



UNIVERSIDAD DE  
GRANADA



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA  
METROPOLITANA  
Santiago de Chile

**“MODELOS DIFUSOS PARA  
CUANTIFICACION DEL RENDIMIENTO  
LABORAL:  
Aportes para la Construcción de un Sistema Inteligente  
de Gestión de Recursos Humanos”**

**Autor: Mg. Francisco Cofré Gajardo**

**Director de Tesis: Dr. Miguel Delgado Calvo-Flores**

**2006**

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: Francisco Cofré Gajarjo  
D.L.: Gr. 2283 - 2006  
ISBN: 978-84-338-4158-2

## **INDICE GENERAL**

<b><u>Contenido</u></b>	<b><u># Página</u></b>
Introducción .....	1
Capítulo #1: Formulación del Problema de Gestión de Rendimiento Laboral .....	11
Capítulo #2: Introducción a las Técnicas y Teorías de Subconjuntos Difusos.....	51
Capítulo #3: Modelamiento de las Cualidades por Medio de Subconjuntos Difusos .....	99
Capítulo #4: Modelamiento del Rendimiento Laboral por Medio de Operadores de Agregación.....	123
Conclusiones.....	159
Desafíos para Futuras Investigaciones.....	165
Bibliografía.....	169



## **INTRODUCCIÓN.**

Desde el instante mismo en que el ser humano creó la primera organización, quedó en evidencia que el “grupo” tiene más fuerza que el individuo; a partir de ese instante comenzaron a crearse diversas organizaciones con distintos objetivos. La empresa, como un caso particular de organización que busca la rentabilidad económica, también obedece a la necesidad de varios individuos de obtener iguales logros; sin embargo, la existencia de la propiedad de la empresa denota que existirán dos grandes grupos de miembros dentro de tal organización. Como es lógico de esperar, los dueños desean obtener el máximo de lucro, mientras que los restantes miembros esperan obtener el máximo beneficio de la empresa como contrapartida de sus aportes individuales.

Queda en evidencia que los dueños de la empresa tienen ciertos objetivos que pueden colisionar (generar conflicto) con los objetivos de los miembros que no son dueños (trabajadores), esto crea la necesidad de diseñar e implementar mecanismos que hagan que los trabajadores aporten el máximo de sus esfuerzos para que la “empresa” logre sus objetivos; pero cada individuo exhibe una mezcla de necesidades, como lo señala Robbins [55], que condicionan sus aportes y por lo tanto su rendimiento laboral esperado; en este sentido, se recurre al estímulo más potente según Katz & Kahm [37], con el propósito de activar la motivación que haga que el individuo realice ciertas tareas.

Durante siglos se ha ensayado con diversos tipos de estímulo para que un trabajador realice ciertas actividades al interior de una empresa, donde el factor más utilizado tiene la forma de algún premio material, habitualmente dinero; sin embargo, este factor presenta un punto de agotamiento en su capacidad estimuladora, llevando a los directivos de una empresa hacia una búsqueda incesante por encontrar el o los estímulos que proporcionen mejores resultados en el rendimiento laboral.

Las Ciencias Sociales han aportado muchos estudios cualitativos que dan cuenta de la eventual relación entre ciertos factores, no necesariamente materiales, y el rendimiento laboral; todos los estudios tienen como factor común observar aquellas empresas que exhiben altos índices de rendimiento y elevadas rentabilidades económicas, intentando identificar que tienen en común frente a aquellas empresas que tienen magros resultados en esta materia.

Surge la hipótesis central que motiva esta tesis doctoral, “¿Es posible predecir el rendimiento laboral de un individuo?”, esta hipótesis tendrá algún tipo de veracidad en la medida en que se logre responder preguntas como: ¿Existe(n) algún(os) factor(es) común(es), en la conducta humana, en aquellas empresas con buenas rentabilidades económicas?, ¿Estos factores tienen alguna relación cuantificable?, ¿Es posible crear un sistema inteligente que aprenda, a partir de estas relaciones, a vincular los factores detectados y/o detectables para lograr un rendimiento laboral deseado?.

Si resulta posible predecir el rendimiento laboral de un individuo en un cierto rol de una empresa, no cabe duda que los trabajadores realizarán su trabajo en forma más que satisfactoria, tanto para la empresa como para ellos mismos, lo cual hará que los recursos sean utilizados en forma óptima.

### **Definición Del Problema.**

Debido a que las diversas organizaciones involucran el desempeño de cada uno de sus miembros humanos, se requiere disponer de un sistema que sea capaz de controlar los distintos factores, al menos a nivel global, que influyen en el desempeño de una persona al interior de la organización donde está vinculado; ello permitirá que la organización logre sus objetivos en forma más eficiente y que sus miembros realicen las tareas encomendadas en forma fluida y sin requerir de costosos mecanismos de presión y/o control, alcanzando altos niveles de satisfacción para ambas partes.

### **Hipótesis De Investigación.**

La presente tesis busca establecer la veracidad de la siguiente hipótesis: **“Existe una relación entre: las competencias, las habilidades y el perfil de necesidades de un individuo, con respecto a su desempeño laboral; la cual puede ser descrita a través de un modelo de datos”.**

Esta hipótesis está representada por la siguiente expresión:

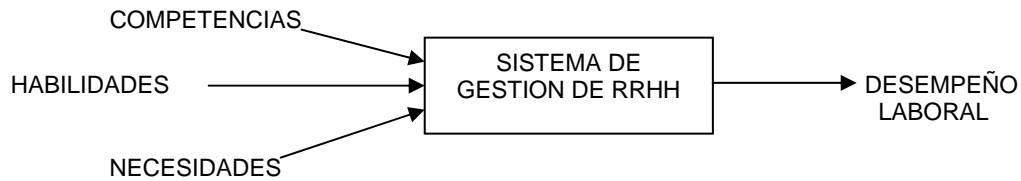
$$\mathbf{RL = F(h, c, n)}$$

Como se verá en la investigación, cada individuo exhibe diversos grados de: habilidad, competencia y necesidad, dentro de un rol, al momento de estimar su potencial rendimiento laboral; es un hecho que todo individuo posee estos 3 atributos, pero lo que no está claro es su cuantía requerida para un cierto rol, ni menos aún para estimar su rendimiento laboral esperable; luego se hace necesario utilizar los conjuntos difusos para intentar manejar el comportamiento que nos interesa.

Se podría suponer genéricamente que con: alta habilidad, alta competencia y regular necesidad, habrá un rendimiento adecuado; no obstante, alta y regular cantidad son en verdad subconjuntos difusos que pertenecen al universo de posibles cantidades.

### **Modelo Propuesto.**

A partir de los diversos aportes que provee las Ciencias Sociales, más específicamente en el ámbito de la Gestión de Recursos Humanos, podemos diseñar el siguiente modelo en su 1º nivel:



**Fig.#1: Modelo de potenciales variables predictoras del rendimiento laboral.**

Las variables: competencias, habilidades y necesidades constituyen los factores de mayor frecuencia en los diversos estudios disponibles; esta situación resulta comprensible si consideramos que:

Competencias; corresponden a los conocimientos adquiridos por un individuo para realizar una tarea, estos conocimientos pueden obtenerse ya sea en actividades de laboratorio (clases supervisadas) y/o en actividades experimentales propiamente tales (experiencia laboral).

Habilidades; corresponden a los talentos innatos de un individuo, los cuales se desarrollan durante las diversas experiencias de vida.

Necesidades; corresponden a los factores que determinan la búsqueda de los satisfactores asociados y por ende a la necesidad de “hacer” para alcanzarlos, estamos hablando de la motivación o ganas de hacer.

Aún cuando al momento de realizar la investigación del estado del arte en torno a la conducta humana en el trabajo, no se pudo acceder a propuestas cuantitativas que relacionen estos factores, ello no implica necesariamente que no se pueda diseñar una relación coherente y estructurada, tema que aborda esta tesis.

En el caso particular del proceso de evaluación del rendimiento en el trabajo, las Ciencias del Comportamiento aportan una gran batería de tests a los cuales se les asocia una “pauta de corrección”; sin embargo, los factores cuantitativos o las relaciones numéricas entre estos o son un misterio o no han



sido abordados hasta llegar a propuestas completas y difundidas formalmente; nos referimos al proceso de evaluación del desempeño, pues en esta línea es donde más se ha avanzado a la hora de intentar vincular la conducta humana con la productividad en el trabajo. Llama la atención que a pesar de que estos procesos son habituales e históricos en muchas empresas, sobretodo grandes compañías, a lo largo del mundo, muchos trabajadores en diversos países acusan altas tasas de insatisfacción, con el agravante de que se continúa recurriendo al dinero como fuente de estímulo a pesar de su demostrado agotamiento como tal.

Durante el análisis de las 3 variables mencionadas como factores recurrentes, se pudo constatar que detrás de ellas se encuentran muchos factores elementales, los cuales adoptan diversos valores de un individuo a otro, esto llevó a denominar dichas tres variables como “macro variables”, mientras que los factores elementales que estas aglutinan pasaron a denominarse “factores o variables elementales”.

Cada uno de los factores elementales identificados muestra una cuantía incierta, ya que los valores que adoptan no tienen causales concretas conocidas, algo propio si se trata de conductas parametrizadas de comportamientos humanos; esta condición llevó a utilizar como representación lo sugerido por la lógica difusa, ciencia que permite representar datos cuyos valores admiten cierta incertidumbre.

Al momento de vincular grupos más específicos de variables o factores elementales surgen los subconjuntos de variables difusas, ellos son la base para establecer cierto conocimiento nuevo a partir de los valores primarios de las variables elementales elegidas; la lógica difusa provee diversas propiedades que permiten inferir ciertas conclusiones al manipular estos subconjuntos, haciendo posible proyectar nuevos comportamientos sujetos a cierto margen de error.

La presente tesis aborda el camino de crear modelos que permitan relacionar las variables de interés con el propósito de cuantificar el rendimiento laboral esperable de un individuo frente a un rol concreto en una organización, de igual forma, también se busca cuantificar que tan apto resulta dicho individuo para ejecutar tal rol.

El capítulo #1 trata de establecer las bases disponibles para individualizar los predictores de mayor confiabilidad en torno al rendimiento laboral, una vez identificados se procede a seleccionar las variables principales que son incorporadas en el modelo conceptual de gestión de recursos humanos que se propone; a través de un estudio acabado de la conducta de las variables seleccionadas, se detectó que estas variables son del tipo grupal y por lo tanto es necesario recurrir a estudios previos disponibles para vincular a cada una de estas variables con los factores elementales que mejor dan cuenta de ellas, es así como surgen los factores o variables elementales.

Los factores elementales presentan un comportamiento de carácter incierto, ya que hacen referencia a conductas humanas, de probada incerteza; de esta forma queda claro que estos factores serán medidos a través de sus grados de cercanía con la total presencia del atributo en un individuo; también queda en evidencia que un mismo individuo en diversos roles puede presentar distintos grados de un mismo atributo, por lo tanto el valor del atributo no es inherente al individuo, sino que está más estrechamente ligado con la conducta del individuo frente al citado rol; incluso más, en un rol existen diversas tareas y el valor del atributo por tarea también puede ser diferente; no obstante, en ocasiones suele ocurrir que un atributo no puede ser medido en términos de su grado de cercanía con la total presencia del atributo en cuestión, es decir, sólo se puede asociar el atributo con un subconjunto con identidad particular, en estos casos será necesario diseñar un modelo de medición diferente a lo planteado precedentemente.

El capítulo #2 presenta un recorrido por los diversos principios y teorías de la lógica difusa, partiendo desde las propiedades más básicas hasta llegar a un punto de bifurcación marcado por: relaciones de implicación, agregación de información; luego de estudiadas las características de ambas opciones, se elige abordar la senda marcada por la agregación de información; sin embargo, se reconoce que al disponer de una medida de cuantificación del rendimiento laboral, resulta igualmente interesante poder obtener conocimiento nuevo por la vía de las implicaciones, más aún cuando el norte esté centrado en el aprendizaje.

Para poder crear una forma de cuantificar el rendimiento laboral ligado a un rol concreto para un grupo de atributos presentes en un individuo, el proceso de agregar información resulta clave; en este sentido, los operadores promedio sumado a los conectivos lógicos hacen posible establecer relaciones que culminan en el cálculo de índices, pero surge la necesidad de disponer de una forma de establecer la importancia relativa de cada uno de los factores involucrados en la relación que genera tales índices, esta problemática es resuelta a través de los aportes de los operadores OWA, culminando con el diseño de un modelo de cálculo del rendimiento laboral de un individuo en un rol concreto para una organización.

Al trabajar con el operador OWA surgen algunos cuestionamientos, como es el caso de:

- ¿El peso o importancia relativa de los atributos participantes en un cálculo vía OWA, corresponde a valores al azar u están dados por algún criterio específico?.
- ¿Qué tipo de operador puede acoger el hecho de que un atributo no pueda ser asociado con un grado de pertenencia concreto (atributo con un valor puntual), pero sí con un subconjunto particular, sin saber en que lugar de dicho subconjunto está su mejor asociación?.

Las respuestas a estas preguntas llevaron a incorporar:

- El cuantificador de Yager, para el caso de la importancia relativa de los atributos, dando la forma de  $w_Q$ .
- El operador LOWA, para el caso del tratamiento de etiquetas lingüísticas, que aborda los atributos vinculados a subconjuntos pero incapaz de ser asociados a un valor concreto.

Aún queda un tema por resolver, el cual dice relación con establecer las distancias entre los valores de los atributos presentes en un individuo y sus probabilidades de ocurrencia, lo cual es abordado a través del potencial de la Integral de Sugeno.

El capítulo #3 aborda un recorrido por las diversas propiedades de la lógica difusa, orientadas a obtener conocimiento nuevo, experimentando con un grupo de datos de muestra, quedando en evidencia que las relaciones de implicación, aún cuando generan este conocimiento nuevo, no nos permiten cuantificar índices de rendimiento; por otra parte, también resulta evidente que el proceso que debemos abordar está centrado en la agregación de información; sin embargo, se pudo detectar que existe la imperiosa necesidad de disponer de pesos relativos para los atributos que conforman los criterios de clasificación cuando se intenta agrupar individuos bajo un lineamiento convergente.

Fue necesario enfatizar que lo que se está fusificando son los atributos vinculados a los individuos de interés, también quedó claro que propiedades como: el teorema de representación, las propiedades de la intersección, los conectivos lógicos e incorporando pesos relativos, son la base para abordar el proceso de agregar información.

El capítulo #4 congrega todas las teorías previamente individualizadas para dar forma concreta a un modelo que permite medir cuantitativamente el rendimiento laboral [MM1], quedando pendiente la medición cualitativa, una vez más las relaciones de implicación muestran la alta necesidad de disponer de

importancias relativas para los atributos involucrados; luego se centra la atención en utilizar a fondo los operadores de agregación, siendo el operador OWA la base de este análisis; surgen algunos inconvenientes que llevan a diseñar una manera de establecer la importancia relativa de un atributo en un rol concreto, pero luego se requiere determinar el grado de pertenencia más representativo para cada una de las 3 macro variables que corresponde a uno de los pilares de esta tesis, sólo así se logra afinar el modelo de cálculo del rendimiento laboral de un individuo en un rol **[MM2]**, lo que constituye uno de los principales aportes de esta tesis; sin embargo, al retomar la medición cualitativa del rendimiento laboral, propia de aquellos casos donde no es posible asociar un valor concreto para cada atributo, se postula un modelo de medición construido sobre la base del operador LOWA **[MM3]**; no obstante, surge la necesidad de mantener y/o respetar la importancia relativa de las macro variables, por lo que surge el modelo restringido **[MM4]**; mientras que para los casos donde no se dispone de una muestra adecuada para determinar las importancias de las macro variables: H, C y N, se postula el modelo de medición del rendimiento laboral **[MM5]**.

Finalmente se establece una forma de cuantificar el grado de aptitud que presenta un individuo concreto para ejercer un rol específico, para ello se utiliza la Integral de Sugeno.



## **CAPITULO 1:**

### **FORMULACION DEL PROBLEMA DE GESTION DE RENDIMIENTO LABORAL.**

#### **1.1. Introducción:**

La gestión del recurso humano es una labor bastante antigua dentro de las organizaciones, alcanzando su máxima expresión en las empresas, al intentar lograr máximos niveles de rendimiento; sin embargo, a pesar de los aportes mayoritariamente cualitativos de las ciencias de cognición humana, esta labor suele desarrollarse en forma casi intuitiva; durante muchas décadas se han consignado como parámetros claves: la experiencia y la formación profesional, pero no hay acuerdos respecto de sus importancias relativas cuantitativas a la hora de “medir” el rendimiento laboral esperado y/o el más probable.

Es más habitual de lo que se cree el hecho de que a las personas se las evalúa, en el trabajo, a través de la aplicación de tests y entrevistas, algunos instrumentos están científicamente validados, para luego asignar un puntaje de acuerdo a tablas o porcentajes de respuestas “correctas”, pero estos procesos no están suficientemente sistematizados; su mayor aplicación está focalizada hacia la selección del personal, pero no se traduce en: evaluar al recurso humano existente en la empresa, para luego ser intervenido con el propósito de elevar su rendimiento.

En la senda de la sistematización del proceso de gestión del personal, el punto clave lo constituye el medir cuantitativamente el eventual potencial de un individuo, el cual se concreta en el “rendimiento laboral”, donde se diferencian: rendimiento más probable, rendimiento deseado. La medición del rendimiento involucra identificar las variables que condicionan dicho rendimiento, en esta investigación se centra la atención en 3 variables básicas que determinarían el

rendimiento laboral, como un aporte hacia la sistematización de la medición del rendimiento.

Una vez estudiada la conducta de las variables de interés, se requiere determinar cuál es la forma más adecuada de medir y representar cada variable, ello facilitará el camino para encontrar y/o diseñar el mecanismo que las vincule funcionalmente con el rendimiento.

Cada una de las 3 variables en estudio exhibe una característica grupal, ya que contemplan diversos factores elementales; cada uno de estos factores elementales puede adoptar uno de muchos valores, pero no basta con establecer que cada factor está o no presente en un individuo, existe cierta cercanía del factor con respecto a su total presencia, consignando que esta cercanía tiene vinculado un cierto margen de incertidumbre, dado que estamos hablando de conductas humanas, probadamente sin certeza total.

Junto al rendimiento laboral aparecen los distintos roles que un individuo puede abordar en una empresa, no es raro ni arriesgado suponer que cada rol tendrá el concurso de ciertos valores de las variables en estudio, por lo tanto, un individuo será más o menos apto para asumir ciertos roles concretos.

A continuación abordaremos la búsqueda y análisis del(los) eventual(es) modelo(s) de rendimiento laboral, si lo(s) existe; ello obligará a estudiar las variables que se cree son decidoras en el rendimiento de un individuo en su trabajo.

## **1.2. Buscando los predictores del rendimiento laboral:**

Desde hace muchos años, diversos investigadores ligados al ámbito del recurso humano, han estudiado la conducta humana en busca de explicaciones en



torno a su comportamiento, y especialmente con respecto a su conducta en el trabajo; la mayoría de los aportes tienen fuerte acento cualitativo, aún cuando existen algunos avances en forma cuantitativa en esta materia.

La búsqueda ha llevado a que algunos investigadores centren su atención en los probables predictores del comportamiento en el trabajo, creando una amplia batería de tests y pruebas que permitan, en la fase de selección de personal, identificar las características más predominantes de los postulantes en torno a un cierto rol o cargo que necesita ser abordado por una persona concreta; otros investigadores han focalizado sus esfuerzos en la fase de evaluación del desempeño, allí también se han concretado diversos instrumentos que permitan identificar, no sólo los resultados del trabajo de una persona, sino también, las razones por las cuales un individuo exhibe los resultados logrados.

La potencial identificación de predictores confiables del rendimiento laboral de una persona, tiene usos innegables en diversas fases de la gestión del recurso humano en una organización, más específicamente en una empresa, abarcando fases como: selección de personal, comprensión de conductas, reubicación en otro(s) cargo(s), evaluación del desempeño, inducción hacia ciertas conductas, y varias otras que quizás aún no imaginamos.

Comencemos nuestra búsqueda en las raíces mismas de la conducta de un individuo.

Senge [58] ilustra la concepción de una organización que aprende (comunidad de aprendizaje), en esta formulación, cada individuo realizará las actividades, agrupadas en un rol dentro de la empresa, que tiene mayor probabilidad de ejecutar con éxito y altos índices de rendimiento; existe un cierto grado de influencia en el rendimiento laboral de factores como: aquellas características innatas de un individuo para hacer alguna tarea, Katz & Kahm [37] las enuncia como habilidades o incluso talentos; Robbins [55] incorpora las

experticias aprendidas por el individuo, en la forma de competencias; mientras que Blacke & Mouton en Robbins [55], cruzan las competencias (lo que un individuo sabe) con la motivación (ganas de hacer o voluntad).

Basándose en lo anterior es posible citar:

$$\text{Rendimiento Laboral (RL)} = F(h, c, m); \quad \text{(F1)}$$

donde (h) denota las habilidades, (c) denota las competencias y (m) denota la motivación.

Las próximas indagaciones estarán orientadas a establecer eventuales patrones de conducta de los factores: habilidades, competencias y motivación; como también a establecer potenciales ponderaciones de tales factores o variables, en torno al rendimiento laboral.

Buckingham & Clifton [4], en la página #66 señala: “Talento es cualesquier patrón recurrente de pensamiento o comportamiento que se pueda aplicar productivamente”, mientras que en la página #87 señala: “las reacciones espontáneas e inmediatas ante todas las situaciones, revelan la mejor huella de los talentos”; por otra parte, en la página #97 cita: “el perfil de fortalezas (Strengths Finder) se detecta observando el comportamiento durante un período prolongado de tiempo”. Robbins [55] coincide en que la observación reiterada permite detectar e inferir que habilidades están presentes en forma recurrente en un individuo.

Buckingham & Clifton [4], han logrado identificar y aislar 34 talentos asociados a las fortalezas, estos talentos son:

1. Analítico; Desglosa los componentes del fenómeno en estudio, ve: estructuras, patrones y formatos.
2. Armónico; Trabaja por acuerdos comunes, evita las confrontaciones, no impone sus opiniones.

3. Auto-confiado; Confía en sus decisiones, es seguro de sí mismo.
4. Carismático; Gusta interacciones con gente nueva, siempre tiene tema, se interesa por los otros.
5. Competitivo; Está pendiente del desempeño de los demás, le gustan las mediciones.
6. Comunicador; Le gusta: explicar, describir, ser anfitrión; busca palabras que generen mayor impacto.
7. Conector; Supone que todo ocurre por alguna razón, cree que la conducta de unos afecta a otros, respeta la diversidad.
8. Contextual; Valora el origen de las cosas, mira el pasado para comprender el presente y predecir el futuro.
9. Creyente; Valora: la responsabilidad, el altruismo, la ética; gusta del trabajo importante y con significado, apegado a los valores.
10. Desarrollador; Ve potencial en los demás, estimula a los otros hacia nuevos desafíos.
11. Disciplinado; Necesita un mundo: predecible, ordenado y planeado; es preciso y meticuloso en todas sus acciones; le disgustan las sorpresas.
12. Empático; Siente las emociones de quienes lo rodean; ayuda a los otros a expresar sus sentimientos y emociones.
13. Emprendedor; Necesita lograr algo tangible; tiene un hálito de descontento.
14. Enfocado; Necesita metas explícitas; hace que los demás no se desvíen del camino.
15. Equilibrado; Amante de la equidad; las normas son claras y se aplican para todos por igual.
16. Estratégico; Actúa después de anticipar dificultades y escoger alternativas; ordena la confusión y descubre mejores caminos para seguir adelante.
17. Estudioso; Le interesa aprender sin importar el contenido; gusta de la travesía continua y deliberada de la ignorancia hacia el conocimiento.

18. Gusta de la excelencia; Valora a los expertos en algo específico y no en todo.
19. Flexible; Vive el momento; descubre su futuro en cada opción que se le presenta a diario; gusta de las sorpresas.
20. Futurista; Disfruta evocando visiones del futuro; declara: “no sería genial si .....”.
21. Ideador; Descubre dentro de lo complejo el concepto elegantemente simple que explica porqué las cosas ocurren; la idea es un vínculo o relación.
22. Inclusivo; Incluye a todos los demás sin discriminar para que se sientan parte.
23. Individualizador; Encuentra las cualidades únicas de cada persona; no le gusta generalizar; se maneja muy bien en la distribución de funciones.
24. Iniciador; Siempre está impaciente por actuar; primero experimenta a pesar de los riesgos.
25. Inquisitivo; Colecciona de todo ya que algún día servirá.
26. Intelectual; Disfruta del ejercicio intelectual; se pregunta e intenta responderse.
27. Mandatario; Le gusta imponer sus opiniones; al fijar una meta no descansa hasta comprometer a todos; usa el enfrentamiento para llegar al acuerdo; se hace cargo de las cosas.
28. Organizador; Gusta de mantener todos los factores de una situación compleja en el aire, alineándolos de varias formas hasta estar seguro de que los organizó en la forma más productiva posible; le gustan los rompecabezas.
29. Positivo; Elogia; siempre busca el lado bueno de una situación; ve el trabajo entretenido.
30. Prudente; Cuidadoso; siempre alerta; percibe los riesgos y los hace visibles para minimizarlos; es planificado.
31. Relacionado; Prefiere estar con los amigos cercanos; acepta los riesgos de una amistad genuina.

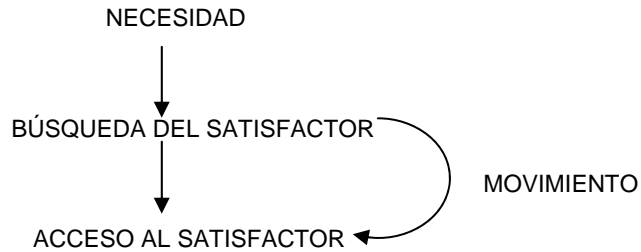
- 32. Responsable; Asume sus compromisos; no cesa en cumplir su palabra; si no puede cumplir idea compensaciones; asocia compromiso con reputación.
- 33. Restaurador; Anhela restaurar el orden perdido; le gusta resolver problemas.
- 34. Significativo; Desea ser conocido por su singularidad; necesita ser admirado por: creíble, profesional, exitoso; busca constantemente nuevas metas.

Robbins [55] muestra como la motivación, a través de su mecánica, está íntimamente ligada con las necesidades y por lo tanto proyecta el estímulo como el factor de apalancamiento de la acción; en otras palabras, la búsqueda del satisfactor hace que un individuo se mueva, con la cierta certeza de que al final del camino accederá al satisfactor.

En estas condiciones, al incorporar en (F1) este nuevo concepto, obtenemos:

$$RL = F(h, c, m, e); \quad \textbf{(F2)}$$

donde (e) denota el estímulo más adecuado para activar la motivación; sin embargo, como lo expresan Katz & Kahm [37] y lo ilustra Robbins [55], la motivación obedece a la toma de conciencia de un individuo respecto de una necesidad insatisfecha, lo que hace que se mueva (motive) a buscar el satisfactor, dependiendo de la magnitud de la necesidad, el individuo continuará en su búsqueda; como es lógico de imaginar, si sabe que el satisfactor nunca lo alcanzará, dejará de moverse, al igual que ocurrirá cuando logre el satisfactor; esto se puede expresar gráficamente como:



**Fig.#2: Modelo básico de la mecánica de la motivación.**

El proceso de motivación involucra, rigurosamente las siguientes fases:

**Necesidad → Tensión → Impulsos → Comportamiento → Necesidad → Reducción  
insatisfecha de búsqueda satisfecha de la tensión**

Luego, como lo señala Robbins [55], lo esencial es identificar la(s) necesidad(es) más sentida(s) por el individuo, ello permitirá establecer el satisfactor más potente, en estas condiciones el estímulo correspondiente es “la promesa de acceder a dicho satisfactor”, junto con alguna prueba irrefutable de la disposición y/o control de tal satisfactor.

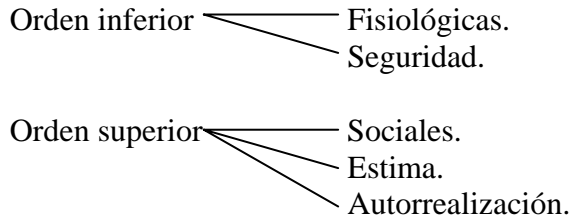
De acuerdo a lo señalado precedentemente, (F2) podría ser reemplazada por:

$$RL = F(h, c, n, e); \quad \text{(F3)}$$

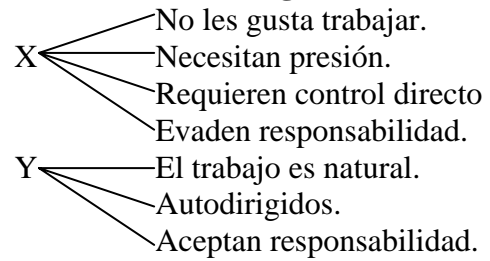
donde (n) denota la(s) necesidad(es) más sentida(s) por el individuo.

Robbins [55] hace un resumen de las teorías básicas de la motivación, llegando a la siguiente clasificación:

**1.- Pirámide de necesidades (Maslow):**



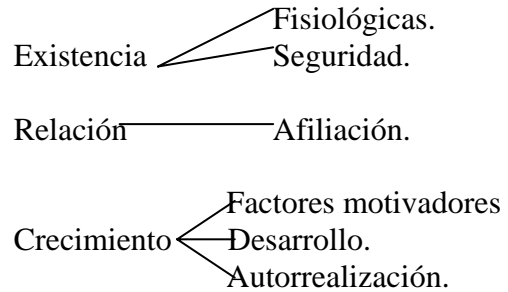
**2.- Teoría X/Y (McGregor):**



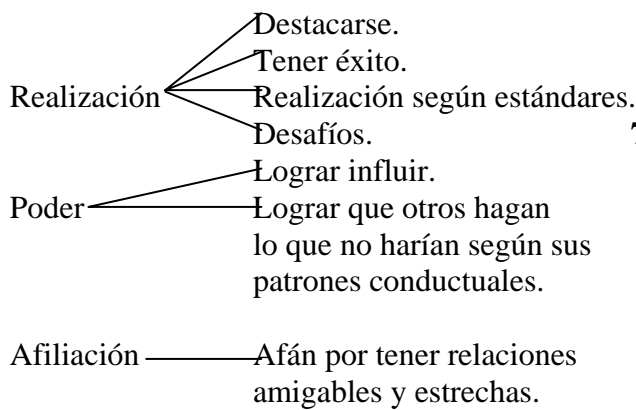
**3.- Motivación-higiene (Herzberg):**



**4.- Teoría ERG:**



**5.- Teoría de McClelland:**



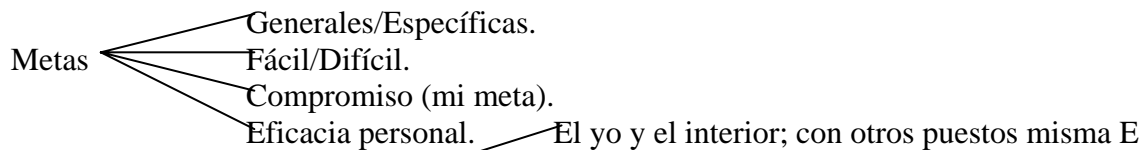
**6.- Teoría de evaluación cognoscitiva:**

“Al usar recompensas extrínsecas, disminuyen las recompensas intrínsecas”.

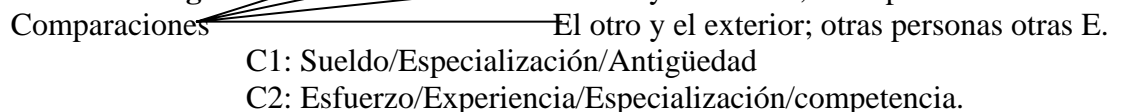
**7.- Teoría de las características de las actividades:**

- Variedad de habilidades.
- Identidad de la actividad; se requiere finalizar trabajo total.
- Significado de la actividad; impacto en otros.
- Autonomía.
- Retroalimentación.

**8.- Teoría de las metas:**



**9.- Teoría de la igualdad:**



Robbins [55] ilustra diversas teorías de la motivación, identificando los distintos tipos de necesidades; Maslow, McGregor, Herzberg, Alderfer, McClelland, Turner & Lawrence, Hackman & Oldham, Locke y muchos otros han aportado para intentar establecer los tipos de necesidades de un individuo que están detrás de su motivación; existe un factor común en las diversas teorías, un individuo presenta una combinación de necesidades que sustentan su motivación, estas necesidades toman la forma general de:

- Existencia; Necesidad asociada a los aspectos básicos, casi fisiológicos.
- Afiliación; Necesidad de pertenencia, sentirse miembro o parte de un todo.
- Poder; Necesidad de influir en otros.
- Características de las metas; Necesidad de clarificación de las metas a alcanzar.
- Realización; Necesidad de trascender más allá de lo cotidiano, de ser recordado, de dejar huellas.

En un intento por cuantificar la motivación, desde la perspectiva del trabajo mismo, surge un índice de previsión de la motivación, el cual es más conocido como: “Calificación Del Potencial De Motivación” (MPS), este índice se calcula según la siguiente expresión:

$$MPS = \left[ \frac{\text{Variedad de habilidades} + \text{Identidad de la actividad} + \text{Significación de la actividad}}{3} \right] \times \text{Autonomía} \times \text{Retroalimentación}$$

donde:

- Variedad de habilidades; corresponde a cantidad de habilidades requeridas para realizar la tarea.



- Identidad de la actividad; corresponde a la medida en que el trabajo requiere ser terminado totalmente.
- Significado de la actividad; corresponde a la medida en que el trabajo impactará a otras personas o trabajos.
- Autonomía; corresponde al nivel de ayuda externa que un trabajador requiere para hacer el cometido en forma satisfactoria.
- Retroalimentación; corresponde a la información que permita que el trabajador sea capaz de reconocer el valor de los resultados de su trabajo.

Al retomar la idea de que el estímulo lleva asociada la promesa de acceder al satisfactor altamente requerido, en virtud de las necesidades más sentidas de un individuo, surge la idea de separar el predictor de la palanca o factor de apalancamiento que active la conducta de una persona; de hecho podríamos señalar que el estímulo, como constructo, es en sí un exordio compuesto básicamente de:

- Llamado; que corresponde a la individualización de la persona que se desea inducir.
- Narración; que corresponde a la identificación de hechos y antecedentes que explicitan las: competencias, habilidades y necesidades del individuo destinatario del mensaje o exordio.
- Inducción a la acción; que corresponde a la promesa de que: si realiza tal o cual tarea, con ciertos resultados y de cierta forma, el individuo aludido tendrá acceso al satisfactor que colma su(s) necesidad(es) más sentida(s).

Este análisis nos lleva a expresar (F3), en términos de los eventuales predictores de mayor potencia, hasta ahora identificados, como:

$$RL = F(h, c, n);$$

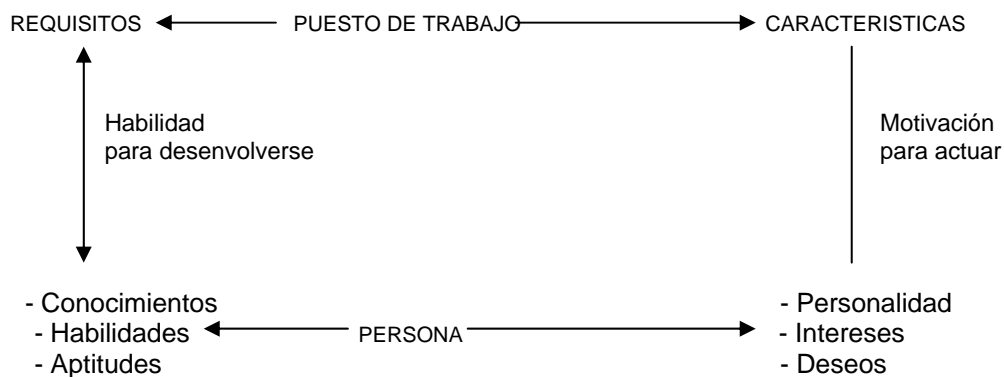
**(F4)**

Esta expresión sugiere que, conocidas: las habilidades, las competencias y las necesidades, sería posible: explicar, generalizar y predecir, el comportamiento laboral de un individuo; de igual forma se plantean preguntas como:

- ¿Las habilidades identificadas son limitadas o ilimitadas?.
- ¿Las competencias individualizadas corresponden a un set finito de valores?.
- ¿Las necesidades más concretamente identificadas y clasificadas se ampliarán?.

Las respuestas a estas preguntas son claves a la hora de intentar modelar y gobernar la conducta de estos factores.

Gómez-Mejía, Balkin & Cardy [29], ilustran un “modelo de cualificación para el puesto de trabajo”, el cual tiene la siguiente representación gráfica:



**Fig.#3: Calificación para el puesto de trabajo.**

Mertens Leonard [43] destaca los resultados de una encuesta aplicada a 127 empresas del Reino Unido, denominada “Competency, 1995”, en la cual se enuncian como competencias relevantes en el ámbito laboral, las siguientes:

- Orientación a resultados.
- Focalizarse hacia el cliente.
- Capacidad de convencer.
- Capacidad de comunicarse.
- Conciencia de negocio.
- Actitud flexible.
- Desarrollo personal.
- Trabajo en equipo.
- Liderazgo.
- Capacidad conceptual.
- Capacidad analítica.
- Visión estratégica.
- Conocimiento tecnológico.
- Preocupación por la calidad.
- Capacidad de interacción interpersonal.
- Auto-confianza.

Siguiendo con la línea de las competencias, Cariola M. Leonor & Quiroz Ana María [7] citan por competencias relevantes, en el ámbito laboral, las siguientes:

- Genéricas; las que aseguran la transferibilidad de destrezas ocupacionales, por ejemplo: analizar, interpretar, organizar, negociar.
- Básicas; comportamientos elementales que deberá mostrar un trabajador, por ejemplo: lectura, redacción, aritmética.
- De empleabilidad; las necesidades para obtener un trabajo de calidad, podrían ser equivalentes a las competencias básicas.
- Interpersonales o Sociales; las que permiten mantener relaciones humanas y laborales con fluidez, trabajar en equipo, comunicarse en general.
- Técnicas o Específicas; comportamientos técnicos vinculados a cierto lenguaje o función productiva.

- Sistemáticas; aquellas que permiten aproximarse a la realidad como hechos relacionados.
- Tecnológicas; las que facultan el conocimiento y uso de tecnologías usuales.

Otro aporte en dirección a identificar la parametrización de las competencias, lo constituye la propuesta ilustrada en OIT Intecap [10], en el se clasifican las competencias relevantes para el ámbito laboral, en 3 grupos:

- Básicas; de índole formativo; por ejemplo: leer, interpretar textos, aplicar sistemas numéricos, saber expresarse, saber escuchar.
- Genéricas; asociadas al desarrollo de diversas áreas laborales; por ejemplo: analizar y evaluar información, trabajar en equipo, contribuir a la seguridad e higiene, planear acciones.
- Específicas; asociadas a conocimientos técnicos; por ejemplo: soldar oxi-acetileno, preparar molino para laminado en caliente, evaluar desempeño de un candidato.

Esta propuesta está basada en experiencias de: México, Colombia, Brasil, Venezuela, Italia, Inglaterra.

Una propuesta bastante clarificadora la difunden Novick Marta, Miravalles Martina, González Cecilia Senén [50], en ella, las competencias relevantes para el ámbito laboral se clasifican en 5 categorías:

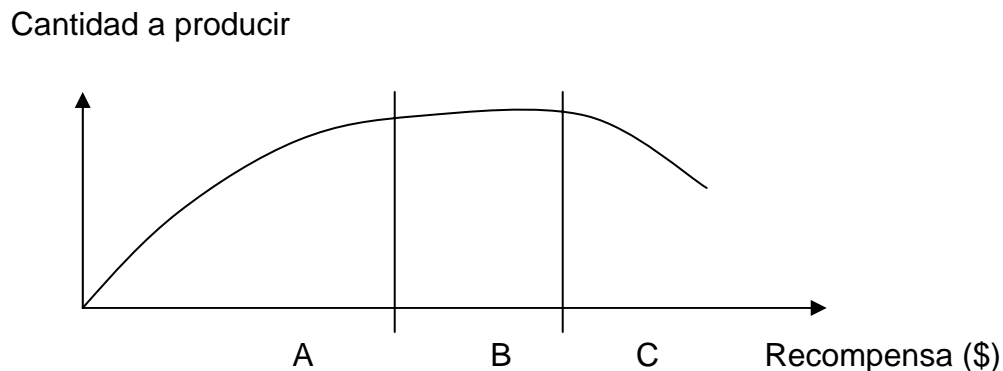
- Básicas; lectura, comprensión de textos, relaciones matemáticas.
- Técnicas; manejo de tecnologías específicas.
- De Comportamiento; obediencia, compromiso, trabajar en equipo, adaptabilidad, escuchar, observar, comunicarse oralmente.
- Intelectuales; análisis, síntesis, conclusión, pronósticos, concentración.
- Orden y Seguridad; motricidad, seguir prescripciones para hacer una rutina de trabajo.

Tradicionalmente muchas publicaciones y trabajos de investigación, como lo ilustra Chiavenato [12], en el ámbito de la conducta humana, vinculan al rendimiento laboral con:

- Estímulo y/o recompensa.
- Formación profesional o nivel de capacitación.
- Descripción del cargo o tareas ha ejecutar.

Sin embargo, diversos estudios en distintos tipos de organizaciones y más específicamente, en empresas, dejan de manifiesto que en la medida en que se requiere de mayor esfuerzo, por parte de un trabajador, se debe recurrir a distintos estímulos (acceso a recursos deseados o inhibición de sanciones), cuya cuantía va en aumento.

El estímulo más utilizado tiene la forma de recompensa monetaria, pero su capacidad de inducir a mejores resultados tiene algún punto de agotamiento, como lo ilustra la siguiente gráfica:



**Fig.#4: Eficacia del dinero como estímulo.**

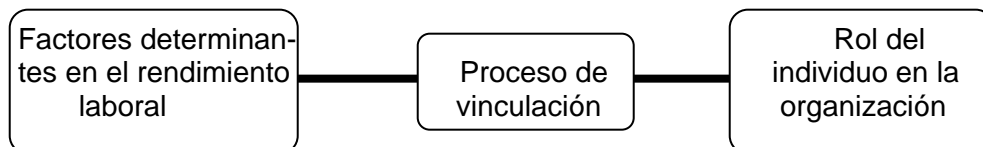
Este hecho ha sido reconocido tanto por empresarios como por varios autores (Gómez-Mejía [29], Robbins [55], Davis & Newstrom [13], Schein [57], Chiavenato [12]).

La zona “A” muestra el incremento en la productividad asociado a los incrementos en las recompensas, la zona “B” exhibe incrementos marginales positivos pequeños de productividad ante las variaciones positivas de recompensas, la zona “C” muestra los incrementos marginales negativos de productividad a pesar de continuar aumentando las recompensas. Este hecho está refrendado por la propuesta de Maslow en relación a su clasificación de “necesidades de orden inferior” y “necesidades de orden superior”.

Autores como: Gómez-Mejía [29], Robbins [55], Senge [58] y Davis & Newstrom [13]; se encaminan a vincular el rendimiento laboral de un individuo con otro tipo de factores, enfatizando en:

- La motivación que obedece a las necesidades.
- Los talentos innatos de un individuo, en la forma de habilidades.
- Estímulos activadores de la motivación.
- Nivel instruccional aprobado de un individuo, en la forma de competencias.
- Condiciones laborales, tanto de infraestructura como de equipamiento.
- Condiciones contractuales, agrupadas en un marco legal regulatorio.
- Políticas empresariales de recursos humanos, como es el caso de: promoción, salarios, duración de jornadas de trabajo.

En esta búsqueda por comprender el fenómeno del rendimiento laboral de un individuo, aparecen 3 entidades genéricas básicas:



**Fig.#5: Vinculación entre perfil del individuo y rol específico.**

En el proceso de vinculación surgen roles genéricos o perfiles laborales genéricos, como es el caso de:

- Ser director de un grupo de trabajo.
- Ser dirigido, como miembro de un grupo de trabajo.

De la misma forma, el rol del individuo en la empresa toma diversas tipologías, donde los casos más emblemáticos son:

- Gerente general.
- Gerente de finanzas.
- Gerente de producción.
- Gerente de marketing.
- Director de área.
- Director de departamento.
- Jefe de proyecto.
- Ingeniero de proyecto.
- Calculista.
- Responsable de abastecimiento.
- Secretaria.
- Auxiliar (Júnior).
- Guardia.

Existen diversas tipificaciones de roles o funciones que son requeridas en una empresa concreta, para los efectos de esta investigación se utilizará la propuesta difundida por “Economic Research Institute” [24], disponible en Internet, que contempla 322 roles o cargos; pero para los efectos de análisis, se contemplarán los 13 roles más emblemáticos ilustrados precedentemente.

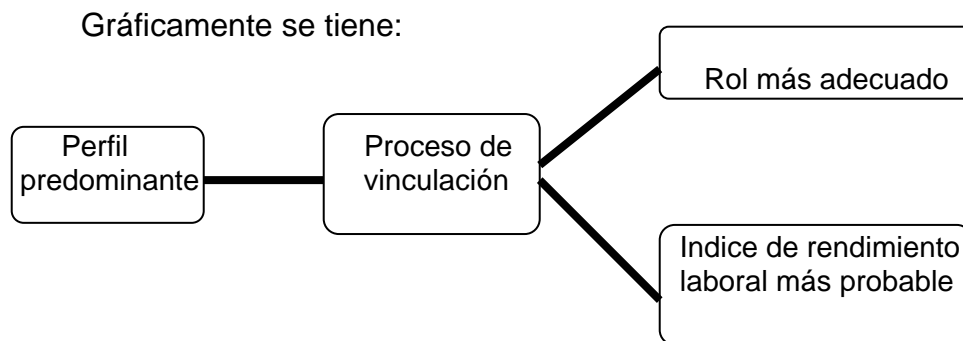
Como se mencionó anteriormente, muchos son los factores que inciden en el rendimiento laboral exhibido por un individuo en un cierto puesto de trabajo; sin

embargo, como una forma de abordar más concretamente el tema, esta investigación centra su atención en los siguientes factores:

- Competencia; referida a la experticia aprendida por el individuo (lo que sabe).
- Habilidad; característica innata de un individuo para hacer alguna tarea, también denominado talento.
- Necesidad; factor que gatilla la motivación (ganas) para hacer, a través de la búsqueda de satisfactores.

Los 3 factores seleccionados para este estudio, conforman el “perfil predominante de un individuo”; por otra parte, los diversos roles o funciones ha ejercer por un trabajador en una empresa, tendrán la naturaleza de ser del tipo director (persona que debe dirigir a un grupo de trabajo) y dirigido (miembro de un grupo de trabajo), esta clasificación la denominaremos “rol genérico”.

La vinculación del perfil predominante con el rol genérico, constituye una primera aproximación en la búsqueda de un rendimiento laboral óptimo, este último puede verse reflejado a través de: un índice numérico de rendimiento y/o el rol o función o cargo para el cual se es más apto.



**Fig.#6: Modelo conceptual de gestión de rrhh.**

**(M0)**



El modelo (M0) admite, funcionalmente, dos lecturas:

- Caracterizado el perfil predominante de un individuo, es posible identificar el rol en la empresa, para el cual es más apto; también se puede establecer el rendimiento laboral más probable de tal individuo.
- Establecidos el rol organizacional por cubrir y el rendimiento laboral esperado, es posible identificar el perfil predominante del mejor candidato.

Recordemos que de los aportes de Blacke & Mounton, sumados a lo explicitado por Robbins [55], el modelo base de rendimiento laboral que emplearemos tiene la forma de:

$$RL = F(h, c, n)$$

### **1.3. Naturaleza y Dominio de las Variables en Estudio:**

Los factores o variables grupales: competencia, habilidad y necesidad, no adoptan valores binarios, en estricto rigor su dominio es más amplio que el de 2 valores posibles; veamos la conducta de cada una de estas variables:

**Competencia:** Los aportes de: Mertens Leonard [43], Cariola & Quiroz [7], OIT Intercap [10], Novick, Miravalles & González [50]; dejan de manifiesto que la competencia es una variable que agrupa varios conceptos, reafirmando su carácter grupal.

Cualesquiera que sea el modelo de parametrización de la competencia, el grupo de conceptos asociados da a entender que cada uno de dichos conceptos o valores puede a su vez adoptar diversos valores elementales.

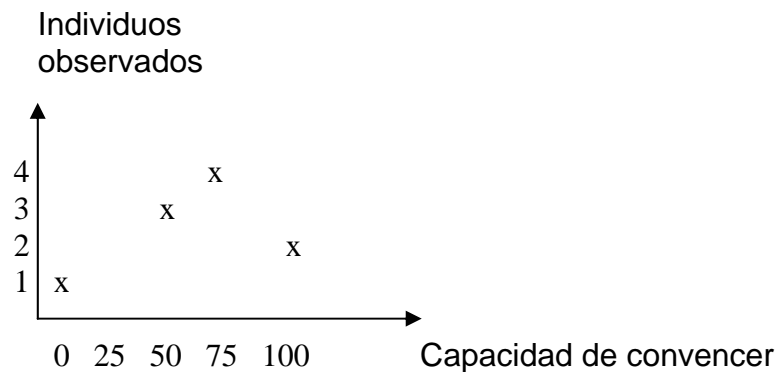
Por ejemplo: Veamos posibles valores elementales en cada propuesta.

Según Mertens [43], la competencia admite varios conceptos, de los cuales analizaremos la “capacidad de convencer”. El dominio más inmediato hace pensar en 2 valores:

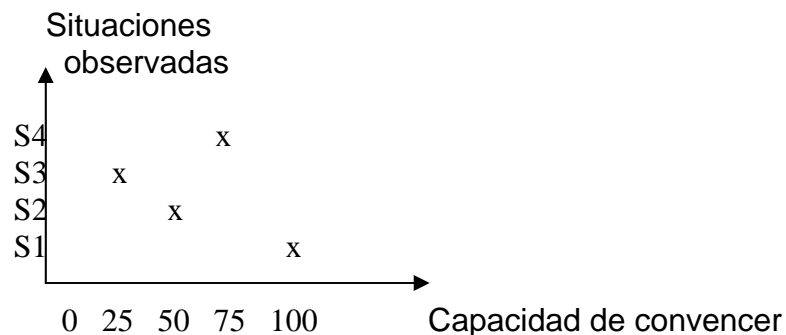
0 → Sin capacidad de convencer.

1 → Con capacidad de convencer.

Cuando se observan individuos en acción, vemos que todos exhiben algún grado de capacidad de convencer, ya sea: mucho, poco, bajo, ínfimo; pero también observamos que un mismo individuo, en diversas situaciones, varía su capacidad de convencer, ello hace razonable considerar que la capacidad de convencer puede tomar muchos valores.

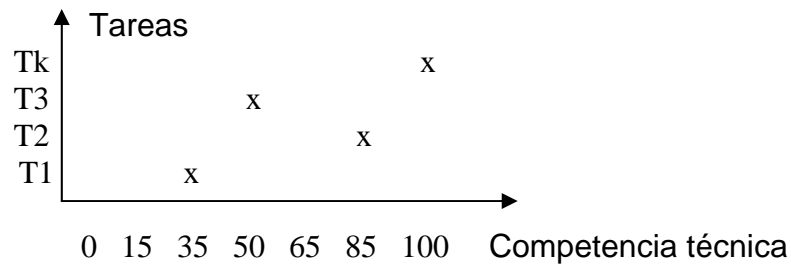


**Fig.#7: Niveles de capacidad de convencer para varios individuos.**



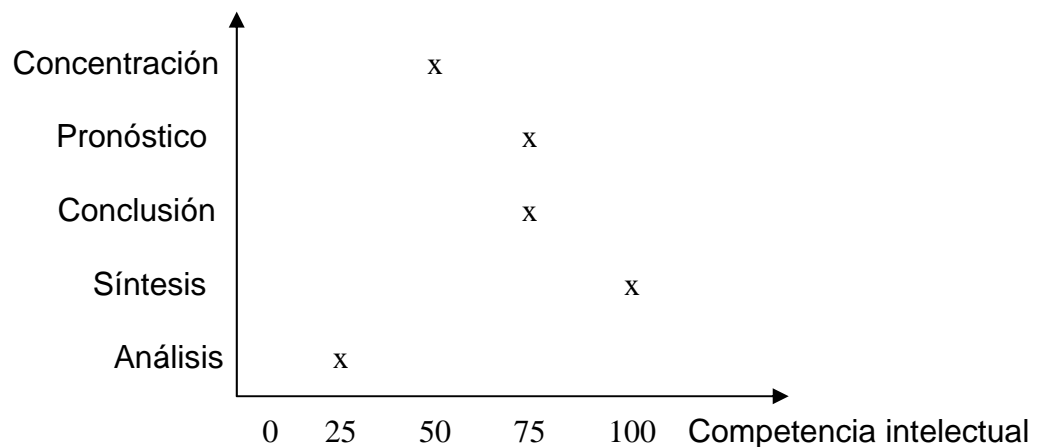
**Fig.#8: Niveles de capacidad de convencer de un individuo en distintas situaciones.**

Según Cariola & Quiroz [7], la competencia admite conceptos como “técnicas”, cuyo dominio contempla, en la práctica, valores como: todas, la mayoría, algunas, pocas, otros; incluso cuando se asocia la competencia técnica de un individuo para diversas tareas, los valores pueden tomar distintas magnitudes.



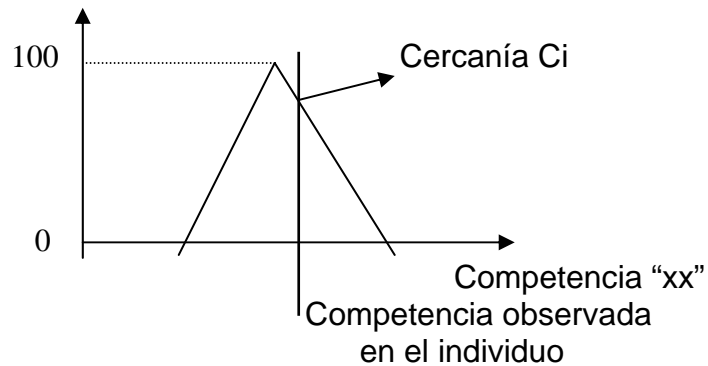
**Fig.#9: Niveles de competencia técnica presentes en diversas tareas.**

Según Novick, Miravalles & González [50], la competencia admite conceptos tales como “intelectuales”, este tipo de competencia contempla capacidades de: análisis, síntesis, conclusión, pronóstico, concentración; lo que para un individuo en estudio puede evidenciar:



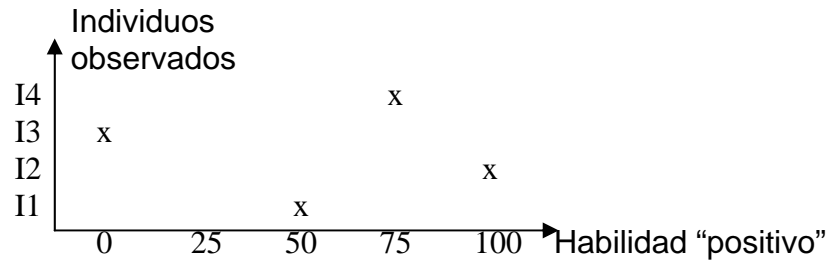
**Fig.#10: Niveles de competencias técnicas específicas para un individuo.**

Como vemos, la variable competencia para cada uno de sus atributos, requiere ser medida de forma tal que se pueda reflejar el grado de cercanía que tiene con respecto a su total cumplimiento, lo cual podría ser valorado en términos del porcentaje (0 – 100) o índice (0,0 – 1,0) de dicha cercanía, esto se grafica de la siguiente forma:



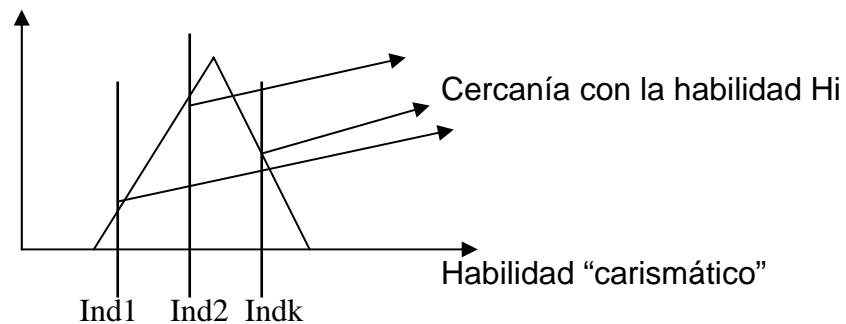
***Fig.#11: Grado de pertenencia (cercanía) del valor de la competencia observada.***

**Habilidad:** Al examinar detenidamente propuestas como la de Buckingham & Clifton [4], nos encontramos con un conjunto de conceptos, como por ejemplo: carismático, desarrollador, flexible y otros; esto deja de manifiesto que la variable habilidad es de tipo grupal (contiene otras variables más elementales), luego al adentrarse en cada concepto, detectamos que estos pueden adoptar diversos valores, más allá de establecer si para dicho concepto un individuo en estudio exhibe o no tal habilidad; por ejemplo, para el concepto asociado “positivo”, distintas personas pueden evidenciar diversos niveles de positivo, no solamente medir si tienen o no tal atributo.



**Fig.#12: Niveles de la habilidad "ser positivo" presentes en distintos individuos.**

Luego, la variable habilidad para cada uno de sus conceptos, cualesquiera que sea su tipificación, requiere ser medida de manera que se pueda reflejar el grado de cercanía que tiene el comportamiento observado en el individuo, con la habilidad que se está midiendo; a continuación se grafica lo ocurrido para varios individuos en función de una misma habilidad:



**Fig.#13: Grados de cercanía de la habilidad "carismático" presentes en varios individuos.**

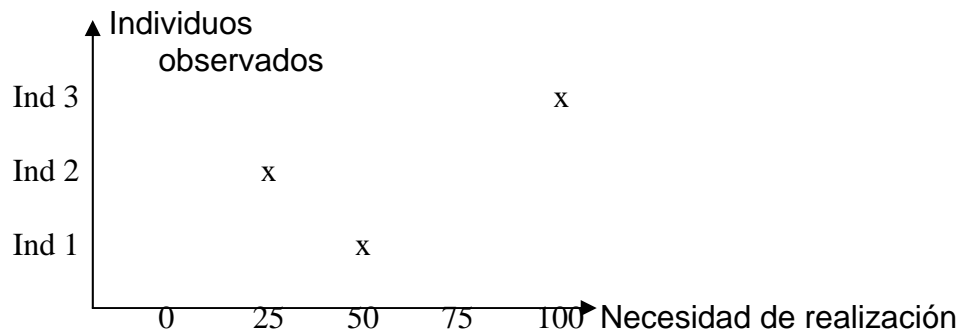
**NOTA:** A pesar de que no abundan las propuestas orientadas a tipificar las habilidades, el aporte de Buckingham & Clifton [4] resulta bastante completo y clarificador.

**Necesidad:** Tal como lo señalan Katz & Kahm [37] y Robbins [55], lo que hace que un individuo haga algo está referido a la motivación, en este hacer el individuo busca el satisfactor de la necesidad que se ha hecho conciente en él; la recopilación ilustrada por Robbins [55] muestra diversas tipificaciones de necesidades, pero muchas de ellas tienen ciertas similitudes, luego resulta

conveniente seleccionar las necesidades que representen en forma más universal las causales de motivación.

Al examinar detenidamente las diversas teorías, queda claro que el factor necesidad contempla distintos tipos o fuentes de la misma, dándole un carácter de variable macro o grupal; si analizamos la conducta de una de estas fuentes de necesidad, encontramos que el registrar la presencia o ausencia de tal fuente, sólo representa una simplificación, pero en verdad, no corresponde a lo que un individuo concreto exhibe en un instante dado.

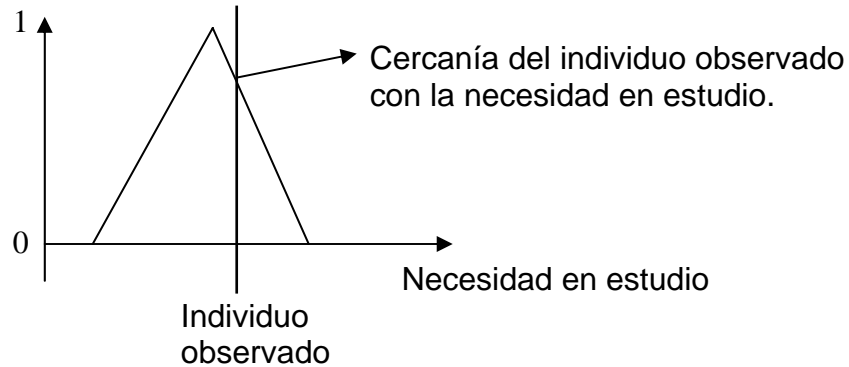
Por ejemplo: La necesidad de realización, referida a querer trascender más allá de lo cotidiano, está presente en un individuo en mayor o menor medida; incluso, 2 o mas individuos que evidencian tal necesidad, no necesariamente presentan igual magnitud, luego la medición de tal atributo requiere admitir diversos valores posibles.



**Fig.#14: Niveles de realización presentes en varios individuos.**

El gráfico muestra el grado de cercanía que cada individuo exhibe de la necesidad examinada.

En general, un individuo presenta un grado de cercanía con la necesidad estudiada, tal como lo refleja el siguiente gráfico:



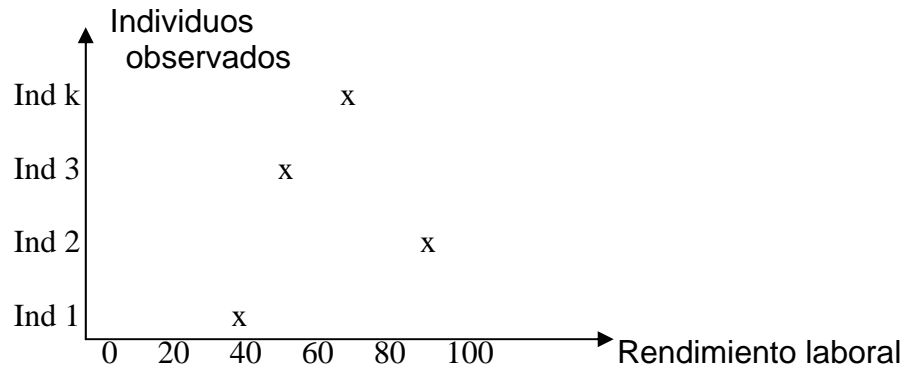
**Fig.#15: Grado de pertenencia (cercanía) del valor de la necesidad observada.**

Katz & Kahm [37], Gómez-Mejía [29], Robbins [55], Davis & Newstrom [13] y Schein [57]; coinciden en señalar que la conducta humana, en cualesquier escenario, es: difícil de predecir, no está regida por absolutos, las características individuales pueden o no estar presentes en distintos grados, un atributo presente en 2 o más individuos no tiene igual intensidad.

**Rendimiento Laboral:** Robbins [55], Senge [58], Davis & Newstrom [13] y Prada [53]; convergen hacia la idea de que el rendimiento en el trabajo es un factor que puede manifestar distintos valores en función de diversas variables, cada organización establece el porcentaje que considera aceptable para el logro de sus objetivos; también señalan que un mismo individuo tendrá distintos porcentajes de rendimiento en su trabajo, en la medida en que: esté capacitado, sienta motivación y disponga de los talentos necesarios, para concretar las tareas encomendadas.

Estos planteamientos nos llevan a señalar que el rendimiento laboral es una variable que ha de manifestar diversos valores, donde el porcentaje o quizás el índice, sea la forma más representativa que deba usarse.

Gráficamente se tiene:



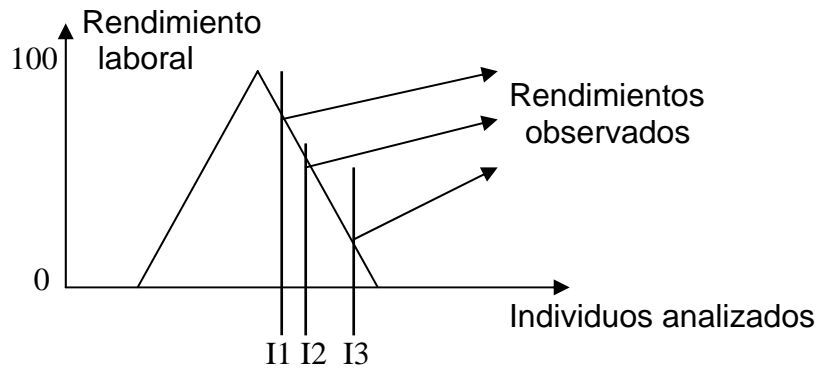
**Fig.#16: Niveles de rendimiento laboral observados en diversos individuos.**

Pero cada organización establece el porcentaje de rendimiento laboral mínimo aceptable, el cual puede asociarse a:

- Cantidad de unidades producidas en un cierto tiempo.
- Cantidad de recursos consumidos para lograr los cometidos.

Genéricamente, podemos acoger el concepto universal de eficiencia, vinculado a lograr la mayor cantidad con los mínimos recursos, incluido el tiempo.

Luego tenemos:



**Fig.#17: Grado de pertenencia (cercanía) del valor del rendimiento laboral estudiado para varios individuos.**



En otro orden de ideas, el rol más adecuado se vincula con: estar capacitado, tener motivación y disponer de los talentos necesarios, todo ello con respecto a las diversas tareas y actividades contempladas dentro del rol aludido; en términos más concretos, por ejemplo: el rol de gerente de marketing resultará adecuado para un individuo que exhiba altos grados de:

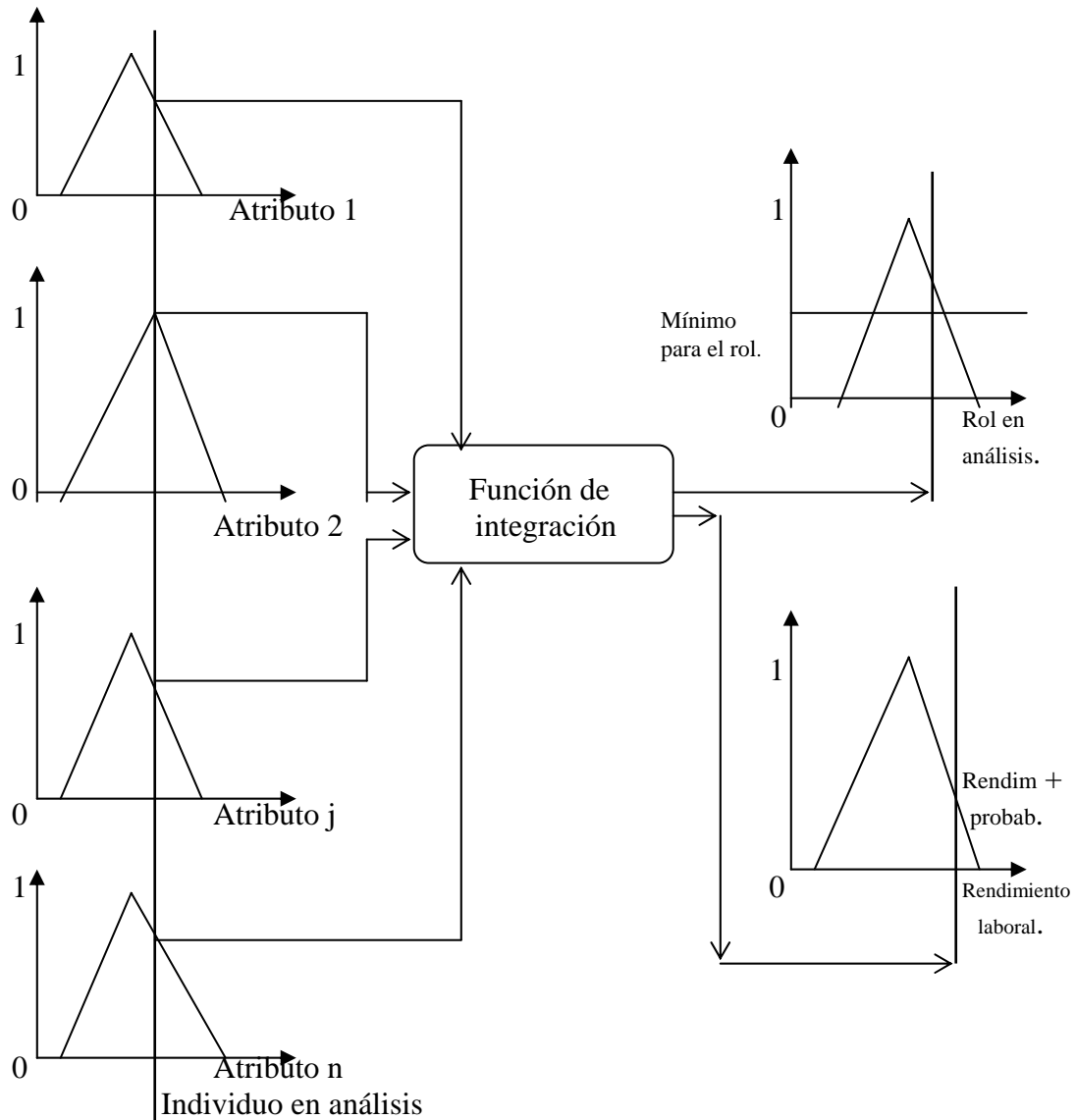
- Las competencias de: comportamiento, intelectuales, técnicas.
- Las habilidades de: analítico, auto-confiado, carismático, competitivo, comunicador, creyente, desarrollador, emprendedor, estratégico, flexible, futurista, ideador, inclusivo, individualizador, iniciador, intelectual, mandatario, organizador, positivo, prudente, responsable, restaurador, significativo.
- La motivación dada por las necesidades de: afiliación, poder, realización, perfil y, meta general, meta implícita, meta lejana.

Pero además se requerirán muy altos grados de:

- Las competencias de: comportamiento, intelectuales.
- Las habilidades de: auto-confiado, carismático, comunicador, emprendedor, estratégico, futurista, iniciador, positivo, prudente, responsable.
- Las necesidades de: poder, realización, perfil y, meta lejana.

**NOTA:** Aún cuando no se han difundido asociaciones directas de: competencias, habilidades y necesidades, con roles concretos en forma universal, los trabajos en esta materia resultan orientadores, aunque no tienen el carácter paramétrico que permita inferir más directamente estas vinculaciones.

Dado que los grados de cercanía que cada individuo presenta en cada uno de los atributos ligados a las variables en estudio son distintos, la identificación del rol más adecuado seguirá el proceso de integración de los atributos requeridos, cuyos grados de cercanía sean a lo menos iguales a los índices definidos como cotas mínimas; gráficamente se tiene:



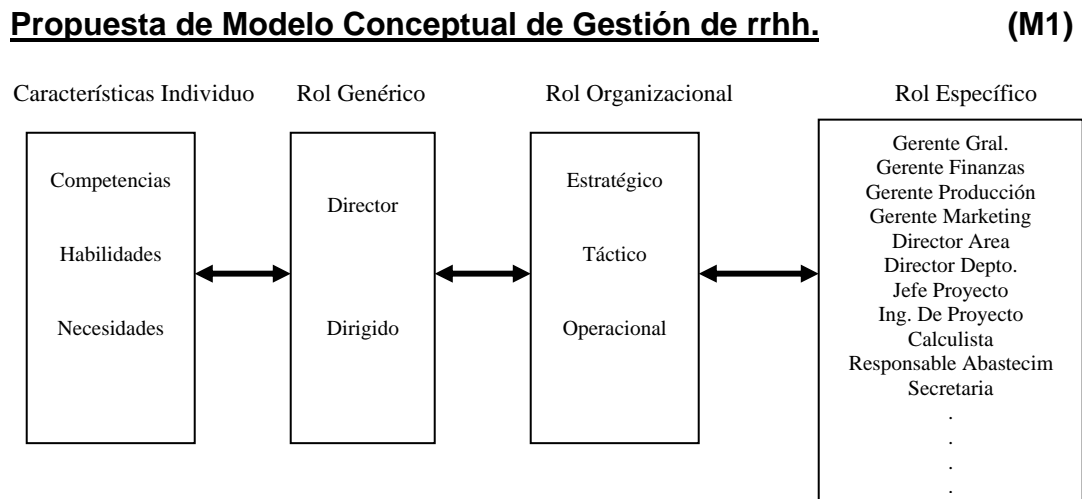
**Fig.#18: Vinculación entre atributos presentes y rendimiento laboral esperable.**

**NOTA:** La función de integración, como lo indica su nombre, deberá integrar todos los grados de cercanía para todos los atributos medidos, de forma tal que genere un grado de cercanía representativo del individuo, con respecto al rol más adecuado y al rendimiento laboral más probable.

A nivel intuitivo, se podría pensar en una función de integración tipo: sumatoria, unión, promedio, integral o alguna otra relación matemática.

Hasta este momento, basándose en las deducciones que plantean diversos autores e investigadores de la temática del recurso humano, es posible identificar algunas características propias de una persona que habrá de ejecutar funciones de director con cierta soltura y pertinencia, como también se pueden identificar algunas características propias de quienes funcionarán mejor y más fluidamente como dirigidos.

Cuando se contrastan las características de las personas con los requerimientos propios de un rol, en una organización, surgen 4 factores vinculados: características predominantes de un individuo, rol genérico, rol organizacional y rol específico en la organización; lo que se podría ilustrar como:



**Fig.#19: Modelo Conceptual de Gestión de Rrhh.**

Una vez seleccionados los modelos o propuestas que dan cuenta de los potenciales valores más representativos para cada una de las variables involucradas, se deduce una primera vinculación entre perfiles y roles genéricos, lo cual queda representado en el modelo M2.

Recordemos que los roles genéricos están referidos al potencial básico de un individuo en una organización, por lo tanto establecen su condición general dentro de tal organización.

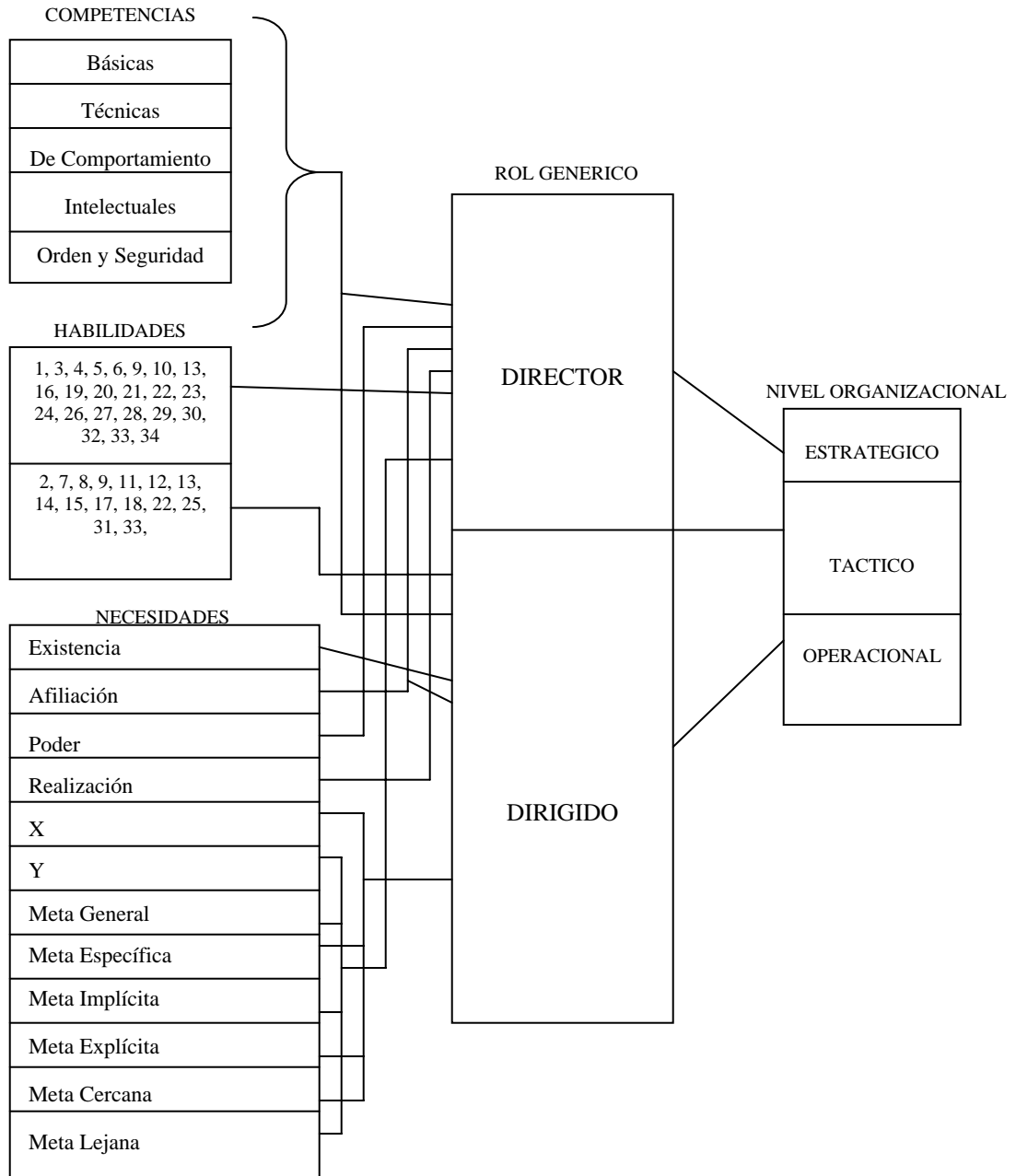
Los modelos clásicos de roles o funciones dentro de cualesquier organización, y más específicamente en cualesquier empresa, están representados por una pirámide en estrecha relación con el grado de autonomía que cada función permite, basándose en una concepción estructural jerárquica.



***Fig.#20: Modelo piramidal de jerarquía organizacional.***

El modelo M2 grafica la vinculación entre el perfil predominante de un individuo, su rol genérico más adecuado y la relación con los niveles decisionales de la organización, en este nivel del modelo postulado se puede percibir la capacidad de constituir una herramienta de apoyo a la gestión del recurso humano, alcanzando la categoría de sistema.

**Propuesta de Modelo Conceptual del Sistema de Gestión de RRHH (M2)**



**Fig.#21: Propuesta de Modelo Conceptual del Sistema de Gestión de RRHH.**

Al profundizar aún más el análisis, corresponde establecer las relaciones conceptuales que ligan finalmente, el perfil predominante de un individuo con el rol o eventual grupo de roles específicos que le es(son) más adecuado(s); para concretar el proceso de vinculación entre individuos y roles, nos acogeremos a diversos trabajos que sugieren relaciones más habituales, donde se han podido detectar los rendimientos laborales más aceptable.

**Modelo Teórico de Roles y Perfiles (MTRP)**

<b>Rol específico</b>	<b>Perfil predominante</b>
Gerente General	Competencias: comportamiento, intelectual. Habilidades: 3,5,8,16,20,26,27,28,34 Necesidades: P, R, Y, MG, MI, ML
Gerente de Finanzas	Competencias: comportamiento, intelectual. Habilidades: 3,5,8,16,19,20,24,26,28,29,32,34 Necesidades: P, R, Y, MG, MI, ML
Gerente de Producción	Competencias: comportamiento, intelectual. Habilidades: 3,5,6,7,10,16,20,24,26,28,29,32, 34 Necesidades: P, R, Y, MG, MI, ML
Gerente de Marketing	Competencias: comportamiento, intelectual. Habilidades: 3,4,6,13,16,20,24,29,30,32 Necesidades: P, R, Y, MG, MI, ML

Director de Area	Competencias: comportamiento, intelectual. Habilidades: 1,3,4,6,7,10,12,16,19,21,22,23,24, 26,27,28,29,30,32,34 Necesidades: A, P, R, Y, MG, MI, MC, ML
Director de Departamento	Competencias: comportamiento, intelectual. Habilidades: 1,3,4,6,7,10,12,16,19,22,23,24,26, 27,28,29,30,32 Necesidades: A, P, R, Y, MG, MI, MC, ML
Jefe de Proyecto	Competencias: comportamiento, intelectual. Habilidades: 1,3,4,6,7,10,13,14,17,21,23,27,29, 30,33,34 Necesidades: A,P,R,X,Y,MG,ME,MI,MEX, MC,ML
Ingeniero de Proyecto	Competencias: comportamiento, intelectual, Técnica. Habilidades: 1,4,6,11,13,14,17,18,21,23,25,27, 29,32,33,34 Necesidades: A,R,X,Y,MG,ME,MEX,MC,ML
Calculista	Competencias: intelectual, técnica. Habilidades: 1,8,9,11,13,14,15,17,18,25,32,33 Necesidades: E, A, X, ME, MEX, MC
Responsable de Abastecimiento	Competencias: intelectual, técnica. Habilidades: 1,2,9,11,14,15,18,25,32,33 Necesidades: E, A, X, ME, MEX, MC

Secretaria	Competencias: orden y seguridad, técnica, básica Habilidades: 2,9,11,25,32,33 Necesidades: E, A, X, ME, MEX, MC
Auxiliar	Competencias: orden y seguridad, técnica, básica Habilidades: 9,32,33 Necesidades: E, A, X, ME, MEX, MC
Guardia	Competencias: orden y seguridad, técnica, básica Habilidades: 9,32,33 Necesidades: E, A, X, ME, MEX, MC

**NOTA:** Cada rol específico puede ser vinculado con cierta combinación de competencias, habilidades y necesidades, de acuerdo a las observaciones experimentales disponibles; sin embargo, no se conoce el porcentaje de importancia relativa de cada uno de los atributos asociados a tales roles, ni tampoco se cuenta con señales concretas para establecer la cercanía o pertenencia mínima aceptable de dichos atributos, para esperar un rendimiento satisfactorio. Ello abre un camino de investigación con fronteras desconocidas pero de gran aplicabilidad en el ámbito de la cognición humana y sus aplicaciones.

Para disponer de criterios más confiables a la hora de vincular un rol específico con un perfil predominante, resulta razonable estudiar en profundidad cada rol por separado, partiendo por una muestra representativa de trabajadores que ejecutan el mismo rol, en diversas empresas, y que exhiben rendimientos laborales altos, a decir de sus empleadores; esta muestra permitirá establecer los atributos comunes a todos los individuos en estudio, luego será necesario medir la



magnitud de cada atributo para establecer el grado de pertenencia más representativo.

A través de sucesivas simulaciones numéricas se puede inferir el porcentaje de importancia relativa de cada atributo que da cuenta del rendimiento laboral considerado alto.

#### **1.4. Conclusión:**

La hipótesis sostiene que “existe una relación entre: las competencias, las habilidades y las necesidades de un individuo, que determinan cual será su rendimiento laboral más probable”, adoptando la forma genérica de:

$$RL = F( H, C, N )$$

De acuerdo a los estudios disponibles en el ámbito de la conducta humana, no es suficientemente útil indicar que un individuo exhibe: habilidades y/o competencias y/o necesidades; cada uno de estos factores involucran diversos conceptos, los que tienen la naturaleza de variables elementales, luego estos 3 factores adoptan la forma de variables grupales.

Tanto la habilidad como la competencia y la necesidad, como variables grupales, incluyen variables elementales o individuales, estas últimas pueden adoptar diversos valores en función de la cercanía o lejanía que un individuo exhiba de cada una de dichas variables; luego se requiere una forma de medición que refleje estos grados de cercanía entre el individuo y el atributo en estudio.

Para medir el grado de cercanía o pertenencia de un individuo con un cierto atributo, es necesario disponer de un mecanismo o sistema capaz de mensurar, con cierta exactitud, dicho grado de pertenencia; teniendo presente que, por

tratarse de personas, habrá un margen de error asociado a la medición en cuestión; sin embargo, habrá situaciones en las cuales no es posible obtener un grado de pertenencia concreto y/o confiable, en cuyo caso el atributo o factor elemental deberá ser vinculado con un subconjunto que fluctúa dentro de un rango más o menos aceptable e individualizado por un cierto nombre artificial (de fantasía, rótulo, etiqueta o cualesquier otro nombre que se le quiera dar).

Como lo ilustra Robbins [55], en el concepto “témpano organizacional” asociado a los comportamientos humanos, un individuo exhibe un determinado grado de pertenencia en cada atributo, como resultado de su propia desalineación entre la zona visible y la zona oculta, pero se desconoce su magnitud, luego el sistema de captura del valor de los atributos debe ser tal que logre captar el verdadero grado de pertenencia, más allá de cualesquier simulación o disimulación (exhibición de lo inexistente u ocultamiento de lo existente); según muchos investigadores, la observación del comportamiento de un individuo sometido a situaciones de presión, permite detectar con mayor probabilidad de éxito el grado de cercanía con los atributos de interés.

El rendimiento laboral de un individuo se puede proyectar (inferir) en virtud de la “combinación” de todos los valores de los diversos atributos medidos en tal persona; esta combinación será la resultante de aplicar algún proceso matemático sobre las distintas variables elementales (sus valores observados), teniendo en cuenta que los valores medidos corresponden a: “grados de cercanía del individuo con el atributo en cuestión” o “identificadores que vinculan al individuo y un atributo con cierto subconjunto o agrupación basada en algún criterio preestablecido”.

Davis & Newstrom [13] al igual que Prada [53], dejan en evidencia que la “importancia relativa” de un cierto atributo para un rol concreto debiera ser diferente en función del nivel organizacional donde está ubicado dicho rol; por ejemplo, las habilidades cobran mayor fuerza en los roles del nivel estratégico, no

así en los roles de nivel operacional; algo similar ocurre con las competencias, cuya mayor importancia relativa se detecta en los roles del nivel operacional, no así en los roles de nivel estratégico.

Como una forma de acercarse más a la realidad, sería lógico trabajar la línea de desarrollo del rendimiento en términos de grupos o familias de rendimientos laborales, surgiendo el rendimiento laboral para:

- Nivel estratégico.
- Nivel táctico.
- Nivel operacional.

Al parecer, existe una cierta vinculación entre: la importancia relativa de cada variable a modelar (habilidad, competencia, necesidad), el rol o puesto de trabajo y el nivel organizacional del rol en estudio; luego los rendimientos laborales deberán ser abordados ya sea por roles específicos y/o por niveles organizacionales asociados a los roles.

Abordar el rendimiento laboral por rol tiene la ventaja de que su medición será mucho más confiable, aún cuando se requiere disponer de información más específica tanto de roles como de candidatos o ejecutantes de un rol; por otra parte, cualesquier intento por diseñar un modelo de rendimiento laboral debe ser sustentado por conceptos y técnicas de la mayor precisión posible.

A través de una muestra adecuada de individuos con rendimientos altos, se logra establecer los atributos que tienen presencia en toda la muestra, pudiendo además determinar la importancia relativa de tales atributos en torno a su rendimiento laboral; este estudio debe abarcar todos los roles específicos de una organización tipo.

Como se mencionó anteriormente, las macro variables tienen asociadas diversas variables elementales, las que pueden adoptar muchos valores distintos sin necesidad de obedecer a algún patrón conocido, recordemos que estamos hablando de valores que representan conductas humanas, cuya naturaleza incierta es incuestionable; algunos trabajos de las Ciencias del Comportamiento hablan de que un individuo evidencia cierto valor de un determinado atributo, pero no se puede establecer a priori dicho valor con total certeza.

Por otra parte, el agrupar algunos de estos parámetros con valores inciertos, permite aglutinar grupos de “características más recurrentes” que estarían condicionando cierto potencial patrón conductual.

## **CAPITULO 2:**

### **INTRODUCCIÓN A LAS TÉCNICAS Y TEORIAS DE SUBCONJUNTOS DIFUSOS.**

#### **2.1. Introducción:**

Los números difusos permiten representar el valor de cierto dato, reconociendo que existe un determinado grado de incertidumbre frente al hecho de que tal dato en verdad alcance el citado valor; desde una perspectiva más general, nos referimos a que una variable puede tomar un cierto valor, con algún grado de incertidumbre, por lo tanto se habla de “grado de pertenencia del valor a dicha variable”.

Al disponer de una forma de representación tal que sea posible, inequívocamente, expresar que un determinado individuo exhibe cierto grado de pertenencia en cada uno de los atributos que lo describen, será necesario contar con una serie de funciones y propiedades que hagan factible manipular los datos de tal individuo, con el propósito de establecer una suerte de tendencias en sus patrones conductuales, lo cual se pueda hacer extensivo a una muestra mayor de individuos con igual cantidad de atributos pero con diversos grados de pertenencia en dichos atributos.

Diversos autores coinciden en que la captura de los valores de diversos atributos que caracterizan a un ser humano, se puede lograr a partir de: tests, antecedentes históricos, observación de la conducta exhibida; sin embargo, no todos los individuos evaluados en una muestra, presentarán los mismos valores en un mismo atributo (habrán diversas intensidades); de igual forma, los valores exhibidos por un individuo en un momento de su vida no necesariamente se mantienen estáticos, pudiendo presentar ciertas mutaciones con el correr del

tiempo, es que las experiencias de vida hacen que un individuo modifique, aunque gradualmente, sus patrones conductuales, todo ello con el propósito de irse adaptando a los escenarios siempre cambiantes.

Cuando se vincula la conducta humana con la computación, uno se traslada en el tiempo hacia las razones que llevaron a algunos investigadores a diseñar el primer computador, encontrándonos con frases como: “una máquina que emule la mente humana”, “decodificar el proceso cognitivo del cerebro humano” y muchas otras expresiones; pero la rentabilidad pudo más, ello generó un “olvido o postergación temporal” de las verdaderas razones que crearon la computación; hoy está nuevamente de vuelta en nuestras vidas y al parecer retornó para quedarse.

En el caso específico de la conducta humana, la inteligencia artificial se ha hecho cargo de algunos estudios, los casos más abundantes están orientados hacia: emular los desplazamientos físicos del cuerpo humano; predecir las preferencias del consumidor, a partir del aprendizaje de sus hábitos de consumo; establecer patrones financieros para otorgamiento de créditos bancarios; asociar expresiones faciales con estados emocionales. Serán estos estudios el punto de partida para buscar los caminos de la inteligencia artificial hacia la predicción del comportamiento laboral; si estos caminos no existen, es porque ya es tiempo de comenzar a abrir esta beta del conocimiento.

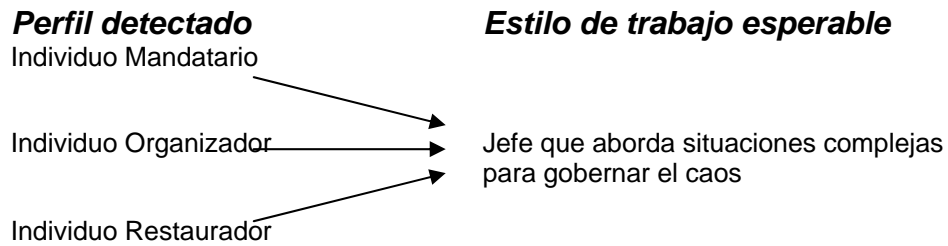
Rosenblum, Yacoob y Davis [56] muestran los logros de un proyecto inspirado en establecer patrones de expresión facial asociados con emociones, a partir de la Psicología se tomaron las expresiones de: felicidad, tristeza, sorpresa, temor, enojo y disgusto; estas expresiones faciales clásicas fueron vinculadas con las propuestas de Bassili (1979), estableciendo que: la boca, la nariz, los ojos y las cejas, eran suficientes para identificar las expresiones faciales y por lo tanto los estados emocionales de un individuo.

Cuando intentamos vincular estos aportes con nuestro proyecto, surge la visión de algún mecanismo que permita detectar el “estado emocional de un individuo frente a un trabajo específico”, ello permitiría asegurar con cierto grado de certeza, si se está o no en presencia de alguna habilidad alineada con el rol; también se podría establecer con cierta precisión, si se está o no en presencia de alguna necesidad específica o más notoria en un individuo. Genéricamente estamos hablando de un “sistema perceptual”.

Oliver, Rosario y Pentland [51] ilustran como las redes bayesianas permiten describir algunos comportamientos humanos e intentar modelarlos, también es posible estudiar sus probables conductas futuras a partir de cierto conocimiento previo, estamos hablando de aprendizaje estadístico supervisado.

Como se podría suponer, si existen evidencias empíricas de que ante ciertos antecedentes previos de una conducta, la mayoría de las veces se produce cierto comportamiento (desempeño laboral), este podría ser un camino digno de explorar para intentar generar los procesos de aprendizaje de ciertas variables; por ejemplo: si una persona clasificada como flexible (Buckingham & Clifton [4]), evidencia agrado por las sorpresas en todas o la mayoría de las acciones donde se ve involucrada, sería esperable, con alta probabilidad de éxito, de que tendrá buena reacción frente a situaciones altamente cambiantes.

En Oliver, Rosario y Pentland [51], vemos como un modelo markoviano acoplado permite estudiar y describir las probabilidades de que ante ciertos eventos probados (estados en ciertas variables) se pueda esperar, con alto grado de confianza que ocurra un cierto comportamiento; esto se podría aplicar, por ejemplo, así, a partir de Buckingham & Clifton [4]:



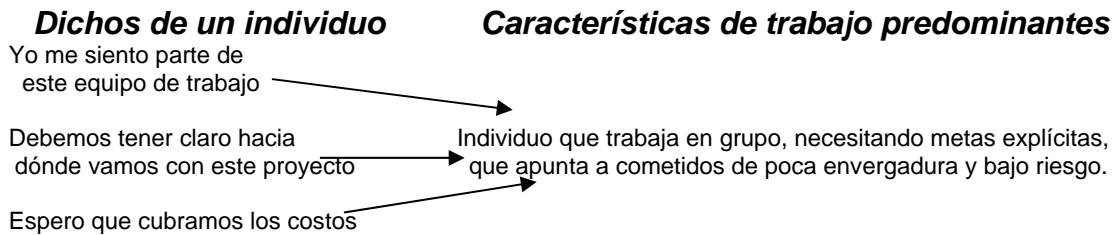
**Fig.#22: Relación de causalidad entre perfil del individuo y estilo de trabajo.**

En otras palabras, un individuo: mandatario, organizador y restaurador, tenderá a imponer su criterio para abordar labores complejas que finalmente permitan manejar las situaciones caóticas, no descansando hasta que se logre cierta “normalidad”.

Ashwin & Lawrence [1] ilustran la utilidad de los logros explícitos para guiar y aprender el conocimiento, donde los árboles de decisión, utilizando una taxonomía de preguntas motivacionales, permite explicar (Schank [1986]) y encaminar la generalización de un cierto relato. Esta investigación nos abre 2 caminos posibles de exploración: combinar un árbol de decisión con una base de datos para intentar explicar e incluso generalizar ciertos patrones conductuales, analizar los dichos de un individuo para aproximarse hacia la explicación y eventual generalización de necesidades más sentidas presentes en su hablar.

Ejemplifiquemos a partir de Buckingham & Clifton [4]:





***Fig.#23: Relación entre perfil auditivo y características del trabajo esperable.***

En Trillas, Delgado, Vila, Castro, Verdegay, Moraga, Cuenca, Gutierrez y Ruiz [62], se ilustra la utilización de la lógica difusa para describir fenómenos o conductas, parametrizadas en variables que toman valores con un cierto grado de incertidumbre; sin duda el proyecto que nos preocupa en esta ocasión contempla diversas variables que toman valores con un determinado grado de incertidumbre, recordemos que la conducta humana tiene o exhibe tendencias hacia algún polo específico, pero no se manifiesta concretamente en un valor fijo.

La obtención de conocimiento nuevo puede abrirse en dos direcciones: establecer eventuales relaciones de implicación, agregar información a la aportada por los datos inicialmente disponibles; en este capítulo indagamos en ambas direcciones antes de discriminar cual de ellas nos dirige más directamente hacia la cuantificación del rendimiento.

Las primeras incursiones muestran que es posible obtener conocimiento nuevo a partir de clasificar los datos disponibles (universo de discusión) en subconjuntos obviamente difusos, ya que estamos hablando de datos con incertidumbre asociada, nos referimos a las propiedades básicas de la lógica difusa; luego surgen las dos vertientes señaladas, caracterizadas por: razonamiento difuso y variables lingüísticas; conectivos lógicos, operadores promedio, operadores OWA e integral de Sugeno; siendo la segunda vertiente la que nos conduce más directamente hacia nuestro objetivo.

## 2.2. El concepto de Subconjunto Difuso:

La idea de subconjunto difuso o borroso extiende la idea de conjunto como reunión de cosas en las que cada una de ellas pertenece o no pertenece a la mencionada colección. La aportación clave es permitir que un objeto pueda pertenecer con un grado.

Formalmente su representación tiene la siguiente forma:

Sea  $X$  = conjunto referencial. Un subconjunto difuso de  $X$  es una colección de pares de la forma  $A = \{ (x, \mu_A(x)) ; x \in X, \mu_A(x) \in [0,1] \}$ .

$X$  representa un conjunto de individuos sobre los cuales se le está estudiando una propiedad (en nuestro modelos sera una conducta) mientras que  $\mu_A(x)$  representa para cada  $x$  de  $X$  el grado de cumplimiento de la propiedad (grado de presencia de una conducta determinada).

Para cualquier subconjunto difuso  $A$  un universo  $X$  pueden identificarse una serie de conjuntos “clasicos” y pueden formularse una serie de operadores:

$$\text{Soporte: } S(A) = \{x \in X: \mu_A(x) > 0\}, \quad (A_\alpha = 0)$$

$$\alpha\text{-corte: } A_\alpha = \{x \in X: \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in [0,1]$$

$$\text{Moda: } M(A) = \{x \in X: \mu_A(x) = 1\}, \quad (A_\alpha = 1)$$

$$\text{A convexo: } \mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

[todos sus  $\alpha$ -cortes son convexos]

Complemento de A:  $\mu_C(x) = 1 - \mu_A(x)$ ; a veces representado:  $[A^c(x)]$

Unión:  $\mu_D(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Intersección:  $\mu_D(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Inclusión:  $A \subset B$  ssi  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X$

Teorema de Representación:

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha} \{ \mu_{A_\alpha}(x) \}; \text{ con } I_{A_\alpha} \text{ la función corte } A_\alpha$$

si  $A \in F(X)$  y  $\{ A_\alpha \in [0,1] \}$  con sus  $\alpha$ -cortes

$$\text{Entonces } A = \bigcup_{\alpha} A_\alpha, \alpha \in [0,1]$$

Principio de Extensión: Permite transformar funciones clásicas en funciones sobre subconjuntos difusos, partiendo de la idea de subconjunto difuso producto cartesiano de subconjuntos difusos sobre n referenciales.

Sea  $X$ , el producto cartesiano de n conjuntos referenciales, y  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , n subconjuntos difusos cada uno sobre uno de los mencionados referenciales. El producto cartesiano de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , se define como aquel subconjunto difusos sobre  $X$  tal que para cada tupla asigna el grado para cada tupla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $\text{Min} [ \mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n) ]$ .

A partir de esta caracterización si  $f$  es una función de  $X$  en algún referencial  $Y$  y  $A$  es un subconjunto difuso de  $X$  la imagen por  $f$  de  $A$  es un subconjunto difuso  $B$  de  $Y$  con función de pertenencia

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \text{Sup } \{\mu(x) \mid y = f(x)\} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Considerando que: A fuese el producto cartesiano de sendos subconjuntos difusos;

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \text{Sup } \{ \text{Min} [ \mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \dots, \mu_n(x_n) ] \mid y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

### **2.3. Conectivos Lógicos:**

Las operaciones básicas de la lógica difusa, como es el caso de: Unión, Intersección y Representación, como medios para obtener conocimiento nuevo, fueron originariamente descritos por Zadeh tal como se ha presentado anteriormente, pero existen otras formulaciones más generales, las cuales revisamos a continuación.

#### **Normas Triangulares:**

Fueron introducidas por Schweizer y Sklar para modelar las distancias en espacios métricos probabilísticos [funciones asociativas y semigrupos abstractos. Publ. Math. Debrecen, 10 (1963) 69-81].

En la teoría de subconjuntos difusos las normas triangulares son extensivamente usadas para modelar el conectivo lógico AND.

Una aplicación  $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  es una norma triangular ssi es: Simétrica, Asociativa, No Decreciente en cada argumento y  $T(a,1) = a, \forall a \in [0,1]$ ; es decir:

- 1) Simetría:  $T(x,y)=T(y,x), \forall x, y \in [0,1]$
- 2) Asociatividad:  $T(x, T(y,z))=T(T(x,y),z), \forall x, y, z \in [0,1]$
- 3) Monotonicidad :  $T(x,y) \leq T(x',y')$  si  $x \leq x'$  e  $y \leq y'$
- 4) Identidad 1:  $T(x,1)=x, \forall x \in [0,1]$

[Estos axiomas intentan capturar las propiedades básicas del conjunto intersección].

Las t-normas básicas son:

- Mínimo:  $\text{Min}(a,b) = \text{Min}\{a,b\}$
- Lukasiewicz :  $T_L(a,b) = \text{Max}\{a+b-1, 0\}$
- Product :  $T_P(a,b) = ab$
- Weak (débil) : 
$$T_W(a,b) = \begin{cases} \text{Min}\{a,b\} & \text{si } \text{Max}\{a,b\} = 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$
- Hamacher: 
$$H_\gamma(a,b) = \frac{ab}{\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)}, \gamma \geq 0$$
- Dubois and Prade: 
$$D_\alpha(a,b) = \frac{ab}{\text{Max}\{a, b, \alpha\}}, \alpha \in [0,1]$$
- Yager: 
$$Y_p(a,b) = 1 - \text{Min}\{1, \sqrt[p]{(1-a)^p + (1-b)^p}\}, p > 0$$

- Frank:

$$F_\lambda(a,b) = \begin{cases} \text{Min}\{a,b\} & \text{si } \lambda=0 \\ T_p(a,b) & \text{si } \lambda=1 \\ T_L(a,b) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1 - \text{Log}_\lambda \left[ 1 + \frac{(\lambda^a - 1)(\lambda^b - 1)}{\lambda - 1} \right] & \text{otros casos} \end{cases}$$

Todas las t-normas pueden ser extendidas, vía asociatividad, a mas de dos argumentos.

Una t-norma T se denomina estricta si T es estrictamente creciente en cada argumento.

### Co-Normas Triangulares:

Fueron igualmente introducidas por Schweizer y Sklar para modelar las distancias en espacios métricos probabilísticos [funciones asociativas y semigrupos abstractos. Publ. Math. Debrecen, 10 (1963) 69-81].

Las co-normas triangular son extensivamente usadas para modelar el conector lógico OR.

Una aplicación  $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  es una co-norma triangular si esta es: Simétrica, Asociativa, No Decreciente en cada argumento y  $S(a,0) = a, \forall a \in [0,1]$ ; es decir:

- 1) Simetría:  $S(x,y)=S(y,x), \forall x, y \in [0,1]$
- 2) Asociatividad:  $S(x, S(y,z))=S(S(x,y),z), \forall x, y, z \in [0,1]$
- 3) Monotonicidad :  $S(x,y) \leq S(x',y')$  si  $x \leq x'$  e  $y \leq y'$
- 4) Identidad 0:  $S(x,0)=x, \forall x \in [0,1]$

Si T es una t-norma entonces la igualdad:

$S(a,b) := 1 - T(1-a, 1-b)$ , define una t-conorma y decimos que S es derivada (dual) de T.

Las t-conormas básicas son:

- Maximo:  $\text{Max}(a,b) = \text{Max}\{a,b\}$

- Lukasiewicz :  $S_L(a,b) = \text{Min}\{a+b, 1\}$

- Probabilística:  $S_P(a,b) = a+b-ab$

- Strong(fuerte): 
$$\text{Strong}(a,b) = \begin{cases} \text{Max}\{a,b\} & \text{si } \text{Min}\{a,b\} = 0 \\ 1 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

- Hamacher: 
$$\text{Hor}_\gamma(a,b) = \frac{a+b - (2-\gamma)ab}{1 - (1-\gamma)ab}, \gamma \geq 0$$

- Yager: 
$$\text{Yor}_p(a,b) = \text{Min}\{1, \sqrt[p]{a+b}\}, p > 0$$

**Lemas que se desprenden:**

- Cuando T es una t-norma, tenemos:

$$T_w(x,y) \leq T(x,y) \leq \text{Min}\{x,y\}, \forall x, y \in [0,1]$$

- Cuando S es una t-conorma, tenemos:

$$\text{Max}\{a,b\} \leq S(a,b) \leq \text{Strong}(a,b), \forall a, b \in [0,1]$$

-  $T(a,a) = a$  para cualesquier  $a \in [0,1]$  ssi T es el Minimum norma

$$[ T(a,b) = \text{Min}\{a,b\}, \forall a, b \in [0,1] ]$$

-  $T(\text{Max}\{a,b\}, c) = \text{Max}\{T(a,c), T(b,c)\}, \forall a, b, c \in [0,1]$

**Sea T una t-norma** ; la T-intersección de A y B es :

$$(A \cap B) (t) = T(A(t), B(t)), \forall t \in X$$

Por ejemplo :  $T(x,y) = \text{LAND}(x,y) = \text{Max}\{x+y-1, 0\}$

$$\text{Luego } (A \cap B) (t) = \text{Max}\{A(t) + B(t) - 1, 0\}, \forall t \in X$$

Sea :  $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  y sean A y B dos subconjuntos difuso de X, dados por:

$$A = 0.3/x_1 + 0.6/x_2 + 0.1/x_3 + 1.0/x_4$$

$$B = 0.0/x_1 + 0.9/x_2 + 1.0/x_3 + 0.2/x_4$$

Entonces:  $A \cap B = \text{max}\{0.3+0.0-1,0\} + \text{max}\{0.6+0.9-1,0\} + \text{max}\{0.1+1.0-1,0\} + \text{max}\{1.0+0.2-1,0\}$

$$A \cap B = 0.0/x_1 + 0.5/x_2 + 0.1/x_3 + 0.2/x_4$$

**Sea S una t-conorma** ; la S-uni3n de A y B es :

$$(A \cup B) (t) = S(A(t), B(t)), \forall t \in X$$

Por ejemplo :  $S(x,y) = \text{LOR}(x,y) = \text{Min}\{x+y, 1\}$

$$\text{Luego } (A \cup B) (t) = \text{Min}\{A(t) + B(t), 1\}, \forall t \in X$$

Para los datos anteriores se tiene:

$$A \cup B = 0.3/x_1 + 1.0/x_2 + 1.0/x_3 + 1.0/x_4$$

Hasta ahora hemos analizado los operadores LAND y LOR, pero tambi3n resulta 3til disponer de un operador compensatorio ( C ), tal que:

$\text{Min}\{a,b\} \leq C(a,b) \leq \text{Max}\{a,b\}, \forall a, b \in [0,1]$  ; en estas condiciones, C corresponde al operador compensatorio, siendo el m3s t3pico la media aritm3tica:



$$\text{Mean}(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

## 2.4. Razonamiento Difuso:

Nuestro objetivo es obtener información (conocimiento) adicional a partir de los datos inicialmente disponibles, al explorar el camino del razonamiento nos encontramos con: el razonamiento aproximado con variables difusas y el razonamiento con predicados vagos.

En el caso del razonamiento aproximado, el proceso de concluir se hace en forma fuzzificada, lo que se puede representar como:

Premisas (difuso)  $\rightarrow$  razonamiento aproximado.

Sean X e Y dos universos de discurso (conjuntos referenciales),  
A y B dos subconjuntos difuso de X e Y respectivamente.

Si x es A entonces y es B	[Regla]
x es A`	[Premisa]
y es B`	[Conclusión]

Para buscar B` se emplea de la "Regla Composicional de Inferencia (RCI)".

Se supone que la formulación de "Si x es A entonces y es B" establece una relación R entre valores de X e Y, es decir, un conjunto difuso en el producto cartesiano X x Y, donde:

$$\mu_R(x,y) = F(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Luego B` será un conjunto difuso inducido por A` en Y; es decir: B` = A` & R

Usualmente B` se obtiene como:

$$\mu_{B'}(y) = \text{Max}_X (\mu_A(x) * \mu_R(x,y)) ; \text{ con } * \rightarrow \text{ operador producto o m\u00ednimo.}$$

Las versiones m\u00e1s usadas de F son:

$$\mu_R(x,y) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \vee (1 - \mu_A(x))) \quad [\text{Zadeh}]$$

$$\mu_R(x,y) = 1 \wedge (1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) \quad [\text{Zadeh}]$$

$$\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \quad [\text{Mamdani}]$$

$$\text{Luego: } \mu_{B'}(y) = a \wedge \mu_B(y)$$

$$a = \text{V}_X (\mu_A(x) \wedge \mu_A(x))$$

Entonces B se trunca a la altura a.

Para el caso de nuestro inter\u00e9s, X e Y podr\u00edan corresponder a dos muestras de individuos a los cuales se les analiza su rendimiento laboral, de forma tal que en A estar\u00edan los miembros de X que cumplen con ciertas caracter\u00edsticas propias de un rol concreto, mientras que en B estar\u00edan los miembros de Y que cumplen otras caracter\u00edsticas que incluso formar\u00edan parte del perfil predominante del mismo rol espec\u00edfico antes se\u00f1alado; esto crear\u00eda una suerte de convergencia de caracter\u00edsticas en torno a un \u00fanico rol en estudio; luego se podr\u00eda generar un conocimiento nuevo del tipo B', el que, por ejemplo, citar\u00e1 "los individuos que tendr\u00edan un rendimiento laboral considerado aceptable o con un patr\u00f3n relativamente predecible".

Por ejemplo:

A: conjunto de individuos con competencia de comportamiento; habilidades de anal\u00edtico, auto-confiado, carism\u00e1tico y comunicador; necesidades de: afiliaci\u00f3n, poder y realizaci\u00f3n.

B: conjunto de individuos con competencias intelectuales; habilidades de: desarrollador, empático, estratégico y flexible; necesidades de meta general, meta implícita y meta corta.

De acuerdo al modelo teórico de roles y perfiles propuesto (MTRP), B' podría estar contemplando las características básicas de los roles de: Director de Area y de Director de Departamento, lo que incluso podría ser considerado como: un estado de tránsito entre ambos roles, un rol no contemplado entre ambos o las condiciones iniciales para ser Director de nivel intermedio con 2 posibles ramificaciones.

En el caso del razonamiento con predicados vagos el proceso de concluir se hace de acuerdo a las siguientes propiedades:

Sea P un predicado vago sobre un universo de discurso U.

Cada Px tiene asociado un  $\mu_p(x) \rightarrow [0,1]$

Cuando:  $\mu_p(x) = \varphi P(x)$ , P no es vago, es cierto.

Se identificará  $\mu_p$  con  $P = \{ x \in U; Px \text{ es verdadero} \}$

Luego:  $x_\alpha \in P$  ssi  $\alpha = \mu_p(x)$

$$P = Q \text{ ssi } \mu_p(x) = \mu_q(x), \forall x \in U$$

[Px es una afirmación lingüística]

Para nuestro caso podríamos tener que P representa a los individuos con: competencia de comportamiento; habilidades de: analítico, auto-confiado, carismático y comunicador; necesidades de: afiliación, poder y realización. Lo que por MTRP puede corresponder a Director de Area y/o Director de Departamento.

Por otra parte, todos los grados de pertenencia ( $\mu_P(x)$ ) son  $\geq 0.7$ , al surgir un nuevo individuo con los mismos atributos pero con un  $x_\alpha$  tal que  $\alpha = 0.74$ , se puede decir que este nuevo individuo es candidato a ser considerado miembro de P.

En el caso de afirmaciones compuestas se tiene:

- $Px \text{ y } Qy = Px \cdot Qy$
- $Px \text{ o } Qy = Px + Qy$  ; con P y Q son predicados vagos.

Pero  $X$  e  $Y \in$  a universos de discurso distintos; aquí también se aplican las funciones de compatibilidad o pertenencia:

$$\mu_{P \cdot Q}(x,y) = T(\mu_P(x), \mu_Q(y))$$

$$\mu_{P + Q}(x,y) = T^*(\mu_P(x), \mu_Q(y)) ; \text{ con } T \in \{\text{Min, Prod, W}\} ;$$

$$T^*(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y),$$

donde T y  $T^*$  representan una t-norma y una t-conorma respectivamente.

Por ejemplo: x es grande, o (z es muy pequeño y x es pequeño), con  $x \in [0,1]$  y  $z \in [0,2]$ , se representa como:  $\mu_{G+(P.P)}^m : [0,1] \times [0,2] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ,

dado por:

$$\mu_{G+(P.P)}^m(r,s,t) = T^*(\mu_G(r), T(\mu_P^m(s), \mu_P(t)))$$

$$= T^*(r, T((1-s/2)^2, 1-t))$$

luego, la afirmación compleja sería:

$$\mu_{G+(P.P)}^m(x,z,x) = T^*(x, T((1-z/2)^2, 1-x)), \text{ para } x \in [0,1], z \in [0,2]$$

Como vemos, a partir de una muestra de datos iniciales disponibles para individuos a los cuales se les estudió su rendimiento laboral, es posible obtener

bastante información como conocimiento nuevo; sin embargo, este camino nos lleva hacia otros resultados que divergen respecto de lo que estamos buscando, recordemos que nos interesa diseñar un modelo que nos permita calcular cuantitativamente el rendimiento laboral, no descartando que será necesario, en casos puntuales, consignar un camino para medir cualitativamente dicho rendimiento.

De la ejemplificación anterior nos queda claro que una vez resuelto el tema de cuantificar la productividad individual, podríamos retomar el camino descubierto a partir del razonamiento difuso.

Si tuviésemos que abordar casos con afirmaciones condicionales, deberíamos utilizar propiedades como:

Sea la afirmación: “si x es P, entonces y es Q”, lo que podría equivaler a  $(P \rightarrow Q)$ , genéricamente se escribiría:

$$\mu_{P \rightarrow Q}(x, y) = T^*(\mu_P(x), \mu_Q(y))$$

$$\mu_{P \rightarrow Q}(x, y) = T^*(1 - \mu_P(x), \mu_Q(y)) \quad [13]$$

Estas dos expresiones corresponden a implicaciones con afirmaciones condicionales, muy útiles a la hora de intentar generar conocimiento nuevo a partir de los datos disponibles.

Por ejemplo, si consideramos:

A: conjunto de individuos con competencia de comportamiento; habilidades de analítico, auto-confiado, carismático y comunicador; necesidades de: afiliación, poder y realización.

B conjunto de individuos con: competencias intelectuales; habilidades de: desarrollador, empático, estratégico y flexible; necesidades de: meta general, meta implícita y meta corta.

Para un individuo  $x_1$  que presenta los atributos definidos en A, mientras que otro individuo  $x_2$  que presenta los atributos definidos en B, se podría iniciar una potencial afirmación del tipo: “si  $x_1$  es probable Director de Area, entonces  $x_2$  es probable Director de Departamento”.

En las expresiones anteriores,  $T^*$  corresponde a un operador difuso, de tal suerte que:

- Si  $T^* = \text{Max}$ , surge “Implicación de Kleene-Dienes o de Zadeh”

$$\mu_{P \rightarrow Q}(x,y) = \text{Max}(1 - \mu_P(x), \mu_Q(y))$$

- Si  $T^* = \text{Sum-Prod}$ , surge “Implicación de Reichenbach”

$$\mu_{P \rightarrow Q}(x,y) = (1 - \mu_P(x) + \mu_P(x) \cdot \mu_Q(y))$$

- Si  $T^* = \text{Min}(1, \text{Sum})$ , surge “Implicación de Luckasiewicz”

$$\mu_{P \rightarrow Q}(x,y) = \text{Min}(1, 1 - \mu_P(x) + \mu_Q(y))$$

En estas 3 implicaciones se verifica que:  $W(\mu_P(x), \mu_{P \rightarrow Q}(x,y)) \leq \mu_Q(y)$

Luego: Si “x es P” es verdadera ( $\mu_P(x) = 1$ ) y si “x es P, entonces y es Q” también verdadera ( $\mu_{P \rightarrow Q}(x,y) = 1$ ), entonces  $1 = W(1,1) \leq \mu_Q(y)$

Siguiendo por la misma senda de las implicaciones con afirmaciones condicionales, encontramos que otras funciones  $\mu_{P/Q}$  verifican la siguiente condición:

$$T(\mu_P(x), \mu_{P,Q}(x,y)) \leq \mu_Q(y) \quad [14]$$

Las implicaciones anteriores son un caso particular de las denominadas funciones de Implicación. Una función de Implicación es una aplicación  $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  que cumple las condiciones de frontera  $I(0,1) = I(1,1) = 1$  e  $I(1,0) = 0$ . Otros ejemplos de funciones de implicación son:

**Mamdani:**

$$\mu_{P/Q}(x,y) = \text{Min}(\mu_P(x), \mu_Q(y)), \text{ con } T = \text{Min}$$

**Willmot :**

$$\mu_{P/Q}(x,y) = \text{Max}(1-\mu_P(x), \text{Min}(\mu_P(x), \mu_Q(y))), \text{ con } T = W$$

**Gödel :**

$$\mu_{P/Q}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu_P(x) \leq \mu_Q(y) \\ \mu_Q(y), & \text{si } \mu_P(x) > \mu_Q(y) \end{cases}; \text{ con } T = \text{Min}$$

**Goguen:**

$$\mu_{P/Q}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu_P(x) = 0 \\ \text{Min}(1, (\mu_Q(y) / \mu_P(x))), & \text{si } \mu_P(x) > 0 \end{cases}; \text{ con } T = \text{Prod}$$

La consecuencia mas inmediata de todos los desarrollos anteriores es la denominada "Regla Composicional de Inferencia de Zadeh" (RCI) de la que se obtiene el "Modus Ponens Borroso".

Los datos son afirmaciones condicionales (regla) del tipo "si x es P, entonces y es Q"; y un dato (observación) del tipo "x es P\*", con P\* = predicado vago modificado de P, tal que:

$$\mu_{P^*}(x) \leq \mu_P(x), \forall x \in U_1 \quad [15]$$

Se busca saber:

Dados: Si P <sub>x</sub> , entonces Q <sub>y</sub>	(regla)
P* <sub>x</sub>	(dato)
-----	
¿Q* <sub>y</sub> ?	(conclusión?)

La regla se representará por alguna relación  $\mu_{P/Q}$ , debiendo satisfacer:

$$T(\mu_P(x), \mu_{P/Q}(x,y)) \leq \mu_Q(y), \text{ con cierto } T \text{ y cualesquier } (x,y) \in U_1 \times U_2$$

De [15] se tiene :

$$T(\mu_{P^*}(x), \mu_{P/Q}(x,y)) \leq T(\mu_P(x), \mu_{P/Q}(x,y)) \leq \mu_Q(y), \forall y \in U_2$$

$$\text{Sup}_{P^*} T(\mu_{P^*}(x), \mu_{P/Q}(x,y)) \leq \mu_Q(y), \forall y \in U_2, x \in U_1$$

$$\text{como } \mu_{Q^*}(y) = \text{Sup}_{P^*} T(\mu_{P^*}(x), \mu_{P/Q}(x,y)) \text{ verifica } \mu_{Q^*}(y) \leq \mu_Q(y),$$

De  $\mu_{Q^*}(y) \leq \mu_Q(y)$ , se puede obtener que "y es a lo menos Q".

De la teoría del control borroso, obtenemos:



$$\mu_{G/P}(x,y) = \text{Min}(\mu_G(x), \mu_P(y)) = \text{Min}(x, 1 - y)$$

Donde  $\mu_G(x) \rightarrow x$  es muy grande,  $\mu_P(y) \rightarrow y$  es pequeño

NOTA:

$$\mu_{G+}(x) = \sqrt{x} \text{ (+/- grande)}; \mu_P(x) = 1 - x \text{ (pequeño)}; \mu_{P^2}(x) = (1-x)^2 \text{ (muy pequeño)};$$

$$\mu_G(x) = x \text{ (grande)}; \mu_{G^2}(x) = (\mu_G(x^2)) = x^2 \text{ (muy grande)}$$

luego: "si x es grande, entonces y es pequeño" nos lleva a:

$$\begin{aligned} \text{Sup Min}(x^2, \text{Min}(x, 1-y)) &= \text{Sup Min}(\text{Min}(x^2, x), 1 - y) = \text{Sup Min}(x, 1 - y) = \\ &= \text{Min}(1, 1 - y) = 1 - y = \mu_P(y) \rightarrow y \text{ es a lo menos pequeño.} \end{aligned}$$

Veamos el caso: "Si (x es + - grande y z es pequeño), entonces y es muy pequeño",

con "x es grande y z es muy pequeño" ( $\mu_{G,P^2}(x,z)$ )

$$\begin{aligned} \mu_{(G+-P)^2}(x,z,y) &= \text{Min}(\mu_{(G+-P)}(x,z), \mu_{P^2}(y)) = \\ &= \text{Min}(\text{Min}(\mu_{G+}(x), \mu_{P^2}(z)), \mu_{P^2}(y)) = \text{Min}(\sqrt{x}, 1 - z, (1 - y)^2) \end{aligned}$$

luego, como el dato  $\mu_{G,P^2}(x,z) = \text{Min}(\mu_G(x), \mu_{P^2}(z)) = \text{Min}(x, (1 - z)^2)$

$$\text{Entonces: Sup Min}(\text{Min}(x, (1 - z)^2), \text{Min}(\sqrt{x}, 1 - z, (1 - y)^2)) =$$

**d a t o   p r e d i c a d o ( r e g l a )**

$$= \text{Sup Min}(x, (1 - z)^2, \sqrt{x}, 1 - z, (1 - y)^2) =$$

$$= \text{Sup Min}(x, (1 - z)^2, (1 - y)^2) = \text{Min}(1, 1, (1 - y)^2) = (1 - y)^2 = \mu_{P^2}(y)$$

$\rightarrow$  y es a lo menos muy pequeño

<<< donde la conclusión es conocimiento nuevo >>>

Notemos que la regla corresponde a una afirmación compuesta, lo que se denota por:

$$\begin{aligned} \mu_{A+B}(p_i, p_j) &= T^*(\mu_A(p_i), \mu_B(p_j)) \\ \mu_{A+B}(p_i, p_j) &= T^*(1 - \mu_A(p_i), \mu_B(p_j)) \end{aligned} \quad [16]$$

Tal como lo ilustran Klir and Folger [28], complementado con lo señalado por Castro [8], la relación de implicación en términos de lógica difusa, sienta las bases para representar el aprendizaje; busquemos en las raíces de esta relación.

La implicación  $p \rightarrow q$  es interpretada como  $\neg(p \wedge q)$ , luego:  $p \rightarrow q = \neg(p \wedge q) = \neg p \vee q$ ; de lo cual se desprende que: Si  $x < y$  entonces  $x \rightarrow y$ , pero  $x \rightarrow y = \text{Sup} \{z / x \cap z < y\}$ . Es decir:  $A(u) \rightarrow B(v) = \text{Sup} \{z / \min\{A(u), z\} \leq B(v)\}$

$$\text{Implicación de Gödel: } \begin{cases} 1 & \text{si } A(u) \leq B(v) \\ B(v) & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Implicación de Kleene-Dienes:

$$\begin{aligned} A(u) \rightarrow B(v) &= \max \{1 - A(u), B(v)\} \\ &= \min \{A(u), B(v)\} \end{aligned}$$

Es absolutamente claro que para abordar el proceso de generación de conocimiento nuevo, las expresiones difuso que tratan las implicancias tanto simples como complejas, representa un camino certero.

## 2.5. Variables Lingüísticas:

Otro camino que es conveniente indagar lo constituye el trazado por las variables lingüísticas, comencemos a explorar esta instancia. Hablando de modo informal una variable lingüística es una variable con dominio numérico pero cuyos valores se dan por medio de etiquetas o palabras de una forma proxima al lenguaje natural.

Desde un punto de vista formal, una variable lingüística se caracteriza por una quintupla de la forma  $(x, T(x), U, G, M)$  donde:

$x$  : Nombre de la variable.

$T(x)$ : Conjunto de nombres de valores lingüísticos de  $x$ ,

$U$  : Dominio (numérico) de la variable  $x$ ,

$G \rightarrow$  Regla sintáctica para generar los nombres de valores de  $x$  (etiquetas lingüísticas,

$M \rightarrow$  Regla semántica para asociar con cada etiqueta su significado, en definitiva un subconjunto difuso definido en  $U$ .

Por ejemplo:

$x =$  velocidad.

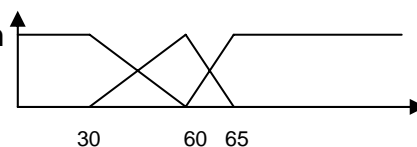
$T = \{\text{lento, moderado, rápido, muy lento, más o menos rápido, ...}\}$ .

Cada  $T(x)$  está caracterizado por un conjunto difuso en un universo de discurso  $U = [0, 100]$ .

Entonces: lento  $\rightarrow < 30$  mph

moderado  $\rightarrow$  cercano a 60 mph

rápido  $\rightarrow > 65$  mph



Genéricamente tenemos donde  $x \in [0,1]$ :

$$+- \text{True}(x) = \sqrt{x}; \quad \text{muy True}(x) = x^2;$$

$$+- \text{False}(x) = \sqrt{1-x}; \quad \text{muy False}(x) = (1-x)^2$$

Para el tema que nos interesa, una variable lingüística podría estar representando un subconjunto difuso que caracteriza la valoración de individuos cuyos atributos elementales corresponden a un rol genérico específico, por ejemplo: ser Director de nivel intermedio; esto nos permite generar nuevos subconjuntos difuso de los subconjuntos difuso antes señalados; es decir, individuos con características concretas para abordar un rol determinado, a partir de un grupo de individuos que presentan en sus atributos ciertas características que les son comunes (a partir de todos los individuos que cumplen con las condiciones de ser Director de nivel intermedio, se obtienen subgrupos de: Directores de Area, Directores de Departamento).

La variable lingüística permite también representar a los miembros de un conjunto para los cuales sus atributos no cuentan con valores precisos ni grados de pertenencia conocidos.

Cuando señalamos que  $p \rightarrow q$  debemos recordar la tabla de verdad que caracteriza la relación de implicación:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Luego el Modus Tollens de la regla de inferencia es:

Si  $p \rightarrow q$  es verdadero  
y q es falso

-----

p es falso

**Fig.#24: Tabla de verdad de la relación de implicación lógica.**

Lo que podríamos aplicar como: si  $x_1 \rightarrow x_2$ , pero  $x_2$  no cumple con las condiciones de ser Director de Departamento aún cuando, tanto  $x_1$  como  $x_2$  tienen ciertas características comunes, entonces  $x_1$  no cumple con las condiciones de ser Director de Area.

También se puede decir que:  
de (RCI) Si x es A entonces y es B

y z es A`

-----

consecuencia y es B`

donde B` está determinado como una composición del factor y el operador de implicación difuso, con  $B` = A`$  o  $(A \rightarrow B)$ , pero sabemos que:

$$B'(v) = \text{Sup} \min \{A'(v), (A \rightarrow B)(u,v)\}, v \in V, u \in U$$

El Modus Ponens generalizado, cuando  $A`=A$  y  $B`=B$ , está cercanamente relacionado al dato-meta de inferencia enviado [a partir de: si p es verdadero y  $p \rightarrow q$  también es verdadero, entonces q es verdadero]; esta relación es particularmente usada en el control de lógica difusa.

A partir de la regla Modus Tollens: Si  $p \rightarrow q$  es verdadero y  $q$  es falso, entonces  $p$  es falso; el Modus Ponens generalizado es:

Si x es A entonces y es B	
y	y es B`
-----	
consecuencia	x es A`;

cuando  $B = \neg B$  y  $A' = \neg A$ , está cercanamente relacionado al dato-meta de inferencia previo; esta relación es comúnmente usada en sistemas expertos.

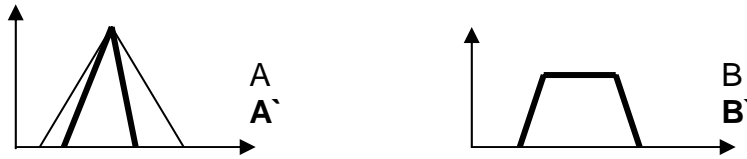
Resumiendo:

- 1) Si x es A entonces y es B; con  $x \text{ es } A \rightarrow y \text{ es } B$ . [Propiedad básica]
- 2) Si x es A entonces y es B; con  $x \text{ es } A' \rightarrow$  no se sabe. [Independencia total]
- 3) Si x es A entonces y es B; con  $y \text{ es } B' \rightarrow x \text{ es } A$ . [Propiedad derivada]

Otros casos interesantes están dados por:

Si x es A entonces y es B	<b>[Propiedad subconjunto]</b>
y x es $A' \subset A$	
-----	
y es B; ya que $A' \subset A \rightarrow A$ en algún grado.	

Por ejemplo: Si x es grande entonces presión es baja  
 y x es muy grande  
 -----  
 presión es baja



**Fig.#25: Representación de la relación de implicación con subconjunto.**

Si  $x$  es  $A$  entonces  $y$  es  $B$  [Propiedad superconjunto]  
 $y$  es  $A'$

-----  
 $y$  es  $B' \supset B$ ; ya que  $B' \supset B \rightarrow B' = B$

Por ejemplo: Si  $x$  es grande entonces presión es baja  
 $y$  es menos grande

-----  
 presión es a lo menos baja



**Fig.#26: Representación de la relación de implicación con superconjunto.**

Para el caso particular: Si  $x$  es  $A$  entonces  $y$  es  $B$ , con  $x$  es  $A' \rightarrow$  no se sabe; el GMP (Modus Ponens Generalizado) con la implicación de Mamdani con consecuencia  $\Rightarrow$   $y$  es  $B'$ , llega a satisfacer la propiedad básica; es decir: Si  $x$  es  $A$  entonces  $y$  es  $B$ , con  $x$  es  $A \Rightarrow y$  es  $B$ .

Las variables lingüísticas abren una posibilidad distinta de medir el rendimiento laboral, foco de atención de esta tesis, aún cuando no permiten cuantificar el sistema de interés, sí es posible obtener una mensurabilidad bastante interesante de explorar.

## **2.6. Operadores Promedio:**

La teoría de conjuntos difuso dispone de conectivos de agregación para integrar la pertenencia de valores que representan cierta información, estos conectivos son categorizados en las clases: Unión, Intersección y Compensación.

- La Unión; produce gran salida siempre que cualesquiera de los valores de entrada representen niveles de satisfacción altos de cierta característica.
- La Intersección; produce una salida alta sólo cuando todas las entradas tienen valores altos.
- La Compensación; permite que un alto grado de satisfacción de una de las características de entrada pueda compensar un menor grado de satisfacción de otra característica, hasta cierto punto.

En esencia, el conectivo unión provee toda la compensación y el conectivo intersección no provee compensación.

Los operadores promedio no realizan una negociación entre objetivos, para permitir una compensación positiva entre clasificaciones.

Un operador promedio  $M$  es tal que  $\forall x \in [0,1]$  la función  $M: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , que satisface las siguientes propiedades:

- Idempotencia:  $M(x,x) = x, \forall x \in [0,1]$
- Conmutatividad:  $M(x,y) = M(y,x), \forall x, y \in [0,1]$
- Condiciones extremas:  $M(0,0) = 0, M(1,1) = 1$
- Monotonicidad:  $M(x,y) \leq M(x', y')$  si  $x \leq x'$  e  $y \leq y'$



- M es continua.

Los operadores promedio representan una amplia gama de operadores de agregación.

Lemas asociados:

- Si M es un operador promedio, entonces:

$$\text{Min}\{x,y\} \leq M(x,y) \leq \text{Max}\{x,y\}, \forall x, y \in [0,1]$$

- Un operador promedio que incrementa estrictamente no puede ser asociativo.
- Sólo la asociatividad del operador promedio está definida por:

$$M(x, y, \alpha) = \text{Med}(x, y, \alpha) = \begin{cases} y & \text{si } x \leq y \leq \alpha \\ \alpha & \text{si } x \leq \alpha \leq y \\ x & \text{si } \alpha \leq x \leq y \end{cases}$$

donde  $\alpha \in (0,1)$

- Se admite la media cuasi-aritmética de operadores promedio:

$$M(a_1, \dots, a_n) = f^{-1} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) \right]$$

Por ejemplo: la media cuasi-aritmética de  $a_1$  y  $a_2$  es:

$$M(a_1, a_2) = f^{-1} \left[ \frac{f(a_1) + f(a_2)}{2} \right]$$

- Los operadores media más frecuentemente usados son:
  - Media armónica  $M(x,y) = 2xy/(x+y)$
  - Media geométrica  $M(x,y) = \sqrt{xy}$
  - Media aritmética  $M(x,y) = (x+y)/2$
  - Dual de media geométrica  $M(x,y) = 1 - \sqrt{[(1-x)(1-y)]}$
  - Dual de media armónica  $M(x,y) = (x+y-2xy) / (2-x-y)$

- Mediana  $M(x,y) = \text{Med}(x, y, \alpha)$ ,  $\alpha \in (0,1)$
- p-media generalizada  $M(x,y) = ((x^p + y^p) / 2)^{1/p}$ ,  $p \geq 1$

El proceso de agregar información aparece en muchas aplicaciones relacionadas al desarrollo de sistemas inteligentes.

## 2.7. Operadores OWA:

Yager [69], introdujo una nueva técnica de agregación basada en los operadores promedio ordenados por peso (OWA) [ordered weighted averaging].

Un operador OWA de dimensión  $n$  es un aplicación  $F : R^n \rightarrow R$ , que tiene asociado un vector de pesos  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  tal que  $w_i \in [0,1]$ ,  $1 \leq i \leq n$ ; con:

$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$ , además,

$$F(a_1, \dots, a_n) = w_1 b_1 + w_n b_n = \sum_{j=1}^n w_j b_j,$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo elemento de la secuencia  $(a_1, \dots, a_n)$ .

Por ejemplo: sea  $W = (0.2, 0.3, 0.1, 0.4)$ , entonces:

$$F(0.4, 0.8, 1, 0.6) = 0.2 \cdot 1 + 0.3 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.6 + 0.4 \cdot 0.4 = 0.66$$

Consideraciones:

- Existe un paso de re-ordenamiento.
- Un  $a_i$  agregado no está asociado con un peso  $w_i$  particular, pero un peso está asociado con una posición particular ordenada de agregado.

- Al ver los pesos OWA como un vector columna parece conveniente referir los pesos con los índices bajos para los pesos altos y los con índices altos para los pesos bajos ( $w_1$  con el  $a$  más alto y  $w_n$  con el  $a$  más bajo).

- Se pueden notar diversos operadores OWA por su función peso.
- En 1988 Yager [69] puntualizó casos especiales de agregación OWA:

$$1.- F : \text{ en este caso } W = W^* = (1.0, \dots, 0.0) \text{ y } F^*(a_1, \dots, a_n) = \text{Max}\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$2.- F : \text{ en este caso } W = W^T = (0.0, \dots, 1.0) \text{ y } F^T(a_1, \dots, a_n) = \text{Min}\{a_1, \dots, a_n\}$$

$$3.- F_A : \text{ en este caso } W = W_A^T = (1/n, \dots, 1/n) \text{ y } F_A^T(a_1, \dots, a_n) = (a_1 + \dots + a_n)/n$$

Existen varias propiedades importantes asociables con operadores OWA; para cualesquier operador OWA  $F$  tenemos:

$$F^*(a_1, \dots, a_n) \leq F(a_1, \dots, a_n) \leq F^T(a_1, \dots, a_n), \text{ luego:}$$

$$\text{Min}\{a_1, \dots, a_n\} \leq F(a_1, \dots, a_n) \leq \text{Max}\{a_1, \dots, a_n\}$$

Sea  $(a_1, \dots, a_n)$  un conjunto de agregados y sea  $\{d_1, \dots, d_n\}$  cualesquier permutación de  $a_i$ , entonces para cualesquier operador OWA:

$$F(a_1, \dots, a_n) = F(d_1, \dots, d_n) \quad [\text{por conmutatividad}]$$

Sean  $a_i$  y  $c_i$  colecciones de agregados,  $i=1, \dots, n$  tal que para cada  $i$  se tiene  $a_i \geq c_i$ , entonces:  $F(a_1, \dots, a_n) \geq F(c_1, \dots, c_n)$  [por monotonía], donde  $F$  es algún peso fijo de operador OWA. Si  $a_i = a \forall i$ , entonces  $F(a_1, \dots, a_n) = a$

Se puede ver que los operadores OWA tienen las propiedades básicas asociadas con un operador promedio.

Por ejemplo: Un operador OWA tipo ventana toma el promedio de los  $m$  argumentos alrededor del centro, para esta clase de operadores se tiene:

$$W_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k \\ 1/m & \text{si } k \leq i \leq k+m \\ 0 & \text{si } i \geq k+m \end{cases}$$

Para localizaciones entre AND y OR, una medida tipo ORNESS, asociada con cualesquier vector  $W$ , es introducida por Yager [68] como:

$$\text{ORNESS}(w) = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^n (n-i) w_i$$

$$\text{Orness}(W) = 1; \text{ Orness}(W^c) = 0; \text{ Orness}(W_A) = 0.5$$

## **2.8. Operador LOWA:**

Dentro de las aplicaciones de los operadores OWA, encontramos las propuestas ilustradas por: Delgado, Herrera, Herrera-Viedma, Martínez [15], lo que se complementa a lo señalado por: Delgado, Herrera, Herrera-Viedma, Verdegay, Vila [16], junto con lo ilustrado por: Herrera, López, Mendaña, Rodríguez [35], lo que sumado a lo expuesto por: Herrera, Herrera-Viedma, Verdegay [33] y lo ilustrado por: Herrera, Herrera-Viedma [34] y teniendo todos como base lo postulado por Yager [69]; en los cuales se describe al operador, basados en OWA, denominado LOWA, su orientación está centrada en reconocer la existencia de información lingüística cuyos factores vinculantes tienen igual importancia relativa.

Es conveniente tener presente que en la información lingüística (representación de aspectos cualitativos como valores lingüísticos) existen 2 conceptos involucrados: por una parte está la denominada “etiqueta”, que representa el valor sintáctico (palabra o membresía) de una variable o factor involucrado; por otra parte encontramos la componente denominada “significado”,

que representa el valor semántico (número difuso de un universo de discusión) de una variable.

El trabajo con aproximaciones lingüísticas recurre al “Principio de Extensión”, permitiendo agregar y comparar etiquetas a través de procesos computacionales sobre funciones de pertenencia asociadas, manipulando los significados y sus propiedades independientemente de su representación semántica.

Para el empleo de LOWA se parte de  $S = \{s_i\}$ ,  $i \in H = \{0, \dots, T\}$ , un conjunto finito de etiquetas, tal que:

- 1.- Conjunto ordenado:  $s_i \geq s_j$  si  $i \geq j$
- 2.- Existe un operador de negación:  $\text{Neg}(s_i) = s_j$  tal que  $j = T - i$
- 3.- Existe un operador de maximización:  $\text{Max}(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \geq s_j$
- 4.- Existe un operador de minimización:  $\text{Min}(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \leq s_j$

Se sugiere la utilización del operador LOWA en sistemas multivariados con información lingüística de igual importancia, lo que en la práctica significa que no hay evidencia para suponer que las diversas variables involucradas en el sistema tengan una mayor o menor incidencia en la descripción o conducta que se intenta modelar.

El operador LOWA está basado en el operador OWA (definido por Yager [69]) y en la Combinación Convexa de etiquetas lingüísticas (definida por Delgado, Verdegay y Vila [17]), lo que corresponde a:

Sea  $A=\{a_1,\dots,a_m\}$  el conjunto de etiquetas ha ser agregadas, para nuestros propósitos, en el contexto de un sistema multivariable, A es el conjunto de grados de pertenencia  $\mu_i$  de las variables en estudio, el operador LOWA " $\phi$ " está definido por:

$$\begin{aligned}\phi(a_1,\dots,a_m) &= W * B^T = C^m\{w_k, b_k; k=1,\dots,m\} = \\ &= w_1 \square b_1 \oplus (1-w_1) \square C^{m-1}\{\beta_h, b_h; h=2,\dots,m\}\end{aligned}$$

donde:

$W=[w_1,\dots,w_m]$  es un vector de pesos, tal que  $w_i \in [0,1]$  y  $\sum_i w_i=1$

$$\beta_h = w_h / \sum_{k=2}^m w_k; \quad h=2,\dots,m; \quad B=\{b_1,\dots,b_m\}$$

es un vector asociado a A, tal que:

$$B=\sigma(A)=\{a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)}\}; \text{ sujeto a } a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)} \quad \forall i \leq j,$$

con  $\sigma$  comenzando una permutación (ordenamiento por algún criterio preestablecido) sobre el conjunto de etiquetas A (orden descendente).

$C^m$  es el operador de combinación convexa de las m etiquetas, si  $m=2$  entonces se tiene:  $C^2\{w_i, b_i; i=1,2\} = w_1 \square s_j \oplus (1-w_1) \square s_i = s_k, \quad s_j, s_i \in S; \text{ con } (j \geq i); \text{ pero:}$

$$k = \text{Min}\{T, i + \text{round}(w_1 * (j-i))\}; \quad b_1 = s_j, \quad b_2 = s_i$$

Cuando  $w_j=1$  y  $w_i=0$  con  $i \neq j \quad \forall i$ , la combinación convexa está definida como:  $C^m\{w_i, b_i; i=1,\dots,m\} = b_j$ ; esto significa que como todo el peso está en  $b_j$ , el valor de  $b_i$  se desprecia.

Al analizar la determinación de  $\phi$  nos encontramos con que el conjunto A contiene todos los grados de pertenencia  $\mu_i$  (asociados a las etiquetas establecidas) de cada uno de los valores de las variables en consideración dentro del sistema, siendo B un conjunto igual al conjunto A, ordenado descendientemente, por lo tanto  $b_i = \mu_i$ ; por otra parte, el valor de  $\beta_h$  representa la proporción que “pesa” o “representa”  $w_i$  con respecto a todos los  $w_j$  restantes del conjunto W; también es conveniente resaltar que, para los efectos operacionales, tanto los valores de A o B, deben estar ordenados descendientemente (permutación o  $\sigma$ ).

Con respecto al operador de combinación convexa, se advierte que está referido a la importancia o aporte de  $b_i$  sumado con lo que no aporta  $b_i$ , como importancia de  $b_{i+1}$ .

Es oportuno señalar que la “importancia o aporte” se refiere al “valor más representativo” o la resultante de un proceso de agregación, en cualquiera de sus fases; en estricto sentido, este valor más representativo o agregado está genéricamente dado por:

$(\mu_i w_i + \mu_j w_j + \mu_m w_m)$ ; donde el sistema multivariable integra a los factores: i, j y m.

Para establecer los valores del vector W, Yager [68] y [69] propuso utilizar un “cuantificador lingüístico” denominado “Q”, dado por la siguiente expresión:

$$w_i = Q(i/n) - Q((i-1)/n); i=1, \dots, n ;$$

mientras que la función de pertenencia Q corresponde a:

$$Q(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < a \\ (r-a)/(b-a) & \text{si } a \leq r \leq b \\ 1 & \text{si } r > b \end{cases} \quad \text{con } a, b, r \in [0,1].$$

Nota: Los valores de  $a$ ,  $b$  y  $n$  serán dados de acuerdo a la problemática en la cual se quiere utilizar  $W$ .

Los casos más representativos para  $a$  y  $b$  son:

Mucho	(0.3, 0.8)
Menos de medio	(0.0, 0.5)
Muy posible	(0.5, 1.0)

Al utilizar el cuantificador lingüístico  $Q$  en el operador de agregación LOWA, se debe denotar por  $\phi_Q$ .

Por ejemplo:

Sea un conjunto de etiquetas caracterizado de la siguiente forma:

$$S = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$$

Donde:

$S_0 \rightarrow$ Nulo	= N = {0.0, 0.0, 0.0, 0.25}
$S_1 \rightarrow$ Bajo	= B = {0.25, 0.25, 0.125, 0.125}
$S_2 \rightarrow$ Regular	= R = {0.375, 0.375, 0.125, 0.25}
$S_3 \rightarrow$ Alto	= A = {0.625, 0.625, 0.25, 0.125}
$S_4 \rightarrow$ Muy Alto	= M = {0.75, 0.75, 0.125, 0.125}
$S_5 \rightarrow$ Perfecto	= P = {1.0, 1.0, 0.125, 0.0}



A un individuo se le han medido 3 atributos, dando origen al conjunto de etiquetas ha ser agregadas  $A = \{M, B, R\}$ .

De Yager [69] y Delgado M., Herrera F., Herrera-Viedma E., Verdegay J.L., Vila M.A. [16]; para  $n = 3$ , surge el siguiente vector  $W$ :

$W = \{0.06, 0.66, 0.28\}$ , usando el caso “muchos” (0.3, 0.8)  
ya que:

$$w_1 = Q(1/3) - Q((1-1)/3) = Q(0.33) - Q(0) = 0.06 - 0.0 = 0.06$$

$$w_2 = Q(2/3) - Q((2-1)/3) = Q(0.66) - Q(0.33) = 0.72 - 0.06 = 0.66$$

$$w_3 = Q(3/3) - Q((3-1)/3) = Q(1) - Q(0.66) = 1.0 - 0.72 = 0.28$$

Luego debemos determinar:

$$\emptyset_Q(M, B, R) \text{ con } W = \{0.06, 0.66, 0.28\}$$

Recordemos que:

M corresponde a  $s_4$  y representa  $i = 2$

B corresponde a  $s_1$  y representa  $i = 0$

R corresponde a  $s_2$  y representa  $i = 1$

Luego:

$$= C^3\{(0.06, M), (0.66, R), (0.28, B)\};$$

por lo tanto:  $\beta_2 = w_2 / 0.66 + 0.28 = 0.66 / 0.94 = 0.70$

$$\beta_3 = w_3 / 0.66 + 0.28 = 0.28 / 0.94 = 0.30$$

luego la expresión queda así:

$$(0.06, M) \oplus C^2\{(0.70, R), (0.30, B)\}$$

$$k = \text{Min}\{T, i + \text{round}(w_1(j-i))\}$$

$$= \text{Min}\{2, 0 + \text{round}(0.70(1-0))\} = 1 \rightarrow R(s_2)$$

luego para  $C^3$  se tiene:

$$(0.06, M) \oplus C^2\{(0.70, R), (0.30, B)\}$$

$$k = \text{Min}\{2, 1 + \text{round}(0.06(2-1))\} = 1 \rightarrow R(s_2)$$

Como el proceso ha finalizado, al llegar en la última iteración a la expresión con todos los factores (forma original), el valor resultante señala que posición, de las etiquetas ha ser agregadas, representa la salida del proceso, en este caso corresponde a “1” y por lo tanto la etiqueta de esa posición es la salida, es decir “R”; en estas condiciones podemos decir que el individuo “es regular” para los propósitos de estudio.

## **2.9. La Integral de Sugeno Como Un Operador de Agregación:**

Dubois, Marichal, Prade, Roubens y Sabbadin [20], señalan que: “la Integral de Sugeno está orientada hacia las decisiones cualitativas bajo incertidumbre en un ajuste finito; corresponde a un punto medio o representativo, es la contraparte cualitativa a la operación que hace un promedio subyacente asociado a la utilidad; también mencionan que ésta se mide con respecto a preferencias entre hechos o utilidades cualitativas pesimistas y optimistas, basadas en las medidas de la necesidad y de la posibilidad”.

Una medida difusa sobre un referencial  $U$  es una función  $v$  de partes de  $U$  en  $[0,1]$  que satisface las siguientes condiciones:

- $v(\emptyset) = 0, v(U) = 1$
- Para cualesquier  $S, T \subseteq U$ , si  $S \subseteq T$  entonces  $v(S) \leq v(T)$   
[monotonicidad]

El rango de la función  $v$  es arbitrariamente elegido como un intervalo unitario, pudiendo ser una relación lineal ordenada.

Notaremos  $\mathcal{F}_U$  al conjunto de todas las medidas difusas sobre  $U$ .

La Integral de Sugeno de una función  $X : N \rightarrow [0,1]$  con respecto a  $v \in \mathbf{FN}$ , siendo  $N$  un conjunto finito de elementos, está definida por:

$$Sv(x) := \text{Max} \{ \min [ x_{(i)} , v(A_{(i)}) ] \mid i \}, \text{ donde:}$$

$x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  es una permutación ordenada sobre  $N$

$$A_{(i)} := \{(i), \dots, (n)\}$$

Por otra parte, la Integral discreta de Sugeno es vista como una función de agregación desde:  $[0,1]^n$  hasta  $[0,1]$ .

Por ejemplo: si  $x_3 \leq x_1 \leq x_2$ , entonces:

$$Sv(x_1, x_2, x_3) = [x_3 \wedge v(3, 1, 2)] \vee [x_1 \wedge v(1, 2)] \vee [x_2 \wedge v(2)]$$

Se deduce que:

$$Sv(x) \in \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{v(s) \mid s \subseteq N\}, x \in [0,1]^n$$

Si denotamos por “es” el vector característico de  $S \subseteq N$  en  $\{0,1\}^n$ , tenemos:  $Sv(es) = v(s)$ ; esto muestra que la integral de Sugeno está completamente determinada por estos valores a los vértices del cubo  $[0,1]^n$ , también puede adoptar otra forma, sin necesidad de reordenar las variables:

$$Sv(x) = \text{Max}_{T \subseteq N} \{ \min [ v(T) , (\min_{i \in T} x_{(i)}) ] \}, x \in [0,1]^n$$

Por la propiedad distributiva, dado que  $v$  es disyuntiva, la Integral de Sugeno puede tomar la forma conjuntiva:

$$Sv(x) = \text{Min}_i \{ \max [ x_{(i)} , v(A_{(i+1)}) ] \}, x \in [0,1]^n$$

$$Sv(x) = \text{Min}_{T \subseteq N} \{ \max [ v(N \setminus T), (\max_{i \in T} x_{(i)}) ], x \in [0,1] \}$$

Luego podemos ver la Integral de Sugeno como una clase de mediana con ponderación, es decir:

$$Sv(x) = \text{Mediana}[x_1, \dots, x_n, v(A_{(2)}), v(A_{(3)}), \dots, v(A_{(n)})], x \in [0,1]^n$$

Si  $x_3 \leq x_1 \leq x_2$ :

$$Sv(x_1, x_2, x_3) = \text{Mediana} [x_1, x_2, x_3, v(1, 2), v(2) ]$$

Sea  $N = 6$ , pero con  $X$  de la forma:

$$X = \{(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2), (x_3, \mu_3), (x_4, \mu_4), (x_5, \mu_5), (x_6, \mu_6)\}$$

Supongamos que existe:

$$\mu_1=0.5; \mu_2=0.3; \mu_3=0.7; \mu_4=0.45; \mu_5=0.9; \mu_6=0.8$$

$$A = \{(x_1, \mu_1), (x_3, \mu_3), (x_5, \mu_5), (x_6, \mu_6)\}, \text{ con } x_5 \leq x_6 \leq x_1 \leq x_3;$$

$$Sv(x) = Sv(x_1, x_3, x_5, x_6) = [x_5 \wedge v(5, 6, 1, 3)] \vee [x_6 \wedge v(6, 1, 3)] \vee [x_1 \wedge v(1, 3)] \vee [x_3 \wedge v(3)],$$

luego se deben calcular los factores:  $v(5, 6, 1, 3)$ ,  $v(6, 1, 3)$ ,  $v(1, 3)$ ,  $v(3)$ , para calcular finalmente la integral respectiva.

Modave y Kreinovich [47], plantean que: “en la teoría de decisiones la representación de preferencias es el telón de fondo de un contexto de incertidumbre”.

Si se definen:  $S$  como conjunto de estados y  $X$  como conjunto de consecuencias, entonces las preferencias sobre  $X$  se trasladan a una relación de preferencia  $\{ \}$  sobre las acciones.

Se puede utilizar la función:

$\mu: X \rightarrow \mathbb{R}$  / si  $f$  y  $g$  son 2 acciones, entonces se tiene:

$$f \succsim g \iff \int_S \mu(f(s)) d\mu(s) \geq \int_S \mu(g(s)) d\mu(s)$$

donde:  $S, X, \succsim$  son hipótesis; existe una única probabilidad  $\mu$  sobre  $S$ .

Al introducir la integral difusa y la teoría de decisión, nos encontramos con la Integral de Sugeno. Sea:  $\Omega$  un conjunto finito  $\mathcal{P}(\Omega)$  una clase de subconjunto de  $\Omega$ .

Una agrupación o clase no aditiva sobre  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  es una función conjunto  $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$  tal que:

1)  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1$

2) Si  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \subset B$ , entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$ ;  $\mu$  es una

función conjunto no decreciente.

Luego la Integral de Sugeno se ve como la agregación difusa que contiene la sumatoria de probabilidades:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^n (f(w_{(i)}) - f(w_{(i-1)})) \mu(A_{(i)})$$

Se deben permutar los índices para conseguir que:  $f(w_{(1)}) \leq \dots \leq f(w_{(n)})$ ,  $A_{(i)} = \{w_{(0)}, \dots, w_{(i)}\}$ , con  $f(w_{(0)}) = 0$  por convención.

NOTAS:

- En la búsqueda de operadores de agregación, los pesos relativos deben sumar en su totalidad 1.
- Un operador de agregación puede ser escrito como una integral Choquet; es decir, existen agrupaciones difusa  $\mu$  sobre el conjunto de criterio  $I = \{1, \dots, n\}$  tal que:

$$H(\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)) = \sum_i [(\mu_{(i)}(x_{(i)}) - (\mu_{(i-1)}(x_{(i-1)}))] \mu A_i = \sum_i \alpha_{(i)} \mu_{(i)}(x_{(i)})$$

Este modelo es extensible desde diferentes puntos de vista atendiendo a criterio de formulación y aplicación diversos.

Marichal [39], muestra que cualesquier Integral de Sugeno donde  $X = \{1, \dots, m\}$ , es una función M de máximos y mínimos con pesos, de la forma:

$$M(x_1, \dots, x_m) = \text{Max}_{T \subseteq X} \{ \min [a_T, (\min_{i \in T} x_i)] \}, a_T \in [0, 1]$$

para cada a que sea función conjunto con  $a_0 = 0$  y  $\max_{T \subseteq X} a_T = 1$

De la misma forma se puede escribir:

$$M(x_1, \dots, x_m) = \text{Min}_{T \subseteq X} \{ \max [b_T, (\max_{i \in T} x_i)] \}, b_T \in [0, 1]$$

para cualquier b que sea una función conjunto que satisface  $b_0 = 1$  y  $\max_{T \subseteq X} b_T = 0$

Además :  $b = b_{(a)}$  ;  $a = a_{(b)}$  son consideradas asignaciones correctas.

$$\begin{aligned} \text{Por ejemplo: } & (0.1 \wedge x_1) \vee (0.3 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \\ & = (0.1 \vee x_2) \wedge (0.3 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2). \end{aligned}$$

También señala Marichal [39] que serían integrales de Sugeno los siguientes casos:

- Funciones booleanas de max – min.
- Funciones de pesos maximum y minimum.
- Funciones de pesos ordenados maximum y minimum.
- Funciones parciales de maximum y minimum.
- Estadísticas de orden.
- Medianas asociativas.

Luego se establece que:

$$\int_{\mu}^{(m)} (x_1, \dots, x_m) := \text{Max}_{i=1}^m \{ \min[x_{(i)}, \mu_{\{(i), \dots, (m)\}}] \}$$

Por ejemplo: si  $x_3 \leq x_1 \leq x_2$  entonces:

$$\int_{\mu}^{(3)} (x_1, x_2, x_3) = (x_3 \wedge \mu_{\{3, 1, 2\}}) \vee (x_1 \wedge \mu_{\{1, 2\}}) \vee (x_2 \wedge \mu_{\{2\}})$$

$\mu$ ; está referido a un mismo atributo.

$X$ ; es el conjunto de todos los individuos que presentan  $\mu$ .

Marques y Almeida [41], investigan formas en que los pesos dependan del grado de satisfacción de varios atributos, con el propósito de aminorar las “homogeneizaciones” forzadas; es decir, por ejemplo un peso alto que sobre valora un atributo con baja presencia en una muestra.

También se destacan las formas esencialmente usadas:

- Operador de pesos promedio (WA); donde los pesos reflejan a priori la importancia de varios atributos, es decir, la satisfacción del atributo  $x_i$  tiene un peso fijo  $w_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .
- Operador de pesos promedio ordenados (OWA); donde los pesos reflejan a priori la importancia de varios órdenes estadísticos de los valores de satisfacción del atributo, es decir, el  $i$ -ésimo valor de satisfacción del atributo, denotado por  $x_{(i)}$ , tiene un peso fijo  $w_i$ ,  $\forall i=1, \dots, n$ .
- La integral de Choquet contiene los operadores WA y OWA.

Yager [68], ilustra avances en la búsqueda de operadores de agregación más eficientes, destacando:

- Se postula un operador OWA inducido (IOWA), reflejando la importancia o rol central que juega en la operación, el ordenamiento de los argumentos ha procesar.

- Si 2 pares son atados (ligados) con respecto a sus variables de orden inducido para la  $j$ -ésima posición, se asignan a  $b_j$  y  $b_{j+1}$  el mismo valor, el promedio de los valores del argumento para los 2 pares atados; es decir, si los pares  $q$  están atados con respecto a sus órdenes de variable inducida para la  $j$ -ésima posición, se hace  $b_j = b_{j+1} = b_{j+q-1}$  y se les asigna el promedio de los argumentos para los  $q$  pares atados.

## **2.10. Conclusión:**

La lógica difusa permite representar adecuadamente parámetros que forman parte de un fenómeno en estudio, cuyos valores no son fijos ni del todo certeros, esta representación se ajusta a la conducta de las variables involucradas en el rendimiento laboral, tema central de esta tesis.

De la misma forma, la lógica difusa dispone de propiedades tales que permiten relacionar variables inciertas, para dar origen a conjuntos que caracterizan ciertas conductas o requisitos copulativos para propósitos específicos (subconjuntos difusos).

El poder relacionar variables difusas e incluso subconjuntos difusos, hace posible obtener conocimiento adicional válido, a partir de los datos básicos disponibles, abriendo caminos hacia el “razonamiento”; las conclusiones (conocimiento nuevo) también admiten un cierto grado de incertidumbre, lo cual se aproxima bastante a la realidad vinculada con fenómenos de magnitudes inciertas, muy propios de conductas humanas, ello admite un margen de “flexibilidad” a cualesquier inferencia que se ponga a disposición del mundo laboral; por lo tanto, se genera un acercamiento entre las llamadas ciencias duras y las ciencias blandas, permitiendo abordar en forma conjunta proyectos de interés mutuo.



Es prácticamente directo el hecho de que el fenómeno del rendimiento laboral debe ser abordado usando la lógica difusa y sus propiedades.

Dada la naturaleza de los atributos vinculados a cada una de las macro variables en estudio, en torno al rendimiento laboral, la fuzzificación podría estar dirigida hacia cada uno de los factores elementales asociados a tales macro variables, aún cuando se abre la brecha de abordar la fuzzificación hacia parámetros tipo para cada individuo, los resultados serían probablemente distintos.

En la búsqueda de caminos que nos llevaran hacia la cuantificación del rendimiento laboral, nos encontramos con diversas opciones para obtener conocimiento nuevo, como es el caso de: las propiedades básicas de los conjuntos difusos, que nos permiten relacionar varios subconjuntos difusos para obtener algunas conclusiones iniciales, como el reconocer la existencia de características convergentes; el razonamiento, tanto aproximado como de predicados vagos, que nos permite establecer relaciones de implicación a través de afirmaciones simples, compuestas y/o condicionales; las variables lingüísticas, que nos proveen relaciones entre subconjuntos difuso cuyos valores tienen la forma discreta; en todos estos casos se abren diversos caminos de análisis, pero ninguno nos lleva directamente hacia la cuantificación que andamos buscando.

Otras propiedades y funciones de la lógica difusa nos proveen herramientas más directas hacia lo que requerimos, como es el caso de: los Conectivos Lógicos, que nos permiten advertir el verdadero potencial de los conjuntos intersección y unión, claves a la hora de encontrar potenciales relaciones entre grupos de atributos comunes con respecto a algún rol concreto; Los Operadores Promedio, que nos llevan más directamente hacia la cuantificación de índices, aún cuando nos crea la necesidad de establecer porcentajes de importancia relativa de los diversos atributos involucrados en una cierta caracterización de algún

subconjunto difuso de interés; El Operador OWA, que nos proveen un camino cierto para ponderar los diversos factores asociados a un subconjuntos concreto, cuantificando el conocimiento nuevo generado; El Operador LOWA, que hace posible calificar a un individuo a partir de sus atributos, también cualitativos, permitiendo agregar información a la ya disponible; La Integral de Sugeno, que nos permite establecer la distancia entre grupos de probabilidades, muy útil en las decisiones bajo incertidumbre.

## **CAPITULO 3**

### **MODELAMIENTO DE LAS CUALIDADES POR MEDIO DE SUBCONJUNTOS DIFUSOS.**

#### **3.1. Introducción:**

El fenómeno que nos interesa involucra variables que contienen atributos elementales cuyos valores tienen un grado de pertenencia, ya que cada atributo exhibe un cierto grado de cercanía, ello hace imprescindible que la representación de tales atributos acoja esta imprecisión, lo cual es posible a través de datos difusos.

Una vez definidas las variables en términos difuso, será necesario encontrar una forma de expresar el que habrá cierta agrupación de atributos que da origen a determinadas clasificaciones, cada nueva clasificación corresponderá a 1 subconjunto difuso específico que se asocia con cierto(s) rendimiento(s) y cierto(s) rol(es).

A través del siguiente análisis deberá quedar clarificada la forma como se fusificarán las variables y los correspondientes atributos elementales; de igual manera, deberán identificarse posibles caminos que permitan obtener conocimiento nuevo a partir de los datos inicialmente disponibles, en este sentido, la lógica difusa provee diversas herramientas que hacen posible inducir dicho nuevo conocimiento.

El conocimiento nuevo que estamos buscando debe tener la característica de agregar información, más que de establecer si ante un individuo nuevo este debería ser asimilado a algún subconjunto ya establecido.

### 3.2. Fuzzificación de Variables:

A través del análisis de las características de los datos que conforman el fenómeno en estudio para la tesis que nos preocupa, quedó en evidencia que la mejor forma de representarlos es a través de datos difuso, dado que existe cierta incertidumbre a la hora de establecer cual es el valor real que cada atributo toma en un individuo concreto.

Los individuos de interés exhiben atributos con ciertos valores, pero estos valores tienen una determinada cercanía o grado de pertenencia, no necesariamente cada atributo está o no presente, por lo tanto nuestros datos los denotaremos por:

$$(individuo_i, \text{grado-pertenencia}_{i \text{ atributo } j})$$

Esta representación señala que el individuo  $i$  de la muestra, presenta el atributo  $j$  con un grado de pertenencia o cercanía, sujeto a cierta incertidumbre; luego, al momento de adoptar esta notación también adoptamos la aplicabilidad de las propiedades y principios que la lógica difusa provee.

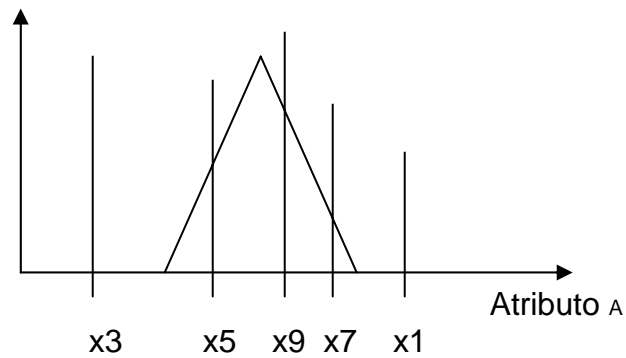
Nos referiremos genéricamente a nuestros datos a través de variables; estas variables pertenecen a un conjunto comúnmente denominado “referencial”, lo cual se representa por:

$$\text{Sea } A = \{ (x, \mu_A(x)); x \in X \}; \mu_A = \alpha \text{ con } \alpha \rightarrow [0,1]$$

donde  $X$  es el conjunto referencial y  $x$  representa un elemento cualesquiera de  $X$ ; cada dato concreto se representa por:  $(x, \mu_A(x))$ , donde  $\mu$  representa el grado

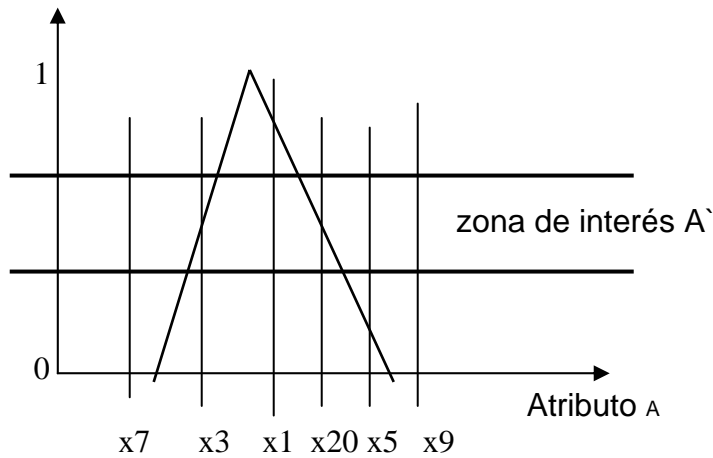
de cercanía o pertenencia del atributo  $A$ , presente en el elemento  $x$ ; cuyo valor  $\alpha$  fluctúa entre 0 y 1.

Por lo tanto, genéricamente,  $A$  es el conjunto de todos los  $x \in X$ , cuyos grados de pertenencia están comprendidos entre 0 y 1. En estricto sentido  $A$  es un conjunto difuso:



**Fig.#27: Representación gráfica del conjunto difuso  $A$ .**

En determinados estudios puede ser muy útil identificar los elementos de  $A$  cuyo grado de pertenencia esté ubicado en un rango más pequeño del convencional  $[0,1]$ , ello genera un subconjunto de  $A$  y como  $A$  es un conjunto difuso, el subconjunto de  $A$  resultante ( $A'$ ) se tipifica como subconjunto difuso de  $A$ . Gráficamente:



**Fig.#28: Representación gráfica del conjunto difuso A y el subconjunto difuso A`.**

Luego:  $X = \{x1, x3, x5, x7, x9, x20\}$

$A = \{x1, x3, x5, x20\}$

$A' = \{x3, x20\}$

Dentro del contexto de variables difusas, a nuestros datos le podemos aplicar todas las propiedades que hasta ahora hemos detectado, aún cuando pocas de ellas nos llevan o nos acercan hacia nuestro objetivo; seguimos buscando dentro de la lógica difusa otras sendas posibles para diseñar los modelos que nos interesan.

Debido a la naturaleza vaga del valor de los diversos atributos que caracterizan a un individuo, acogeremos lo planteado en Trillas, Delgado, Vila, Castro, Verdegay, Moraga, Cuenca, Gutierrez, Ruiz [62], de manera de difusificar los componentes del modelo (M1).

Sean los conjuntos: C: Competencias.

H: Habilidades.

N: Necesidades.

Y supongamos que para un rol determinado se requiere

$$C = \{ b, t, co, i, o \}$$

$$H = \{ 1, 2, 3, \dots, 33, 34 \}$$

$$N = \{ e, a, p, r, x, y, mg, me, mi, mex, mc, ml \}$$

Dado que cada individuo exhibe valores de:  $C(b)$ ,  $C(t)$ , ...,  $C(o)$ , y considerando que el valor de  $C(b)$  presenta cierta incertidumbre, al igual que  $C(t)$  y  $C(o)$ , su magnitud resulta vaga o borrosa; luego se hace necesario crear un subconjunto difuso para  $C(b)$ , otro para  $C(t)$  y así sucesivamente otro para  $C(o)$ .

Sea  $X$  el conjunto de todos los individuos en estudio, y sea  $CB$  el subconjunto difuso de todos los individuos de  $X$  que cumplen  $C(b)$ , con algún grado de pertenencia. Se puede entonces formular:

$$\text{Existe la función } \mu_{CB}: X \rightarrow [0, 1]$$

$$\text{Luego: } CB = \{(x_i, \alpha_i), \forall x_i \in X, \alpha_i \in [0, 1]\}$$

De igual forma se puede expresar  $CT$  como el subconjunto difuso de todos los  $X$  que cumplen  $C(t)$  con algún grado de pertenencia, como:

$$CT = \{(x_i, \alpha_i), \forall x_i \in X, \alpha_i \in [0, 1]\}$$

Lo mismo se puede expresar para:  $CCO$  que cumplen  $C(co)$ ,  $CI$  que cumplen  $C(i)$ ,  $CO$  que cumplen  $C(o)$ ; de la misma forma se puede proceder con  $H$  y  $N$ , ello genera los subconjuntos difuso de  $X$ :  $H1, H2, \dots, H33, H34, NE, NA, \dots, NMC, NML$ ; respectivamente.

En general, la caracterización difusa de los individuos que pertenecen a  $X$ , en términos de: competencias, habilidades y necesidades ( $C, H, N$ ), se denota por  $F(X)$ .

Del modelo conceptual (M1) se pueden caracterizar los roles genéricos de “DIRECTOR” y “DIRIGIDO”, los cuales corresponden a subconjuntos de  $F(X)$  (subconjuntos de los subconjuntos difuso de  $X$ ), lo cual se denota por:

$$\text{DIRECTOR}(X) = \{C, H1, H3, H4, H5, H6, H9, H10, H13, H16, H19, H20, H21, H22, H23, H24, H26, H27, H28, H29, H30, H32, H33, H34, NA, NP, NR, NY, NMG, NMI, NML\}$$

$$\text{DIRIGIDO}(X) = \{C, H2, H7, H8, H9, H11, H12, H13, H14, H15, H17, H18, H22, H25, H31, H33, NE, NA, NX, NME, NMEX, NMC\}$$

lo que conceptualmente quiere decir que:

- Será director todo aquel individuo que exhiba algún grado de pertenencia a cada uno de los subconjuntos difuso que pertenecen al subconjunto difuso  $\text{DIRECTOR}(X)$ .
- Será dirigido todo aquel individuo que exhiba algún grado de pertenencia a cada uno de los subconjuntos difuso que pertenecen al subconjunto difuso  $\text{DIRIGIDO}(X)$ .

Veamos algunas caracterizaciones de los miembros de  $X$ , recordemos que:  $X = \{p1, p2, p3, \dots, pn\}$ , es decir  $n$  personas distintas; en este caso ejemplificaremos con  $n = 6$ . Sean:

$$CB = \{(p1, 0.5), (p2, 0.4), (p3, 0.6), (p4, 0.3), (p5, 0.6), (p6, 0.8)\}$$

$$CT = \{(p1, 0.6), (p2, 0.3), (p3, 0.7), (p4, 0.4), (p5, 0.6), (p6, 0.3)\}$$

$$CI = \{(p1, 0.6), (p2, 0.5), (p3, 0.2), (p4, 0.6), (p5, 0.4), (p6, 0.5)\}$$

$$H1 = \{(p1, 0.7), (p2, 0.6), (p3, 0.8), (p4, 0.3), (p5, 0.9), (p6, 0.2)\}$$

$$H2 = \{(p1, 0.8), (p2, 0.4), (p3, 0.5), (p4, 0.8), (p5, 0.4), (p6, 0.6)\}$$

$$NE = \{(p1, 0.2), (p2, 0.7), (p3, 0.3), (p4, 0.7), (p5, 0.3), (p6, 0.7)\}$$

$$NP = \{(p1, 0.6), (p2, 0.3), (p3, 0.8), (p4, 0.5), (p5, 0.7), (p6, 0.3)\}$$



$$NX = \{(p1, 0.3), (p2, 0.7), (p3, 0.5), (p4, 0.8), (p5, 0.4), (p6, 0.7)\}$$

$$NY = \{(p1, 0.8), (p2, 0.4), (p3, 0.9), (p4, 0.3), (p5, 0.8), (p6, 0.5)\}$$

Con el propósito de obtener DIRECTOR(X) y DIRIGIDO(X), es necesario aplicar, de la lógica difuso, algunas propiedades y teoremas.

aplicaremos el teorema de "Representación" con la función  $\alpha$ -corte, para cada uno de los subconjuntos difuso caracterizados en el ejemplo (CB, CT, CI, H1, H2, NE, NP, NX, NY). Recordemos que para este caso, se tiene:

$$A_\alpha = \{p \in X / \mu_A(p) \geq \alpha\}; \text{ fijaremos } \alpha \text{ en } 0.6, \text{ luego se tiene:}$$

$$CB_{0.6} = \{(p3, 0.6), (p5, 0.6), (p6, 0.8)\}$$

$$CT_{0.6} = \{(p1, 0.6), (p3, 0.7), (p5, 0.6)\}$$

$$CI_{0.6} = \{(p1, 0.6), (p4, 0.6)\}$$

$$H1_{0.6} = \{(p1, 0.7), (p2, 0.6), (p3, 0.8), (p5, 0.9)\}$$

$$H2_{0.6} = \{(p1, 0.8), (p4, 0.8), (p6, 0.6)\}$$

$$NE_{0.6} = \{(p2, 0.7), (p4, 0.7), (p6, 0.7)\}$$

$$NP_{0.6} = \{(p1, 0.6), (p3, 0.8), (p5, 0.7)\}$$

$$NX_{0.6} = \{(p2, 0.7), (p4, 0.8), (p6, 0.7)\}$$

$$NY_{0.6} = \{(p1, 0.8), (p3, 0.9), (p5, 0.8)\}$$

Para los subconjuntos difuso DIRECTOR(X) y DIRIGIDO(X), de acuerdo con el modelo conceptual (M1), debería darse que:  $C_\alpha$ ,  $H_\alpha$ , y  $N_\alpha$  se cumplan simultáneamente, según como se definieron DIRECTOR(X) y DIRIGIDO(X); entiéndase que, por ejemplo, al citar  $C_\alpha$ , nos referimos a:  $CB_\alpha$ ,  $CT_\alpha$ ,  $CCO_\alpha$ ,  $CI_\alpha$  y  $CO_\alpha$ ; igual cosa ocurre con  $H_\alpha$ , y  $N_\alpha$ .

A modo ilustrativo y siguiendo con el ejemplo, supondremos que DIRECTOR(X) y DIRIGIDO(X) requieren genéricamente de  $C_\alpha$ ,  $H_\alpha$ , y  $N_\alpha$ , pero en algunos subconjuntos difuso vinculados a los parámetros C, H y N,

respectivamente; todo esto en forma momentánea con el sólo propósito de ir identificando el camino de la difusificación hacia la generalización.

Al hacer válidas las definiciones de DIRECTOR(X) y DIRIGIDO(X), sujetas a lo enunciado precedentemente, podemos identificar los siguientes conjuntos derivados:

$$\text{DIRECTOR}(X) = \{p1, p3, p5\}$$

$$\text{DIRIGIDO}(X) = \{p4, p6\}$$

Si retomamos formalmente los subconjuntos difuso DIRECTOR(X) y DIRIGIDO(X), que son conjuntos de subconjuntos difuso de X, en estricto rigor, ninguno de los miembros de X del ejemplo, es decir: p1, p2, p3, p4, p5 ni p6, están en DIRECTOR(X) o en DIRIGIDO(X), ya que por ejemplo:

- p1 no tiene pertenencia en: CB<sub>0.6</sub>, ..., H3<sub>0.6</sub>, H4<sub>0.6</sub>, ..., NML<sub>0.6</sub>
- p2 no tiene pertenencia en: CB<sub>0.6</sub>, CCO<sub>0.6</sub>, ..., H7<sub>0.6</sub>, ..., NMC<sub>0.6</sub>
- 
- 
- 
- p6 no tiene pertenencia en: CT<sub>0.6</sub>, Cl<sub>0.6</sub>, ..., H7<sub>0.6</sub>, ..., NMC<sub>0.6</sub>

Analícemos un poco más la ejemplificación simulada para X={p1, p2, ..., p6}. nótese que p1 presenta la siguiente situación:

$$H1_{0.6}=\{(p1, 0.7), \dots\}, H2_{0.6}=\{(p1, 0.8), \dots\}$$

es decir: p1 ∈ X y μ<sub>H1</sub> (p1) >= α pero también p1 ∈ X y μ<sub>H2</sub> (p1) >= α,

además que: H1 ⊆ DIRECTOR(X)

H2 ⊆ DIRIGIDO(X), con el agravante de que:

$\mu_{H1}(p1) < \mu_{H2}(p1)$ , luego cabe preguntarse si:

¿Convendrá aplicar:  $f^{-1}(Y)$  con  $Y =$  producto cartesiano de  $H1$  y  $H2$ , para decidir si  $p1$  será vinculado, finalmente, a  $DIRIGIDO(X)$ ?

El principio de “Extensión” nos sugiere usar el máximo  $\mu_A$ , luego la respuesta a la pregunta es “sí”.

Recordemos que para el caso en estudio, hasta la fase de diseño del modelo conceptual **M1**, decimos:

$X = \{p1, p2, \dots, pn\}$ ; con  $n$  personas ha ser caracterizadas.

Por otra parte, se crearon los subconjuntos difuso:

$DIRECTOR(x)$ : donde estarán las personas que exhiben algún grado de pertenencia a los subconjuntos difuso asociados a director.

$DIRIGIDO(x)$ : donde estarán las personas que exhiben algún grado de pertenencia a los subconjuntos difuso asociados a dirigido.

La condición de pertenencia establece:

Para que  $p$  sea considerado director, debe darse que:

**(1)**  $(p, \alpha)$ ,  $\forall p \in X$ ,  $\alpha \in [0,1]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\forall \alpha$  del tipo  $\mu_{CB}$ ,  $\mu_{CT}$ ,  $\mu_{CCO}$ ,  $\mu_{CI}$ ,  $\mu_{CO}$ ,  $\mu_{H1}$ ,  $\mu_{H3}$ ,  $\mu_{H4}$ ,  $\mu_{H5}$ ,  $\mu_{H6}$ ,  $\mu_{H9}$ ,  $\mu_{H10}$ ,  $\mu_{H13}$ ,  $\mu_{H16}$ ,  $\mu_{H19}$ ,  $\mu_{H20}$ ,  $\mu_{H21}$ ,  $\mu_{H22}$ ,  $\mu_{H23}$ ,  $\mu_{H24}$ ,  $\mu_{H26}$ ,  $\mu_{H27}$ ,  $\mu_{H28}$ ,  $\mu_{H29}$ ,  $\mu_{H30}$ ,  $\mu_{H32}$ ,  $\mu_{H33}$ ,  $\mu_{H34}$ ,  $\mu_{NA}$ ,  $\mu_{NP}$ ,  $\mu_{NR}$ ,  $\mu_{NY}$ ,  $\mu_{NMG}$ ,  $\mu_{NMI}$ ,  $\mu_{NML}$ .

Para que  $p$  sea considerado dirigido, debe darse que:

**(2)**  $(p, \alpha)$ ,  $\forall p \in X$ ,  $\alpha \in [0,1]$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\forall \alpha$  del tipo  $\mu_{CB}$ ,  $\mu_{CT}$ ,  $\mu_{CCO}$ ,  $\mu_{CI}$ ,  $\mu_{CO}$ ,  $\mu_{H2}$ ,  $\mu_{H7}$ ,  $\mu_{H8}$ ,  $\mu_{H9}$ ,  $\mu_{H11}$ ,  $\mu_{H12}$ ,  $\mu_{H13}$ ,  $\mu_{H14}$ ,  $\mu_{H15}$ ,  $\mu_{H17}$ ,  $\mu_{H18}$ ,  $\mu_{H22}$ ,  $\mu_{H25}$ ,  $\mu_{H31}$ ,  $\mu_{H33}$ ,  $\mu_{NE}$ ,  $\mu_{NA}$ ,  $\mu_{NX}$ ,  $\mu_{NME}$ ,  $\mu_{NMEX}$ ,  $\mu_{NMC}$ .

Por otra parte, el proceso de elección, genéricamente puede obedecer al siguiente criterio:

Dado  $(p, \alpha)$ ,  $\forall p \in X$ ,  $\alpha \geq \alpha$ -corte o

$Elegido_{\alpha} = \{p \in X / \mu_{Elegido}(p) \geq \alpha\}$

Además debería darse que:  $f(\text{Director}(x)) = 0$ ,  $f(\text{Dirigido}(x)) = 0$ , para aplicar el criterio de elección; con  $f$  definido como una aplicación del producto cartesiano de los subconjuntos difuso que  $\in \text{Director}(x)$  y  $\text{Dirigido}(x)$ , respectivamente.

Hasta ahora hemos visto que a través de propiedades como: unión e intersección y utilizando el teorema de representación, es posible crear subconjuntos difusos que contemplan a los individuos que cumplen ciertas características específicas, por esta vía nos estamos acercando a nuestro objetivo. Sigamos explorando los caminos de la lógica difusa.

### **3.3. Hacia el Aprendizaje Inicial con Variables Difusas:**

Trataremos ahora de encontrar un camino para lograr el aprendizaje necesario tal que: “para una caracterización de un individuo, se pueda establecer si es candidato a director o dirigido”.

Desde el punto de vista de un sistema experto, bastaría con que se cumpliesen las condiciones **(1)** para director o **(2)** para dirigido.

Exploraremos de Trillas, Delgado, Vila, Castro, Verdegay, Moraga, Cuenca, Gutierrez, Ruiz [62], el camino de: “Un modelo matemático para el razonamiento con predicados vagos”.

En nuestro caso U corresponde a la muestra de personas  $X = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ;  $P_x$  correspondería a las personas que cumplen las restricciones (1) o (2) respectivamente.

Por ejemplo:  $(p_{CB}^3, \alpha_{CB}^3) / \alpha_{CB}^3 \geq \alpha - corte$

es decir:  $(p_{CB}^3 \in X; p_{CB}^3 \text{ es verdadero})$ , luego  $\text{Max}_{CB} \mu_{CB}(p_{CB}^3) = \alpha_{CB}^3$  o

$$\text{Max}_{CB} t_{CB}(p_{CB}^3) = \alpha_{CB}^3$$

De igual forma: si  $(p_{NME}^7, \alpha_{NME}^7) / \alpha_{NME}^7 < \alpha - corte$

decimos que  $\mu_{F, NME}(p_{NME}^7) = 1 - \alpha_{NME}^7$  o  $t_{F, NME}(p_{NME}^7) = 1 - \alpha_{NME}^7$

Pero sabemos que en el caso de  $(p_i, \alpha_i)$ ,  $\forall p_i \in X, \alpha_i \rightarrow [0,1]$ ;  $\alpha_i$  puede estar muy cerca de 0 o muy cerca de 1, lo que en términos de razonamiento de predicados vagos, se podría expresar, por ejemplo: para la competencia básica, como:

$$\mu_{CB}^m(p_i) = [\mu_{CB}(p_i)]^2 \quad \text{o} \quad \mu_{CB+}(p_i) = \sqrt{[\mu_{CB}(p_i)]}$$

Por ejemplo, si:  $(p_{NY}^5 \in X; p_{NY}^5 \text{ es verdadero})$ ,  $(p_{NP}^5 \in X; p_{NP}^5 \text{ es verdadero})$ ,

$$\begin{matrix} (p_5 \in X; p_5 \text{ es verdadero}); & (p_{23} \in X; p_{23} \text{ es verdadero}), \\ \text{NA} & \text{NY} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (p_{23} \in X; p_{23} \text{ es verdadero}), & (p_{23} \in X; p_{23} \text{ es verdadero}) \\ \text{NP} & \text{NA} \end{matrix}$$

es claro que al momento de seleccionar, se pueden aplicar funciones como Min y/o W, sobre:

$$\begin{matrix} \alpha_5 & \text{y} & \alpha_{23} & \rightarrow & T & (\mu & (p_5), & \mu & (p_{23}) & ) \\ \text{NY} & & \text{NY} & & \text{NY} & & \text{NY} & & \text{NY} & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha_5 & \text{y} & \alpha_{23} & \rightarrow & T & (\mu & (p_5), & \mu & (p_{23}) & ) \\ \text{NP} & & \text{NP} & & \text{NP} & & \text{NP} & & \text{NP} & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha_5 & \text{y} & \alpha_{23} & \rightarrow & T & (\mu & (p_5), & \mu & (p_{23}) & ) \\ \text{NA} & & \text{NA} & & \text{NA} & & \text{NA} & & \text{NA} & \end{matrix}$$

Este camino es útil cuando intentamos obtener conocimiento nuevo a partir de los datos inicialmente disponibles, más específicamente, cuando ingresa un individuo nuevo y queremos saber si estaría o no dentro de cierta familia de datos (cierto subconjunto difuso), pero no nos lleva a cuantificar el rendimiento; luego, no continuaremos explorando esta vía.

Veamos otro camino posible.

### **3.4. Hacia la Construcción de Relaciones de Implicación:**

En la búsqueda por obtener conocimiento nuevo a partir de los datos inicialmente disponibles, surgen las relaciones de implicación; ellas conceptualmente tienen la forma de:

Si (situación #1) entonces (situación #2) o  
 Si (situación #1)  $\rightarrow$  (situación #2)

Cuando asignamos a situación #1 el hecho de que un individuo  $x_i \in X$  presenta sus  $\mu_{ij} \forall j=1, \dots$ , total de atributos de interés para un cierto propósito, resulta interesante averiguar si es posible inferir algo (situación #2), más allá de que  $x_i$  es miembro de un determinado subconjunto difuso ssi  $\mu_{ij} \geq \alpha - \text{corte}$  y  $\mu_{ij} \in [0,1], \forall j$ .

El caso más interesante se encuentra cuando situación #2 se hace corresponder a un rendimiento laboral  $\geq$  índice aceptable.

A continuación exploramos el camino de las relaciones de implicación, esperando encontrar aportes que nos conduzcan a nuestro objetivo.

Al ejemplificar “p20 tiene bastante NML y p14 tiene baja NMEX” como:

$$\mu_{G.P.}(p_{20}, p_{14}) = T(\mu_{NML.G}(p_{20}), \mu_{NMEX.P}(p_{14}))$$

lo que por leyes distributivas,  $T = (\text{Min}, \text{Max})$  y por leyes no-contradicción y 3º excluido,  $T = (\text{Max}(0, \text{Sum} - 1), \text{Min}(1, \text{Sum}))$

En otra ejemplificación como: (p2 tiene poca NMEX y p2 tiene mucha NY) y (p7 tiene mucha NMEX y p7 tiene poca NY); lo podríamos escribir como:

$$\mu_{(P.G).(G.P)}(p_2, p_7) = T(T(\mu_{NMEX.P}(p_2), \mu_{NY.G}(p_2)), T(\mu_{NMEX.G}(p_7), \mu_{NY.P}(p_7))), \text{ de lo cual}$$

podríamos adelantar que: p2 sería director, p7 sería dirigido; pero sería interesante poder establecer: “si p7 es dirigido, entonces p2 es director”.

Veamos que ocurre si:

$$\mu_{\text{NMEX}}(p_{10}) = 0.3, \mu_{\text{NMEX}}(p_4) = 0.8; \mu_{\text{NY}}(p_{10}) = 0.7, \mu_{\text{NY}}(p_4) = 0.2$$

Según la implicación de Zadeh:  $\mu_{\text{NMEX } P+Q}(p_{10}, p_4) = \text{Max}(1 - 0.3, 0.8) = 0.8 \rightarrow p_4$

[lo que representa a: "Si  $p_{10}$  no cumple NMEX, entonces  $p_4$  cumple con NMEX; verificándose que  $p_4$  cumple]

$$\mu_{\text{NY } P+Q}(p_{10}, p_4) = \text{Max}(1 - 0.7, 0.2) = 0.3 \rightarrow p_{10}$$

[lo que representa a: "Si  $p_{10}$  no cumple NY, entonces  $p_4$  cumple con NY; verificándose que no es cierto que  $p_{10}$  no cumple]

Según la implicación de Lucksiewicz:

$$\mu_{\text{NMEX } P+Q}(p_{10}, p_4) = \text{Min}(1, 1 - 0.3 + 0.8) = 1.0 \rightarrow p_{10}$$

$$\mu_{\text{NY } P+Q}(p_{10}, p_4) = \text{Min}(1, 1 - 0.7 + 0.2) = 0.5 \rightarrow p_4$$

Como es lógico suponer,  $p_{10}$  y  $p_4$  fueron evaluados en forma independiente, en términos de los factores: NMEX y NY respectivamente; de hecho, según Zadeh se selecciona a quien cumple en mayor medida el grado de pertenencia, pero Lucksiewicz no descarta que los  $p_i$  que exhiben menos grados de pertenencia puedan ser útiles, ya que hay otros factores en juego; recordemos que la clasificación para uno u otro subconjunto difuso tiene asociados varios factores o variables y por lo tanto talvez sería conveniente estudiar algún porcentaje de ponderación (peso relativo) para cada uno de los factores involucrados.

Volvamos sobre el ejemplo reciente:

$$\text{Dados: } \mu_{\text{NMEX}}(p_{10}) = 0.3, \mu_{\text{NMEX}}(p_4) = 0.8; \mu_{\text{NY}}(p_{10}) = 0.7, \mu_{\text{NY}}(p_4) = 0.2$$



esto nos revela que: “p<sub>10</sub> es director, entonces p<sub>4</sub> es dirigido”, pero  
 “p<sub>10</sub> es director poco autónomo”, habría que averiguar si  
 “p<sub>4</sub> es dirigido poco autónomo”??

**NOTA:** P referencia a ser director, Q referencia a ser dirigido.

De la implicación de Mamdani, con T = Min, obtenemos:

$$\mu_{\text{Direct/Dirig}}(p_{10}, p_4) = \text{Min} ( \mu_{\text{Direct}}(p_{10}), \mu_{\text{Dirig}}(p_4) )$$

Pero no disponemos de un  $\alpha$  concreto para establecer director, ni un  $\beta$  concreto para establecer dirigido; a continuación le asignaremos ciertos pesos relativos a los factores involucrados:

Director: NY  $\rightarrow$  60% y NMEX  $\rightarrow$  40% , con corte de 0.5 o superior.

Dirigido: NY  $\rightarrow$  40% y NMEX  $\rightarrow$  60% , con corte de 0.5 o superior.

Esta definición de pesos relativos, nos lleva a calcular el grado de pertenencia que p<sub>i</sub> tiene con los subconjuntos difuso director y dirigido respectivamente.

$$\mu_{\text{Direct}}(p_{10}) = 0.54 , \mu_{\text{Direct}}(p_4) = 0.44 ; \mu_{\text{Dirig}}(p_{10}) = 0.46 , \mu_{\text{Dirig}}(p_4) = 0.56$$

Al retomar el predicado compuesto “p<sub>10</sub> es director, entonces p<sub>4</sub> es dirigido”, en términos de:

1) Mamdani, resulta:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Direct/Dirig}}(p_{10}, p_4) &= \text{Min} ( \mu_{\text{Direct}}(p_{10}), \mu_{\text{Dirig}}(p_4) ) \\ &= 0.54 \text{ [que referencia a } p_{10}] \end{aligned}$$

2) Willmot, resulta:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Direct/Dirig}}(p_{10}, p_4) &= \text{Max} (1 - \mu_{\text{Direct}}(p_{10}), \text{Min}(\mu_{\text{Direct}}(p_{10}), \mu_{\text{Dirig}}(p_4)) ) \\ &= \text{Max}(1 - 0.54, \text{Min}(0.54, 0.56)) = \text{Max}(0.46, 0.54) \\ &= 0.54 \text{ [que referencia a } p_{10}] \end{aligned}$$

3) Gödel, resulta:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Direct/Dirig}}(p_{10}, p_4) &= \{1, \text{ si } 0.54 \leq 0.56; \text{ o } 0.56, \text{ si } 0.54 > 0.56\} \\ &= 1 \text{ [que referencia a } p_{10}] \end{aligned}$$

4) Goguen, resulta:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Direct/Dirig}}(p_{10}, p_4) &= \{1, \text{ si } 0.46 = 0; \text{ Min} (1, (0.56/0.54), \text{ cuando } 0.54 > 0)\} \\ &= 1 \text{ [que referencia a } p_{10}] \end{aligned}$$

Como de Mamdani se obtuvo:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Direct/Dirig}}(p_{10}, p_4) &= \text{Min} ( \mu_{\text{Direct}}(p_{10}), \mu_{\text{Dirig}}(p_4) ) \\ &= 0.54 \text{ [que referencia a } p_{10}] \end{aligned}$$

incorporando la teoría del control borroso, se tiene:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Direct/Dirig}}(p_{10}, p_4) &= \text{Min} ( \mu_{\text{Direct}}(p_{10}), \mu_{\text{Dirig}}(p_4) ) \\ &= \text{Min} ( \mu_{\text{Direct}}(p_{10}), 1 - \mu_{\text{Dirig}}(p_4) ) \\ &= \text{Min} (0.54, 1 - 0.56) \\ &= 0.44 \text{ [que referencia a } p_4] \end{aligned}$$

como  $\mu_{\text{Direct}}(p_{10}) = 0.54$ ;  $p_4$  es dirigido

Direct

Veamos lo que ocurre cuando existen más  $p_i \in X$ .

$$\begin{aligned} \text{Sean: } \mu_{\text{NMEX}}(p_{10}) = 0.3, \mu_{\text{NMEX}}(p_4) = 0.8, \mu_{\text{NMEX}}(p_7) = 0.6; \\ \mu_{\text{NY}}(p_{10}) = 0.7, \mu_{\text{NY}}(p_4) = 0.2, \mu_{\text{NY}}(p_7) = 0.5 \end{aligned}$$

Si aplicamos las ponderaciones usadas precedentemente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{Direct}}(p_{10}) = 0.54, \mu_{\text{Direct}}(p_4) = 0.44, \mu_{\text{Direct}}(p_7) = 0.54; \\ \mu_{\text{Dirig}}(p_{10}) = 0.46, \mu_{\text{Dirig}}(p_4) = 0.56, \mu_{\text{Dirig}}(p_7) = 0.56 \end{aligned}$$

en este caso vemos que  $p_{10}$  sería director,  $p_4$  sería dirigido y  $p_7$  también podría ser director; en estas condiciones se puede escribir el Modus Ponens:

“ $p_{10}$  es director y  $p_4$  es dirigido” [regla], además

“ $p_7$  es a lo menos dirigido” [dato observado]; es decir:

$$\mu_{(\text{Direct}+- \text{Dirig}) \text{Dirig}}(p_{10}, p_4, p_7) = \text{Min}(\mu_{\text{Direct}+- \text{Dirig}}(p_{10}, p_4), \mu_{\text{Dirig}}(p_7)) =$$

$$= \text{Min}(\text{Min}(\mu_{\text{Direct}+-}(p_{10}), \mu_{\text{Dirig}}(p_4)), \mu_{\text{Dirig}}(p_7)) =$$

$$= \text{Min}(\sqrt{(p_{10})}, (1 - p_4), (1 - p_7)^2)$$

$$\text{pero: } \mu_{\text{Direct} \cdot \text{Dirig}}(p_{10}, p_4) = \text{Min}(\mu_{\text{Direct}}(p_{10}), \mu_{\text{Dirig}}(p_4))$$

$$= \text{Min}(p_{10}, (1 - p_4)^2)$$

$$= \text{Min} ( 0.54 , 0.1936 ) ;$$

que corrobora que  $p_4$  es a lo menos dirigido; recordemos que  $p_{10}$  es verdadero, como también lo es  $\text{Min} \left( p_{10}, (1-p_4)^2 \right)$ .

$$\text{Luego: } \text{Sup} \text{Min}(\text{Min}(p_{10}, (1-p_4)^2), \text{Min}(\sqrt{p_{10}}, (1-p_4), (1-p_7)^2)) =$$

$$\text{Sup} \text{Min}(p_{10}, (1-p_4)^2, (1-p_7)^2) = \text{Min} ( 1, 1, (1-p_7)^2 ) = (1-p_7)^2 =$$

$$= \mu_{\text{Dirig}} \text{ } m_{p_7} \rightarrow p_7 \text{ es a lo menos muy pequeño o a lo menos dirigido.}$$

Dirig

Para el caso genérico de M1, es necesario establecer cierto peso para cada uno de los factores que condicionan el pertenecer a Director(x) o Dirigido(x), donde:

$$1) \mu_A(p_i, \alpha_i), \forall p_i \in \text{Director}(x), \alpha_i \rightarrow [0,1]$$

A

$$2) \mu_B(p_j, \alpha_j), \forall p_j \in \text{Dirigido}(x), \alpha_j \rightarrow [0,1]$$

B

A través de la “Regla Composicional de Inferencia (RCI)”, se busca establecer:

Modus Ponens: Si  $p_i$  es A, entonces  $p_j$  B [regla]

$p_i$  es A [premisa]

---

$p_j$  es B [conclusión]

Notemos que la regla corresponde a una afirmación compuesta, lo que se denota por:

$$\mu_{A+B}(p_i, p_j) = T^*(\mu_A(p_i), \mu_B(p_j)) = T^*(1 - \mu_A(p_i), \mu_B(p_j)) \quad [16]$$

Por la vía de reglas  $\mu_{P/Q}$  se tiene:

$P/Q$

$$T(\mu_A(p_i), \mu_{A/B}(p_i, p_j)) \leq \mu_A(p_i)$$

De [15]:  $T(\mu_{A^*}(p_i), \mu_{A/B}(p_i, p_j)) \leq T(\mu_A(p_i), \mu_{A/B}(p_i, p_j)) \leq \mu_B(p_j)$

$$\text{Sup}_{A^*} T(\mu_{A^*}(p_i), \mu_{A/B}(p_i, p_j)) \leq \mu_B(p_j)$$

Como  $\mu_B(p_j) = \text{Sup}_{A^*} T(\mu_{A^*}(p_i), \mu_{A/B}(p_i, p_j))$ , verifica que:

$$\mu_B(p_j) \leq \mu_{B^*}(p_j), \text{ entonces } \mu_{B^*}(p_j) \leq \mu_B(p_j)$$

→  $p_j$  es a lo menos  $B^*$

A pesar de que la construcción de relaciones de implicación no nos acerca a nuestro objetivo, si pudimos detectar la necesidad de disponer de “pesos relativos” para cada uno de los factores involucrados en un análisis concreto, esta ventana en la exploración será clave para continuar nuestro camino.

### 3.5. Foco de la Fuzzificación:

Resulta conveniente enfatizar a qué tipo de datos se está aplicando la fuzzificación, recordemos que la naturaleza de los datos que conforman el estudio de interés, evidencian que: “un conjunto de individuos observados, exhiben valores propios en cada uno de los atributos en estudio, siendo los mismos

atributos medidos en todos los individuos de la muestra”; esta precisión deja claro que la fuzzificación está vinculada con los atributos, dado que estos manifiestan diversos grados de pertenencia.

Sin duda que surge la pregunta: “¿Se intenta modelar individuos con atributos difuso o atributos difuso de un cierto tipo para los individuos de una muestra?”; esta pregunta amerita evaluar las ventajas y desventajas de cada caso.

Cuando aplicamos el modelo conceptual (M2), podemos orientar su lectura desde 2 perspectivas:

- A partir de identificar el perfil predominante de un individuo, deducir en que rol tendrá el más alto rendimiento.
- A partir de un rol concreto con su correspondiente rendimiento deseado, determinar cual será el perfil que debe predominar en los potenciales candidatos.

Desde el punto de vista del proceso de fuzzificación, en el primer caso nos referimos a estudiar individuos con parámetros difuso; mientras que en el segundo caso nos referimos a estudiar parámetros difuso de un cierto tipo para un potencial grupo de individuos.

Para los efectos de esta tesis, nos interesa estudiar individuos con parámetros difuso, con el propósito de establecer cuál será el rol que aprovecha mejor su potencial y cuál será su rendimiento laboral más probable.

Cuando se estudia la conducta de un individuo en el trabajo, es posible advertir que exhibe patrones conductuales caracterizados por diversos atributos, particularmente, manifiesta todos los factores o variables elementales que se incluyen en esta investigación, asociados a: habilidades, competencias y necesidades; sin embargo, el valor de cada variable elemental es distinto de un individuo a otro, incluso para un mismo individuo en roles distintos, estos valores son diferentes; en general, decimos que el atributo específico está presente en el

individuo, pero no se tiene certeza de tal valor, a lo más se admite un grado de cercanía o pertenencia.

El establecimiento del perfil predominante se centra en los atributos que caracterizan al individuo y no en ciertos atributos tipo; el hecho de que para un cierto rol específico interesen algunos atributos, no implica clasificar los atributos, más bien se busca clasificar individuos.

Por ejemplo: Sea una muestra de 3 individuos caracterizados en 5 atributos:

$$X = \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$x_1 = (0.5_{a_1}, 0.3_{a_2}, 0.6_{a_3}, 0.7_{a_4}, 0.8_{a_5})$$

$$x_2 = (0.2_{a_1}, 0.9_{a_2}, 0.72_{a_3}, 0.61_{a_4}, 0.59_{a_5})$$

$$x_3 = (0.45_{a_1}, 0.4_{a_2}, 0.9_{a_3}, 0.8_{a_4}, 0.75_{a_5})$$

Si  $\alpha$ -corte se establece en 0.40 y se definen:

$$A = \{(x_i, \mu_{ij}) / i = 1, \dots, 3 / \forall j = a_1, a_3, a_5\}$$

$$B = \{(x_i, \mu_{ij}) / i = 1, \dots, 3 / \forall j = a_2, a_3, a_4\}$$

$$C = \{(x_i, \mu_{ij}) / i = 1, \dots, 3 / \forall j = a_1, a_4, a_5\}$$

Podemos determinar:

$$A = \{x_1, x_3\}$$

$$B = \{x_2, x_3\}$$

$$C = \{x_1, x_3\}$$

Esta clasificación de individuos nos resulta útil para identificar quién(es) es(son) candidato(s) apto(s) para cierto(s) propósito(s).

### **3.6. Conclusión:**

A través de la individualización y representación, como datos difusos, las 3 macro variables son expresadas como conjuntos que agrupan las variables elementales asociadas a ellas; el proceso de fuzzificación se inicia al identificar cada una de estas variables o atributos elementales, estableciendo que ellos adoptarán valores del tipo grado de pertenencia, donde 0 representa la total ausencia del atributo y 1 representa la total presencia de dicho atributo.

Una primera aproximación al modelamiento de las características (cualidades) de los individuos bajo análisis se obtuvo al utilizar el modelo conceptual (M2), definiendo los subconjuntos difuso DIRECTOR(X) y DIRIGIDO(X); sin embargo, no basta con establecer los atributos que deben cumplirse para que un individuo sea clasificado en un cierto subconjunto (subconjunto difuso), para asegurar que los atributos tengan cierto peso, se aplica el concepto  $\alpha$ -corte del teorema de representación de Zadeh. Luego se recurre a la propiedad de intersección, lo que también está avalado por el operador producto (Zadeh, Mamdani), de esta forma los subconjuntos difuso resultantes contienen a los individuos “con más altos índices” en los atributos requeridos.

Los conectivos lógicos y en particular las normas triangulares o t-normas, permiten analizar hasta que punto el operador producto es en sí la herramienta más adecuada para encontrar el “mejor subconjunto difuso” que represente a los individuos “mejor calificados”, ya sea para un cierto nivel de rendimiento esperado y/o un determinado rol específico.

Al estudiar las potenciales relaciones de implicación surge la necesidad de disponer de un “peso” o “importancia relativa”, conjuntamente con un  $\alpha$ -corte como valor mínimo aceptable; en estas condiciones, es posible obtener conocimiento nuevo a partir de ciertas reglas; recordemos que todo comienza reconociendo y representando el valor de cada atributo:



$\mu_{Atributo_j}(p_i) = \alpha$  y la definición de un subconjunto difuso tipo:

$Rol_j(p)$ ; donde estarán contenidos todos los  $p_i$  cuyos  $atributos_j$  cumplan con  $\alpha$ -corte, pero habrán ciertos  $atributos_j$  que lo caracterizan.

Es claro que un gran desafío lo constituye el hecho de que al constatar que el perfil de un cierto individuo nos lleva a un “rol apto” que no corresponde con el rol en actual ejercicio, cabe preguntarse si: “¿El individuo será o no transferido de rol?”, “¿Qué se podría cambiar en el individuo para que alcanzara el desempeño esperado?”, la respuesta a este tipo de interrogantes estará en manos de los directivos de la organización bajo análisis.

La experimentación con las relaciones de implicación nos lleva hacia la obtención de conocimiento nuevo, aplicable cuando requerimos establecer si un nuevo individuo debe o no estar incluido en cierto(s) subconjunto(s) difuso específico(s) para algún propósito puntual.

Queda claro entonces que aplicando: el teorema de representación, las propiedades de la intersección, los conectivos lógicos e incorporando pesos relativos, estamos en la senda de la cuantificación que nos interesa.



## **CAPITULO 4:**

### **MODELAMIENTO DEL RENDIMIENTO LABORAL POR MEDIO DE OPERADORES DE AGREGACION.**

#### **4.1. Introducción:**

Con el propósito de alcanzar mayor conocimiento, a partir de los datos inicialmente disponibles (regla(s) básica(s) y algún(os) dato(s) aislado(s)), incorporaremos la utilización de operadores, ello permitirá agregar información a la ya conocida.

Notemos que los operadores básicos involucrados son: unión, intersección y compensación.

Hasta este momento hemos representado en forma difusa los distintos atributos vinculados con los subconjuntos difusos que caracterizan los roles clásicos de una organización, pero aún falta diseñar un modelo que permita mensurar el rendimiento laboral más probable, a partir del perfil predominante de un individuo.

Del modelo conceptual **(M2)** quedó en evidencia que los atributos vinculados a los roles en los distintos niveles organizacionales demandan diferentes importancias relativas, ello nos llevó a contemplar la utilización de “ponderaciones”; sin embargo, es necesario encontrar alguna forma de traspasar estas ponderaciones desde los atributos elementales hacia las macro variables.

La utilización de ponderación lleva asociado el hecho de que un atributo con grado de pertenencia bajo sea “premiado” en desmedro de otro atributo con grado de pertenencia alto, cuya ponderación sea baja; la lógica difusa provee algunos operadores que intentan superar esta deficiencia.

Como se busca agregar conocimiento a partir de ciertos datos inicialmente disponibles, un buen camino de exploración comienza a partir de los denominados “operadores de agregación”, presentes en diversos desarrollos de sistemas inteligentes.

Especial interés presenta la utilización de operadores de agregación que contemplen importancias o ponderaciones relativas, como es el caso de los operadores “OWA” que postula Yager [69].

Como se mencionó en el capítulo #3, los atributos de naturaleza vaga requieren ser tratados como difuso, lo cual significa que existe una forma de cuantificar su grado de cercanía o pertenencia respecto de un valor concreto, para nuestros propósitos referenciamos estos datos como: “difuso cuantificable”.

A partir de: Klir y Folger [28]; Tizhoosh [60]; Modave y Kreinovich [47]; Espinosa y Vandewalle [26] y [25]; Delgado, Herrera, Herrera-Viedma, Martínez [15]; Delgado, Herrera, Herrera-Viedma, Verdegay, Vila [16]; Herrera, López, Mendaña, Rodríguez [35]; Delgado, Verdegay, Vila [17]; cabe considerar que frente a atributos vagos, por tanto difuso, para los cuales no se dispone de alguna forma para cuantificar su grado de pertenencia respecto de un valor concreto, sólo se sabe que está en algún punto de un intervalo; en estas condiciones, únicamente es posible asociar dicho atributo con algún distintivo del intervalo aludido, este distintivo se conoce como: “etiqueta lingüística”.

Si centramos la atención en los valores difuso que sólo pueden ser asociados a etiquetas lingüísticas, los podríamos referenciar como: “difuso cualificable” o “difuso cualitativo”.

A partir de la funcionalidad del operador OWA y sus propiedades, surge el operador LOWA (OWA lingüístico), permitiendo calificar a un individuo a partir de  $n$

atributos del tipo “difuso cualitativo”; el operador LOWA selecciona la etiqueta más representativa para el individuo, siendo esta salida el conocimiento nuevo.

Un tema que deberá ser abordado es el que establece que los pesos o importancias relativas de las macro variables serían distintos para diversas familias de rendimientos laborales asociados con los roles, en función del nivel organizacional en el cual está inserto cada rol.

A través de la utilización de los operadores OWA es posible encontrar una forma de calcular la importancia relativa de cada uno de los atributos elementales asociados a las 3 macro variables, en este caso se trabaja directamente sólo con los atributos ligados linealmente con el rol de interés.

Resulta crucial disponer de una muestra de individuos cuyos rendimientos laborales sean considerados altos por las empresas que los cobijan, a partir de ellos se calculan las importancias relativas de las macro variables en estudio en esta tesis.

Una vez afinado el modelo de cuantificación del rendimiento laboral, es necesario tener algún indicador que permita saber que tan cerca están los atributos elementales de sus importancias relativas supuestamente representativas, es aquí donde entra la Integral de Sugeno.

La medida difusa, como lo ilustran: Tizhoosh [60] y Dennebers and Grabisch [18], permite obtener una cuantificación que representa la importancia relativa de un grupo de atributos, luego de realizar una suerte de convergencia de importancias o ponderaciones individuales.

Al calcular la Integral de Sugeno para un individuo en un rol concreto, se logran dos cosas: saber la distancia que sus atributos tienen con respecto a sus

importancias relativas, pero también se logra establecer que tan apto está ese individuo para ejercer el rol al cual se le ha calculado el rendimiento laboral.

#### 4.2. Uso de Relaciones de Implicación:

Dentro de los objetivos metodológicos, se busca el camino que permita obtener tanto nuevas consecuencias como nuevas reglas del tipo GMP, como por ejemplo:

Si x es A entonces v es D	[Regla]
----- dado que v es Z	[Dato]
----- consecuencia      x es Z`	[Consecuencia]

Sea (Rendimiento Laboral)  $RL = \{\text{insuf, a veces insuf, sufic, más que suf, óptimo, excelente}\}$ , lo que se puede asimilar a:

$RL = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ; incluso se podría expresar los valores de RL como:

- 0: Menos falso o  $(1-u)^2$
- 1: Falso o  $(1-u)$
- 2: Más o menos falso o  $\sqrt{1-u}$
- 3: Más o menos verdadero o  $\sqrt{u}$
- 4: Verdadero o  $u$
- 5: Más que verdadero o  $u^2$

Recordemos que  $RL = F(h, c, n)$ , luego podemos expresar:

Si (x es H) y (x es C) y (x es N) entonces RL es 5,  $\forall x \in X$

Haciendo referencia a:

x es H como  $H(x)$

x es C como  $C(x)$

x es N como  $N(x)$ ; podemos definir  $Z(x) = H(x) \cap C(x) \cap N(x)$ , ello da paso a: Si x es Z entonces RL es 5.

También podemos expresar:

Si (x es H) y (x es C) entonces RL es 3

Si (x es H) y (x es N) entonces RL es 2

Si (x es C) y (x es N) entonces RL es 2

En términos de subconjuntos difuso y haciendo uso del operador intersección, tenemos:

$$Z(x) = H(x) \cap C(x) \cap N(x)$$

$$QS(x) = H(x) \cap C(x)$$

$$QN(x) = H(x) \cap N(x)$$

$$SN(x) = C(x) \cap N(x)$$

Luego disponemos de las siguientes reglas:

R1: Si x es Z entonces RL es 5

R2: Si x es QS entonces RL es 3

R3: Si x es QN entonces RL es 2

R4: Si x es SN entonces RL es 2

Otros casos      RL es 0

De las reglas anteriores, resultan directos los GPM:

De [R2]: Si x es QS entonces RL es 3

y x es N

-----  
 RL es 5

De [R3]: Si x es QN entonces RL es 2  
 y x es C

-----  
 RL es 5

De [R4]: Si x es SN entonces RL es 2  
 y x es H

-----  
 RL es 5

Tabularmente se tiene:

H(x)	C(x)	N(x)	RL5	RL3	RL2
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0

**Fig.#29: Rendimientos laborales obtenidos como conocimiento nuevo.**

Al utilizar las relaciones de implicación, los subconjuntos difuso pasan a representar condiciones que sustentan las reglas; por ejemplo, al decir que “x es A” estamos diciendo que existe algún  $x \in X$  tal que cumple con los requisitos o condiciones para ser considerado miembro del subconjunto difuso A; de la misma forma, al decir que “si x es A entonces y es B” estamos refiriéndonos a que tanto x como y presentan atributos que coinciden o cumplen con condiciones que son una



requisito de la otra, ello significa que previamente tanto  $x$  como  $y$  han sido evaluadas precedentemente para determinar si efectivamente cumplen con las condiciones señaladas, las que también deberían coincidir con que:

$$\mu_{xj} \text{ y } \mu_{yj} \text{ son } \geq \alpha - \text{corte}$$

A pesar de que anteriormente habíamos señalado que las relaciones de implicación no nos llevan a la cuantificación de lo que andamos buscando, ello nos obliga a considerar otras situaciones o propiedades que sí tienen que ver con el tema de agregar información; recordemos que estamos trabajando con subconjuntos difusos y por lo tanto existe un proceso de clasificación, el cual lo hemos interpretado también como “detectar condiciones convergentes”, lo que se puede asimilar a cumplir requisitos copulativos.

En los capítulos anteriores ya surgió la necesidad de disponer de pesos relativos asociados a los atributos involucrados en cualesquier clasificación, a continuación experimentaremos con esta instancia para avanzar en la cuantificación deseada.

### **4.3. Exploración por la Vía de Pesos Relativos de Cada Atributo:**

Al acoger la necesidad de disponer de pesos relativos asociados a los atributos, estamos admitiendo que todos los atributos no tienen igual importancia al momento de aplicar algún proceso de clasificación; sin embargo, algunos operadores no consideran estas importancias o pesos relativos al instante de discriminar algún  $x_i \in X$ , en función de los valores de  $\mu_i$  respectivos.

La puerta de entrada a las clasificaciones que nos son útiles para nuestro proyecto, puede estar en la aplicación de las propiedades difuso: intersección, unión y promedio.

Tomaremos una muestra de 5 individuos que ya cumplen con la condición mínima de presentar un  $\mu_{(x)} \geq \alpha\text{-corte}$  ; es decir, sus atributos presentan grados de pertenencia relevantes para ser considerados en algún subconjunto difuso inicial.

Con el propósito de experimentar en forma simplificada, asumiremos que para cada uno de los 5 individuos de la muestra se dispone de los atributos genéricos de: competencia (C), habilidad (H) y necesidad (N), aún cuando ya sabemos que estas variables son grupales.

Por otra parte, ya habíamos convenido en que son los atributos quienes serán fusificados.

Sea  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  y sean los subconjuntos difuso

$$H = 0.2/x_1, 0.6/x_2, 0.4/x_3, 0.3/x_4, 0.7/x_5$$

$$C = 0.1/x_1, 0.4/x_2, 0.7/x_3, 0.2/x_4, 0.3/x_5$$

$$N = 0.0/x_1, 0.3/x_2, 0.5/x_3, 0.6/x_4, 0.1/x_5$$

Recordemos que:

$$T_L(a,b) = \text{Max}\{a + b - 1, 0\} = \text{Land}(a,b)$$

$$S_L(a,b) = \text{Min}\{a + b, 1\} = \text{Lor}(a,b)$$

$$T_L(a_1, \dots, a_n) = \text{Max} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i - n + 1, 0 \right\}$$

$$M(a_1, \dots, a_n) = f \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n f(a_i) \\ \dots \\ n \end{array} \right]$$

$$\text{Luego: Land}(h,c,n) = Z(x) = 0.0/x_1, 0.0/x_2, 0.0/x_3, 0.0/x_4, 0.0/x_5$$

$$\text{Land}(h,c) = \text{QS}(x) = 0.0/x_1, 0.0/x_2, 0.1/x_3, 0.0/x_4, 0.0/x_5$$

$$\text{Land}(h,n) = \text{QN}(x) = 0.0/x_1, 0.0/x_2, 0.0/x_3, 0.0/x_4, 0.0/x_5$$

$$\text{Land}(c,n) = \text{SN}(x) = 0.0/x_1, 0.0/x_2, 0.2/x_3, 0.0/x_4, 0.0/x_5$$

$$\text{Lor}(h,c,n) = Z^{\backslash}(x) = 0.3/x_1, 1.0/x_2, 1.0/x_3, 1.0/x_4, 1.0/x_5$$

$$\text{Lor}(h,c) = \text{QS}^{\backslash}(x) = 0.3/x_1, 1.0/x_2, 1.0/x_3, 0.5/x_4, 1.0/x_5$$

$$\text{Lor}(h,n) = \text{QN}^{\backslash}(x) = 0.2/x_1, 0.9/x_2, 0.9/x_3, 0.9/x_4, 0.8/x_5$$

$$\text{Lor}(c,n) = \text{SN}^{\backslash}(x) = 0.1/x_1, 0.7/x_2, 1.0/x_3, 0.8/x_4, 0.4/x_5$$

$$\text{Mean}(h,c,n) = 0.1/x_1, 0.4/x_2, 0.5/x_3, 0.4/x_4, 0.4/x_5$$

$$\text{Mean}(h,c) = 0.15/x_1, 0.5/x_2, 0.55/x_3, 0.25/x_4, 0.5/x_5$$

$$\text{Mean}(h,n) = 0.1/x_1, 0.45/x_2, 0.45/x_3, 0.45/x_4, 0.4/x_5$$

$$\text{Mean}(c,n) = 0.05/x_1, 0.35/x_2, 0.6/x_3, 0.4/x_4, 0.2/x_5$$

Los operadores Land, Lor y Mean nos muestran como se va discriminando cada uno de los individuos en función del valor de sus atributos, dando origen a subconjuntos más específicos aún; de esta forma podemos afirmar que por la vía de los operadores basados en las propiedades de intersección, unión y promedio, logramos clasificar pero también podríamos cuantificar algún tipo de índice.

A continuación, ahondaremos en la experimentación del uso de operadores promedio, tras la pista de los pesos relativos a los atributos de interés, para algún caso dado.

#### **4.4. Determinación de Pesos Relativos Usando Operadores OWA:**

Anteriormente experimentamos con operadores basados en las propiedades: intersección, unión y promedio; sin embargo, aún cuando estos operadores son útiles para clasificar, no incorporan la idea de importancia relativa, necesidad que fue advertida anteriormente.

Al no disponer de estudios concretos en las Ciencias Sociales, más específicamente en lo referido a la conducta humana, que permitan individualizar los pesos relativos de los atributos que caracterizan a un individuo en un rol concreto, es necesario utilizar algún operador que permita inferir dichos pesos a partir de los atributos medidos, para este propósito se utilizará el operador OWA.

Para el caso de los operadores OWA, recordemos que:

$$\text{Sea } W = (w_1, w_2, \dots, w_n), \text{ tal que } w_i \in [0,1]; \text{ con } \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j$$

Para nuestro caso consideraremos  $W = (0.05, 0.3, 0.1, 0.35, 0.2)$ , luego aplicamos  $F$  para  $H$ ,  $C$  y  $N$  respectivamente.

$$F_H(0.2, 0.6, 0.4, 0.3, 0.7) = 0.05*0.7 + 0.3*0.6 + 0.1*0.4 + 0.35*0.3 + 0.2*0.2$$

$$= 0.4$$

$$F_C(0.1, 0.4, 0.7, 0.2, 0.3) = 0.05*0.7 + 0.3*0.4 + 0.1*0.3 + 0.35*0.2 + 0.2*0.1$$

$$= 0.275$$

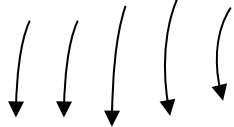
$$F_N(0.0, 0.3, 0.5, 0.6, 0.1) = 0.05*0.6 + 0.3*0.5 + 0.1*0.3 + 0.35*0.1 + 0.2*0.0$$

$$= 0.245$$

En esta experimentación aplicamos los pesos promedios ordenados sobre el grupo de grados de cercanía, dentro del mismo atributo, para el conjunto de individuos de la muestra, todo ello con el propósito de intentar determinar el peso relativo que tiene cada atributo; si esta muestra fuese representativa de individuos que exhiben altos índices de rendimiento laboral, a decir de sus empleadores, los pesos resultantes se pueden considerar como bastante cercanos a la realidad.

Nótese que se busca el peso promedio más representativo para cada una de las 3 macro variables.

$$W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$$



$$H = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$$

$$C = (a_1', a_2', a_3', a_4', a_5')$$

$$N = (a_1'', a_2'', a_3'', a_4'', a_5'')$$

La distribución asigna pesos distintos para cada individuo del mismo atributo.

Como se dispone de una muestra de individuos, donde cada uno de ellos exhibe algún grado de pertenencia con los atributos: h, c y n; aplicamos el operador OWA para ponderar y encontrar el “**peso más representativo**” de cada uno de los atributos.

Luego, genéricamente se tiene:

$$F_H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_{hj}, \text{ establece el peso promedio ordenado de la habilidad, } \forall x_i \in X.$$

$$F_C(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_{cj}, \text{ establece el peso promedio ordenado de la competencia, } \forall x_i \in X.$$

$$F_N(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_{nj}, \text{ establece el peso promedio ordenado de la necesidad, } \forall x_i \in X.$$

Anteriormente obtuvimos:  $F_H = 0.4$ ;  $F_C = 0.275$ ;  $F_N = 0.245$ ; notemos que:

$$1 - \left[ \sum_{j=1}^n w_j b_{hj} + \sum_{j=1}^n w_j b_{cj} + \sum_{j=1}^n w_j b_{nj} \right] \leq 0; \text{ este remanente representa un factor de incerteza, dado que estamos hablando de conductas humanas.}$$

De los resultados anteriores postulamos el siguiente modelo de rendimiento laboral, expresado en función de operadores OWA, para el operador de agregación F que condiciona dicho rendimiento laboral:

$$RL = F( h, c, n)$$

$$RL = H * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{hj} \right) + C * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{cj} \right) + N * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{nj} \right)$$

Para nuestro caso de estudio, corresponde a:

$$RL = H*0.4 + C*0.275 + N*0.245$$

Hasta este momento, hemos considerado posible poder disponer de una muestra de individuos representativos de alguna(s) organización(es) cuyos rendimiento laborales sean considerados altos; por otra parte, los valores del vector W son generados en forma aleatoria y por lo tanto no existe una predisposición para ponderar más alto un factor de otro; de igual forma, aún no incorporamos el hecho de que tanto las habilidades como las competencias y las necesidades son variables grupales que contemplan muchos factores elementales, los cuales podrían, a su vez, tener distintos pesos a la hora de ponderar cada una de las 3 macro variables en estudio.

Continuemos afinando el modelo propuesto para calcular el rendimiento laboral, a través de la inclusión de los atributos elementales.

#### **4.5. Modelo Matemático Propuesto Para el rendimiento Laboral:**

El modelo genérico para calcular el rendimiento laboral esperable de un individuo, luego de los resultados obtenidos anteriormente, toma la siguiente forma:

**Modelo de Cálculo del Rendimiento Laboral (MM1)**

$$R_{Li} = H_i * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{Hj} \right) + C_i * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{Cj} \right) + N_i * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{Nj} \right), \forall i = 1, \dots, n;$$

donde  $R_{Li}$  es el rendimiento laboral esperable del individuo  $x_i \in X$ , del total de  $n$  individuos de la muestra bajo estudio.

**Fig.#30: Forma general de calcular el rendimiento laboral esperable.**

Para nuestro caso de estudio se tiene:

$$\begin{aligned} RL_1 &= (0.2, 0.1, 0.0) = 0.108 & RL_2 &= (0.6, 0.4, 0.3) = 0.424 \\ RL_3 &= (0.4, 0.7, 0.5) = 0.475 & RL_4 &= (0.3, 0.2, 0.6) = 0.322 \\ RL_5 &= (0.7, 0.3, 0.1) = 0.387 \end{aligned}$$

Hasta ahora se han trabajado los factores elementales vinculados a las variables macro aplicando funciones de agregación, sin hacer distinciones entre una u otra potencial familia de rendimientos laborales; sin embargo, cuando se asocian los roles específicos para una organización, surge la necesidad de establecer grupos o familias de rendimientos laborales, los cuales pueden obedecer a la tipificación clásica de niveles corporativos, esto es: nivel estratégico, nivel táctico y nivel operacional.

Aún quedan varios aspectos por resolver antes de considerar que el modelo propuesto es aceptable, como es el caso de: importancias relativas efectivas por cada macro variables, inclusión de los atributos vinculados directamente con un rol concreto. Continuemos avanzando en el proceso de refinamiento del modelo postulado.

#### **4.6. Optimización del Modelo MM1:**

Como vimos anteriormente, el modelo **MM1** para calcular el rendimiento o desempeño, está diseñado pensando en un eventual acercamiento para establecer el peso de cada una de las macro variables.

$$RL = H * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{hj} \right) + C * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{cj} \right) + N * \left( \sum_{j=1}^n w_j b_{nj} \right)$$

Este modelo supone que todos los factores o variables elementales tienen igual importancia relativa, sin vincular el rol al cual están asociados; por otra parte, los valores de: H, C y N, corresponden al supuesto grado de pertenencia más representativo de los grados de pertenencia presentes en el individuo para: las competencias, habilidades y necesidades.

Volvamos a retomar la fuzzificación de las variables, tanto macro como elementales, asociadas al rendimiento laboral y vinculadas de alguna forma con un rol específico. Por ejemplo: para el rol “ingeniero de proyectos”, según (**MTRP**), el perfil predominante está caracterizado por:

Competencias: CC, CI, CT.



Habilidades: H1, H4, H6, H11, H13, H14, H17, H18, H21, H23, H25, H27, H29, H32, H33, H34.

Necesidades: NA, NR, NX, NY, NMG, NME, NMEX, MC, ML.

Sabemos que cada una de estas variables elementales exhibe un grado de pertenencia, claro está que cualesquier individuo de una muestra de estudio ( $\forall x_i \in X, i = 1, \dots, n$ ) presenta todos los factores elementales, pero centraremos la atención en aquellos  $x_i$  que caracterizan al rol de interés:

$$X = \{ (x_i, \mu_{ij}) / i = 1, \dots, n / j = 1, \dots, k / \mu_{ij} \rightarrow [0, 1] \}$$

Donde:  $n \rightarrow$  Cantidad de individuos en la muestra.

$k \rightarrow$  Cantidad de atributos o factores elementales que caracterizan al individuo.

$\mu \rightarrow$  Grado de pertenencia de un atributo o factor elemental.

Como  $X$  es un conjunto difuso, cualesquier  $A, B \subseteq X$  también serán conjuntos difuso pero formalmente les corresponde la denominación de subconjuntos difuso; luego podemos señalar que  $\forall x_i$  que cumpla con la caracterización de perfil predominante de un ingeniero de proyectos (IDP), pertenece a un subconjunto difuso específico.

Genéricamente se tiene:

$$IDP = \{ (x_i, \mu_{ij}) / i = 1, \dots, n / \forall j = CC, CI, CT, H1, H4, H6, H11, H13, H14, H17, H18, H21, H23, H25, H27, H29, H32, H33, H34, NA, NR, NX, NY, NMG, NME, NMEX, MC, ML \}; \forall x_i \in X, \forall \mu_{ij} = \alpha \in [0, 1] \} \quad [21]$$

El valor del grado de pertenencia del atributo  $j$  para el individuo  $i$  ( $\mu_{ij}$ ) debe ser lo suficientemente alto como para asegurar que el atributo está presente con cierta nitidez, luego el valor mínimo será un cierto  $\alpha$ -corte, por lo tanto:

$$\mu_{ij} = \alpha \in [0,1], \alpha \geq \alpha\text{-corte}$$

Se podría suponer, dados los estudios cualitativos de las Ciencias del Comportamiento Humano, que un valor razonable para  $\alpha$ -corte es 0.6 o superior.

De **[21]** reconocemos que  $j$  involucra 28 atributos distintos y que idealmente debiera darse:

$X_i$  podrá optar al rol IDP ssi  $\mu_{ij} \geq \alpha\text{-corte}$ ,  $\forall j$  definido en **[21]**; es decir,

$$(\text{Min}_{j=1}^{28} (\mu_{ij}) \geq \alpha\text{-corte})$$

Por otra parte, se puede esperar que  $x_i$  exhiba, con alta probabilidad, un rendimiento laboral en dicho rol, igual a  $R_i$ , de **[MM1]**.

Sin duda que un mismo atributo para 2 roles distintos tendrá, eventualmente, importancias o pesos diferentes.

Con el propósito de encontrar la importancia relativa más representativa para un cierto atributo (factor elemental (cierta habilidad, cierta competencia, cierta necesidad)) vinculado con un rol específico, proponemos el siguiente modelo:

### **Base Para Determinar Importancias Tipo**

**[23]**

Sea  $P = \{(p_i, \mu_{ij}), \forall i = 1, \dots, k ; j = \text{el atributo en análisis}\}$ ; tal que  $k$  corresponde al total de individuos en una muestra aleatoria de estudio, donde  $P$  es el conjunto de las  $k$  personas que ejercen el mismo rol específico, en una organización tipo, exhibiendo rendimientos laborales considerados altos.

El peso o importancia del atributo  $j$  en el rol  $r$  está dado por la resultante de aplicar el operador OWA sobre los  $\mu_{ijr}$ , lo que genéricamente se expresa por:

**Modelo Importancia Del Atributo j En El Rol r**

**[24]**

$$\text{Sea } W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}, \text{ tal que } w_i \in [0,1]; \text{ con } \sum_{i=1}^k w_i = 1$$

$$F_{jr}(p_1, p_2, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^k w_i \cdot \sum (w_i * \mu_{ijr}) \text{ con } \mu_{ijr} \text{ ordenados descendientemente;}$$

en adelante denominado por  $F_{jr}$

**Fig.#31: Expresión para calcular la importancia de un atributo específico.**

De la misma forma como obtuvimos la importancia del atributo  $j$  en el rol  $r$ , también podemos obtener el grado de pertenencia más representativo por cada macro variable vinculada al rol concreto  $r$ , nos referimos a: H, C y N; como estamos hablando de grado de pertenencia por grupo de variables elementales, proponemos aplicar la propiedad de intersección entre todos los grados de pertenencia de los factores elementales, agrupados por macro variable, usando la misma muestra de  $k$  individuos altamente ordenados; lo que genéricamente toma la forma de:

**Grado De Pertenencia Más Representativo Por Macro Variable En Rol r [25]**

Haciendo uso del potencial de la propiedad de intersección, sabemos que el mínimo valor representa a los casos iguales o mejores que aquel que tiene mínima magnitud, por lo tanto proponemos:

$$H_r = \text{Min} (\mu_{\text{Habilidades } r i}), \forall \text{ habilidades requeridas en } r, i = 1, \dots, k$$

$$C_r = \text{Min} (\mu_{\text{Competencias } r i}), \forall \text{ competencias requeridas en } r, i = 1, \dots, k$$

$$N_r = \text{Min} (\mu_{\text{Necesidades } r i}), \forall \text{ necesidades requeridas en } r, i = 1, \dots, k$$

Por ejemplo: Para el rol IDP se tiene:

$$C_{IDP} = \text{Min} (\mu_{CCI}, \mu_{CII}, \mu_{CTI}), i = 1, \dots, k$$

$$H_{IDP} = \text{Min} (\mu_{H1i}, \mu_{H4i}, \mu_{H6i}, \mu_{H11i}, \mu_{H13i}, \mu_{H14i}, \mu_{H17i}, \mu_{H18i}, \mu_{H21i}, \mu_{H23i}, \mu_{H25i}, \mu_{H27i}, \mu_{H29i}, \mu_{H32i}, \mu_{H33i}, \mu_{H34i}), i = 1, \dots, k$$

$$N_{IDP} = \text{Min} (\mu_{NAi}, \mu_{NRi}, \mu_{NXi}, \mu_{NYi}, \mu_{NMGi}, \mu_{NMEi}, \mu_{NMEXi}, \mu_{NMCi}, \mu_{NMLi}), i = 1, \dots, k$$

Por otra parte, en el caso de los términos:  $b_{hj}$ ,  $b_{cj}$  y  $b_{nj}$ , presentes en **[MM1]**, es necesario individualizar los factores elementales vinculados al rol para referenciar sólo los grados de pertenencia correspondientes a tales factores, estos grados de pertenencia son los que están suficientemente presentes ( $\mu_{ijr} \geq \alpha - \text{corte}$ ) en el individuo para el cual se desea calcular su rendimiento laboral; luego se propone:

**Elementos b De La Secuencia De Interés, En El Rol r** [26]

$$b_{hr} = \{ \mu_{\text{Habilidades } l_r}, l = 1, \dots, \text{total habilidades requeridas en r orden descendente} \}$$

$$b_{cj} = \{ \mu_{\text{Competencias } k_r}, k = 1, \dots, \text{total competencias requeridas en r orden descendente} \}$$

$$b_{nj} = \{ \mu_{\text{Necesidades } m_r}, m = 1, \dots, \text{total necesidades requeridas en r orden descendente} \}$$

Luego, al utilizar en [MM1] los resultados obtenidos en [25] y [26], se postula el modelo de cuantificación del rendimiento laboral esperable en un rol r:

**Modelo De Cuantificación Del Rendimiento Laboral Esperable En El Rol r** [MM2]

$$RL_r = H_r * \left( \sum_{i=1}^k w_i b_{hri} \right) + C_r * \left( \sum_{i=1}^l w_i b_{cri} \right) + N_r * \left( \sum_{i=1}^m w_i b_{nri} \right) \quad [27]$$

Donde:  $H_r$ ,  $C_r$  y  $N_r$  corresponden a las importancias relativas de las habilidades, competencias y necesidades en el rol r;  $b_{hri}$ ,  $b_{cri}$  y  $b_{nri}$  corresponden a las habilidades, competencias y necesidades (variables elementales) presentes en el individuo ha ser evaluado; requiriéndose: k habilidades para el rol, l competencias para dicho rol, m necesidades para tal rol;  $w_i$  corresponde al peso promedio ordenado (OWA).

**Fig.#32: Forma de calcular el rendimiento laboral en un rol específico.**

Por ejemplo: Para el rol IDP se tiene:

$$\begin{aligned}
 RL_{IDP} = & H_{IDP} * [(W_1 . \mu_{H1}) + (W_2 . \mu_{H4}) + (W_3 . \mu_{H6}) + (W_4 . \mu_{H11}) + (W_5 . \mu_{H13}) + \\
 & (W_6 . \mu_{H14}) + (W_7 . \mu_{H17}) + (W_8 . \mu_{H18}) + (W_9 . \mu_{H21}) + (W_{10} . \mu_{H23}) + (W_{11} . \mu_{H25}) \\
 & + (W_{12} . \mu_{H27}) + (W_{13} . \mu_{H29}) + (W_{14} . \mu_{H32}) + (W_{15} . \mu_{H33}) + (W_{16} . \mu_{H34}) ] + \\
 & C_{IDP} * [(W_1 . \mu_{CC}) + (W_2 . \mu_{CI}) + (W_3 . \mu_{CT}) ] + \\
 & N_{IDP} * [(W_1 . \mu_{NA}) + (W_2 . \mu_{NR}) + (W_3 . \mu_{NX}) + (W_4 . \mu_{NY}) + (W_5 . \mu_{NMG}) + \\
 & (W_6 . \mu_{NME}) + (W_7 . \mu_{NMEX}) + (W_8 . \mu_{NMC}) + (W_9 . \mu_{NML}) ]
 \end{aligned}$$

Condicionado a:  $\mu_{H1} > \mu_{H4} > \dots > \mu_{H34}$ ;  $\mu_{CC} > \mu_{CI} > \mu_{CT}$ ;  $\mu_{NA} > \mu_{NR} > \dots > \mu_{NML}$

En este punto de la tesis disponemos de un modelo que permite cuantificar el rendimiento laboral de un individuo para un rol concreto en una organización, y más específicamente en una empresa, cuando los atributos involucrados tienen grados de pertenencia medidos en forma cuantitativa; sin embargo, cuando los atributos asociados a un rol no registran grados de pertenencia concretos, a lo más se reconoce que están contenidos en un cierto intervalo, el cual será individualizado por una etiqueta; exploremos este escenario con miras a intentar diseñar un modelo de medición del rendimiento laboral en estas nuevas condiciones.

#### **4.7. Modelo de Medición del Rendimiento Laboral Esperable en el Rol “r”, Basado en Etiquetas Lingüísticas:**

Hasta ahora hemos visualizado que el rendimiento laboral esperable se pueda expresar como un valor numérico  $\in [0,1]$ , del tipo difuso al igual que los parámetros de predicción usados (con grados de pertenencia o cercanía); sin embargo, existen ocasiones en las cuales los parámetros predictivos no pueden ser medidos cuantitativamente, ya que su grado de vaguedad sobrepasa los límites, siendo únicamente posible reconocer que están dentro de un cierto intervalo pero desconociéndose su grado de pertenencia, en estas condiciones

tales parámetros son asociados con las etiquetas lingüísticas identificadoras de los intervalos reconocidos.

Independiente de la forma que adopten los atributos considerados predictores, es necesario acoger la idea de “ponderar” cada uno de estos, para obtener un “valor” final considerado el “rendimiento laboral esperable” (concepción básica del proceso de agregación de información); todo ello, partiendo de la premisa de que todos los atributos tienen igual importancia.

Para los atributos con forma numérica “ $\mu_i$ ” (grados de pertenencia) se utilizó el operador OWA, dando origen al modelo de cálculo del rendimiento laboral esperable, en su forma general **[MM1]** y forma optimizada **[MM2]**; no obstante, falta encontrar una manera de determinar el rendimiento laboral cuando los atributos se vinculan con etiquetas lingüísticas.

Delgado M., Herrera F., Herrera-Viedma E., Martínez L. [15]; Delgado M., Herrera F., Herrera-Viedma E., Verdegay J. L., Vila M. A. [16]; Herrera F., López E., Mendaña C., Rodríguez M. A. [35]; Herrera F., Herrera-Viedma E., Verdegay J. L. [33]; Herrera F., Herrera-Viedma E. [34]; Delgado M., Verdegay J. L., Vila M. A. [17]; ilustran el operador LOWA, descrito en el capítulo 2, este operador reúne las condiciones de:

- Acoger atributos o parámetros lingüísticos.
- Incorporar el uso de ponderadores generados por un método formal (cuantificador lingüístico de Yager).
- Más que calcular, el operador selecciona.
- Todos los atributos tienen igual importancia relativa.

Cuando focalizamos la atención en un rol concreto, identificamos los 3 grupos de parámetros (macro variables) vinculados, establecidos como predictores:

$H_{ri}$ ; Habilidades requeridas para el rol, expresadas como etiquetas lingüísticas.

$C_{rj}$ ; Competencias requeridas para el rol, expresadas como etiquetas lingüísticas.

$N_{rk}$ ; Necesidades requeridas para el rol, expresadas como etiquetas lingüísticas.

Como necesitamos medir (seleccionar) cualitativamente las habilidades, competencias y necesidades demandadas por el rol, usando el operador LOWA encontramos el camino que lleva a esta medición; para ello determinamos el valor resultante de las siguientes expresiones:

$\emptyset_Q(H_{r1}, \dots, H_{ri})$ ; Etiqueta más representativa de las habilidades requeridas en el rol r.

$\emptyset_Q(C_{r1}, \dots, C_{rj})$ ; Etiqueta más representativa de las competencias requeridas en el rol r.

$\emptyset_Q(N_{r1}, \dots, N_{rk})$ ; Etiqueta más representativa de las necesidades requeridas en el rol r.

**[30]**

Las expresiones precedentes tratan por separado las habilidades de las competencias y de las necesidades, ya que si existe alguna forma de conocer la importancia de cada una de estas macro variables en un rol específico "r", serán requeridas de manera independiente para las fases posteriores que originen el rendimiento laboral esperable.

Analicemos en detalle lo que ocurre cuando abordamos un rol concreto.



Por ejemplo: del modelo **(MTRP)**, el rol de “Ingeniero de Proyectos” (IDP) exhibe un perfil caracterizado por:

- Competencias: CC, CI, CT.
- Habilidades: H1, H4, H6, H11, H13, H14, H17, H18, H21, H23, H25, H27, H29, H32, H33, H34.
- Necesidades: NA, NR, NX, NY, NMG, NME, NMEX, NMC, NML.

Aún cuando también están presentes los restantes atributos citados en **(MTRP)**.

Luego el subconjunto difuso de interés se denota por:

$$X = \left\{ \left( x_i, s_{ij} \right) / i = 1, \dots, n / j = 1, \dots, k / s_{ij} \in \{S\} \right\}$$

Donde:

n es la cantidad de individuos en la muestra.

k es la cantidad de atributos que caracterizan al individuo.

s es la etiqueta lingüística vinculada a cada atributo.

S={nulo, bajo, regular, alto, muy alto, perfecto}

0      1      2      3      4      5

En una primera aproximación se podría esperar que todos los atributos de un individuo en estudio fuesen suficientemente altos, asegurando que la selección sea satisfactoria, esto es, suponiendo que  $s_3$  es considerado satisfactorio:

$$s_{ij} = \beta \in \{S\}, \beta \geq \beta - \text{corte}$$

Luego cualesquier candidato  $x_i \in X$  sería seleccionable si:

$$\text{Min} \left( \left( \begin{matrix} 28 \\ S_{ij} \\ j=1 \end{matrix} \right) \geq \beta - \text{corte} \right)$$

En la práctica, pocos individuos exhiben estas condiciones, por lo tanto continuaremos utilizando el operador LOWA, al objeto de seleccionar la etiqueta más representativa.

De [30] obtuvimos las etiquetas más representativas para habilidades, competencias y necesidades, vinculadas al rol  $r$ , pero falta integrar todo en una sola expresión; en estas condiciones surgen 2 caminos asociados a las importancias relativas de las macro variables: H, C y N:

- a) Cuando se dispone de tales importancias.
- b) Cuando no es posible contar con dichas importancias.

**Para el camino (a):**

En [25] se presentó un modelo para determinar la importancia relativa de cada macro variable, partiendo del estudio de una muestra de  $k$  individuos altamente rankeados en un mismo rol en diversas organizaciones, dando origen a:

$$H_r = \text{Min}(\mu_{hab's_{ri}}), \forall \text{ hab's requeridas en } r, i=1, \dots, k$$

$$C_r = \text{Min}(\mu_{comp's_{ri}}), \forall \text{ comp's requeridas en } r, i=1, \dots, k$$

$$N_r = \text{Min}(\mu_{nec's_{ri}}), \forall \text{ nec's requeridas en } r, i=1, \dots, k$$

En el punto en que nos encontramos y a modo de diferenciación entre modelos, haremos:

$$PH_r = H_r$$

$$PC_r = C_r$$

$$PN_r = N_r$$

Cabe señalar que:  $PH_r \in [0,1]$ ,  $PC_r \in [0,1]$ ,  $PN_r \in [0,1]$ ; luego tenemos un vector  $W_r = \{PH_r, PC_r, PN_r\}$ , el cual se puede aplicar sobre:

$$A_r = (\emptyset_Q(H_{r1}, \dots, H_{ri}), \emptyset_Q(C_{r1}, \dots, C_{rj}), \emptyset_Q(N_{r1}, \dots, N_{rk}))$$

Si se aplica un operador como LOWA, en toda su plenitud, sobre  $A_r$  con  $W_r$ , los valores de:

$$\emptyset_Q(H_{r1}, \dots, H_{ri})$$

$$\emptyset_Q(C_{r1}, \dots, C_{rj})$$

$$\emptyset_Q(N_{r1}, \dots, N_{rk})$$

cambiarán de posición y por lo tanto, los valores de:  $PH_r$ ,  $PC_r$ ,  $PN_r$ , perderán su vinculación.

En virtud de las consideraciones precedentes se postula el siguiente modelo de selección para establecer el rendimiento laboral esperable para etiquetas lingüísticas, con distintos pesos (importancias relativas conocidas) en las macro variables:

**Modelo de Selección (Medición) del Rendimiento Laboral Esperable  
Para Etiquetas Lingüísticas**

[MM3]

$$RLE_{r1} = PH_r * \emptyset_Q(H_{r1}, \dots, H_{ri}) + PC_r * \emptyset_Q(C_{r1}, \dots, C_{rj}) + PN_r * \emptyset_Q(N_{r1}, \dots, N_{rk})$$

Su aplicación está regida como el operador LOWA, con la restricción de que los componentes de  $W_r$  no pueden ser reubicados, lo que denotaremos por el operador  $\emptyset^F$ ; luego **[MM3]** toma la siguiente forma:

**Modelo Optimizado de Medición del Rendimiento Laboral Esperable,**  
**Para Etiquetas Lingüísticas**

**[MM4]**

$$RLE_{r1} = \emptyset^F(\emptyset_Q(H_{r1}, \dots, H_{ri}), \emptyset_Q(C_{r1}, \dots, C_{rj}), \emptyset_Q(N_{r1}, \dots, N_{rk}))$$

con  $W_r = \{PH_r, PC_r, PN_r\}$

Por ejemplo: para el rol IDP se tiene:

$$W_{IDP} = \{W_{HIDP}, W_{CIDP}, W_{NIDP}\}$$

$$RLE_{IDP1} = \emptyset^F(\emptyset_Q(H_1, H_4, H_6, H_{11}, H_{13}, H_{14}, H_{17}, H_{18}, H_{21}, H_{23}, H_{25}, H_{27}, H_{29}, H_{32}, H_{33}, H_{34}), \emptyset_Q(CC, CI, CT), \emptyset_Q(NA, NR, NX, NY, NMG, NME, NMEX, NMC, NML))$$

$$RLE_{IDP1} = C^3\left\{W_{HIDP}, [C^{16}\left\{(W_1, H_1), (W_2, H_4), (W_3, H_6), (W_4, H_{11}), (W_5, H_{13}), (W_6, H_{14}), (W_7, H_{17}), (W_8, H_{18}), (W_9, H_{21}), (W_{10}, H_{23}), (W_{11}, H_{25}), (W_{12}, H_{27}), (W_{13}, H_{29}), (W_{14}, H_{32}), (W_{15}, H_{33}), (W_{16}, H_{34})\right\}]\right\}$$

$$(W_{CIDP}, [C^3 \{ (W_1, CC), (W_2, CI), (W_3, CT) \} ]),$$

$$(W_{NIDP}, [C^9 \{ (W_1, NA), (W_2, NR), (W_3, NX), (W_4, NY), (W_5, NMG),$$

$$(W_6, NME), (W_7, NMEX), (W_8, NMC), (W_9, NML) \} ]])$$

Sujeto a:  $H_1 > H_4 > H_6 > \dots > H_{34}$ ;

$$CC > CI > CT;$$

$$NA > NR > \dots > NML$$

**Para el camino (b):**

Como no se dispone de las importancias relativas de las macro variables: H, C y N, se puede generar el vector  $W_r$  a través del cuantificador lingüístico de Yager, el cual se aplicará sobre:

$$A_r = (\emptyset_Q(H_{r1}, \dots, H_{ri}), \emptyset_Q(C_{r1}, \dots, C_{rj}), \emptyset_Q(N_{r1}, \dots, N_{rk}));$$

dado que ningún término de  $A_r$  tiene mayor o menor importancia, es posible aplicar el operador LOWA sobre  $A_r$  con  $W_r$ , siguiendo todas sus restricciones y/o condiciones.

En virtud del análisis precedente se postula el siguiente modelo de medición (selección) para determinar el rendimiento laboral esperable para etiquetas lingüísticas con igual peso en las macro variables:

**Modelo de Medición del Rendimiento Laboral Esperable, Para Etiquetas Lingüísticas con Igual Peso en las Macro Variables**

[MM5]

$$RLE_{r,2} = \emptyset_Q \{ \emptyset_Q(H_{r1}, \dots, H_{ri}), \emptyset_Q(C_{r1}, \dots, C_{rj}), \emptyset_Q(N_{r1}, \dots, N_{rk}) \}$$

Por ejemplo: para el rol IDP se tiene:

$$RLE_{IDP2} = \emptyset_Q \{ \emptyset_Q(H_1, H_4, H_6, H_{11}, H_{13}, H_{14}, H_{17}, H_{18}, H_{21}, H_{23}, H_{25}, H_{27}, H_{29}, H_{32}, H_{33}, H_{34}), \emptyset_Q(CC, CI, CT), \emptyset_Q(NA, NR, NX, NY, NMG, NME, NMEX, NMC, NML) \}$$

$$RLE_{IDP2} = C^3 \{ (W_1, [C^{16} \{ (W_1, H_1), (W_2, H_4), (W_3, H_6), (W_4, H_{11}), (W_5, H_{13}), (W_6, H_{14}), (W_7, H_{17}), (W_8, H_{18}), (W_9, H_{21}), (W_{10}, H_{23}), (W_{11}, H_{25}), (W_{12}, H_{27}), (W_{13}, H_{29}), (W_{14}, H_{32}), (W_{15}, H_{33}), (W_{16}, H_{34}) \}]), (W_2, [C^3 \{ (W_1, CC), (W_2, CI), (W_3, CT) \}]), (W_3, [C^9 \{ (W_1, NA), (W_2, NR), (W_3, NX), (W_4, NY), (W_5, NMG), (W_6, NME), (W_7, NMEX), (W_8, NMC), (W_9, NML) \}]) \}$$

#### **4.8. Grado de Aptitud en el Rol:**

Para el caso particular de la cuantificación del rendimiento laboral a partir de los atributos con sus correspondientes grados de pertenencia, como lo determina el modelo [MM2], surge la siguiente interrogante: ¿Qué tan cerca están los atributos de su importancia relativa?, la respuesta a esta pregunta nos lleva a establecer el “grado de aptitud del individuo para el rol”, veamos como abordamos este nuevo desafío.

Cuando se plantea el grado de aptitud de un individuo en un rol concreto, debemos comenzar por individualizar el rol de interés, para el cual, según los aportes de las Ciencias del Comportamiento, habrá un conjunto de habilidades, competencias y necesidades que deben estar presentes en el individuo en estudio; es decir, como se señaló en [25], el rol (r) demanda: Hr, Cr y Nr.

Genéricamente podemos expresar que el individuo  $x_i$  exhibe:

- Las habilidades:  $H_1, H_2, \dots, H_L$ ; con grados de pertenencia:  $\mu_{H1}, \mu_{H2}, \dots, \mu_{HL}$ .
- Las competencias:  $C_1, C_2, \dots, C_k$ ; con grados de pertenencia:  $\mu_{c1}, \mu_{c2}, \dots, \mu_{ck}$ .
- Las necesidades:  $N_1, N_2, \dots, N_m$ ; con grados de pertenencia:  $\mu_{N1}, \mu_{N2}, \dots, \mu_{Nm}$ .

Sin embargo; para el rol específico “r”, cada uno de los atributos elementales:  $H_1, H_2, \dots, H_L, C_1, C_2, \dots, C_k, N_1, N_2, \dots, N_m$ , tienen importancias relativas distintas ( $p_{H1}, p_{H2}, \dots, p_{HL}, p_{C1}, p_{C2}, \dots, p_{Ck}, p_{N1}, p_{N2}, \dots, p_{Nm}$ ); luego surge la necesidad de valorar cada  $\mu_{\text{atributo } j}$  con respecto a la medida de importancia  $p_{\text{atributo } j}$ ; en [24] propusimos un modelo matemático para determinar tal importancia ( $F_{jr}$ ), la cual está dada por:

$$F_{jr}(p_1, p_2, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^k (w_i * \mu_{ijr}), \text{ con } \mu_{ijr} \text{ ordenados descendientemente.}$$

Corresponde ahora encontrar una forma de valorar, para cada atributo elemental, su grado de pertenencia con respecto a la importancia del atributo j; es decir, relacionar  $\mu_{ijr}$  con  $F_{jr}$ .

Tizhoosh [60] ilustra, a partir de la medida difuso o medida Sugeno, como es posible ponderar las diversas importancias relativas de cada uno de los atributos de un individuo, vinculados o convergentes con un propósito concreto; en

estas condiciones la medida Sugeno corresponde a una suerte de importancia deducida del subconjunto difuso en análisis.

Recordemos que en la medida Sugeno o medida difuso “g” sobre un conjunto X, donde  $E \subset X$  y  $F \subset X$ , se cumplen:

- 1)  $g(0) = 0; g(x) = 1$
- 2) Si  $E \subset F$  , entonces  $g(E) \leq g(F)$

Luego:

$$gs(E \cup F) = gs(E) + gs(F) + \lambda gs(E) gs(F); \text{ con } \lambda > (-1) \quad [28]$$

$$\text{donde } (1+\lambda) = \prod_{i=1}^n (1+\lambda g_i) .$$

Pero en [24] propusimos un modelo para calcular  $F_{jr}$  ; por lo tanto, si se tiene un conjunto de n atributos de un mismo individuo con importancias relativas  $F_{jr}$  , para  $j = 1, \dots, n$ , donde r es el rol específico en estudio; la medida Sugeno corresponde a:

$X = (x_1, \dots, x_n)$ , con importancias  $F_r(x) = (F_{1r}, \dots, F_{nr})$ , entonces:

$$gs(x_1) = F_{1r}, \dots, gs(x_n) = F_{nr}$$

$$gs(x_1, x_2) = gs(x_1) + gs(x_2) + \lambda gs(x_1) gs(x_2)$$

$$gs(x_1, x_2) = F_{1r} + F_{2r} + \lambda (F_{1r} * F_{2r})$$

$$gs(x_1, x_2, x_3) = gs(x_1, x_2) + gs(x_3) + \lambda gs(x_1, x_2) gs(x_3)$$

$$gs(x_1, x_2, x_3) = (F_{1r} + F_{2r} + \lambda (F_{1r} * F_{2r})) + F_{3r} + \lambda (F_{1r} + F_{2r} + \lambda (F_{1r} * F_{2r})) * F_{3r} \quad [29]$$

$$gs(x_1, \dots, x_n) = 1$$

**NOTA:**  $gs(x_1, x_2)$  es la medida Sugeno del subconjunto difuso  $\{x_1, x_2\}$ .

Pero así como existe  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , con importancias  $\{F_{1r}, \dots, F_{nr}\}$  de los n atributos que inciden en el rol “r”, cada atributo presenta un grado de pertenencia  $\mu_{ir}$ , luego se dispone de  $\{\mu_{1r}, \dots, \mu_{nr}\}$ .



En Tizhoosh [60] queda clara la relación entre las medidas Sugeno calculadas y la integral de Sugeno, la cual busca ponderar las distancias entre el grado de pertenencia del atributo con respecto a su importancia relativa, en virtud de la convergencia entre los distintos atributos involucrados con el rol “r”.

Recordemos que la integral de Sugeno se calcula como:

$$\int_E h(x) \circ g = \bigvee_{i=1}^n [h(x_i) \wedge g(H_i)]; H_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$$

con  $h(x)$  ordenado descendientemente;  $E$  corresponde al subconjunto de atributos de  $X$  que están involucrados en el propósito deseado, en este caso el rol “r”; lo que permite postular el siguiente modelo de cálculo del grado de aptitud ante un rol específico:

**Modelo de Cuantificación de Grado de Aptitud Ante un Rol Concreto [MM6]**

$$\text{GradoAptitudAlRol}_r = \text{Max}[\text{Min}(\mu_{ijr}, \text{MedSug}_{ijr}), \text{Min}(\mu_{i(j+1)r}, (\text{MedSug}_{ijr}, \text{MedSug}_{i(j+1)r})), \dots, \text{Min}(\mu_{ivr}, (\text{MedSug}_{ijr}, \text{MedSug}_{i(j+1)r}, \dots, \text{MedSug}_{ivr}))]$$

[33]

**Fig.#33: Forma de calcular el grado de aptitud para un rol específico.**

**NOTA:** Al combinar los conceptos de “Medida Sugeno” e “Integral de Sugeno”, podemos decir:

“Cada atributo aporta su importancia relativa, pero al combinarlo con otros atributos, estas importancias relativas se mutan, adoptando la forma de medida Sugeno; estas medidas Sugeno son el punto de entrada para calcular la integral de Sugeno, la que calcula el grado de adecuación de todos los atributos observados, en un mismo individuo, para un cierto propósito”.

Por ejemplo: Supongamos que el cumplimiento de una tarea esté determinado por los siguientes atributos (factores determinantes):

- Respeto al horario.
- Logro de funciones.
- Interacción social.
- Obediencia a normas.

con importancias relativas: 15%, 40%, 15% y 30% respectivamente.

Por otra parte, se ha detectado que 2 individuos presentan los siguientes grados de pertenencia por atributo:

Atributo	Juan Pérez	Claudio Soto
Horario	$\mu_1 = 0.50$	$\mu_1 = 0.70$
Logro	$\mu_2 = 0.75$	$\mu_2 = 0.60$
Interacc. Social	$\mu_3 = 0.40$	$\mu_3 = 0.30$
Obediencia	$\mu_4 = 0.50$	$\mu_4 = 0.60$

**Calculemos primero las medidas Sugeno:**

Sabemos que:  $gs(x_1) = 0.15$ ,  $gs(x_2) = 0.40$ ,  $gs(x_3) = 0.15$ ,  $gs(x_4) = 0.30$ , y los otros casos los determinamos de:  $gs(E \cup F) = gs(E) + gs(F) + \lambda gs(E) gs(F)$ ; con  $\lambda > (-1)$  y donde  $(1+\lambda) = \prod_i (1+\lambda g_i)$ .

Es decir:

$$(1+\lambda) = (1+\lambda gs(x_1)) (1+\lambda gs(x_2)) (1+\lambda gs(x_3)) (1+\lambda gs(x_4))$$

$$(1+\lambda) = (1+\lambda 0.15) (1+\lambda 0.40) (1+\lambda 0.15) (1+\lambda 0.30)$$

$$(1+\lambda) = (1+\lambda + 0.353\lambda + 0.0518\lambda + 0.0027\lambda)$$

De la ecuación surge  $\lambda = 0$ , por lo tanto se obtienen las siguientes medidas de  $h(x)$ :

$$gs(x_2, x_1) = gs(x_2) + gs(x_1) + \lambda gs(x_2) gs(x_1)$$

$$gs(x_2, x_1) = 0.4 + 0.15 = 0.55$$

$$gs(x_2, x_1, x_3) = 0.55 + 0.15 = 0.70$$

$$gs(x_2, x_1, x_4) = 0.55 + 0.30 = 0.85$$

$$gs(x_1, x_2) = 0.15 + 0.40 = 0.55$$

$$gs(x_1, x_2, x_4) = 0.55 + 0.30 = 0.85$$

$$gs(x_2, x_1, x_4, x_3) = 0.85 + 0.15 = 1.00$$

**Calculemos ahora la integral de Sugeno:**

$$\int_{JP} h(x) \circ g = \vee [h(x_2) \wedge gs(x_2), h(x_1) \wedge gs(x_2, x_1), h(x_4) \wedge gs(x_2, x_1, x_4),$$

$$h(x_3) \wedge gs(x_2, x_1, x_4, x_3)]$$

$$\int_{JP} h(x) \circ g = \text{Max}[\text{Min}(0.75, 0.4), \text{Min}(0.5, 0.55), \text{Min}(0.5, 0.85), \text{Min}(0.4, 1.0)]$$

$$= \text{Max}[0.4, 0.5, 0.5, 0.4] = 0.5$$

$$\int_{CS} h(x) \circ g = \vee [h(x_1) \wedge gs(x_1), h(x_2) \wedge gs(x_1, x_2), h(x_4) \wedge gs(x_1, x_2, x_4),$$

$$h(x_3) \wedge gs(x_1, x_2, x_4, x_3)]$$

$$\int_{CS} h(x) \circ g = \text{Max}[\text{Min}(0.7, 0.15), \text{Min}(0.6, 0.55), \text{Min}(0.6, 0.85), \text{Min}(0.3, 1.00)]$$

$$= \text{Max}[0.15, 0.55, 0.6, 0.3] = 0.6$$

Luego, **el individuo más apto es Claudio Soto (CS)**, ya que cumple o cumplirá mejor la tarea.

De acuerdo con estas ideas, genéricamente podemos escribir:

$$\int_E h(x)og = \underset{i=1}{\vee}^n [(\mu_{1r} \wedge g^s(x_1)), (\mu_{2r} \wedge g^s(x_1, x_2)), \dots, (\mu_{nr} \wedge g^s(x_1, x_2, \dots, x_n))];$$

con  $h_{(x)}$  ordenado descendientemente,  $\vee = \text{Max}$ ,  $\wedge = \text{Min}$ .

De esta forma hemos diseñado un modelo que permite cuantificar el grado de aptitud de un individuo para un rol concreto, obviamente esta propuesta está sustentada por las bases conceptuales de la Integral Difuso o Integral de Sugeno, siguiendo la senda de los operadores de agregación de información.

Al momento de aplicar los modelos propuestos: **MM2, MM4, MM5 y MM6**, tanto para: cálculo del rendimiento laboral, medición del rendimiento laboral con importancias relativas para las macro variables, medición del rendimiento laboral sin importancias relativas para las macro variables, como para determinación del grado de aptitud para un rol; resulta natural considerar que al involucrar muchas variables en el análisis, las importancias relativas de los atributos elementales tienden a diluirse, haciendo que su impacto final sea numéricamente muy bajo; por tal razón es oportuno postular que: **“convendría agrupar los atributos elementales por familias, aplicando algún criterio de clasificación conveniente, que respete los grados de incidencia que los directivos de las organizaciones, conjuntamente con los investigadores de las Ciencias del Comportamiento Humano, que tienen los predictores respecto de los patrones conductuales”**.

#### **4.9. Conclusión:**

A través de la experimentación con las relaciones de implicación, se pudo corroborar la importancia de disponer de pesos relativos para ponderar los atributos involucrados en el cálculo de un índice de rendimiento laboral; las propiedades de: intersección, unión y promedio, hicieron posible encontrar la relación necesaria para calcular los pesos relativos de las 3 macro variables, en primera instancia en forma independiente de los atributos elementales, en este caso los operadores OWA fueron la clave para ponderarlos.

A partir de la fuzzificación de los atributos elementales que describen el perfil predominante de un individuo en una empresa, se incorporaron las importancias relativas en la forma de pesos, utilizando operadores de agregación; sin embargo, para obtener el doble propósito de pesos relativos y agregación de información, se incorporaron los operadores OWA, dando origen al modelo matemático **MM1**, como una primera aproximación, para determinar el rendimiento laboral más probable vinculado con un rol genérico cualesquiera.

Aún faltaba incorporar los atributos elementales vinculados directamente con un rol concreto, surgiendo la necesidad de determinar la importancia del atributo  $j$  en el rol  $r$ , otra vez fueron los operadores OWA quienes nos llevaron a encontrar una manera de cuantificar tales importancias.

Todavía restaba encontrar como determinar el grado de pertenencia más representativo para cada una de las 3 macro variables, en este caso las propiedades de la intersección dieron la pista que faltaba.

Luego de recorrer todas las fases anteriores, se pudo afinar el modelo **MM1**, dando origen al modelo de cálculo del rendimiento laboral **MM2**.

Todavía quedaba un desafío aún mayor, ¿Qué hacer cuando los atributos elementales presentan tal vaguedad que no es posible vincularlos con grados de pertenencia concretos?, se trata de situaciones donde sólo se sabe que cada atributo está en algún lugar de un intervalo, pero no hay más información; en estas condiciones únicamente cabía utilizar etiquetas lingüísticas, por lo tanto se recurrió al operador LOWA; sin embargo, existen 2 caminos de acción: aquel en el cual se dispone de importancias relativas para las macro variables: H, C y N, dando origen al modelo **MM4**; por otra parte, se abrió un segundo camino caracterizado por el hecho de que no se dispone de importancias relativas para las macro variables: H, C y N, lo cual se aborda con el modelo **MM5**. Tanto el modelo **MM4** como el **MM5**, más que calcular el rendimiento laboral, lo que hacen es seleccionar la etiqueta más representativa, por lo tanto podemos decir que se trata de una “medición del rendimiento laboral esperable”.

Al trabajar el rendimiento laboral vinculado a un rol concreto, se pudo constatar que los pesos individuales de los atributos elementales son la base para determinar que tan apto resulta un individuo en dicho rol, de esta forma al incorporar los aportes y fortalezas de la Integral de Sugeno, fue posible diseñar el modelo **MM6** que calcula el grado de aptitud de un individuo para desempeñar un rol específico.

## **NOTAS FINALES Y CONCLUSIONES**

A pesar de que existen muy pocas propuestas formales que vinculen factores concretos asociados al rendimiento laboral de un individuo en una organización, y más específicamente en una empresa, es posible modelar una propuesta que relacione ciertos factores básicos con dicho rendimiento.

Como un acercamiento cierto, se han aislado 3 macro variables cuya incidencia en el rendimiento laboral ha sido estudiada cualitativamente por las Ciencias Sociales, estas variables son individualizadas como: habilidad (talento innato que hace que un individuo con ganas, ejecute una labor con esfuerzo tendiente a cero), competencia (capacidad técnica, conceptual y mental, aprendida, necesaria para realizar labores concretas), necesidad (factor que gatilla la motivación o ganas de hacer, bajo la convicción de que sólo por esa vía se accederá a los satisfactores vinculados a tal necesidad).

Ante la carencia de algún modelo cuantitativo que permita vincular los factores más preponderantes con el rendimiento laboral, diseñamos un modelo conceptual (**M2**) que asocia los factores seleccionados con dicho rendimiento, pero al detectar que los roles concretos tienen una incidencia muy alta en la conducta de cada individuo, nos adelantamos a proponer un segundo modelo (**MTRP**), esta vez referido a vincular el perfil predominante de un individuo con un grupo específico de roles habituales en cualesquier organización o más puntualmente en una empresa, tomando como base los diversos trabajos disponibles que hacen referencia a las características más recurrentes de los trabajadores que exhiben rendimientos considerados altos por sus empleadores.

Cada una de estas macro variables incluye factores más elementales, donde cada factor elemental tiene asociado un valor que representa la “intensidad” o “cercanía” que un individuo exhibe de dicho factor.

Al buscar una forma de representar los datos de interés para este proyecto, surgió la necesidad de utilizar la caracterización propia de datos difusos, ya que es por esta vía por la cual se puede reflejar la incertidumbre asociada al valor de dichos datos.

Una vez optado por utilizar la representación de los datos en forma difusa, entramos en el estudio de la lógica difusa para individualizar diversas propiedades y principios que nos permitieran obtener conocimiento adicional a partir de los datos inicialmente disponibles; en esta búsqueda nos encontramos con:

- Un primer camino que permite establecer relaciones de implicancia entre diversos subconjuntos difusos, a través de: el razonamiento aproximado, el razonamiento con predicados vagos y las variables lingüísticas (para valores discretos); estas propiedades y principios hacen posible inferir consecuencias o conclusiones a partir de ciertas verdades iniciales (premisas), las cuales están asociadas a reglas.
- Un segundo camino que permite agregar información a la ya disponible, también por la vía de subconjuntos difusos, a través de: los conectivos lógicos, los operadores promedio, los operadores OWA, los operadores LOWA y la Integral de Sugeno; estas propiedades y principios hacen posible la agregación de información al relacionar subconjuntos difusos, buscando los puntos de convergencia.

Fue el segundo camino el que nos acercó a la posibilidad de diseñar una forma de cuantificar o medir el rendimiento laboral y establecer los grados de cercanía entre grupos o subconjunto difuso al momento de decidir bajo incertidumbre.

A través del modelamiento de las cualidades por medio de subconjuntos difusos, fue posible establecer que propiedades y principios de la lógica difusa nos



resultan más útiles para nuestros propósitos; por otra parte surgió la necesidad de disponer de pesos relativos para los diversos atributos involucrados en una determinada clasificación.

Aún cuando las relaciones de implicación no nos aportaron caminos directos hacia nuestros propósitos, se pudo establecer que sin pesos relativos para los atributos en estudio, cualesquier intento de cuantificar o medir (vía selección) el rendimiento laboral sería fallido.

Especial mención merecen los operadores OWA, ellos nos dan la posibilidad de simular importancias relativas sin castigar o premiar a priori algún atributo por sobre otro.

El rendimiento laboral efectivo de un individuo estará dado por una combinación de los distintos factores elementales que conforman las variables en estudio, donde:

- Cada variable macro tiene un peso o importancia relativa que se obtiene de: “aplicar una función de agregación sobre el grado de pertenencia de la misma variable en todos los individuos de la muestra disponible”.

$$F_H = \sum_{j=1}^n w_j b_{hj}, \quad n = \text{cantidad de individuos.}$$

En este caso se ilustra la importancia relativa de la macro variable Habilidad.

- El grado de pertenencia de una variable sobre un individuo se obtiene de: “aplicar una función de agregación sobre el grado de pertenencia de todos los factores elementales vinculados a la variable para el individuo bajo análisis, que forma parte de la muestra disponible de individuos”.

$$b_{h5} = \sum_{j=1}^n w_j b_{hj5}; n = \text{cantidad de habilidades involucradas para el individuo \#5 de la muestra.}$$

- El grado de pertenencia de cada factor elemental vinculado con cada una de las variables para el individuo en estudio, se obtiene de: “aplicar un mecanismo de medición y captura de la intensidad de las: habilidades, competencias y necesidades presentes en dicho individuo”.

$b_{hj5}$  se obtiene de: aplicar una batería de tests, observar en terreno los patrones conductuales recurrentes, analizar la historia biográfica.

Con el propósito de lograr determinar el peso o importancia relativa de cada una de las 3 macro variables, la muestra de individuos inicial para estudiar los pesos promedio ordenados, constituye una muestra dirigida, esto es: “elegir una muestra de individuos que, según sus empleadores, exhiben los más altos índices de rendimiento laboral esperado”.

Al disponer de un modelo matemático que mide el rendimiento laboral de un individuo, por tipo de rol según el nivel organizacional, se abre el camino para “agregar más información” por la vía de obtener nuevas consecuencias y nuevas reglas, ello nos lleva a entrar en el **“razonamiento aproximado con variables difusas, ponderadas con funciones de agregación”**. No se descarta el potencial camino del **“razonamiento con predicados vagos, ponderados con funciones de agregación”**.

Dado que cada atributo elemental asociado a un rol concreto presenta una importancia relativa, calculable a partir de una muestra dirigida, estos pesos aislados se mutan al buscar la medida Sugeno que estime cual será el rendimiento

laboral más probable de un individuo en dicho rol; con estas bases es posible cuantificar el grado de aptitud que tal individuo presenta para desempeñar el rol bajo análisis, a través de la Integral de Sugeno, aplicada sobre los atributos involucrados al rol con respecto a sus importancias o pesos estimados a partir de las Medidas Sugeno.

Como hemos visto anteriormente, existen circunstancias en las cuales no siempre es posible disponer de grados de pertenencia cuantitativos para los atributos elementales considerados predictores del rendimiento laboral esperable, por lo tanto es altamente posible que cada atributo sea asociado a un intervalo específico, aún cuando no se sabe en que punto de tal intervalo; en estas condiciones, agregar información implica utilizar un operador que sea capaz de computar etiquetas lingüísticas, como es el caso del operador LOWA, pero cabe destacar que en este escenario, cualesquier modelo generado no calculará el rendimiento laboral, es conceptualmente impracticable, más bien el rendimiento será medido a través de un proceso de selección de etiquetas, partiendo de la premisa de que no hay antecedentes para suponer que habría algún atributo que tuviese una importancia relativa superior al resto de los mismos.

Recordemos que el modelo conceptual **(M2)** contempla atributos o variables: elementales (grupo de habilidades, grupo de competencias y grupo de necesidades), grupales (H, C y N); en virtud de lo señalado precedentemente, las variables elementales serían representadas por etiquetas lingüísticas, mientras que las variables macro requieren alguna forma de medición, lo cual abre 2 caminos posibles de acción: aquel en el cual es posible disponer de una ponderación o importancia relativa para estas variables, dando origen al modelo **MM4**; y aquel camino caracterizado por la carencia de una ponderación o importancia relativa para dichas variables, dando origen al modelo **MM5**.

Tanto el modelo **MM4** como el modelo **MM5** permiten medir el rendimiento laboral a partir de atributos elementales expresados como etiquetas lingüísticas.

Al finalizar esta tesis surge un gran corolario, “cuando un científico siente la fuerza y la motivación para probar distintos caminos, con el propósito de encontrar respuestas a sus interrogantes, está preparado para iniciar el avance por una senda que de seguro ofrecerá muchas bifurcaciones en el andar, sólo el temor a fracasar lo puede detener; incluso puede ocurrir que no logre encontrar respuesta a las interrogantes originales, pero a cambio descubrirá nuevo conocimiento, el cual merece y debe ser difundido”.

Quizás el gran sello de esta tesis sea el intentar hacer una suerte de convergencia entre diversas disciplinas, habiendo establecido el objetivo hacia el cual se quiso dirigir los esfuerzos; cuando la meta es formulada, no necesariamente se tiene conciencia cabal de que habrá que recurrir a distintos escenarios intelectuales, pero una vez posicionados en alguna disciplina específica se requiere tener a la vista, permanentemente, tanto el objetivo final como el para que se visitó tal área del conocimiento humano.

## **DESAFIOS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES.**

En el camino recorrido durante el desarrollo de esta tesis, han surgido diversas interrogantes que abren ventanas para futuras investigaciones, además del camino natural que señala esta tesis, el cual se centra en: ***probar experimentalmente con un conjunto de trabajadores de varias empresas, la aplicabilidad de los modelos matemáticos generados (MM2, MM4, MM5 y MM6), de manera de verificar la capacidad predictiva de los diversos atributos consignados en los modelos diseñados.***

A pesar de que el valor de un atributo elemental, dentro del modelo conceptual **M2**, tiene la forma de “grado de pertenencia con  $\mu_{\text{atributo}} = \alpha$ , con  $\alpha \rightarrow [0,1]$ ”, si una empresa decidiera graduar los atributos en conjuntos de valores discretos (propio de variables lingüísticas), con cierta estandarización con tendencia universal, cabe preguntarse: ***¿Cómo variarían la efectividad de los modelos MM2, MM4, MM5 y MM6?, o incluso, ¿Bastaría con utilizar el modelo MM4 o el MM5?***; la búsqueda de una respuesta a estas interrogantes abre otro camino notable para ser explorado, más aún, **dato que muchos empresarios claudican en la llamada “gestión individualizada del recurso humano” dando paso a la “gestión estandarizada del citado recurso”**, como una forma de intentar simplificar su labor en el rol de director de grupos de trabajo; de hecho, habitualmente una jefatura tiende a aplicar un único enfoque para todo el Rrh dirigido.

Los principales productos de esta tesis son:

- Un modelo para cuantificar la importancia del atributo  $j$  en el rol  $r$  [24].
- Una forma de determinar el grado de pertenencia más representativo por macro variable en el rol  $r$  [25].
  - Un modelo para cuantificar el rendimiento laboral esperable de un individuo en el rol  $r$  [27].
  - Un modelo de cuantificación del grado de aptitud de un individuo ante un rol concreto [33].
  - Un modelo genérico para medir el rendimiento laboral esperable, cuando no se dispone de algún registro cuantitativo de los atributos involucrados [MM3].
  - Un modelo para medir el rendimiento laboral esperable, cuando no se dispone de algún registro cuantitativo de los atributos involucrados (atributos elementales) y se cuenta con las importancias relativas de las macro variables:  $H$ ,  $C$  y  $N$  [MM4].
  - Un modelo para medir el rendimiento laboral esperable, cuando no se dispone de algún registro cuantitativo de los atributos involucrados (atributos elementales) y no se cuenta con las importancias relativas de las macro variables:  $H$ ,  $C$  y  $N$  [MM5].

Estas 5 propuestas corresponden a modelos de agregación de información que ameritan ser puestos a prueba en profundidad, lo cual nos lleva a visualizar posibles investigaciones futuras, como es el caso de:

- Aplicarlos a una muestra representativa adecuada, para luego hacer un seguimiento de los índices calculados.
- Medir su capacidad predictiva.
- Estudiar el potencial proceso de aprendizaje asociado.
- Determinar el margen de error involucrado, estableciendo formas de abordar la minimización de dicho error.

- Comparar la eficacia y eficiencia entre las mediciones logradas a través de los modelos: MM2, MM4 y MM5; con el propósito de establecer sus potenciales grados de confiabilidad práctica.

En el camino recorrido para lograr generar los modelos propuestos: MM2, MM4, MM5 y MM6; fue posible encontrarse con diversos tópicos, los cuales abren potenciales líneas de investigación futura, más aún, considerando que el modelo MM2 provee una cuantificación del rendimiento laboral, disponible para continuar avanzando en varias sendas.

Un tema relevante para la captura de los datos consignados como atributos elementales lo constituye el **“extender las potencialidades del Sistema Perceptual”** partiendo de la premisa que la observación en terreno hace más confiable el “valor” o “grado de pertenencia” de cada atributo participante en el modelo.

Otra senda interesante de explorar, dado el producto del modelo MM2, pero también extensivo al producto de los modelos MM4 y MM5, la constituye la **“implicación con afirmaciones condicionales”**, ya que se dispondría de datos más confiables tanto para el inicio de una implicación como para las consecuencias de la misma, permitiendo implantar un proceso de “validación”.

Especial mención merece el desafío que plantea la senda marcada por **“modus ponens borroso (RCI de Zadeh)”**.

Al reconocer que los modelos propuestos consignan bastantes variables elementales, se está aceptando la potencial observación de que las importancias relativas individuales tiendan a extinguirse, haciendo que los modelos propuestos pudieran terminar minimizando en exceso cada parámetro; en este sentido, una senda de investigación futura que se desprende linealmente, es **“aplicar los modelos MM2, MM4, MM5 y MM6, sobre grupos de atributos elementales, como si se tratase de un árbol de importancias implícitas, de forma tal que**

***sólo si se requiere y/o estima necesario, se baja de nivel en dicho árbol; para luego evaluar su eficacia y eficiencia de predictividad”.***

Abordar un proyecto de investigación que vincule una rama de las Ciencias Sociales con la Ingeniería, genera múltiples interrogantes y abre muchos caminos colaterales, algunos autores hablan de: “*cruzar las Ciencias Blandas con las Ciencias Duras*”; no obstante, aventurar eventuales convergencias entre lo cuantitativo y lo cualitativo, representa un desafío intelectual muy estimulante; la presente línea de investigación recién comienza a dar sus primeros pasos.



## **BIBLIOGRAFIA.**

- [1] Ashwin Ram, Lawrence Hunter; "The Use Of Explicit Goals For Knowledge To Guide Inference And Learning"; College of Computing, Georgia Institute of Technology ; National Library of Medicine, Bethesda; 1992.
  
- [2] Baker George, Jensen Michael, Murphy Kevin; "Compensation And Incentives Practice vs Theory"; Harvard Business School & University Of Rochester; 1988 (Julio).
  
- [3] Balakrishnan Karthik & Honavar Vasant; "Intelligent Diagnosis Systems"; IOWA State University; Ames, IOWA 50011-1040.
  
- [4] Buckingham Marcus & Clifton Donald O.; "Ahora, Descubra Sus Fortalezas"; Norma; 2001.
  
- [5] Cadenas José, Jiménez Fernando; "Decisión Interactiva para un Problema General Difuso Multiobjetivo"; Universidad de Murcia; 1994.
  
- [6] Calvo Tomasa, Mesiar Radko; "Weighted Triangular Norms-Based Aggregation Operators"; University of Alcalá, UIB Palma de Mallorca, Slovak Technical University, Systems Research Institute; Spain, Slovak Republic, Poland; 2002.
  
- [7] Cariola M. Leonor & Quiroz Ana María; "Las Competencias y La Gestión de Recursos Humanos Una Perspectiva Transversal"; 2001.
  
- [8] Castro J. Luis; "Curso Redes Neuronales y Sistemas Neuro-Difusos"; Granada, España, 2001.

- [9] Coens Tom & Jenkins Mary; “¿Evaluaciones De Desempeño?, Porqué No Funcionan Y Cómo Remplazarlas”; Norma; 2000 y 2001.
- [10] “Competencia Laboral En América Latina y El Caribe”; OIT; Intecap; 2003.
- [11] Congxin Wu & Traore Mamadou; “An Extension Of Sugeno Integral”; Harbin Institute Of Technology; People´s Republic Of China; 2002.
- [12] Chiavenato I.; “Administración De Recursos Humanos”; Mc GrawHill; 1999.
- [13] Davis Keith & Newstrom John; “Comportamiento Humano en el Trabajo”; Mc Graw-Hill; 2002.
- [14] De Cooman Gert, Zhang Guangquan, Kerre Etienne; “Possibility Measures and Possibility Integrals Defined on a Complete Lattice”; Difuso Sets and Systems; 1998.
- [15] Delgado M., Herrera F., Herrera-Viedma E., Martínez L.; “Combining Numerical and Linguistic Information in Group Decisión Making”; Technical Report #DECSAI-96115; Granada; Spain; 1996.
- [16] Delgado M., Herrera F., Herrera-Viedma E., Verdegay J. L., Vila M. A.; “Aggregation of Linguistic Information Based on a Symbolic Approach”; DECSAI; University of Granada; 18071-Granada; Spain.
- [17] Delgado M., Verdegay J. L., Vila M. A.; “On Aggregation Operations of Linguistic Labels”; Int. Journal of Intelligent Systems 8; (1993); 351-370.
- [18] Dennebers Dieter and Grabisch Michel; “Functions And Measures With Linear Ordinal Scales, (a-)Symmetric Sugeno Integral And Ordinal Ky Fan Distance”; 2º International Symposium On Imprecise Probabilities And Their Applications”; Ithaca; New York; 2001.

- [19] Ding Yongsheng, Ying Hao, Shao Shihuang; “Typical Takagi-Sugeno PI and PD Difuso Controllers Analytical Structures and Stability Analysis”; Donghua University, Shanghai, China; Wayne State University, Detroit, USA; 2002.
- [20] Dubois Didier, Marichal Juan-Luc, Prade Henri, Roubens Marc, Sabbadin Régis; “The Use of The Discrete Sugeno Integral In Decision-Making A Survey”; Université Paul Sabatier, Toulouse; Francia; 2001.
- [21] Dubois Didier – Koning Jean-Luc; “A Decision Engine Based on Rational Aggregation of Heuristic Knowledge”; Université Paul Sabatier; France; 31062 Toulouse Cedex – France.
- [22] Dubois Didier, Prade Henri, Sabbadin Régis; “Qualitative Theory With Sugeno Integrals”; Université Paul Sabatier; Toulouse; France ; 1995.
- [23] Dubois Didier, Grabisch Michel, Prade Henri, Smets Philippe; “Using The Transferable Belief Model and a Qualitative Possibility Theory Approach on an Illustrative Example The Assessment of the Value of a Candidate”; Université Paul Sabatier, Corporate Research Laboratory, Université Libre de Bruxelles; France, Belgium; 2000.
- [24] Economic Research Institute; “Executive Compensation Assessor”; USA; 2003.
- [25] Espinosa Jairo and Vandewalle Joos; “Constrained Predictive Control Using Difuso Models”; Katholieke Universiteit Leuven; 1999.
- [26] Espinosa Jairo and Vandewalle Joos; “Predictive Control Using Difuso Models”; Katholieke Universiteit Leuven; 1998.
- [27] Fuller Robert, Carlsson Christer; “Difuso Multiple Criteria Decision Making Recent Developments”; Difuso Sets and Systems, 78(1996) 139-153.

- [28] George J. Klir and Tina A. Folger; “Difuso Sets, Uncertainty, and Information”; Prentice Hall; 1988.
- [29] Gómez-Mejía Luis, Balkin David, Cardy Robert; “Gestión De Recursos Humanos”; Prentice Hall; 1998.
- [30] Glöckner Ingo; “An Axiomatic Theory of Difuso Quantifiers in Natural Languages”; University of Bielefeld; Germany; Report 2000-03.
- [31] Grabisch Michel; “The Symmetric Sugeno Integral”; Université Pierre Et Marie Curie; Paris; France; 2002.
- [32] Grabisch Michel; “Measure and Integral With Purely Ordinal Scales”; Université de Paris; France; 2003.
- [33] Herrera F., Herrera-Viedma E., Verdegay J. L.; “Applications of the Linguistic OWA Operador in Group Decisión Making”; Technical Report #DECSAI-96132; Granada; Spain; 1996.
- [34] Herrera F., Herrera-Viedma E.; “Aggregation Operators for Linguistic Weighted Information”; Technical Report #DECSAI-95120; Granada; Spain; 1995.
- [35] Herrera F., López E., Mendaña C., Rodríguez M. A.; “A Linguistic Decisión Model for Personnel Management Solved With a Linguistic Biobjective Genetic Algorithm”; Technical Report #DECSAI-97119; Granada; Spain; 1997.
- [36] Irigoin María, Vargas Fernando; “Competencia Laboral Manual de Conceptos, Métodos y Aplicaciones en el Sector Salud”; OIT; Cinterfor; 1999/2000.
- [37] Katz Daniel & Kahm Robert; “Psicología Social De Las Organizaciones”; Trillas; 1998.

- [38] Koskivaara Eija; "Artificial Neural Network Models for Predicting Patterns in Auditing Monthly Balances"; Turku Centre for Computer Science; 1996.
- [39] Marichal Jean-Luc; "On Sugeno Integral As An Aggregation Function"; University Of Liège; Belgium; 1998.
- [40] Marichal Jean-Luc; "An Axiomatic Approach Of The Discrete Sugeno Integral As A Tool To Aggregate Interacting Criteria In A Qualitative Framework"; University Of Liège; Belgium; 2000.
- [41] Marques Pereira Ricardo & Almeida Ribeiro Rita; "Aggregation With Generalized Mixture Operators Using Weighting Functions"; Università Di Trento; Lisboa; Portugal; 2002.
- [42] Matzkevich Izhar, Abramson Bruce; "Decision Analytic Networks in Artificial Intelligence"; Investment Technology Group, Culver City - Cambridge Research Associates, Carnegie Mellon University; 1995.
- [43] Mertens Leonard; "La Gestión Por Competencia Laboral En La Empresa y La Formación Profesional; Normalización y Transferibilidad de la Competencia Laboral"; OEI; 1997/8.
- [44] Miksch Silvia; "Artificial Intelligence for Decision Support Needs, Possibilities, and Limitations in ICU"; Vienna, Austria; 1995.
- [45] Modave F., Grabisch M.; "Preferential Independence and The Choquet Integral"; Mons; Belgium; 1997.
- [46] Modave F., Grabisch M.; "Preference Representation by The Choquet Integral The Commensurability Hypothesis"; Paris; France; 1998.

- [47] Modave Francois, Kreinovich Vladik; “Difuso Measures and Integrals as Aggregation Operators Solving the Commensurability Problem”; University of Texas at El Paso; 79968-0518.
  
- [48] Moro Andrea, Norman Peter; “Affirmative Action in a Competitive Economy”; University of Minnesota, University of Wisconsin; USA; 1999.
  
- [49] Norman Peter; “Statistical Discrimination and Efficiency”; University of Wisconsin-Madison; 1999.
  
- [50] Novick Marta, Miravalles Martina, González Cecilia Senén; “Vinculaciones Interfirmas y Competencias Laborales en Argentina”; Universidad de Buenos Aires; 2000.
  
- [51] Oliver Nuria, Rosario Barbara, Pentland Alex; “A Bayesian Computer Vision System For Modeling Human Interactions”; MIT, Cambridge, 1998.
  
- [52] Ovchinnikov Sergei; “Piecewise Linear Aggregation Functions”; San Francisco State University; USA; 2000.
  
- [53] Prada José; “Sicología de Grupos”; San Pablo; 1995.
  
- [54] “Proyecto Certificación De Competencias Laborales”; Fundación Chile; Sence Chile; 2000.
  
- [55] Robbins Stephen; “Comportamiento organizacional Conceptos, Controversias y Aplicaciones”; Prentice Hall; 1994.
  
- [56] Rosenblum Mark, Yacoob Yaser, Davis Larry; “Human Emotion Recognition From Motion Using A Radial Basis Function Network Architecture”; University Of Maryland; 1994.

- [57] Schein Edgar; “Psicología De La Organización”; Prentice-Hall; 1997.
- [58] Senge P.; “La Quinta Disciplina”; Editorial Granica; 1990.
- [59] Shiu Simon, Wang Yan Li; “Using Difuso Integral to Model Case-Base Competence”; Hong Kong Polytechnic University; 2001.
- [60] Tizhoosh H. R.; “Difuso Measure Theory University Of Waterloo; Francia; 1997-2002.
- [61] Tizhoosh H. R.; “Difuso Image Processing”; [http //pami.uwaterloo.ca/](http://pami.uwaterloo.ca/); 2002.
- [62] Trillas Enric, Delgado Miguel, Vila M. Amparo, Castro J. Luis, Verdegay J. L., Moraga Claudio, Cuenca José, Gutierrez Julio, Ruiz Antonio; “Fundamentos e Introducción a la Ingeniería “Difuso””; Edit. Trillas; Omron Electronics S. A.; 1994.
- [63] Vasandani Vijay and Govindaraj T.; “Knowledge Organization in Intelligent Tutoring Systems for Diagnostic Problem Solving in Complex Dynamic Domains”; Georgia Institute of Technology, Atlanta; USA +1 404 894 3873.
- [64] Wang Xuemei; “Learning Planning Operators by Observation and Practice”; Carnegie Mellon University Pittsburgh; PA 15213.
- [65] Wang Xuemei; “A Multistrategy Learning System for Planning Operator Acquisition”; Carnegie Mellon University Pittsburgh; PA 15213.
- [66] Winograd Terry, Flores Fernando; “Hacia La Comprensión De La Informática y La Cognición”; Editorial Hispano Europea; 1989.
- [67] [Www.bls.gov/](http://www.bls.gov/); “Occupational Classification System Manual”; U.S. Department of Labor, Bureau of Labor Statistics; Washington, DC 20212-0001.

- [68] Yager Ronald; "Induced Aggregation Operators"; Iona College; New York; USA; 2002.
  
- [69] Yager R. R.; "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making"; IEEE; 1988.
  
- [70] Ying Hao; "Theory And Application Of A Novel Difuso PID Controller Using A Simplified Takagi-Sugeno Rule Scheme"; The University Of Texas Medical Branch; USA; 1999.
  
- [71] Ying Hao; "Theory and Application of a Novel Difuso PID Controller Using a Simplified Takagi-Sugeno Rule Scheme"; The University of Texas Medical Branch; USA; 1999.
  
- [72] Zhao Feng; "Intelligent Simulation in Designing Complex Dynamic Control Systems"; The Ohio State University; 1995.