en el primer modelo, las expectativas son las mismas para cada periodo, y por tanto ello no añade ninguna información relevante para los agentes cuando forman sus expectativas.

En el segundo caso, el modo en que se forman las expectativas acerca de la renta futura depende crucialmente de cúal es la renta corriente, esta es la razón por la cual esta variable se incorpora en la ecuación de predicción de la renta permanente.

En el tercer caso consideramos cambios tanto en los activos $[A_{t+1}-A_t]$ como en la corriente de renta futura esperada B_t para actualizar la predición acerca de la renta permanente, y ambas entran con el mismo coeficiente. Son por tanto aplicables las mismas consideraciones hechas anteriormente.

En el capítulo IV hemos querido presentar dos aplicaciones adicionales de la metodología del filtro de Kalman. De un lado mostramos cómo puede ser una herramienta útil en la descripción de modelos macroeconómicos dinámicos sencillos, y de otro lado como puede servir para la reconstrucción aproximada de números índices de caracter sectorial a partir de otros mas generales.

En la priemera de estas aplicaciones se parte de un esquema IS-LM para una economía cerrada. A partir del análisis de la estática comparativa del modelo se obtienen los coeficientes correspondientes al manejo de las variables de control sobre las variables reales de la economía (en este caso la renta y el tipo de interés) que juegan el papel de las variables de estado. La dinámica interna del sistema puede incorporarse por dos vias: de manera ad-hoc, suponiendo un esquema aceleracionista en que la renta en un periodo está positivamente correlacionada con la correspondiente al periodo anterior y negativamente con el tipo de interés, y éste último relacionado positivamente tanto con la renta como con el valor correspondiente ambos al periodo anterior; o bien a partir de la restricción presupuestaria segun la cual el deficit presupuestario y el pago del servicio de la deuda en un periodo deben ser cubiertos bien aumentando la cantidad de dinero en circulación o bien acudiendo al endeudamiento con el sector privado. En ambos casos tenemos un conjunto de ecuaciones de estado y otro de observación a los que es susceptible de aplicación la metodología de la estimación recursiva.

Finalmente en la segunda de las aplicaciones de este capítulo, sirviéndonos de una formulación sencilla de la demanda de dinero derivamos una ecuación de estado para el nivel de los precios del sector analizado en la que la cantidad de dinero en circulación actúa como variable de control. La ecuación de observación se obtiene haciendo hipótesis acerca de la ponderación que presenta en un índice general, y del cual contamos con observaciones, el sector en concreto que estamos analizando. Al final del capítulo se muestra un pequeño ejercicio de simulación donde se observa cómo la ganancia practicamente se estabiliza a partir del tercer periodo pese a haber supuesto un elevado grado de incertidumbre inicial.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

-Anderson B.D.O. & Moore J.B. Optimal Filtering. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1979.

-Aoki M. Optimization of stochastic systems- Topics in stochastic systems. Academic Press. New York 1967.

-Barro R. Are government bonds net wealth?. Journal of Political Economy 82(6) 1095-1117. 1974.

-Bellman R. Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton N.J. 1957.

-Benveniste L. & Scheinkman J. On the differentiability of the value function in dynamic models of economics. Econometrica 47(3) 727-732. 1979.

-Bellman R. & Dreyfus S. Applied Dynamic Programming. Princeton University Press. Princeton N.J. 1962.

-Bertsekas D.P. Infinite time reachability of state space regions by using feed-back control, IEEE Trans. Automatic Control AC-17 (1972) 604-613.

-Bertsekas D.P. Stochastic optimization problems with nondifferentiable cost functionals, J. Optimization Theory Appl. 12 (1973) 218-231.

-Bertsekas D.P. Distributed dynamic programming, IEEE Trans. Automoatic Control AC-27 (1982) 610-616.

-Bertsekas D.P. & Shreve S.E. Stochastic Optimal Control: The discrete-time case. Academic Press. New York (1978).

-Blackwell D. Discrete Dynamic Programming. Ann. Math. Statist. 33 (1962).

-Brock W. & Mirman L. Optimal economic growth and uncertainty: the discounted case. journal of economic theory 4(3) 479-513. 1972.

-Calvo G. On the time consistency of optimal policy in a monetary economy. Econometrica 46(6) 1411-1428. 1978.

-Granger C.W. Investigating causal relations by econcmetric models and cross-espectral methods. Econometrica 37(3) 424-448. 1969.

-Goodwin G. C. & Sin K.S.S. Adaptive filtering, prediction and control. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N.J. (1984).

-Hall R. Stochastic implications of the life cycle-permanent income Hypothesis: theory and evidence.

Journal of Political Economy 86(6) 971-988. 1978.

-Hansen L.P. & Sargent T.J. Formulating and estimating dynamic linear rational expectation models. Journal of Economic Dynamics and Control 2(1). 7-46. 1980.

-Hansen L.P. Linear rational expectation models for dynamically interrelated variables. En Rational Expectations and Econometric Practice. Ed. Lucas Jr.& Sargent T.J. 127-156 Minneapolis: University of Minnesota Press. 1981.

-Hansen L.P. Instrumental variable procedures for estimating linear rational expectation models. Journal of Monetary Economics 9(3) 263-296. 1982.

-Jazwinski A.H. Stochastic Processes and Filtering Theory.Academic Press. New York. (1970).

-Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. ASME Ser. D.J. Basic Engrg. 82 (1960) 35-45.

-Kumar P.R. A survey on some results in stochastic adaptive control, SIAM J. Control Optimization 23 (1985) 329-380.

-Kumar P.R. Optimal adaptive control of linear quadratic

Gaussian systems, SIAM J. Control Optimization 21 (1983) 329-380.

-Kumar P.R. & Varaiya P.P. Stochastic Systems: Estimation, Identification and Adaptive Control. Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, N.J. (1986).

-Kydland F. & Prescott E.C. Rules rather than discretion: the inconsistency of optimal plans. Journal of Political Economy 85(3) 473-491. 1977.

-Ljung L. On positive real transfer functions and the convergence of some recursions, IEEE Trans Aut. Control AC-22 (1977) 539-551.

-Lucas R.E. Econometric policy evaluation: a critique. En The Phillips Curve and Labor Markets, Ed. K.Brunner & A.H. Meltzer 19-46. North-Holland. 1976.

-Luenberger D.G. Optimization by Vector Space Methods. Wiley, New York (1969).

-Meditch J.S. Stochastic Optimal Linear Estimation and Control. McGraw-Hill, New York (1969).

-Puterman S.L. & Shin M.C. Action elimination procedures for modified policy iteration algorithms, Operations Res. 30 (1982) 301-318.

-Saridis G.N. & Dao T.K. A learning approach to the parameter adaptive self organizing control problem. Automatica 8 (1972) 589-587.

-Sawaragi Y. & Yoshikawa T Discrete time Markowian decision processes with incomplete state observation, Ann Math Statist. 41 (1970) 78-86.

-Simon H.A. Dynamic programming under uncertainty with a quadratic criterion function. Econometrica 24 (1956) 74-81.

-Sims C.A. Money, income, and causality. American Economic Review 62(4) 540-552. 1972.

-Stein G. & Saridis G.N. A parameter adaptive control technique, Automatica 5 (1969) 731-739.

-Tse E. & Athans M. Adaptive stochastic control for a class of linear systems, IEEE Trans. Auto. Control AC-17 (1972) 38-52.