EXISTENCIA Y MULTIPLICIDAD DE SOLUCIONES PARA PROBLEMAS DE CONTORNO ELIPTICOS SEMILINEALES EN RESONANCIA.

David Arcoya Álvarez

Universidad de Granada

1.990

Tesis doctoral dirigida por el Doctor D. Antonio Cañada Villar, Profesor del Departamento de Análisis Matemático, defendida por D. David Arcoya Álvarez el día 26 de septiembre de 1.990, ante el Tribunal formado por los siguientes profesores: D. Miguel de Guzmán Ozámiz (Presidente), D. Antonio Ambrosetti, D. Angel Rodríguez Palacios, D. James R. Ward (Vocales) y D. Antonio Ros Mulero (Secretario). Obtuvo la calificación de Apto "cum laude" por unanimidad.

A Maria José

Contenido

Notación

$\varnothing$ Conjunto vacío

$Im\ f = \{f(x)/x \in A\}$ donde $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación

$Ker\ f = \{x \in A/f(x) = 0\}$ donde $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación (y $0 \in B$)

$k_1, k_2, \ldots$ distintas constantes positivas

$\mathbb{N}$ conjunto de los números naturales

$\mathbb{R}$ conjunto de los números reales

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$

$(\cdot|\cdot)$ producto escalar usual de $\mathbb{R}^k$

$|x|$ módulo del vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

Ω dominio (es decir, abierto y conexo) de $\mathbb{R}^m$

∂A frontera del subconjunto A de $\mathbb{R}^m$

meas A medida de Lebesgue del subconjunto A de $\mathbb{R}^m$

a.e. casi por doquier

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m})$ para $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\nabla_u G(x, u) = \nabla G(x, \cdot)$ con $G : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ y $G(x, \cdot) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$

E espacio de Banach

$E^\star$ espacio dual de E

$(\cdot, \cdot)$ dualidad entre E y $E^\star$

$B_E(u_0, R) = \{u \in E / \|u - u_0\| < R\}$ bola abierta en E de centro u_0 y con radio R

$\rightharpoonup$ convergencia débil en E

$< \phi >$ subespacio engendrado por $\phi \in E$

$C^r(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^k)$, $C^r(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \equiv C^r(\bar{\Omega})$ espacios de funciones continuas y diferenciables usuales

$L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $L^p(\Omega, \mathbb{R}) \equiv L^p(\Omega)$ espacios de Lebesgue para $1 \leq p \leq +\infty$

$\|u\|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p \, dx)^{1/p}$ norma de $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $1 \leq p < +\infty$

$H^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $H_0^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$ espacios de Sobolev usuales

Introducción

El estudio de problemas de contorno asociados a ecuaciones diferenciales surge motivado por numerosos problemas prácticos originados en multitud de disciplinas diferentes como pueden ser Mecánica, Electromagnetismo, Ecología y un largo etc. En éstas, los problemas de contorno constituyen un modelo matemático que describe (con mayor o menor precisión) la situación práctica considerada. Un tipo particular de problemas de contorno, muy importante por sus aplicaciones, lo constituyen los problemas de contorno de tipo elíptico. A una clase de ellos vamos a dedicar esta Memoria. Concretamente, en ella estudiaremos la existencia y multiplicidad de soluciones de problemas de contorno de la forma:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(u) + h(x), & x \in \Omega \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{1}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ es un dominio acotado y con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular, $\Delta u = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ es el operador diferencial (de segundo orden) usualmente llamado *Laplaciano*, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua[1] generalmente no lineal, (por lo que se suele llamar no-linealidad), y h es una función de $L^2(\Omega)$. A veces consideraremos una situación más general que (1), sustituyendo Δ por un operador elíptico más general y estudiando también sistemas de ecuaciones, pero por simplicidad y claridad en la exposición, en esta introducción nos restringimos a la situación mencionada.

Diversos conceptos de solución de (1) pueden ser considerados [48]: *solución clásica, solución débil, solución fuerte, ...* De entre ellos y motivados por las técnicas que aplicaremos al problema, escogemos el de solución débil. Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ (donde $H_0^1(\Omega)$ denota el espacio de Sobolev usual [1]) se dice una *solución débil* de (1) si

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(u(x))v(x)\, dx + \int_\Omega h(x)v(x)\, dx$$

[1] Aunque también se estudiará el caso en que f no es continua.

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ (donde $\nabla u = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m})$ (siendo $\frac{\partial}{\partial x_i}$ la derivada en el sentido de las distribuciones respecto de la variable x_i)). Como es bién conocido [48], hipótesis de regularidad en las funciones f y h (así como en el dominio Ω) implican que tal solución débil es de hecho una solución clásica, (es decir, que $u \in C^2(\bar{\Omega})$ y verifica (1) en el sentido usual).

Un estudio completo del problema (1) para cualquier no-linealidad f está, hoy por hoy, inconcluso. Además, con el objeto de reducir esta Memoria a una longitud razonable, limitaremos el estudio de (1) a una clase especial de no-linealidades f, enmarcándonos en lo que se conoce como un *problema en resonancia en el primer valor propio.* Para comprender de una forma adecuada qué tipo de no-linealidades forman parte de esta clase, hemos de recordar lo que entendemos por *problema de valores propios* asociado a (1). (La parte lineal del problema no-lineal considerado suele desempeñar, a menudo, un papel fundamental en el estudio de éste). Esto es, el problema consistente en determinar los pares (λ, u), con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $u \not\equiv 0$, que verifican

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda u, & x \in \Omega \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \qquad (2)$$

A λ se le suele llamar valor propio, mientras que a u se le llama función propia. Se sabe [43] que (2) posee una sucesión creciente y no acotada de valores propios $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, con multiplicidad finita, (es decir, el subespacio formado por las funciones propias asociadas a cada λ_n, normalmente llamado enésimo *espacio propio*) tiene dimensión (= multiplicidad de λ_n) finita). Además, la multiplicidad de λ_1 es uno, pudiéndose escoger una función propia ϕ asociada a λ_1 que es positiva en Ω ($\phi(x) > 0 \ \ \forall x \in \Omega$).

Pués bién, diremos que (1) está en *resonancia en el primer valor propio* si f tiene la forma $f(u) = \lambda_1 u + g(u)$, con $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Por tanto, el problema (1) queda en la forma

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u - \lambda_1 u &=& g(u) + h(x), & x \in \Omega \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Tal vez merezca la pena recordar que para el ejemplo (trivial) más sencillo de resonancia en el primer valor propio, es decir, cuando $f(u) = \lambda_1 u$, el Teorema de la Alternativa de Fredholm [52] muestra que el problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u - \lambda_1 u &=& h(x), & x \in \Omega \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \qquad (4)$$

posee solución si y solamente si $h \in L^2(\Omega)$ verifica la siguiente condición:

(h_1) $\int_\Omega h(x)\phi(x)\, dx = 0.$

Uno de los primeros resultados para el caso no-lineal ($g \not\equiv 0$) fué el dado por Landesman y Lazer [54] en 1.970 al probar que, si existían $g(+\infty) \equiv \lim_{u \to +\infty} g(u)$ y $g(-\infty) \equiv \lim_{u \to -\infty} g(u)$, entonces una condición suficiente para que (3) posea al menos una solución es que

$$g(-\infty) < \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega}\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx < g(+\infty) \tag{5}$$

o

$$g(+\infty) < \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega}\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx < g(-\infty) \tag{6}$$

El artículo de estos autores se puede considerar ya como un clásico en la materia y dió origen a una intensa investigación en torno al problema (3). Hagamos notar que Landesman y Lazer probaron su resultado de existencia basándose fundamentalmente en dos hipótesis: una referente al "crecimiento" o "tamaño" de la no-linealidad g (g debe ser acotada) y otra referente a su comportamiento asintótico. Desde entonces, diversos autores han tratado de mejorar el resultado citado debilitando tales hipótesis. Un punto de vista diferente fué el que adoptaron Ahmad, Lazer y Paul [2] en 1.976 al considerar hipótesis, no sólo sobre la no-linealidad g, sino también sobre su primitiva. Concretamente, estos autores mejoraron la condición de Landesman y Lazer (5) (o (6)) al obtener mediante métodos variacionales (aplicados a aproximaciones del problema en espacios de dimensión finita) una condición suficiente (llamada, en adelante, de Ahmad, Lazer y Paul) más general. Esta es:

$$(A^+_-)\quad \lim_{|\xi|\to+\infty}\int_\Omega G(\xi\phi(x))\,dx + \xi\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx = \pm\infty,$$

donde $G:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una primitiva de la función g.

(Si concretamos al caso en que h verifica (h_1), entonces la condición (A^+_-) quedaría en la forma:

$$\lim_{|\xi|\to+\infty}\int_\Omega G(\xi\phi(x))\,dx = \pm\infty \tag{7}$$

que es, en realidad, una condición sobre el comportamiento asintótico de la función G).

Este tipo de condiciones que involucran los comportamientos de G y g ha resultado ser muy útil para medir, en cierta forma, el *grado de resonancia* producido por el término no-lineal g en (3). A *grosso modo*, cuanto *más pequeña* sea la función g, *más grande* cabe esperar que sea la resonancia (y, por tanto, la aproximación al problema lineal (4)). Así, entre otros, podríamos distinguir los *tipos de resonancia* que siguen:

1. $\lim_{|u|\to+\infty} g(u) = 0$ y $\lim_{|u|\to+\infty} G(u) = +\infty$, (que es un caso particular de (7)).

2. $\lim_{|u|\to+\infty} g(u) = 0$ y $\lim_{|u|\to+\infty} G(u) = \beta\in\mathbb{R}$. (Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\beta = 0$).

3. g es T_0-periódica ($T_0 > 0$) con valor medio cero, esto es, $g(u+T_0) = g(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}$ y $\dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} g(u)\,du = 0$.

Básicamente, en esta Memoria nos vamos a dedicar al estudio de (3) cuando g es una resonancia del tipo 2. (conocida como resonancia fuerte en infinito [22]), y 3.

A lo largo del tiempo [45], se han desarrollado un gran número de técnicas propias del Análisis Funcional para el estudio de los problemas de contorno. Por nuestra parte, para llevar a cabo dicho estudio, usaremos principalmente técnicas de tipo variacional; éstas consisten en reducir el problema de la existencia de solución de (3) al problema equivalente de probar la existencia de *puntos críticos* de un funcional definido en un espacio de funciones adecuado.

Recordemos que si E es un espacio de Banach, un funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice de clase C^1 si I es derivable (en el sentido de Fréchet) con derivada $I' : E \longrightarrow E^\star$ continua ($E^\star$ es el espacio dual de E), y $u \in E$ se dice punto crítico de I si $I'(u) = 0$, llamándose, en este caso, a $I(u)$ nivel o valor crítico de I. Así en nuestro caso, si tomamos $E = H_0^1(\Omega)$ e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx - \int_\Omega G(u(x))\,dx \\ &\quad - \int_\Omega h(x)u(x)\,dx, \end{aligned} \tag{8}$$

para todo $u \in E$, entonces I es de clase C^1 y si $u \in E$, $I'(u) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dado por

$$\begin{aligned} (v, I'(u)) &= \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx - \lambda_1\int_\Omega u(x)v(x)\,dx \\ &\quad - \int_\Omega g(u(x))v(x)\,dx - \int_\Omega h(x)v(x)\,dx \end{aligned}$$

para todo $v \in E$; por lo que $u \in E$ es un punto crítico de I si y solamente si u es una solución débil de (3).

Los puntos críticos de funcionales más sencillos que pueden aparecer son los puntos de extremos relativos del funcional. Entre ellos destacamos los extremos globales: máximo o mínimo global. Es claro que, para su estudio, podemos restringirnos al de la existencia de mínimo global de I. Los métodos que estudian la existencia de tales mínimos globales se enmarcan dentro del llamado Método Directo del Cálculo de Variaciones, que tiene su origen en los trabajos de Tonelli [84]. Entre ellos destacamos los siguientes resultados:

1. Si I es un funcional de clase C^1 definido en un espacio de Banach E reflexivo y es coercivo ($\lim_{\|u\|\to+\infty} I(u) = +\infty$), débil inferiormente semicontinuo y acotado inferiormente, entonces I alcanza su ínfimo.

2. Si I es un funcional de clase C^1 definido en un espacio de Banach E, acotado inferiormente y satisface lo que se llamará condición de Palais-Smale (PS) (véase Sección 2 del Capítulo I), entonces I alcanza su ínfimo.

La existencia de otro tipo de puntos críticos no necesariamente extremos del funcional puede probarse utilizando las teorías de Morse [62] y de Ljusternik y Schnirelmann [56]. En ambas teorías, fudamentadas en conceptos topológicos, se intenta, como idea principal, reconocer los niveles críticos del funcional mediante un profundo conocimiento de los conjuntos de nivel $A_d \equiv \{u \in E \ / \ I(u) \leq d\}$ pués, a *grosso modo*, un cambio en las topologías de A_{d_1} y A_{d_2} $(d_1 < d_2)$ puede determinar la existencia de un nivel crítico $c \in [d_1, d_2]$ del funcional I (véase Sección 1 del Capítulo I para más detalles).

Por otra parte, debemos citar los famosos Teoremas del Paso de Montaña [9], demostrado por Ambrosetti y Rabinowitz, y de Punto Silla [71], demostrado por Rabinowitz, representativos de lo que se conoce en la literatura matemática actual como métodos min-max para el estudio de la existencia de puntos críticos. Ambos teoremas, inspirados más en la teoría de Ljusternik y Schnirelmann que en la teoría de Morse, se basan en una aplicación de un teorema de deformación de Clark [30]. Más en concreto, mediante estos métodos se busca probar la existencia de niveles críticos c de la forma

$$c = \inf_{S \in \Gamma} \max_{u \in S} I(u)$$

donde Γ es una clase apropiada de subconjuntos S de E que es invariante por algún tipo especial de *deformaciones* del espacio E. En los métodos min-max vuelven a desempeñar un papel esencial condiciones de compacidad (del tipo de Palais-Smale) introducidas por Palais y Smale [65, 64, 66, 77].

Con el objeto de hacer más comprensiva la lectura hemos incluído, Capítulo I, una breve iniciación a la teoría abstracta de puntos críticos. En ésta, además de probar los Teoremas de Paso de Montaña y Punto de Silla (así como uno de existencia de mínimo global), exponemos con bastante profundidad un teorema de deformación, esencialmente debido a Clark [30] (Sección 1), y comentamos con detalle las condiciones de compacidad más usuales del tipo de Palais-Smale (Sección 2).

El Capítulo II está motivado por la siguiente descomposición del funcional I dado por (8) y asociado al problema (3): $I = L + N$ con $L, N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ funcionales de clase C^1 dados por

$$L(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx - \int_\Omega \tilde{h}(x) u(x) \, dx,$$

$$N(u) = -\int_\Omega G(u(x)) \, dx - \int_\Omega \bar{h}(x) u(x) \, dx \ , \quad \forall u \in E = H_0^1(\Omega)$$

donde $\bar{h}, \tilde{h}$ provienen de la descomposición ortogonal de $L^2(\Omega)$ en la siguiente forma $L^2(\Omega) =< \phi > \oplus < \phi >^{\perp}$. Observemos que

a) *L es débil inferiormente semi-continuo, con L' un operador monótono, y*
b) *$L(u) = L(\tilde{u})$ para todo $u \in E$.*
Por su parte, el funcional $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ y su derivada $N' : E \longrightarrow E^\star$ son funcionales continuos cuando en E se considera la topología débil y en $\mathbb{R}$ y $E^\star$ la topología de la norma. Esto es:
c) *Si $\{u_n\} \rightharpoonup u$ en E, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} N(u_n) = N(u) \text{ y } \lim_{n\to+\infty} N'(u_n) = N'(u).$$

Además, si se verifica 2. o 3., N verifica la siguiente propiedad:
d) *Existe $d \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\text{“}\lim_{n\to+\infty} N(u_n) = d$$

para toda sucesión $\{u_n\}$ en E tal que $\|\bar{u}_n\| \longrightarrow +\infty$, y $\{\tilde{u}_n\}$ es acotada”.

Pués bién, en el Capítulo II, y motivados por las aplicaciones a problemas similares a (3), consideramos un espacio de Banach reflexivo E que se supondrá descompuesto en la forma $E = \bar{E} \oplus \tilde{E}$ (algebraica y topológicamente), con $\bar{E}$ un subespacio de dimensión finita (que en las aplicaciones será $< \phi >$). Así $u = \bar{u} + \tilde{u}$. También consideramos funcionales abstractos I definidos en E y que admiten una descomposición $I = L + N$ con L, N funcionales de clase C^1 verificando las propiedades a), b), c) y d) anteriores[2]. En nuestro primer resultado (Lema 2), probaremos que bajo ciertas hipótesis sobre el comportamiento asintótico de I y N', junto con una relación especial entre L y L', se satisface la condición débil [26] de Palais-Smale $(w - PS)_c$ (véase Definición I.2) para todo c salvo posiblemente en un punto.

La idea para encontrar un nivel crítico de I (salvando esta falta de compacidad en el funcional), consiste en considerar dos posibles valores críticos distintos de I, de forma que si bién no se satisface la condición débil de Palais-Smale en uno de ellos, lo haga en el otro. Para ello, consideraremos, en el caso en que I está acotado inferiormente y N está acotado, dos niveles, m_0 y c, dados, respectivamente, por el ínfimo de I y una aplicación del Teorema de Punto Silla de Rabinowitz. Probaremos (Teorema 4) una condición necesaria y suficiente para que m_0 sea un nivel crítico de I, o sea, para que I alcance su ínfimo (aunque no se verifique necesariamente $(w - PS)_{m_0}$, y (Teorema 5) una condición suficiente para que el nivel c citado anteriormente sea un valor crítico de I. Esto nos permite obtener (Teorema II.7) la existencia de al menos un nivel crítico de I.

Los teoremas de existencia del Capítulo II serán aplicados en el siguiente, Capítulo III para el estudio de problemas de contorno en resonancia del tipo (3). En realidad, gracias al desarrollo abstracto del Capítulo II, nuestro estudio puede ser llevado a cabo con éxito para problemas más generales de la forma

[2]Otra vez por claridad de la exposición imponemos una condición, la d), no necesaria siempre para nuestras demostraciones como veremos en el Capítulo II

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u-\lambda_1 u & = & g(x,u)+h(x), & x\in\Omega \\ Bu & = & 0, & x\in\partial\Omega \end{array}\right\} \tag{9}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^m$ y

$$\mathfrak{L}u=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})$$

con $a_{ij}:\bar{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$, $i,j=1,2,\ldots,m$, representa un operador diferencial de segundo orden uniformemente elíptico. Además, suponemos que $a_{ij}=a_{ji}\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. La función $g:\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$ es continua y acotada verificando

(g_1) Existe una función $G:\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\nabla_u G(x,u)=g(x,u),\ \forall(x,u)\in\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^k,$$

y h es una función de $L^2(\Omega,\mathbb{R}^k)$.

Bu denotará una condición de frontera de uno de los dos tipos siguientes:

1. Condición de Dirichlet: $Bu=u$.
2. Condición de tipo periódico: $\Omega=(0,T)$ con $T>0$ y $Bu=(u(T)-u(0),u'(T)-u'(0))$.

Esta ligera generalización en el problema nos permite estudiar a la vez problemas del tipo (3) junto con problemas como

$$\left.\begin{array}{r} -u''-u=g(x,u)+h(x),\quad x\in(0,\pi) \\ u(0)=u(\pi)=0, \qquad\qquad \end{array}\right\}$$

o como el problema periódico asociado al sistema hamiltoniano

$$-u''=g(t,u)+h(t),\quad t\in(0,T)$$

Comenzamos (Sección 2) por un resultado, inspirado en el trabajo [85] de Ward, y en el que se prueba que si $\int_\Omega h_i(x)\phi(x)\,dx=0$ para todo $i=1,2,\ldots,k$ y g verifica (g_1) y 2. o 3., entonces (9) posee al menos una solución débil. Este resultado mejora otros de [7, 35, 83] para sistemas hamiltonianos.

Puesto que la solución encontrada se obtiene como un punto crítico dado por el Teorema II. 7, ésta puede corresponderse bien con el mínimo del funcional asociado a (9), bien con un nivel crítico obtenido a través del Teorema de Punto Silla. Con objeto de discernir qué tipo de nivel le corresponde, (mediante la aplicación de los Teoremas II. 4 y II. 5), estudiamos en la Sección 3 condiciones suficientes para la existencia de niveles críticos de esos tipos. En concreto, el estudio de condiciones necesarias y suficientes para que $m_0=\inf_{u\in E}I(u)$ sea un valor crítico de I, nos va a permitir resolver parcialmente la cuestión abierta referente a si el funcional asociado al problema () alcanza su ínfimo o no cuando g es una no-linealidad del tipo 3. Nosotros probamos que sí lo alcanza en el caso en que $h\equiv 0$, y $m=k=1$. No obstante queda aún abierto el problema para

$h \not\equiv 0$ y $m, k > 1$. De otra parte, también mejoramos resultados de [83]. Con respecto a las condiciones suficientes para que el valor c dado por el Teorema de Punto Silla de Rabinowitz sea un nivel crítico, mencionemos que éstas mejoran resultados de [35] obtenidos mediante aplicación de la teoría de Morse.

Estos resultados nos permitirán, además de obtener nuevos teoremas de existencia, probar resultados de multiplicidad (Sección 4) pués las condiciones suficientes halladas no son excluyentes entre sí. Otro resultado de multiplicidad, que mejora al de [7], se obtiene como una aplicación del Teorema del paso de Montaña y el Principio Variacional de Ekeland [46].

En la Sección 5 de este capítulo se supone que cero es una solución trivial de (9) y se estudian diversos resultados de existencia de solución distinta de la cero de (9) mediante el uso del Teorema de Punto de Silla.

En la última sección, la sexta, estudiamos el problema de contorno (9) para otro tipo de resonancias. En concreto, mejoramos la condición de Ahmad, Lazer y Paul antes mencionada, al permitir, para $k = 1$, diverger de forma distinta cuando ξ tiende a $+\infty$ que cuando ξ tiende a $-\infty$ al término $\int_\Omega G(u(x))\, dx$. Además la condición que desarrollamos resulta más útil que la de Ahmad, Lazer y Paul para el estudio de algunos resultados de perturbación. Algunos de los resultados de los Capítulos III y II) aparecerán en [13, 15, 18].

Por último, el Capítulo IV está dedicado al estudio del problema (3) cuando g es una no-linealidad discontinua y acotada. Tal tipo de problemas posee una gran actualidad puesto que han surgido recientemente como modelos matemáticos que describen con gran exactitud ciertos fenómenos físicos, químicos y biológicos (véase [10, 11, 29, 32, 47, 75]). Desde un punto de vista meramente matemático hemos de resaltar los trabajos [38, 39, 40, 53, 72, 79, 80, 81, 82] como pioneros en estas cuestiones. Posteriormente, han aparecido [5, 6, 11, 10, 11, 21, 27, 28, 32, 57].

Nuestro estudio se reducirá al caso en que la no-linealidad discontinua g es de *salto hacia arriba,* es decir, verifica:

Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que g es continua en $\mathbb{R} - \{a\}$ y existen

$$g(a-) = \lim_{u \to a^-} g(u) \ \textit{y}\ g(a+) = \lim_{u \to a^+} g(u), \ \textit{y}\ g(a-) < g(a+).$$

El primer objetivo de la Sección 1 de este capítulo será decidir lo que entendemos por solución de un problema de contorno con no-linealidad discontinua. De hecho, describimos dos conceptos distintos de solución. En uno de ellos, diremos que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (donde $H^2(\Omega)$ denota también el espacio de Sobolev usual [1]) es una *solución "en el sentido multivaluado"* del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u - \lambda_1 u &=& g(u) + h(x), & x \in \Omega \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{10}$$

si se verifica

$$-\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) - h(x) \in \hat{g}(u(x)), \quad a.e.\ x \in \Omega$$

donde $\hat{g}$ es la función multivaluada dada por

$$\hat{g}(u) = \begin{cases} g(u), & \text{si } u \neq a \\ [g(a-), g(a+)], & \text{si } u = a \end{cases}$$

De otra parte, diremos que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es una *solución en el sentido casi por doquier* del problema de contorno (10) si verifica

$$-\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) = g(u(x)) + h(x), \quad a.e.\ x \in \Omega$$

Como podemos observar toda solución en el sentido casi por doquier lo es en el sentido multivaluado. Ya que el recíproco no ha de ser necesariamente cierto (véase [17, 72, 79, 81]), estudiamos algunas de las condiciones para que este recíproco sí sea cierto.

Una vez clarificados los distintos conceptos de solución, así como su relación, se impone el estudio de la existencia de dichas soluciones. Tal estudio encierra como primera dificultad el hecho de que el funcional $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ asociado a (10) y dado por (8) no es, en este caso, de clase C^1, por lo que no es posible aplicar la teoría clásica de puntos críticos (desarrollada en el Capítulo I). Los trabajos de Chang [40], inspirados en los previos de Stuart y Toland [81, 82], salvan esta dificultad mediante la introducción de una teoría de puntos críticos para funcionales localmente lipschitzianos. (Pensemos que I es un funcional de esta clase). Los puntos críticos, en un sentido generalizado, son soluciones en el sentido multivaluado de (10). No obstante, y a pesar de la amplia generalidad de esta teoría, la iniciación en la misma está bastante *lejos* de ser fácil y asequible, precisando conceptos arduos como puede ser el de subgradiente generalizado, así como una versión generalizada del Teorema de deformación de Clark (Teorema I. 1) que a su vez nos proporcione teoremas de puntos críticos análogos a los estudiados en el Capítulo I.

Recientemente, Ambrosetti y Badiale [5], han desarrollado un nuevo método para el estudio de estos problemas. Este resulta especialmente útil no solo porque nos permite obtener resultados de existencia en una forma completamente directa, sino también por su simplicidad. Esta técnica se basa en el Principio de Acción Dual de Clarke [31]. Mediante el uso de éste y suponiendo que se verifica la propiedad

$$\textit{Existe } m > 0 \textit{ tal que } g(u) + mu \textit{ es creciente.} \tag{11}$$

se construye un *funcional dual* $\Phi : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ (de clase C^1) para el que es posible usar la teoría usual de puntos críticos. Los puntos críticos de Φ serán soluciones en el sentido multivaluado de (10). Además, los puntos críticos de Φ que se correspondan con mínimos locales son soluciones en el sentido casi por doquier. (Observemos que a raiz de este resultado, tiene un especial interés determinar, si existen, los mínimos locales de Φ; en especial, su mínimo global).

En la Sección 2, estudiaremos el caso resonante. Más concretamente, estudiaremos el caso de resonancia fuerte en infinito con una no-linelidad g con discontinuidad de salto hacia arriba. Para ello, resultará crucial hacer una descomposición de Φ en la forma $\Phi = L + N$, con L y N funcionales verificando propiedades análogas a las de la descomposición de I. Estas propiedades pueden ser probadas para el caso de resonancias fuertes en infinito, esto es, del tipo 2. Sin embargo, hasta ahora eso no parece posible para el caso de no-linealidades (discontinuas) del tipo 3., quedando, por tanto, abierta esta cuestión. Una vez realizada esta descomposición del funcional dual, podemos ya probar (basándonos otra vez en las ideas del Capítulo II) la existencia de al menos una solución en el sentido multivaluado cuando g es una resonancia fuerte en infinito discontinua que verifica (11) (Teorema IV.4).

Como ya hemos dicho, en orden a encontrar soluciones en el sentido casi por doquier, resulta muy interesante cuestionarse la existencia de mínimo global de Φ. En nuestro caso, Φ está acotado inferiormente, es débil inferiormente semi-continuo, pero no es coercivo ni satisface $(w - PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. No obstante, y en analogía con el caso continuo, somos capaces (Teorema IV.1) de dar condiciones suficientes (de hecho, una condición suficiente y necesaria) para que el funcional dual alcance su ínfimo. Esencialmente, los resultados de este capítulo aparecerán en [19].

Terminamos la Memoria con la exposición de algunas notas finales donde se comentan algunos problemas abiertos y algunas lineas posibles de continuación de la investigación.

No quisiera dar por terminada esta introducción sin antes manifestar mi más profundo agradecimiento al prof. Antonio Cañada, sin cuya dirección no hubierá sido posible en absoluto la realización de este trabajo. Su constante estímulo, orientación y ayuda, plasmados en innumerables sesiones de trabajo, han servido tanto para la consecución de los resultados presentados como para completar mi formación matemática acrecentando de hecho mi fascinación por la investigación matemática actual.

También, mi sincera gratitud para el Prof. Antonio Ambrosetti por el interés mostrado a lo largo del desarrollo de esta Memoria. Concretamente, por sugerir el estudio de problemas similares a los considerados en el Capítulo IV. También, he de agradecer la supervisión realizada por él durante los seis meses que he permanecido en la "Scuola Normale Superiore" de Pisa (becado por la Junta de Andalucía y la Universidad de Granada) y en la que he tenido la oportunidad de conocer y estudiar otros tipos de problemas relacionados con la teoría de puntos críticos.

Al Prof. J. R. Ward por la lectura y comentarios que tan amablemente hizó de algunos de los resultados descritos a continuación.

Al Departamento de Análisis Matemático por haberme proporcionado todo tipo de facilidades y ayuda para la realización de este trabajo; y al Prof. José Luis Bueso Montero por su paciente guia y consejo en el uso del procesador de texto con el cual escribo esta Memoria.

Capítulo 1

Teoría abstracta de puntos críticos.

1.1 Un teorema de deformación

Como ha sido observado en la introducción, el estudio de los puntos críticos de ciertos funcionales $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 con E un espacio de Banach real, está intimamente relacionado con los cambios topológicos producidos en los conjuntos $A_c = \{u \in E/I(u) \leq c\}$, $c \in \mathbb{R}$. El propósito de este apartado es establecer algunas de estas relaciones. Para ello, denotaremos $K_c = \{u \in E/I(u) = c,\ I'(u) = 0\}$, $N_\delta = \{u \in E/\mathrm{dist}(u, K_c) \leq \delta\}$[1], $(\delta > 0)$.

Concretamente, probaremos el siguiente resultado, básicamente contenido en el Teorema 4 de [30], el Lema 1.3 de [9] y el apéndice A de [70].

Teorema 1 : *Sean E un espacio de Banach real, $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1, $\bar{\varepsilon}, \delta > 0$ y $c \in \mathbb{R}$ números dados. Si I cumple la siguiente propiedad*
$(A)_c \quad \exists \hat{\varepsilon}, b > 0/\|I'(u)\| > b \quad \forall u \in A_{c+\hat{\varepsilon}} - A_{c-\hat{\varepsilon}} - N_{\delta/2}$,
entonces existen $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ y una función continua $\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E$ cumpliendo:

1. $\eta(0, u) = u,\ \forall u \in E$
2. $\eta(t, u) = u,\ \forall t \in [0, 1]$ *y para todo* $u \in E$ *tal que* $I(u) \notin (c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon})$
3. $I(\eta(t, u)) \leq I(u),\ \forall t > 0,\ \forall u \in E$
4. $\|\eta(t, u) - u\| \leq 1,\ \forall u \in E,\ \forall t \in [0, 1]$
5. $\eta(t, \cdot) : E \longrightarrow E$ *es un homeomorfismo para todo* $t \in [0, 1]$.
6. $\eta(1, A_{c+\varepsilon} - N_\delta) \subset A_{c-\varepsilon}$
7. *Si* K_c *es el conjunto vacío, esto es,* $K_c = \varnothing$, $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$
8. *Si* I *es par, entonces* $\eta(t, \cdot)$ *es impar.*

Notas 2 :

1. Si, para $t \in [0, 1]$, pensamos en las aplicaciones $\eta_t : E \longrightarrow E$ construidas a partir de la aplicación η mediante $\eta_t(u) = \eta(t, u)$, $\forall u \in E$, tendremos que por *5*, cada η_t es un homeomorfismo. Además, la propiedad *1.* nos dice que η_0 es la aplicación identidad. Así, podemos ver estas aplicaciones η_t como *deformaciones* del espacio E en si mismo. La propiedad *2.* nos *"localiza"* la deformación; esto es, sólo modificamos los puntos cercanos al nivel $\{u \in E/I(u) = c\}$, permaneciendo invariantes por η_t los puntos con nivel *"lejano"* a c. La propiedad *3.* significa que $\eta_t(A_d) \subset A_d$, para todo $d \in \mathbb{R}$ y la propiedad *4.* afirma que para cada $u \in E$, la deformación η_t en u; es decir, $\eta_t(u)$ está *"cercano"* a u.

[1] Con $N_\delta = \varnothing$ si $K_c = \varnothing$.

2. La propiedad *7.* establece que si c no es un valor crítico de I, entonces η_1 deforma $A_{c+\varepsilon}$ en $A_{c-\varepsilon}$. Esta propiedad será de una importancia fundamental cuando queramos establecer la existencia de puntos críticos del funcional I usando métodos min-max. Si c es valor crítico de I ($K_c \neq \varnothing$), en general, no es posible deformar $A_{c+\varepsilon}$ en $A_{c-\varepsilon}$. Ahora bién, la propiedad *6.* nos dice que si es posible deformar, en $A_{c-\varepsilon}$, el conjunto de puntos de $A_{c+\varepsilon}$ *"no cercanos"* a K_c.

3. La propiedad *8.* es particularmente interesante en las aplicaciones a problemas de contorno para ecuaciones nolineales con una no-linealidad de tipo impar. En este caso, cuando se adopta la formulación variacional de tal problema, el funcional de Euler asociado será par.

4. Usando el teorema de "transversalidad fuerte", Palais obtuvo en [65] teoremas de deformación análogos al Teorema 1 y validos para funcionales de clase C^2 (veánse la Proposición (2) del capítulo 12 de [65]). Posteriormente, en [64] , (véase el capítulo 5 de éste), probó resultados de deformación para funcionales de clase C^{2-} (esto es, funcionales de clase C^1 con derivadas localmente lipchitz).

En el caso de un espacio de Hilbert (real) E y denotando $\nabla I(u)$ como el gradiente de I en u, esto es, el único vector en E tal que $(v, I'(u)) = <\nabla I(u), v>_E \ \forall v \in E$, (con $<\cdot,\cdot>_E$ el producto escalar en E). entonces una forma usual de obtener deformaciones η del tipo requerido en el Teorema 1 consiste en construir las mismas como soluciones del problema de valores iniciales siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= -\nabla I(\eta) \\ \eta(0) &= u \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

En este caso, $\eta(t,u)$ para $t \in [0,1]$ y $u \in E$ indicará la única solución de (1.1). Sin embargo, esto requiere que el campo ∇I sea lo suficientemente regular como para que el problema (1.1) satisfaga las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias. Es claro que esto no basta si I es de clase C^1, pués, ∇I es sólo continuo. Con estos propósitos será muy útil el concepto de *vector pseudogradiente* que, aunque ligeramente más general que el de vector gradiente, conservará las propiedades esenciales para permitir la construcción de un problema *"similar"* a (1.1) que proporcionará el semigrupo o flujo adecuado para probar el Teorema 1 sin necesidad de añadir hipótesis de *"más regularidad"* al funcional I, incluso en el caso en que E es un espacio de Banach (real). Planteando tal problema de valores iniciales veremos (de una forma standar en la teoría de ecuaciones diferenciales), que el flujo asociado satisface, *sin necesidad de* $(A)_c$, las propiedades *1-5* y *8.* Posteriormente, será probado que la condición $(A)_c$ implica *6* y *7.*

Comenzamos por tanto por el siguiente concepto:

Definición 3 : *Sean E un espacio de Banach real, $u \in E$ e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1. Diremos que un elemento $v \in E$ es un vector pseudogradiente (p.g.) de I en u si verifica las siguientes condiciones:*

1. $\|v\| \leq 2\|I'(u)\|$
2. $(v, I'(u)) \geq \|I'(u)\|^2$.

A título de ejemplos del anterior concepto pueden servir los siguientes:

Ejemplos 4 :

1. Si u es un punto crítico de I, $v = 0$ es el único vector p.g. de I en u.

   Si $u \in E$ es tal que $I'(u) \neq 0$, tomando $w \in E$ tal que $\|w\| = 1$ y $(w, I'(u)) > \frac{2}{3}\|I'(u)\|$, entonces $z = \frac{3}{2}\|I'(u)\|w$ es un vector p.g. de I en u

2. Si E es un espacio de Hilbert (real) y $u \in E$, entonces el vector gradiente de I en u, $\nabla I(u)$ es un vector p.g. en u.

Una de las consecuencias más importantes del concepto de vector p.g. consiste en poder construir en un subconjunto apropiado de E, y aunque I sea tan sólo un funcional de clase C^1, un campo de vectores p.g. que además sea localmente lipschitziano (ver los comentarios realizados anteriormente a la Definición 3 para comprender el interés de esto). Obsérvese que, aún para el caso en que E es un espacio de Hilbert e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, esto no es así para el *campo de vectores p.g.* de I, $\nabla : E \longrightarrow E$, definido por $u \longmapsto \nabla I(u)$, pués, en general, ∇ sería sólo de clase C^0. No obstante, la elección de nuestro campo de vectores p.g. localmente lipschitziano sólo podrá ser llevada a cabo donde realmente hay posibilidad de cambiar $\nabla I(u)$ por otro vector p.g. más conveniente para nuestros propositos; esto es, en $E^* = \{u \in E / I'(u) \neq 0\}$. En adelante, adoptaremos la siguiente notación:

Definición 5 : Un campo $V : E^* \longrightarrow E$ se dice de clase C^{1-} si V es localmente lipschitziano en E^*, esto es, si para todo $u \in E^*$, existe un entorno $\mathcal{U}$ de u en E^* tal que $V|_{\mathcal{U}}$ es lipschitziana.

Si denotamos por $C(E^*, E)$ $(C^{1-}(E^*, E))$ el conjunto de las funciones continuas (localmente lipschitzianas) definidas en E^* y valuadas en E, tenemos que $C^{1-}(E^*, E) \subset C(E^*, E)$.

Proposición 6 (Teorema 4.4 de [65]): *Sea E un espacio de Banach real, e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1. Entonces, existe un campo en E^* de vectores p.g. y de clase C^{1-}, esto es, existe $V : E^* \longrightarrow E$ de clase C^{1-}, con $V(u)$ un vector p.g. de I en u para todo $u \in E^*$.*

Nota 7 : La demostración de esta proposición puede verse en la referencia [65] antes citada. Obsérvese también que en el caso de un funcional I que además de las hipótesis de la proposición anterior, sea par, entonces el campo V mencionado anteriormente puede tomarse impar. (Tómese $\bar{V}(u) = \frac{1}{2}(V(u) - V(-u))$ y observemos que, si I es par, I' es impar y que E^* es simétrico respecto del origen).

Ya estamos en condiciones de construir la deformación anunciada en el Teorema 1. Para ello, la idea principal consiste en considerar el *flujo* definido por las soluciones de los problemas de valores iniciales:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\eta}{\partial t} &= W(\eta(t))\\ \eta(0) &= u\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

donde $W : E \longrightarrow E$ está esencialmente dado por el campo V de clase C^1 de vectores p.g. de I construido en la Proposición 6. En realidad, para nuestros propósitos será preciso realizar algunas operaciones para el campo V. Así, motivados por el carácter local que pretendemos dar a la deformación η, multiplicaremos V por una función adecuada $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que nos *localice* el flujo η, que se define de la forma siguiente:

Dados el espacio de Banach real E, el funcional I en él, $c \in \mathbb{R}$ y $\bar{\varepsilon}, \delta > 0$, tomamos $0 < \varepsilon < \hat{\epsilon} < \bar{\varepsilon}$, cualesquiera, en principio. Consideramos los siguientes conjuntos: $A = \{u \in E / I(u) \notin (c-\hat{\varepsilon}, c+\hat{\varepsilon})\}$, $B = \{u \in E / c-\varepsilon \leq I(u) \leq c+\varepsilon\}$, y definimos la función $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(u) = \frac{\mathrm{dist}(u, A)}{\mathrm{dist}(u, A) + \mathrm{dist}(u, B)}, \quad \forall u \in E.$$

Observemos que f está bien definida pués $\bar{A} \cap \bar{B} (= A \cap B) = \emptyset$ y que se verifica:

- $f(u) = 1 \quad \forall u \in B$
- $f(u) = 0 \quad \forall u \in A$
- $0 \leq f(u) \leq 1 \ \forall u \in E.$

Análogamente y motivados por la pretensión de conseguir *6*, se define otra función $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $g(u) = 1 \quad \forall u \in E - N_{\delta/4}$
- $g(u) = 0 \quad \forall u \in N_{\delta/8}$
- $0 \leq g(u) \leq 1 \ \forall u \in E.$

Por último y para conseguir que el flujo esté definido en el intervalo $[0, 1]$, también consideramos la función $h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si } t \geq 1 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Pués bién, $W : E \longrightarrow E$ está definido por

$$W(u) = \begin{cases} -f(u)g(u)h(\|V(u)\|)V(u) & \text{si } u \in E^* \\ 0 & \text{si } u \in E - E^*. \end{cases}$$

Para cada $u \in E$ consideramos el problema de valores iniciales (1.2). De las condiciones satisfechas por el campo W se deduce trivialmente que dicho problema tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$. Denotemos por $\eta(t,u)$ el valor, en el tiempo t, de dicha solución. Tenemos así definida una función continua $\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E$ que satisface además las propiedades enunciadas en el siguiente lema:

Lema 8 : *Se satisfacen:*

1. $\eta(0,u) = u, \;\forall u \in E$
2. $\eta(t,u) = u, \;\forall t \in [0,1]$ *y para todo* $u \in E$ *tal que* $I(u) \notin (c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon})$
3. $I(\eta(t,u)) \leq I(u), \;\forall t > 0, \;\forall u \in E$
4. $\|\eta(t,u) - u\| \leq 1, \;\forall u \in E, \;\forall t \in [0,1]$
5. $\eta(t,\cdot) : E \longrightarrow E$ *es un homeomorfismo para todo* $t \in [0,1]$.
6. *Si además* I *es par, entonces* $\eta(t,\cdot)$ *es impar.*

Demostración: Por el teorema (véase capítulo 6 de [65] y teorema 3.9 de [64]) de existencia y unicidad de solución de problemas de valores iniciales, (1.2) posee una única solución $\eta(\cdot,u)$ definida en el intervalo maximal $(t^-(u), t^+(u))$, para cada $u \in E$. Puesto que el campo W está acotado, se sabe que $t^-(u) = -\infty$ y $t^+(u) = +\infty$. Además, por el teorema de dependencia continua, $\eta : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ es continua. Observemos también que:

a) Por definición de η, $\eta(0,u) = u \;\; \forall u \in E$ y así se verifica *1.*

b) Si $I(u) \notin (c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon})$, entonces $u \in A$ y, por tanto, $W(u) = 0$, con lo cual $\eta(\cdot,u) \equiv u$ es la única solución de (1.2). Esto prueba *2.*

c) Ya que

$$\frac{\partial I(\eta(t,u))}{\partial t} = (\frac{\partial \eta(t,u)}{\partial t}, I'(\eta(t,u))\,) = (W(\eta(t,u)), I'(\eta(t,u))\,),$$

deducimos que si $u \in E^*$ (y por tanto $\eta(t,u) \in E^*, \;\forall t \in \mathbb{R}$), entonces

$$\frac{\partial I(\eta(t,u))}{\partial t} = -f(\eta(t,u))g(\eta(t,u))h(\|V(\eta(t,u))\|)(V(\eta(t,u)), I'(\eta(t,u))\,)$$

$$(\text{Def. } 3,\mathit{2}) \leq -f(\eta(t,u))g(\eta(t,u))h(\|V(\eta(t,u))\|)\|I'(\eta(t,u))\|^2$$

(y por la Definición 3,*1*))

$$\leq -\frac{1}{2} f(\eta(t,u))g(\eta(t,u))h(\|V(\eta(t,u))\|)\|V(\eta(t,u))\| \; \|I'(\eta(t,u))\|$$

de donde,

$$\frac{\partial I(\eta(t,u))}{\partial t} \leq -\frac{1}{2}\|W(\eta(t,u))\| \, \|I'(\eta(t,u))\| \leq 0 \tag{1.3}$$

para todo $u \in E^\star$ (y, por lo tanto, para todo $u \in E$ puesto que si $u \in E - E^\star$, $\eta(t,u) = u \; \forall t \in \mathbb{R}$ e $I'(u) = 0$). Queda así por una parte probado *3.* del lema, y por otra, la desigualdad (1.3) que se utilizará posteriormente.

d) Integrando la ecuación (1.2) y usando que $\|W\| \leq 1$, obtenemos

$$\|\eta(t,u) - u\| \leq |t| \leq 1, \quad \forall t \in [0,1],$$

que es la propiedad *4.* del lema.

e) Es bien conocido que el flujo de soluciones η de (1.2) satisface la siguiente propiedad de semigrupo:

$$\eta(t+s,u) = \eta(t,\eta_s(u)) \ , \quad \forall u \in E \quad \forall t,s \in \mathbb{R}.$$

Mediante dicha propiedad se deduce trivialmente que $\eta(t,\cdot)$ es un homeomorfismo con

$$\eta(t,\cdot)^{-1} = \eta(-t,u).$$

f) Si I fuese par, el campo V de vectores p.g. podría tomarse impar (véase Nota 7., y f y g son pares. Así $\eta(t,-u) = -\eta(t,u)$, para todo $u \in E, \; t \in \mathbb{R}$. ∎

A la vista del Lema 8, tenemos ya demostrada parte del Teorema 1 . No obstante, queda aún la parte más interesante del mismo; esto es, que si E, I, $\bar\varepsilon$, δ, c, $\hat\varepsilon$, b están en las condiciones de dicho teorema (y con $\hat\varepsilon < \bar\varepsilon$, sin pérdida de generalidad), entonces la condición $(A)_c$ implica la existencia de $\varepsilon > 0$ tal que el correspondiente flujo dado por el lema anterior verifica *6* y *7.* Esto será hecho a continuación:

Demostración del Teorema 1: Por el lema anterior quedan por probar los apartados *6.* y *7.* del Teorema 1. Para ello supongamos que $E, I, \bar\varepsilon, \delta, c, \hat\varepsilon, b$ satisfacen las hipótesis de dicho teorema. Podemos también suponer que

$$0 < \hat\varepsilon < \min\{\bar\varepsilon, \frac{b\delta}{8}, \frac{b^2}{2}, \frac{1}{8}\}.$$

Entonces si $\varepsilon > 0$ satisface $\varepsilon < \hat\varepsilon$, la aplicación η dada por el Lema 8, cumple *6.* y *7.* En efecto, observemos que

$$A_{c+\varepsilon} - N_\delta = [A_{c+\varepsilon} - (A_{c-\varepsilon} \cup N_\delta)] \cup (A_{c-\varepsilon} - N_\delta),$$

y que por *3.* del Lema 8, $\eta(1, A_{c-\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$, con lo cual sólo falta por comprobar que $\eta(1, A_{c+\varepsilon} - (A_{c-\varepsilon} \cup N_\delta)) \subset A_{c-\varepsilon}$. Si $K_c \neq \varnothing$, esto se hará en dos pasos; el primero de ellos establece que para los puntos $u \in A_{c+\varepsilon} - (A_{c-\varepsilon} \cup N_\delta)$, $\eta(t,u)$ está *"lejos de K_c "*. El segundo paso probará ya la propiedad *6.* del Teorema 1.

Paso 1: Si $u \in A_{c+\varepsilon} - (A_{c-\varepsilon} \cup N_\delta)$, entonces $\eta(t,u) \notin N_{\delta/2}$, $\forall t \in [0,1]$.

En efecto, si esto no fuese así, existiría $t_0 = \inf\{t > 0 / \eta(t,u) \in N_{\delta/2}\} > 0$. Puesto que por unicidad de la solución de (1.2) , $\eta(t,u) \notin A_{c-\hat\varepsilon}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, tendríamos que por $(A)_c$,

$$\|I'(\eta(t,u)\| > b \quad \forall t \in [0,t_0),$$

y además,

$$I(\eta(0,u)) - I(\eta(t,u)) < c + \varepsilon - c + \hat{\varepsilon} < 2\hat{\varepsilon}, \ \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$

de donde, usando (1.3), deducimos que

$$\begin{aligned}
2\hat{\varepsilon} &> \int_{t_0}^{0} \frac{\partial I(\eta(t,u))}{\partial t}\, dt \\
&\geq -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{0} \|I'(\eta(t,u))\| \ \|W(\eta(t,u))\|\, dt \\
&\geq -\frac{b}{2}\int_{t_0}^{0} \|W(\eta(t,u))\|\, dt \\
&\geq \frac{b}{2}\|\eta(t_0,u) - u\|
\end{aligned}$$

y así

$$\operatorname{dist}(\eta(t_0,u), K_c) \geq \operatorname{dist}(u, K_c) - \|\eta(t_0,u) - u\| > \delta - \frac{4\hat{\varepsilon}}{b} > \frac{\delta}{2}$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, el primer paso está probado.

Paso 2: Si $u \in A_{c+\varepsilon} - (A_{c-\varepsilon} \cup N_\delta)$ entonces $\eta(1,u) \in A_{c-\varepsilon}$. En efecto, si no fuese así, por el *Paso 1* y teniendo en cuenta la propiedad *3.* del Lema 8, $\eta(t,u) \in A_{c+\varepsilon} - (A_{c-\varepsilon} \cup N_{\delta/2})$ para todo $t \in [0,1]$. Entonces:

$$f(\eta(t,u)) = 1 = g(\eta(t,u)) \ \ \forall t \in [0,1]$$

de donde,

$$\frac{\partial I(\eta(t,u))}{\partial t} = -h(\|V(\eta(t,u))\|)(V(\eta(t,u)), I'(\eta(t,u))\,), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{1.5}$$

Ahora bién, si $\|V(\eta(t,u))\| > 1$, por la Definición 3 queda:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I(\eta(t,u))}{\partial t} &\leq -h(\|V(\eta(t,u))\|)\|I'(\eta(t,u))\|^2 \\
&\leq -\frac{1}{4}\|V(\eta(t,u))\|^2 \\
&< -\frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

De otra parte, si $\|V(\eta(t,u))\| \leq 1$, por ser V un campo de vectores p.g. y la condición $(A)_c$ deducimos de (1.5) que

$$\frac{\partial I(\eta(t,u))}{\partial t} = -(V(\eta(t,u)), I'(\eta(t,u))\,) \leq -\|I'(\eta(t,u))\|^2 \leq -b^2. \tag{1.7}$$

Así, de (1.6) y (1.7), tenemos

$$\frac{\partial I(\eta(t,u))}{\partial t} \leq -\min\{b^2, \frac{1}{4}\} \quad \forall t \in [0,1]$$

de donde, integrando entre 0 y 1 y usando (1.4),

$$\min\{b^2, \frac{1}{4}\} \leq I(u) - I(\eta(1,u)) \leq 2\hat{\varepsilon}$$

lo cual es una contradicción.

Si $K_c = \varnothing$, para probar la propiedad *7.* del Teorema 1, bastaría probar que $\eta(1, A_{c+\varepsilon} - A_{c-\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$. Esto puede hacerse fácilmente utilizando los mismos argumentos del *Paso 2* anterior y teniendo en cuenta que $N_\delta = \varnothing$.

■

1.2 Condiciones de compacidad del tipo Palais-Smale.

La hipótesis $(A)_c$ del Teorema 1 es bastante técnica y díficil de comprobar, tal y como está escrita, para los ejemplos particulares de funcional I. Por esta razón y dada la relevancia del Teorema 1 en los teoremas abstractos que presentaremos posteriormente, nos proponemos estudiar a continuación una serie de condiciones suficientes para que se satisfaga tal hipótesis $(A)_c$.

Comenzamos por la condición más conocida y frecuente de encontrar en la literatura matemática actual sobre teoría de putos críticos, esta es, *la condición de Palais-Smale*:

Definición 1 [74] (Condiciones (PS) y $(PS)_c$): *Sea $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1.*

1. *Se dice que I verifica la condición de Palais-Smale (abreviadamente (PS)) si de toda sucesión $\{u_n\}$ en E cumpliendo:*

   (a) $\{I(u_n)\}$ está acotada,

   (b) $\{I'(u_n)\}$ es convergente a cero,

   se puede extraer una subsucesión convergente.

2. *Dado $c \in \mathbb{R}$, se dice que I verifica la condición local de Palais-Smale en c (abreviadamente $(PS)_c$) si de toda sucesión $\{u_n\}$ en E cumpliendo:*

   (a) $\{I(u_n)\}$ es convergente a c,

   (b) $\{I'(u_n)\}$ es convergente a cero,

   se puede extraer una subsucesión convergente.

También vamos a considerar la siguiente condición introducida por Brézis, Coron y Nirenberg para el estudio de la ecuación de ondas no-lineal:

Definición 2 [26] (Condición $(w-PS)_c$): *Sea $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 y $c \in \mathbb{R}$. Se dice que I satisface la condición débil de Palais-Smale en c (abreviadamente $(w-PS)_c$) si verifica la siguiente propiedad:*

"Siempre que existe una sucesión $\{u_n\}$ en E tal que:

1. *$\{I(u_n)\}$ es convergente a c,*
2. *$\{I'(u_n)\}$ es convergente a cero,*

entonces c es un valor crítico de I".

La siguiente proposición, cuya demostración es trivial muestra las distintas relaciones entre estas condiciones y la hipótesis $(A)_c$:

Proposición 3 : *Sea $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 y $c \in \mathbb{R}$. Se tiene:*

1. *Si I verifica la condición de Palais-Smale (PS), entonces I verifica la condición local de Palais-Smale $(PS)_c$ en c.*
2. *Si I verifica la condición local de Palais-Smale $(PS)_c$, entonces I verifica la condición débil de Palais-Smale $(w-PS)_c$ en c.*
3. *Si I verifica la condición local de Palais-Smale $(PS)_c$, entonces K_c es compacto e I cumple $(A)_c$ para todo $\delta > 0$.*
4. *Si I verifica la condición débil de Palais-Smale $(w-PS)_c$ entonces o bién I cumple $(A)_c$ para todo $\delta > 0$, o bién c es un nivel crítico de I.*

Notas 4 :

1. Observemos que el reciproco de *3.* es cierto; esto es, que *si I cumple $(A)_c$ para todo $\delta > 0$ y K_c es compacto, entonces I verifica $(PS)_c$.*

2. También es cierto el reciproco de 4, a saber, que *si I cumple $(A)_c$ para todo $\delta > 0$, o c es un nivel crítico de I, entonces I verifica $(w - PS)_c$.*

3. Las propiedades anteriores se pueden resumir en el siguiente cuadro:

$$(PS) \Longrightarrow (PS)_c \Longleftrightarrow \begin{cases} (A)_c \overset{(K_c=\varnothing)}{\Longleftrightarrow} (w - PS)_c \\ \\ K_c \text{ es compacto} \end{cases}$$

4. Notemos que, en general, para $c \in \mathbb{R}$ dado, se tiene

   (a) $(PS) \not\Longleftarrow (PS)_c$,

   (b) $(PS)_c \not\Longleftarrow (w - PS)_c$,

   (aunque trivialmente $(PS) \Longleftrightarrow (PS)_c$, $\forall c \in \mathbb{R}$). Ejemplos de la primera afirmación se verán en el Capítulo III, mientras que un ejemplo de la segunda es el siguiente:

   Ejemplo 5 : Tomemos como $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional definido por $I(x) = \dfrac{x^3}{1+x^4}$. Se comprueba fácilmente que los únicos puntos críticos de I son $\{0, \pm\sqrt[4]{3}\}$, con $I(0) = 0$. Así, I cumple $(w - PS)_0$. Sin embargo, no satisface $(w - PS)_0$ pues la sucesión $\{n + 1\}$ no posee ninguna subsucesión convergente.

5. Como muestra el Ejemplo 5, la condición $(w - PS)_c$ no es suficiente para $(A)_c$. No obstante, y como se verá en las aplicaciones (Capítulo IV), ha resultado ser muy útil para probar la existencia de níveles críticos de tipo min-max. Ello es posible en virtud del resultado siguiente:

   Proposición 6 [26] : *Sean E, I, $\bar{\varepsilon} > 0$ y $c \in \mathbb{R}$ en las condiciones del Teorema* 1, *con I satisfaciendo $(w - PS)_c$ en lugar de $(A)_c$. Entonces, si $K_c = \varnothing$, existen $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ y $\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E$ continua cumpliendo 1-5, 7. y 8. del Teorema 1.* ∎

6. Hemos de observar por último que aunque las condiciones que estamos estudiando reciben el nombre de Palais y Smale, la introducida por estos autores no fué exactamente ninguna de éstas (véase [77, 66, 65]).

En los capítulos que siguen, la comprobación de la condición $(PS)_c$ representará un papel fundamental ya que si se satisface dicha condición, se dispondrá de resultados adecuados para demostrar que c es un nivel crítico de I. Por ello, siguiendo a [22, 30] damos el siguiente resultado:

Lema 7 : *Sean $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 y $c \in \mathbb{R}$. Entonces, I satisface $(PS)_c$ si y solamente si I verifica las condiciones que siguen:*

1. *Para toda sucesión $\{u_n\}$ en E tal que*
   (a) $\{I(u_n)\} \longrightarrow c$,
   (b) $\{\|u_n\|\} \longrightarrow +\infty$,

   existen $\alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|I'(u_n)\| > \alpha$ $\forall n \geq n_0$.
2. *Toda sucesión $\{u_n\}$ verificando*
   (a) $\{u_n\}$ *está acotada,*
   (b) $\{I(u_n)\} \longrightarrow c$,
   (c) $\{I'(u_n)\} \longrightarrow 0$,

   admite una subsucesión convergente. ■

Notas 8 :

1. Obsérvese que la condición *1.* nos está proporcionando una cota *"a priori"* de los puntos críticos de I con nivel c; es decir, de K_c. No obstante, puede verse en [4, §9] un ejemplo de un funcional I que satisface (PS) (y por tanto, $(PS)_c$, $\forall c \in \mathbb{R}$; lo que implica la acotación de K_c para todo $c \in \mathbb{R}$) y, sin embargo, no existe una cota *a priori* de las soluciones de $I'(u) = 0$.
2. De otra parte, la condición *2.* es una *condición de compacidad* satisfecha por un gran número de funcionales que surgen del estudio de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales.
3. Existe una profunda relación entre la coercividad de un funcional I (esto es, $\lim_{\|u\|\to+\infty} I(u) = +\infty$) y que éste verifique la condición (PS). Por ejemplo, Shujie [76] ha probado que si I está acotado inferiormente y cumple (PS) entonces I es coercivo. (Véase también [34] para más detalles).

1.3 Algunos teoremas clásicos.

En esta sección presentamos algunos resultados de existencia de puntos críticos para un funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, siendo E un espacio de Banach real.

Nuestra técnica básica consistirá en encontrar niveles críticos de I por medio de argumentos min-max. Estos consisten en considerar una clase Γ de subconjuntos de E, definir, cuando sea posible:

$$c = \inf_{S \in \Gamma} \max_{u \in S} I(u)$$

y probar, usando alguna herramienta topológica (como puede ser el Teorema 1 de deformación o similares) que c es un nivel crítico de I. Comenzaremos con un ejemplo sencillo donde, para un funcional acotado inferiormente y satisfaciendo una condición de compacidad apropiada, se puede probar la existencia de mínimo del mismo.

Teorema 1 : *Sean E un espacio de Banach real e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 acotado inferiormente. Sea $m_0 = \inf_{u \in E} I(u)$. Si I satisface $(w - PS)_{m_0}$, entonces m_0 es un valor crítico de I.*

Demostración: Si K_{m_0} fuera el conjunto vacío, por $(w - PS)_{c_0}$ y la Proposición 6, existen $\varepsilon > O$ y $\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E$ continua verificando

$$\eta(1, A_{m_0+\varepsilon}) \subset A_{m_0-\varepsilon}$$

Eligiendo $u \in E$ tal que $I(u) < m_0 + \varepsilon$ obtendremos $I(\eta(1,u)) < m_0 - \varepsilon$ lo cual no es posible por la definición de m_0. Esto prueba que K_{m_0} es no vacío y, por tanto, m_0 es un nivel crítico de I.

Notas 2 :

1. Observese que m_0 puede obtenerse en la forma indicada anteriormente, tomando $\Gamma = \{\{u\}/u \in E\}$.
2. Se puede conseguir otra demostración distinta del teorema anterior si usamos el principio variacional de Ekeland en lugar de la Proposición 6 (véase [46, Teorema 20]).

El Teorema 1 nos proporciona una condición suficiente para que el funcional I acotado inferiormente, alcance su ínfimo. De aquí se obtiene de manera trivial que dicho ínfimo es un valor crítico de I y por lo tanto, el conjunto de puntos críticos es no vacío. Sin embargo, en las aplicaciones a la teoría de problemas de contorno para ecuaciones diferenciales no lineales surge en numerosas ocasiones la cuestión de la existencia de puntos críticos para funcionales I no acotados ni superior ni inferiormente. Para estos casos (aunque posteriormente se ha demostrado también su utilidad para funcionales acotados inferiormente), es muy útil el *"Lema del Paso de Montaña"* de Ambrosetti y Rabinowitz [9]. Desde el punto de vista intuitivo, podemos describirlo de la forma siguiente:

Imaginemos que la Tierra es plana y viene modelada por $\mathbb{R}^2$. Sea $I : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto I(x)$, donde $I(x)$ marca la altura sobre el nivel del mar del punto x. Supongamos que el origen 0 está en un valle rodeado por un anillo de montañas, es decir, que existe un entorno Θ del origen tal que

$$I(x) \geq c_0 > I(0) \quad \forall x \in \partial\Theta.$$

Finalmente, supongamos también que hay un punto e fuera de Θ donde la altura es menor que c_0. Si nosotros deseamos ir de e a 0 es lógico que queramos hacerlo subiendo lo menos posible. Evidentemente, esto se coseguiría si existiese un camino que atravesase el anillo de montañas por el punto más bajo (*paso de montaña*). La altura más alta de este paso de montaña debería ser un nivel crítico de I y allí el valor de I sería igual a

$$c = \inf_{p \in \mathcal{P}} \max_{x \in p} I(x) \geq c_0$$

Aquí $\mathcal{P}$ representa el conjunto de caminos continuos que unen e con 0. La discusión anterior es completamente intuitiva. Para demostrar que c es un valor crítico de I necesitamos añadir alguna condición de compacidad sobre el funcional I, (por ejemplo, $w-(PS)_c$). Tenemos así una versión abstracta, a nivel de espacios de Banach, del mismo:

Teorema 3 (Ambrosetti - Rabinowitz, [9]): *Sean E un espacio de Banach real e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 y verificando la siguiente propiedad:*

(I_1) *Existe un entorno abierto Θ de cero y un punto $e \notin \bar{\Theta}$ tal que*

$$\max\{I(0), I(e)\} < c_0 = \inf_{u \in \partial\Theta} I(u).$$

Si además se verifica $(w-PS)_c$ con

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(h(t)) \tag{1.8}$$

donde $\Gamma = \{h : [0,1] \longrightarrow E/h$ es continua y $h(0) = 0,\ h(1) = e\}$, entonces c es un valor crítico de I mayor o igual que c_0.

Demostración: Observemos en primer lugar que no hay pérdida de generalidad en suponer que $0 = \max\{I(0), I(e)\}$ y que puesto que $\partial\Theta$ separa 0 y e, un simple razonamiento de continuidad-conexión implica

$$h([0,1]) \cap \partial\Theta \neq \varnothing, \quad \forall h \in \Gamma,$$

por lo que, usando (I_1) $\max\{I(h(t))/t \in [0,1]\} \geq c_0, \quad \forall h \in \Gamma$ y por lo tanto, $c \geq c_0 > 0 = \max\{I(0), I(e)\}$.

Ahora, si c no fuera un nivel crítico de I, aplicando el Teorema 1 y la Proposición 6, existirán $\varepsilon \in (0, \frac{c_0}{2})$ y una función continua $\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E$ tales que

a) $\eta(1, u) = u$ si $I(u) \notin (c - \frac{c_0}{2}, c + \frac{c_0}{2})$

b) $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

Tomando $h \in \Gamma$ tal que $\max_{t\in[0,1]} I(h(t)) < c + \varepsilon$, y definiendo $g(t) = \eta(1, h(t))\ \forall t \in [0,1]$, tenemos que por ($I_1$) y a)

$$g(0) = \eta(1, h(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

$$g(1) = \eta(1, h(1)) = \eta(1, e) = e.$$

Así que $g \in \Gamma$. Pero entonces b) implica

$$I(g(t)) = I(\eta(1, h(t)) \leq c - \varepsilon < c,$$

lo que contradice la definición de c. Por lo tanto, c ha de ser un nivel crítico de I. ∎

Notas 4 :

1. En la versión original de este teorema probada por Ambrosetti y Rabinowitz, ellos suponen una condición de compacidad (la $(PS)_c$) ligeramente más fuerte que $(w-PS)_c$. Fueron Brézis, Coron y Nirenberg [26], quienes al probar un lema de deformación (Proposición 6) para el caso en el que el funcional I satisface $(w-PS)_c$, dieron lugar a esta versión. (Aunque su demostración y la dada en el Teorema 3 anterior siguen los mismos pasos que la original de Ambrosetti y Rabinowitz).

2. Ambrosetti y Rabinowitz supusieron también una condición suficiente para (I_1), en lugar de ésta. En concreto, ellos supusieron:

   (I_2) $\exists \rho > 0$ y $\exists \alpha > 0$ tales que
   $$I(u) > I(0) = 0, \quad \forall u \in B_E(0,\rho) - \{0\}$$
   $$I(u) \geq \alpha \quad \forall u \in \partial B_E(0,\rho).$$
   (donde $B_E(0,\rho) = \{u \in E / \|u\| < \rho\}$).
   (I_3) $\exists e \in E - \{0\}$ tal que $I(e) = 0$.

   Las condiciones (I_2) e (I_3) suelen presentarse con mucha frecuencia en funcionales surgidos o ligados a ciertos problemas de contorno no lineales que tienen a la solución cero por solución trivial y para los que se está interesado en encontrar otra solución. Suele ocurrir en estos casos que 0 es un mínimo relativo del funcional I cumpliendo (I_2). Supongamos por tanto que se verifica (I_2). Entonces la condición (I_3) se cumple en cualquiera de las situaciones siguientes:

   (a) 0 es un mínimo relativo de I pero no es absoluto (una forma frecuente de comprobar esto en la práctica consiste en encontrar un $u \in E$ tal que $\lim_{\lambda \to +\infty} I(\lambda u) = -\infty$; (con lo que el funcional I no está acotado inferiormente)).

   (b) 0 es un mínimo absoluto de I pero no es el único.

3. El Teorema 3 proporciona una cota inferior (c_0) para el nivel crítico c. Ello es importante para el estudio de la multiplicidad de puntos críticos de I.

4. En principio, el Teorema 3 nos da un nivel crítico (*de paso de montaña*) de I y por tanto, la existencia de un punto crítico. Sin embargo, no nos da información sobre éste, es decir, si por ejemplo por él pasa un *camino de paso de montaña.* Bona, Bose y Turner [24] han probado que *si además*

de las hipótesis del teorema anterior, I cumple $(PS)_c$, entonces para toda sucesión $\{h_n\}$ en Γ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(h_n(t)) \longrightarrow c,$$

se puede encontrar una sucesión $\{t_k\} \subset [0,1]$ y una subsucesión $\{h_{n_k}\}$ de $\{h_n\}$ tal que $\{h_{n_k}(t_k)\}$ converge a un $u \in E$, con $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

5. Si observamos la explicación intuitiva del Lema de Paso de Montaña, es natural preguntarse qué pasa si permitimos a las montañas que separan 0 y e tener altura cero, esto es, si imponemos en lugar de (I_1) la siguiente condición:

   (I_1') $\max\{I(0), I(e)\} \leq \inf_{u\in\partial\Theta} I(u)$.

   Trabajos en esta linea con la condición $(PS)_c$ en lugar de $(w-PS)_c$, son [68, 69] (sobre todo, para el caso E un espacio de dimensión finita). En el caso general (E cualquiera), Rabinowitz ha probado [70, Teorema 3.10] que si c definido por (3.1) es igual al $\max\{I(0), I(e)\}$, entonces I tiene un punto crítico en $\partial\Theta$. Evidentemente, si $c > \max\{I(0), I(e)\}$ la misma demostración anterior es válida para obtener que c es un valor crítico de I.

6. Propiedades cualitativas del conjunto K_c (con c dado por el teorema de paso de montaña) y que resultan especialmente interesantes para el estudio de la multiplicidad de puntos críticos del funcional I, han sido estudiadas combinando las técnicas de deformación de este capítulo con métodos de grado topológico y de teoría de Morse [3, 36, 49, 50, 51, 69].

7. Aunque el Teorema 3 sigue siendo de gran utilidad en las aplicaciones, también ha sido origen de diversos trabajos de investigación, donde para conseguir la existencia de puntos críticos, se debilitan o bién la regularidad del funcional I [20, 40] o bién su dominio de definición [37].

Como ya hemos comentado, el Teorema de paso de montaña suele ser muy útil cuando el funcional I posea un mínimo relativo en un punto $u \in E$. Dicho teorema se intenta aplicar entonces para obtener la existencia de otros puntos críticos distintos de u. Si, a priori, no es conocido la existencia de ningún punto crítico, el siguiente resultado, debido a Rabinowitz [71] es también de utilidad. Se conoce con el nombre de Teorema de punto silla. Sea E un espacio de Banach real e $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1. Supongamos que $E = \bar{E} \oplus \tilde{E}$, de manera algebraica y topológica, donde $\bar{E}$ es un subespacio no trivial de E de dimensión finita. Para cada $u \in E$, escribimos $u = \bar{u} + \tilde{u}$, $\bar{u} \in E$, $\tilde{u} \in \tilde{E}$.

Teorema 5 (Rabinowitz [71]): *Supongamos que existe un entorno acotado D de 0 en $\bar{E}$ y constantes reales $\alpha < \beta$ tales que:*
$(I_4) I(u) \geq \beta, \quad \forall u \in \tilde{E},$
$(I_5) I(u) < \alpha, \quad \forall u \in \partial D.$

Entonces, si I satisface $(w-PS)_c$, donde

$$c = \inf_{h\in\Gamma} \max_{u\in h(\bar{D})} I(u) \tag{1.9}$$

con $\Gamma = \{h \in C(\bar{D}, E)/\ h(u) = u\ \forall u \in \partial D\}$, se tiene que c es un valor crítico de I mayor o igual que β.

Demostración: Sea $P : E \longrightarrow \bar{E}$ la proyección dada por la descomposición de E. Para cualquier $h \in \Gamma$, se puede comprobar fácilmente que el grado de Brouwer (véase [44]) de $P \circ h$ relativo a D en 0 está bién definido y es igual a $\deg(P \circ h, D, 0) = 1$. Por lo tanto, existe $u \in D$ tal que $P \circ h(u) = 0$, esto es, $h(u) \in \tilde{E}$. Deducimos por (I_4) que

$$\max_{u\in h(\bar{D})} I(u) \geq \beta, \quad \forall h \in \Gamma$$

y así $c \geq \beta$.

Supongamos ahora que c no es un valor crítico de I. Por la Proposición 6, existirán $\varepsilon > 0$ y $\eta : [0,1] \times E \longrightarrow E$ continua tales que

a) $\eta(1,u) = u$ si $I(u) \notin (c - \frac{\beta-\alpha}{2}, c + \frac{\beta-\alpha}{2})$

b) $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$.

Tomando entonces $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u\in\bar{D}} I(h(u)) < c + \varepsilon,$$

tendremos por a) e (I_5) que $\eta \circ h \in \Gamma$ y por b) que

$$I(\eta \circ h(u)) < c - \varepsilon, \quad \forall u \in \bar{D},$$

lo cual contradice la definición de c.

Luego c tiene que ser un nivel crítico de I. ∎

Notas 6 :

1. Usualmente en las aplicaciones $D = B_{\bar{E}}(0,R) = \{\bar{u} \in \bar{E}/\|\bar{u}\| < R\}$, con R convenientemente elegido.

2. El teorema anterior fué motivado por el trabajo previo de Ahmad, Lazer y Paul [2] sobre existencia de soluciones para problemas de contorno elípticos no-lineales. Con las hipótesis de dicho trabajo, el funcional I asociado satisface que $I\mid_{\tilde{E}}$ está acotado inferiormente y

   (I_5') $I(\bar{u}) \longrightarrow -\infty$ cuando $\|\bar{u}\| \longrightarrow +\infty$, $\bar{u} \in \bar{E}$.

3. La justificación del nombre dado al teorema (de punto de silla) anterior puede encontrarse en el hecho de que un funcional I que sea cóncavo en $\bar{E}$, convexo en $\tilde{E}$ y satisfaga una condición adecuada de coercividad en el infinito, satisface en numerosas ocasiones las hipótesis de dicho teorema.

4. Análogamente a lo comentado para el teorema de paso de montaña, han sido estudiadas propiedades cualitativas del conjunto K_c (con c dado por (1.9)) [55, 63].

5. Los Teoremas 3 y 5 pueden ser unificados bajo el concepto de *"linking"*. Veáse [23, 63, 70] para esto, así como para generalizaciones de los mismos. Muchas otras observaciones y aplicaciones de los Teoremas 3 y 5 pueden ser vistos en [70].

Capítulo 2

Existencia de puntos críticos de funcionales no coercivos

2.1 Condiciones suficientes para la existencia de mínimo global de funcionales que no verifican condiciones de compacidad. Condiciones suficientes para la existencia de otros níveles críticos.

Nos proponemos en este capítulo presentar algunos resultados abstractos especialmente útiles para el estudio de los problemas de contorno que se consideraran posteriormente. Supondremos en toda la sección que E es un espacio de Banach real reflexivo tal que $E = \bar{E} \oplus \tilde{E}$, donde $\bar{E}$ es un subespacio no trivial de dimensión finita y $\tilde{E}$ es un complemento algebraico y topológico de $\bar{E}$ en E. Seguiremos utilizando la misma notación que en el capítulo anterior; es decir, para todo $u \in E$, $u = \bar{u} + \tilde{u}$ con $\bar{u} \in \bar{E}$ y $\tilde{u} \in \tilde{E}$. También supondremos que el funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1, y se descompone en $I = L + N$, con $L, N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1. Se supondrá a lo largo de todo el capítulo las siguientes hipótesis (poco restrictivas en las aplicaciones): L es débil inferiormente semi-continuo (w.l.s.c.)[1], con L' monótono (así maximal monótono)[2] y $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $N' : E \longrightarrow E^*$ son continuos cuando en E se considera la topologia débil y en $\mathbb{R}, E^*$ la topologia de la norma, esto es, si $u \in E$ y $\{u_n\} \rightharpoonup u$ en E entonces $\{N(u_n)\} \longrightarrow N(u)$ y $\{N'(u_n)\} \longrightarrow N'(u)$. Por último, se supone también que

$$L(u) = L(\tilde{u}) \quad \forall u \in E. \tag{2.1}$$

En nuestro primer resultado, probamos una cierta propiedad de *compacidad* para el funcional I. Para ello, jugará un papel especialmente interesante el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{D} = \{d \in \mathbb{R} / \exists \{v_n\} \subset E : \|\bar{v}_n\| \longrightarrow +\infty,\ \{\tilde{v}_n\} \text{ acotada y } \{N(v_n)\} \longrightarrow d\},$$

que pone de manifiesto en cierta forma el comportamiento asintótico de N.

Notas 1 :

1. Observemos que $\mathfrak{D}$ puede ser el conjunto vacío. Tal es, por ejemplo, el caso si $\lim_{\|u\| \to +\infty} |N(u)| = +\infty$.

[1]Es decir, si $u \in E$ y $\{u_n\} \longrightarrow u$ débilmente en E ($\{u_n\} \rightharpoonup u$) entonces $L(u) \leq \liminf_{n\to\infty} L(u_n)$.

[2]Un operador $A : E \longrightarrow E^\star$ se dice monótono si $(u - v, A(u) - A(v)) \geq 0$, $\forall u, v \in E$ ($(\cdot,\cdot)$ representa la dualidad entre E y E^*). A se dice maximal monótono si es monótono y, además, verifica la siguiente propiedad:

"Para todo $v \in E$, $\phi \in E^*$ tales que

$$(u - v, A(u) - \phi) \geq 0 \quad \forall u \in E$$

se tiene $A(v) = \phi$".

Si A es monótono y continuo entonces A es maximal monótono (véase [20, Proposición 4, pag. 273] para la demostración en el caso en que E es un epacio de Hilbert (esta demostración es fácilmente extensible a espacios de Banach cualesquiera)).

2. Si N está acotado, necesariamente $\mathfrak{D} \neq \emptyset$.
3. Usualmente, en las aplicaciones se nos presentará una de las siguientes situaciones:
   (a) Si existe $d \in \mathbb{R}$ verificando la siguiente condición:
   $$\text{“} \lim_{n\to+\infty} N(u_n) = d \tag{2.2}$$
   para toda sucesión $\{u_n\}$ en E tal que $\|\bar{u}_n\| \longrightarrow +\infty$, $\{\tilde{u}_n\}$ está acotada”, entonces $\mathfrak{D} = \{d\}$.
   (b) Si $\dim \bar{E} = 1$ y existen $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ verificando
   $$\lim_{n\to+\infty} N(u_n) = d_1$$
   para toda $\{u_n\} \subset E$ tal que $\{\bar{u}_n\} \longrightarrow +\infty$ y $\{\tilde{u}_n\}$ está acotada, y
   $$\lim_{n\to+\infty} N(u_n) = d_2$$
   para toda $\{u_n\} \subset E$ tal que $\{\bar{u}_n\} \longrightarrow -\infty$ y $\{\tilde{u}_n\}$ está acotada, entonces $\mathfrak{D} = \{d_1, d_2\}$.

El siguiente lema (referido a la condición $(w-PS)_c$ facilitará enormemente la aplicación que se hará de los teoremas abstractos tipo min-max vistos en el capítulo anterior a problemas de contorno. Como veremos las hipótesis de dicho lema se cumpliran en numerosos casos.

Lema 2 : *Supongamos que I satisface:*

1. *$\{I(u_n)\}$ es una sucesión no acotada siempre que la sucesión $\{u_n\}$ en E verifica que $\{\|\tilde{u}_n\|\} \longrightarrow +\infty$.*
2. *Si $\{u_n\}$ es cualquier sucesión en E con $\{\tilde{u}_n\}$ acotada y $\{\|\bar{u}_n\|\} \longrightarrow +\infty$ entonces*
$$\lim_{n\to+\infty} N'(u_n) = 0 \tag{2.3}$$
3. *Existen $v_0 \in \tilde{E}$ y $c_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ tales que*
$$(\tilde{u} - v_0, L'(u)) = c_1 L(u) - c_1 L(v_0), \quad \forall u \in E.$$

Entonces I verifica $(w-PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $c - L(v_0) \notin \mathfrak{D}$.

Demostración: Sea $\{u_n\}$ una sucesión en E tal que
$$\{I(u_n)\} \longrightarrow c \text{ e } \{I'(u_n)\} \longrightarrow 0$$
con $c - L(v_0) \notin \mathfrak{D}$. Hemos de demostrar que c es un valor crítico de I. Por *1.*, la sucesión $\{\tilde{u}_n\}$ ha de estar acotada. Ahora bién, $\{\bar{u}_n\}$ también debe estar

acotada. En efecto, si $\{\bar{u}_n\}$ no estuviese acotada, por *2. y 3.* se tendría que para una cierta subsucesión de $\{u_n\}$, a la que seguimos notando igual por comodidad:

$$L(u_n) - L(v_0) = \frac{1}{c_1}(\tilde{u}_n - v_0, L'(u_n)) = \frac{1}{c_1}(\tilde{u}_n - v_0, I'(u_n) - N'(u_n)) \longrightarrow 0$$

y así $N(u_n) = I(u_n) - L(u_n) \longrightarrow c - L(v_0)$. Esto prueba que $c - L(v_0) \in \mathfrak{D}$, lo cual es una contradicción.

Por tanto, $\{\bar{u}_n\}$, y a posteriori $\{u_n\}$, son acotadas y podemos suponer (pasando nuevamente a una subsucesión) que $\{u_n\} \rightharpoonup u$. Por la continuidad de N y N', $\{N(u_n)\} \longrightarrow N(u)$, $\{N'(u_n)\} \longrightarrow N'(u)$ y $L'(u_n) = I'(u_n) - N'(u_n) \longrightarrow -N'(u)$. Ya que L' es monótono

$$(v - u_n, L'(v) - L'(u_n)) \geq 0 \quad \forall v \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde deducimos que

$$(v - u, L'(v) + N'(u)) \geq 0 \quad \forall v \in E.$$

Usando ahora que L' es maximal monótono, debe ser $L'(u) = -N'(u)$ e $I'(u) = 0$.

Puesto que L es convexo (al ser L' monótono),

$$L(u) \geq L(u_n) + (u - u_n, L'(u_n)) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y, por tanto,

$$L(u) \geq \limsup_{n \to +\infty} L(u_n) + \lim_{n \to +\infty} (u - u_n, L'(u_n)) = \limsup_{n \to +\infty} L(u_n),$$

lo cual, unido al hecho de que L es w.l.s.c., implica $L(u) = \lim_{n \to +\infty} L(u_n)$ y $c = \lim_{n \to +\infty} I(u_n) = I(u)$. Luego c es un nivel crítico de I. ∎

Notas 3 :

1. Si además de las hipótesis del Lema 2 se verifica la siguiente:

$$\exists \alpha > 0 \ \ / \ \ (\tilde{u} - \tilde{v}, L'(u) - L'(v)) \geq \alpha \|\tilde{u} - \tilde{v}\|^2 \ \ \forall u, v \in E \tag{2.4}$$

   entonces I cumple $(PS)_c$ en todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $c - L(v_0) \notin \mathfrak{D}$. En efecto, si $\{u_n\}$ es una sucesión en E tal que $\{I(u_n)\} \longrightarrow c$ e $\{I'(u_n)\} \longrightarrow 0$, con $c - L(v_0) \notin \mathfrak{D}$, entonces por la demostración anterior, podemos suponer que $\{\tilde{u}_n\} \rightharpoonup \tilde{u}$ en E y $L'(u_n) \longrightarrow L'(u)$. Así $(\tilde{u}_n - \tilde{u}, L'(u_n) - L'(u)) \longrightarrow 0$ y $\|\tilde{u}_n - \tilde{u}\| \longrightarrow 0$. Finalmente, usando el hecho de que $\bar{E}$ es un espacio de dimensión finita y que $\{\bar{u}_n\}$ está acotada, tenemos la conclusión deseada.

2. Una condición suficiente para *3.* del Lema 2 es que

$$L(u) = \frac{1}{2} < u, Au >_E$$

   donde E es un espacio de Hilbert con producto escalar $< \cdot, \cdot >_E$ y $A : E \longrightarrow E$ es un operador lineal acotado y autoadjunto con núcleo $\bar{E}$.

   Si, además, existe $\alpha > 0$ tal que $< \tilde{u}, A(\tilde{u}) >_E \geq \alpha \|\tilde{u}\|^2$ para todo $u \in E$, entonces L verificará (2.3), y, si adicionalmente N está acotado inferiormente, entonces también se cumple *1.* del Lema 2.

3. Un caso especial del Lema 2, que se presenta con frecuencia en la práctica, es aquel en el que L y N (y, por lo tanto, el funcional I), están acotados inferiormente y $v_0 \in \tilde{E}$ de la hipótesis *3.* verifica $L(v_0) = \min_{u \in E} L(u) \equiv b_L$. En este caso, si $m_0 \equiv \inf_{u \in E} I(u) < b_L + D_1$, donde

$$D_1 = \begin{cases} \inf \mathfrak{D}, & \text{si } \mathfrak{D} \neq \varnothing \\ +\infty, & \text{si } \mathfrak{D} = \varnothing \end{cases}$$

   entonces el funcional I alcanza su ínfimo (ver Teorema I.1).

   Si $m_0 = b_L + D_1$ no tenemos garantizado que I satisfaga $(w - PS)_{m_0}$ (de hecho, no tiene porqué satisfacerse como puede verse en la Nota III. 2, 1) y por tanto no sabemos si m_0 es o no un nivel crítico de I. Para estos casos será muy útil el siguiente teorema:

Teorema 4 : *Supongamos que I verifica 1. del Lema 2 y que L y N están acotados inferiormente. Sean*

$$D_1 = \begin{cases} \inf \mathfrak{D}, & si\ \mathfrak{D} \neq \varnothing \\ +\infty, & si\ \mathfrak{D} = \varnothing \end{cases} \tag{2.5}$$

y $b_L = \inf_{u \in E} L(u)$. Entonces:

1. *Una condición suficiente para que I alcance su ínfimo es la siguiente:*

$$\text{“}Existe\ u_0 \in E\ tal\ que\ I(u_0) \leq b_L + D_1\text{”} \tag{2.6}$$

2. *Si se cumple* (2.2)*, la condición* (2.6) *(con $D_1 = d$, por supuesto) es también necesaria para que I alcance su ínfimo.*

Demostración: 1. Sea $\{u_n\}$ una sucesión minimizante de I, esto es,

$$\lim_{n\to+\infty} I(u_n) = m_0 = \inf_{u\in E} I(u).$$

Por *1.* del Lema 2, $\{\tilde{u}_n\}$ ha de estar acotada. Dos cosas pueden ocurrirle a $\{\bar{u}_n\}$:

a) $\{\bar{u}_n\}$ está acotada. En este caso, por la reflexividad de E, podemos suponer (pasando a una subsucesión) que existe $u \in E$ tal que $\{u_n\} \rightharpoonup u$ en E. Puesto que I es w.l.s.c.,

$$I(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} I(u_n) = \lim_{n\to+\infty} I(u_n) = m_0,$$

y así I alcanza su ínfimo en el punto u.

b) $\{\bar{u}_n\}$ no está acotada. Entonces la definición de b_L nos daría $I(u_n) = L(u_n) + N(u_n) \geq b_L + N(u_n)$. Esto implica que $\mathfrak{D} \neq \varnothing$, lo que unido a la definición de D_1, nos dará $m_0 \geq b_L + D_1$. La condición (2.6) implica entonces que $m_0 = b_L + D_1$ e I alcanza su ínfimo en u_0. Queda así probada la suficiencia de (2.6).

2. Por (2.2) si tomamos $\tilde{u} \in \tilde{E}$ y $\{\bar{u}_n\} \subset \bar{E}$ con $\{\|\bar{u}_n\|\} \longrightarrow +\infty$ entonces

$$I(\tilde{u} + \bar{u}_n) = L(\tilde{u}) + N(\tilde{u} + \bar{u}_n) \longrightarrow L(\tilde{u}) + d$$

y así $m_0 \leq L(\tilde{u}) + d$ para todo $\tilde{u} \in \tilde{E}$. Por tanto, deducimos $m_0 \leq b_L + d$, de donde, si I alcanza su ínfimo, se cumple (2.6). ∎

El Teorema 4 no proporciona condiciones suficientes para la existencia de niveles críticos c del funcional I donde $c \leq L(v_0) + D_1$. El siguiente teorema nos proporciona condiciones suficientes para que I posea niveles críticos c mayores que $L(v_0) + D_2$, con

$$D_2 = \begin{cases} \sup \mathfrak{D}, & \text{si } \mathfrak{D} \neq \varnothing \\ -\infty, & \text{si } \mathfrak{D} = \varnothing \end{cases} \tag{2.7}$$

Teorema 5 : *Supongamos que I verifica las hipótesis del Lema 2 y que N está acotado superiormente. Supongamos además que se verifica lo siguiente:*

1. *$I\,|_{\tilde{E}}$ está acotado inferiormente; sea $b_{\tilde{E}} \equiv \inf_{\tilde{u}\in\tilde{E}} I(\tilde{u})$,*

2. *$b_{\tilde{E}} - L(v_0) > D_2$.*

Entonces I posee al menos un nivel crítico c mayor o igual que $b_{\tilde{E}}$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ tal que $D_2 < b_{\tilde{E}} - L(v_0) - 2\varepsilon$. Por la definición de D_2 y *2*, existe $R > 0$ tal que

$$N(v_0 + \bar{u}) < \begin{cases} D_2 + \varepsilon < b_{\tilde{E}} - L(v_0) - \varepsilon, & \text{si } \mathfrak{D} \neq \varnothing \\ b_{\tilde{E}} - L(v_0) - \varepsilon, & \text{si } \mathfrak{D} = \varnothing \end{cases},$$

si $\|v_0 + \bar{u}\| \geq R$. Usando (2.1) obtenemos $I(v_0 + \bar{u}) < b_{\tilde{E}} - \varepsilon$ si $\|v_0 + \bar{u}\| \geq R$. Definiendo entonces el funcional $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $J(u) = I(v_0 + u)$ para todo $u \in E$, y tomando $\beta = b_{\tilde{E}}$, $\alpha = b_{\tilde{E}} - \varepsilon$ y $D = B_{\tilde{E}}(0, R)$ en el Teorema 5, se verifican todas la hipótesis de éste (la condición $(w - PS)_c$ en virtud del Lema 2). Por consiguiente, J (y así también I) posee un punto crítico $u \in E$ con $J(u) \geq b_{\tilde{E}}$. ∎

Nota 6 : En los capítulos siguientes se verá como, para ciertos funcionales asociados a problemas de contorno, desigualdades tipo-Wirtinger nos proporcionan una cota inferior de $I\mid_{\tilde{E}}$ y así una estimación inferior de $b_{\tilde{E}}$, que facilitará además la comprobación de *2.*

Los Teoremas 4 y 5 dan condiciones suficientes para que el funcional I tenga un nivel crítico c. Se presentaran algunas situaciones donde no es posible (al menos, de una forma trivial) comprobar tales condiciones. Para dichos casos, combinando las ideas de los teoremas citados anteriormente, será útil el siguiente resultado:

Teorema 7 : *Supongamos que I es un funcional acotado inferiormente con N acotado inferiormente y que verifica 1.-3. del Lema* 2 *y* (2.2) *Entonces I tiene al menos un punto crítico.*

Demostración: Se deduce de *1.* que $I\mid_{\tilde{E}}$ es coercivo, esto es,

$$\lim_{\|\tilde{u}\| \to +\infty} I(\tilde{u}) = +\infty.$$

Usando que I es w.l.s.c. y por un razonamiento similar al de la demostración del Teorema 4 deducimos también que existe $\tilde{u}_0 \in \tilde{E}$ tal que $I(\tilde{u}_0) = b_{\tilde{E}} = \min_{\tilde{u} \in \tilde{E}} I(\tilde{u}) \geq m_0 = \inf_{u \in E} I(u)$. Pueden ocurrir dos casos:

a) $b_{\tilde{E}} = I(\tilde{u}_0) \leq L(v_0) + d$. Entonces I alcanza su ínfimo pués si $m_0 < L(v_0) + d$, es una consecuencia del Teorema 1 y el Lema 2, y si $m_0 = L(v_0) + d$ entonces $I(\tilde{u}_0) = \min_{u \in E} I(u)$.

b) $b_{\tilde{E}} > L(v_0) + d$. En este caso, se verifica *2.* del Teorema 5 con $D_2 = d$. Así este teorema implica la existencia de un nivel crítico de I mayor o igual que $b_{\tilde{E}}$.

Por tanto, en cualquiera de los dos casos, I posee al menos un punto crítico y el teorema queda probado. ∎

Capítulo 3

Problemas de contorno no lineales de segundo orden de tipo elíptico.

3.1 Descripción de distintos tipos de problemas resonantes, formulación variacional y propiedades fundamentales de los operadores considerados.

En este capítulo nos proponemos estudiar la existencia y multiplicidad de soluciones de problemas de contorno del tipo:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u & = & f(x,u)+h(x), & x\in\Omega \\ Bu & = & 0, & x\in\partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

donde Ω es un dominio acotado y regular de $\mathbb{R}^m$ y

$$\mathfrak{L}u=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})$$

con $a_{ij}:\bar{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$, $i,j=1,2,\ldots,m$, representa un operador diferencial de segundo orden uniformemente elíptico, esto es, para el que existe una constante $c_0>0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq c_0|\xi|^2,\quad\forall x\in\bar{\Omega},\ \forall\xi\in\mathbb{R}^m \tag{3.2}$$

Además, suponemos que $a_{ij}=a_{ji}\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R})$, que h es una función de $L^2(\Omega,\mathbb{R}^k)$ y que la función $f:\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^k$ es continua. Bu denotará una condición de frontera de uno de los dos tipos siguientes:

1. Condición de Dirichlet: $Bu=u$.
2. Condición de tipo periódico: $\Omega=(0,T)$, con $T>0$, y $Bu=(u(T)-u(0),u'(T)-u'(0))$.

Aunque se considerarán también otro tipo de problemas, la mayoría de nuestros resultados están dirigidos hacia el caso en que (3.1) está en *resonancia* en el primer valor propio de $-\mathfrak{L}$ sujeto a las condiciones de frontera $Bu=0$. Para entender claramente el significado de esto, recordemos que el problema de valores propios (en su formulación variacional [43]) asociado a (3.1):

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u & = & \lambda u, & x\in\Omega \\ Bu & = & 0, & x\in\partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

posee una sucesión creciente de valores propios

$$0\leq\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\cdots<\lambda_n<\cdots,$$

que verifica las siguientes propiedades:

- $\{\lambda_n\}\longrightarrow+\infty$.

- Existe un sistema ortonormal y completo de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ formado por funciones propias $\{\phi_n\}$ asociadas a los λ_n (tantas funciones ϕ_n asociadas a cada λ_n como indica su multiplicidad que es finita).

- $\lambda_1 > 0$ para las condiciones de Dirichlet, mientras que $\lambda_1 = 0$ para las de tipo periódico.

- Si $k = 1$, λ_1 es simple y la primera función propia, que llamaremos en este caso ϕ, puede tomarse positiva en Ω (esto es, $\phi : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica $-\mathfrak{L}\phi = \lambda_1\phi$, $B\phi = 0$ y $\phi(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$). Supondremos también que ϕ está normalizada para que $\|\phi\|_\infty = 1$.

  Así, para $k \geq 1$, el primer espacio propio, es decir, el espacio formado por todas las funciones propias asociadas al primer valor propio λ_1 estará dado por $\{\alpha\phi/\alpha \in \mathbb{R}^k\}$.

Pués bién, se dice que (3.1) está en *resonancia (en infinito) en el primer valor propio* λ_1 si $f(x,u) = \lambda_1 u + g(x,u)$ con $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función acotada. Observemos que se pueden considerar diferentes grados de resonancia [22] pués cuanto *"más pequeña"* sea g en infinito, *"más fuerte"* cabe esperar que sea la resonancia. En particular, si (3.1) tiene una estructura variacional, esto es, si existe una función $G : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que el gradiente de G en la *variable* u: $\nabla_u G(x,u) = g(x,u) \ \ \forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^k$; podemos distinguir, entre otras, las siguientes situaciones:

(R_1) $\lim_{|u| \to +\infty} g(x,u) = 0$ y $\lim_{|u| \to +\infty} G(x,u) = +\infty$, uniformemente en $x \in \Omega$.

(R_2) $\lim_{|u| \to +\infty} g(x,u) = 0$ y $\lim_{|u| \to +\infty} G(x,u) = \beta \in \mathbb{R}^k$ uniformemente en $x \in \Omega$. (Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\beta = 0$).

(R_3) $k = 1$ y $g(x,u) = g(u)$ es independiente de $x \in \bar{\Omega}$ y T_0-periódica ($T_0 > 0$) con valor medio cero, esto es, $g(u + T_0) = g(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}$ y $\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} g(u)\, du = 0$.

Observemos que (R_1) y (R_2) nos indican, a traves del comportamiento asintótico de G y g en infinito, el diferente grado de resonancia del problema considerado. (La condición (R_2) recibe el nombre de resonancia fuerte en infinito).

De aquí en adelante consideraremos que (3.1) es un problema en resonancia en el primer valor propio. Es decir, que el problema (3.1) adoptará la forma

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u - \lambda_1 u & = & g(x,u) + h(x), & x \in \Omega \\ Bu & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

siendo $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función continua y acotada y $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Supondremos también que (3.4) tiene una estructura variacional, es decir, que se verifica la siguiente condición:

(g_1) Existe una función $G : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\nabla_u G(x,u) = g(x,u) \quad \forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^k.$$

Fundamentalmente, usaremos las técnicas variacionales de los Capítulos I y II para llevar a cabo el estudio de (3.4). Para ello, si $H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ denota el espacio de Sobolev usual (ver [1]) con el producto escalar

$$< u, v >= \int_\Omega (u(x)|v(x))\, dx + \sum_{i=1}^m \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x))\, dx$$

(que dota a $H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ de estructura de espacio de Hilbert real), y consideramos $E = H^1_B(\Omega, \mathbb{R}^k) = \{u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)/Bu = 0\}$ (E es por tanto un espacio de Hilbert real con el producto escalar de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$), entonces definiremos el funcional $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\begin{aligned} I(u) \quad &= \quad \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))\, dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\, dx \\ &\quad - \int_\Omega G(x, u(x))\, dx - \int_\Omega (h(x)|u(x))\, dx \qquad (3.5) \end{aligned}$$

para todo $u \in E$.

Puesto que $f(x,u) = \lambda_1 u + g(x,u)$ es una no-linealidad asintóticamente lineal (g está acotada), es bién conocido ([8, 42] y Apéndice B de [70]) que I está bién definido y es de clase C^1 con $I'(u)$ dado por

$$\begin{aligned} (v, I'(u)) \quad &= \quad \sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x))\, dx - \lambda_1 \int_\Omega (u(x)|v(x))\, dx \\ &\quad - \int_\Omega (g(x, u(x))|v(x))\, dx - \int_\Omega (h(x)|v(x))\, dx \quad \forall u, v \in E. \end{aligned}$$

En consecuencia, los puntos críticos de I son las soluciones débiles de (3.4). En algunos casos, tales soluciones son soluciones clásicas si a_{ij}, f y h satisfacen adecuadas condiciones adicionales de regularidad [48].

Motivados por la resonancia en (3.4), descomponemos el espacio de Hilbert E en suma directa topológica y algebraica. En concreto, $E = \bar{E} \oplus \tilde{E}$, con $\bar{E}$ el subespacio de E formado por las funciones propias asociadas al primer valor propio λ_1 (o sea, el primer espacio propio) y $\tilde{E}$ el complemento ortogonal de $\bar{E}$ para el producto escalar $< \cdot, \cdot >_a$ equivalente a $< \cdot, \cdot >$ y dado por

$$< u, v >_a = \sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial v}{\partial x_i}(x))\, dx + \int_\Omega (u(x)|v(x))\, dx \quad \forall u, v \in E$$

Así, para $u \in E$ tenemos $u = \bar{u} + \tilde{u}$ con $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k) \in \bar{E}$ y $\tilde{u} \in \tilde{E}$ dados por

$$\bar{u}_\ell = \frac{\int_\Omega u_\ell(x)\phi(x)\,dx + \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x)\dfrac{\partial u_\ell}{\partial x_i}(x)\dfrac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\,dx}{(1+\lambda_1)\int_\Omega \phi(x)^2\,dx}\phi, \quad \forall \ell = 1, 2, \ldots, k$$

$$\tilde{u} = u - \bar{u}.$$

También, teniendo en cuenta las partes *lineal y no lineal* del problema (3.4) descomponemos el funcional I en $I = L + N$ con $L, N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned} L(u) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))\,dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \\ &\quad - \int_\Omega (\tilde{h}(x)|u(x))\,dx, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$N(u) = -\int_\Omega G(x, u(x))\,dx - \int_\Omega (\bar{h}(x)|u(x))\,dx, \quad \forall u \in E, \tag{3.7}$$

siendo $h = \bar{h} + \tilde{h}$ con

$$\bar{h} = (\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx)\frac{\phi}{\|\phi\|_2^2}$$

en el subespacio de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ de las funciones propias asociadas a λ_1 y $\tilde{h} = h - \bar{h}$.

Observemos que L es el funcional asociado al problema lineal

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{L}u &= \lambda_1 u + \tilde{h}(x), \quad & x \in \Omega \\ Bu &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned}\right\}$$

Las propiedades básicas de los funcionales L y N quedan reflejadas en la siguiente:

Proposición 1 : *L,N verifican las siguientes propiedades:*

1. *$L(u) = L(\tilde{u}), \quad \forall u \in E$.*
2. *L es w.l.s.c.*
3. *Existe $\alpha > 0$ tal que $(\tilde{u}-\tilde{v}, L'(u)-N'(u)) \geq \alpha\|\tilde{u}-\tilde{v}\|^2$, para todo $u, v \in E$. (L' es un operador estrictamente monótono).*
4. *Para todo $u \in E$,*

$$\begin{aligned} L(u) &\geq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2(c_0 + \lambda_2)}\left[\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}(x))\,dx\right. \\ &\quad \left. + c_0\int_\Omega (\tilde{u}(x)|\tilde{u}(x))\,dx\right] - \|\tilde{h}\|_2\|\tilde{u}\|_2 \\ &\geq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\|\tilde{u}\|^2 - \|\tilde{h}\|_2\|\tilde{u}\|_2, \end{aligned}$$

(donde $\|\cdot\|_2$ *denota la norma usual de* $L^2(\Omega,\mathbb{R}^k)$*).*

5. *Existe un único* $v_0 \in \tilde{E}$ *tal que*

$$\begin{aligned} L(v_0) &= \min_{u\in E} L(u) \equiv b_L = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\tilde{h}(x)|v_0(x))\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial v_0}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial v_0}{\partial x_i}(x))\,dx + \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |v_0(x)|^2\,dx \end{aligned}$$

6. $(\tilde{u}-v_0, L'(u)) = 2[L(u)-L(v_0)]$*,* $\forall u \in E$*.*

7. *Si* $\{u_n\} \rightharpoonup u$ *en* E*, entonces* $\{N(u_n)\} \longrightarrow N(u)$ *y* $\{N'(u_n)\} \longrightarrow N'(u)$*.*

Demostración: 1. Trivial.

2. En virtud de *1.*, basta probar que si $\{u_n\}$ es una sucesión en $\tilde{E}$ con $\{u_n\} \rightharpoonup u \in \tilde{E}$ entonces $L(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} L(u_n)$. Observando (3.6), bastaría con probar que

$$|||u|||^2 \leq \liminf_{n\to+\infty} |||u_n|||^2$$

donde

$$|||u|||^2 \equiv \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))\,dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx$$

Para ello, probaremos que $|||\cdot|||$ define en $\tilde{E}$ una norma equivalente a $\|\cdot\|$. (Con esto, $(\tilde{E}, |||\cdot|||)$ será un espacio normado completo y así $|||\cdot|||$ es w.l.s.c. [25]). En efecto, usando la caracterización variacional [43] de los valores propios de $-\mathfrak{L}$ se tiene:

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \leq \frac{1}{\lambda_2}\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))\,dx \quad \forall u \in \tilde{E} \tag{3.8}$$

por lo que, teniendo en cuenta que $\mathfrak{L}$ es uniformemente elíptico, deducimos que $|||\cdot|||$ define en $\tilde{E}$ una norma equivalente a $\|\cdot\|$ con

$$|||u|||^2 \geq \frac{\lambda_2-\lambda_1}{2(c_0+\lambda_2)}\left[\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))\,dx + c_0\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right] \tag{3.9}$$

para todo $u \in \tilde{E}$.

Así, ya que $L(u_n) = |||u_n|||^2 - \int_\Omega (\tilde{h}(x)|u_n(x))\,dx$, tendremos

$$\liminf_{n\to+\infty} L(u_n) \geq |||u|||^2 - \int_\Omega (\tilde{h}(x)|u(x))\,dx.$$

3. Para $u, v \in E$ tenemos por *1.* y (3.9)

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}-\tilde{v}, L'(u)-L'(v)) &\geq (\tilde{u}-\tilde{v}, L'(\tilde{u})-L'(\tilde{v})) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial(\tilde{u}-\tilde{v})}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial(\tilde{u}-\tilde{v})}{\partial x_i}(x))\,dx \\
&\quad -\lambda_1 \int_\Omega |\tilde{u}(x)-\tilde{v}(x)|^2\,dx \\
&= 2|||\tilde{u}-\tilde{v}|||^2 \\
&\geq \alpha\|\tilde{u}-\tilde{v}\|^2,
\end{aligned}$$

para $\alpha = c_0 \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{c_0+\lambda_2}$.

4. Usando otra vez (3.9), tenemos

$$L(\tilde{u}) = |||\tilde{u}|||^2 - \int_\Omega (\tilde{h}(x)|\tilde{u}(x))\,dx \geq \frac{c_0}{2}\frac{\lambda_2-\lambda_1}{c_0+\lambda_2}\|\tilde{u}\|^2 - \|\tilde{h}\|_2\|\tilde{u}\|_2.$$

5. Como consecuencia directa de *1., 2. y 3.* el funcional L alcanza su ínfimo, b_L, en algún $v_0 \in \tilde{E}$ ($L(v_0) = b_L \equiv \min_{u\in\tilde{E}} L(u)$). Además, por *3.*, $L\,|'_{\tilde{E}}$ es estrictamente monótono y así L posee a lo más un único punto crítico (v_0) en $\tilde{E}$. El resto se sigue por ser $b_L = L(v_0)$ y $L'(v_0) = 0$.

6. Por *1.* y *5.*:

$$\begin{aligned}
(\tilde{u}-v_0, L'(u)) &= (\tilde{u}-v_0, L'(\tilde{u})) \\
&= \sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}(x))\,dx \\
&\quad -\lambda_1 \int_\Omega |\tilde{u}(x)|^2\,dx - \int_\Omega (\tilde{h}(x)|\tilde{u}(x))\,dx \\
&\quad - \left[\sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial v_0}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}(x))\,dx \right. \\
&\quad \left. -\lambda_1 \int_\Omega (v_0(x)|\tilde{u}(x))\,dx - \int_\Omega (\tilde{h}(x)|v_0(x))\,dx\right] \\
&= 2L(\tilde{u}) + \int_\Omega (\tilde{h}(x)|\tilde{u}(x))\,dx \\
&\quad - \left[(\tilde{u}, L'(v_0)) + \int_\Omega (\tilde{h}(x)|\tilde{u}(x))\,dx \int_\Omega (\tilde{h}(x)|v_0(x))\,dx\right] \\
&= 2(L(\tilde{u}-L(v_0)).
\end{aligned}$$

7. Sea $p > 1$ un número real tal que

$$p < 2^* = \begin{cases} \dfrac{2m}{m-2} & \text{si } m \geq 3 \\ q & \text{con } q > 1 \text{ cualquiera, si } m \leq 2 \end{cases}$$

Entonces, por la acotación de g, $N : L^p(\Omega, \mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido por (3.7), es un funcional de clase C^1 (véase Teorema 2.8 de [42] o [8]). Usando ahora el Teorema de Rellich-Kondrachov [1], si $\{u_n\} \rightharpoonup u$ en E entonces $\{u_n\} \longrightarrow u$ en $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ y, por la regularidad de N, $\{N(u_n)\} \longrightarrow N(u)$, $\{N'(u_n)\} \longrightarrow N'(u)$.
■

El siguiente resultado será especialmente interesante para el estudio del comportamiento asintótico del funcional N. Como quiera que el conjunto de funciones propias $\{\phi_n\}$ constituye un sistema normal y completo de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$, podemos, para cada $w \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$, escribir, (abusando de la notación) $w = \bar{w} + \tilde{w}$ con $\bar{w}$ perteneciente al subespacio de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ formado por las funciones propias asociadas al primer valor propio λ_1 y $\tilde{w}$ en el complemento ortogonal de éste en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Lema 2 : *Sea $\{w_n\}$ una sucesión en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ con $\{\|\bar{w}_n\|_2\} \longrightarrow +\infty$ y con $\{\|\tilde{w}_n\|_2\}$ acotada. Entonces existe una subsucesión $\{w_{n_k}\}$ de $\{w_n\}$ verificando $\{|w_{n_k}(x)|\} \longrightarrow +\infty$ a.e. en Ω.*

Demostración: Sea $\{w_n\}$ una sucesión en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ con $\{\|\tilde{w}_n\|_2\}$ acotada y $\{\|\bar{w}_n\|_2\} \longrightarrow +\infty$. Entonces $w_n = \bar{w}_n + \tilde{w}_n = c_n\phi + \tilde{w}_n$ con

$$c_n = \frac{1}{\|\phi\|_2} \int_\Omega \phi(x) w_n(x)\, dx \in \mathbb{R}^k,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ y $|c_n| \longrightarrow +\infty$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $c_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\{\dfrac{a_n}{|c_n|}\} \longrightarrow 0$ y $\{a_n\} \longrightarrow +\infty$. La demostración se efectuará en tres pasos:

Paso 1: $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{meas}\{x \in \Omega \ / \ |\tilde{w}_n(x)| \geq a_n\} = 0$.

En efecto, si esto no fuese cierto, existirían $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{\tilde{w}_{n_k}\}$ de $\{\tilde{w}_n\}$ tal que

$$\operatorname{meas}\{x \in \Omega \ / \ |\tilde{w}_{n_k}| \geq a_{n_k}\} > \varepsilon \quad \forall n_k.$$

Entonces:

$$\|\tilde{w}_{n_k}\|_2^2 = \int_\Omega |\tilde{w}_{n_k}(x)|^2\, dx \geq \int_{\{x\in\Omega \ / \ |\tilde{w}_{n_k}(x)|\geq a_{n_k}\}} |\tilde{w}_{n_k}(x)|^2\, dx \geq a_{n_k}^2 \varepsilon,$$

lo cual es una contradicción.

Paso 2: $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{meas}\{x \in \Omega \ / \ |w_n(x)| < a_n\} = 0$.

Esto es así, pues de las inclusiones

$$\begin{aligned}
\{x \in \Omega \ / \ |w_n(x)| < a_n\} &\subset \{x \in \Omega \ / \ |c_n\phi(x)| < a_n + |\tilde{w}_n(x)|\} \\
&\subset \{x \in \Omega \ / \ |c_n\phi(x)| < 2a_n\} \\
&\quad \cup \{x \in \Omega \ / \ |\tilde{w}_n(x)| \geq a_n\}
\end{aligned}$$

deducimos

$$\begin{aligned}\text{meas}\,\{x\in\Omega\ /\ |w_n(x)|<a_n\} \quad &\le \quad \text{meas}\,\{x\in\Omega\ /\ |\phi(x)|<\frac{2a_n}{|c_n|}\}\\ &\quad +\text{meas}\,\{x\in\Omega\ /\ |\tilde{w}_n(x)|\ge a_n\}.\end{aligned}$$

Por el *Paso 1* y puesto que

$$\lim_{n\to+\infty}\text{meas}\,\{x\in\Omega\ /\ |\phi(x)|<\frac{2a_n}{|c_n|}\}=0^1$$

tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty}\text{meas}\,\{x\in\Omega\ /\ |w_n(x)|<a_n\}=0$$

Paso 3: Existe una subsucesión $\{w_{n_k}\}$ tal que $\lim_{n\to+\infty}|w_{n_k}(x)|=+\infty$ a.e. en $x\in\Omega$.

En efecto, por el paso anterior, para cada $k\in\mathbb{N}$ sea $n_k\in\mathbb{N}$ tal que

$$\text{meas}\,\{x\in\Omega\ /\ |w_{n_k}(x)|<a_{n_k}\}<\frac{1}{2^k}.$$

Sea también $A_k=\{x\in\Omega\ /\ |w_{n_k}(x)|<a_{n_k}\}$ y $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}A_k$. Entonces $\text{meas}\,A=0$.

Por otra parte, si $x\notin A$, existe $j\in\mathbb{N}$ tal que $x\notin A_k$ para $k\ge j$, por lo que

$$|w_{n_k}(x)|\ge a_{n_k}\quad \forall k\ge j$$

y así

$$\lim_{n\to+\infty}|w_{n_k}(x)|=+\infty\quad \forall x\in\Omega-A.$$

Proposición 3 : *Si $h\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^k)$ verifica $\int_\Omega h_i(x)\phi(x)\,dx=0$ para todo $i=1,2,\ldots,k$, entonces se tiene:*

1. *Si $\lim_{|u|\to+\infty}G(x,u)=0$ uniformemente en $x\in\Omega$, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty}N(u_n)=0.$$

para toda sucesión $\{u_n\}$ en E con $\{\|\tilde{u}_n\|\}$ acotada y $\{\|\bar{u}_n\|\}\longrightarrow+\infty$.

[1]Obsérvese que si Bu son las condiciones en la frontera de tipo periódico, $\phi\equiv 1$ y así $\text{meas}\,\{x\in\Omega\ /\ |\phi(x)|<1\}=0$; mientras que si Bu representa condiciones en la frontera de tipo Dirichlet, $\phi>0$ en Ω y $\phi=0$ en $\partial\Omega$, con lo cual también es cierto que

$$\lim_{n\to+\infty}\text{meas}\,\{x\in\Omega\ /\ |\phi(x)|<\frac{2a_n}{|c_n|}\}=0.$$

2. Si $\lim_{|u|\to+\infty} g(x,u) = 0$ *uniformemente en* $x \in \Omega$*, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} N'(u_n) = 0.$$

para toda sucesión $\{u_n\}$ *en* E *con* $\{\|\tilde{u}_n\|\}$ *acotada y* $\{\|\bar{u}_n\|\} \longrightarrow +\infty$.

Demostración: Puesto que $\int_\Omega h_i(x)\phi(x)\,dx = 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, tenemos $N(u) = -\int_\Omega G(x, u(x))\,dx$, para todo $u \in E$.

1. Basta probar que si $\{u_n\}$ es una sucesión en E verificando que $\{\|\tilde{u}_n\|\}$ está acotada y $\{\|\bar{u}_n\|\} \longrightarrow +\infty$, entonces posee una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ tal que

$$\lim_{n_k\to+\infty} N(u_{n_k}) = 0.$$

Ahora, si $\{u_n\}$ es una tal sucesión, por el Lema 2, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ tal que

$$\lim_{n_k\to+\infty} u_{n_k}(x) = +\infty \text{ a.e. en } \Omega. \tag{3.10}$$

Usando que $\lim_{|u|\to+\infty} G(x,u) = 0$ uniformemente en $x \in \Omega$ y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos:

$$\lim_{n_k\to+\infty} N(u_{n_k}) = -\lim_{n_k\to+\infty} \int_\Omega G(x, u_{n_k}(x))\,dx = 0.$$

2. Análogamente, basta ver que toda sucesión $\{u_n\}$ en las hipótesis de la proposición posee una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ tal que $\lim_{n_k\to+\infty} N'(u_{n_k}) = 0$ en $E^\star$. Para ello, sea otra vez $\{u_{n_k}\}$ verificando (3.10) y $z \in E$ tal que $\|z\| \leq 1$. Entonces

$$|(z, N'(u_{n_k}))| = \left| \int_\Omega g(x, u_{n_k}(x)) z(x)\,dx \right| \leq \left(\int_\Omega g(x, u_{n_k}(x))^2\,dx \right)^{1/2} \|z\|_2$$

y así

$$\|N'(u_{n_k})\|_{E^\star} \leq \|g(\cdot, u_{n_k}(\cdot))\|_2.$$

Usando (3.10), que $\lim_{|u|\to+\infty} g(x,u) = 0$ uniformemente en $x \in \Omega$ y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue:

$$\lim_{n_k\to+\infty} \|g(\cdot, u_{n_k}(\cdot))\|_2 = 0,$$

y, por tanto,

$$\lim_{n_k\to+\infty} \|N'(u_{n_k})\|_{E^\star} = 0.$$

Notas 4 :

1. La Proposición 3, *1.* nos dice que, en el caso en que

$$\lim_{|u|\to+\infty} G(x,u) = 0$$

uniformemente en $x \in \Omega$ (además de todas las hipótesis anteriores), el conjunto $\mathfrak{D}$ del capítulo anterior es $\mathfrak{D} = \{0\}$.

2. Para los casos más generales en los que no se verifique
$$\lim_{|u|\to+\infty} G(x,u)=0$$
uniformemente en $x \in \Omega$, resulta interesante considerar
$$\bar{D}_1 \equiv -\limsup_{|u|\to+\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} G(x,u)$$
y
$$\bar{D}_2 \equiv -\liminf_{|u|\to+\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} G(x,u).$$
(Observemos que si $\lim_{|u|\to+\infty} G(x,u)=0$ uniformemente en $x\in\Omega$, entonces $\bar{D}_1=\bar{D}_2=0$).

   Con una demostración análoga a la anterior (y basada en el Lema 2), se puede probar fácilmente que si $\int_\Omega h_i(x)\phi(x)\,dx = 0$ para todo $i = 1,2,\ldots,k$, entonces:

   (a) Si G está acotada superiormente,
   $$\bar{D}_1 \text{meas } \Omega \le D_1.$$
   (b) Si G está acotada inferiormente,
   $$D_2 \le \bar{D}_2 \text{meas } \Omega.$$

   (D_1, D_2 son los mismos del Capítulo II).

3. La Proposición 3, *2.* nos da la hipótesis *2.* del Lema 2 para N.

También tenemos el siguiente resultado relativo a no-linealidades g del tipo (R_3) y debido a Ward [85] y Solimini [78]. La versión que presentamos aqui, un poco más general que la de Ward, corresponde a la Proposición 2.1 de [78]:

Proposición 5 : *Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua, T_0-periódica ($T_0>0$) y con valor medio cero ($\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} g(u)\,du=0$). Supongamos también que $\mathfrak{U}$ es un conjunto de funciones medibles en Ω, precompacto para la convergencia en medida y que $\psi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función de clase C^1 con $\nabla\psi\neq 0$ a.e. en Ω. Entonces*
$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} g(u+\alpha\psi)=0$$
débilmente en $L^p(\Omega)$, para todo $p\in(1,+\infty)$, y uniformemente en $u\in\mathfrak{U}$. ∎

Notas 6 :

1. La anterior proposición será útil para el estudio de problemas de contorno con condiciones en la frontera de tipo Dirichlet y con no-linealidades g del tipo (R_3). En estos casos, ψ será la primera función propia ϕ. (Obsérvese que $\nabla\phi\neq 0$ a.e. en Ω para este tipo de problemas).

2. Notemos también que si escogemos la primitiva G por:

$$G(u) = \int_0^u g(s)\,ds - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}(\int_0^t g(s)\,ds)\,dt \tag{3.11}$$

entonces $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está en las mismas condiciones de g y, por tanto, se verifica la proposición anterior para G.

3. Como consecuencia de la Proposición 5 y de la nota anterior, podemos observar que las tesis *1.* y *2.* de la Proposición 3 siguen siendo ciertas si sustituimos las hipótesis $\lim_{|u|\to+\infty} G(x,u) = 0$ y $\lim_{|u|\to+\infty} g(x,u) = 0$ uniformemente en $x \in \Omega$, por la correspondiente de la Proposición 5, esto es, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, T_0-periódica y con valor medio cero, siendo G la función dada por (3.11).

En las secciones que siguen estudiaremos la existencia de soluciones del problema de contorno (3.4) bajo los distintos tipo de resonancia (R_1), (R_2) y (R_3). Fundamentalmente concretaremos nuestros resultados para el caso especial de (3.4) en el cual $a_{ij}(x) = 0$ si $i \neq j$, y $a_{ii}(x) = 1$, $\forall x \in \bar{\Omega}$. Según el tipo de condición de contorno (bién de tipo periódico, bién de tipo Dirichlet), que consideremos estaremos estudiando uno de los siguientes problemas:

$$\left.\begin{array}{c} -u'' = g(t,u) + h(t), \quad t \in (0,T) \\ u(0) = u(T),\ u'(0) = u'(T) \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

y

$$\left.\begin{array}{rcl} -\Delta u - \lambda_1 u & = & g(x,u) + h(x), \quad x \in \Omega \\ u & = & 0, \qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

Observemos que para el problema (3.12) tenemos $\Omega = (0,T)$, $\mathfrak{L} = \dfrac{d^2}{dx^2}$ (con $c_0 = 1$) y Bu es una condición en la frontera de tipo periódico. También tenemos que la sucesión de valores propios asociada a (3.12) es la siguiente:

$$\lambda_1 = 0 < \lambda_2 = \frac{4\pi^2}{T^2} < \cdots < \lambda_n = \frac{4\pi^2(n-1)^2}{T^2} < \cdots$$

mientras que el espacio E está dado por $E = H^1_{\#}([0,T],\mathbb{R}^k) = \{u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^k, u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)\ /\ u_i$ es absolutamente continua en $[0,T]$ con $u_i' \in L^2(0,T)$ y satisfaciendo $u_i(0) = u_i(T)$, $i = 1,2,\ldots,k\}$, con producto escalar

$$< u, v >= \int_0^T (u'(t)|v'(t))\,dt + \int_0^T (u(t)|v(t))\,dt.$$

$\bar{E}$ está formado por las funciones (vectoriales) constantes ($\phi(x) \equiv 1\ \forall x \in \bar{\Omega}$) y podrá ser así identificado con $\mathbb{R}^k$, $\tilde{E}$ es el conjunto de las funciones con valor medio cero, esto es, $\tilde{E} = \{u \in E\ /\ \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = 0\}$. Por lo tanto, para $u \in E$ tendremos $u = \bar{u} + \tilde{u}$ con $\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$ y $\tilde{u}(t) = u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$.

De otra parte, para (3.13), tenemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ es un dominio acotado y regular, $\mathfrak{L} = \Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_m^2}$, $(c_0 = 1)$ y $Bu = u$ es una condición en la frontera de tipo Dirichlet. Así, en este caso, $E = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ es el espacio de Sobolev usual [1] de las funciones de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ que son nulas (en el sentido de las trazas) en la frontera $\partial\Omega$ de Ω, siendo $\bar{E}$ y $\tilde{E}$ subespacios de E construidos de forma análoga al caso periódico. El caso $m = 1$, es decir, $\mathfrak{L} = \dfrac{d^2}{dx^2}$, y[2] $\Omega = (0, \pi)$, también será estudiado con especial detenimiento. Estaremos así estudiando el problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{c} -u'' - u = g(x,u) + h(x), \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{array}\right\} \tag{3.14}$$

siendo la sucesión de valores propios asociada la siguiente

$$0 < \lambda_1 = 1 < \lambda_2 = 4 < \cdots < \lambda_n = n^2 < \cdots$$

y $\phi(x) = \operatorname{sen} x$.

3.2 Problemas con resonancia fuerte en infinito.

Estudiaremos a continuación el problema de contorno (3.4) cuando la no-linealidad g es del tipo (R_2), o sea, cuando se presenta una resonancia fuerte en infinito. También se estudiará paralelamente el caso de resonancias del tipo (R_3) para el problema (3.4) con $k = 1$ y con condición de contorno de tipo Dirichlet pués las Proposiciones 3 y 5 y la Nota 6, 3. muestran que, en ambos casos, los funcionales N y N' respectivos presentan el mismo comportamiento asintótico. Esta es la razón por la que es posible discutir ambos casos como ejemplos particulares de una situación más general. En concreto, consideramos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u & = & \lambda\, u, & x \in \Omega \\ Bu & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un dominio acotado y regular, $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función continua y acotada y $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ tales que:

(g_1) Existe una función $G : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 con $\nabla_u G(x,u) = g(x,u)$, $\forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^k$.

(g_2) Si $\{u_n\} \subset E$ es cualquier sucesión en E con $\{\|\bar{u}_n\|\} \longrightarrow +\infty$ y $\{\|\tilde{u}_n\|\}$ acotada, entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega G(u_n(x))\, dx = 0.$$

[2]Se considerará $\Omega = (0, \pi)$ por comodidad en los cálculos.

(g_3) Si $\{u_n\} \subset E$ es cualquier sucesión en E con $\{\|\bar{u}_n\|\} \longrightarrow +\infty$ y $\{\|\tilde{u}_n\|\}$ acotada, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{g}(\mathbf{u_n}) = 0 \quad \text{ en } E^\star,$$

donde $\mathbf{g}(\mathbf{u_n}) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ se define como $(v_n, \mathbf{g}(\mathbf{u_n})) = \int_\Omega g(u_n(x))v(x)\,dx$, para todo $v \in E$.

(h_1) $\int_\Omega h_i(x)\phi(x)\,dx = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$.

Las hipótesis anteriores se supondran vigentes en toda la sección.

Notas 1 :

1. Las condiciones (g_2) y (h_1) implican que el conjunto $\mathfrak{D}$ del Capítulo II se reduce en este caso a $\mathfrak{D} = \{0\}$.

2. La Proposición 3, *1.* proporciona una condición suficiente para (g_2):

$$\lim_{|u| \longrightarrow +\infty} G(x,u) = 0 \text{ uniformemente en } x \in \Omega. \tag{3.15}$$

3. Análogamente, para (g_3), por el apartado *2.* de la misma proposición, tenemos la condición suficiente:

$$\lim_{|u| \longrightarrow +\infty} g(x,u) = 0 \text{ uniformemente en } x \in \Omega. \tag{3.16}$$

4. A su vez, la Proposición 5 (véase Nota 6, 3.) implica que en el caso

$$k = 1,\ Bu = u,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ \ T_0\text{-periódica con } \int_0^{T_0} g(u)\,du = 0 \tag{3.17}$$

   entonces también se cumple (g_2) y (g_3) (y evidentemente (g_1)).

El estudio de la existencia de soluciones débiles de (3.4) será llevado a cabo mediante el estudio de la existencia de puntos críticos del funcional I dado por (3.5).

También consideramos la *descomposición* de I en $I = L + N$, con L y N dados por (3.6) y (3.7), respectivamente. Nuestro primer resultado de existencia de solución de (3.4) se obtiene como una aplicación del Teorema II.7:

Teorema 2 : *Supongamos que se verifican (g_1), (g_2), (g_3) y (h_1), con G una función acotada. Entonces el problema de contorno* (3.4) *posee al menos una solución débil.*

Demostración: Basta probar que el funcional I posee al menos un punto crítico. Para ello usaremos el Teorema II.7. La Proposición 1 junto con (g_3) y (h_1) implican las hipótesis *2.* y *3.* del Lema 2. También, en virtud de (h_1) y puesto que G está acotada, N está acotado y así I es un funcional acotado inferiormente que verifica *1.* del Lema 2. Además, por (g_2) se cumple (2.2). Por tanto, se verifican todas las hipótesis del Teorema II.7 e I posee al menos un punto crítico. ∎

A título de ejemplo del anterior resultado tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 3 : *Supongamos que se verifican (g_1),* (3.15) *y* (3.16)*. Supongamos además que $\int_o^T h(t)\,dt = 0$. Entonces el problema de contorno*

$$\left.\begin{array}{c} -u'' = g(t,u) + h(t), \quad t \in (0,T) \\ u(0) = u(T),\ u'(0) = u'(T) \end{array}\right\}$$

posee al menos una solución débil. ∎

Notas 4 :

1. Si además de las hipótesis del Corolario 3, $h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es continua, entonces toda solución débil del anterior problema de contorno es una solución clásica.

2. El corolario anterior extiende al caso de sistemas los resultados obtenidos por Dancer [41]. Además mejora los de este autor en el caso escalar pués no precisamos que $ug(u) \geq 0$ para $|u|$ suficientemente grande. Tampoco precisamos la condición técnica $(\mathfrak{U})$ de aquel artículo.

3. Suponiendo que se verifican (3.15) y (3.16), el Corolario 3 mejora resultados de [7, 35, 83], puesto que en todos estos trabajos, además de (3.15) y (3.16), se necesita una condición adicional en el potencial G. En efecto, en [7], donde sólo se estudia el caso $h \equiv 0$, los autores necesitan que $G(t,u) < 0$, para todo $t \in (0,T)$ y para todo $u \in \mathbb{R}$ con $|u|$ suficientemente grande. En [35], para $h \equiv 0$, se precisa

$$G(t,u) < 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^k : |u - \xi| \leq T\sqrt{\frac{M}{2}} + \delta$$

   donde $\xi \in \mathbb{R}^k$, $\delta > 0$ y $M_1 = \sup\{G(t,u) \ / \ (t,u) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k\}$. Si se usan las técnicas (basadas en la teoría de Morse) de [35] para probar la existencia de solución para toda $h \in L^2([0,T], \mathbb{R}^k)$ con valor medio cero ($\int_0^T h(t)\,dt = 0$), entonces se necesita que $G(t,u) < 0$ para todo $t \in [0,T]$ y $u \in \mathbb{R}^k$.

   Finalmente, en [83], el autor impone una condición adicional en G que se discutirá más adelante (véase Nota 16, 2.).

Corolario 5 : *Supongamos que se verifican (g_1), (g_2), (g_3) con G acotada y (h_1). Entonces el problema de contorno*

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u - \lambda_1 u & = & g(x,u) + h(x), & x \in \Omega \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

posee al menos una solución débil. ■

Corolario 6 [85]**:** *Supongamos que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, T_0-periódica y con valor medio cero, y sea $h \in L^2([0,\pi], \mathbb{R})$ una función verificando $\int_0^\pi h(x) \text{sen}\, x\, dx = 0$. Entonces el problema*

$$\left.\begin{array}{c} -u'' - u = g(x,u) + h(x), \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{array}\right\}$$

posee al menos una solución débil. ■

Notas 7 :

1. El Corolario 6, así como el Corolario 5 con (g_2) y (g_3) sustituidas por (3.15) y (3.16), están esencialmente contenidos en los trabajos de Solimini [78] y Ward [85]. En especial, fuerón las técnicas de este último trabajo las que motivaron el nuestro y dieron lugar al Teorema 2 (así como a su versión abstracta: el Teorema II. 7).

2. Recientemente, con técnicas de bifurcación Schaaf y Schmitt [73] y Costa, Jeggle, Schaaf y Schmitt [33] han probado que cuando se satisfacen las hipótesis de los corolarios anteriores y, en el caso $m > 1$, Ω satisface una determinada condición técnica, entonces existen infinitas soluciones del problema. Desgraciadamente, la condición técnica impuesta en el dominio Ω deja fuera ejemplos tan simples como es el caso en que Ω es una bola abierta.

3. El siguiente ejemplo muestra como el Corolario 5 puede ser aplicado en casos en los que no se verifica las hipótesis (3.15), (3.16) o (3.17) (aunque si se verifica (g_2) y (g_3)).

Ejemplo 8 : *Sea $h \in L^2([0,\pi],\mathbb{R}^2)$ con $\int_0^\pi h_i(x)\,\mathrm{sen}\ x\,dx = 0$ para $i = 1,2$. Entonces el problema de contorno*

$$\left.\begin{array}{l} -u_1'' - u_1 = \dfrac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}}\cos\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}\right) + h_1(x), \quad x \in (0,\pi) \\ -u_2'' - u_2 = \dfrac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}}\cos\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}\right) + h_2(x), \quad x \in (0,\pi) \\ \qquad u_1(0) = u_1(\pi) = u_2(0) = u_2(\pi) = 0 \end{array}\right\}$$

posee al menos una solución débil $u = (u_1, u_2)$.

(En este caso,

$$g(u_1,u_2)(= g(x,u_1,u_2))$$

$$= \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}}\cos\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}\right), \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}}\cos\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}\right)\right)$$

con $G(u_1,u_2) = \mathrm{sen}\left(\sqrt{u_1^2+u_2^2+1}\right)$).

3.3 Otros resultados de existencia.

Recordemos que el Teorema 2 ha sido probado usando el Teorema II.4 que demuestra la existencia de un punto crítico de I. No obstante, y aunque el funcional I está acotado inferiormente, no sabemos, en general, si el nivel crítico encontrado se corresponde o no con el ínfimo $m_0 \equiv \inf_{u\in E} I(u)$ de I o con un valor c dado por (1.9). Nos proponemos ahora dar condiciones suficientes (a través de los Teoremas II.4 y II.5) para que el funcional I alcance su ínfimo o para que c sea un nivel crítico de I (o ambas cosas). Como consecuencia de esto, obtendremos también condiciones suficientes para que (3.4) posea al menos dos soluciones distintas correspondientes a niveles críticos de I diferentes (c y m_0).

Además de seguir suponiendo que g cumple (g_1) y que $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ verifica (h_1), consideraremos $v_0 \in \tilde{E}$ dado por la Proposición 1, *5.* y $\bar{D}_1, \bar{D}_2$ dados por la Nota 4, 2.

3.3.1 Problemas cuyo funcional está acotado inferiormente y tiene mínimo global.

Observando que si G está acotada superiormente, entonces el funcional N está acotado inferiormente, nuestro primer resultado se referirá a la posibilidad o no de que, en este caso, I alcance su ínfimo $m_0 = \inf_{u \in E} I(u)$.

Teorema 1 : *Supongamos que la función g cumple (g_1) con G una función acotada superiormente y que $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ verifica (h_1). Entonces:*

1. *Si existe $u \in E$ tal que*

$$\begin{gathered} -\tfrac{1}{2}\int_\Omega (h(x)|v_0(x))\,dx + \bar{D}_1 \, meas\,\Omega \geq \\ \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\tfrac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\tfrac{\partial u}{\partial x_i}(x))\,dx - \tfrac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \\ -\int_\Omega (h(x)|u(x))\,dx - \int_\Omega G(x,u(x))\,dx \end{gathered} \tag{3.18}$$

   entonces (3.4) *posee al menos una solución $u_0 \in E$ con $I(u_0) = m_0$ ($= \inf_{u\in E} I(u)$).*

2. *Si además se verifica (g_2), entonces* (3.18) *(con $\bar{D}_1 = 0$) es una condición necesaria y suficiente para que el problema* (3.4) *posea tal solución (o sea, para que I alcance su ínfimo).*

Demostración: 1. Por la Proposición 1, I satisface las hipótesis del Teorema 4. Además, (3.18) significa (por la Nota 4, 2)

$$I(u) \leq b_L + D_1$$

que es (2.6) de este teorema. Por tanto el funcional I alcanza su ínfimo en algún $u_0 \in E$ que será un punto crítico de I y así una solución débil de (3.4).

2. La segunda parte de este teorema se deduce del apartado *2.* del Teorema 4 en una forma análoga, observando que $\mathfrak{D} = \{0\}$ en este caso.

Notas 2 :

1. Observemos que, en general, no ha de cumplirse la condición $(PS)_{m_0}$. En efecto, consideremos el ejemplo dado por una función g cumpliendo (g_1), (g_2) y (g_3) con $G(x,u) \leq 0$ para todo $(x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k$ y h verificando (h_1). Entonces la sucesión $\{u_n\} \subset E$ dada por

$$u_n = (n, 0, \ldots, 0)\phi + v_0$$

verifica

$$\lim_{n\to+\infty} I(u_n) = b_L = m_0 \text{ (en este caso)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0$$

y no posee ninguna subsucesión convergente.

2. Bajo las hipótesis del Teorema 1, si se cumple (g_2), entonces las siguientes condiciones son suficientes para (3.18):

   1. Existe $\alpha \in \mathbb{R}^k$ tal que $\int_\Omega G(x, v_0(x) + \alpha\phi(x))\,dx \geq 0$. (Tómese $u = v_0 + \alpha\phi$ en (3.18)).

   2. Existe $\alpha \in \mathbb{R}^k$ tal que $\int_\Omega G(x, \alpha\phi(x))\,dx \geq \frac{1}{2}\int_\Omega (v_0(x)|h(x))\,dx$. (Tómese $u = \alpha\phi$ en (3.18)).

   3. $h \equiv 0$ y G es impar en la variable u. (Tómese ahora $u \equiv 0$ en (3.18) y obsérvese que $v_0 = 0$ en este caso).

3. A título de aplicación del teorema anterior tenemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 3 : *Supongamos que $h \in L^2((0,T), \mathbb{R}^k)$ verifica $\int_0^T h_i(t)\,dt = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, y que $g : (0,T) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ cumple (g_1) con G una función acotada superiormente. Si existe $\alpha \in \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\int_0^T G(t, v_0(t) + \alpha)\,dt \geq -\bar{D}_1 T \tag{3.19}$$

entonces el problema de contorno (3.12) *posee al menos una solución débil y T-periódica $u_0 \in E$ en la cual I alcanza su valor mínimo.*

Notas 4 :

1. El ejemplo anterior mejora un resultado debido a Thews [83] quien probaba que si además de las hipótesis anteriores, se cumplían (3.15) y (3.16) y $h \equiv 0$, entonces la condición

$$\text{Existe } \alpha \in \mathbb{R}^k \text{ tal que } \int_0^T G(t, \alpha)\,dt > 0$$

   ($v_0 \equiv 0$ pués $h \equiv 0$) es suficiente para que I alcance su ínfimo. Nuestro ejemplo muestra que basta con $\int_0^T G(t,\alpha)\,dt \geq 0$.

2. Otras condiciones distintas a (3.19) y suficientes para (3.18) pueden ser consideradas. En este caso, el hecho de ser $\phi \equiv 1$ facilita mucho éstas. Por ejemplo, la condición (3.19) puede ser sustituida por la siguiente

   "Existen $R > 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}^k$ y $d_1' \in \mathbb{R}$ tales que

$$G(t,u) \leq d_1' \quad \forall t \in [0,T],\ \forall u \in \mathbb{R}^k \ :\ |u| \geq R$$

   y

$$\int_0^T G(t, \alpha_0)\,dt \geq d_1' T\text{"}.$$

En el caso especial $k = 1$ (caso escalar), $G : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos considerar un comportamiento asintótico distinto de $G(x, u)$ cuando u tiende a $+\infty$ y cuando u tiende $+\infty$. En estos casos, se puede seguir aplicando el teorema anterior como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5 : *Supongamos que* $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *verifica* (h_1) *y que la función* $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *cumple* (g_1) *con* G *una función para la que existen* $\bar{d}_1, \bar{d}_2 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\lim_{u \to +\infty} G(x, u) = \bar{d}_1 \text{ uniformemente en } x \in \Omega$$

$$\lim_{u \to -\infty} G(x, u) = \bar{d}_2 \text{ uniformemente en } x \in \Omega$$

Entonces una condición necesaria y suficiente para que el problema de contorno (3.13) *posea al menos una solución* $u_0 \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$ *en la que* I *alcance su ínfimo es que exista* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_\Omega G(x, \alpha\phi(x))\, dx \geq \frac{1}{2} \int_\Omega (v_0(x)|h(x))\, dx + \max\{\bar{d}_1 \text{ meas } \Omega, \bar{d}_2 \text{ meas } \Omega\} \quad (3.20)$$

En efecto, esto es una clara consecuencia del hecho $\bar{D}_1 = -\max\{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}$.

Nota 6 : Si $m = 1$ y $\Omega = (0, \pi)$, entonces $\phi(x) = \operatorname{sen} x$ y (3.20) queda

$$\int_0^\pi G(x, \alpha \operatorname{sen} x)\, dx \geq \frac{1}{2} \int_\Omega (v_0(x)|h(x))\, dx + \max\{\bar{d}_1\pi, \bar{d}_2\pi\}$$

Nuestro siguiente ejemplo se refiere al caso en el cual (3.4) presenta una resonancia del tipo (R_3). Los siguientes lemas resultaran muy útiles:

Lema 7 : *Sea* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua. Supongamos también que* G *posee un número finito y distinto de* 0 *de ceros en un intervalo* $[0, T_0]$, *con* $T_0 > 0$, *donde* G *cambia de signo; denotamos estos ceros por* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. *Si* $G(0) < 0$ *y existe algún* $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tal que* $\int_0^{x_\ell} G(u)\, du > 0$, *entonces existe* $a \in [0, T_0]$ *tal que* $\int_0^\pi G(a \operatorname{sen} x)\, dx > 0$.

Demostración: En primer lugar observemos que

$$\int_0^\pi G(a \operatorname{sen} x)\, dx = 2 \int_0^{\pi/2} G(a \operatorname{sen} x)\, dx$$

por lo que basta probar que $\int_0^{\pi/2} G(a \operatorname{sen} x)\, dx > 0$. Para ello, tomaremos

$$x_k = \min\{\, x_i \,/\, \int_0^{x_i} G(u)\, du > 0\}.$$

Como $G\,|_{[0,x_1]} \leq 0$, tenemos que $k \geq 2$ y k debe ser par.

Sea ahora $\mu > 0$ tal que $G(u) \geq 0$ para todo $u \in (x_k \cos(\mu), x_k)$. Tenemos así

$$\int_0^{x_k \cos\mu} G(u)\, du > 0 \quad (3.21)$$

Entonces:

$$\int_0^{\pi/2} G(x_k \operatorname{sen} x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\mu} G(x_k \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\mu}^{\pi/2} G(x_k \operatorname{sen} x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\mu} G(x_k \operatorname{sen} x)\,dx \\
&= \int_0^{x_k \cos\mu} \frac{G(u)}{\sqrt{{x_k}^2 - u^2}}\,du \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{G(u)}{\sqrt{{x_k}^2 - u^2}}\,du + \int_{x_{k-1}}^{x_k \cos\mu} \frac{G(u)}{\sqrt{{x_k}^2 - u^2}}\,du
\end{aligned}$$

(donde $x_0 \equiv 0$).

Puesto que $G\,|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es no-negativa si i es impar y no-positiva si i es par, obtenemos que si $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ es par,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{G(u)}{\sqrt{{x_k}^2 - u^2}}\,du + \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \frac{G(u)}{\sqrt{{x_k}^2 - u^2}}\,du \geq \int_{x_i}^{x_{i+2}} \frac{G(u)}{\sqrt{{x_k}^2 - u^2}}\,du$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} G(x_k \operatorname{sen} x)\,dx \quad &\geq \quad \sum_{j=0}^{\frac{k}{2}-2} \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2 - {x_{2j+1}}^2}} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} G(u)\,du \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2 - {x_{k-1}}^2}} \int_{x_{k-2}}^{x_k \cos\mu} G(u)\,du
\end{aligned}$$

Usando ahora la definición de x_k,

$$\int_{x_0}^{x_{2j+2}} G(u)\,du \leq 0$$

para todo $j \in \{0, 1, \ldots, \frac{k}{2} - 2\}$. Así, por (3.21),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} G(x_k \operatorname{sen} x)dx &\geq \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2 - {x_1}^2}} \int_{x_0}^{x_2} G(u)\,du + \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2 - {x_3}^2}} \int_{x_2}^{x_4} G(u)\,du \\
&\quad + \cdots + \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2 - {x_{k-3}}^2}} \int_{x_{k-4}}^{x_{k-2}} G(u)\,du + \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2 - {x_{k-1}}^2}} \int_{x_{k-2}}^{x_k \cos\mu} G(u)\,du \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2 - {x_3}^2}} \int_{x_0}^{x_4} G(u)\,du + \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2 - {x_5}^2}} \int_{x_4}^{x_6} G(u)\,du
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+\\
&+\frac{1}{\sqrt{{x_k}^2-{x_{k-3}}^2}}\int_{x_{k-4}}^{x_{k-2}} G(u)\,du+\frac{1}{\sqrt{{x_k}^2-{x_{k-1}}^2}}\int_{x_{k-2}}^{x_k\cos\mu} G(u)\,du\\
\geq\ & \frac{1}{\sqrt{{x_k}^2-{x_{k-1}}^2}}\int_0^{x_k\cos\mu} G(u)\,du\geq 0,
\end{aligned}
$$

para μ suficientemente pequeño. El lema queda así probado con $a=x_k$.

Lema 8 : *Sea $G:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua y T_0-periódica con valor medio cero. Entonces existe $a\in[0,T_0]$ tal que*

$$\int_0^\pi G(a\mathrm{sen}\,x)\,dx\geq 0.$$

Demostración: Si $G(0)\geq 0$, basta tomar $a=0$. Por tanto, podemos suponer que $G(0)<0$. Ya que G es T_0-periódica, existe $\varepsilon_0>0$ verificando

$$G(u)<-\varepsilon_0 \quad \forall u\in(T_0-\varepsilon_0,T_0) \quad \text{y} \quad \int_0^{T_0-\varepsilon} G(u)\,du>0 \tag{3.22}$$

Por el teorema de aproximación de Weiertrass, existe una sucesión $\{p_n\}$ de polinomios tal que

$$|p_n(u)-G(u)|<\frac{1}{nT_0}$$

para todo $u\in[0,T_0]$ y $n\in\mathbb{N}$. Además se puede suponer (por (3.22)) que $p_n(0)<0$, $p_n(u)<0$ para todo $u\in(T_0-\varepsilon_0,T_0])$ y $\int_0^{T_0-\varepsilon_0} p_n(u)\,du>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Por tanto, por el lema previo, deducimos la existencia de $a_n\in[0,T_0]$ tal que

$$\int_0^\pi p_n(a_n\mathrm{sen}\,x)\,dx>0.$$

Puesto que $\{a_n\}$ es una sucesión acotada, posee una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ que converge a un cierto $a\in[0,T_0]$. Consecuentemente,

$$\int_0^\pi G(a\mathrm{sen}\,x)\,dx\geq 0$$

y el lema queda así probado.

Ejemplo 9 :

En este ejemplo estudiamos el problema (3.14) cuando $k=1$, $h\equiv 0$ y g es una no-linealidad del tipo (R_3). Esto es, el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{r} -u''-u=g(u), \quad x\in(0,\pi)\\ u(0)=u(\pi)=0, \end{array}\right\} \tag{3.23}$$

con $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función T_0-periódica con valor medio cero. Este problema está relacionado con el trabajo de Ward [85] (véase Corolario 6) donde se prueba la existencia de una solución débil. En dicho trabajo no se decide si el nivel crítico encontrado corresponde bién a un nivel crítico de I obtenido via una aplicación del Teorema I.5 o bién con el nivel $m_0 = \inf_{u\in E} I(u)$. Quedaba abierto pués el problema de decidir cuál de estos dos posibles niveles es de hecho un valor crítico de I. El siguiente teorema prueba que I siempre alcanza el ínfimo en este caso:

Teorema 10 : *Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y T_0-periódica con valor medio cero. Entonces el problema de contorno* (3.23) *posee al menos una solución débil $u_0 \in E$ tal que $I(u_0) = \inf_{u\in E} I(u)$.*

Demostración: Puesto que $h \equiv 0$, $v_0 \equiv 0$ y así el Lema 8 nos proporciona la condición 1. de la Nota 2, 2, la cual es suficiente para (3.18). El Teorema 1 implica entonces el resultado.

Nota 11 : Si g satisface las condiciones del teorema anterior y $h \not\equiv 0$ verifica $\int_0^\pi h(x)\text{sen}\, x\, dx = 0$, entonces la condición de la Nota 2, 2, (suficiente para (3.18)) quedaría:

$$\int_0^\pi G(\alpha \text{sen} x + v_0(x))\, dx \geq 0 \tag{3.24}$$

Ya que G debe tener un comportamiento oscilatorio y

$$\lim_{|\alpha|\to+\infty} \int_0^\pi G(\alpha \text{sen} x + v_0(x))\, dx = 0,$$

pensamos que (3.24) ha de ser cierto para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, con lo que $m_0 = \inf_{u\in E} I(u)$ será un valor crítico de I. No obstante, hasta ahora no hemos sido capaces de probar esto.

3.3.2 Existencia de solución via el Teorema de punto de silla.

Buscamos ahora condiciones suficientes para que un valor $c > m_0$ (en realidad, dado por (1.9)) sea un nivel crítico de I. Para ello tenemos:

Teorema 12 : *Supongamos que $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ cumple (h_1) y g cumple (g_1) y (g_3) con G, g funciones acotadas. Sea $M = \sup\{|g(x,u)| \ / \ (x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k\}$. Si existe $\xi \in \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\begin{aligned}\int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\, dx \quad &< \quad \frac{1}{2}\int_\Omega (h(x)|v_0(x))\, dx - \bar{D}_2 \,\text{meas}\,\Omega \\ &\quad -\frac{1}{2(\lambda_2-\lambda_1)}\left[\|h\|_2 + M\sqrt{\text{meas}\,\Omega}\right]^2 \end{aligned} \tag{3.25}$$

entonces (3.4) *posee al menos una solución débil* $u_0 \in E$ *con*

$$I(u_0) \geq -\frac{\left[\|h\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right]^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\, dx \,(> m_0).$$

Demostración: Definimos $G_1 : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $G_1(x, u) = G(x, u + \xi\phi(x))$, para todo $x \in \bar{\Omega}$ y todo $u \in \mathbb{R}^k$. También consideramos los funcionales $\bar{I}, \bar{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned} \bar{I}(u) &= L(u) - \int_\Omega G_1(x, u(x))\, dx = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_\Omega a_{ij}(x)(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x))\, dx \\ & -\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\, dx - \int_\Omega G_1(x, u(x))\, dx - \int_\Omega (h(x)|u(x))\, dx \end{aligned}$$

$$\bar{N}(u) = -\int_\Omega G_1(x, u(x))\, dx.$$

Así $\bar{I} = L + \bar{N}$.

Observemos que por ser g acotada, (3.8) y (3.9) tenemos que para todo $\tilde{u} \in \tilde{E}$,

$$\begin{aligned} \bar{I}(\tilde{u}) &= L(\tilde{u}) + \bar{N}(\tilde{u}) \\ &\geq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\|\tilde{u}\|_2^2 - \|h\|_2\|\tilde{u}\|_2 - \int_\Omega [G_1(x, \tilde{u}(x)) - G_1(x, 0)]\, dx \\ & -\int_\Omega G_1(x, 0)\, dx \\ &\geq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\|\tilde{u}\|_2^2 - \left[\|h\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right]\|\tilde{u}\|_2 - \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\, dx \end{aligned}$$

y así por (3.25),

$$\begin{aligned} \bar{b}_{\tilde{E}} &= \min_{\tilde{u} \in \tilde{E}} \bar{I}(\tilde{u}) \\ &\geq \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}x^2 - \left[\|h\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right] x - \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\, dx\right\} \\ &= \frac{\left[\|h\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right]^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\, dx \\ &> b_L + \bar{D}_2 \operatorname{meas}\Omega \\ &\geq b_L + D_2, \end{aligned}$$

que nos da *1.* y *2.* del Teorema II. 5.

Por otra parte, la Proposición 1 junto con (g_3) y la acotación de G implican las hipótesis *1., 2.* y *3.* del Lema 2.

Por tanto, se cumplen todas las hipótesis del Teorema II.5 e $\bar{I}$ posee al menos un punto critíco $u \in E$ con

$$\bar{I}(u) \geq \bar{b}_{\tilde{E}} \geq -\frac{\left[\|h\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right]^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\, dx \, (> m_0).$$

Entonces $u_0 = u + \xi\phi \in E$ es una solución de (3.4), con $I(u_0) = \bar{I}(u_0)$. (En efecto, $-\mathfrak{L}(u+\xi\phi) - \lambda_1(u+\xi\phi) = -\mathfrak{L}u - \lambda_1 u - \xi[\mathfrak{L}\phi - \lambda_1\phi] = -\mathfrak{L}u - \lambda_1 = g(x, u+\xi\phi) + h(x)$).

Notas 13 :

1. Puesto que $\int_\Omega (h(x)|v_0(x))\, dx \geq 0$, tenemos la siguiente condición suficiente para (3.25):

$$\bar{D}_2 \operatorname{meas}\Omega < -\frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\left[\|h\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right]^2 - \int_\Omega G(x,0)\, dx \quad (3.26)$$

   (Tómese $\xi = 0$).

2. Pasamos ahora a estudiar con más profundidad el Teorema 12 en los casos particulares $m = 1$ y $k = 1$. En el primero de estos casos, Ω es un intervalo de números reales y asi el espacio E se encuentra contenido en $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^k)$. Este hecho nos proporcionará una nueva condición que puede sustituir a (3.25) en el teorema anterior. En el caso $k = 1$, o sea, el caso escalar, usando teoria de grado topológico combinada con técnicas de sub- y super-soluciones, podemos completar los resultados de existencia del Teorema 12 hasta abarcar el caso en que $\int_\Omega h(x)\phi(x)\, dx \neq 0$. Comenzaremos por el caso $m = 1$.

La siguiente estima *"a priori"* resultará muy útil:

Lema 14 : *Supongamos $m = 1$, $a_{1\,1} = 1$*[3]*, $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ cumpliendo (h_1) y g cumpliendo (g_1), con G una función acotada y sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Si $u \in E$ es tal que*

$$I(u) \leq b_L + \varepsilon$$

entonces

$$\|\tilde{u}'\|_2 \leq \frac{\sqrt{\lambda_2}\|h\|_2 + \sqrt{\lambda_2\|h\|_2{}^2 + 2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)(b_L + \varepsilon + M_1 \operatorname{meas}\Omega)}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

donde $M_1 = \sup\{G(x,u) \ / \ (x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k\}$.

[3]Suponer esto no significa ninguna pérdidad de generalidad.

Demostración: De

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx - \int_\Omega G(x,u(x))\,dx \\ &\quad - \int_\Omega h(x)\tilde{u}(x)\,dx \\ &\le b_L + \varepsilon, \end{aligned}$$

deducimos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \le b_L + \varepsilon + M_1 \operatorname{meas}\Omega + \int_\Omega h(x)\tilde{u}(x)\,dx$$

Por (3.8):

$$\frac{1}{2}(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2})\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \le b_L + \varepsilon + M_1 \operatorname{meas}\Omega + \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\|h\|_2\|\tilde{u}'\|_2$$

y así

$$\|\tilde{u}'\|_2 \le \frac{\sqrt{\lambda_2}\|h\|_2 + \sqrt{\lambda_2\|h\|_2{}^2 + 2\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)(b_L+\varepsilon+M_1\operatorname{meas}\Omega)}}{\lambda_2-\lambda_1} \blacksquare$$

En adelante denotaremos

$$\rho = \sup\{\frac{\|\tilde{u}\|_\infty}{\|\tilde{u}'\|_2} \;/\; \tilde{u} \in \tilde{E} - \{0\}\}.$$

Observemos que $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \le \rho \le \sqrt{\pi}$ si $Bu = u$ y $\Omega = (0,\pi)$, mientras que $\sqrt{\frac{T}{2}\frac{1}{\pi}} \le \rho \le \sqrt{\frac{T}{2}}$ si $Bu = (u(T)-u(0), u'(T)-u'(0))$ y $\Omega = (0,T)$.

Por comodidad, también denotamos

$$c = \frac{\sqrt{\lambda_2}\|h\|_2 + \sqrt{\lambda_2\|h\|_2{}^2 + 2\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)(b_L+(\bar{D}_2+M_1)\operatorname{meas}\Omega)}}{\lambda_2-\lambda_1},$$

es decir,

$$c = \frac{2\|h\|_2 + \sqrt{4\|h\|_2{}^2 + 24(b_L+(\bar{D}_2+M_1)\pi)}}{3}$$

si $\Omega = (0,\pi)$ y $Bu = u$; mientras que

$$c = \frac{T}{2\pi}\|h\|_2 + \sqrt{\frac{T^2}{4\pi^2}\|h\|_2{}^2 + 2(b_L + T(\bar{D}_2+M_1))},$$

si $\Omega = (0,T)$ y $Bu = (u(T) - u(0), u'(T) - u'(0))$; donde

$$M_1 = \sup\{G(x,u) \ / \ (x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k\}$$

(la función G se supone acotada).

Finalmente, sea también

$$c_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } \Omega = (0,\pi) \text{ y } Bu = u \\ 0, & \text{si } \Omega = (0,T) \text{ y } Bu = (u(T) - u(0), u'(T) - u'(0)) \end{cases} \tag{3.27}$$

Proposición 15 : *Supongamos $m = 1$, $a_{1\,1} = 1$, $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ cumpliendo (h_1) y g satisfaciendo (g_1) y (g_3), con G, g funciones acotadas. Si existen $\xi \in \mathbb{R}^k$ y $t_0 \in \bar{\Omega}$ tales que*

$$G(t,u) \leq -\bar{D}_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^k \ : \ |u - \xi| - c_1|\xi| \leq \rho c \tag{3.28}$$

y

$$G(x_0, v_0(x_0) + \xi) < -\bar{D}_2 \tag{3.29}$$

entonces (3.4) *posee al menos una solución débil $u_0 \in E$ con*

$$I(u_0) \geq -\frac{\left[\|h\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right]^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\,dx \ (> m_0).$$

Demostración: La única diferencia con la demostración del Teorema 12 radica en la forma de probar que para $\bar{I}(u) \equiv I(u + \xi\phi) = L(u) + N(u + \xi\phi)$ tenemos

$$\min_{\tilde{u} \in \tilde{E}} \bar{I}(\tilde{u}) > b_L + \bar{D}_2 \operatorname{meas}\Omega \tag{3.30}$$

Ahora, esto se puede deducir en nuestro caso por reducción al absurdo. Si fuese $\bar{I}(\tilde{u}) \leq b_L + \bar{D}_2 \operatorname{meas}\Omega$, por el Lema 14 (con $G(x,u)$ cambiada por $G_1(x, u + \xi\phi(x))$, aunque $M_1 = \sup\{G(x,u) \ / \ (x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k\} = \sup\{G_1(x,u) \ / \ (x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k\}$),

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leq \rho \|\tilde{u}'\|_2 \leq \rho c.$$

Así, de (3.28):

$$G(x, \tilde{u}(x) + \xi\phi(x)) \leq -\bar{D}_2 \quad \forall x \in \Omega$$

con lo que $N(\tilde{u} + \xi\phi) \geq \bar{D}_2 \operatorname{meas}\Omega$, y $b_L \leq L(\tilde{u}) \leq b_L + \bar{D}_2 \operatorname{meas}\Omega - N(\tilde{u}\xi\phi) \leq b_L$, lo cual contradice (3.29). Por tanto, queda probado (3.30). El resto de la demostración sigue igual.

Notas 16 :

1. Obsérvese que en el caso $\xi = 0$, la condición (3.28) queda

$$G(x,u) \leq -\bar{D}_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^k \ : \ |u| \leq \rho c.$$

2. Si $\Omega = (0,T)$ y $Bu = (u(T) - u(0), u'(T) - u'(0))$, es decir, si estamos con el problema periódico, y además $g \equiv 0$, entonces (3.28) y (3.29) quedan

$$G(x,u) \leq -\bar{D}_2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^k \ : \ |u - \xi| \leq \rho c$$

$$G(x_0, \xi) < -\bar{D}_2$$

Así vemos que, en este caso, la Proposición 15 mejora el resultado de [35] (véase Teorema 1.7 de este trabajo).

Como ya hemos mencionado, también es interesante estudiar con mayor detenimiento el caso escalar, esto es, el caso $k = 1$. Para ello, tenemos:

Proposición 17 : *Supongamos que a_{ij} son de clase C^1, $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$ cumple (h_1) y $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface (g_1) y (g_3) con G y g funciones acotadas. Supongamos además* (3.25) *(para $k = 1$). Entonces, existen $\tau_1 < 0 < \tau_2$ tales que:*

1. El problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u - \lambda_1 u & = & g(x,u) + h(x) + \varepsilon\phi(x), & x \in \Omega \\ Bu & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \qquad (3.31)$$

posee al menos una solución sí y solamente si $\varepsilon \in [\tau_1, \tau_2]$.

2. Si $\varepsilon \in (\tau_1, \tau_2) - \{0\}$, entonces (3.31) *posee al menos dos soluciones débiles.*

Nota 18 : El resultado anterior está motivado por otro de Solimini [78] donde, sin suponer (3.25), se prueba la existencia de $\tau_1 \leq 0 \leq \tau_2$ verificando *1.* y *2.* Hemos de observar sin embargo, que en dicho trabajo puede ser obviamente $\tau_1 = \tau_2 = 0$ (y así *2.* no tiene sentido en este caso). Piénsese para ello en el caso $g \equiv 0$. Por tanto, podemos ver a (3.25) como una condición suficiente para obtener $\tau_1 < 0 < \tau_2$.

Demostración: Como ha sido observado en la nota anterior, a raiz de los resultados de [78], se sabe que existen $\tau_1 \leq 0 \leq \tau_2$ verificando *1.* y *2.* Por tanto, bastará probar que $\tau_1 < 0 < \tau_2$. Para ello, consideramos $G_1, g_1 : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $G_1(x,u) = G(x, u + \xi\phi(x))$, $g_1(x,u) = g(x, u + \xi\phi(x))$, para todo $x \in \bar{\Omega}$ y $u \in \mathbb{R}$, (donde ξ está dado por (3.25)) y sean $\bar{I}_\varepsilon, \bar{N}_\varepsilon : E \longrightarrow \mathbb{R}$ los funcionales definidos por:

$$\begin{aligned}\bar{I}_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\,dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2\,dx \\ &\quad - \int_\Omega G_1(x,u(x))\,dx - \int_\Omega h(x)u(x)\,dx - \varepsilon\int_\Omega u(x)\phi(x)\,dx\ ,\end{aligned}$$

$$\bar{N}_\varepsilon(u) = -\int_\Omega G_1(x,u(x))\,dx - \varepsilon\int_\Omega u(x)\phi(x)\,dx$$

Por tanto, $\bar{I}_\varepsilon = L + \bar{N}_\varepsilon$ y el mismo razonamiento de la demostración del Teorema 12 prueba que existe $\gamma > 0$ tal que si $|\varepsilon| \leq \gamma$ entonces

$$\min_{\tilde{u}\in\tilde{E}} \bar{I}_\varepsilon(\tilde{u}) > \bar{D}_2 \operatorname{meas}\Omega + L(v_0)$$

Comprobemos ahora que $\bar{I}_\varepsilon$ verifica (PS) para todo $\varepsilon \neq 0$. En efecto, sea $\{u_n\}$ una sucesión en E verificando que $\{\bar{I}_\varepsilon(u_n)\}$ está acotada e $\{\bar{I}'_\varepsilon(u_n)\}$ converge a cero. Entonces, usando que G es una función acotada, existirá $k_1 > 0$ tal que

$$\left|\int_\Omega g_1(x,u_n(x))\,dx + \int_\Omega h(x)v(x)\,dx + \varepsilon\int_\Omega v(x)\phi(x)\,dx\right| \leq k_1$$

para todo $v \in E$ con $\|v\| = 1$. Así de $\lim_{n\to+\infty}\bar{I}'_\varepsilon(u_n) = 0$, deducimos que existirá k_2 tal que

$$\left|\sum_{i,j=1}^{m}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u_n}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx - \lambda_1\int_\Omega u_n(x)v(x)\,dx\right| \leq k_2$$

para todo $v \in E$ con $\|v\| = 1$. Tomando $v = \dfrac{\tilde{u}_n}{\|\tilde{u}_n\|}$ para estos u_n con $\tilde{u}_n \neq 0$, obtenemos

$$\frac{1}{\|\tilde{u}_n\|}\left|\sum_{i,j=1}^{m}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_j}(x)\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i}(x)\,dx - \lambda_1\int_\Omega \tilde{u}_n(x)^2\,dx\right| \leq k_2$$

de donde, usando (3.8), obtenemos que $\{\tilde{u}_n\}$ es una sucesión acotada. Puesto que $\{\bar{I}_\varepsilon(u_n)\}$ está acotada y G es una función acotada, deducimos que

$$\{\varepsilon\int_\Omega \phi(x)\bar{u}_n(x)\,dx\}$$

está acotada (con $\varepsilon \neq 0$), o sea, $\{\bar{u}_n\}$ es una sucesión acotada.

Por tanto, $\{u_n\}$ es una sucesión acotada y un razonamiento análogo al de la Nota II.3, 1, prueba que existe una subsucesión convergente $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$.

En consecuencia, $\bar{I}_\varepsilon$ cumple todas las hipótesis del Teorema I.5 si $0 < |\varepsilon| \leq \gamma$, y por tanto, posee al menos un nivel crítico que nos da la existencia de una solución de (3.31) para $0 < |\varepsilon| \leq \gamma$, con lo cual $\tau_1 < 0 < \tau_2$.

3.4 Resultados de multiplicidad de soluciones.

En la sección anterior hemos encontrado condiciones suficientes para la existencia de niveles críticos (de *naturaleza* diferente) del funcional I. Ello nos va a permitir obtener, en ciertos casos, la existencia de al menos dos niveles críticos de I, y por tanto, la existencia de al menos dos soluciones de (3.4). Más concretamente:

Teorema 1 : *Supongamos que* $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *verifica* (h_1) *y* g *cumple* (g_1) *y* (g_3)*, con* G*,* g *funciones acotadas. Si además se cumplen* (3.18) *y* (3.25) *entonces el problema de contorno* (3.4) *posee al menos dos soluciones débiles correspondientes a niveles críticos distintos del funcional* I*.*

Demostración: Puesto que se satisfacen las hipótesis de los Teoremas 1 y 12, I posee dos niveles críticos: uno es m_0 y otro $c > m_0$.

Notas 2 :

1. Las hipótesis del teorema anterior se cumplen si g satisface (g_1), (g_2), (g_3), (3.18) y (3.25) con $\bar{D}_1 = \bar{D}_2 = 0$.
2. En el caso $m = 1$ y $a_{1\,1} = 1$, la condición (3.25) puede sustituirse por (3.28) y (3.29).
3. A continuación describimos algunos ejemplos donde se verifica el Teorema 1:

Ejemplo 3 : *Sea* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y* T_0*-periódica con valor medio cero y sea* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por* (3.11)*. Supongamos que* $h \in L^2((0, \pi), \mathbb{R})$ *verifica* $\int_0^\pi h(x) \mathrm{sen}\, x \, dx = 0$*. Si existe* $a \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\int_0^\pi G(a\mathrm{sen}\, x + v_0(x))\, dx \geq 0 \tag{3.32}$$

y

$$G(0)\pi < -\frac{1}{6}\left[(\int_0^\pi |h(x)|^2\, dx)^{1/2} + M\sqrt{\pi} \right]^2$$

donde $M = \sup\{|g(u)| \ / \ u \in \mathbb{R}\}$*, entonces* (3.14) *posee al menos dos soluciones débiles distintas.*

(Obsérvese que el Lema 8 prueba que (3.32) se cumple si $h \equiv 0$).

Ejemplo 4 : *Sea* $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *cumpliendo* (g_1) *y para la que existen* $\bar{d}_1, \bar{d}_2 \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\lim_{u \to +\infty} G(x, u) = \bar{d}_1 \qquad \textit{uniformemente en } x \in \Omega$$

$$\lim_{u\to-\infty} G(x,u) = \bar{d}_2 \qquad \textit{uniformemente en } x \in \Omega$$

$$\lim_{|u|\to+\infty} g(x,u) = 0 \qquad \textit{uniformemente en } x \in \Omega.$$

Si se verifica

$$0 \le \int_\Omega G(x,0)\,dx < -\frac{1}{2(\lambda_2-\lambda_1)}M^2 \text{meas } \Omega + \min\{\bar{d}_1, \bar{d}_2\}\text{meas}\,\Omega,$$

donde $M = \sup\{|g(x,u)| \ / \ (x,u) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}\}$, *entonces el problema*

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u - \lambda_1 u & = & g(x,u), & x \in \Omega \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

posee al menos dos soluciones débiles.

Ejemplo 5 : *Sea* $g : [0,T]\times\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *cumpliendo* (g_1), (3.15) *y* (3.16). *Si existen* $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^k$ *tales que*

$$\int_0^T G(x,\xi_1)\,dx \ge 0$$

y

$$\int_0^T G(x,\xi_2)\,dx \le -\frac{T^3M^2}{8\pi^2}$$

donde $M = \sup\{|g(x,u)| \ / \ (x,u) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}^k\}$, *entonces el problema de contorno*

$$\left.\begin{array}{l} -u'' = g(x,u), \quad x \in (0,T) \\ u(0) = u(T), \ u'(0) = u'(T) \end{array}\right\}$$

posee al menos dos soluciones.

Nuestro siguiente teorema se refiere también a la existencia de dos soluciones de (3.4) correspondientes a niveles críticos distintos de I. En este caso I seguirá alcanzando su ínfimo pero el otro nivel crítico no se va a encontrar usando el Teorema I.5, sino el Teorema I.3. Para ello, denotemos

$$c^\star = \frac{\sqrt{\lambda_2+1}\|h\|_2 + \sqrt{(\lambda_2+1)[\|h\|_2{}^2 + 2\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)(b_L+1+M_1\text{meas}\,\Omega)]}}{\lambda_2-\lambda_1}$$

($M_1 = \sup\{G(x,u) \ / \ (x,u) \in \bar{\Omega}\times\mathbb{R}^k\}$) y, si $m = 1$ sea

$$\rho' = \sup\{\frac{\|\tilde{u}\|_\infty}{\|\tilde{u}\|} \ / \ \tilde{u} \in \tilde{E} - \{0\}\}.$$

(Obsérvese que $\rho' \le \rho$). Consideraremos también $c_2 = 1 - c_1$, con c_1 dado por (3.27).

Teorema 6 : *Supongamos* $m = 1$, $a_{1\,1} = 1$, $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *verificando* (h_1) *y* $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *satisfaciendo* (g_1), (g_2), (g_3), *con* G *una función acotada y*

(g_4) *Existen* $R_1, r_1 > 0$ *tales que* $R_1 - \rho' c^\star > c_2 r_1 + c_2 \rho' c^\star$ *y*

$$G(x,u) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbb{R}^k\ :\ c_2 r_1 \leq |u| \leq R_1.$$

Finalmente, supongamos que se cumple (3.18) *(con* $\bar{D}_1 = 0$*) para un* $u_0 \in E$ *con* $|\int_\Omega u_0(x)\phi(x)\,dx| < r_1 \|\phi\|_2{}^2$. *Entonces* (3.4) *posee al menos dos soluciones débiles.*

Demostración: Para $u \in E$, denotemos $\alpha_u \equiv \dfrac{\int_\Omega u(x)\phi(x)\,dx}{\|\phi\|_2{}^2}$ (así $u = \alpha_u \phi + \tilde{u}$). Por (3.18), existe $z \in E$ tal que $I(z) = \inf_{u \in E} I(u) = m_0$, y, por tanto, z es una solución débil de (3.4).

Consideremos ahora $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ y $r^\star > 0$ tales que

- $|\alpha_{u_0}| < r^\star$ y $r^\star \neq |\alpha_z|$
- $c_2 r_1 \leq c_2(r^\star - \varepsilon - \rho'(c^\star + \eta)) < r^\star < r^\star + \varepsilon + \rho'(c^\star + \eta) < R_1$

Pueden ocurrir dos casos:

a) Existe una sucesión $\{u_n\}$ en E tal que $I(u_n) \leq b_L + \dfrac{1}{n^2}$ y $|\alpha_{u_n}| = r^\star$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

En este caso por el Lema 14:

$$\|\tilde{u}'\|_2 \leq \frac{\sqrt{\lambda_2}\|h\|_2 + \sqrt{\lambda_2 \|h\|_2{}^2 + 2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)(b_L + 1 + M_1 \mathrm{meas}\,\Omega)}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

y así, por (3.8)

$$\|\tilde{u}\| \leq c^\star,$$

con lo que $u_n \in X = \{u \in E\ /\ \|\tilde{u}\| \leq c^\star + \eta,\ r^\star - \varepsilon \leq |\alpha_u| \leq r^\star + \varepsilon\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $u \in X$, tenemos

$$\begin{aligned} c_2 r_1 &\leq c_2(r^\star - \varepsilon - \rho'(c^\star + \eta)) \leq c_2[|\alpha_u \phi(x)| - \|\tilde{u}\|_\infty] \leq |u(x)| \\ &\leq \|\tilde{u}\|_\infty + |\alpha_u|\,\|\phi\|_\infty \leq r^\star + \varepsilon + \rho'(c^\star + \eta) < R_1 \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega$.

Por (g_4), $G(x, u(x)) \leq 0$ para cualesquiera $x \in \Omega$ y $u \in X$, y así $I(u) \geq b_L$ para todo $u \in X$. Luego $b_L = \inf_{u \in X} I(u)$. Por el principio variacional de Ekeland [46, Corolario 11], deducimos que existe una sucesión $\{v_n\}$ en X tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$b_L \leq I(v_n) \leq I(u_n) \leq b_L + \frac{1}{n^2}$$

$$\|v_n - w_n\| \leq \frac{1}{n} \tag{3.33}$$

$$\frac{I(w)-I(v_n)}{\|w-v_n\|} > -\frac{1}{n} \quad \forall w \in X \text{ con } w \neq v_n \tag{3.34}$$

Por (3.33) y ya que $\|v_n - w_n\|^2 = \|(\alpha_{v_n} - \alpha_{w_n})\phi\|^2 + \|\tilde{v}_n - \tilde{w}_n\|^2$, obtenemos que $\{\alpha_{v_n} - \alpha_{w_n}\} \longrightarrow 0$ y $\{\|\tilde{v}_n - \tilde{w}_n\|\} \longrightarrow 0$. Así, como $\|\tilde{u}_n\| \leq c^\star$ y $|\alpha_{u_n}| = r^\star$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$v_n \in \overset{\circ}{X} = \{u \in E \; / \; \|\tilde{u}\| \leq c^\star + \eta, \; r^\star - \varepsilon < |\alpha_u| < r^\star + \varepsilon\},$$

por lo que (3.34) implica que $\|I'(v_n)\| \leq \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En resumen, $\{v_n\}$ es una sucesión acotada en E con $\lim_{n\to+\infty} I(v_n) = b_L$ y $\lim_{n\to+\infty} I'(v_n) = 0$. Por argumentos similares a los de la demostración del Lema 2 y la Nota 3, 1, deducimos que existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ de $\{v_n\}$ que converge a un punto crítico $v \in E$ de I. Como entonces $\lim_{n\to+\infty} \alpha_{v_{n_k}} = \alpha_v$, tendremos que $|\alpha_v| = r^\star \neq |\alpha_z|$, de donde, $v \neq z$. Por tanto, la demostración estaría acabada en este caso.

b) Existe $\varepsilon^\star > 0$ tal que $I(u) > b_L + \varepsilon^\star$ para todo $u \in E$ con $|\alpha_u| = r^\star$.

En este caso, el Teorema I. 3 de Paso de Montaña permite encontrar un punto crítico de I distinto de z. En efecto, (g_2) implica la existencia de $\bar{u}_1 \in \bar{E}$ tal que $I(v_0 + \bar{u}_1) < b_L + \varepsilon^\star$ con $|\alpha_{\bar{u}_1}| > r^\star$. También tenemos $I(u_0) \leq b_L$ con $|\alpha_{u_0}| < r^\star$. Ya que cualquier *"camino"* uniendo $\bar{u}_1 + v_0$ y u_0 corta la superficie $|\alpha_u| = r^\star$ donde I toma valores mayores que $b_L + \varepsilon^\star$, deducimos por tanto que si $\Gamma_1 = \{g : [0,1] \longrightarrow E \; / \; g$ es continua, $g(0) = u_0$ y $g(1) = \bar{u}_1 + v_0\}$, entonces

$$c = \inf_{g\in\Gamma_1} \max_{t\in[0,1]} I(g(t)) > b_L + \varepsilon^\star (> m_0).$$

Usando ahora (g_3), la Proposición 1 y el Lema 2, I cumple $(PS)_c$. Por tanto, por el Teorema I.3, c es un valor crítico de I mayor que m_0 y así tenemos otra solución débil $v \in E$ distinta de z. ∎

Veamos ahora unos ejemplos que clarifican las aplicaciones del teorema anterior:

Ejemplo 7 :

Supongamos $m = 1$, $a_{1\,1} = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $Bu = u$. En este caso, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_1 = 1$,

$$c^\star = \frac{\sqrt{5}\|h\|_2 + \sqrt{4[\|h\|_2{}^2 + 6(b_L + 1 + M_1 \text{meas}\,\Omega)]}}{3},$$

$$\rho' \leq \rho \leq \sqrt{\pi}$$

Tenemos el siguiente:

Corolario 8 : *Supongamos que* $m = 1$, $a_{1\,1} = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $Bu = u$. *Sea* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función* T_0*-periódica, continua y con valor medio cero. Supongamos además que la función* G *dada por* (3.11) *verifica* $G(0) = 0$ *y*

$$G(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \ : \ |u| \leq R_1 \quad (R_1 > 0) \tag{3.35}$$

Si $R_1 > 2\sqrt{(1 + M_1\pi)\pi}$, *con* $M_1 = \sup\{|G(u)| \ / \ u \in \mathbb{R}\}$, *entonces el problema de contorno*

$$\left.\begin{array}{c} -u'' - u = g(u), \quad x \in (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{array}\right\}$$

posee al menos dos soluciones (correspondientes a niveles críticos distintos).

Demostración: En este caso, $G(0) = 0$ implica (3.18) para $u_0 = 0$. También, como $h \equiv 0$,

$$\rho' c^\star < \frac{\sqrt{30(1 + M_1\pi)\pi}}{3} < 2\sqrt{(1 + M_1\pi)\pi}$$

y así (3.35) implica (g_4). Una aplicación del teorema anterior termina la demostración.

Ejemplo 9 :

Supongamos ahora $m = 1$, $a_{1\,1} = 1$, $\Omega = (0, T)$, $Bu = (u(T) - u(0), u'(T) - u'(0))$. Entonces $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$ y así

$$c^\star = \frac{T\sqrt{4\pi^2 + T^2}}{4\pi^2}\left[\|h\|_2 + \sqrt{\|h\|_2{}^2 + \frac{2\pi^2}{T^2}(b_L + 1 + M_1 T)}\right]$$

$$\rho' \leq \rho \leq \sqrt{\frac{T}{2}}$$

Tenemos ahora:

Corolario 10 : *Supongamos* $m = 1$, $a_{1\,1} = 1$, $\Omega = (0, T)$, $Bu = (u(T) - u(0), u'(T) - u'(0))$. *Sean* $h \in L^2((0, T), \mathbb{R}^k)$ *una función tal que* $\int_0^T h_i(x)\, dx = 0$, *para* $i = 1, 2, \ldots, k$, *y* $g : (0, T) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *una función satisfaciendo* (g_1), (g_2), (g_3), (3.18), *con* G *una función acotada, y supongamos que existe* $r > 0$ *tal que*

$$G(x, u) \leq 0 \quad \forall x \in [0, T], \ \forall u \in \mathbb{R}^k \ : \ |u| \geq r \tag{3.36}$$

Entonces el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{c} -u'' = g(x, u) + h(x), \quad x \in (0, T) \\ u(0) = u(T), \ u'(0) = u'(T) \end{array}\right\}$$

posee al menos dos soluciones débiles (correspondientes a niveles críticos distintos).

Demostración: Sea $u_0 \in E$ tal que cumple (3.18). Por (3.36), existen $R_1, r_1 \geq r$ tales que

$$R_1 > r_1 + 2\rho' c^\star$$

$$G(x,u) \leq 0 \quad \forall x \in (0,T),\ \forall u \in \mathbb{R}^k \ :\ r_1 \leq |u| \leq R_1$$

$$R_1 > \int_\Omega u_0(x)\phi(x)\,dx.$$

Nota 11 : El corolario anterior mejora el Teorema 5.3 de [7] ya que los autores de este trabajo precisan la hipótesis

$$G(x,u) < 0 \quad \forall x \in (0,T),\ \forall u \in \mathbb{R}^k \ :\ r_1 \leq |u|$$

en lugar de (3.36).

3.5 Existencia de soluciones no triviales.

En muchas ocasiones se conocen algunas soluciones triviales de (3.4). En tales situaciones, los resultados anteriores resultan incompletos. Por tal motivo desarrollamos a continuación una serie de resultados que prueban la existencia de solución no trivial. En éstos, supondremos que 0 es una solución (trivial) de (3.4) y daremos condiciones suficientes para la existencia de otra solución. Comenzamos con la siguiente proposición:

Proposición 1 : *Supongamos que $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ cumple (g_1) y (g_3) con G y g funciones acotadas. Sea $M = \sup\{|g(x,u)| \ /\ (x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k\}$. Si $g(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$ y existe $\xi \in \mathbb{R}^k$ tal que*

$$\frac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} M^2 \mathrm{meas}\,\Omega + \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\,dx < \min\{0, \int_\Omega G(x,0)\,dx\} \tag{3.37}$$

entonces el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u - \lambda_1 u & = & g(x,u), & x \in \Omega \\ Bu & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.38}$$

posee al menos una solución débil distinta de la solución cero.

Demostración: Por (3.37), se cumple la condición (3.25) (para $\bar{D}_2 \equiv 0$, $h \equiv v_0 \equiv 0$). Así por el Teorema 12, el problema (3.38) posee una solución débil $u_0 \in E$ con $I(u_0) = c \geq -\dfrac{1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} M^2 \mathrm{meas}\,\Omega - \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\,dx > \max\{0, I(0)\}$. Por lo tanto, $u_0 \neq 0$. ∎

En los siguientes resultados explotaremos el hecho de que, cuando $m = 1$, E está incluido compactamente en $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^k)$. La proposición que sigue está basada en el Teorema 2 de [83]:

Proposición 2 : *Sean $m = 1$, $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ una función de clase C^1 satisfaciendo (g_1), (g_2) y (g_3) con G una función acotada. Si $g(x, 0) = 0$ y $\nabla_u g(x, 0) = \alpha\Im$, para cualesquiera $x \in \Omega$, con $\alpha \le 0$ e $\Im$ la aplicación identidad, entonces:*

1. *Si $\int_\Omega G(x, 0)\, dx \le 0$ entonces el problema de contorno* (3.38) *posee al menos una solución débil distinta de la solución cero.*

2. *Si $\int_\Omega G(x, 0)\, dx \le 0$ y se cumple* (3.18) *con alguna de estas desigualdades estricta, entonces* (3.38) *posee al menos dos soluciones débiles distintas de la solución cero.*

Demostración: 1. Puesto que $g(x, 0) = 0$ y $\nabla_u g(x, 0) = \alpha\Im$ $(\alpha \le 0)$ para todo $x \in \Omega$, tendremos que existe $r > 0$ tal que

$$G(x, 0) > G(x, u) \quad \forall u \in B_{\mathbb{R}^k}(0, r),\ \forall x \in \Omega.$$

Usando la inclusión de E en $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^k)$ y que $b_L = 0$ (pués $h \equiv 0$), deducimos que existen $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$I(u) = L(\tilde{u}) + N(u) \ge -\int_\Omega G(x, u(x))\, dx \ge \delta > -\int_\Omega G(x, 0)\, dx = I(0)$$

para todo $u \in E$ con $\|u\| = \rho$.

Por (g_2), existe $\bar{u} \in E$ con $\|\bar{u}\| > \rho$ tal que $I(\bar{u}) < \delta$.

También, por la Proposición 1 y el Lema 2, I verifica $(PS)_c$, para $c \ne 0$. Luego, por el Teorema 3, (3.38) posee al menos una solución débil $u_1 \in E$ con $I(u_1) > I(0)$. Así $u_1 \ne 0$.

2. En este caso, I alcanza su ínfimo en algún $u_2 \in E$ puesto que se cumple (3.18). Además, ya que o bién $\int_\Omega G(x, 0)\, dx < 0$, o bién (3.18) es una desigualdad estricta, obtenemos que $I(0) > I(u_2)$. Así u_2 es una solución distinta de la cero. La otra solución u_1 se obtiene como en el primer apartado. ∎

Por último, la proposición siguiente está relacionada con la Proposición 1.9 de [35] y se refiere al problema (3.12).

Proposición 3 : *Sean $m = 1$, $a_{1\,1} = 1$, $Bu = (u(T) - u(0), u'(T) - u'(0))$ y $\Omega = (0, T)$. Supongamos que $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ verifica (g_1) con la función $G : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y para la que existen $\beta \in \mathbb{R}$, $x_1 \in (0, T)$ y un subconjunto $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ abierto, convexo y difeomorfo a una bola abierta, tales que*

$$G(x, u) \le \beta \quad \forall (x, u) \in (0, T) \times \Theta$$

$$G(x, u) = \beta \quad \forall u \in \mathbb{R}^k - \Theta,\ \forall x \in (0, T)$$

$$G(x_1, 0) < \beta$$

Entonces el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{l} -u'' = g(x,u), \quad x \in (0,T) \\ u(0) = u(T), \;\; u'(0) = u'(T) \end{array}\right\} \tag{3.39}$$

posee al menos una solución débil $u_1 \in E$ *tal que* $u_1(x) \in \Theta$ *para cualquier* $x \in (0,T)$.

Nota 4 : Obsérvese que en este caso $0 \in \Theta$ y todos los puntos ξ de Θ son soluciones de (3.39) con $I(\xi) = -\beta T$, $\forall \xi \in \Theta$.

Demostración: Por la Proposición 15, existe $u_1 \in E$ tal que $I'(u_1) = 0$ e $I(u_1) > -\beta T$ (véase (3.30)). Así u_1 es una solución débil de (3.39) con $I(u_1) > -\beta T$. Un razonamiento estandar (véase [35]) nos lleva a que $u_1(x) \in \Theta$ para todo $x \in (0,T)$.

3.6 Otras condiciones de resonancia del tipo de Ahmad-Lazer-Paul.

En las secciones anteriores hemos estudiado la existencia y multiplicidad de soluciones del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u - \lambda_1 u & = & g(x,u) + h(x), & x \in \Omega \\ Bu & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{3.40}$$

donde $\mathfrak{L}u = \sum_{i,j=1}^m \dfrac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i})$ representa un operador diferencial de segundo orden uniformemente elíptico, $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una función continua y acotada verificando (g_1), $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ y Bu representa una condición de contorno, bién de tipo periódico, bién de tipo Dirichlet. Básicamente dicho estudio ha sido llevado a cabo para el caso en que (3.40) está en resonancia en el primer valor propio con una resonancia del tipo (R_2) o (R_3). Nos proponemos ahora estudiar el problema de contorno (3.40) para otros tipos de resonancia como puede ser (R_1). Para ello usaremos el Teorema I. 5, el cual nos proporcionará la existencia de al menos una solución débil. En realidad, las técnicas desarrolladas en las secciones previas para acotar $b_{\tilde{E}} = \min_{\tilde{u} \in \tilde{E}} I(\tilde{u})$ (siendo I el funcional asociado a (3.40) y dado por (3.5)) nos van a permitir considerar la hipótesis siguiente:

(g_5) $\lim_{|\xi| \to +\infty} \left| \int_\Omega G(x, \xi\phi(x))\, dx + \int_\Omega (h(x)|\xi)\phi(x)\, dx \right| = +\infty$,

que es más general que (R_1).

Seguiremos adoptando la notación de las secciones anteriores, esto es, $E = \bar{E} \oplus \tilde{E}$ representará la misma descomposición anterior, mientras que $I = L + N$ con L y N dados por (3.6) y (3.7), respectivamente. El resultado que sigue prueba que el funcional I satisface la condición de Palais-Smale (PS) cuando se verifica la condición anterior:

Lema 1 : *Supongamos que* $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *y que* $g : \Omega \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *es una función continua y acotada satisfaciendo* (g_1) *y* (g_5). *Entonces el funcional* I *dado por* (3.5) *cumple la condición* (PS).

Demostración: En virtud del Lema I.7 bastará comprobar que I verifica *1.* y *2.* de dicho lema. La Proposición 1 junto con un razonamiento idéntico al de la demostración del Lema 2 muestran que I cumple *2.* Con respecto a la prueba de *1.*, observemos que equivale a probar que toda sucesión $\{u_n\}$ en E verificando que $\{I(u_n)\}$ está acotada y $\lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0$ en $E^\star$, está acotada en E. Para demostrar esto, sea $\{u_n\}$ una sucesión en E con $\{I(u_n)\}$ acotada y $\lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0$ en $E^\star$. Por ser $\{I'(u_n)\}$ convergente a 0, deducimos que para los u_n con $\tilde{u}_n \neq v_0$, tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{\tilde{u}_n - v_0}{\|\tilde{u}_n - v_0\|}, I'(u_n)) = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[(\tilde{u}_n - v_0, L'(\tilde{u}_n)) - \int_\Omega (g(x, u_n(x))|\tilde{u}_n(x) - v_0(x))\,dx\right]}{\|\tilde{u}_n - v_0\|} = 0,$$

de donde, por la Proposición 1, *3.* y estar acotada la función g, deducimos que si $M = \sup\{|g(x,u)| \ / \ x \in \Omega, \ u \in \mathbb{R}^k\}$, entonces la sucesión

$$\{\alpha\|\tilde{u}_n - v_0\| - M(\operatorname{meas}\Omega)^{1/2}\}$$

está acotada (con $\alpha > 0$), y así $\{\tilde{u}_n\}$ es una sucesión acotada en $\tilde{E}$.

De otra parte, ya que $\{L(u_n)\}$ está acotada (pués $\{\|\tilde{u}_n\|\}$ lo está) tendremos que $\{N(u_n)\} = \{I(u_n) - L(\tilde{u}_n)\}$ es una sucesión acotada. Puesto que g está acotada, el teorema del valor medio implica

$$\begin{aligned}
|N(\bar{u}_n)| &= \left|\int_\Omega G(x, \bar{u}_n(x))\,dx + \int_\Omega (\bar{h}(x)|\bar{u}_n(x))\,dx\right| \\
&\leq M\int_\Omega |\tilde{u}_n(x)|\,dx + \left|\int_\Omega G(x, u_n(x))\,dx + \int_\Omega (\bar{h}(x)|u_n(x))\,dx\right| \\
&\leq k_1 + |N(u_n)| \\
&\leq k_2
\end{aligned}$$

y así, por (g_5) y el Lema 2, la sucesión $\{\bar{u}_n\}$ ha de estar acotada.

Por tanto, $\{u_n\} = \{\bar{u}_n + \tilde{u}_n\}$ está acotada y hemos probado *1.* del Lema 7.

Teorema 2 : *Supongamos que* $h \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *y que* $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *es una función continua y acotada satisfaciendo* (g_1) *y* (g_5)*. Si existe* $R > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned}
&\inf\left\{\textstyle\int_\Omega G(v_0(x) + \xi\phi(x))\,dx + \int_\Omega (h(x)|\xi)\phi(x)\,dx \ / \ |\xi| = R\right\} \\
&> \frac{\left[\|\tilde{h}\|_2 + M\sqrt{meas\,\Omega}\right]^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} + \textstyle\int_\Omega G(x,0)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (h(x)|v_0(x))\,dx
\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde $M = \sup\{|g(x,u)| \ / \ x \in \Omega, \ u \in \mathbb{R}^k\}$*, entonces el problema de contorno* (3.40) *posee al menos una solución débil.*

Demostración: Sea $I : E \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional dado por (3.5) y asociado al problema de contorno (3.40). Entonces, por la Proposición 1 y el teorema del valor medio:

$$\begin{aligned} I(\tilde{u}) &= L(\tilde{u}) + N(\tilde{u}) \\ &\geq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \|\tilde{u}\|_2{}^2 - \|\tilde{h}\|_2 \|\tilde{u}\|_2 - \int_\Omega G(x, \tilde{u}(x))\, dx \\ &\geq \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \|\tilde{u}\|_2{}^2 - \|\tilde{h}\|_2 \|\tilde{u}\|_2 - M \int_\Omega |\tilde{u}(x)|\, dx - \int_\Omega G(x, 0)\, dx \end{aligned}$$

de donde

$$b_{\tilde{E}} = \min_{\tilde{u} \in \tilde{E}} I(\tilde{u}) \geq -\frac{\left[\|\tilde{h}\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right]^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - \int_\Omega G(x, 0)\, dx \tag{3.42}$$

Sea ahora $I_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional dado por $I_1(u) = I(u + v_0)$. Entonces, por (3.41) y (3.42),

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{u} \in \tilde{E}} I_1(\tilde{u}) = b_{\tilde{E}} &\geq -\frac{\left[\|\tilde{h}\|_2 + M\sqrt{\operatorname{meas}\Omega}\right]^2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} - \int_\Omega G(x, 0)\, dx \\ &> \sup_{|\xi| = R} I_1(\xi\phi) \end{aligned}$$

y, por tanto, se cumple (I_4) e (I_5) del Teorema 5 para el funcional I_1.

Por el Lema 1, I_1 también cumple (PS). Se satisfacen así todas las hipótesis del Teorema 5, y éste nos garantiza la existencia de al menos un punto crítico de I_1, es decir, de una solución débil de (3.40).

Notas 3 :

1. Condiciones suficientes (pero no necesarias) para (g_5) son las siguientes:

   (A^+_-) $\lim_{|\xi| \to +\infty} \int_\Omega G(\xi\phi(x))\, dx + \int_\Omega (h(x)|\xi)\phi(x)\, dx = \pm\infty$

   Estas condiciones fueron introducidas por Ahmad, Lazer y Paul [2] para el estudio de problemas de contorno elípticos no-lineales (véase también [59] y [60, Teorema 4.7]).

   Observemos que (A^+) es también suficiente para (3.41).

2. Cuando se cumple (A_-), el funcional I está acotado inferiormente y, por tanto, alcanza su ínfimo (Teorema I. 1). En consecuencia, si se verifica (A_-) y (3.41), tenemos probada la existencia de dos soluciones débiles de (3.40).

3. Supongamos $k = 1$, $g(x, u) = g(u)$ y que existen $\lim_{u \to +\infty} g(u) = g(+\infty)$, $\lim_{u \to -\infty} g(u) = g(-\infty)$. Entonces, una condición suficiente para (g_5) sería:

$$\frac{1}{\|\phi\|_1}\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx \neq g(\pm\infty) \tag{3.43}$$

En efecto, (3.43) implica la existencia de $\xi_0 > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\left|\int_\Omega \frac{G(\xi\phi(x))}{\xi}\,dx - \int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx\right| \geq \delta > 0$$

para $|\xi| \geq \xi_0$. Así

$$\begin{aligned}\lim_{|\xi|\to+\infty} & \left|\int_\Omega G(\xi\phi(x))\,dx - \xi\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx\right| \\ &= \lim_{|\xi|\to+\infty}|\xi|\left|\int_\Omega \frac{G(\xi\phi(x))}{\xi}\,dx - \int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx\right| = +\infty\end{aligned}$$

que es (g_5).

Nótese también que el caso $g(\pm\infty) = \dfrac{1}{\|\phi\|_1}\displaystyle\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx$ ha sido estudiado en las secciones anteriores, pués, sin pérdidad de generalidad (cambiando h y g), puede suponerse que $g(\pm\infty) = 0$.

4. El ejemplo siguiente muestra que (g_5) es una condición más débil que (A_-^+):

Ejemplo 4 :

Consideremos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{r} -u'' - u = g(u) + t\,\mathrm{sen}\,x, \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{array}\right\} \tag{3.44}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$g(u) = \begin{cases} -4r^3 & \text{si } u \leq -r \\ 4u^3 & \text{si } |u| \leq r \\ 4r^3(r-u) + 4r^3 & \text{si } r \leq u \leq r+2 \\ -4r^3 & \text{si } r+2 \leq u \end{cases}$$

donde $r > 0$ satisface

$$r^4 > \frac{64}{9}r^6 \tag{3.45}$$

Entonces, si $|t|$ es suficientemente pequeño, (3.44) posee al menos una solución.

En efecto, en este caso

$$G(u) = \begin{cases} r^4 - 4r^3(u+r) & \text{si } u \leq -r \\ u^4 & \text{si } |u| \leq r \\ -2r^3(r-u)^2 - 4r^3(r-u) + r^4 & \text{si } r \leq u \leq r+2 \\ r^4 - 4r^3(u-r-2) & \text{si } r+2 \leq u \end{cases}$$

y $v_0 = 0$. La condición (3.41) se traduce en

$$\int_0^\pi G(\xi \operatorname{sen} x)\, dx + \xi t \frac{\pi}{2} > \frac{1}{6}(4r^3\sqrt{\pi})^2$$

cuando $|\xi| = R$. Tomando $R = r$, nos queda

$$r^4 \int_0^\pi \operatorname{sen}^4 x\, dx \xi t \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} r^4 \pi + \xi t \frac{\pi}{2} > \frac{8}{3} r^6 \pi$$

cuando $|\xi| = r$, lo cual es cierto, por (3.45), si $|t|$ es suficientemente pequeño.

Puesto que $g(+\infty) = g(-\infty) = -4r^3$, la nota anterior prueba que se verifica (g_5). Por tanto, se cumplen todas las hipótesis del Teorema 2 y (3.44) posee al menos una solución.

(Observemos que este problema (3.44) no puede ser estudiado por Ahmad, Lazer y Paul [2], ya que no se cumple (A_-^+)).

Capítulo 4

Problemas de contorno con no-linealidad discontinua.

4.1 Diferentes conceptos de solución y el método dual de Ambrosetti y Badiale.

En el capítulo anterior hemos estudiado el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathfrak{L}u - \lambda_1 u &=& g(x,u) + h(x), & x \in \Omega \\ Bu &=& 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

cuando $g : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una función continua y acotada. Nos disponemos a continuación a estudiar dicho problema cuando g sigue siendo una función acotada pero no necesariamente continua. Tal tipo de problemas surge en numerosos modelos matemáticos asociados a ciertos fenómenos físicos, químicos y biológicos (véase [5, 6, 10, 11, 21, 27, 28, 29, 32, 38, 39, 40, 47, 53, 57, 72, 75, 79, 80, 81, 82]).

Por simplicidad, supondremos que $Bu = u$, $k = 1$, $\mathfrak{L} = \Delta$, $h \in L^2(\Omega)$ y $g(x,u) = g(u)$ es independiente de la variable x. También se supone que la discontinuidad de g es de salto, pués supondremos que, en todo el capítulo, la hipótesis siguiente:

(g_6) Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que g es continua en $\mathbb{R} - \{a\}$ y existen

$$g(a-) = \lim_{u \to a^-} g(u) \text{ y } g(a+) = \lim_{u \to a^+} g(u).$$

Denotaremos por J al intervalo cerrado de extremos $g(a-)$ y $g(a+)$.

Una de las primeras cuestiones que surge en el estudio de tal tipo de problemas de contorno con no-linealidad g discontinua consiste en decidir que se entiende por solución de dicho problema. Estudiaremos dos tipos diferentes de solución. En el primero de ellos, diremos que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (donde $H_0^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ denotan los espacios de Sobolev usuales [1]) es una *solución "en el sentido multivaluado"* del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u - \lambda_1 u &=& g(u) + h(x), & x \in \Omega \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

si se verifica

$$-\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) - h(x) \in \hat{g}(u(x)), \quad a.e.\ x \in \Omega \tag{4.3}$$

donde $\hat{g}$ es la función multivaluada dada por

$$\hat{g}(u) = \left\{ \begin{array}{ll} g(u), & \text{si } u \neq a \\ J, & \text{si } u = a \end{array} \right.$$

De otra parte, diremos que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es una *solución "en el sentido casi por doquier"* del problema de contorno (4.2) si verifica

$$-\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) = g(u(x)) + h(x), \quad a.e.\ x \in \Omega$$

Evidentemente toda solución de este tipo es una solución en el sentido multivaluado. El reciproco no ha de ser cierto como muestran los resultados de [17, 72, 79, 81]. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado, esencialmente debido a Stuart y Toland [81, Lema 2.2] (véase también [5]).

Lema 1 : *Supongamos que* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *verifica* (g_6). *Si* $h \in L^2(\Omega)$ *verifica*

$$meas\{x \in \Omega \ / \ -h(x) - \lambda_1 a \in J\} = 0 \tag{4.4}$$

entonces toda solución $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *en el sentido multivaluado de* (4.2) *verifica*

$$\text{meas}\,\{x \in \Omega \ / \ u(x) = a\} = 0$$

y así es solución en el sentido casi por doquier de (4.2).

Demostración: En efecto, si $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ es una solución en el sentido multivaluado de (4.2) y denotamos $\Gamma_a = \{x \in \Omega \ / \ u(x) = a\}$, entonces por un teorema de Morrey-Stampacchia [61, Teorema 3.2.2, pag. 69]

$$\Delta u(x) = 0 \quad a.e. \ x \in \Gamma_a,$$

por lo que (4.3) queda:

$$-h(x) - \lambda_1 a \in J \quad a.e. \ x \in \Gamma_a$$

y así, (4.4) implica $\text{meas}\,\Gamma_a = 0$. ∎

Entre las principales dificultades que conlleva el estudio de la existencia de soluciones, bién en el sentido multivaluado, bién en el sentido casi por doquier, de (4.2) está el hecho de que el funcional $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|\,dx - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega |u(x)|^2 dx - \int_\Omega G(x, u(x))dx - \int_\Omega h(x)u(x)dx$$

con $G(u) = \int_0^u g(s)\,ds$, puede no ser derivable en el sentido de Fréchet. Esto impide aplicar la teoría usual de puntos críticos al funcional I en orden a obtener soluciones de (4.2). Por esta razón y motivado por los trabajos de Stuart y Toland [81, 82] (quienes aplican sus métodos a problemas no-resonantes), Chang [40] desarrolló una teoría de puntos críticos para funcionales localmente Lipschitz (obsérvese que I es un funcional de este tipo). Los puntos críticos, en un sentido generalizado; de I serán las soluciones en el sentido multivaluado del problema (4.2). Dicha teoría precisa la introducción de algunos conceptos *complicados* tales como el de subgradiente generalizado, y para poder aplicarla necesita una nueva versión del Teorema de deformación 1 que a su vez nos proporciona teoremas de puntos críticos análogos a los descritos en el Capítulo I.

Por otra parte, Ambrosetti y Badiale [5] han desarrollado recientemente una nueva técnica que permite usar la teoría clásica de puntos críticos. Ellos usan el principio variacional dual de Clarke [31] para obtener un funcional dual Φ en $L^2(\Omega)$ que es de clase C^1 y cuyos puntos críticos (en el sentido clásico) son soluciones en el sentido multivaluado del problema (4.2). Más concretamente, la construcción de Φ es como sigue:

Supongamos que g verifica (g_6) y

(g_7) Existe $m \geq 0$ tal que la función $g_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_0(u) = mu + g(u)$ es estrictamente creciente[1].

Es claro que, entonces, $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $g_1(u) = mu + \lambda_1 u + g(u)$ es también estrictamente creciente, por lo que posee una *inversa generalizada* $p_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidad por

$$p_1(t) = \begin{cases} a, & \text{si } t \in [g_1(a-), g_1(a+)] \\ u, \text{ con } g_1(u) = t, & \text{si } t \notin [g_1(a-), g_1(a+)] \end{cases} \tag{4.5}$$

o lo que es igual,

$$p_1(t) = u \Longleftrightarrow t \in \hat{g}_1(u),$$

donde $\hat{g}_1(u) = (\lambda_1 + m)u + \hat{g}(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Puesto que p_1 es continua, la función $P_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $P_1(t) = \int_0^t p_1(s)\, ds$ es de clase C^1. Además, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$|p_1(t)| \leq k_1 + k_2|t| \,, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.6}$$

Sean $E = L^2(\Omega)$ y $A : E \longrightarrow E$ el operador lineal, compacto y autoadjunto definido por

$$A(w) = u \Longleftrightarrow (-\Delta + m)u = w,$$

con $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Definimos $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\Phi(w) = -\frac{1}{2}\int_\Omega A(w)(x)w(x)\, dx - \int_\Omega A(h)(x)w(x)\, dx + \int_\Omega P_1(w(x))\, dx \tag{4.7}$$

Observemos que por ser p_1 continua y (4.6) [8], Φ es un funcional de clase C^1 y si $w \in E$, $\Phi'(w) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ viene dado por

$$(v, \Phi'(w)) = -\int_\Omega A(w)(x)v(x)\, dx - \int_\Omega A(h)(x)v(x)\, dx + \int_\Omega p_1(w(x))v(x)\, dx$$

para todo $v \in E$

El resultado que sigue muestra la relación que existe entre los puntos críticos de Φ y las soluciones de (4.2):

[1] Obsérvese que (g_7) implica la existencia de $g(a-)$ y $g(a+)$ con $g(a-) \leq g(a) \leq g(a+)$. De otra parte, si g fuese derivable en $\mathbb{R} - \{a\}$ con derivada acotada inferiormente y $g(a-) \leq g(a) \leq g(a+)$, entonces se cumpliría (g_7)

Teorema 2 (Ambrosetti y Badiale [5]) : *Supongamos que g verifica* (g_6) *y* (g_7), $h \in L^2(\Omega)$ *y sea* $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *el funcional de clase* C^1 *dado por* (4.7)*. Se tiene:*

1. *Si* $\Phi'(w) = 0$ *entonces* $u = A(w + h)$ *es una solución en el sentido multivaluado de* (4.2)*.*
2. *Si* $w \in E$ *es un mínimo local de* Φ *entonces, para* $u = A(w+h)$ *se cumple*

$$\text{meas}\,\{x \in \Omega \ / \ u(x) = a\} = 0 \tag{4.8}$$

y u es una solución en el sentido casi por doquier de (4.2)*.* ∎

Notas 3 :

1. El apartado *2.* del teorema anterior es análogo a un resultado de Stuart y Toland [82, Teorema 2.6]. Observemos también que este apartado nos proporciona una condición suficiente para que una solución en el sentido multivaluado de (4.2) lo sea en el sentido casi por doquier. Esta condición suficiente, a saber, provenir la solución de un mínimo local de Φ, es de una naturaleza totalmente distinta a la vista en el Lema 1.
2. Observemos que con el método dual de Ambrosetti y Badiale hemos conseguido un funcional Φ de clase C^1 en $E = L^2(\Omega)$, al que es aplicable por tanto la teoría clásica de puntos críticos. También hemos de resaltar que el hecho de que Φ esté definido en $L^2(\Omega)$ (en contraste con los funcionales considerados en el Capítulo III, definidos en $E = H^1_B(\Omega, \mathbb{R}^k)$) dificulta (en general) la comprobación de condiciones de compacidad tipo Palais-Smale. (Pensemos, por ejemplo, que la convergencia débil en $L^2(\Omega)$ es poco restrictiva en comparación con la de los espacios de Sobolev).

4.2 Existencia de solución en el sentido multivaluado para el caso de resonancia fuerte en infinito.

En esta sección probaremos la existencia de al menos una solución débil en el sentido multivaluado de (4.2) cuando $h \in L^2(\Omega)$ verifica (h_1), (esto es, $\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx = 0$), y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, además de cumplir (g_6) y (g_7), verifica (R_2), esto es:

$$\lim_{|u|\to+\infty} g(u) = 0 \tag{4.9}$$

y

$$\lim_{|u|\to+\infty} G(u) = 0 \tag{4.10}$$

Para ello utilizaremos fundamentalmente el Teorema II.7 (en realidad, una ligera variante del mismo). Necesitamos por tanto descomponer el espacio E

en $E = \bar{E} \oplus \tilde{E}$ con $\bar{E}$ un subespacio no trivial y de dimensión finita. Tomaremos (como ya es normal) $\bar{E}$ como el subespacio de E generado por la primera función propia ϕ y $\tilde{E}$ será el complemento ortogonal suyo. Así, para todo $w \in E$ tendremos $w = \bar{w} + \tilde{w}$ con $\bar{w} = \dfrac{1}{\|\phi\|_2{}^2} \int_\Omega w(x)\phi(x)\,dx \in \bar{E}$ y $\tilde{w} = w - \bar{w} \in \tilde{E}$. También, por analogía con la descomposición del capítulo anterior y observando que el conjunto de valores propios del operador A (definido en la sección anterior) es $\{\dfrac{1}{m+\lambda_j} \;/\; j \in \mathbb{N}\}$, parece natural (y resultará fundamental) definir $P, p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$p(t) = p_1(t) - \frac{t}{m+\lambda_1} \;,$$

$$P(t) = \int_0^t p(s)\,ds \;,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, y considerar los funcionales $L, N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 dados por

$$\begin{aligned} L(w) \;&=\; -\frac{1}{2}\int_\Omega A(w)(x)w(x)\,dx + \frac{1}{2(m+\lambda_1)}\int_\Omega |w(x)|^2\,dx \\ &\quad\; - \int_\Omega A(h)(x)w(x)\,dx \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$N(w) = \int_\Omega P(w(x))\,dx \tag{4.12}$$

Entonces $\Phi(w) = L(w) + N(w)$, para todo $w \in E$.

Las propiedades asintóticas de N y N' dependen de las que posean P y p. Estas últimas se reflejan en los siguientes lemas:

Lema 1 : *Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple (g_6), (g_7) y (4.9), entonces*

$$\lim_{|t|\to+\infty} p(t) = 0.$$

Demostración: Por (4.5) y la definición de p, tenemos que

$$p(t) = \begin{cases} a - \dfrac{t}{m+\lambda_1}, & \text{si } t \in [g_1(a-), g_1(a+)] \\ u - \dfrac{g_1(u)}{m+\lambda_1}, \ \text{con } g_1(u) = t, & \text{si } t \notin [g_1(a-), g_1(a+)] \end{cases}$$

y se comprueba fácilmente que

$$-\frac{g(s+)}{m+\lambda_1} \le p(t) \le -\frac{g(s-)}{m+\lambda_1}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

con

$$s = \begin{cases} a, & \text{si } t \in [g_1(a-), g_1(a+)] \\ {g_1}^{-1}(t)(= p_1(t)), & \text{si } t \notin [g_1(a-), g_1(a+)] \end{cases}$$

Puesto que $\lim_{|t|\to+\infty} |s| = +\infty$, (4.2) implica que

$$\lim_{|t|\to+\infty} p(t) = 0.$$

Lema 2 : *Si* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *cumple* (g_6), (g_7), (4.9) *y* (4.10), *entonces*

$$\lim_{|t|\to+\infty} P(t) = \int_0^{p_1(0)} g(s)\, ds + \frac{m+\lambda_1}{2} p_1(0)^2 \equiv \bar{d}$$

donde $p_1(0) = p(0) = x_0$ *es el valor tal que* $0 \in \hat{g}(x_0)$, *o sea, el punto donde la "gráfica" de* $\hat{g}$ *corta el eje de abcisas.*

Demostración: Se basa en la siguiente igualdad (para una demostración véase [12, Teorema 2.6]):

$$tp_1(t) = P_1(t) + \int_{p_1(0)}^{p_1(t)} g_1(s)\, ds = P - 1(t) + G_1(p_1(t)) - G_1(P_1(0)) \qquad (4.14)$$

donde $G_1(u) = \int_0^u g_1(s)\, ds$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Por (4.14):

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^t p(s)\, ds \\ &= tp_1(t) - \frac{t^2}{2(m+\lambda_1)} - G_1(p_1(t)) + G_1(p_1(0)) \\ &= tp_1(t) - \frac{t^2}{2(m+\lambda_1)} - \frac{m+\lambda_1}{2} p_1(t)^2 - G(p_1(t)) + \int_0^{p_1(0)} g_1(s) ds \\ &= -\frac{m+\lambda_1}{2} p(t)^2 - G(p_1(t)) + \bar{d} \qquad (4.15) \end{aligned}$$

de donde, por (4.9), (4.10), el Lema 1 y puesto que $\lim_{|t|\to+\infty} |p_1(t)| = +\infty$ deducimos que

$$\lim_{|t|\to+\infty} P(t) = \int_0^{p_1(0)} g(s)\, ds + \frac{m+\lambda_1}{2} p_1(0)^2 \equiv \bar{d}$$

■

El siguiente lema prueba las propiedades básicas de Φ, L y N necesarias para aplicar el Teorema II.7:

Lema 3 : *Supongamos que* $h \in L^2(\Omega)$ *cumple* $\int_\Omega h(x)\phi(x)\, dx = 0$ *y que* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *verifica* (g_6), (g_7), (4.9) *y* (4.10). *Consideremos los funcionales* Φ, L *y* N *dados por* (4.7), (4.11) *y* (4.12), *respectivamente. Se tiene:*

1. $L(w) = L(\tilde{w})$, $\forall w \in E$.

2. $\{\Phi(w_n)\}$ *es una sucesión no acotada siempre que la sucesión* $\{w_n\}$ *en* E *verifica que* $\{\|\tilde{w}_n\|_2\} \longrightarrow +\infty$.

3. *Si* $\{w_n\}$ *es cualquier sucesión en* E *con* $\{\tilde{w}_n\}$ *acotada y* $\{\|\bar{w}_n\|_2\} \longrightarrow +\infty$, *entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} N(w_n) = \bar{d}\,\mathrm{meas}\,\Omega \equiv d$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} N'(w_n) = 0 \text{ en } E^\star.$$

4. *Existe* $w_0 \in \tilde{E}$ *tal que*

$$(\tilde{w} - w_0, L'(w)) = 2(L(w) - L(w_0))$$

para todo $w \in E$.

5. Φ *está acotado inferiormente y es w.l.s.c.*

6. Φ *cumple* $(w - PS)_c$ *para todo* $c \neq L(w_0) + d$.

Demostración: 1. Se deduce fácilmente pués A es autoadjunto y

$$A\phi = \frac{1}{m+\lambda_1}\phi$$

2. Puesto que $\dfrac{1}{m+\lambda_2}$ es el segundo valor propio de A, tenemos que por su caracterización variacional [43]

$$\int_\Omega \tilde{w}(x)A(\tilde{w})(x)\,dx \leq \frac{1}{m+\lambda_2}\int_\Omega \tilde{w}(x)^2\,dx, \quad \forall \tilde{w} \in \tilde{E}.$$

Así, por *1.*,

$$L(w) = L(\tilde{w}) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+\lambda_1} - \frac{1}{m+\lambda_2}\right)\|\tilde{w}\|_2{}^2 - \|A(h)\|_2\|\tilde{w}\|_2 \qquad (4.16)$$

para todo $\tilde{w} \in \tilde{E}$, y por tanto, si $\{w_n\}$ es una sucesión en E para la que $\{\|\tilde{w}_n\|_2\} \longrightarrow +\infty$ entonces $\{L(\tilde{w}_n)\} \longrightarrow +\infty$.

De otra parte, por (4.9), (4.10) y el Lema 2, P es una función acotada. Luego N también lo es y deducimos por *1.* que $\lim_{n\to+\infty}\Phi(w_n) = +\infty$ para toda sucesión $\{w_n\}$ en E con $\{\|\tilde{w}_n\|_2\} \longrightarrow +\infty$.

3. Prácticamente la misma demostración hecha en la Proposición III.3 (y basada en el Lema III.2) prueba este apartado.

4. Sea $w_0 \in \tilde{E}$ tal que

$$L(w_0) = \min_{w \in E} L(w) \equiv b_L \tag{4.17}$$

(Claramente existe tal $w_0 \in \tilde{E}$ pués $L \mid \tilde{E}$ es coercivo por (4.16), continuo cuando en $\tilde{E}$ se considera la topologia débil y en $\mathbb{R}$ la usual (ya que A es compacto) y verifica *1.* Entonces $L'(w_0) = 0$ y así

$$\begin{aligned} L(w_0) &= -\frac{1}{2}\int_\Omega A(w_0)(x)w_0(x)\,dx + \frac{1}{2(m+\lambda_1)}\int_\Omega |w_0(x)|^2\,dx \\ &\quad -\int_\Omega A(h)(x)w_0(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}(w_0, L'(w_0)) - \int_\Omega A(h)(x)w_0(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega A(h)(x)w_0(x)\,dx \end{aligned} \tag{4.18}$$

Por tanto, ya que A es autoadjunto:

$$\begin{aligned} (\tilde{w} - w_0, L'(w)) &= (\tilde{w} - w_0, L'(\tilde{w})) \\ &= -\int_\Omega A(\tilde{w})(x)\tilde{w}(x)\,dx + \frac{1}{m+\lambda_1}\int_\Omega |\tilde{w}(x)|^2\,dx \\ &\quad -\int_\Omega A(h)(x)\tilde{w}(x)\,dx - \left[-\int_\Omega A(\tilde{w})(x)w_0(x)\,dx\right. \\ &\quad \left. +\frac{1}{m+\lambda_1}\int_\Omega \tilde{w}(x)w_0(x)\,dx - \int_\Omega A(h)(x)w_0(x)\,dx\right] \\ &= 2L(\tilde{w}) + \int_\Omega A(h)(x)\tilde{w}(x)\,dx - \left[\int_\Omega A(h)(x)\tilde{w}(x)\,dx\right. \\ &\quad \left. +(\tilde{w}, L'(w_0)) - \int_\Omega A(h)(x)w_0(x)\,dx\right] \\ &= 2L(\tilde{w}) - \int_\Omega A(h)(x)w_0(x)\,dx \end{aligned}$$

5. Por (4.16) y estar acotado el funcional N, se deduce que Φ es un funcional acotado inferiormente.

De otra parte, como N' es monótono (pués p es creciente) tenemos que N es w.l.s.c. [86, Proposición 41.8], lo que unido a la continuidad de L reseñada en el apartado anterior nos da que Φ es w.l.s.c.

6. Sean $c \neq L(w_0) + d$ y $\{w_n\}$ una sucesión en E con

$$\{\Phi(w_n)\} \longrightarrow c \text{ e } \{\Phi'(w_n)\} \longrightarrow 0.$$

Entonces por la misma demostración que la hecha en el Lema 2 (usando las propiedades probadas anteriormente) tendremos que $\{w_n\}$ es una sucesión acotada, por lo que, sin pérdida de generalidad puede suponerse que $\{w_n\} \rightharpoonup w$, con $w \in E$.

Finalmente, puesto que A es compacto,

$$\lim_{n\to+\infty} L(w_n) = L(w) \text{ y } \lim_{n\to+\infty} L'(w_n) = L'(w).$$

Deducimos así que

$$\lim_{n\to+\infty} N'(w_n) = \lim_{n\to+\infty} \Phi'(w_n) - \lim_{n\to+\infty} L'(w_n) = -L'(w),$$

lo que unido a la monotonía de N' nos da (véase los argumentos de la demostración del Lema 2, donde en lugar de ser N' monótono, lo es L'):

$$N'(w) = -L'(w)$$

y

$$N(w) = \lim_{n\to+\infty} N(w_n)$$

Por tanto, $\Phi(w) = c$ e $\Phi'(w) = 0$.

Teorema 4 : *Supongamos que* $h \in L^2(\Omega)$ *cumple* $\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx = 0$ *y que* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *verifica* (g_6), (g_7), (4.9) *y* (4.10). *Entonces el problema de contorno* (4.2) *posee al menos una solución en el sentido multivaluado.*

Demostración: Se puede hacer la misma demostración del Teorema II.7. Basta usar el apartado *6.* del lema anterior, en lugar del Lema II.2.

Nota 5 : El Teorema 4 prueba la existencia de un punto crítico de Φ. Sabemos también que Φ está acotado inferiormente; sin embargo, Φ no es coercivo, ni tiene porque satisfacer la condición $(w - PS)_c$ en $c = \inf_{w\in E} \Phi(w)$; de aqui que no sea trivial la existencia de puntos críticos de Φ.

4.3 Condiciones suficientes para la existencia de mínimo del funcional dual.

Como se ha visto en el Teorema 2 resulta muy interesante obtener la existencia de mínimos locales de Φ, pués éstos dan lugar a soluciones en el sentido casi por doquier de (4.2). En relación a esto, si repasamos la demostración del Teorema 4 (paralela a la del Teorema II.7 observamos que en ésta no se decide si el punto crítico de Φ que se halla en el teorema corresponde o no con un mínimo (global) del funcional. (Recordemos que Φ está acotado inferiormente). En lo que sigue vamos a dar condiciones suficientes para la existencia de tal mínimo global de Φ. Para ello usaremos otra vez el Teorema II.4 en una forma análoga a como se hizo en el Teorema III.1. Así tenemos el siguiente:

Teorema 1 : *Supongamos que* $h \in L^2(\Omega)$ *cumple* $\int_\Omega h(x)\phi(x)\,dx = 0$ *y que* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *verifica* (g_6), (g_7), (4.9) *y* (4.10). *Si se satisface una de las condiciones siguientes:*

1. $G(p(0)) + (m+\lambda_1)\dfrac{p(0)^2}{2} \geq \dfrac{1}{2\,\mathrm{meas}\,\Omega}\int_\Omega w_0(x)A(h)(x)\,dx$

   (donde $w_0 \in \tilde{E}$ está dado por (4.17)*).*

2. $\dfrac{m+\lambda_1}{2}p(t)^2 + G(p_1(t)) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

entonces (4.2) *posee al menos una solución en el sentido casi por doquier.*

Demostración: Por la misma demostración del Teorema II.4 (con el Lema II.2 sustituido por el Lema 3, una condición necesaria y suficiente para que Φ alcance su ínfimo es que exista $w \in E$ con $\Phi(w) \leq b_L + d$. Esto se consigue en el caso *1.* con $w = 0$ pués, por (4.15) y (4.18)

$$\begin{aligned}
\Phi(0) &= \int_\Omega P(0)\,dx \\
&= P(0)\mathrm{meas}\,\Omega \\
&= \left[-\frac{m+\lambda_1}{2}p(0)^2 - G(p(0)) + \int_0^{p_1(0)} g_1(s)\,ds\right]\mathrm{meas}\,\Omega \\
&\leq -\frac{1}{2}\int_\Omega w_0(x)A(h)(x)\,dx + d \\
&= b_L + d
\end{aligned}$$

Con respecto al caso en que se verifica la condición *2.*, tenemos que ésta y (4.15) implican

$$\begin{aligned}
\Phi(w_0) &= L(w_0) + \int_\Omega P(w_0(x))\,dx \\
&= b_L + \mathrm{meas}\,\Omega \int_0^{p_1(0)} g_1(s)\,ds \\
&\quad - \int_\Omega \left[\frac{m+\lambda_1}{2}p(w_0(x))^2 + G(p_1(w_0(x)))\right] dx \\
&\leq b_L + d
\end{aligned}$$

Notas 2 :

1. Si g es continua en $p_1(0) = p(0)$, la condición *1.* anterior queda (por (4.13)):

$$G(p(0)) - \frac{g(p(0))p(0)}{2} \geq \frac{1}{2\mathrm{meas}\,\Omega}\int_\Omega w_0(x)A(h)(x)\,dx$$

2. Si g es discontinua en $u = 0$, $h \equiv 0$ y $0 \in \hat{g}(0)$, entonces la condición 1 del teorema anterior se verifica trivialmente (pués $p(0) = 0$). Observemos también que, bajo estas hipótesis, $u \equiv 0$ es una solución en el sentido multivaluado de (4.2), pero no lo es en el sentido casi por doquier si, además, $g(0) \neq 0$. Por tanto, con la ayuda del Teorema 1 encontramos en este caso una solución no trivial de (4.2) en el sentido casi por doquier.

3. La condición *2.* del Teorema 1 se satisface si $G(u) \geq 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

4. Las condiciones *1.* y *2.* del Teorema 1 son suficientes para que Φ alcance su ínfimo. De hecho, en la demostración del Teorema 1 se ha visto que existe una condición necesaria y suficiente para esto. Esta es:

   Existe $w \in E$ tal que

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= -\frac{1}{2}\int_\Omega A(w)(x)w(x)\,dx - \int_\Omega A(h)(x)w(x)\,dx \\ &\quad + \int_\Omega P_1(w(x))\,dx \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_\Omega w_0(x)A(h)(x)\,dx + d\end{aligned}$$

Notas finales y posibles lineas de continuación de la investigación

A la vista de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores surgen numerosas cuestiones y problemas relacionados. Destacaremos a continuación algunos de los más relevantes:

1. En el Capítulo III hemos estudiado (Teorema III. 10) el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{c} -u'' - u = g(u), \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{array}\right\}$$

cuando $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es T_0-periódica ($T_0 > 0$) con valor medio cero. Ha sido probado que, para este problema, el funcional correspondiente I alcanza su ínfimo (con lo que obtenemos una solución débil del mismo). No obstante, queda abierto el problema de decidir si el funcional correspondiente al problema

$$\left.\begin{array}{c} -u'' - u = g(u) + h(x), \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{array}\right\}$$

alcanza o no su ínfimo cuando $h \in L^2([0,\pi])$ verifica $\int_0^\pi h(x) \operatorname{sen} x\, dx = 0$ y $h \not\equiv 0$. (Veáse Nota III. 11).

Tal cuestión se puede plantear para el problema de contorno más general

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta u - \lambda_1 u = g(u) + h(x), \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{4.19}$$

donde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es T_0-periódica ($T_0 > 0$) con valor medio cero, $h \in L^2(\Omega)$ verifica $\int_\Omega h(x)\phi(x)\, dx = 0$, donde ϕ era la primera función propia.

Obsérvese que este último caso es aún más díficil si cabe que el anterior pués parece que no es posible extender a dimensiones superiores la demostración (incluso para $h \equiv 0$) realizada para $m = 1$ debido a que en este caso el conocimiento que se tiene de ϕ es considerablemente menor que el que se tiene para $m = 1$.

En realidad podemos ver estas consideraciones sobre el problema de contorno (4.19) para una resonancia g del tipo (R_3) como parte de la cuestión más amplia que sigue: Obtener nuevos ejemplos concretos (que completen los ya estudiados) de no-linealidades g satisfaciendo (g_1) y (g_2) con G una función acotada superiormente, y que además verifiquen la condición necesaria y suficiente (3.18) del Capítulo III para que el funcional asociado alcance su ínfimo.

2. En el Capítulo III, (Sección 3), también hemos estudiado la existencia de otros niveles críticos del funcional I distintos de $m_0 = \inf_{u\in E} I(u)$. Esto junto con lo anterior nos permitía obtener (véase Sección 4 de este mismo capítulo) resultados de multiplicidad de niveles críticos del I (y, por tanto, de soluciones débiles del problema de contorno (4.19). Estos resultados podrían completarse estudiando el conjunto de níveles críticos de I. Esta puede ser una linea de trabajo ligada con la de Schaaf y Schmitt [73] y Costa, Jeggle, Schaaf y Schmitt

[33] quienes usando técnicas de bifurcación han sido capaces de probar la existencia de infinitas soluciones de (4.19) cuando g es una resonancia del tipo (R_3) y el dominio Ω satisface una condición técnica apropiada para sus métodos. Así, nuestro intento debería ser dar una caracterización variacional de tales soluciones. Observemos que, entre otras dificultades del problema, tenemos la siguiente: los niveles críticos de I forman un subconjunto acotado de números reales.

3. Sería también muy interesante extender los resultados obtenidos para problemas de contorno con una resonancia del tipo (R_3) al caso de sistemas. Por ejemplo, estudiar si existe o no solución del siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{c} -u'' - u = \nabla G(u) + h(x), \quad x \in (0,\pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{array}\right\}$$

donde $G : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, T_i-periódica en la variable x_i $(G(u + T_i e_i) = G(u) \ \ \forall u \in \mathbb{R}^k$, siendo $e_i = (0, 0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0)$ y verificando

$$\frac{1}{T_1 T_2 \ldots T_k} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \cdots \int_0^{T_k} G(u_1, u_2, \ldots, u_k)\, du_1\, du_2 \ldots du_k = 0$$

y $h \in L^2([0,\pi])$ verifica $\int_0^\pi h_i(x) \mathrm{sen}\, x\, dx = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$.

4. En el Capítulo II y para funcionales de la forma $I = L + N$, se han probado (Teoremas II. 4 y II. 5) algunos resultados de existencia de niveles críticos c con c perteneciente bién a $(-\infty, L(v_0) + D_1]$, bién a $(L(v_0) + D_2, \infty)$, donde $L(v_0)$, D_1 y D_2 están dados por *3.* del Lema II.2, (2.5) y (2.7) (respectivamente) del Capítulo II. Resultaría muy interesante obtener teoremas de existencia de nieles críticos c con $c \in (L(v_0) + D_1, L(v_0) + D_2]$. Esta cuestión no parece fácil en absoluto, pués, como puede verse con ejemplos sencillos, en tales c puede no verificarse la condición $(w - PS)_c$.

5. Con respecto al Capítulo IV, donde se han estudiado problemas de contorno con una no-linealidad de tipo discontinuo, podemos resaltar, entre otros, el problema abierto de encontrar condiciones necesarias y suficientes para que las soluciones en el sentido multivaluado lo sean en el sentido casi por doquier.

En este campo se enmarcan los resultados dados en el Lema IV. 1, donde determinado comportamiento del *salto* de g con respecto a la función h proporciona una condición suficiente, y en el Teorema IV. 2, donde la propiedad variacional de que la solución en el sentido multivaluado provenga de un mínimo local del funcional dual Φ nos da otra condición suficiente. Otros en esta linea aparecen en el trabajo de Ambrosetti y Turner [11], quienes han probado que cuando la no-linealidad es de una forma especial motivada por el problema de plasma [29, 76] y el dominio Ω es simetrico en el sentido de Steiner[2], entonces se pueden obtener a traves de los teoremas min-max clásicos, soluciones en el sentido multivaluado que son simetricas según Steiner. Esta simetria de las soluciones determina (4.8) del Teorema IV.2 y así que son soluciones en el sentido casi por doquier.

Como continuación de este trabajo podemos tener en cuenta [17], donde se estudia el caso en el cual Ω es una corona abierta $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m \ / \ R < |x| < \hat{R}\}$ $(0 < R < \hat{R})$. Hemos de observar que en esta situación, Ω no es un dominio simetrico en el sentido de Steiner, aunque evidentemente posee una simetria *radial*. En [14] se prueba que para no-linealidades del tipo considerado en [11], todas las soluciones en el sentido multivaluado que son radiales son soluciones en el sentido casi por doquier (de hecho, verifican (4.8) del Teorema IV.2).

De otra parte, no ha de olvidarse que también se conocen ejemplos de soluciones en el sentido multivaluado que no lo son en el sentido casi por doquier (ver [17, 72, 82])

Por todo esto creemos que resultaría de gran interés encontrar tanto condiciones suficientes como condiciones necesarias para que las soluciones en el sentido multivaluado lo sean en el sentido casi por doquier cuando el dominio Ω no ha de poseer necesariamente simetria.

6. Otra cuestión que merece ser estudiada consititiría en determinar si el funcional dual Φ considerado en el Capítulo IV, satisface o no la condición $(PS)_c$ para $c \neq L(w_0)+d$. Recordemos que en el Lema IV.3 hemos probado que Φ sí satisface $(w-PS)_c$, la cual era suficiente para la versión dada en la Proposición I.6 del teorema de deformación. Sin embargo, esta versión, en contraste con el Teorema I.1 para el que se precisa $(PS)_c$, no da ninguna información adicional sobre el conjunto $K_c = \{w \in E \ / \ \Phi(w) = c, \Phi'(w) = 0\}$ (salvo que éste es no vacío). Tal tipo de información puede ser útil tanto para cuestiones de multiplicidad de puntos críticos (y, por tanto, de soluciones) con nivel c, como para cuestiones de las consideradas en la nota anterior.

7. Si observamos las hipótesis del Teorema IV.4 veremos que aparece la condición (técnica) (g_7) que resulta necesaria para aplicar el metodo dual de Ambrosetti y Badiale, pero que por los resultados obtenidos para el caso de no-linealidades continuas, parece no necesaria. Sin embargo, si queremos intentar eliminar la hipótesis (g_7) en el Teorema IV.4 tendremos que usar otra técnica distinta a la de Ambrosetti y Badiale.

También parece necesaria otra técnica distinta para poder estudiar el problema (4.2) del Capítulo IV cuando g verifica (g_6) y es del tipo (R_3). Esto es así, pués no es claro que el funcional N verifique, en este caso, la parte *3.* del Lema IV.3 (ya que las funciones correspodientes P y p parecen no verificar los comportamientos asintóticos adecuados).

[2]es decir, si Ω es simetrico respecto de un hiperplano, por ejemplo, $x_1 = 0$ y convexo en la variable x_1 [67].

Pensamos que las técnicas de Chang [40] pueden ser útiles para el estudio de estos problemas. Para tal fin puede consultarse el trabajo [16] que en la actualidad se encuentra realizando el autor de esta Memoria en colaboración con L. Boccardo y M. Calahorrano y donde se desarrollan las técnicas de Chang para el estudio de problemas de contorno asociados a operadores diferenciales de orden superior (al dos) como puede ser el *p-Laplaciano* $\Delta_p = \text{div}\,(|\nabla(\cdot)|^{p-1}\nabla(\cdot))$.

8. Con respecto a la condición (g_6), podemos observar que ésta puede ser mejorada en el sentido de permitir a la no-linealidad g poseer varios puntos de discontinuidad. Más concretamente, la hipótesis (g_6) en el Capítulo IV puede ser sustituida por la siguiente:

(g_6') *Existe un subconjunto* $A \subset \mathbb{R}$ *sin puntos de acumulación tal que* g *es continua en* $\mathbb{R} - A$ *y existen* $g(a-) \equiv \lim_{u\to-\infty} g(u)$ *y* $g(a+) \equiv \lim_{u\to+\infty} g(u)$, *para todo* $a \in A$.

9. Finalmente, la última linea de continuación de la investigación que nos atrevemos a sugerir consistiría en extender los resultados obtenidos en esta memoria para problemas de contorno en resonacia en el primer valor propio λ_1 al caso en el cual la resonancia sea en valores propios superiores. Para esta cuestión, los trabajos de [58, 78] pueden resultar útiles.

Bibliografía

[1] Adams, R.A.: *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1.975.

[2] Ahmad, S., Lazer, A.C. y Paul, J.: *Elementary critical point theory and pertubations of elliptic boundary value problems at resonance.* Ind. Univ. Math. J. **25** (1.976), 933-944.

[3] Ambrosetti, A.: *Elliptic equations with jumping non-linearities.* J. Math. Phys. Sci. (Madras) (1.984), 1-10.

[4] Ambrosetti, A.: *Differential equations with multiple solutions and nonlinear functional analysis.* Equadiff 82. Proc. Würzburg, 1.982. Lectures Notes 1017. Ed. by H.W. Knobloch and K. Schmitt.

[5] Ambrosetti, A. y Badiale, M.: *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities.* J. Math. Anal. Appl. **140** (1.989), 363-373.

[6] Ambrosetti, A., Calahorrano, M. y Dobarro, F.: *Global branching for discontinuous problems.* Comment. Math. Univ. Carolinae, por aparecer.

[7] Ambrosetti, A. y Coti Zelati, V.: *Critical points with lack of compactness and singular dynamical systems.* Ann. Mat. Pura et Appl. **CIL** (1.987), 237-259.

[8] Ambrosetti, A. y Prodi, G.: *Analisi nonlineare.* Quaderno della Scuola Normale Superiore, Pisa 1.973.

[9] Ambrosetti, A. y Rabinowitz, P.H.: *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Anal., **14** (1.973), 349-381.

[10] Ambrosetti, A. y Struwe, M.: *Existence of steady vortex rings in an ideal fluid.* Archive Rat. Mech. Analysis, **108**-2 (1.989), 97-109.

[11] Ambrosetti, A. y Turner, R.E.L.: *Some discontinuous variational problems.* Diff. and Integral Eqns., **1** (1.988), 341-349.

[12] Arcoya, D.: *Espacios de Orlicz.* Memoria de Licenciatura 1.986.

[13] Arcoya, D.: *Periodic solutions of Hamiltonian systems with strong resonance at infinity.* Diff. and Int. Eqns. **3** (1.990), 909-921. Comunicación Preliminar en Extracta Mathematicae, **4** (1.989), 33-35.

[14] Arcoya, D.: *Positive solutions for semilinear Dirichlet problems in an annulus.* Aparecerá en J. Diff. Eqns.

[15] Arcoya, D.. *Un problema no lineal de contorno con una no linealidad de tipo periódico.* Aparecerá en las actas de las XIII Jornadas Hispano-Lusas celebradas en Valladolid, 1988.

[16] Arcoya, D., Boccardo, L. y Calahorrano, M.: *Some discontinuous problems with a quasilinear operator.* En preparación.

[17] Arcoya, D. y Calahorrano, M.: *Multivalued non-positone problems.* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 1, (1.990), 117-123.

[18] Arcoya, D. y Cañada, A.: *Critical point theorems and applications to nonlinear boundary value problems.* Nonl. Anal. T.M.A. **14** (1.990), 393-411.

[19] Arcoya, D. y Cañada, A.: *The dual variational principle and discontinuous elliptic problems with strong resonance at infinity.* Nonl. Anal. T.M.A. **15** (1.990), 1145-1154. Comunicación Preliminar en Extracta Mathematicae, **5** (1.990), 12-14.

[20] Aubin, J.P. y Ekeland, I.: *Appplied nonlinear analysis.* John Wiley & Sons, 1.984.

[21] Amick, C.J. y Turner, R.E.L.: *A global branch of steady vortex rings.* J. Reine Angew. math. **384** (1.988), 1-23.

[22] Bartolo, B., Benci, V. y Fortunato, D.: *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity.* Nonl. Anal. TMA **7** (1.983), 981-1012.

[23] Benci, V. y Rabinowitz, P.H.: *Critical point theorems for indefinite functionals.* Invent. Math. **52** (1.979), 241-273.

[24] Bona, J.L., Bose, D.K. y Turner, R.L.: *Finite-amplitude steady waves in stratified fluids.* J. Math. pures et appl. **62** (1.983), 389-439.

[25] Brézis, H.: *Analyse fonctionnelle et applications.* Masson, Paris 1.983.

[26] Brézis, H., Coron, J.M. y Nirenberg, L.: *Free vibrations for a nonlinear wave equations and a theorem of P. Rabinowitz.* Comm. Pure Appl. Math., **33** (1.980), 667-689.

[27] Cerami, G.: *Metodi variazionali nello studio di problemi al contorno con parte non lineare discontinua.* Rend. Circolo Mat. di Palermo, **XXXII** (1.983), 336-357.

[28] Cerami, G.: *Soluzioni positive di problemi con parte non lineare discontinua e applicazione a un problema di frontiera libera.* Boll. U.M.I. **2**-B (1.983), 321-338.

[29] Cimatti, G.: *A nonlinear elliptic eigenvalue problem for the Elenbaas equation.* Boll. U.M.I. **2**-B (1.979), 555-565.

[30] Clark, D.C.: *A variant of the Ljusternik-Schnirelmann theory.* Indiana Univ. Math. J. **22** (1.972), 65-74.

[31] Clarke, F.H.: *Periodic solutions of Hamiltonian inclusions.* J. Diff. Eqns. **40** (1.981), 1-6.

[32] Correa, F.J.S.A. y Gonçalves, J.V.A. : *Sublinear elliptic systems with discontinuous nonlinearities.* Preprint.

[33] Costa, D.G., Jeggle, H., Schaaf, R. y Schmitt, K.: *Oscillatory pertubations of linear problems at resonance.* Results in Math. **14** (1.988), 275-287.

[34] Costa, D.G. y Silva, E.: *The Palais-Smale condition versus coercivity.* Preprint (1.989).

[35] Coti Zelati, V.: *Periodic solutions of dynamical systems with bounded potential.* J. Diff. Eqns. **67** (1.987), 400-413.

[36] Chang, K.C.: *Infinite dimensional Morse theory and its applications.* Les Presses de L'Université de Montreal, 1.985.

[37] Chang, K.C.: *On the mountain pass lemma.* Proc. Equadiff 6, Lectures Notes n§ 1192, 1.985.

[38] Chang, K.C.: *On the multiple solutions of the elliptic differential equations with discontinuous nonlinear term.* Sci. Sinica **31** (1.978), 139-158.

[39] Chang, K.C.: *The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearities.* Comm. Pure Appl. Math. **XXXIII** (1.980), 117-146.

[40] Chang, K.C.: *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations.* J. Math. Anal. Appl. **80** (1.981), 102-129.

[41] Dancer, E.N.: *On the use of asymptotics in nonlinear boundary value problems.* Ann. Mat. Pura appl. **131** (1.982), 167-185.

[42] De Figueiredo, G.D.: *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.* Springer-Verlag.

[43] De Figueiredo, G.G.: *Positive solutions of semilinear elliptic problems.* Proc. of the first latin american school of differential equations, Lectures Notes n§ 957, 1.982.

[44] Deimling, K.: *Nonlinear functional analysis.* Springer Verlag, 1.985.

[45] Dieudonné, J.: *History of functional analysis.* North-Holland, 1.981.

[46] Ekeland, I.: *Nonconvex minimization problems.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **1** (1.979), 443-474.

[47] Fraenkel, L.E. y Berger, M.S.: *A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid.* Acta Math. **132** (1.974), 14-51.

[48] Gilbarg, D. y Trudinger, N.: *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer Verlag 1.983.

[49] Hofer, H.: *A geometric description of the neighbourhood of a critical point given by the mountain-pass theorem.* J. London Math. Soc. **31** (1.985), 566-570.

[50] Hofer, H.: *Variational and topological methods in partiallly ordered Hilbert spaces.* Math. Ann. **261** (1.982), 493-514.

[51] Hofer, H.: *A note on the topological degree at a point of mountain pass type.* Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1.984), 309-315.

[52] Hutson, V. y Pym, J.S.: *Applications of functional analysis and operator theory.* Academic Press, 1.980.

[53] Kuiper, H.J.: *Eigenvalue problems for noncontinuous operators associated with quasilinear elliptic equations.* Archive Rat. Mech. Anal. **53** (1.973), 178-186.

[54] Landesman, E. y Lazer, A.: *Nonlinear pertubations of linear elliptic boundary value problems at resonance.* J. Math. Mech. **19** (1.970), 609-623.

[55] Lazer, A.C. y Solimini, S.: *Nontrivial solutions of operator equations and Morse indices of critical points of min-max type.* Nonl. Anal. TMA **8** (1.988), 761-775.

[56] Ljusternik, L. y Schnirelmann, L.: *Topological methods in variational problems.* Trudy Inst. Math. Mech., Moscow State Univ. (1.930), 1-68.

[57] Lupo, D.: *A bifurcation result for a Dirichlet problem with discontinuous nonlinearity.* Rend. Aparecerá en Circolo Mat. di Palermo.

[58] Lupo, D. y Solimini, S.: *A note on a resonance problem.* **102A** (1.986), 1-7.

[59] Mawhin, J.: *Critical point theory and nonlinear differential equations.* Proc. Equadiff 6, Lectures Notes n§ 1192, 1.985.

[60] Mawhin, J. y Willem, M.: *Critical point theory and hamiltonian systems.* Springer-Verlag, 1.989.

[61] Morrey, C.B.: *Multiple integrals in calculus of variations.* Springer-Verlag. Berlin 1.966.

[62] Morse, M.: *The calculus of variations in the large.* A.M.S. Providence 1.934.

[63] Ni, W-M.: *Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations.* J. Analyse Math. **37** (1.980), 248-275.

[64] Palais, R.S.: *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds.* Topology, **5** (1.966), 155-132.

[65] Palais, R.S.: *Morse theory on Hilbert manifolds.* Topology, **2** (1.963), 299-340.

[66] Palais, R.S. y Smale, S.: *A generalized Morse theory.* Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1.964) 165-171.

[67] Polya, G. y Szego, G.: *Isoperimetric inequalities in mathematical physics.* Princeton University Press 1.951.

[68] Pucci, P. y Serrin, J.: *A mountain pass theorem.* J. Diff. Eqns. **60** (1.985), 142-149.

[69] Pucci, P. y Serrin, J.: *Extensions of the mountain pass theorem.* J. Funct. Anal. **59** (1.984), 185-210.

[70] Rabinowitz, P.H.: *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.* C.B.M.S. Published by A.M.S., 1.984.

[71] Rabinowitz, P.H.: *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations.* Nonlinear Analysis: A collection of papers in honor of Erich Rothe, Academic Press, New York 1.978, 161-177.

[72] Rauch, J.: *Discontinuous semilinear differential equations and multiple valued maps.* Proc. A.M.S. **64** (1.977), 277-282.

[73] Schaaf, R. y Schmitt, K.: *A class of nonlinear Sturm-Liouville problems with infinitely many solutions.* Aparecerá Trans. Amer. Math. Soc.

[74] Schwartz, J.T.: *Generalizing the Lusternik-Schnirelmann theory of critical points.* Comm. Pure Applied Math. **17** (1.964), 307-315.

[75] Sherman, C.: *A free boundary value problem.* SIAM Review **2** (1.960), 154-155.

[76] Shujie, L.: *Some aspects of critical point theory.* Preprint (1.986).

[77] Smale, S.: *Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem.* Ann. of Math. (1.964), 382-396.

[78] Solimini, S: *On the solvability of some elliptic partial differential equations with the linear part at resonance.* J. Math. Anal. Appl. **117** (1.986), 138-152.

[79] Stuart, C.: *Differential equations with discontinuous nonlinearities.* Archive Rat. Mech. Analysis **63** (1.976), 59-75.

[80] Stuart, C.: *Maximal and minimal solutions of elliptic differential equations with discontinuous nonlinearities.* Math. Z. **163** (1.978), 239-249.

[81] Stuart, C. y Toland, J.F.: *A property of solutions of elliptic differential equations with discontinuous nonlinearities.* J. London Math. Soc. **21** (1.980), 329-335.

[82] Stuart, C. y Toland, J.F.: *A variational method for boundary value problems with discontinuous nonlinearities.* J. London Math. Soc. **21** (1.980), 311-328.

[83] Thews, K.: *T-periodic solutions of time-dependent hamiltonian systems with a potential vanishing at infinity.* Manuscripta Math. **33** (1.981), 327-338.

[84] Tonelli, L.: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* Zanichelli, Bologna 1.921-1.923.

[85] Ward, J.R. JR.: *A boundary value problem with a periodic nonlinearity.* Nonl. Anal. TMA **10** (1.986), 207-213.

[86] Zeidler, E.: *Nonlinear functional analysis and its applications,* III. *Variational methods and optimization.* Springer-Verlag, 1.985.