Universidad de Granada

Departamento de Análisis Matemático

Rango numérico e igualdades de normas para operadores en espacios de Banach

Francisco Javier Merí de la Maza

TESIS DOCTORAL

Granada, 2006

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Frnacisco Meri de la Maza
D.L.: Gr. 1169 - 2006
ISBN: 84-338-3872-5

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Rango numérico e igualdades de normas para operadores en espacios de Banach

Memoria realizada por **Fco. Javier Merí de la Maza** en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, bajo la dirección del **Dr. D. Miguel Martín Suárez**, Profesor Titular del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, para optar al grado de *Doctor Europeo en Ciencias Matemáticas*.

Candidato al grado de Doctor Europeo en Ciencias Matemáticas	V° B° del director
Fco. Javier Merí de la Maza	Miguel Martín Suárez

Granada, Abril de 2006

A Aurora

Índice general

Índice de figuras

Introducción

En esta memoria pretendemos estudiar diversos aspectos de la geometría de los espacios de Banach relacionados con el rango numérico de operadores. El concepto de rango numérico aparece por primera vez en 1918 cuando O. Toeplitz [123] da su definición para matrices, que resulta igualmente válida para operadores en espacios de Hilbert. En 1961 y 1962, en trabajos independientes, G. Lumer [85] y F. Bauer [14] introducen sendos conceptos de rango numérico de un operador en un espacio de Banach. Aunque el trabajo de G. Lumer es decisivo en el desarrollo de la teoría, la definición dada por F. Bauer resulta más clara y es la universalmente aceptada: dado un espacio de Banach X y un operador lineal y continuo $T \in L(X)$, su *rango numérico espacial* se define como

$$W(T) = \{x^*(Tx) \ : \ x^* \in S_{X^*},\ x \in S_X,\ x^*(x) = 1\}.$$

El rango numérico ha sido objeto de un intenso estudio a lo largo de todo el siglo XX y ha demostrado ser una herramienta útil en el estudio de las álgebras de Banach, la teoría de operadores y la geometría de los espacios de Banach; buena parte de sus aplicaciones se pueden encontrar en las monografías de F. Bonsall y J. Duncan [26, 27].

La presente memoria se encuentra estructurada en tres capítulos independientes, si bien el concepto de rango numérico es el hilo conductor de toda ella. Cada uno de los capítulos de la tesis consta de una sección introductoria en la que se exponen de modo sistemático las nociones con las que se va a trabajar, los problemas que se van a abordar y el estado en el que se encontraban dichos problemas antes de la realización de la presente memoria. Es por ello que nos limitamos a dar aquí únicamente las nociones y resultados conocidos que faciliten la comprensión de nuestras aportaciones. Sin más preámbulo, pasamos a comentar brevemente el contenido de la memoria.

Dedicamos el primer capítulo a analizar la relación entre dos posibles definiciones de rango numérico de funciones definidas en la esfera de un subespacio de un espacio de Banach que toman valores en el espacio. Concretamente, dado un espacio de Banach Y y un subespacio suyo X con inclusión $\mathrm{J} : X \longrightarrow Y$, se considera el espacio $B(S_X, Y)$ de las funciones acotadas definidas en S_X que toman valores en Y, y para cada $f \in B(S_X, Y)$ se definen dos rangos numéricos: el rango numérico espacial

$$W(f) = \{y^*(f(x)) \ : \ y^* \in S_{Y^*},\ x \in S_X,\ y^*(\mathrm{J}x) = 1\}$$

y el rango numérico intrínseco

$$V(f) = \{\Phi(f) \ : \ \Phi \in B(S_X, Y)^*,\ \|\Phi\| = \Phi(J|_{S_X}) = 1\}.$$

Es fácil ver que se verifica la inclusión

$$\overline{\mathrm{co}}\, W(f) \subset V(f)$$

y hay ocasiones en las que esta inclusión es una igualdad. Por ejemplo, si X tiene dimensión finita y f es continua, si Y es uniformemente suave y f es uniformemente continua y, por último, si $X = Y$ y f es uniformemente continua [66]. Siguiendo el espíritu de estos resultados nos hemos planteado estudiar qué condiciones sobre la función f y los espacios X e Y permiten asegurar que se tiene la igualdad $\overline{\mathrm{co}}\, W(f) = V(f)$. En la sección 1.1 presentamos las nociones anteriores así como muchos de los resultados conocidos previamente sobre el problema planteado.

La sección 1.2 está dedicada al estudio del caso particular en el que la función que se considera es la restricción de un operador lineal y continuo a la esfera del subespacio X. Analizamos este problema desde dos puntos de vista. En primer lugar, demostramos que los espacios de dimensión finita son los únicos para los que se verifica la igualdad $\overline{\text{co}}\, W(T) = V(T)$ para todo operador $T \in L(X,Y)$ y todo espacio de Banach Y que contiene a X como subespacio. En segundo lugar, nos planteamos para qué espacios de Banach se verifica la igualdad de rangos para todo subespacio y todo operador lineal y continuo. Como consecuencia de los resultados de L. Harris [66] comentados anteriormente, se sabe que este es el caso de los espacios de dimensión finita y de los espacios uniformemente suaves. Nosotros presentamos ejemplos representativos de espacios que no tienen dicha propiedad (por ejemplo c_0) y demostramos que todo espacio no reflexivo se puede renormar para carecer de ella. En la sección 1.3 introducimos una nueva propiedad geométrica, que llamamos propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás y que viene motivada por el teorema clásico del mismo nombre. Demostramos que esta propiedad es una condición suficiente para que se verifique la igualdad de rangos para todo subespacio y toda función uniformemente continua; además, caracterizamos la suavidad uniforme y la subdiferenciabilidad fuerte de la norma de un espacio de Banach en términos de esta nueva propiedad. Concluimos el capítulo presentando algunos problemas abiertos relacionados con los resultados expuestos en él. La mayoría de los resultados originales presentados en este capítulo aparecen en un trabajo conjunto con M. Martín y R. Payá [91].

Dedicamos el capítulo 2 al estudio del índice numérico de los espacios de Banach. Si X es un espacio de Banach, el *índice numérico* de X (Lumer, 1968) se define como el número real

$$\begin{aligned} n(X) &= \text{máx}\{k \geqslant 0 \,:\, k\|T\| \leqslant v(T)\ \forall T \in L(X)\} \\ &= \text{ínf}\{v(T) \,:\, T \in L(X),\ \|T\| = 1\}, \end{aligned}$$

donde para cada $T \in L(X)$

$$v(T) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in W(T)\}$$

es su radio numérico. Es obvio que siempre se tiene $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$; el valor $n(X) = 1$ significa que radio numérico y norma coinciden en $L(X)$, mientras que se tiene $n(X) = 0$ cuando v, que siempre es una seminorma, no es equivalente a la norma usual de operadores. El lector podrá encontrar en la sección 2.1 las definiciones anteriores así como una exposición detallada de los resultados conocidos sobre el índice numérico antes de la elaboración de la presente memoria.

Dedicamos la sección 2.2 al cálculo efectivo del índice numérico de algunas familias de espacios de Banach. En un primer apartado calculamos el índice numérico de algunas normas en el plano; concretamente, de una familia de normas hexagonales, de dos familias de normas octagonales y de la familia de las normas cuya bola unidad es un polígono regular con un número par de vértices. Todos estos resultados aparecerán en un trabajo conjunto con M. Martín [90]. En la segunda parte de la sección calculamos el índice numérico de algunos espacios de funciones continuas con valores vectoriales; de modo más preciso, demostramos que

$$n(C_\omega(K, X)) = n(X),$$

donde $C_\omega(K, X)$ denota al espacio de las funciones de un compacto K en un espacio de Banach X, que son continuas cuando en X se considera la topología débil, y damos algunos resultados parciales sobre el índice numérico del espacio de las funciones débil*-continuas de K en X^*. Estos resultados son fruto de un trabajo conjunto con G. López y M. Martín [83].

En la sección 2.3 nos centramos en el estudio de los espacios de Banach de dimensión finita con índice numérico cero, para los que encontramos la siguiente caracterización:

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real de dimensión finita. Son equivalentes:

(i) X tiene índice numérico cero.

(ii) Existen espacios vectoriales *complejos* no nulos $X_1, \ldots, X_n$, un espacio vectorial *real* X_0 (eventualmente nulo), y números naturales $q_1, \ldots, q_n$ tales que

$X = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ y

$$\left\| x_0 + e^{iq_1\rho} x_1 + \cdots + e^{iq_n\rho} x_n \right\| = \|x_0 + x_1 + \cdots + x_n\|$$

para cada $\rho \in \mathbb{R}$ y cada $x_j \in X_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

De este resultado deducimos que no hay más espacio de Banach real de dimensión 2 con índice numérico cero que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ y que un espacio de dimensión 3 con índice cero es suma absoluta de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ y $\mathbb{R}$. Estos resultados se han obtenido en colaboración con M. Martín y A. Rodríguez-Palacios [92, 93].

En la sección 2.4 recopilamos toda la información conocida acerca de un problema que permanece abierto desde el comienzo de la teoría: la determinación del índice numérico de $L_p(\mu)$. Exponemos con detalle en qué situación se encuentra este problema en la actualidad, presentando algunos resultados muy recientes debidos a E. Ed-dari y M. Khamsi [44, 45], de los que damos demostraciones alternativas, a nuestro juicio más sencillas que las originales. Incluimos además un resultado original que proporciona una estimación del índice numérico de ℓ_p^2 en caso real:

$$\max\left\{\frac{1}{2^{1/p}}, \frac{1}{2^{1/q}}\right\} \max_{t\in[0,1]} \frac{|t^{p-1} - t|}{1 + t^p} \leqslant n(\ell_p^2) \leqslant \max_{t\in[0,1]} \frac{|t^{p-1} - t|}{1 + t^p}.$$

Concluimos el capítulo recopilando las cuestiones que han quedado abiertas en nuestro estudio del índice numérico de los espacios de Banach.

A principios de la década de los 70, J. Duncan, C. McGregor, J. Pryce y A. White observaron en su trabajo pionero sobre índice numérico [42] que un operador T satisface $\sup \operatorname{Re} W(T) = \|T\|$ si, y sólo si, se verifica

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|.$$

La ecuación anterior es conocida hoy en día como *ecuación de Daugavet* en honor al matemático del mismo nombre que demostró en 1963 [38] que se verifica para todos los operadores compactos de $C[0,1]$. A lo largo de varias décadas, la validez de la ecuación de Daugavet ha sido establecida en distintos espacios y para distintas clases de operadores. Los espacios con la propiedad de Daugavet han sido definidos recientemente [20] como aquellos en los que la ecuación de Daugavet es válida para todos los operadores de rango uno y han sido objeto de un intenso estudio desde la aparición del citado trabajo. En el último capítulo de esta memoria analizamos la posibilidad de que en un espacio de Banach X todos los operadores de rango uno verifiquen ecuaciones similares a la ecuación de Daugavet. Las secciones 3.1 y 3.2 contienen un breve repaso histórico sobre los resultados conocidos acerca de la ecuación de Daugavet y otras ecuaciones relacionadas, y algunos resultados preliminares que se utilizan a lo largo de todo el capítulo.

En la sección 3.3 demostramos que la propiedad de Daugavet es la única propiedad no trivial que puede definirse exigiendo que todos los operadores de rango uno en un espacio de Banach verifiquen una ecuación de la forma

$$\|g(T)\| = f\big(\|T\|\big),$$

donde $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función entera (en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se entiende que g es una función entera que toma valores reales en el eje real) y $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria.

En la sección 3.4 analizamos qué propiedades se pueden definir pidiendo que todos los operadores de rango uno en un espacio de Banach verifiquen una ecuación del tipo

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f\big(\|g(T)\|\big),$$

donde g es una función analítica y f es una función continua. Ahora la situación no es tan clara y además depende del cuerpo base. En caso complejo, dado un espacio de Banach X, una función entera no constante g y una función continua $f : [|g(0)|, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, si todos los operadores de rango uno en X verifican la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f\big(\|g(T)\|\big),$$

entonces también verifican la igualdad

$$\big\|(1+g(0))\mathrm{Id}+T\big\| = |1+g(0)| - |g(0)| + \|g(0)\mathrm{Id}+T\|.$$

Surge ahora una dicotomía en función del valor de $g(0)$: si $\operatorname{Re} g(0) \neq -1/2$, entonces el espacio X tiene la propiedad de Daugavet; si $\operatorname{Re} g(0) = -1/2$, entonces existe un número complejo de módulo uno ω (distinto de 1) tal que

$$\|\mathrm{Id}+\omega\, T\| = \|\mathrm{Id}+T\|$$

para todo $T \in L(X)$ de rango uno. También demostramos que estas propiedades son estrictamente más débiles que la propiedad de Daugavet. Estos resultados son válidos en caso real cuando la función g es sobreyectiva: si $g(0) \neq -1/2$ llegamos a la propiedad de Daugavet y si $g(0) = -1/2$ aparece una nueva propiedad estrictamente más débil que la de Daugavet: que todos los operadores de rango uno en un espacio de Banach X satisfagan la igualdad

$$\|\mathrm{Id}-T\| = \|\mathrm{Id}+T\|.$$

Si g no es sobreyectiva, las demostraciones no son válidas y no sabemos lo que ocurre incluso cuando se consideran posibilidades sencillas para la función g como $t \longmapsto t^2$ y $t \longmapsto -t^2$.

El estudio de las nuevas propiedades que han aparecido se realiza en la sección 3.5, donde comprobamos que tienen importantes implicaciones estructurales sobre el espacio en lid, como la carencia de la propiedad de Radon-Nikodým o, en algunos casos, la imposibilidad de tener base incondicional. Terminamos el capítulo recogiendo algunas de las numerosas cuestiones que quedan abiertas en nuestro estudio. La mayor parte de los resultados de este capítulo están recogidos en un trabajo conjunto con V. Kadets y M. Martín [74].

Con estas líneas quiero expresar mi más profunda gratitud a todas aquellas personas que me han ayudado de algún modo durante los últimos cuatro años.

Quiero dar las gracias en primer lugar a Miguel Martín Suárez, la persona que ha guiado toda mi investigación. Deseo agradecerle las innumerables horas de trabajo compartidas y la desinteresada ayuda que siempre me ha prestado ante cualquier problema, ya fuera matemático o no. No me cabe la menor duda de que este proyecto no hubiera podido llegar a buen fin sin su inestimable aportación.

También quiero agradecer a Rafael Payá y a Armando Villena su incondicional apoyo desde el comienzo de mi labor investigadora. Asimismo, quiero dar las gracias a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático por su cálida acogida y constante ánimo. Especialmente a Ginés López y a Ángel Rodríguez con quienes he tenido el placer de compartir parte de mi trabajo.

Una parte de mi investigación se desarrolló en el Departamento de Análisis Funcional de la Universidad Paris VI y en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Besançon, aprovecho este momento para agradecer su hospitalidad. En especial quiero dar la gracias a Gilles Godefroy, Gilles Lancien e Ives Dutrieux por su amabilidad y dedicación.

Deseo agradecer a mis padres y a mi hermano toda la confianza que han depositado en mí, ellos, junto con mis amigos, han contribuido en mayor medida de lo que creen al desarrollo de este trabajo de investigación.

Finalmente, necesito agradecer a Aurora su apoyo y comprensión, ella sabe bien lo que ha costado realizar esta tesis doctoral.

Notación

A lo largo de toda la memoria, $\mathbb{K}$ denotará indistintamente el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y $\mathbb{T}$ será el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$. Usaremos en $\mathbb{K}$ la función parte real que, naturalmente, no es otra cosa que la identidad cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{K}$, utilizaremos la siguiente notación:

$$\operatorname{Re} A := \{\operatorname{Re} \lambda \ : \ \lambda \in A\},$$

y así deberán entenderse expresiones como $\sup \operatorname{Re} A$ y $\max \operatorname{Re} A$.

Si X es un espacio de Banach real o complejo con norma $\|\cdot\|$, B_X y S_X serán, respectivamente, su bola cerrada unidad y su esfera unidad:

$$B_X := \{x \in X \ : \ \|x\| \leqslant 1\}, \qquad\qquad S_X := \{x \in X \ : \ \|x\| = 1\}.$$

Si A es un subconjunto de X, $\overline{\operatorname{co}}\, A$ denotará la envolvente convexa y cerrada del conjunto A.

Denotaremos X^* al dual (topológico) de X, provisto siempre de la norma dual

$$\|x^*\| := \sup\{|x^*(x)| \ : \ x \in B_X\} \qquad (x^* \in X^*)$$

y, si Y es otro espacio de Banach, $L(X, Y)$ será el espacio de Banach de todos los operadores lineales y continuos de X en Y, dotado de la norma usual de opera-

dores
$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| \ : \ x \in B_X\} \qquad (T \in L(X,Y)).$$
Cuando $X = Y$ escribiremos simplemente $L(X) := L(X,X)$, mientras que Id será el operador identidad en X. Por otro lado, si X es un espacio de Banach complejo, $X_{\mathbb{R}}$ denotará al espacio real subyacente a X.

Dados $p \in [1,+\infty)$ y $m \in \mathbb{N}$, denotaremos por ℓ_p^m al espacio $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_p)$ donde
$$\|(x_1,\ldots,x_m)\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{K}^m,$$
y usaremos el convenio habitual para $p = +\infty$:
$$\|(x_1,\ldots,x_m)\|_\infty := \text{máx}\{|x_i| \ : \ i = 1,\ldots,m\} \qquad \text{y} \qquad \ell_\infty^m = (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty).$$
Si X e Y son espacios de Banach, $X \oplus_p Y$ será el espacio de Banach $(X \times Y, \|\cdot\|)$ donde la norma $\|\cdot\|$ viene dada por
$$\|(x,y)\| := \big\|\big(\|x\|,\|y\|\big)\big\|_p \qquad \big((x,y) \in X \times Y\big).$$

Dada una familia arbitraria $\{X_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ de espacios de Banach, llamamos *ℓ_∞-suma* de dicha familia, y denotamos por $[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_\infty}$, al subespacio del producto cartesiano $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ formado por las familias $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tales que el conjunto $\{\|x_\lambda\| \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ está acotado, que es un espacio de Banach con la norma
$$\|(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\| = \sup\{\|x_\lambda\| \ : \ \lambda \in \Lambda\}.$$
Como subespacio cerrado de dicha ℓ_∞-suma encontramos la *c_0-suma*, denotada $[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}$; por definición, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ pertenece a la c_0 suma cuando el conjunto $\{\lambda \in \Lambda \ : \ \|x_\lambda\| \geqslant \varepsilon\}$ es finito para todo $\varepsilon > 0$. Finalmente, para $1 \leqslant p < \infty$, la *ℓ_p-suma* $[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_p}$ está formada por las familias $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tales que $(\|x_\lambda\|^p)_{\lambda\in\Lambda}$ es sumable, y la norma que la convierte en espacio de Banach es
$$\|(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\| = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Capítulo 1

Rango numérico espacial y rango numérico intrínseco

En este primer capítulo pretendemos estudiar la relación existente entre dos posibles definiciones de rango numérico para funciones. Comenzaremos con una introducción en la que expondremos las definiciones necesarias y el problema que pretendemos estudiar: para qué funciones el rango numérico intrínseco coincide con la envolvente convexo cerrada del rango numérico espacial. A continuación expondremos algunos resultados novedosos tanto positivos como negativos. Concluiremos el capítulo introduciendo una nueva propiedad geométrica para los espacios de Banach, que será una condición suficiente para garantizar la igualdad de rangos en la clase de las funciones uniformemente continuas definidas en la esfera de un subespacio de un espacio de Banach con valores en el espacio.

1.1. Introducción

En los primeros estudios sobre espacios de Hilbert realizados, entre otros, por D. Hilbert, E. Hellinger y O. Toeplitz, se presta especial atención a las formas cuadráticas. Posteriormente, con el nacimiento de la teoría de operadores lineales, muchos conceptos definidos para formas cuadráticas fueron trasladados a este nuevo ambiente, mediante el sencillo proceso de considerar, de manera natural, la forma cuadrática asociada a un operador en un espacio de Hilbert. Este es el caso del rango numérico de operadores, definido por O. Toeplitz en 1918 [123]. Si H un espacio de Hilbert con producto interior $(\cdot \mid \cdot)$, el *rango numérico* de un operador $T \in L(H)$ es, por definición, el conjunto de escalares

$$W(T) := \{(Tx \mid x) \ : \ x \in S_H\},$$

es decir, $W(T)$ es la imagen de la esfera unidad del espacio por la forma cuadrática asociada al operador T. En este ambiente ha proliferado una vasta teoría de rango numérico, parte de la cual puede ser consultada en la monografía de P. Halmos [62, §17]. Resultados más recientes aparecen en el libro publicado en 1997 por K. Gustafson y D. Rao [61].

En 1961 y 1962, en trabajos independientes, G. Lumer [85] y F. Bauer [14] introducen sendos conceptos de rango numérico de un operador en un espacio de Banach. Si bien ambas definiciones son equivalentes en lo que a aplicaciones se refiere, en esta memoria hemos optado por la definición de Bauer, que resulta mucho más clara y es la universalmente aceptada.

1.1.1 Definición. Dado un espacio de Banach X y un operador $T \in L(X)$, se define su *rango numérico espacial* como el conjunto de escalares

$$W(T) := \{x^*(Tx) \ : \ x \in S_X,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(x) = 1\}.$$

La definición anterior está basada en la forma de actuar de T sobre el espacio X y, en contraposición con esta idea, se puede definir otra imagen numérica del operador T, que viene determinada por el hecho de ser un elemento del álgebra de Banach $L(X)$:

1.1.2 Definición. Dado un espacio de Banach X y un operador $T \in L(X)$, se define el *rango numérico de álgebra* de T como el conjunto de escalares

$$V(T) := \{\Phi(T) \,:\, \Phi \in L(X)^*,\ \|\Phi\| = \Phi(\mathrm{Id}) = 1\}.$$

Esta definición se generaliza literalmente a elementos de álgebras de Banach unitales. Referencias obligadas sobre rango numérico son las monografías de F. Bonsall y J. Duncan [26, 27] que estudian sistemáticamente dicho concepto y sus conexiones con la teoría espectral de operadores. Una visión más sintética y actualizada puede encontrarse en un artículo expositivo de los mismos autores [28]. Trabajos más recientes sobre rango numérico de operadores son, por ejemplo, [32, 36, 37, 48, 58, 111, 129].

Las definiciones anteriores fueron rápidamente trasladadas a ambientes mucho más generales. Por ejemplo, F. Bonsall, B. Cain y H. Schneider [25] estudian en 1968 el rango numérico espacial de las funciones continuas definidas en la esfera de un espacio de Banach con valores en el espacio y en 1974 L. Harris [66] extiende los dos conceptos de rango numérico a las funciones continuas de un espacio topológico en un espacio de Banach. El ambiente más general en el que se estudia el rango numérico y que permite recuperar todos los conceptos ya citados, es el de los llamados espacios de rango numérico, que aparecen implícitamente en el trabajo clásico de H. Bohnenblust y S. Karlin [23] y que son formalmente introducidos en los artículos de C. Aparicio, F. Ocaña, J. Martínez, J. Mena, R. Payá y A. Rodríguez-Palacios [9] y [97].

1.1.3 Definición. Un *espacio de rango numérico* es un par (X, u) donde X es un espacio de Banach y u es un elemento fijo de S_X. Definimos el *rango numérico* de un elemento $x \in X$ *relativo a* (X, u) como el subconjunto de escalares dado por

$$V(X, u, x) := \{x^*(x) \ : \ x^* \in D(X, u)\},$$

donde

$$D(X, u) := \{x^* \in X^* \ : \ \|x^*\| = x^*(u) = 1\}$$

es el conjunto w^*-cerrado y convexo formado por los *estados* de X relativos a u.

Es un hecho bien conocido que el conjunto de los estados de un punto u está relacionado con la derivada direccional de la norma en u. Por la importancia que tendrá en la presente memoria, recogemos dicha relación en el siguiente resultado, que se puede encontrar en el libro de N. Dunford y J. Schwartz [43, Theorem V.9.5]. Como la demostración que allí aparece es algo tediosa, creemos oportuno dar una demostración detallada, que no es más que una mera adaptación de la dada por H. Bohnenblust y S. Karlin para [23, Theorem 1].

1.1.4 Teorema ([43, Theorem V.9.5]). *Sea X un espacio de Banach y sea $u \in S_X$. Entonces,*

$$\text{máx}\{\operatorname{Re} x^*(x) \ : \ x^* \in D(X, u)\} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u + \alpha x\| - 1}{\alpha} \qquad (x \in X).$$

Demostración. Observamos en primer lugar que esta igualdad depende únicamente de la estructura real del espacio X pues, claramente,

$$D(X_{\mathbb{R}}, u) = \{\operatorname{Re} x^* \ : \ x^* \in D(X, u)\}.$$

Podemos pues suponer que X es un espacio real. Fijados $x \in X$ y $x^* \in D(X, u)$, para cada $\alpha > 0$ se tiene que

$$x^*(x) = \frac{x^*(u + \alpha x) - 1}{\alpha} \leqslant \frac{\|u + \alpha x\| - 1}{\alpha}$$

y, tomando límite cuando α decrece a cero, deducimos que

$$x^*(x) \leqslant \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u + \alpha x\| - 1}{\alpha},$$

luego

$$\text{máx}\{x^*(x) \ : \ x^* \in D(X,u)\} \leqslant \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u+\alpha x\| - 1}{\alpha}.$$

Para ver la desigualdad contraria, definimos la aplicación $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$\varphi(x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u+\alpha x\| - 1}{\alpha} \qquad (x \in X),$$

y observamos que, dados $\lambda \geqslant 0$, $x, y \in X$, φ verifica las siguientes propiedades:

(i) $\varphi(x) \leqslant \|x\|$,

(ii) $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$,

(iii) $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$,

(iv) $\varphi(u+x) = \varphi(u) + \varphi(x)$.

La primera propiedad se deduce inmediatamente de la definición de φ y para obtener (ii), observamos en primer lugar que $\varphi(0) = 0$ y en segundo lugar que, fijado $\lambda > 0$, podemos escribir

$$\varphi(\lambda x) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u+\alpha\lambda x\| - 1}{\alpha} = \lambda \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u+\alpha\lambda x\| - 1}{\alpha\lambda} = \lambda\varphi(x).$$

Para demostrar (iii), fijamos $\alpha > 0$, observamos que

$$\frac{\|u+\alpha(x+y)\| - 1}{\alpha} = \frac{\|2u+2\alpha x+2\alpha y\| - 2}{2\alpha} \leqslant \frac{\|u+2\alpha x\| - 1}{2\alpha} + \frac{\|u+2\alpha y\| - 1}{2\alpha}$$

y tomamos límite en esta desigualdad. Para establecer (iv), fijamos $\alpha > 0$, escribimos

$$\frac{\|u+\alpha u+\alpha x\| - 1}{\alpha} = \frac{\|u+\frac{\alpha}{1+\alpha}x\| - \frac{1}{1+\alpha}}{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \frac{\|u+\frac{\alpha}{1+\alpha}x\| - 1}{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + 1$$

y tomamos límite para obtener que $\varphi(u+x) = 1 + \varphi(x) = \varphi(u) + \varphi(x)$.

Ahora, fijado $x_0 \in X$, consideramos el subespacio $M_{x_0} = \mathbb{R}(u+x_0)$ y el funcional lineal definido sobre M_{x_0} por

$$g\big(\lambda(u+x_0)\big) = \lambda\varphi(u+x_0) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

y observamos que las propiedades (ii) y (iii) nos dicen que φ es un funcional sublineal que además verifica

$$g\big(\lambda(u+x_0)\big) \leqslant \varphi\big(\lambda(u+x_0)\big).$$

En efecto, si $\lambda \geqslant 0$ tenemos que $g\big(\lambda(u+x_0)\big) = \varphi\big(\lambda(u+x_0)\big)$ gracias a (ii). Si por el contrario $\lambda < 0$, podemos utilizar (ii) y (iii) para escribir

$$0 = \varphi(0) \leqslant \varphi\big(\lambda(u+x_0)\big) + \varphi\big(-\lambda(u+x_0)\big) = \varphi\big(\lambda(u+x_0)\big) - \lambda\varphi(u+x_0),$$

luego

$$g\big(\lambda(u+x_0)\big) = \lambda\varphi(u+x_0) \leqslant \varphi\big(\lambda(u+x_0)\big).$$

Podemos por tanto aplicar el Teorema de Hahn-Banach para encontrar un funcional lineal f sobre X de modo que

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \qquad (x \in X) \qquad \text{y} \qquad f(u+x_0) = g(u+x_0) = \varphi(u+x_0).$$

La primera condición nos dice que $f(x) \leqslant \|x\|$ para cada $x \in X$ y, por tanto, que f es continuo con $\|f\| \leqslant 1$; haciendo uso de la segunda condición, de la primera y del hecho de que $f(u) \leqslant 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 + \varphi(x_0) = \varphi(u+x_0) &= f(u+x_0) \\ &= f(u) + f(x_0) \leqslant f(u) + \varphi(x_0) \leqslant 1 + \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $f(u) = 1$ y que $f(x_0) = \varphi(x_0)$, lo que concluye la demostración. □

En este capítulo trabajaremos con los conceptos de rango numérico en el ambiente de las funciones acotadas definidas en la esfera de un subespacio de un espacio de Banach con valores en el espacio. Comenzamos introduciendo la notación necesaria y dando las definiciones pertinentes. Dado un espacio de Banach Y, cualquier subespacio X de Y nos provee de una isometría lineal $\mathrm{J} : X \longrightarrow Y$ que nos indica la forma en la que X está incluido en Y. Este esquema nos permite definir la noción de superespacio: dados dos espacios de Banach X e Y, diremos que Y es un *superespacio* para X si existe una isometría lineal $\mathrm{J} : X \longrightarrow Y$, esto es, si X identificado como $\mathrm{J}(X)$ es un subespacio de Y. Notemos que si X es un subespacio de Y (o Y es un superespacio para X), entonces para cada $u \in X$, el conjunto $D(X, u)$ se identifica totalmente con $D(\mathrm{J}(X), \mathrm{J}u)$ que, gracias al Teorema de Hahn-Banach, coincide con el conjunto de las restricciones a $\mathrm{J}(X)$ de los elementos de $D(Y, \mathrm{J}u)$. Fijados dos espacios X e Y en las condiciones anteriores, escribiremos $\Pi(X, Y)$ para denotar al conjunto $S_X \times S_{Y^*}$ dado por

$$\Pi(X, Y) := \{(x, y^*) \in S_X \times S_{Y^*} \ : y^* \in D(Y, \mathrm{J}x)\}$$

y, cuando $X = Y$ y $\mathrm{J} = \mathrm{Id}$, escribiremos simplemente $\Pi(Y) := \Pi(Y, Y)$. Denotaremos por $B(S_X, Y)$ al espacio de Banach de las funciones acotadas definidas en S_X con valores en Y, dotado de la norma del supremo y escribiremos $C_u(S_X, Y)$ para denotar a su subespacio cerrado formado por las funciones acotadas y uniformemente continuas.

1.1.5 Definición. Sea Y un espacio de Banach y X un subespacio cerrado. Se define el *rango numérico espacial* de una función $f \in B(S_X, Y)$ como el conjunto de escalares

$$W(f) := \bigcup_{x \in S_X} V(Y, \mathrm{J}x, f(x)) = \{y^*(f(x)) \ : \ (x, y^*) \in \Pi(X, Y)\},$$

y se define el *rango numérico intrínseco* de f como

$$V(f) := V\big(B(S_X, Y), \mathrm{J}|_{S_X}, f\big) = \big\{\Phi(f) \ : \ \Phi \in D\left(B(S_X, Y), \mathrm{J}|_{S_X}\right)\big\}.$$

1.1.6 Observación. *El nombre de rango numérico intrínseco tiene su justificación en el hecho de que no depende del subespacio de $B(S_X, Y)$ que se considere, esto es, si M es un subespacio cerrado de $B(S_X, Y)$ que contiene a $\mathrm{J}|_{S_X}$, entonces*

$$V\big(B(S_X, Y), \mathrm{J}|_{S_X}, f\big) = V\big(M, \mathrm{J}|_{S_X}, f\big)$$

para cada $f \in M$.

Por supuesto, si $X = Y$, $\mathrm{J} = \mathrm{Id}$ y T es (la restricción a S_X de) un operador lineal y continuo, las definiciones anteriores coinciden con Definiciones 1.1.1 y 1.1.2. De hecho, las definiciones de rango numérico dadas por F. Bonsall, B. Cain y H. Schneider [25] y por L. Harris [66], que hemos mencionado al principio de esta introducción, se pueden ver como casos particulares dentro del ambiente más general en el que estamos trabajando.

Fijado $(x, y^*) \in \Pi(X, Y)$, la aplicación $x \otimes y^*$ de $B(S_X, Y)$ en $\mathbb{K}$ dada por

$$[x \otimes y^*](g) := y^*(g(x)) \qquad \big(g \in B(S_X, Y)\big)$$

es obviamente un elemento de $D(B(S_X, Y), \mathrm{J}|_{S_X})$ y, por tanto, dada $f \in B(S_X, Y)$, se tiene que $W(f) \subseteq V(f)$. Además, como $V(f)$ es claramente un conjunto cerrado y convexo, también se tiene la inclusión

$$\overline{\mathrm{co}}\, W(f) \subseteq V(f) \tag{1.1}$$

para cada $f \in B(S_X, Y)$. Como comentaremos más adelante, hay muchas situaciones en las que esta inclusión es una igualdad y nuestro objetivo principal en este capítulo es estudiar bajo qué condiciones sobre los espacios X e Y y sobre la función f se puede garantizar dicha igualdad.

Es claro que si se tiene la igualdad en (1.1) para una función $f \in B(S_X, Y)$, entonces se verifica que

$$\text{máx}\, \mathrm{Re}\, V(f) = \sup \mathrm{Re}\, W(f)$$

y, gracias al Teorema 1.1.4, esta igualdad equivale a:

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \sup_{x \in S_X} \frac{\|\mathrm{J}x + \alpha f(x)\| - 1}{\alpha} = \sup_{x \in S_X} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|\mathrm{J}x + \alpha f(x)\| - 1}{\alpha}. \tag{1.2}$$

Observamos también que, en algunas circunstancias, esta identidad caracteriza a la igualdad $\overline{\mathrm{co}}\, W(f) = V(f)$, como indica el siguiente resultado de L. Harris [66].

1.1.7 Proposición ([66, Proposition 1]). *Sea Y un espacio de Banach y sea X un subespacio cerrado de Y con la inclusión $\mathrm{J} : X \longrightarrow Y$. Si M es un subespacio de $B(S_X, Y)$ con $\mathrm{J}|_{S_X} \in M$, equivalen:*

a) $V(f) = \overline{\text{co}}\, W(f)$ *para cada* $f \in M$.
b) $\text{máx}\{|\lambda| \ :\ \lambda \in V(f)\} \leqslant \sup\{|\lambda| \ :\ \lambda \in W(f)\}$ *para cada* $f \in M$.
c) $\text{máx Re}\, V(f) \leqslant \sup \text{Re}\, W(f)$ *para cada* $f \in M$.
d) Cualquier $f \in M$ *verifica la igualdad* (1.2).

Comenzamos nuestro estudio repasando las situaciones en las que se sabe que se da la igualdad en (1.1). En el caso particular en el que $X = Y$ y $\text{J} = \text{Id}$, F. Bauer [14, Theorem 4.3] y G. Lumer [85, Lemma 12] prueban a comienzos de la década de los 60 que si T es un operador lineal y continuo sobre X se cumple que

$$\sup\ \text{Re}\, W(T) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|\text{Id} + \alpha T\| - 1}{\alpha},$$

lo que, gracias a la Proposición 1.1.7, nos dice que

$$V(T) = \overline{\text{co}}\, W(T).$$

De una manera totalmente análoga, L. Harris [65, Theorem 2] demuestra en 1971 que se verifica la igualdad en (1.1) para funciones holomorfas en el interior de B_X que admiten una extensión uniformemente continua a B_X. De hecho, dicha igualdad es válida para funciones uniformemente continuas.

1.1.8 Teorema ([66, Theorem 1]). *Sea* X *un espacio de Banach y sea* $f \in C_u(S_X, X)$. *Entonces,*

$$V(f) = \overline{\text{co}}\, W(f).$$

En 2004 A. Rodríguez-Palacios demuestra que el resultado anterior sigue siendo válido cuando en la definición de rango numérico espacial se cambia $\Pi(X)$ por un subconjunto suyo cuya proyección sobre la primera coordenada es densa en S_X [116, Theorem 2.5].

En vista del Teorema 1.1.8, es razonable preguntarse si dado un espacio de Banach arbitrario X se verifica la igualdad $V(f) = \overline{\text{co}}\, W(f)$ para cada $f \in B(S_X, X)$.

Esta cuestión fue resuelta por A. Rodríguez-Palacios en 2001 al demostrar en [115] que dicha igualdad caracteriza a la suavidad uniforme. Recordemos que la norma de un espacio de Banach X es *suave* en un punto u de la esfera de X si $D(X,u)$ se reduce a un único punto, y es *Fréchet suave* o *Fréchet diferenciable* en u si el límite

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\|u+\alpha x\|-1}{\alpha} \tag{1.3}$$

existe uniformemente en $x \in B_X$. Si lo anterior ocurre para cada $u \in S_X$, se dice que la norma de X es Fréchet diferenciable y si el límite en (1.3) es uniforme en $x \in B_X$ y en $u \in S_X$ se dice que X es *uniformemente suave*. Estos conceptos han demostrado ser muy útiles en el estudio de la geometría de los espacios de Banach; buena prueba de ello es la gran cantidad de información que se puede encontrar acerca de ellos en la literatura, como por ejemplo en [15, §2], [39], [47, §8,§10] o [99, §5].

1.1.9 Teorema ([115, Theorem 5]). *Sea X un espacio de Banach. Equivalen:*

(i) *La igualdad $\overline{\mathrm{co}}\, W(f) = V(f)$ se verifica para toda $f \in B(S_X, X)$.*

(ii) *X es uniformemente suave.*

Dentro del ambiente más general en el que X es un subespacio propio de Y, L. Harris da en [66, Theorems 2, 3] dos condiciones suficientes para que se verifique la igualdad en (1.1); concretamente, dicha igualdad ocurre para cada $f \in C_u(S_X, Y)$ cuando la dimensión de X es finita o cuando Y es uniformemente suave.

1.1.10 Proposición ([66, Theorem 2]). *Sea Y un espacio de Banach y sea X un subespacio de dimensión finita. Entonces, para cada $f \in C_u(S_X, Y)$ se tiene que*

$$V(f) = \overline{\mathrm{co}}\, W(f).$$

1.1.11 Proposición ([66, Theorem 3]). *Sea Y un espacio de Banach uniformemente suave. Entonces, para cada subespacio cerrado X y cada $f \in C_u(S_X, Y)$*

se verifica que

$$\overline{\text{co}}\, W(f) = V(f).$$

Concluimos aquí nuestro breve repaso acerca de los resultados conocidos sobre la igualdad de rangos $\overline{\text{co}}\, W(f) = V(f)$.

1.2. Igualdad de rangos para operadores

En esta sección nos centramos en la situación general en la que Y es un espacio de Banach y X es un subespacio propio y pretendemos estudiar bajo qué condiciones sobre X e Y se verifica la igualdad

$$V(T) = \overline{\text{co}}\, W(T)$$

para todo operador $T \in L(X,Y)$. Este problema se puede enfocar desde dos puntos de vista: por una parte, podemos fijar el espacio X y estudiar qué hipótesis sobre él aseguran la igualdad que queremos para cada superespacio Y y cada operador $T \in L(X,Y)$; por otra parte, podemos considerar fijo el espacio Y y buscar condiciones que aseguren que $V(T) = \overline{\text{co}}\, W(T)$ para cada subespacio cerrado X y cada operador $T \in L(X,Y)$. Como consecuencia inmediata de la Proposición 1.1.10, tenemos que los espacios de dimensión finita responden al primer esquema y nuestro primer objetivo es demostrar que son los únicos.

1.2.1 Teorema. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, existen un superespacio Y y un operador $T \in L(X,Y)$ de modo que $\overline{\text{co}}\, W(T) \neq V(T)$.*

Para demostrar este resultado necesitaremos el siguiente lema.

1.2.2 Lema. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, existe un operador $S \in L(X, c_0)$ que no alcanza su norma.*

Demostración. Como X es de dimensión infinita, podemos utilizar el Teorema de Josefson-Nissenzweig (véase [40, §XII] por ejemplo) para encontrar una sucesión $\{x_n^*\}$ en S_{X^*} que converge a 0 en la topología débil*, y considerar el operador de norma uno $S : X \longrightarrow c_0$ dado por

$$[Sx](n) = \frac{n}{n+1} x_n^*(x) \qquad \big(x \in X,\ n \in \mathbb{N}\big).$$

La convergencia débil* a 0 de la sucesión $\{x_n^*\}$ nos asegura que S está bien definido y es claro que no alcanza su norma. □

Demostración del Teorema 1.2.1. Tomemos un operador de norma uno $S \in L(X, c_0)$ que no alcance su norma, consideremos el espacio $Y = X \oplus c_0$ dotado de la norma

$$\|(x,t)\| = \max\{\|x\|,\ \|Sx\|_\infty + \|t\|_\infty\} \qquad (x \in X,\ t \in c_0),$$

con la inclusión natural $\mathrm{J}x = (x, 0)$ para cada $x \in X$ y definamos el operador $T \in L(X, Y)$ por

$$Tx = (0, Sx) \qquad (x \in X).$$

Es suficiente demostrar que

$$\sup_{x \in S_X} \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|\mathrm{J}x + \alpha Tx\| - 1}{\alpha} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\alpha \to 0^+} \sup_{x \in S_X} \frac{\|\mathrm{J}x + \alpha Tx\| - 1}{\alpha} = 1.$$

Para ello, fijado $x \in S_X$, como $\|Sx\|_\infty < 1$ podemos encontrar $\alpha_0 > 0$ de modo que para cada $\alpha < \alpha_0$ se tiene que

$$(1 + \alpha)\|Sx\|_\infty \leqslant 1$$

y, por tanto,

$$\|\mathrm{J}x + \alpha Tx\| = \|(x, \alpha Sx)\| = \max\{1,\ (1+\alpha)\|Sx\|_\infty\} = 1,$$

luego

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|\mathrm{J}x + \alpha Tx\| - 1}{\alpha} = 0;$$

deducimos entonces que

$$\sup_{x\in S_X} \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|Jx+\alpha Tx\|-1}{\alpha} = 0.$$

Para demostrar la otra igualdad, fijamos $\alpha > 0$ y observamos que

$$\|J+\alpha T\| = \sup_{x\in S_X} \|Jx+\alpha Tx\| = \sup_{x\in S_X} \text{máx}\{1,\ (1+\alpha)\|Sx\|_\infty\} = 1+\alpha,$$

de donde deducimos que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|J+\alpha T\|-1}{\alpha} = 1. \qquad \square$$

1.2.3 Observación. *Con un poco más de esfuerzo se puede probar que el superespacio Y del teorema anterior puede ser construido de modo que Y/X tenga dimension* 1.

Demostración. Consideramos dos casos dependiendo de la reflexividad de X.

CASO 1: Suponemos en primer lugar que X no es reflexivo y utilizamos el Teorema de James para encontrar un funcional $x^* \in S_{X^*}$ que no alcanza su norma. Definimos ahora el espacio $Y = X \oplus \mathbb{K}$ dotado de la norma

$$\|(x,t)\| = \text{máx}\{\|x\|,\ |x^*(x)|+|t|\} \qquad \big(x\in X,\ t\in\mathbb{K}\big),$$

que contiene a X como subespacio con la inclusión natural y definimos el operador $T \in L(X,Y)$ por

$$Tx = (0, x^*(x))$$

para cada $x \in X$. De modo análogo a como se hace en la demostración del Teorema 1.2.1 se comprueba que $\text{máx}\,\mathrm{Re}\,V(T) = 1$ y $\sup \mathrm{Re}\,W(T) = 0$.

CASO 2: Supongamos ahora que X es reflexivo. Como X tiene dimensión infinita, el Teorema de separación-$(1+\varepsilon)$ de Elton-Odell (véase [40, §XIV], por ejemplo) nos dice que existen $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión $\{x_n^*\}_{n\geqslant 0}$ de elementos de S_{X^*} verificando que

$$\|x_n^* - x_m^*\| \geqslant 1 + \varepsilon_0 \qquad (n \neq m).$$

Como X es reflexivo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S_X$ de modo que

$$|(x_n^* - x_0^*)(x_n)| = \|x_n^* - x_0^*\| \geqslant 1 + \varepsilon_0$$

y, por tanto, tenemos que

$$|x_0^*(x_n)| \geqslant |(x_n^* - x_0^*)(x_n)| - |x_n^*(x_n)| \geqslant 1 + \varepsilon_0 - 1 = \varepsilon_0. \tag{1.4}$$

Por otro lado, si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $y_n^* \in S_{X^*}$ por

$$y_n^* = \frac{x_n^* - x_0^*}{\|x_n^* - x_0^*\|},$$

es claro que se tiene $y_n^*(x_n) = 1$. Utilizamos la reflexividad de X otra vez para asegurar que $X \not\supseteq c_0$, con lo que se puede deducir de la demostración del Teorema de Elton-Odell que $\{x_n^*\}_{n\geqslant 0}$ es una sucesión básica que, por ser X^* también reflexivo, converge a cero en la topología débil (véase [122, Theorem II.7.2]). Usando esto, y que

$$\|x_n^* - x_0^*\| \geqslant 1 + \varepsilon_0 \qquad \text{y} \qquad \|x_0^*\| = 1,$$

obtenemos que

$$\overline{\lim}\, y_n^*(x) < 1 \qquad \big(x \in B_X\big).$$

Este hecho nos asegura que el operador $S \in L(X, \ell_\infty)$ dado por

$$[Sx](n) = \frac{n}{n+1} y_n^*(x) \qquad \big(x \in X,\ n \in \mathbb{N}\big)$$

no alcanza su norma.

Definimos ya el superespacio $Y = X \oplus \mathbb{K}$ dotado de la norma

$$\|(x,t)\| = \max\{\|x\|, \|Sx\|_\infty + |t|\} \qquad \big(x \in X,\ t \in \mathbb{K}\big),$$

consideramos J $\in L(X,Y)$ la inclusión natural y $T \in L(X,Y)$ el operador dado por

$$Tx = (0, x_0^*(x)) \qquad (x \in X).$$

Para acabar la demostración basta probar que

$$\sup \operatorname{Re} W(T) = 0 \qquad \text{y} \qquad \sup \operatorname{Re} V(T) \geqslant \varepsilon_0$$

y utilizar la Proposición 1.1.7. Usando que S no alcanza su norma, no resulta difícil comprobar que

$$\sup \operatorname{Re} W(T) = \sup_{x\in S_X} \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|\mathrm{J}x + \alpha Tx\| - 1}{\alpha} = 0.$$

Para calcular $\max \operatorname{Re} V(T)$, fijamos $\alpha > 0$ y observamos que

$$\begin{aligned} \|\mathrm{J} + \alpha T\| \geqslant \|\mathrm{J}x_n + \alpha Tx_n\| &= \big\|\big(x_n, \alpha x_0^*(x_n)\big)\big\| \\ &\geqslant \|Sx_n\| + \alpha |x_0^*(x_n)| \geqslant \|Sx_n\| + \alpha\varepsilon_0 \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se utiliza (1.4). Tomando límite en la desigualdad anterior y teniendo en cuenta que $\|Sx_n\| \longrightarrow 1$, deducimos que

$$\|\mathrm{J} + \alpha T\| \geqslant 1 + \alpha\varepsilon_0 \qquad (\alpha > 0)$$

luego tenemos que

$$\max \operatorname{Re} V(T) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\|\mathrm{J} + \alpha T\| - 1}{\alpha} \geqslant \varepsilon_0. \qquad \square$$

Volviendo a nuestro problema, la Proposición 1.1.10 y el Teorema 1.2.1 resuelven completamente el caso en el que el subespacio X se considera fijo, hecho que recogemos en el siguiente corolario.

1.2.4 Corolario. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, se verifica la igualdad $\overline{\mathrm{co}}\, W(T) = V(T)$ para cada superespacio Y y cada operador $T \in L(X,Y)$ si, y sólo si, la dimensión de X es finita.*

Ahora nos planteamos qué ocurre cuando fijamos el superespacio Y, esto es, queremos estudiar qué espacios de Banach Y verifican que para cada subespacio X y cada operador $T \in L(X,Y)$ se tiene la igualdad

$$V(T) = \overline{\text{co}}\, W(T). \tag{1.5}$$

La situación en este caso es bien diferente, pues gracias a la Proposición 1.1.11 sabemos que además de los espacios de dimensión finita los espacios de Banach uniformemente suaves verifican la condición que queremos. Con esto en mente, si uno pretende encontrar otros espacios para los que se verifique la igualdad (1.5), parece razonable buscar alguna clase de espacios que contenga a los espacios de dimensión finita y a los uniformemente suaves, esto es, buscar propiedades comunes a ambas clases de espacios. Una propiedad de tipo isométrico que tienen en común los espacios uniformemente suaves y los de dimensión finita es la subdiferenciabilidad fuerte de la norma en todo punto de la esfera unidad. Este concepto, que fue introducido por D. Gregory en [60], es una generalización de la diferenciabilidad Fréchet de la norma en la que no se exige suavidad. Concretamente, la norma de un espacio de Banach Y es *fuertemente subdiferenciable* en $u \in S_Y$ si existe el límite

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u + \alpha y\| - 1}{\alpha}$$

uniformemente en $y \in B_Y$; cuando esto ocurra para cada $u \in S_Y$, diremos que la norma de Y es fuertemente subdiferenciable. Es claro que la norma de Y es Fréchet diferenciable en u si, y sólo si, es a la vez suave y fuertemente subdiferenciable en el punto u. Esta propiedad ha sido estudiada en profundidad en [53] y se pueden encontrar algunas aplicaciones en [56, 57]. En [53], C. Franchetti y R. Payá dan el siguiente resultado para estudiar la subdiferenciabilidad fuerte, análogo al Lema de Šmulian, que incluimos para su uso posterior.

1.2.5 Lema ([53, Theorem 1.2]). *Sea Y un espacio de Banach. Entonces, la norma de Y es fuertemente subdiferenciable en un punto u si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$,* *existe* $\delta > 0$ *verificando*

$$y^* \in B_{Y^*}, \quad \operatorname{Re} y^*(u) > 1 - \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{dist}\big(y^*, D(Y,u)\big) < \varepsilon.$$

Aunque los espacios de dimensión finita y los espacios uniformemente suaves tienen norma fuertemente subdiferenciable, esta última propiedad no asegura que la igualdad (1.5) se verifique para todos los subespacios y todos los operadores.

1.2.6 Ejemplo. *La norma del espacio* $Y = \ell_2 \oplus_\infty (\ell_2 \oplus_1 \ell_2)$ *es fuertemente subdiferenciable y se puede encontrar un subespacio cerrado* X *de* Y *y un operador* $T \in L(X,Y)$ *verificando que* $\overline{\text{co}}\, W(T) \neq V(T)$.

Demostración. Para probar que la norma de Y es fuertemente subdiferenciable, basta ver Y como suma absoluta de espacios con norma fuertemente subdiferenciable y utilizar las Proposiciones 2.2 y 2.3 de [53].

Definimos ahora el operador $S \in S_{L(\ell_2)}$ que no alcanza su norma por

$$[Sx](n) = \frac{n}{n+1} x(n) \qquad \big(x \in \ell_2,\ n \in \mathbb{N}\big)$$

y consideramos el subespacio cerrado de Y definido por

$$X := \{(x, Sx, 0) \ : \ x \in \ell_2\}$$

con la inclusión natural en Y. Definimos finalmente el operador $T : X \longrightarrow Y$ mediante

$$T(x, Sx, 0) = (0, 0, Sx) \qquad \big(x \in X\big),$$

y bastará probar que

$$\sup \operatorname{Re} W(T) = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{máx} \operatorname{Re} V(T) = 1.$$

Veamos la primera igualdad: dado $x \in S_{\ell_2}$ podemos encontrar $\alpha_x > 0$ de modo que $(1+\alpha_x)\|Sx\| < 1$ y, por tanto, para cada $0 < \alpha < \alpha_x$ tenemos que

$$\|(x, Sx, 0) + \alpha T(x, Sx, 0)\| = \|(x, Sx, \alpha Sx)\| = \text{máx}\{1, (1+\alpha)\|Sx\|\} = 1,$$

lo que nos permite concluir que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|(x, Sx, 0) + \alpha T(x, Sx, 0)\| - 1}{\alpha} = 0$$

y la arbitrariedad de $x \in S_{\ell_2}$ nos da $\sup \operatorname{Re} W(T) = 0$. Para la segunda igualdad, fijado $\alpha > 0$, observamos que si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la base usual de ℓ_2 entonces

$$\|\mathrm{J} + \alpha T\| \geqslant \|(\mathrm{J} + \alpha T)(e_n, Se_n, 0)\| = (1 + \alpha)\frac{n}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

luego $\|\mathrm{J} + \alpha T\| \geqslant 1 + \alpha$ y, por tanto,

$$1 = \|T\| \geqslant \max \operatorname{Re} V(T) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{\|\mathrm{J} + \alpha T\| - 1}{\alpha} \geqslant 1. \qquad \square$$

Si bien la propiedad que estamos estudiando es de tipo isométrico, podemos plantearnos si existe alguna propiedad de tipo isomórfico que la implique. Entre las propiedades de tipo isomórfico que deben tener tanto los espacios de dimensión finita como los espacios uniformemente suaves, la más relevante es la reflexividad. Parece natural plantearse si en todo espacio reflexivo se verifica la igualdad (1.5) para cada subespacio cerrado suyo y cada operador. Nada más lejos de la realidad, ya que el espacio $\ell_2 \oplus_\infty (\ell_2 \oplus_1 \ell_2)$ es reflexivo (de hecho, superreflexivo) y el Ejemplo 1.2.6 nos dice que no se verifica la condición que queremos. Aún nos podemos preguntar si la reflexividad es una condición necesaria para que se verifique la propiedad que estamos estudiando y, aunque no hemos sido capaces de resolver esta cuestión, el siguiente resultado parece indicar que la respuesta puede ser positiva.

1.2.7 Proposición. *En todo espacio no reflexivo Y se puede encontrar una norma equivalente de modo que existen un subespacio cerrado X y un operador T en $L(X, Y)$ verificando que $\overline{\mathrm{co}}\, W(T) \neq V(T)$.*

Demostración. Tomamos un subespacio V de Y de codimensión dos y observamos que Y es isomorfo a $V \oplus_\infty (\mathbb{K} \oplus_1 \mathbb{K})$. Como V no es reflexivo, podemos encontrar

$v_0^* \in S_{V^*}$ que no alcance su norma y considerar el subespacio cerrado de Y dado por

$$X = \{(v, v_0^*(v), 0) \ : \ v \in V\}$$

con la inclusión natural. Si definimos el operador $T : X \longrightarrow Y$ por

$$T(v, v_0^*(v), 0) = (0, 0, v_0^*(v)) \qquad \big(x \in X\big),$$

es sencillo comprobar siguiendo las ideas dadas en los ejemplos anteriores que

$$\text{máx} \operatorname{Re} V(T) = 1 \qquad \text{y} \qquad \sup \operatorname{Re} W(T) = 0. \qquad \square$$

Observamos que c_0 con su norma usual es isométricamente isomorfo al espacio $c_0 \oplus_\infty (\mathbb{K} \oplus_1 \mathbb{K})$, luego un razonamiento análogo al de las demostraciones anteriores nos permite dar el siguiente ejemplo.

1.2.8 Ejemplo. *Existe un subespacio cerrado de c_0 y un operador $T \in L(X, c_0)$ de modo que $\overline{\text{co}}\, W(T) \neq V(T)$.*

1.3. Una condición suficiente: La propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás

En esta sección pretendemos introducir y estudiar una propiedad de tipo isométrico que garantiza que en un espacio de Banach Y se verifique la igualdad $\overline{\text{co}}\, W(f) = V(f)$ para todo subespacio cerrado X y toda función $f \in C_u(S_X, Y)$. Veremos también que esta propiedad es una generalización de la suavidad uniforme y de la dimensión finita. La motivación de esta propiedad viene dada por la versión cuantitativa del Teorema clásico de Bishop-Phelps [21, 22] dada por B. Bollobás [24] (la versión que aparece más abajo puede encontrarse en [27, §16]).

1.3.1 Teorema (Bishop-Phelps-Bollobás)**.** *Sea Y un espacio de Banach y sea $\varepsilon > 0$.*

Para cualesquiera $y_0 \in S_Y$ *e* $y_0^* \in S_{Y^*}$ *verificando que*

$$\operatorname{Re} y_0^*(y_0) > 1 - \frac{\varepsilon^2}{4},$$

existe $(y, y^*) \in \Pi(Y)$ *de modo que*

$$\|y - y_0\| < \varepsilon \qquad y \qquad \|y^* - y_0^*\| < \varepsilon.$$

El teorema anterior ha desempeñado un papel fundamental en el desarrollo de algunos aspectos de la geometría de los espacios de Banach (véase [54, 106, 107]); citemos, por ejemplo, que ha resultado particularmente útil en el estudio de las normas fuertemente subdiferenciables [53] y en el estudio del rango numérico espacial de operadores [27, §16 y §17]. Digamos también que la demostración de la igualdad $\overline{\text{co}}\, W(f) = V(f)$ para toda $f \in C_u(S_Y, Y)$ dada en [66, Theorem 1], usa el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás; para operadores lineales y continuos, dicha igualdad se puede deducir también de [82, Theorem 8], resultado que a su vez es consecuencia del Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. Motivados por todos estos hechos hacemos la siguiente definición.

1.3.2 Definición. Sea Y un espacio de Banach y sea X un subespacio cerrado suyo con la inclusión $J : X \longrightarrow Y$. Decimos que (X, Y) es un *par de Bishop-Phelps-Bollobás* (usaremos al abreviación *par BPB*) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que cualesquiera que sean $x_0 \in S_X$ e $y_0^* \in S_{Y^*}$ verificando que $\operatorname{Re} y_0^*(Jx_0) > 1 - \delta$, existe $(x, y^*) \in \Pi(X, Y)$ tal que

$$\|x_0 - x\| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|y_0^* - y^*\| < \varepsilon.$$

Diremos que un espacio de Banach Y tiene la *propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás* (usaremos la abreviación *propiedad BPB*) si para cada subespacio cerrado X de Y, (X, Y) es un par BPB.

Obsérvese que la diferencia fundamental entre la definición anterior y el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás es que el punto que aparece debe quedarse en el subespacio X.

El siguiente resultado, cuya demostración sigue las ideas de [66, Theorem 1], nos concreta la relación que hay entre la propiedad BPB y la igualdad de rangos numéricos.

1.3.3 Teorema. *Sea (X, Y) un par BPB. Entonces,*

$$\overline{\text{co}}\, W(f) = V(f)$$

para toda $f \in C_u(S_X, Y)$.

La clave de la demostración de este teorema es un lema establecido por L. Harris en 1974 que en nuestro ambiente se lee como sigue.

1.3.4 Lema ([66, Lemma 1]). *Sea Y un espacio de Banach, sea X un subespacio cerrado suyo con inclusión $\mathrm{J} : X \longrightarrow Y$ y sea $f \in C_u(S_X, Y)$. Entonces, para cada $\Phi \in D(C_u(S_X, Y), \mathrm{J}|_{S_X})$ y cada $\varepsilon > 0$ existen $x \in S_X$ e $y^* \in S_{Y^*}$ verificando que*

$$\operatorname{Re} \Phi(f) \leqslant \operatorname{Re} y^*\big(f(x)\big) + \varepsilon \qquad y \qquad |1 - y^*(\mathrm{J}x)| < \varepsilon.$$

Demostración del Teorema 1.3.3. Si llamamos J a la inclusión de X en Y y fijamos $f \in C_u(S_X, Y)$ y $\Phi \in D(C_u(S_X, Y), \mathrm{J}|_{S_X})$, gracias a la Proposición 1.1.7, sólo tenemos que demostrar que

$$\operatorname{Re} \Phi(f) \leqslant \sup \operatorname{Re} W(f). \tag{1.6}$$

Para ello, dado $n \in \mathbb{N}$, utilizamos el Lema 1.3.4 para encontrar un punto $x_n \in S_X$ y un funcional $y_n^* \in S_{Y^*}$ de modo que

$$y_n^*(\mathrm{J}x_n) \longrightarrow 1 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Re} \Phi(f) \leqslant \operatorname{Re} y_n^*(f(x_n)) + \frac{1}{n}. \tag{1.7}$$

Por una parte, como (X, Y) es un par BPB, obtenemos una sucesión $\big\{(\widetilde{x}_n, \widetilde{y}_n^*)\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\Pi(X, Y)$ tal que

$$\{x_n - \widetilde{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0 \qquad \text{y} \qquad \{y_n^* - \widetilde{y}_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

y, por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\Phi(f) &\leqslant \operatorname{Re}\widetilde{y}_n^*(f(\widetilde{x}_n)) + \operatorname{Re}[y_n^* - \widetilde{y}_n^*](f(\widetilde{x}_n)) + \operatorname{Re} y_n^*(f(x_n) - f(\widetilde{x}_n)) + 1/n \\ &\leqslant \sup \operatorname{Re} W(f) + \|y_n^* - \widetilde{y}_n^*\| \, \|f\|_\infty + \|f(x_n) - f(\widetilde{x}_n)\| + 1/n\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, la desigualdad (1.6) se obtiene sin más que utilizar la continuidad uniforme de f. □

Como consecuencia inmediata de los Teoremas 1.3.3 y 1.2.1 obtenemos el siguiente corolario.

1.3.5 Corolario. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, existe un superespacio Y para X de modo que (X,Y) no es un par BPB.*

El Teorema 1.3.3 nos asegura que los ejemplos que hemos dado en la sección anterior para los que existen un subespacio cerrado y un operador que no verifica la igualdad de rangos, carecen de la propiedad BPB.

1.3.6 Ejemplos.

a) *Los espacios $\ell_2 \oplus_\infty (\ell_2 \oplus_1 \ell_2)$ y c_0 no tienen la propiedad BPB.*
b) *Todo espacio no reflexivo admite una norma equivalente con la que carece de la propiedad BPB.*

El espacio c_0 es un ejemplo bastante significativo de espacio sin la propiedad BPB, pues falla dicha propiedad de la manera más "fuerte" en la que puede hacerlo. Concretamente:

1.3.7 Ejemplo. *Existe un subespacio X de c_0 y un funcional $y^* \in S_{c_0^*}$ tal que*

$$\|y^*|_X\| = 1 \quad \textit{pero} \quad \textit{dist}\big(y^*, \{z^* \in S_{c_0^*} \ : \ z^* \textit{ alcanza su norma sobre } X\}\big) = 2.$$

Demostración. Comenzamos observando que c_0 es isométricamente isomorfo a $Y = c_0 \oplus_\infty \mathbb{R}$ y que, entonces $Y^* = \ell_1 \oplus_1 \mathbb{R}$. Tomamos un funcional $x_0^* \in S_{\ell_1}$ que no alcance su norma sobre c_0, definimos el subespacio de Y dado por

$$X = \{(x, x_0^*(x)) \ : \ x \in c_0\}$$

con la inclusión natural y consideramos el funcional $y^* = (0,1) \in Y^*$ que verifica

$$\|y^*|_X\| = 1.$$

Por otra parte, si $(x^*, a) \in Y^*$ es un funcional cualquiera y $(x, x_0^*(x))$ es un elemento arbitrario de X, podemos hacer la siguiente estimación:

$$|(x^*, a)(x, x_0^*(x))| \leqslant |x^*(x)| + |a|\,|x_0^*(x)| < \|x^*\| + |a| = \|(x^*, a)\|$$

que es válida salvo que ocurra $a = 0$. Por tanto, cualquier funcional $(x^*, a) \in Y^*$ que alcance su norma sobre X verifica necesariamente que $a = 0$, lo que nos permite deducir que

$$\operatorname{dist}\big(y^*, \{z^* \in S_{Y^*} \ : \ z^* \text{ alcanza su norma sobre } X\}\big) = 2. \qquad \square$$

En el siguiente resultado, que nos servirá para presentar los primeros ejemplos de espacios con la propiedad BPB, relacionamos dicha propiedad con la subdiferenciabilidad fuerte de la norma.

1.3.8 Proposición. *La norma de un espacio de Banach Y es fuertemente subdiferenciable si, y sólo si, para cada subespacio de dimensión finita $X \subseteq Y$ el par (X, Y) es BPB.*

Demostración. Suponemos en primer lugar que la norma de Y es fuertemente subdiferenciable, tomamos un subespacio X de dimensión finita con la inclusión $J : X \longrightarrow Y$ y fijamos $\varepsilon > 0$. Dado que la norma de Y es fuertemente subdiferenciable, el Lema 1.2.5 nos asegura que para cada $x \in S_X$ existe $\delta_x > 0$ tal que

$$y^* \in S_{Y^*}, \ \operatorname{Re} y^*(Jx) > 1 - \delta_x \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{dist}\big(y^*, D(Y, Jx)\big) < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Por tanto, si para cada $x \in S_X$ definimos

$$A_x = \left\{ z \in S_X \ : \ \|Jz - Jx\| < \min\left\{ \varepsilon, \ \frac{\delta_x}{2} \right\} \right\},$$

tendremos que $S_X = \bigcup_{x \in S_X} A_x$ y la compacidad de S_X asegura la existencia de $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ de modo que

$$S_X = \bigcup_{i=1}^{n} A_{x_i}.$$

Veamos ya que $\delta = \min\left\{ \frac{\delta_{x_i}}{2} \ : \ i = 1, \ldots, n \right\}$ cumple la condición de la propiedad BPB. Para ello, dados $x_0 \in S_X$ e $y_0^* \in S_{Y^*}$ tales que

$$\operatorname{Re} y_0^*(Jx_0) > 1 - \delta,$$

tomamos $j \in \{1, \ldots, n\}$ de modo que $x_0 \in A_{x_j}$, es decir,

$$\|x_0 - x_j\| = \|Jx_0 - Jx_j\| < \min\left\{ \varepsilon, \ \frac{\delta_{x_j}}{2} \right\},$$

y tendremos que $\operatorname{Re} y_0^*(Jx_j) > 1 - \delta_{x_j}$, por lo que (1.8) nos asegura la existencia de $y^* \in D(Y, Jx_j)$ verificando que $\|y^* - y_0^*\| < \varepsilon$.

Para demostrar la otra implicación, es suficiente fijar $x_0 \in S_Y$ y demostrar que x_0 expone fuertemente a $D(Y, x_0)$ (Lema 1.2.5). Para ello, definimos

$$X = \operatorname{lin}(x_0)$$

y, fijado $\varepsilon > 0$, tomamos el $\delta > 0$ dado por la definición de par BPB para (X, Y) y $\varepsilon/2$. En particular, si $y_0^* \in S_{Y^*}$ verifica que $\operatorname{Re} y_0^*(x_0) > 1 - \delta$, entonces existe $(x, y^*) \in \Pi(X, Y)$ de modo que

$$\|x - x_0\| < \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad \|y^* - y_0^*\| < \varepsilon/2,$$

y como $x \in \operatorname{lin}(x_0)$, existirá $\lambda \in \mathbb{T}$ tal que $x = \lambda x_0$ y, por tanto,

$$|\lambda - 1| = \|\lambda x_0 - x_0\| = \|x - x_0\| < \varepsilon/2.$$

Tenemos entonces que

$$\lambda y^* \in D(Y, x_0) \quad \text{y} \quad \|\lambda y^* - y_0^*\| \leqslant \|\lambda y^* - y^*\| + \|y^* - y_0^*\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \ \square$$

Es un hecho bien conocido que los espacios de dimensión finita tienen norma fuertemente subdiferenciable (véase [53, pp. 48] si se quiere) y, con esto en mente, la Proposición 1.3.8 nos dice que tienen la propiedad BPB.

1.3.9 Corolario. *Los espacios de Banach de dimensión finita tienen la propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás.*

Observamos que la Proposición 1.3.8 nos dice que el hecho de que el par (X, Y) sea BPB para subespacios de dimensión finita impone fuertes restricciones sobre la geometría de Y. Esto contrasta con la información que nos proporciona la Proposición 1.1.10: la igualdad de rangos es válida para todas las funciones uniformemente continuas definidas en la esfera de un subespacio de dimensión finita. Con estas ideas, podemos demostrar que el recíproco del Teorema 1.3.3 no se verifica.

1.3.10 Ejemplo. *Sea Y un espacio de Banach cuya norma no sea fuertemente subdiferenciable en un punto $y_0 \in S_Y$ y sea $X = \mathrm{lin}(y_0)$. Entonces, la Proposición 1.1.10 nos dice que $\overline{\mathrm{co}}\, W(f) = V(f)$ para cada $f \in C_u(S_X, Y)$ y la Proposición 1.3.8 nos asegura que el par (X, Y) no es BPB.*

Teniendo en cuenta la Proposición 1.1.11 y el Teorema 1.3.3, podemos plantearnos si los espacios uniformemente suaves tienen la propiedad BPB; no es difícil ver que la respuesta es afirmativa.

1.3.11 Proposición. *Si Y es un espacio de Banach uniformemente suave, entonces Y tiene la propiedad BPB.*

Usaremos en la demostración de este resultado el hecho bien conocido de que el espacio dual de un espacio uniformemente suave es uniformemente convexo.

Recordamos que un espacio de Banach X es *uniformemente convexo* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que

$$x, y \in S_X \quad \text{con} \quad \|x + y\| > 2 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

Demostración de la Proposición 1.3.11. Fijado $\varepsilon > 0$, utilizamos que Y^* es uniformemente convexo para encontrar $\delta > 0$ de modo que

$$x^*, y^* \in S_{Y^*} \quad \text{y} \quad \|x^* + y^*\| > 2 - \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|x^* - y^*\| < \varepsilon.$$

Sea ahora X un subespacio cerrado de Y con la inclusión $\mathrm{J} : X \longrightarrow Y$, y sean $x_0 \in S_X$ e $y_0^* \in S_{Y^*}$ tales que $\operatorname{Re} y_0^*(\mathrm{J}x_0) > 1 - \delta$. Tomamos $y^* \in S_{Y^*}$ de forma que $\operatorname{Re} y^*(\mathrm{J}x_0) = 1$ (sólo hay un funcional que verifica esto) y obtenemos que

$$\|y^* + y_0^*\| \geqslant \operatorname{Re}(y^* + y_0^*)(\mathrm{J}x_0) > 2 - \delta$$

y, por tanto, $\|y^* - y_0^*\| < \varepsilon$. □

Obsérvese que en la demostración anterior la relación $\varepsilon - \delta$ no depende del subespacio X que se considere. El siguiente resultado muestra que este hecho es exclusivo de los espacios uniformemente suaves.

1.3.12 Teorema. *Si Y es un espacio de Banach que tiene la propiedad BPB de modo que la relación entre ε y δ no depende del subespacio cerrado que se considere, entonces Y es uniformemente suave.*

Demostración. La Proposición 4.1 de [53] nos dice que es suficiente demostrar que el límite

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|u + ty\| - 1}{t} =: \tau(u, y)$$

existe uniformemente en $y \in B_Y$ y $u \in S_Y$ (esto es, probar que la norma de Y es "uniformemente fuertemente subdiferenciable"). Para ello, fijamos $\varepsilon > 0$, consideramos $0 < \delta < 2$ dado por la propiedad BPB "uniforme" y, para cada $y \in B_Y$, cada $u \in S_Y$ y cada $0 < t < \frac{\delta}{2}$, tomamos

$$y_t = \frac{u + ty}{\|u + ty\|} \in S_Y \qquad \text{e} \qquad y_t^* \in D(Y, y_t).$$

Es inmediato comprobar que

$$\operatorname{Re} y_t^*(u) = \operatorname{Re} y_t^*(u + ty) - \operatorname{Re} y_t^*(ty) \geqslant \|u + ty\| - t \geqslant 1 - t - t > 1 - \delta,$$

luego si tomamos $X = \operatorname{lin}(u)$, la propiedad BPB nos asegura la existencia de $(x, z_t^*) \in \Pi(X, Y)$ verificando que

$$\|x - u\| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|z_t^* - y_t^*\| < \varepsilon.$$

Como $x \in \operatorname{lin}(u)$, existirá $\lambda \in \mathbb{T}$ tal que $x = \lambda u$, lo que nos dice que

$$\lambda z_t^* \in D(Y, u) \qquad \text{y} \qquad |1 - \lambda| = \|u - \lambda u\| = \|u - x\| < \varepsilon,$$

luego

$$\|y_t^* - \lambda z_t^*\| \leqslant \|y_t^* - z_t^*\| + \|z_t^* - \lambda z_t^*\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Usamos ahora los hechos

$$\frac{\|u + ty\| - 1}{t} = \frac{\operatorname{Re} y_t^*(u + ty) - 1}{t} \leqslant \operatorname{Re} y_t^*(y) \qquad \text{y} \qquad \tau(u, y) \geqslant \operatorname{Re} \lambda z_t^*(y)$$

para obtener que

$$0 \leqslant \frac{\|u + ty\| - 1}{t} - \tau(u, y) \leqslant \operatorname{Re} y_t^*(y) - \operatorname{Re} \lambda z_t^*(y) \leqslant \|y_t^* - \lambda z_t^*\| < 2\varepsilon. \qquad \square$$

Las Proposiciones 1.3.8 y 1.3.11 nos dicen que la propiedad BPB se encuentra en algún punto intermedio entre la subdiferenciabilidad fuerte de la norma y la suavidad uniforme, por lo que parece razonable preguntarse si hay alguna relación entre la diferenciabilidad Fréchet de la norma y la propiedad BPB. Por un lado, sabemos que todos los espacios de dimensión finita tienen la propiedad BPB, luego ésta no implica diferenciabilidad Frechét de la norma; por otro lado, el siguiente ejemplo nos indica que la implicación contraria tampoco es posible.

1.3.13 Ejemplo. *El espacio de Banach*

$$Y = \Big[\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \ell_{k+1}^2\Big]_{\ell_2}$$

tiene norma Fréchet diferenciable y no tiene la propiedad BPB.

Demostración. Por un lado, la norma de Y es Fréchet diferenciable como consecuencia de [53, Theorem 2.4] y [99, Exercise 5.39]. Por otro lado, consideramos el subespacio cerrado de Y dado por

$$X := \{x \in Y \ : \ x(k)_1 = x(k)_2,\ k \in \mathbb{N}\}$$

con la inclusión natural en Y y recordamos que el dual de Y es

$$Y^* = \Big[\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \ell_{\frac{k+1}{k}}^2\Big]_{\ell_2}.$$

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $x_n \in S_X$ e $y_n^* \in S_{Y^*}$ definidos por

$$y_n^*(k) = \begin{cases} (1,0) & si\ \ k = n \\ \\ (0,0) & si\ \ k \neq n \end{cases} \qquad \text{y} \qquad x_n(k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2^{1/(n+1)}}, \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right) & si\ \ k = n \\ \\ (0,0) & si\ \ k \neq n \end{cases}$$

se tiene que

$$\{y_n^*(x_n)\} = \left\{\frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right\} \longrightarrow 1.$$

Nuestro objetivo es probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $(x, y^*) \in \Pi(X, Y)$, se tiene que

$$\|y^* - y_n^*\| \geqslant \frac{2-\sqrt{2}}{2},$$

de donde se deduce de forma clara que el par (X, Y) no es BPB. En efecto, por una parte, como x está en el subespacio X, podemos encontrar $\lambda \in \mathbb{T}$ de modo que

$$x(n) = \|x(n)\|_{n+1} \left(\frac{\lambda}{2^{1/(n+1)}}, \frac{\lambda}{2^{1/(n+1)}}\right)$$

y, por otra parte, usamos que $(x, y^*) \in \Pi(X, Y)$ y la dualidad en el espacio de Banach Y para deducir que

$$[y^*(n)]\big(x(n)\big) = \|y^*(n)\|_{\frac{n+1}{n}} \, \|x(n)\|_{n+1}.$$

Se tiene entonces que

$$y^*(n) = \|y^*(n)\|_{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{\overline{\lambda}}{2^{\frac{n}{n+1}}}, \frac{\overline{\lambda}}{2^{\frac{n}{n+1}}} \right),$$

luego

$$|y^*(n)_1| \leqslant \frac{1}{2^{\frac{n}{n+1}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y, por tanto,

$$\|y^* - y_n^*\| \geqslant \|y^*(n) - (1,0)\|_{\frac{n+1}{n}} \geqslant |y^*(n) - 1| \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \square$$

Observamos que los espacios de las dos clases que verifican la propiedad BPB son reflexivos, luego cabe también preguntarse qué relación hay entre la propiedad BPB y la reflexividad. No hemos sido capaces de dar respuesta a esta pregunta más allá de la pequeña información que da el Ejemplo 1.3.6, esto es, que todo espacio no reflexivo se puede renormar equivalentemente para que carezca de la propiedad BPB.

En otro orden de cosas, a poco que se piense la definición de par BPB, resulta natural esperar que si el subespacio X está "bien metido" en el espacio Y, entonces el par (X, Y) será BPB. Nuestro siguiente objetivo es demostrar que un par (X, Y) es BPB siempre que X sea un ideal absoluto de Y. Recordamos las definiciones necesarias para nuestra discusión: se dice que una norma $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ es *absoluta* cuando verifica

$$|(a,b)| = |(|a|,|b|)| \tag{1.9}$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, y

$$|(1,0)| = |(0,1)| = 1. \tag{1.10}$$

Geométricamente, (1.9) significa que la bola unidad de $\mathbb{R}^2$ para la norma $|\cdot|$ es simétrica respecto de los ejes de coordenadas, mientras que (1.10) es una normalización natural. En [27, §21] el lector encontrará un detenido estudio de las normas absolutas en $\mathbb{R}^2$, que tienen utilidad en bastantes cuestiones relacionadas con el rango numérico. Destacamos algunas propiedades bien conocidas sobre normas absolutas que serán relevantes en nuestra discusión: cualquier norma absoluta $|\cdot|$ es creciente y continua en cada variable y verifica que

$$\max\{|a|,|b|\} \leqslant |(a,b)| \leqslant |a|+|b| \qquad (a,b\in\mathbb{R}).$$

Recordemos que un operador $P\in L(Y)$ es una *proyección* si $P^2=P$ y P es una *proyección absoluta* cuando existe una norma absoluta $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ verificando que

$$\|y\| = |(\|Py\|,\|y-Py\|)| \qquad \big(y\in Y\big)$$

y, en tal caso, se dice también que $P(Y)$ es un *sumando absoluto* de Y. La noción general de proyección absoluta fue introducida por R. Evans [46] y estudiada con más detenimiento en [103, 104]. Los casos particulares más importantes se presentan cuando la norma absoluta $|\cdot|$ es una de las clásicas, y han recibido mucha más atención. Cuando $|\cdot|$ es la norma de la suma (resp. la del máximo) se habla de *L-proyecciones* y *L-sumandos* (resp. *M-proyecciones* y *M-sumandos*), conceptos que marcan el punto de partida de una extensa e importante teoría [17, 64]. Las *L_p-proyecciones*, para $1<p<\infty$, también han sido ampliamente estudiadas [18]. Finalmente, decimos que X es un *ideal absoluto* de Y si $X^\perp$ es un sumando absoluto de Y^*; en tal caso, si escribimos $Y^*=Z\oplus X^\perp$ no resulta difícil demostrar que la aplicación $\varphi : Z \longrightarrow X^*$ dada por

$$\varphi(z^*) = z^*|_X \qquad \big(z^*\in Z\big)$$

es una isometría sobreyectiva, por lo que podemos ver a X^* como subespacio de Y^* y escribir $Y^*=X^*\oplus X^\perp$. Cuando la norma que aparece en la descomposición de Y^* es la de la suma se habla de M-ideal, concepto que ha sido estudiado en profundidad [64].

1.3.14 Proposición. *Si Y es un espacio de Banach y X es un ideal absoluto suyo, entonces el par (X, Y) es BPB.*

En la demostración de este resultado necesitaremos el siguiente lema.

1.3.15 Lema. *Sea $E = (\mathbb{R}^2, |\cdot|_a)$ donde $|\cdot|_a$ es una norma absoluta. Si escribimos*

$$b_0 = \text{máx}\{b \geqslant 0 \ : \ |(1,b)|_a = 1\}$$

y definimos

$$A(\delta) = \{(a,b) \in B_E \ : \ a > 1-\delta,\ b \geqslant b_0\} \qquad (\delta > 0),$$

entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que $\operatorname{diam}(A(\delta)) < \varepsilon$ *(ver figura abajo).*

Demostración. Suponemos por reducción al absurdo que el resultado no es cierto y encontramos $\varepsilon_0 > 0$ de modo que $\operatorname{diam}(A(\frac{1}{n})) \geqslant \varepsilon_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De aquí deducimos que existe $(a_n, b_n) \in A(\frac{1}{n})$ verificando que $|(a_n, b_n) - (1, b_0)|_a \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$, luego

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \leqslant |a_n - 1| + |b_n - b_0| \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.11}$$

Tomamos $\{(a_{\sigma_n}, b_{\sigma_n})\}$ una sucesión parcial de $\{(a_n, b_n)\}$ que sea convergente y observamos que su límite será de la forma $(1, b)$ y pertenecerá a S_E. Usando (1.11) y el hecho de que $(a_{\sigma_n}, b_{\sigma_n}) \in A(\frac{1}{\sigma_n})$, es inmediato comprobar que

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \leqslant |b - b_0| \qquad \text{y} \qquad b \geqslant b_0,$$

de lo que se deduce que b es estrictamente mayor que b_0, una contradicción. $\square$

Demostración de la Proposición 1.3.14. Como X es un ideal absoluto de Y, existe una norma absoluta $|\cdot|_a$ en $\mathbb{R}^2$ de modo que $Y^* = X^* \oplus X^\perp$ y

$$\|(x^*, x^\perp)\| = \big|(\|x^*\|, \|x^\perp\|)\big|_a \qquad \big(x^* \in X^*,\ x^\perp \in X^\perp\big).$$

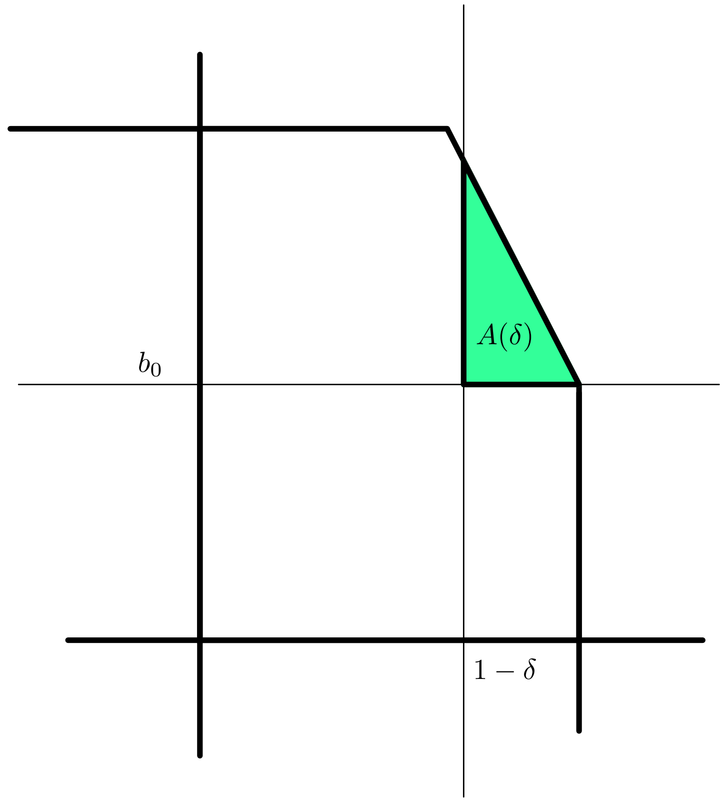


Figura 1.1: Normas absolutas

Fijado $0 < \varepsilon < 1$, tomamos $\delta_1 > 0$ dado por el Lema 1.3.15 aplicado a $\varepsilon/3$, y definimos

$$\delta := \text{mín}\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon^2}{36}\right\}.$$

La demostración acabará si para cualesquiera $x_0 \in S_X$ e $y_0^* = (x_0^*, x_0^\perp) \in S_{Y^*}$ verificando que

$$\operatorname{Re} y_0^*(x_0) = \operatorname{Re} x_0^*(x_0) > 1 - \delta,$$

encontramos $(x, y^*) \in \Pi(X, Y)$ de modo que

$$\|y^* - y_0^*\| < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|x - x_0\| < \varepsilon.$$

Para ello, como tenemos que

$$\|x_0\| = \left\| \frac{x_0^*}{\|x_0^*\|} \right\| = 1 \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Re} \frac{x_0^*}{\|x_0^*\|}(x_0) \geqslant \operatorname{Re} x_0^*(x_0) > 1 - \delta \geqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{36},$$

si aplicamos el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás (Teorema 1.3.1), encontramos $(x, x^*) \in \Pi(X)$ de modo que

$$\|x - x_0\|_X < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{y} \qquad \left\| x^* - \frac{x_0^*}{\|x_0^*\|} \right\|_{X^*} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{luego} \quad \|x^* - x_0^*\|_{X^*} \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Distinguimos dos casos. Si suponemos en primer lugar que $\|x_0^\perp\| \leqslant b_0$, tomamos $y^* := (x^*, x_0^\perp)$ y observamos que $\operatorname{Re} y^*(x) = 1$, $\|y^*\| = \big|(1, \|x_0^\perp\|)\big|_a = 1$ y

$$\|y^* - y_0^*\|_{Y^*} = \|x^* - x_0^*\|_{X^*} < \frac{2\varepsilon}{3}\,.$$

Si por el contrario $\|x_0^\perp\| > b_0$, tomamos $y^* := \left(x^*, \frac{b_0}{\|x_0^\perp\|} x_0^\perp\right)$, que claramente verifica $\operatorname{Re} y^*(x) = 1 = \|y^*\|$. Observamos ahora que $(1, b_0)$ y $(\|x_0^*\|, \|x_0^\perp\|)$ pertenecen al conjunto $A(\delta)$, cuyo diámetro es menor que $\varepsilon/3$ por el Lema 1.3.15, luego tenemos que

$$\big|\|x_0^\perp\| - b_0\big| \leqslant \big|(1, b_0) - (\|x_0^*\|, \|x_0^\perp\|)\big|_a < \frac{\varepsilon}{3}$$

de donde deducimos que

$$\|y^* - y_0^*\|_{Y^*} = \big|(\|x^* - x_0^*\|_{X^*}, \|x_0^*\| - b_0)\big|_a \leqslant \|x^* - x_0^*\|_{X^*} + \big|\|x_0^\perp\| - b_0\big| < \varepsilon. \quad \square$$

Sin más que aplicar el Teorema 1.3.3 y la Proposición 1.3.14 obtenemos el siguiente corolario.

1.3.16 Corolario. *Sea Y un espacio de Banach y sea X un ideal absoluto de Y. Entonces,*

$$\overline{\operatorname{co}}\, W(f) = V(f)$$

para cada $f \in C_u(S_X, Y)$.

Ejemplos interesantes de ideales absolutos son los espacios *M-embebidos* y *L-embebidos*. Un espacio de Banach X está M-embebido si es un M-ideal de X^{**} y está L-embebido si $X^{**} = X \oplus_1 Z$ para algún subespacio cerrado Z de X^{**}.

1.3.17 Corolario. *Si X es un espacio M-embebido o un espacio L-embebido, entonces (X, X^{**}) es un par BPB. Por tanto,*

$$\overline{\mathrm{co}}\, W(f) = V(f)$$

para cada $f \in C_u(S_X, X^{**})$.

En vista del resultado anterior y teniendo en cuenta la identificación canónica $X^{***} = X^* \oplus X^{\perp}$ dada por la proyección de Dixmier, cabe preguntarse si el par (X, X^{**}) es BPB para cada espacio de Banach X; el siguiente ejemplo demuestra que esto no es así.

1.3.18 Ejemplo. *Sea X el espacio de Banach definido por*

$$X = \Big[\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \big(c_0 \oplus_{\frac{k+1}{k}} \ell_1 \big) \Big]_{\ell_2}.$$

Entonces, el par (X, X^{**}) no es BPB.

Demostración. En primer lugar calculamos los duales sucesivos de X:

$$X^* = \Big[\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \big(\ell_1 \oplus_{k+1} \ell_\infty \big) \Big]_{\ell_2}, \qquad X^{**} = \Big[\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \big(\ell_\infty \oplus_{\frac{k+1}{k}} \ell_\infty^* \big) \Big]_{\ell_2}$$

y

$$X^{***} = \Big[\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Big(\ell_\infty^* \oplus_{k+1} \ell_\infty^{**} \Big) \Big]_{\ell_2}.$$

En segundo lugar, escribimos $e_1 = (1, 0, \dots) \in \ell_\infty$ y $u_1 = (1, 0, \dots) \in \ell_1$ y, fijado

$x_0^\perp \in S_{c_0^\perp}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $y_n^{***} \in S_{X^{***}}$ y $x_n \in S_X$ por

$$y_n^{***}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\left(x_0^\perp, e_1\right) & si\ \ k = n \\ \\ (0,0) & si\ \ k \neq n \end{cases} \qquad \text{y} \qquad x_n(k) = \begin{cases} (0, u_1) & si\ \ k = n \\ \\ (0,0) & si\ \ k \neq n \end{cases}$$

que satisfacen

$$\{y_n^{***}(x_n)\} = \left\{\frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right\} \longrightarrow 1.$$

Por otra parte, fijados $y^{***} \in S_{X^{***}}$ y $x \in S_X$ con $y^{***}(x) = 1$, vamos a demostrar que

$$\|y^{***} - y_n^{***}\| \geqslant \frac{1}{2^{1/(n+1)}} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.12}$$

Obsérvese que los dos hechos anteriores implican claramente que el par (X, X^{**}) no es BPB, luego para acabar la demostración bastará probar (1.12). Para ello, utilizamos que $y^{***}(x) = 1$ y que X^{***} es una suma tipo ℓ_2 de espacios para deducir que

$$y^{***}(n)_1\big(x(n)_1\big) + y^{***}(n)_2\big(x(n)_2\big) = y^{***}(n)\big(x(n)\big) = \|y^{***}(n)\|\,\|x(n)\| \tag{1.13}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto, junto con la dualidad en una suma tipo ℓ_{n+1}, nos dice que

$$\begin{aligned} y^{***}(n)_1\big(x(n)_1\big) &= \|y^{***}(n)_1\|\,\|x(n)_1\| \\ y^{***}(n)_2\big(x(n)_2\big) &= \|y^{***}(n)_2\|\,\|x(n)_2\| \end{aligned} \tag{1.14}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Fijamos ahora $n \in \mathbb{N}$ y distinguimos dos casos: suponemos en primer lugar que $\|x(n)_1\| \neq 0$ y, utilizando (1.14), obtenemos que

$$y^{***}(n)_1\left(\frac{x(n)_1}{\|x(n)_1\|}\right) = \|y^{***}(n)_1\|,$$

esto es, que el funcional $y^{***}(n)_1 \in \ell_\infty^*$ alcanza su norma sobre c_0 y, por tanto, es ortogonal a $x_0^\perp \in c_0^\perp$; deducimos entonces que

$$\|y^{***} - y_n^{***}\| \geqslant \left\|y^{***}(n)_1 - \frac{1}{2^{1/(n+1)}}x_0^\perp\right\| = \|y^{***}(n)_1\| + \frac{1}{2^{1/(n+1)}} \geqslant \frac{1}{2^{1/(n+1)}}.$$

Si por el contrario $\|x(n)_1\| = 0$, utilizando (1.13) obtenemos que

$$y^{***}(n)_2\big(x(n)_2\big) = y^{***}(n)\big(x(n)\big) = \|y^{***}(n)\|\,\|x(n)\| = \|y^{***}(n)\|\,\|x(n)_2\|,$$

lo que nos asegura que $y^{***}(n)_1 = 0$ y, por tanto,

$$\|y^{***} - y_n^{***}\| \geqslant \left\| y^{***}(n)_1 - \frac{1}{2^{1/(n+1)}} x_0^{\perp} \right\| = \left\| \frac{1}{2^{1/(n+1)}} x_0^{\perp} \right\| = \frac{1}{2^{1/(n+1)}}. \qquad \square$$

1.4. Problemas abiertos

Comentamos brevemente algunas de las preguntas que surgen de los resultados presentados en este capítulo. La primera de ellas concierne a la igualdad de rango numérico para operadores:

1.4.1 Problema. Sea Y un espacio de Banach de modo que se verifica la igualdad

$$\overline{\mathrm{co}}\, W(T) = V(T)$$

para cada subespacio X y cada operador $T \in L(X, Y)$. ¿Es Y reflexivo?

Recordemos que la Proposición 1.2.7 nos dice que todo espacio no reflexivo puede ser renormado para fallar la igualdad de rangos para operadores, aunque su demostración parece difícilmente adaptable al caso que nos ocupa pues conlleva el uso de una norma concreta. Por otra parte, como apenas tenemos ejemplos de espacios de Banach para los que se tiene la igualdad de rangos, la búsqueda de un posible contraejemplo parece también complicada.

1.4.2 Problema. ¿Es reflexivo todo espacio con la propiedad BPB?

En este caso también sabemos que un espacio no reflexivo se puede renormar para que carezca de la propiedad BPB y, de nuevo, la repuesta a nuestra pregunta no parece fácil.

Las cuestiones anteriores se facilitarían en gran medida si tuviéramos una gama más amplia de ejemplos de espacios con la propiedad BPB.

1.4.3 Problema. Obtener nuevos ejemplos de espacios con la propiedad BPB.

Comprobar que un espacio tiene la propiedad BPB resulta difícil por tener que trabajar con todos los subespacios de un espacio dado. Recordemos que la Proposición 1.3.8 nos dice que un espacio tiene la propiedad BPB para los subespacios de dimensión finita si, y sólo si, su norma es fuertemente subdiferenciable. Parece pues razonable plantearse si ocurre algo parecido para otras clases de subespacios:

1.4.4 Problema. Caracterizar los espacios de Banach Y tales que (X, Y) es un par BPB para cada subespacio X de codimensión finita.

Finalmente, sabemos que no todos los pares de la forma (X, X^{**}) son BPB, pero no sabemos qué ocurre con la igualdad de rangos.

1.4.5 Problema. ¿Es cierta la igualdad

$$\overline{\mathrm{co}}\, W(f) = V(f)$$

para toda función $f \in C_u(S_X, X^{**})$ y todo espacio de Banach X? En particular, ¿qué ocurre si nos restringimos a operadores lineales y continuos?

Capítulo 2

Índice numérico de los espacios de Banach

Dedicamos este capítulo al estudio del índice numérico de los espacios de Banach. Comenzamos con una introducción en la que aparecerán las definiciones necesarias, así como un resumen de los resultados sobre índice numérico conocidos antes de la elaboración de la presente memoria. A continuación calculamos el índice numérico para algunos espacios de funciones con valores vectoriales así como para algunas normas concretas en $\mathbb{R}^2$ y mostramos algunos resultados novedosos sobre espacios de Banach con índice numérico cero. Acabamos el capítulo exponiendo la situación en la que se encuentra el estudio del índice numérico de los espacios $L_p(\mu)$.

2.1. Introducción

Comenzamos recordando la definición de rango numérico de un operador sobre un espacio de Banach, que ya vimos en el capítulo anterior. Aunque dimos dos definiciones diferentes (rango numérico espacial y rango numérico intrínseco o de álgebra), el objeto de estudio de este capítulo será el radio numérico, que definiremos enseguida, y que no depende de la versión de rango numérico que se tome. Optamos entonces por la más sencilla de ellas, el rango numérico espacial.

2.1.1 Definición. Dado un espacio de Banach X y un operador $T \in L(X)$, se define su *rango numérico* como el conjunto de escalares

$$W(T) := \{x^*(Tx) \ : \ x \in S_X,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(x) = 1\}.$$

Escribiremos, por comodidad,

$$\Pi(X) := \{(x, x^*) \in S_X \times S_{X^*} \ : \ x^*(x) = 1\},$$

subconjunto de $X \times X^*$ que no es vacío gracias al Teorema de Hahn-Banach. Con esta notación, podemos escribir el rango numérico de un operador $T \in L(X)$ como

$$W(T) = \{x^*(Tx) \ : \ (x, x^*) \in \Pi(X)\}.$$

En analogía con el radio espectral, el *radio numérico de T* será

$$v(T) := \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in W(T)\}.$$

Es fácil ver que v es una seminorma continua en $L(X)$, de hecho, se tiene que

$$v(T) \leqslant \|T\|$$

para todo operador $T \in L(X)$.

El siguiente resultado, que puede encontrarse en [26], nos dice que el radio numérico de un operador puede calcularse usando solamente un conjunto denso en la esfera unidad del espacio. Damos su enunciado explícitamente puesto que será de gran utilidad en el desarrollo de este capítulo.

2.1.2 Lema ([26, Lemma 9.2]). *Sea X un espacio de Banach y Γ un subconjunto de $\Pi(X)$ cuya proyección sobre la primera coordenada sea densa en S_X. Entonces*

$$\sup\{\operatorname{Re} x^*(Tx) \ : \ (x, x^*) \in \Gamma\} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|\mathrm{Id} + \alpha T\| - 1}{\alpha}$$

para todo operador $T \in L(X)$. En particular,

$$v(T) = \sup\{|x^*(Tx)| \ : \ (x, x^*) \in \Gamma\}.$$

Muchas veces el radio numérico es de hecho una norma equivalente a la norma usual de operadores, y para cuantificar este hecho se define el índice numérico de un espacio de Banach.

2.1.3 Definición. El *índice numérico* de un espacio de Banach X es el número real $n(X)$ dado por

$$n(X) := \text{ínf}\{v(T) \ : \ T \in S_{L(X)}\},$$

o, de forma equivalente,

$$n(X) = \text{máx}\{k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \ \forall T \in L(X)\}.$$

Es claro que siempre se tendrá $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$; el valor $n(X) = 1$ significa que radio numérico y norma coinciden en $L(X)$, mientras que se tiene $n(X) = 0$ cuando v no es una norma equivalente a la usual de operadores.

Pasamos a comentar los resultados conocidos sobre el índice numérico, fruto del trabajo de numerosos autores. En primer lugar, era conocido aún antes de la definición de índice numérico, que para un espacio de Hilbert H, de dimensión mayor que 1, se tiene $n(H) = 0$ en caso real y $n(H) = 1/2$ si H es complejo (véase [62, p.114]).

Se sabe que los espacios de Banach complejos siempre tienen índice numérico positivo. De hecho, G. Lumer [85] probó que $n(X) \geqslant 1/4$ para todo espacio de Banach complejo X, y B. Gilckfield [55] en 1970 mejoró esta acotación hasta $n(X) \geqslant \mathrm{e}^{-1}$, haciendo uso de una desigualdad clásica para álgebras normadas debida a H. Bohnenblust y S. Karlin [23]. El propio B. Glickfeld demuestra en [55, §2] que e^{-1} es la mejor constante posible, dando un ejemplo de espacio de Banach complejo con índice numérico e^{-1}. Ese mismo año, J. Duncan, C. McGregor,

J. Pryce y A. White [42] determinan totalmente el conjunto de posibles valores del índice numérico:

$$\{n(X)\ :\ X \text{ espacio de Banach complejo }\} = [\mathrm{e}^{-1}, 1],$$
$$\{n(X)\ :\ X \text{ espacio de Banach real }\} = [0, 1].$$

Aún se puede hacer una última observación que resalta todavía más la diferencia existente entre los espacios de Banach reales y complejos en relación al índice numérico. Si X es un espacio de Banach complejo y notamos por $X_{\mathbb{R}}$ al espacio real subyacente, entonces se tiene que $n(X_{\mathbb{R}}) = 0$. La comprobación de este hecho es sencilla: el operador $T \in L(X_{\mathbb{R}})$ dado por

$$Tx = i\,x \qquad \big(x \in X_{\mathbb{R}}\big)$$

tiene norma 1 y radio numérico 0. En la sección 2.3 profundizaremos en el estudio de los espacios de Banach con índice numérico cero y de los operadores con radio numérico cero.

Pasemos ahora a comentar algunos ejemplos de espacios de Banach "clásicos" para los que su índice numérico es conocido. El primer ejemplo interesante de espacio de Banach en el que radio numérico y norma de operadores coinciden (es decir, con índice numérico 1) aparece en el citado trabajo de J. Duncan, C. McGregor, J. Pryce y A. White [42]: $C(K)$, el espacio de Banach de las funciones continuas sobre un espacio compacto de Hausdorff K, dotado de la norma uniforme. Para encontrar nuevos ejemplos, los autores de [42] utilizan la relación que hay entre el índice numérico de un espacio y el de su dual. Concretamente, dado un espacio de Banach X y un operador $T \in L(X)$, como consecuencia del Lema 2.1.2, se tiene que $v(T^*) = v(T)$, donde $T^* \in L(X^*)$ denota al operador adjunto de T. De esto se deduce inmediatamente que

$$n(X^*) \leqslant n(X).$$

Es un descubrimiento muy reciente que esta desigualdad puede ser estricta: en [31, Example 3.1], K. Boyko, V. Kadets, M. Martín y D. Werner prueban que el espacio de Banach

$$X = \{(x, y, z) \in c \oplus_\infty c \oplus_\infty c \; : \; \text{lím}\, x + \text{lím}\, y + \text{lím}\, z = 0\}$$

tiene índice numérico 1 mientras que $n(X^*) < 1$ (aquí c denota al espacio de Banach de las sucesiones convergentes dotado de la norma del supremo). No obstante, es claro que tendremos $n(X) = 1$ siempre que sea $n(X^*) = 1$. En particular, un espacio de Banach tendrá índice numérico 1 si alguno de sus sucesivos duales es isométrico a un espacio del tipo $C(K)$. Así, los espacios de la forma $L_1(\mu)$ (μ medida positiva) y sus preduales isométricos tienen todos índice numérico 1 [42, Theorem 2.2]. Más ejemplos de espacios con índice numérico uno son las álgebras de funciones [126], entre las que se encuentra el álgebra del disco [27, Theorem 32.9].

En dimensión finita, los espacios con índice numérico 1 pueden incluso caracterizarse de forma intrínseca, sin necesidad de usar operadores (resultado debido a C. McGregor [98]): un espacio de dimensión finita X tiene índice numérico 1 si, y sólo si, $|x^*(x)| = 1$ para cualesquiera puntos extremos $x \in \text{ext}(B_X)$ y $x^* \in \text{ext}(B_{X^*})$ de la bola unidad de X y X^* respectivamente. En [84] G. López, M. Martín y R. Payá tratan de extender esta idea al caso infinito dimensional, obteniendo condiciones necesarias para que un espacio de Banach tenga índice numérico 1: si X es un espacio de Banach con índice numérico 1, entonces

(i) $|x^*(x)| = 1$ para cualesquiera $x^* \in \text{ext}(B_{X^*})$ y $x \in \text{dent}(B_X)$.

(ii) $|x^{**}(x^*)| = 1$ para cualesquiera $x^{**} \in \text{ext}(B_{X^{**}})$ y $x^* \in w^* - \text{dent}(B_{X^*})$.

Donde $\text{dent}(B_X)$ (resp. $w^* - \text{dent}(B_{X^*})$) es el conjunto de los puntos dientes de B_X (resp. los puntos débil estrella dientes de B_{X^*}). Combinando el resultado anterior con una condición suficiente para que un espacio real contenga (un subespacio isomorfo) a c_0 ó ℓ_1, los autores obtienen importantes restricciones isomórficas para los espacios de Banach reales de dimensión infinita con índice numérico 1. Concretamente, si X es un tal espacio, entonces el cociente X^{**}/X no es separable. De esto se deduce que no todos los espacios reales admiten una norma equivalente con índice numérico 1, en particular, este es el caso de los espacios reflexivos reales de dimensión infinita.

Otros resultados sobre espacios reales de dimensión finita con índice numérico 1 se pueden encontrar en los trabajos de T. Oikhberg [102] y de S. Reisner [112].

En [87] M. Martín estudia los espacios de Banach con índice numérico 1 que satisfacen la propiedad de Radon-Nikodým, obteniendo diversas caracterizaciones. Una de estas caracterizaciones viene dada por una condición intrínseca al espacio, generalización obvia de la que se tiene para espacios de dimensión finita. De modo más preciso, si X es un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým, equivalen

(i) $n(X) = 1$.
(ii) $|x^{**}(x^*)| = 1$ para cada $x^* \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$ y cada $x^{**} \in \mathrm{ext}(B_{X^{**}})$.

El citado ejemplo [31, Example 3.4] muestra también que esta caracterización no es cierta para espacios de Banach arbitrarios.

En la búsqueda de nuevas familias de espacios de Banach a las que se les pudiera calcular el índice numérico, M. Martín y R. Payá [95] estudian el comportamiento del índice numérico frente a ciertas operaciones. Más explícitamente, demuestran que si $\{X_\lambda \ : \ \lambda \in \Lambda\}$ es una familia arbitraria de espacios de Banach, entonces

$$n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{c_0}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_1}\Big) = n\Big([\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda]_{\ell_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda).$$

Como aplicación de este resultado, en [95, example 3.b] los autores obtienen un espacio de Banach real X que tiene índice numérico cero y tal que el radio numérico es una norma en $L(X)$ que, obviamente, no será completa. En este mismo trabajo, se calcula el índice numérico de algunos espacios de funciones con valores vectoriales en términos del índice del espacio de llegada. De manera más precisa, dados un espacio de Banach real o complejo X, un espacio topológico compacto y de Hausdorff K, y una medida positiva μ, denotamos por $C(K,X)$ y

$L_1(\mu, X)$ respectivamente al espacio de las funciones continuas sobre K con valores en X y al espacio de las funciones μ-Bochner-integrables con valores en X; entonces

$$n(C(K, X)) = n(L_1(\mu, X)) = n(X).$$

Siguiendo con el cálculo de índices de espacios de funciones con valores vectoriales, M. Martín y A. Villena [96, Theorem 2.3] demuestran que para cualquier espacio de Banach X y para cualquier medida σ-finita μ se tiene

$$n(L_\infty(\mu, X)) = n(X),$$

donde $L_\infty(\mu, X)$ es el espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas y con valores en X. En la subsección 2.2.2 extenderemos este tipo de resultados a los espacios de funciones débilmente continuas.

En [86], M. Martín estudia la relación del índice numérico de un espacio de Banach con el de sus subespacios, obteniendo, entre otros resultados, que el índice numérico de un espacio de Banach es siempre menor o igual que el de cualquier sumando absoluto suyo.

Es justo mencionar que, hasta la aparición del citado articulo [84], el índice numérico no había sido estudiado desde el punto de vista isomórfico. Siguiendo con este punto de vista, C. Finet, M. Martín y R. Payá [49] consideran, para cada espacio de Banach, el conjunto de valores del índice numérico que pueden obtenerse por renormación equivalente, y estudian sus propiedades. Concretamente, los autores demuestran que dicho conjunto de valores es siempre un intervalo, que contiene a $[0,\ 1/3[$ en caso real y $[\mathrm{e}^{-1},\ 1/2[$ en caso complejo. De hecho, demuestran que para la "mayoría" de los espacios de Banach el supremo de este intervalo es 1. Todo esto se consigue analizando la relación del índice numérico con dos propiedades geométricas de los espacios de Banach ampliamente estudiadas: la propiedad α y la propiedad β.

En [71] T. Huruya clama que el índice numérico de una C^*-álgebra vale 1 en caso de ser conmutativa, y vale $1/2$ en caso de no ser conmutativa. Hemos de mencionar que una parte de la demostración dada en ese trabajo no parece ser concluyente, pero en [79], A. Kaidi, A. Morales y A. Rodríguez Palacios dan una demostración diáfana del resultado y lo extienden a JB^*-álgebras: el índice numérico de una tal álgebra vale 1 o $1/2$ dependiendo de que ésta sea o no conmutativa y asociativa. En este mismo trabajo se prueba que el índice numérico de una JBW^*-álgebra (en particular de un álgebra de von Neumann) coincide con el índice numérico de su predual isométrico.

Finalmente, es necesario destacar la escasa presencia en la literatura de cálculo de índices numéricos en espacios concretos. En la subsección 2.2.1 calcularemos explícitamente el índice numérico de algunas familias de espacios poliédricos de dimensión dos. Es particularmente llamativo el hecho de que aún se desconoce el índice numérico de algunos espacios tal familiares como $L_p(\mu)$ para $p \neq 1, 2, \infty$. En este ámbito, es preciso mencionar los trabajos, muy recientes, de E. Ed-dari [44] y E. Ed-dari, M. Khamsi [45], que aportan avances importantes en la determinación de dichos índices, como veremos en la sección 2.4.

2.2. Cálculo de índices numéricos

En esta sección presentamos algunos de los resultados obtenidos referentes al cálculo efectivo de índices numéricos. Cabe recordar que aún son escasos los ejemplos de espacios concretos a los que se les ha calculado el índice numérico. De hecho, se puede decir que, hasta ahora, cuando se conocía el índice numérico de un espacio concreto es porque valía $0, 1/e, 1/2$ ó 1. Con los resultados de la primera parte de esta sección pretendemos mitigar en lo posible esta carencia. La segunda parte de la sección estará dedicada al cálculo del índice numérico de algunos espacios de funciones con valores vectoriales.

2.2.1. Espacios con normas poliédricas

Nuestro objetivo es calcular explícitamente el índice numérico para algunos espacios de dimensión dos. Para facilitar los cálculos haremos uso del siguiente resultado, consecuencia del Teorema de Minkowski (cualquier subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{K}^n$ es la envolvente convexa de sus puntos extremos, véase [124, Corollary 1.13], por ejemplo). No incluimos su demostración puesto que es completamente rutinaria.

2.2.1 Lema. *Sea X un espacio de Banach de dimensión finita. Para cada operador $T \in L(X)$ se tiene*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| \ : \ x \in \operatorname{ext}(B_X)\}, \\ v(T) &= \sup\{|x^*(Tx)| \ : \ x \in \operatorname{ext}(B_X),\ x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*}),\ x^*(x) = 1\}. \end{aligned}$$

Es claro que las expresiones anteriores serán tanto más sencillas cuantos menos puntos extremos tengan la bola del espacio y la bola dual. La forma natural de conseguir que la bola unidad de un espacio tenga "pocos" puntos extremos es exigir que éste sea poliédrico. Recordemos que un espacio de Banach real X es *poliédrico* si la intersección de B_X con cualquier subespacio de dimensión finita es un poliedro. Este es el caso del espacio c_0. Algunas consideraciones sobre este tipo de espacios se pueden encontrar en [51, §6], [52] y las referencias que allí se dan. Si X tiene dimensión finita y es poliédrico, tanto B_X como B_{X^*} tienen un número finito de puntos extremos y el lema anterior será especialmente útil en este caso. Si además X tiene dimensión dos, B_X es un polígono y tiene, por tanto, el mismo número de lados que de vértices, de lo que se deduce, usando [124, Corollary 1.19], que B_X y B_{X^*} tienen el mismo número de puntos extremos.

Nosotros vamos a calcular el índice numérico para una familia de normas hexagonales, dos familias de normas octagonales y la familia de los espacios cuya bola unidad es un polígono regular con un número par de vértices.

• **Normas hexagonales**

Para cada $\gamma \in [0,1]$, consideramos el espacio normado $X_\gamma = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\gamma)$, donde la norma $\|\cdot\|_\gamma$ viene dada por

$$\|(x,y)\|_\gamma = \max\{|y|, |x| + (1-\gamma)|y|\} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

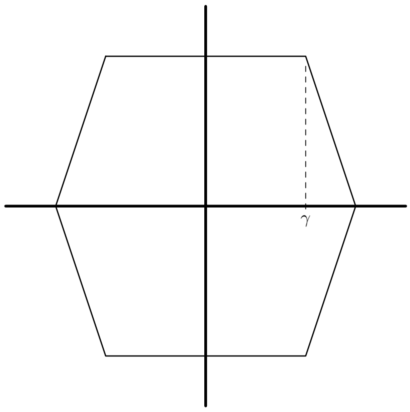


Figura 2.1: Normas hexagonales

Obsérvese que X_0 es un espacio de tipo $L_1(\mu)$ y que X_1 es un espacio de tipo $C(K)$, luego se tiene $n(X_0) = n(X_1) = 1$ y además la bola unidad de ambos espacios es un cuadrado. Cuando nos restringimos al caso $0 < \gamma < 1$, obtenemos normas hexagonales, es decir, la bola unidad asociada es un hexágono (véase la Figura 2.1).

Usando la definición de la norma $\|\cdot\|_\gamma$ es sencillo calcular los puntos extremos de B_{X_γ}, a saber,

$$\operatorname{ext}(B_{X_\gamma}) = \{\pm(\gamma,1),\ \pm(1,0),\ \pm(\gamma,-1)\}.$$

Con ello, se obtiene que la norma dual de $\|\cdot\|_\gamma$ es

$$\|(x,y)\|'_\gamma = \max\{|x|, |y| + \gamma\,|x|\} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big)$$

y, por tanto, los puntos extremos de $B_{X_\gamma^*}$ son

$$\operatorname{ext}(B_{X_\gamma^*}) = \{\pm(1, 1-\gamma),\ \pm(0,1), \pm(-1, 1-\gamma)\}.$$

En particular, para cada $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, se tiene que X_γ^* es isométrico a $X_{1-\gamma}$.

2.2.2 Teorema. *Dado $\gamma \in [0,1]$, sea X_γ definido como antes. Entonces,*

$$n(X_\gamma) = \text{máx}\left\{\frac{1}{1+2\gamma}, \frac{1}{3-2\gamma}\right\}.$$

Demostración. Como X_γ^* es isométrico a $X_{1-\gamma}$, tenemos que

$$n(X_{1-\gamma}) = n(X_\gamma^*) = n(X_\gamma),$$

luego basta demostrar que $n(X_\gamma) = \dfrac{1}{3-2\gamma}$ para cada $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$. Fijemos entonces $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$ y empecemos demostrando que $n(X_\gamma) \geqslant \dfrac{1}{3-2\gamma}$, esto es, para cada $T \in L(X_\gamma)$ se tiene que $\|T\|_\gamma \leqslant (3-2\gamma)\, v_\gamma(T)$. En efecto, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz que representa a T, utilizando el Lema 2.2.1 obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|T\|_\gamma &= \text{máx}\Big\{\|(a\gamma+b, c\gamma+d)\|_\gamma,\ \|(a\gamma-b, c\gamma-d)\|_\gamma,\ \|(a,c)\|_\gamma\Big\} \\
&= \text{máx}\Big\{|c\gamma+d|,\ |a\gamma+b| + (1-\gamma)|c\gamma+d|,\ |c\gamma-d|, \\
&\qquad |a\gamma-b| + (1-\gamma)|c\gamma-d|,\ |c|,\ |a| + (1-\gamma)|c|\Big\} \\
&= \text{máx}\Big\{|c|\gamma+|d|,\ |a\gamma+b| + (1-\gamma)|c\gamma+d|, \\
&\qquad |a\gamma-b| + (1-\gamma)|c\gamma-d|,\ |c|,\ |a| + (1-\gamma)|c|\Big\}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

y que

$$\begin{aligned}
v_\gamma(T) &= \text{máx}\Big\{|c\gamma+d|,\ |a\gamma+b+(1-\gamma)(c\gamma+d)|,\ |a+(1-\gamma)c|, \\
&\qquad |d-c\gamma|,\ |a\gamma-b+(1-\gamma)(d-c\gamma)|,\ |a-(1-\gamma)c|\Big\} \\
&= \text{máx}\Big\{|c|\gamma+|d|,\ |a\gamma+b+(1-\gamma)(c\gamma+d)|, \\
&\qquad |a|+(1-\gamma)|c|,\ |a\gamma-b+(1-\gamma)(d-c\gamma)|\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Utilizando la desigualdad triangular y (2.2) es claro que

$$\begin{aligned}|a\gamma + b| &\leqslant |a\gamma + b + (1-\gamma)(c\gamma + d)| + (1-\gamma)|c\gamma + d| \\ &\leqslant v_\gamma(T) + (1-\gamma)\, v_\gamma(T)\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$|a\gamma + b| + (1-\gamma)|c\gamma + d| \leqslant (3-2\gamma)\, v_\gamma(T). \tag{2.3}$$

Análogamente, se comprueba que

$$|a\gamma - b| + (1-\gamma)|c\gamma - d| \leqslant (3-2\gamma)\, v_\gamma(T). \tag{2.4}$$

Finalmente, es claro que

$$\gamma|c| \leqslant \gamma|c| + |d| \leqslant v_\gamma(T),$$

y esto, junto con la desigualdad $\frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1$, nos dice que

$$|c| \leqslant \frac{1}{\gamma} v_\gamma(T) \leqslant (3-2\gamma)\, v_\gamma(T). \tag{2.5}$$

En vista de (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) y (2.5) podemos deducir que

$$\|T\|_\gamma \leqslant (3-2\gamma)\, v_\gamma(T),$$

como queríamos.

Para demostrar la otra desigualdad, $n(X_\gamma) \leqslant \dfrac{1}{3-2\gamma}$, consideramos el operador $T : X_\gamma \longrightarrow X_\gamma$ cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2-\gamma}{3-2\gamma} \\ \dfrac{-1}{\gamma(3-2\gamma)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando (2.1) y (2.2) no resulta difícil comprobar que

$$\|T\|_\gamma = 1 \quad \text{y} \quad v_\gamma(T) = \frac{1}{3-2\gamma},$$

lo que acaba la demostración. $\square$

• Normas octagonales

Dado $\xi \in [0,1]$, consideramos el espacio normado $X_\xi = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\xi)$, donde la norma viene dada por la expresión

$$\|(x,y)\|_\xi = \text{máx}\left\{|x|,\ |y|,\ \frac{|x|+|y|}{1+\xi}\right\} \qquad \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\Big).$$

Obsérvese que, de nuevo, X_0 es un espacio de tipo $L_1(\mu)$ y que X_1 es un espacio de tipo $C(K)$ y, por tanto, $n(X_0) = n(X_1) = 1$. Dado $0 < \xi < 1$, se comprueba sin dificultad que

$$\text{ext}(B_{X_\xi}) = \{\pm(1,\xi),\ \pm(1,-\xi),\ \pm(\xi,1),\ \pm(\xi,-1)\},$$

con lo que la bola unidad de X_ξ es un octágono con el aspecto que aparece en la Figura 2.2.

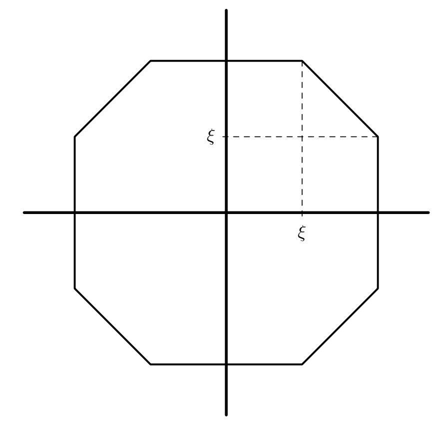


Figura 2.2: Normas octagonales

La norma dual a $\|\cdot\|_\xi$ viene dada entonces por

$$\|(x,y)\|'_\xi = \text{máx}\{|x|+\xi|y|,\ \xi|x|+|y|\} \qquad \Big((x,y)\in\mathbb{R}^2\Big),$$

y los puntos extremos de la bola dual son

$$\text{ext}(B_{X^*_\xi}) = \left\{\pm(1,0),\ \pm(0,1),\ \pm\left(\frac{1}{1+\xi},\frac{1}{1+\xi}\right),\ \pm\left(\frac{1}{1+\xi},\frac{-1}{1+\xi}\right)\right\}.$$

2.2.3 Teorema. *Dado $\xi \in [0,1]$, sea X_ξ definido como antes. Entonces,*

$$n(X_\xi) = \max\left\{\xi,\ \frac{1-\xi}{1+\xi}\right\}.$$

Demostración. De nuevo, lo primero que necesitamos es una expresión apropiada de la norma y del radio numérico de los operadores en X_ξ. Dado un operador $T \in L(X_\xi)$ con matriz asociada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, utilizamos el Lema 2.2.1 para obtener

$$\begin{aligned} \|T\|_\xi = \max\Big\{ & |a| + |b|\xi,\ |c| + |d|\xi,\ \tfrac{|a+b\xi|+|c+d\xi|}{1+\xi},\ \tfrac{|a-b\xi|+|c-d\xi|}{1+\xi}, \\ & |a|\xi + |b|,\ |c|\xi + |d|,\ \tfrac{|a\xi+b|+|c\xi+d|}{1+\xi},\ \tfrac{|a\xi-b|+|c\xi-d|}{1+\xi} \Big\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

y

$$v_\xi(T) = \max\left\{|a| + |b|\xi,\ \tfrac{|a+d\xi|+|b\xi+c|}{1+\xi},\ |d| + |c|\xi,\ \tfrac{|a\xi+d|+|b+c\xi|}{1+\xi}\right\}. \tag{2.7}$$

Para demostrar la desigualdad $n(X_\xi) \leqslant \max\left\{\xi,\ \frac{1-\xi}{1+\xi}\right\}$, consideramos el operador $U \in L(X_\xi)$ cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Usando las igualdades anteriores es inmediato comprobar que

$$\|U\|_\xi = 1 \quad \text{y} \quad v_\xi(U) = \max\left\{\xi,\ \tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right\},$$

lo que nos da

$$n(X_\xi) \leqslant \max\left\{\xi,\ \tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right\}.$$

Con la finalidad de demostrar la desigualdad contraria, utilizamos (2.7) y que $\xi \leqslant 1$ para deducir que

$$\xi(|a|\xi + |b|) \leqslant |a| + |b|\xi \leqslant v_\xi(T),$$

$$\xi(|c| + |d|\xi) \leqslant |c|\xi + |d| \leqslant v_\xi(T)$$

y, por tanto,

$$\xi\left(\frac{|a|\xi+|b|+|c|\xi+|d|}{1+\xi}\right)\leqslant\frac{v_\xi(T)+\xi v_\xi(T)}{1+\xi}=v_\xi(T),$$
$$\xi\left(\frac{|a|+|b|\xi+|c|+|d|\xi}{1+\xi}\right)\leqslant\frac{\xi v_\xi(T)+v_\xi(T)}{1+\xi}=v_\xi(T).$$

Las desigualdades anteriores nos dicen que

$$\xi\|T\|_\xi\leqslant v_\xi(T)$$

para cada operador $T\in L(X_\xi)$ y, por tanto,

$$n(X_\xi)\geqslant\xi.$$

Ahora utilizamos (2.6) y (2.7) para deducir que

$$v_\xi\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=v_\xi\left(\begin{pmatrix}d & c\\ b & a\end{pmatrix}\right)\qquad\text{y}\qquad\left\|\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}d & c\\ b & a\end{pmatrix}\right\|,$$

luego podemos asumir que se verifica

$$|a|+|c|\geqslant|b|+|d|$$

sin pérdida de generalidad. Usando esta desigualdad, se comprueba sin dificultad que

$$\left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)\left(\tfrac{|b|+|d|+|a|\xi+|c|\xi}{1+\xi}\right)\leqslant\left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)(|a|+|c|)\leqslant\tfrac{|a|+|c|-|b|\xi-|d|\xi}{1+\xi}\leqslant v_\xi(T)\tag{2.8}$$
$$\left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)\left(\tfrac{|a|+|c|+|b|\xi+|d|\xi}{1+\xi}\right)\leqslant\left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)(|a|+|c|)\leqslant\tfrac{|a|+|c|-|b|\xi-|d|\xi}{1+\xi}\leqslant v_\xi(T).$$

Más aún, las desigualdades siguientes son ciertas:

$$\left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)(|a|\xi+|b|)\leqslant v_\xi(T)\tag{2.9}$$
$$\left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)(|c|+|d|\xi)\leqslant v_\xi(T).$$

Demostramos solamente la primera desigualdad, ya que la segunda se demuestra de manera análoga. Para ello, distinguimos dos casos: si ocurre que

$$|a|\xi+|b|\leqslant\frac{|b|+|d|+|a|\xi+|c|\xi}{1+\xi},$$

de (2.8) deducimos la desigualdad buscada; en otro caso, se tiene

$$\frac{|b| + |d| + |a|\xi + |c|\xi}{1+\xi} \leqslant |a|\xi + |b|,$$

lo que nos asegura que

$$|c|\xi + |d| \leqslant \xi(|a|\xi + |b|).$$

Usando esta desigualdad y (2.7) obtenemos que

$$\left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)(|a|\xi + |b|) \leqslant \tfrac{|a|\xi+|b|-(|c|\xi+|d|)}{1+\xi} \leqslant v_\xi(T),$$

como queríamos. Utilizando ahora (2.6), (2.7), (2.8) y (2.9), queda claro que

$$\left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)\|T\|_\xi \leqslant v_\xi(T),$$

y, por tanto

$$n(X_\xi) \geqslant \left(\tfrac{1-\xi}{1+\xi}\right),$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Teniendo en cuenta que en dimensión finita el índice numérico de un espacio y el de su dual coinciden, el teorema anterior nos da el índice numérico de otra familia de normas octagonales, la de las normas duales a las anteriores. Concretamente, para cada $\varrho \in [1/2, 1]$ consideramos $Y_\varrho = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\varrho)$ con norma dada por

$$\|(x,y)\|_\varrho = \text{máx}\left\{|x| + \frac{1-\varrho}{\varrho}|y|,\ |y| + \frac{1-\varrho}{\varrho}|x|\right\} \qquad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2\Big).$$

Dado $\varrho \in]1/2, 1[$, la bola unidad de Y_ϱ es un octágono (ver Figura 2.3) con

$$\text{ext}(B_{Y_\varrho}) = \{\pm(1,0),\ \pm(0,1),\ \pm(\varrho,\varrho),\ \pm(\varrho,-\varrho)\}.$$

Se puede deducir que $X_\xi^* = Y_\varrho$ para $\varrho = \dfrac{1}{1+\xi}$ o, lo que es lo mismo, $Y_\varrho^* = X_\xi$ para $\xi = \dfrac{1-\varrho}{\varrho}$. Ya podemos enunciar la consecuencia prometida.

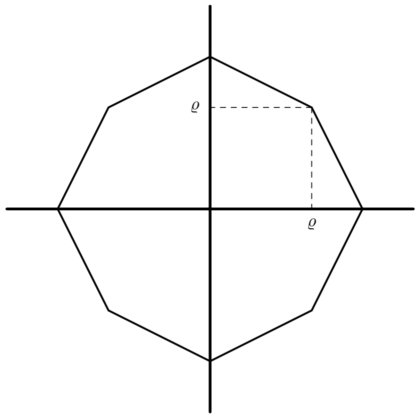


Figura 2.3: Más normas octagonales

2.2.4 Corolario. *Dado $\varrho \in [1/2, 1]$, sea Y_ϱ definido como antes. Entonces,*

$$n(Y_\varrho) = \text{máx}\left\{\frac{1-\varrho}{\varrho},\ 2\varrho - 1\right\}.$$

• **Polígonos regulares**

La última familia a la que le vamos a calcular el índice numérico es la formada por los espacios de Banach reales de dimensión dos cuyas bolas son polígonos regulares. Como el número de puntos extremos de la bola unidad de un espacio normado ha de ser par, sólo consideraremos polígonos con un número par de vértices. Concretamente, dado un número natural n mayor o igual que 2, para cada $k = 1, 2, \ldots, 2n$, llamamos

$$x_k = \left(\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right),\ \text{sen}\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)\right),$$
$$x_k^* = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\left(\cos\left(\tfrac{k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right),\ \text{sen}\left(\tfrac{k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right),$$

y definimos X_n como el espacio de Banach real de dimensión dos cuya bola tiene el siguiente conjunto de puntos extremos

$$\text{ext}(B_{X_n}) = \{x_k\ :\ k = 1, 2, \ldots, 2n\}.$$

Para poder determinar el conjunto de puntos extremos de $B_{X_n^*}$ utilizaremos el siguiente lema.

2.2.5 Lema. *Sea n un número natural mayor o igual que 2 y sea $m \in \mathbb{Z}$. Entonces,*

$$\left|\cos\left(\tfrac{m\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant \cos\left(\tfrac{\pi}{2n}\right).$$

Si, además, n es par, entonces

$$\left|\operatorname{sen}\left(\tfrac{m\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant \cos\left(\tfrac{\pi}{2n}\right).$$

Demostración. Observamos que la desigualdad

$$\left|\cos\left(\tfrac{m\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant \cos\left(\tfrac{\pi}{2n}\right)$$

es equivalente al siguiente hecho

$$\tfrac{m\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n} \notin \left]-\tfrac{\pi}{2n}, \tfrac{\pi}{2n}\right[\; + \; \pi\mathbb{Z},$$

que, a su vez, es equivalente a

$$2m + 1 \notin \left] -1, 1\right[+ 2n\mathbb{Z},$$

y esta última afirmación es obviamente cierta para cada número entero m. De manera similar, observamos que la desigualdad

$$\left|\operatorname{sen}\left(\tfrac{m\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant \cos\left(\tfrac{\pi}{2n}\right)$$

es equivalente a

$$\tfrac{m\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n} \notin \left]\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2n}, \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2n}\right[\; + \; \pi\mathbb{Z},$$

lo que equivale a

$$2m + 1 \notin \left]n - 1, n + 1\right[+ 2n\mathbb{Z},$$

afirmación que es cierta para n par. $\square$

Veamos ya cuáles son los puntos extremos de B_{X^*}. Para $j,k \in \{1,2,\dots,2n\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |x_k^*(x_j)| &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left| \cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{n}\right) \right| \\ &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left| \cos\left(\frac{(k-j)\pi}{n} + \frac{\pi}{2n}\right) \right| \end{aligned}$$

y, por tanto, el lema anterior nos dice que $|x_k^*(x_j)| \leqslant 1$. Además, identificando x_{2n+1} con x_1, para cada $k \in \{1,2,\dots,2n\}$ se tiene

$$x_k^*(x_k) = 1 \qquad \text{y} \qquad x_k^*(x_{k+1}) = 1. \tag{2.10}$$

Observamos que x_k^* es el único elemento de X^* que verifica lo anterior (es la única solución de un sistema 2×2 compatible y determinado), luego necesariamente ocurre que $x_k^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*})$. En efecto, si escribimos

$$x_k^* = t\, y^* + (1-t)\, z^*$$

con $t \in [0,1]$ e y^*, $z^* \in B_{X^*}$, como

$$y^*(x_k) \leqslant 1, \quad y^*(x_{k+1}) \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad z^*(x_k) \leqslant 1, \quad z^*(x_{k+1}) \leqslant 1,$$

se tendrá que y^* y z^* satisfacen (2.10), de donde deducimos que $y^* = z^* = x_k^*$. Como sabemos que hay exactamente $2n$ puntos extremos en B_{X^*}, deducimos que

$$\operatorname{ext}(B_{X_n^*}) = \left\{x_k^* \ : \ k = 1,2,\dots,2n\right\}.$$

Ya podemos enunciar y demostrar el resultado prometido.

2.2.6 Teorema. *Sea n un número natural mayor o igual que 2, y sea X_n definido como antes. Entonces,*

$$n(X_n) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) & \text{si } n \text{ es par,} \\[2em] \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar observamos que X_2 es un espacio de tipo $L_1(\mu)$ y que X_3 es isométricamente isomorfo al espacio de norma hexagonal X_γ para $\gamma = \frac{1}{2}$, con lo que $n(X_2) = 1$ y $n(X_3) = \frac{1}{2}$. Podemos, pues, restringir nuestro estudio al caso $n \geqslant 4$.

Sea $T \in L(X_n)$ el operador cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Utilizando el Lema 2.2.1 obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T\|_n &= \max\{|x_k^*(Tx_j)| \ : \ j,k = 1,2,\dots,2n\}, \\ v_n(T) &= \max\{|x_k^*(Tx_j)| \ : \ k = 1,2,\dots,2n; \ j = k, k+1\}, \end{aligned}$$

por lo que para poder calcular la norma y el radio numérico del operador T necesitamos la forma explícita de $x_k^*(Tx_j)$. Si $j,k \in \{1,2,\dots,2n\}$, se tiene

$$\begin{aligned} x_k^*(Tx_j) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \Bigg(& a\cos\left(\tfrac{k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\tfrac{j\pi}{n}\right) + b\cos\left(\tfrac{k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{j\pi}{n}\right) + \\ & c\operatorname{sen}\left(\tfrac{k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\tfrac{j\pi}{n}\right) + d\operatorname{sen}\left(\tfrac{k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{j\pi}{n}\right)\Bigg) \end{aligned}$$

de lo que deducimos que

$$\begin{aligned} x_k^*(Tx_j) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \Bigg(& \frac{a+d}{2}\cos\left(\tfrac{(k-j)\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) + \frac{a-d}{2}\cos\left(\tfrac{(k+j)\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) + \\ & \frac{b+c}{2}\operatorname{sen}\left(\tfrac{(k+j)\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) + \frac{c-b}{2}\operatorname{sen}\left(\tfrac{(k-j)\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Veamos ya que $n(X_n) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ si n es par, y que $n(X_n) \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ si n es impar. Si consideramos el operador $U \in L(X_n)$ con matriz asociada $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, para cada $k \in \{1,\dots,2n\}$ se tiene que $|x_k^*(Ux_k)| = |x_k^*(Ux_{k+1})| = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ y, por tanto,

$$v_n(U) = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Si probamos que

$$\|U\|_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \\ 1 & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

tendremos la desigualdad deseada. En efecto, supongamos primero que n es impar, esto es, $n = 2m+1$ para algún entero m. Utilizando (2.11), se tiene

$$|x_k^*(Ux_j)| = \tfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left|\text{sen}\left(\tfrac{(k-j)\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant \tfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \qquad j,k \in \{1,\ldots,2n\},$$

y la igualdad ocurre, por ejemplo, para $k = m$ y $j = 2n$. Supongamos ahora que n es par, utilizando (2.11) y el Lema 2.2.5, tenemos

$$|x_k^*(Ux_j)| = \tfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left|\text{sen}\left(\tfrac{(k-j)\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| \leqslant 1 \qquad j,k \in \{1,\ldots,2n\},$$

y la igualdad ocurre, por ejemplo, para $k = n/2$ y $j = 2n$.

Probemos finalmente que $n(X_n) \geqslant \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ si n es par, y que $n(X_n) \geqslant \text{sen}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ si n es impar. En primer lugar, utilizando (2.11) y el Lema 2.2.5, es sencillo obtener las siguientes estimaciones de la norma de $T \in L(X_n)$:

$$\begin{aligned} \|T\|_n &\leqslant \tfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \left(\tfrac{|a+d|}{2} + \tfrac{|a-d|}{2} + \tfrac{|b+c|}{2} + \tfrac{|b-c|}{2}\right) && \text{si } n \text{ es impar,} \\ \|T\|_n &\leqslant \left(\tfrac{|a+d|}{2} + \tfrac{|a-d|}{2} + \tfrac{|b+c|}{2} + \tfrac{|b-c|}{2}\right) && \text{si } n \text{ es par.} \end{aligned}$$

Gracias a esto, la demostración del resultado quedará terminada si somos capaces de probar que

$$v_n(T) \geqslant \tan\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) \left(\tfrac{|a+d|}{2} + \tfrac{|a-d|}{2} + \tfrac{|b+c|}{2} + \tfrac{|b-c|}{2}\right). \tag{2.12}$$

Para ello, definimos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
A_n &= \left\{ \left(\cos\left(\tfrac{2k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right),\ \operatorname{sen}\left(\tfrac{2k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) \right) \ :\ k = 1,2,\dots,n \right\},\\
B_n &= \left\{ \left(\cos\left(\tfrac{(2k+1)\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right),\ \operatorname{sen}\left(\tfrac{(2k+1)\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) \right) \ :\ k = 1,2,\dots,n \right\},\\
C_n^1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{G} \ :\ x \geqslant \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right),\ y \geqslant \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) \right\},\\
C_n^2 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{G} \ :\ x \leqslant -\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right),\ y \geqslant \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) \right\},\\
C_n^3 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{G} \ :\ x \leqslant -\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right),\ y \leqslant -\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) \right\},\\
C_n^4 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{G} \ :\ x \geqslant \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right),\ y \leqslant -\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) \right\},
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{G}$ es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1. Como se verá, lo que nos interesa es demostrar que tanto en A_n como en B_n podemos encontrar puntos que tienen coordenadas con módulo mayor o igual que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2n})$ y cualesquiera de las combinaciones posibles de signos. Es decir, para $n \geqslant 4$, queremos comprobar que

$$A_n \cap C_n^i \neq \emptyset \qquad i = 1,2,3,4 \tag{2.13}$$

$$B_n \cap C_n^i \neq \emptyset \qquad i = 1,2,3,4. \tag{2.14}$$

En efecto, obsérvese que cada C_n^i es un arco de la circunferencia unidad que abarca un ángulo de amplitud $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$. Obsérvese por otro lado que A_n y B_n son los conjuntos de vértices de polígonos regulares de n lados inscritos en la circunferencia unidad. Cuando $n \geqslant 6$, es claro que $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \geqslant \frac{2\pi}{n}$, con lo que se tiene que tanto A_n como B_n intersecan a cada C_n^i. En los casos $n = 4$ y $n = 5$ la veracidad de (2.13) y (2.14) se comprueba directamente.

Ya podemos demostrar (2.12). Suponemos en primer lugar que

$$(a+d)(c-b) > 0$$

y, usando (2.11) para $j = k$, obtenemos

$$\begin{aligned}
v_n(T) \geqslant |x_k^*(Tx_k)| = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2n})} \Bigg| &\frac{a+d}{2} \cos\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) + \frac{a-d}{2} \cos\left(\tfrac{2k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) + \\
&+ \frac{b+c}{2} \operatorname{sen}\left(\tfrac{2k\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) + \frac{c-b}{2} \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) \Bigg|
\end{aligned}$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, 2n$. Llamando $\varepsilon = \operatorname{sign}(a+d) = \operatorname{sign}(c-b)$ y utilizando (2.13), encontramos $k_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ verificando

$$\begin{aligned}\tfrac{a-d}{2}\cos\left(\tfrac{2k_0\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) + \tfrac{b+c}{2}\operatorname{sen}\left(\tfrac{2k_0\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right) = \\ = \varepsilon\left|\tfrac{a-d}{2}\right|\left|\cos\left(\tfrac{2k_0\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| + \varepsilon\left|\tfrac{b+c}{2}\right|\left|\operatorname{sen}\left(\tfrac{2k_0\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right|,\end{aligned}$$

y tal que

$$\left|\cos\left(\tfrac{2k_0\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| \geqslant \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right) \qquad \text{y} \qquad \left|\operatorname{sen}\left(\tfrac{2k_0\pi}{n} + \tfrac{\pi}{2n}\right)\right| \geqslant \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2n}\right).$$

Usando lo anterior y el hecho de que $|\cos(\frac{\pi}{2n})| \geqslant |\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2n})|$ tenemos que

$$v_n(T) \geqslant |x_{k_0}^*(Tx_{k_0})| \geqslant \tan\left(\tfrac{\pi}{2n}\right)\left(\tfrac{|a+d|}{2} + \tfrac{|a-d|}{2} + \tfrac{|b+c|}{2} + \tfrac{|b-c|}{2}\right).$$

Si por el contrario se tiene que $(a+d)(c-b) < 0$, la demostración es completamente análoga utilizando esta vez (2.11) para $j = k+1$. Finalmente, obvias simplificaciones nos permiten repetir el argumento cuando $(a+d)(c-b) = 0$. □

En [95, Example 3.b], M. Martín y R. Payá demuestran que existe un espacio de Banach X en el que el radio numérico es una norma no equivalente a la norma usual de operadores; esto es, $n(X) = 0$ pero $v(T) > 0$ para todo $T \in L(X)$ no nulo. El teorema anterior nos permite dar explícitamente un ejemplo del mismo tipo.

2.2.7 Ejemplo. *Consideremos el espacio de Banach*

$$X = \left[\bigoplus_{n=2}^{\infty} X_n\right]_{c_0},$$

donde $\{X_n\}_{n\geqslant 2}$ *es la familia de espacios del Teorema 2.2.6. Entonces,* $n(X) = 0$ *pero* $v(T) > 0$ *para todo* $T \in L(X)$ *que no sea cero. Además, el espacio* X *es un espacio poliédrico.*

En efecto, por una parte, la Proposición 1 de [95] nos dice que $n(X) = \operatorname{ínf} n(X_n)$, luego $n(X) = 0$ a la vista del teorema anterior. Por otra parte, puesto que se tiene que $n(X_n) > 0$ para todo $n \geqslant 2$, el argumento que se da en [95, Example 3.b] se puede repetir para obtener que $v(T) > 0$ para todo T no nulo. Finalmente, el espacio X es poliédrico puesto que es (isométricamente isomorfo a) un subespacio cerrado de c_0 (obsérvese que cada X_n es un subespacio de ℓ_∞^n).

2.2.2. Espacios de funciones continuas para las topologías débil y débil*

Dedicamos este apartado al cálculo del índice numérico de algunos espacios de funciones continuas con valores vectoriales. Comencemos dando las definiciones necesarias. Dado un espacio compacto de Hausdorff K y un espacio de Banach X, denotaremos $C_\omega(K,X)$ al espacio de todas las funciones de K en X, que son continuas cuando en X se considera la topología débil. El espacio $C_\omega(K,X)$, dotado de la norma del supremo, es un espacio de Banach. Del mismo modo, en el caso de contar con un espacio de Banach dual X^*, podemos considerar el espacio de las funciones débil*-continuas de K en X^*, que denotaremos $C_{\omega^*}(K,X^*)$ y que también es completo si lo dotamos de la norma del supremo. Resultados recientes sobre estos espacios aparecen, por ejemplo, en [10, 70, 100].

En [95] los autores demuestran que el índice numérico de $C(K,X)$ coincide con el índice numérico de X, independientemente del compacto K. Nuestros resultados pretenden traspasar, en la medida de lo posible, el resultado anterior a los espacios $C_\omega(K,X)$ y $C_{\omega^*}(K,X^*)$. De hecho, las demostraciones que exhibiremos a continuación siguen la línea de las dadas en el citado trabajo [95], con las necesarias modificaciones.

Para $C_\omega(K,X)$ la situación es diáfana:

2.2.8 Teorema. *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff y sea X un espacio de Banach. Entonces,*

$$n(C_\omega(K,X)) = n(X).$$

En la demostración de este resultado utilizaremos dos lemas previos. Recordemos que un subconjunto acotado A de un espacio de Banach X es *dentable* si tiene rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeño. Una *rebanada* de A es un subconjunto de la forma

$$S(A, x^*, \alpha) = \{x \in A \,:\, \operatorname{Re} x^*(x) > M(A, x^*) - \alpha\}$$

donde $x^* \in S_{X^*}$, $\alpha > 0$ y $M(A, x^*) = \sup\{\operatorname{Re} x^*(x) \,:\, x \in A\}$. Si X es un espacio dual y los funcionales que determinan las rebanadas pueden tomarse w^*-continuos, decimos que A es *w^*-dentable*.

2.2.9 Lema. *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff y sea X un espacio de Banach.*

(a) Para cada $f \in C_\omega(K, X)$, el conjunto

$$\{t \in K \,:\, f \text{ es continua en norma en } t\}$$

es denso en K.

(b) El conjunto

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in S_{C_\omega(K,X)} \,:\, f \text{ alcanza su norma} \right\}$$

es denso en $S_{C_\omega(K,X)}$.

Demostración. El apartado (a) es conocido (véase [70, Página 1905]), aunque incluimos su demostración por complitud. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto

$$O_n = \{t \in K \,:\, \exists \text{ un conjunto abierto } W \text{ tal que } t \in W \text{ y } \operatorname{diam} f(W) < 1/n\}.$$

Observamos que O_n es abierto en K y que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = \{t \in K \,:\, f \text{ es continua en norma en } t\}.$$

Por tanto, para demostrar el resultado basta probar que cada O_n es denso en K y utilizar después el Teorema de Baire. Veamos pues que O_n es denso en K. Para cada subconjunto abierto V de K y cada $n \in \mathbb{N}$, utilizando que $f(V)$ es relativamente débil compacto y, por tanto, dentable (véase [40, Proposition VI.2.2]), podemos encontrar un subconjunto débil abierto U de X de modo que $U \cap f(V)$ no es vacío y diam $\big(U \cap f(V)\big) < 1/n$. Basta considerar ahora el conjunto $W = f^{-1}(U) \cap V$, que es abierto y no vacío, y está contenido en $V \cap O_n$. Deducimos que O_n es denso en K.

(b). Dados $f \in S_{C_\omega(K,X)}$ y $0 < \varepsilon < 1$, utilizamos (a) para encontrar $t_0 \in K$ de modo que f sea continua en norma en t_0 y que $\|f(t_0)\| > 1 - \varepsilon$. Si escribimos $x_0 = \frac{f(t_0)}{\|f(t_0)\|}$, gracias a que f es continua en norma en el punto t_0, dicho punto no pertenece al cierre en K del conjunto

$$\{t \in K \,:\, \|f_0(t) - x_0\| \geqslant \varepsilon\}.$$

Por tanto, el Lema de Urysohn nos da una función continua $\varphi : K \longrightarrow [0,1]$ verificando que

$$\varphi(t_0) = 1 \qquad \text{y} \qquad \varphi(t) = 0 \quad \text{si } \|f(t) - x_0\| \geqslant \varepsilon.$$

Definimos finalmente $g \in C_\omega(K,X)$ mediante

$$g(t) = (1 - \varphi(t))\, f(t) + \varphi(t)\, x_0 \qquad (t \in K),$$

que verifica claramente

$$\|g\| = \|g(t_0)\| = 1 \qquad \text{y} \qquad \|f - g\| < \varepsilon. \qquad \square$$

Para cada función $f \in S_{C_\omega(K,X)}$ que alcance su norma deben existir un punto $t_0 \in K$ y un funcional $x_0^* \in S_{X^*}$ tales que $x_0^*(f(t_0)) = 1$; por tanto

$$(f, x_0^* \otimes \delta_{t_0}) \in \Pi(C_\omega(K,X)),$$

donde, para cada $t \in K$ y $x^* \in X^*$, denotamos $x^* \otimes \delta_t$ al funcional definido por

$$[x^* \otimes \delta_t](g) = x^*(g(t)) \qquad (g \in C_\omega(K,X)).$$

De esta forma, el subconjunto de $C_\omega(K,X) \times C_\omega(K,X)^*$ dado por

$$\{(f, x^* \otimes \delta_t) \ : \ f \in \mathcal{A},\ x^* \in S_{X^*},\ t \in K,\ x^*(f(t)) = 1\}$$

está contenido en $\Pi(C_\omega(K,X))$ y, por el apartado (b) del Lema 2.2.9, su proyección sobre la primera coordenada es densa en la esfera unidad de $C_\omega(K,X)$. Por tanto, del Lema 2.1.2 deducimos lo siguiente.

2.2.10 Lema. *Para cada operador $T \in L(C_\omega(K,X))$ se tiene*

$$v(T) = \sup\big\{\big|x^*\big([Tf](t)\big)\big| \ : \ f \in \mathcal{A},\ t \in K,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(f(t)) = 1\big\}.$$

Demostración del Teorema 2.2.8. Para probar que $n(C_\omega(K,X)) \geqslant n(X)$, fijemos un operador $T \in L(C_\omega(K,X))$ con $\|T\| = 1$, y bastará ver que $v(T) \geqslant n(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, utilizando el Lema 2.2.9.a, podemos encontrar $f_0 \in S_{C_\omega(K,X)}$ y $t_0 \in K$ de modo que f_0 es continua en norma en t_0 y

$$\big\|[Tf_0](t_0)\big\| > 1 - \varepsilon. \tag{2.15}$$

Nos vendría bien, como se verá, que fuese $\|f_0(t_0)\| = 1$, condición que, a priori, no tiene por qué cumplirse. Sin embargo, haciendo uso del Lema de Urysohn, vamos a poder cambiar f_0 por otra función verificando lo que queremos. Para ello, empezamos por encontrar una función continua $\phi : K \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$\phi(t_0) = 1 \qquad \text{y} \qquad \phi(t) = 0 \ \text{ si } \ \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geqslant \varepsilon, \tag{2.16}$$

cosa que se puede hacer porque el cierre en K del conjunto

$$\big\{t \in K \ : \ \|f_0(t) - f_0(t_0)\| \geqslant \varepsilon\big\}$$

no contiene a t_0, (f_0 es continua en norma en dicho punto). Por otra parte, siempre podremos expresar $f_0(t_0)$ como combinación convexa de dos elementos de la esfera unidad de X, esto es, existen x_1, $x_2 \in S_X$ y $\lambda \in [0,1]$ tales que

$$f_0(t_0) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2.$$

Con estos puntos construimos las funciones $f_1, f_2 \in C_\omega(K,X)$ dadas por

$$f_j(t) = (1-\phi(t))f_0(t) + \phi(t)x_j \qquad (t \in K,\ j = 1,2).$$

Si llamamos $g = (1-\lambda)f_1 + \lambda f_2$, para cada $t \in K$ se tiene claramente

$$g(t) = \big(1-\phi(t)\big)f_0(t) + \phi(t)f_0(t_0),$$

luego

$$g(t) - f_0(t) = \phi(t)\big(f_0(t_0) - f_0(t)\big),$$

y usando (2.16) vemos fácilmente que $\|g - f_0\| < \varepsilon$. Como consecuencia, de la ecuación (2.15) obtenemos que $\|[Tg](t_0)\| > 1-2\varepsilon$ y, por convexidad, se deberá tener

$$\|[Tf_1](t_0)\| > 1-2\varepsilon \qquad \text{o} \qquad \|[Tf_2](t_0)\| > 1-2\varepsilon.$$

En resumen, haciendo la elección correcta de $x_0 = x_1$ o $x_0 = x_2$, se tiene que $\|x_0\| = 1$ y

$$\left\|\Big[T\Big((1-\phi)f_0 + \phi x_0\Big)\Big](t_0)\right\| > 1-2\varepsilon.$$

Comparando esta última desigualdad con (2.15), podemos observar que la función $(1-\phi)f_0 + \phi x_0$ cumple (salvo ε) la misma condición que f_0, pero toma en el punto t_0 un valor $x_0 \in S_X$.

En un segundo paso, fijamos $x_0^* \in S_{X^*}$ tal que $x_0^*(x_0) = 1$ y consideramos el operador $S \in L(X)$ definido por

$$Sx = \Big[T\Big(x_0^*(x)(1-\phi)f_0 + \phi x\Big)\Big](t_0) \qquad (x \in X), \tag{2.17}$$

que claramente verifica

$$1 \geqslant \|S\| \geqslant \|Sx_0\| = \left\|\Big[T\Big((1-\phi)f_0 + \phi x_0\Big)\Big](t_0)\right\| > 1-2\varepsilon. \tag{2.18}$$

Por otra parte, dado un par $(x,x^*) \in \Pi(X)$, consideramos la función $g \in C_\omega(K,X)$ definida por

$$g(t) = x_0^*(x)(1-\phi(t))f_0(t) + \phi(t)x \qquad (t \in K), \tag{2.19}$$

junto con el funcional $g^* = x^* \otimes \delta_{t_0} \in C_\omega(K,X)^*$ y comprobamos sin dificultad que $(g,g^*) \in \Pi\,(C_\omega(K,X))$, con lo cual

$$v(T) \geqslant |g^*(Tg)| = \left| x^*\left(\Big[T\Big(x_0^*(x)(1-\phi)f_0 + \phi x \Big) \Big](t_0) \right) \right| = |x^*(Sx)|.$$

Se sigue que

$$v(T) \geqslant v(S) \geqslant n(X)\|S\| \geqslant (1-2\varepsilon)n(X),$$

y haciendo $\varepsilon \downarrow 0$ obtenemos $v(T) \geqslant n(X)$ como se quería.

Para obtener la desigualdad contraria, $n(X) \geqslant n(C_\omega(K,X))$, a cada $S \in L(X)$ le asociamos el operador $T \in L(C_\omega(K,X))$ dado por la fórmula

$$[T(f)](t) = S(f(t)) \qquad \big(t \in K,\ f \in C_\omega(K,X)\big)$$

y es fácil comprobar que $\|T\| = \|S\|$. Ahora, dados $f \in S_{C_\omega(K,X)}$ que alcance su norma, $t \in K$ y $x^* \in S_{X^*}$ verificando que $x^*(f(t)) = 1$, tenemos claramente que $(f(t), x^*) \in \Pi(X)$, con lo cual

$$\big| x^*\big([Tf](t)\big) \big| = |x^*(S(f(t)))| \leqslant v(S),$$

y el Lema 2.2.10 nos dice que $v(T) \leqslant v(S)$. Entonces

$$v(S) \geqslant v(T) \geqslant n\big(C_\omega(K,X)\big)\|T\| = n\big(C_\omega(K,X)\big)\|S\|,$$

y concluimos que $n(X) \geqslant n\big(C_\omega(K,X)\big)$. □

Es un hecho bien conocido que el espacio $C_\omega(K,X^*)$ se puede identificar con $W(X,C(K))$, el espacio de los operadores débil compactos sobre el espacio de Banach X con valores en $C(K)$. De hecho, esta identificación es consecuencia de la también conocida identificación entre $C_{\omega^*}(K,X^*)$ y $L(X,C(K))$. Destacamos aquí el resultado para su uso posterior.

2.2.11 Lema ([43, Teorema VI.7.1]). *Sea X un espacio de Banach. La aplicación $\Phi : L(X,C(K)) \longrightarrow C_{\omega^*}(K,X^*)$ dada por*

$$[\Phi(T)](t) = T^*(\delta_t) \qquad \big(t \in K,\ T \in L(X,C(K))\big)$$

es un isomorfismo isométrico. Además, $\Phi(W(X,C(K))) = C_\omega(K,X^*)$.

Con esta identificación, el Teorema 2.2.8 reza como sigue.

2.2.12 Corolario. *Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff y sea X un espacio de Banach. Entonces,*

$$n\big(W(X, C(K))\big) = n(X^*).$$

Nuestro siguiente objetivo es estudiar el índice numérico de $C_{\omega^*}(K, X^*)$. Desafortunadamente, no somos capaces de determinar totalmente dicho índice numérico, como sí ocurría con $n(C(K, X))$ y $n(C_\omega(K, X))$. Para entender los problemas que surgen en dicho cálculo, es pertinente hacer algunas observaciones. La primera es que cuando tratamos de repetir la segunda parte de la demostración del Teorema 2.2.8 para $C_{\omega^*}(K, X^*)$, si tomamos un operador arbitrario $S \in L(X^*)$, a la hora de definir el operador $T \in L(C_{\omega^*}(K, X^*))$ encontramos un problema: la fórmula

$$[T(f)](t) = S(f(t)) \qquad \big(t \in K,\ f \in C_{\omega^*}(K, X^*)\big)$$

no tiene porqué definir una función débil*-continua salvo que el operador S sea débil*-débil*-continuo; o lo que es lo mismo, que S sea el operador adjunto de un operador en X. Este hecho nos lleva, si queremos adaptar la demostración anterior, a tener que considerar operadores adjuntos y, por ende, a tener que comparar el índice numérico de $C_{\omega^*}(K, X^*)$ con el de X. La segunda observación, bastante sencilla, es que si el compacto K consta de un solo punto, entonces $C_{\omega^*}(K, X^*) = X^*$; lo que nos dice que la mejor cota inferior de $n(C_{\omega^*}(K, X^*))$ a la que podemos aspirar es $n(X^*)$. Aún cabe una tercera observación: en la primera parte de la demostración anterior utilizamos fuertemente la dentabilidad de $f(K)$ donde $f \in C_\omega(K, X)$, propiedad que, en general, se perderá cuando f sea sólo débil*-continua. A pesar de todos estos inconvenientes, hemos sido capaces de obtener algunos resultados parciales. El primero de ellos nos da una cota superior para $C_{\omega^*}(K, X^*)$ aunque, como comentaremos en la Observación 2.2.16 , no es la mejor posible.

2.2.13 Teorema. *Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea X un espacio de Banach. Entonces,*

$$n\left(C_{\omega^*}(K,X^*)\right) \leqslant n(X).$$

Para poder demostrar este resultado, necesitaremos el siguiente lema, que nos dará un subconjunto denso de la esfera unidad de $C_{\omega^*}(K,X^*)$.

2.2.14 Lema. *Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea X un espacio de Banach. Entonces, el conjunto*

$$\mathcal{B} = \left\{ f \in S_{C_{\omega^*}(K,X^*)} \ : \ f \ \text{ alcanza su norma} \right\}$$

es denso en $S_{C_{\omega^*}(K,X^*)}$.

Como herramienta para la demostración de este lema enunciamos un resultado, consecuencia del Teorema de Choquet-Bishop-De Leeuw y que parece ser bastante conocido. Dicho resultado se puede deducir de un Teorema de T. Johannesen citado en un artículo de Å. Lima [80, Theorem 5.8] y aparece explícitamente demostrado en la Tesis Doctoral de F. Aguirre [8, Lema 1.15].

2.2.15 Lema. *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$. Si T^* alcanza su norma, entonces existe $y^* \in \operatorname{ext}(B_{Y^*})$ tal que $\|T^*y^*\| = \|T^*\|$.*

Demostración del Lema 2.2.14. El Lema 2.2.11 nos dice que $C_{\omega^*}(K,X^*)$ es isométrico a $L(X,C(K))$ y que el conjunto $\mathcal{B}$ se identifica con el conjunto de los operadores de norma uno $T \in L(X,C(K))$ cuyo adjunto alcanza su norma en algún δ_t. Recordando que el conjunto $\{\lambda\,\delta_t \ : \ t \in K,\ |\lambda| = 1\}$ coincide con $\operatorname{ext}(B_{C(K)^*})$ (Teorema de Arens-Kelley), el Lema 2.2.15 nos dice que $\mathcal{B}$ se identifica, de hecho, con el conjunto de todos los operadores de norma uno cuyo adjunto alcanza la norma. Finalmente, un resultado clásico de V. Zizler [130, Proposición 4] nos dice que este último conjunto es siempre denso. □

Demostración del Teorema 2.2.13. Seguimos los pasos de la segunda parte de la demostración del Teorema 2.2.8. Dado $S \in S_{L(X)}$, definimos $T \in L(C_{\omega^*}(K, X^*))$ mediante
$$[T(f)](t) = S^*(f(t)) \qquad (t \in K,\ f \in C_{\omega^*}(K, X^*)),$$
que está bien definido puesto que S^* es débil*-débil*-continuo. Además $\|T\| = 1$, luego $v(T) \geqslant n(C_{\omega^*}(K, X^*))$. Utilizando el Lema 2.2.14 y el Lema 2.1.2, podemos calcular el radio numérico de T como sigue:
$$v(T) = \sup\left\{\left|x^{**}\big([Tf](t)\big)\right| \ :\ f \in \mathcal{B},\ t \in K,\ x^{**} \in S_{X^{**}},\ x^{**}(f(t)) = 1\right\}.$$
Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $f \in \mathcal{B}$, $x^{**} \in S_{X^{**}}$ y $t \in K$, verificando que $x^{**}(f(t)) = 1$ y
$$n(C_{\omega^*}(K, X^*)) - \varepsilon < \left|x^{**}\big([Tf](t)\big)\right| = |x^{**}(S^*(f(t)))| \leqslant v(S^*) = v(S).$$
Deducimos que $n(X) \geqslant n(C_{\omega^*}(K, X^*)) - \varepsilon$ y, haciendo $\varepsilon \downarrow 0$, obtenemos la desigualdad buscada. □

2.2.16 Observación. *La desigualdad dada en el Teorema 2.2.13 puede ser estricta. En efecto, si K tiene un único punto, tenemos que $C_{\omega^*}(K, X^*) = X^*$ y basta tomar*
$$X = \left\{(x, y, z) \in c \oplus_\infty c \oplus_\infty c\ :\ \text{lím}\, x + \text{lím}\, y + \text{lím}\, z = 0\right\}$$
(el ejemplo dado en [31, Example 3.1]) para tener
$$n(C_{\omega^*}(K, X^*)) = n(X^*) < n(X).$$

No hemos sido capaces de obtener una cota inferior de $n\left(C_{\omega^*}(K, X^*)\right)$ válida en general. Sin embargo, el siguiente resultado dará condiciones suficientes sobre el compacto K o sobre el espacio de Banach X que permiten obtener una tal cota. La condición que impondremos sobre X es que sea un espacio de Asplund, ya que cualquier subconjunto acotado del dual de un tal espacio es w^*-dentable. Recordamos la definición de este tipo de espacios, introducidos por E. Asplund en [12] (aunque obviamente él no los llamaba así). Decimos que un espacio de Banach X es un *espacio de Asplund* si toda función real, convexa y continua, definida en un subconjunto abierto y convexo de X, es Fréchet diferenciable en un subconjunto denso de su dominio.

2.2.17 Proposición. *Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea X un espacio Banach. Supongamos que X es un espacio de Asplund o que K tiene un conjunto denso de puntos aislados. Entonces,*

$$n(X^*) \leqslant n\left(C_{\omega^*}(K, X^*)\right).$$

Necesitamos un resultado similar al Lema 2.2.9.a.

2.2.18 Lema. *Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea X un espacio de Asplund. Entonces, para cada $f \in C_{\omega^*}(K, X^*)$ el conjunto*

$$\{t \in K \ : \ f \ \text{ es norma continua en } t\}$$

es denso en K.

Demostración. Por ser X un espacio de Asplund, tenemos asegurado que cada subconjunto acotado de X^* es w^*-dentable (véase [29, Teorema 4.4.1]). Ahora la demostración es, mutatis mutandi, como la del apartado (a) del Lema 2.2.9. □

Demostración de la Proposición 2.2.17. Por un lado, si X es un espacio de Asplund, la primera parte de la demostración del Teorema 2.2.8 se adapta fácilmente a este caso utilizando el Lema 2.2.18 en vez del Lema 2.2.9.a. Por otro lado, si K tiene un conjunto denso de puntos aislados, la tesis del Lema 2.2.18 es trivialmente cierta y, por tanto, podemos razonar como antes para acabar la demostración. □

No sabemos si la Proposición 2.2.17 es cierta en general. Hasta donde nosotros sabemos, podría darse la igualdad $n(C_{\omega^*}(K, X^*)) = n(X^*)$ para todo espacio de Banach X y todo compacto K.

Utilizando la identificación ya mencionada entre $C_{\omega^*}(K, X^*)$ y $L(X, C(K))$, el Teorema 2.2.13 y la proposición 2.2.17 se pueden leer como sigue.

2.2.19 Corolario. *Sea K un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea X un espacio de Banach. Entonces,*

$$n\big(L(X, C(K))\big) \leqslant n(X).$$

Si, además, X es un espacio de Asplund o K tiene un subconjunto denso de puntos aislados, entonces

$$n(X^*) \leqslant n\big(L(X, C(K))\big).$$

Con los corolarios 2.2.12 y 2.2.19 en mente, uno podría pensar en la existencia de un resultado más general que diera $n\big(W(X,Y)\big)$ y $n\big(L(X,Y)\big)$ en función de $n(X)$, $n(X^*)$, $n(Y)$ y $n(Y^*)$. Nada más lejos de la realidad, como muestra el Ejemplo 10 de [95]: si llamamos $X = \ell_1^4$, $Y = \ell_\infty^4$, se tiene que

$$n(X) = n(X^*) = n(Y) = n(Y^*) = 1$$

y, por un lado,

$$n\big(L(X,Y)\big) = n\big(X \oplus_\infty X \oplus_\infty X \oplus_\infty X\big) = 1,$$

mientras que en [95, Example 10] se observa, usando resultados de Å. Lima [81], que

$$n\big(L(Y,X)\big) < 1.$$

2.3. Espacios con índice numérico cero

Dedicamos este apartado al estudio de las propiedades de los espacios de Banach con índice numérico cero. Comenzamos bautizando a los operadores cuyo radio numérico es cero y al espacio vectorial que éstos forman.

2.3.1 Definición. Sea X un espacio de Banach real y sea $T \in L(X)$. Se dice que T es un operador *anti-hermitiano* si $v(T) = 0$ o, equivalentemente, si

$$x^*(Tx) = 0$$

para cada $(x^*, x) \in \Pi(X)$. El conjunto de los operadores anti-hermitianos es un subespacio vectorial cerrado de $L(X)$, al que denotaremos por $\mathcal{Z}(X)$.

Si X es un espacio de Banach complejo, como consecuencia del Teorema de Bohnenblust-Karlin, ningún operador no nulo en $L(X)$ puede verificar la condición de la definición anterior. Sin embargo, dicha definición se puede trasladar fácilmente al caso complejo pidiendo que $\operatorname{Re} x^*(Tx) = 0$ para cada $(x^*, x) \in \Pi(X)$, esto es, $W(T) \subset i\mathbb{R}$. El nombre de operador anti-hermitiano cobra ahora sentido en contraposición a la definición clásica de operador hermitiano: un operador $T \in L(X)$ es *hermitiano* si $W(T) \subset \mathbb{R}$. Así, un operador T es anti-hermitiano si, y sólo si, iT es hermitiano. Los operadores hermitianos han sido ampliamente estudiados y tienen numerosas aplicaciones, especialmente en el estudio de las álgebras de Banach. Entre la abundante bibliografía sobre el tema cabe citar las monografías de F. Bonsall y J. Duncan [26, 27].

El nombre de operador anti-hermitiano surge, como no podía ser de otra forma, del estudio de los operadores en espacios de Hilbert. Si H es un espacio de Hilbert real con producto interior $(\cdot \mid \cdot)$, un operador $T \in L(H)$ es anti-hermitiano si $(Tx \mid x) = 0$ para cada $x \in S_H$. En este caso, la forma bilineal simétrica definida sobre H por

$$(x, y) \longmapsto (Tx \mid y) + (x \mid Ty)$$

es nula (ya que su forma cuadrática asociada es cero) y, por tanto, $T^* = -T$ en $L(H)$. Luego los operadores anti-hermitianos son los operadores *antisimétricos*. Supongamos ahora que el espacio de Hilbert H tiene dimensión finita, digamos n. Entonces, si tenemos un operador anti-hermitiano, su matriz asociada en cualquier base ortonormal es antisimétrica y viceversa; por lo tanto, se tiene que $Z(H)$

se identifica totalmente con $\mathcal{A}(n)$, el espacio de las matrices antisimétricas $n \times n$. Es bien conocido (véase [11, Corollary 8.5.10], por ejemplo) que una matriz A de orden n es antisimétrica si, y sólo si, para cada $\rho \in \mathbb{R}$, la matriz

$$\exp(\rho\, A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k A^k}{k!}$$

pertenece a $\mathcal{O}(n)$ (el grupo de las matrices ortogonales de orden n), hecho que se deduce fácilmente de la igualdad

$$[\exp(\rho A)]^t = \exp(\rho A^t).$$

En efecto, si $A = -A^t$, entonces se tiene que

$$[\exp(\rho A)]^t = \exp(-\rho A) = [\exp(\rho A)]^{-1} \qquad (\rho \in \mathbb{R});$$

si, por el contrario, $\exp(\rho A) \in \mathcal{O}(n)$ para cada $\rho \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\exp(\rho A^t) = [\exp(\rho A)]^t = [\exp(\rho A)]^{-1} = \exp(-\rho A) \qquad (\rho \in \mathbb{R})$$

y, derivando respecto de ρ y evaluando en $\rho = 0$, se obtiene que $A^t = -A$.

Nuestro objetivo más inmediato es generalizar este resultado a cualquier espacio de Banach X, cambiando $\mathcal{A}(n)$ por $\mathcal{Z}(X)$, $\mathcal{O}(n)$ por el grupo $G(X)$ de las isometrías sobreyectivas de X y recordando que para $T \in L(X)$ se define su exponencial como el operador

$$\exp(T) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Dicha generalización es una consecuencia inmediata de la llamada "fórmula exponencial para el rango numérico".

2.3.2 Lema (Fórmula exponencial, [26, Theorem 3.4])**.** *Sea X un espacio de Banach y sea $T \in L(X)$. Entonces,*

$$\sup \operatorname{Re} W(T) = \sup_{\alpha > 0} \frac{\log \|\exp(\alpha T)\|}{\alpha}.$$

2.3.3 Teorema ([26, Theorem 3.6]). *Sea X un espacio de Banach real y sea T un operador en $L(X)$. Son equivalentes:*

(i) *T es un operador anti-hermitiano.*

(ii) $\exp(\rho T)$ *es una isometría sobreyectiva para todo $\rho \in \mathbb{R}$.*

No podemos dejar de comentar que este resultado recuerda mucho a la teoría de grupos y álgebras de Lie, de la que $\mathcal{O}(n)$ y $\mathcal{A}(n)$ son prototipos. De hecho, en dimensión finita, $G(X)$ es un grupo de Lie y $\mathcal{Z}(X)$ es su álgebra de Lie asociada. Aunque no queremos en absoluto profundizar en este tema, sí nos interesa destacar que, en general, $\mathcal{Z}(X)$ es cerrado para el producto de Lie. Puede encontrarse más información en [118], por ejemplo.

2.3.4 Lema ([118, Proposition 1.5.d]). *Sea X un espacio de Banach real y sean $S, T \in \mathcal{Z}(X)$. Entonces,*

$$ST - TS \in \mathcal{Z}(X).$$

El Teorema 2.3.3 es especialmente útil si X es un espacio de Banach real de dimensión finita y lo combinamos con un resultado debido a H. Auerbach [117, Theorem 9.5.1] que nos proporciona un espacio de Hilbert con más isometrías que X. Unimos ambos resultados en la siguiente proposición.

2.3.5 Proposición ([117, Theorem 9.5.1] y [118, Proposition 3.3]). *Si X es un espacio de Banach real de dimensión finita, entonces existe un producto interior $(\cdot \mid \cdot)$ en X de manera que el espacio de Hilbert $H := (X, (\cdot \mid \cdot))$ verifica que*

$$G(X) \subset G(H) \qquad y \qquad \mathcal{Z}(X) \subset Z(H).$$

Como consecuencia, la matriz asociada a cualquier elemento de $\mathcal{Z}(X)$ en cualquier base ortonormal de H es antisimétrica.

Demostración. El producto interior y la primera inclusión los proporciona directamente el Teorema de Auerbach [117, Theorem 9.5.1]; para la segunda inclusión basta usar el Teorema 2.3.3 dos veces. □

Como consecuencia de esta proposición y de resultados de la teoría clásica de grupos de Lie (cualquier subgrupo cerrado de un grupo de Lie es un grupo de Lie, véase [7, Theorem 2.27] por ejemplo), se puede obtener una curiosa caracterización de los espacios de Banach reales de dimensión finita con índice numérico cero.

2.3.6 Proposición ([118, Theorem 3.8])**.** *Sea X un espacio de Banach real de dimensión finita. Son equivalentes:*

(i) *X tiene índice cero.*
(ii) *X tiene infinitas isometrías.*

Como ya se comentó en la introducción de este capítulo, es un hecho conocido [62, p.114] que la clase de espacios de Banach con índice numérico cero contiene a los espacios de Hilbert reales de dimensión mayor que uno, y a aquellos espacios reales subyacentes a espacios complejos. De hecho, en ambos casos es posible encontrar un operador con radio numérico cero. Para construir más espacios con índice numérico cero, basta recordar que el índice numérico de un espacio es menor o igual que el de cualquier sumando absoluto suyo [86, Proposición 1] y, por tanto, la suma absoluta del espacio real subyacente a un espacio complejo y otro espacio real cualquiera, nos da un nuevo espacio con índice numérico cero. De hecho, los dos tipos de espacios anteriores responden a este esquema. El primer resultado que presentamos viene a extender esta forma de construir espacios con índice numérico cero, debilitando las exigencias a la hora de sumar un espacio de Banach cualquiera con el real subyacente a un complejo. Diremos que un espacio de Banach real está dotado de una *estructura compleja* si es el espacio real subyacente a un espacio complejo.

2.3.7 Proposición. *Sea X un espacio de Banach real y sean Y, Z subespacios cerrados de X de modo que $Z \neq 0$. Supongamos que Z está dotado de una estructura compleja, que se tiene $X = Y \oplus Z$ y que la igualdad*

$$\left\| y + \mathrm{e}^{i\rho} z \right\| = \|y + z\|$$

se cumple para cada $(\rho, y, z) \in \mathbb{R} \times Y \times Z$. Entonces se tiene que $n(X) = 0$.

Demostración. En primer lugar, observamos que la norma de X restringida a Z convierte a éste en un espacio de Banach complejo, por lo que tiene sentido definir el operador $T \in L(X)$ no nulo dado por

$$T(y, z) = (0, i\,z) \qquad (y \in Y,\ z \in Z).$$

Nuestro objetivo es demostrar que $v(T) = 0$. Para ello, fijados $x^* \in S_{X^*}$, $x \in S_X$ tales que $x^*(x) = 1$, escribimos

$$x^* = (y^*,\ \mathrm{Re}\, z^*), \qquad x = (y, z),$$

donde $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$, $y \in Y$ y $z \in Z$, y utilizamos que

$$\|x^*\| = 1 \qquad \text{y} \qquad \left\| y + \mathrm{e}^{i\rho} z \right\| = 1 \qquad (\rho \in \mathbb{R}),$$

para deducir que

$$x^*(y + \mathrm{e}^{i\rho} z) \leqslant 1 \qquad (\rho \in \mathbb{R}).$$

Usando esto, la forma de x^* y el hecho de que $x^*(x) = 1$, obtenemos que

$$\mathrm{Re}\, z^*(\mathrm{e}^{i\rho} z) \leqslant \mathrm{Re}\, z^*(z)$$

para cada $\rho \in \mathbb{R}$, de lo que se deduce inmediatamente que $z^*(z) \in \mathbb{R}$. Ahora basta usar la definición de T para obtener

$$x^*(Tx) = \mathrm{Re}\, i\, z^*(z) = 0,$$

lo que concluye la prueba. □

El siguiente ejemplo muestra un espacio de Banach en el que la descomposición dada por la proposición anterior no proviene de una suma absoluta.

2.3.8 Ejemplo. *Sea* $X = (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$ *donde la norma* $\|\cdot\|$ *está definida por*

$$\|(x,y,z,t)\| := \max\left\{|x|,\ |y| + \left(z^2+t^2\right)^{1/2}\right\}$$

para cada $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ *(esto es,* $X \equiv \mathbb{R} \oplus_\infty [\mathbb{R} \oplus_1 [\mathbb{R} \oplus_2 \mathbb{R}]]$*). Si consideramos los subespacios*

$$Y = \{(x,y,0,0)\ :\ x,\, y \in \mathbb{R}\} \qquad y \qquad Z = \{(0,0,z,t)\ :\ z,\, t \in \mathbb{R}\},$$

X *se descompone como* $X = Y \oplus Z$ *y se verifica que*

$$\|(x,y,0,0) + \mathrm{e}^{i\rho}(0,0,z,t)\| = \|(x,y,0,0) + (0,0,z,t)\| \qquad \big(\rho, x, y, z, t \in \mathbb{R}\big),$$

luego X *tiene índice cero gracias a la Proposición 2.3.7. Sin embargo, la suma anterior no es absoluta ya que* $\|(1,0,0,0)\| = \|(0,1,0,0)\|$*, mientras que*

$$\|(1,0,0,0) + (0,0,1,0)\| = 1 \qquad y \qquad \|(0,1,0,0) + (0,0,1,0)\| = 2.$$

En vista de la Proposición 2.3.7, cabría pensar en la posibilidad de que en todos los espacios de Banach con índice numérico cero pudiera aparecer una cierta estructura compleja, pero basta recordar el Ejemplo 2.2.7 para ver que esto no es así: el espacio de Banach que allí se construye tiene índice cero y es poliédrico, luego no puede contener ninguna copia isométrica de $\mathbb{C}$. No obstante, en dimensión finita sí es cierto que el hecho de que un espacio tenga índice numérico cero, obliga a la aparición de una cierta estructura compleja en el espacio; de hecho, somos capaces de caracterizar en estos términos los espacios de dimensión finita con índice numérico cero.

2.3.9 Teorema. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach real de dimensión finita. Son equivalentes:*

(i) *X tiene índice numérico cero.*

(ii) *Existen espacios vectoriales* complejos *no nulos $X_1, \ldots, X_n$, un espacio vectorial* real *X_0 (eventualmente nulo), y números naturales $q_1, \ldots, q_n$ tales que $X = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ y*

$$\left\| x_0 + \mathrm{e}^{iq_1\rho} x_1 + \cdots + \mathrm{e}^{iq_n\rho} x_n \right\| = \|x_0 + x_1 + \cdots + x_n\|$$

para cada $\rho \in \mathbb{R}$ y cada $x_j \in X_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

Demostración. Comenzamos probando la implicación $(ii) \Rightarrow (i)$. Consideramos el operador $T \in L(X)$ dado por

$$T(x_0 + x_1 + \cdots + x_n) = iq_1 x_1 + \cdots + iq_n x_n \qquad (x_j \in X_j,\ \ j = 0, 1, \ldots, n).$$

De la definición de T se deduce que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$T^k(x_0 + x_1 + \cdots + x_n) = (iq_1)^k x_1 + \cdots + (iq_n)^k x_n$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \exp(\rho T)(x_0 + x_1 + \cdots + x_n) &= x_0 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k (iq_1)^k}{k!} \right) x_1 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\rho^k (iq_n)^k}{k!} \right) x_n \\ &= x_0 + \mathrm{e}^{iq_1\rho} x_1 + \cdots + \mathrm{e}^{iq_n\rho} x_n. \end{aligned}$$

En virtud de (ii), se tiene que $\exp(\rho T)$ es una isometría para cada $\rho \in \mathbb{R}$ y el Teorema 2.3.3 nos dice que $v(T) = 0$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Puesto que X tiene dimensión finita, la Proposición 2.3.5 nos asegura que existe un producto interior $(\cdot \mid \cdot)$ en X de modo que $\mathcal{Z}(X)$ (que no es nulo por hipótesis) está contenido en $Z(H)$, donde H es el espacio de Hilbert $(X, (\cdot \mid \cdot))$. Fijemos entonces $T \in \mathcal{Z}(X)$ no nulo y observemos que, gracias otra vez a la Proposición 2.3.5, la matriz que representa a T en cualquier base ortonormal de H es antisimétrica. Es un hecho bien conocido de la teoría de álgebra lineal que los valores propios de T son imaginarios puros y aparecen pareados (véase

[110, pp. 102], si se quiere). También es conocido que, si $\{\pm i\,\alpha_j \,:\, j = 1, \ldots, m\}$ son los valores propios no nulos de T, repetidos tantas veces como indique su multiplicidad, se puede encontrar una base ortonormal $\{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ de H, de manera que la matriz que representa a T en dicha base adopta la forma

$$\operatorname{diag}\big(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m, 0, \ldots, 0\big), \qquad \text{donde } \Lambda_j := \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_j \\ \alpha_j & 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

(véase [110, pp. 103], si se quiere). Si, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, llamamos Y_j al subespacio de X generado por $\{u_{2j-1},\, u_{2j}\}$, se tiene claramente que

$$T^2 = -\alpha_j^2 \operatorname{Id} \quad \text{en } Y_j.$$

De esto deducimos que se puede dotar a Y_j de una estructura compleja mediante la fórmula

$$(a + i\,b)x_j = a\,x_j + \frac{b}{\alpha_j}\,T(x_j) \qquad \big(a, b \in \mathbb{R},\ x_j \in Y_j\big)$$

y, por tanto, se tiene que

$$\exp(\rho T)(x_j) = \mathrm{e}^{i\alpha_j\rho} x_j \qquad \big(\rho \in \mathbb{R},\ x_j \in Y_j\big).$$

Finalmente, si $Y_0 := \ker(T)$, se deduce de (2.20) que $X = Y_0 \oplus Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m$. Ahora, fijados $\rho \in \mathbb{R}$ y $x_0 + x_1 + \cdots + x_m \in X$, se tiene claramente que

$$\exp(\rho T)(x_0 + x_1 + \cdots + x_m) = x_0 + \mathrm{e}^{i\alpha_1\rho} x_1 + \cdots + \mathrm{e}^{i\alpha_m\rho} x_m$$

y, como $\exp(\rho T)$ es una isometría (Teorema 2.3.3), obtenemos la siguiente igualdad:

$$\left\| x_0 + \mathrm{e}^{i\alpha_1\rho} x_1 + \cdots + \mathrm{e}^{i\alpha_m\rho} x_m \right\| = \left\| x_0 + x_1 + \cdots + x_m \right\|. \tag{2.21}$$

Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subseteq \mathbb{Q}$, basta tomar $N \in \mathbb{N}$ de modo que $q_j := N\alpha_j \in \mathbb{N}$ (si algún q_j es negativo bastará cambiar el producto complejo en Y_j por su complejo conjugado) para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, y $X_j := Y_j$ para $j = 0, 1, \ldots, m$.

Supongamos por el contrario que no todo α_k es racional. Podemos entonces reordenar $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ de modo que $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ sea $\mathbb{Q}$-linealmente independiente para un cierto $r \in \{1, \ldots m\}$; en el caso en el que $r < m$, existirán

$$s_j, s_{k,j} \in \mathbb{Q} \qquad (k = 1, \ldots, r;\ j = r+1, \ldots, m)$$

verificando que

$$\alpha_j = s_j + \sum_{k=1}^{r} s_{k,j}\,\alpha_k \qquad (j = r+1, \ldots, m).$$

Supondremos a partir de ahora que $1 < r < m$, pues en los casos extremos en que $r = 1$ o $r = m$, los razonamientos que siguen son válidos realizando las simplificaciones naturales. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ verificando que

$$Ns_{k,j} \in \mathbb{Z}, \qquad Ns_j \in \mathbb{Z} \qquad (j = r+1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r)$$

y escribamos

$$n := m - r + 1, \quad q_1 := N, \quad \text{y } \ q_\ell := Ns_{r,r+\ell-1} \quad (\ell = 2, \ldots, n).$$

Ahora, fijado

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_m \in X = Y_0 \oplus Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_m,$$

definimos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(\rho) = \left\| (x_0 + \cdots + x_{r-1}) + \mathrm{e}^{iq_1\rho} x_r + \cdots + \mathrm{e}^{iq_n\rho} x_m \right\| \qquad (\rho \in \mathbb{R}),$$

y nuestro objetivo es demostrar que f es constante, pues esto probará (ii) sin más que tomar $X_0 = Y_0 \oplus \cdots \oplus Y_{r-1}$ y $X_\ell = Y_{r+\ell-1}$ para $\ell = 1, \ldots, n$ (si algún q_ℓ es negativo, bastará cambiar el producto complejo en X_ℓ por su complejo conjugado). Veamos pues que f es costante. Para ello, definimos

$$K := \max\left\{ |Ns_{k,j}| \ :\ k = 1, \ldots r;\ j = r+1, \ldots, m \right\},$$

y fijados $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, utilizamos el Teorema de Aproximación de Kronecker (véase [63, Theorem 442], por ejemplo), para encontrar $M \in \mathbb{N}$ y $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Z}$ verificando que

$$\begin{aligned} |t - (2M\pi\alpha_r - 2\pi p_r)| &< \varepsilon \\ |2M\pi\alpha_k - 2\pi p_k| &< \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, r-1), \end{aligned} \tag{2.22}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} |\exp(itq_1) - \exp(i2MN\pi\alpha_r)| &< N\varepsilon \\ |1 - \exp(i2MN\pi\alpha_k)| &< N\varepsilon \qquad\qquad (k = 1, \dots, r-1). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Utilizando otra vez (2.22) no es difícil comprobar que

$$|\exp(itq_\ell) - \exp(i2MN\pi\alpha_{r+\ell-1})| < rK\varepsilon \qquad (\ell = 2, \dots, n). \tag{2.24}$$

En efecto, como p_k, $Ns_{r+\ell-1}$, $Ns_{k,r+\ell-1} \in \mathbb{Z}$ para $k = 1, \dots, r$ y $\ell = 2, \dots, n$, observamos que

$$\begin{aligned} &\Big|\exp(itq_\ell) - \exp\left(i2MN\pi\alpha_{r+\ell-1}\right)\Big| = \\ &\quad = \left|\exp\left(itNs_{r,r+\ell-1}\right) - \exp\left(i\sum_{k=1}^{r}\left(2MN\pi s_{k,r+\ell-1}\alpha_k - 2N\pi s_{k,r+\ell-1}p_k\right)\right)\right| \\ &\quad \leqslant \left|tNs_{r,r+\ell-1} - \sum_{k=1}^{r}\left(2MN\pi s_{k,r+\ell-1}\alpha_k - 2N\pi s_{k,r+\ell-1}p_k\right)\right| \\ &\quad \leqslant |Ns_{r,r+\ell-1}|\,|t - (2M\pi\alpha_r - 2\pi p_r)| + \sum_{k=1}^{r-1}|Ns_{k,r+\ell-1}|\,|2M\pi\alpha_k - 2\pi p_k| \\ &\quad < K\varepsilon + (r-1)K\varepsilon, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de (2.22). Usando ahora (2.21) para $\rho = 2MN\pi$, obtenemos que

$$f(0) = \left\|x_0 + \mathrm{e}^{i\,2MN\pi\alpha_1}x_1 + \cdots + \mathrm{e}^{i\,2MN\pi\alpha_m}x_m\right\|.$$

Usando esta igualdad junto con (2.23) y (2.24) deducimos que

$$|f(t) - f(0)| \leqslant N(\|x_1\| + \cdots + \|x_r\|)\varepsilon + rK\left(\|x_{r+1}\| + \cdots + \|x_m\|\right)\varepsilon$$

y, haciendo $\varepsilon \downarrow 0$, se obtiene que $f(t) = f(0)$ como queríamos. □

2.3.10 Observación. De la ecuación (2.20) se sigue de forma clara que un operador anti-hermitiano S en un espacio de dimensión finita no tiene parte nilpotente, es decir, $\ker(S^2) = \ker(S)$ (este hecho también es cierto en dimensión infinita, se puede deducir de [26, Lemma 10.9] por ejemplo). Por tanto, si todos los valores propios de S son nulos, entonces $S = 0$.

Es necesario destacar que hay aspectos del teorema anterior que ya eran conocidos, aunque nosotros lo descubrimos posteriormente a la aceptación de los trabajos [92, 93]. Concretamente, H. Rosenthal da una descomposición en [118, Corollary 3.7] como la que aparece en la afirmación (ii) del Teorema 2.3.9, pero los números $q_1, \ldots, q_n$ que obtiene son reales. También prueba en [118, Theorem 3.10] que si $\mathcal{Z}(X)$ tiene dimensión 1 entonces, en la descomposición que obtiene, los números $q_1, \ldots, q_n$ son enteros primos relativos entre sí. Más aún, el citado autor observa (basándose en consideraciones hechas en [113]) que si $\mathcal{Z}(X)$ es un álgebra de Lie conmutativa, se puede encontrar una base de $\mathcal{Z}(X)$ en la que los operadores tienen por números asociados a su descomposición números enteros. Hasta donde nosotros sabemos, el resultado de que los números $q_1, \ldots, q_n$ se pueden tomar enteros en el caso general (como se hace en el Teorema 2.3.9) es novedoso.

En vista de la Proposición 2.3.7, cabe preguntarse si siempre puede conseguirse que el número de espacios complejos en la afirmación (ii) del Teorema 2.3.9 sea uno. El siguiente ejemplo nos muestra un espacio de Banach con índice cero en el que dicha descomposición sólo puede hacerse como suma de dos espacios complejos.

2.3.11 Ejemplo. *Existe un espacio de Banach real X de dimensión cuatro con índice numérico cero y tal que el número de espacios complejos que aparecen en el Teorema 2.3.9.(ii) no puede ser uno.* Este es el caso del espacio $X = \mathbb{R}^4$ dotado de la norma

$$\|(a,b,c,d)\| = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{2it}(a+ib) + \mathrm{e}^{it}(c+id)\right)\right| dt \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{R}).$$

Demostración. Consideramos los subespacios de X

$$X_1 = \{(a,b,0,0) \ : \ a,b \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y} \qquad X_2 = \{(0,0,c,d) \ : \ c,d \in \mathbb{R}\},$$

llamamos P_1 a la proyección de imagen X_1 y núcleo X_2, y definimos $P_2 = \mathrm{Id} - P_1$ (que es, obviamente, la proyección con imagen X_2 y núcleo X_1). Es sencillo comprobar que X_1, X_2 son espacios complejos (identificando $(a,b,0,0) = a+ib$ y $(0,0,c,d) = c+id$), de hecho, se tiene que

$$\begin{aligned} \|(a,b,0,0)\| &= |a+ib| \\ \|(0,0,c,d)\| &= |c+id|. \end{aligned}$$

Demostramos sólo la primera igualdad, ya que la segunda se prueba de manera análoga. Para ello, tomamos $\theta \in \mathbb{R}$ y observamos que se verifica

$$\begin{aligned} \|e^{i\theta}(a,b,0,0)\| &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}(e^{2it+i\theta}(a+ib))|dt \\ &= \frac{1}{4}\int_{\frac{\theta}{2}}^{2\pi+\frac{\theta}{2}} |\operatorname{Re}(e^{2it}(a+ib))|dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re}(e^{2it}(a+ib))|dt = \|(a,b,0,0)\| \end{aligned}$$

donde se utiliza que la función que estamos integrando es 2π-periódica y que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones. Hemos probado que la norma restringida a X_1 es compleja y, como $\|(1,0,0,0)\| = 1$, dicha norma tiene que coincidir con el módulo. De un modo similar, se comprueba que X satisface la afirmación (ii) del Teorema 2.3.9 para $q_1 = 2$, $q_2 = 1$. De modo más preciso, tenemos

$$\left\| e^{i2\rho}(a,b,0,0) + e^{i\rho}(0,0,c,d) \right\| = \|(a,b,c,d)\| \quad (\rho \in \mathbb{R},\ a,b,c,d \in \mathbb{R}). \qquad (2.25)$$

En particular, se tiene $n(X) = 0$ y, más concretamente, $v(T) = 0$, donde $T \in L(X)$ viene dado por la matriz

$$T \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(para ver que $v(T) = 0$ basta usar el Teorema 2.3.3). Observamos finalmente que, utilizando (2.25) para $\rho = \pi$, obtenemos $\|2P_1 - \mathrm{Id}\| = 1$, lo que nos dice que $\|P_1\| = \|P_2\| = 1$, luego

$$\|(s,t,0,0)\|' = \sqrt{s^2+t^2}, \quad \|(0,0,s,t)\|' = \sqrt{s^2+t^2} \qquad (s,t \in \mathbb{R}),$$

donde $\|\cdot\|'$ es la norma dual de $\|\cdot\|$. Demostremos ya que los únicos operadores con radio numérico cero son los múltiplos de T, lo que nos dirá que la única descomposición de X como en la afirmación (ii) del Teorema 2.3.9 es $X = X_1 \oplus X_2$ con $q_1 = 2q_2$. Fijado $S \in L(X)$ con $v(S) = 0$, consideramos (s_{ij}) la representación matricial de S y utilizamos que S tiene radio numérico cero y que

$$\|(1,0,0,0)\|' = \|(1,0,0,0)\| = \langle (1,0,0,0),(1,0,0,0)\rangle = 1,$$

para deducir que $s_{11} = 0$. Análogamente, se deduce que $s_{22} = s_{33} = s_{44} = 0$. De un modo similar, utilizando que

$$\left\|\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)\right\|' = \left\|\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)\right\| = \left\langle \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)\right\rangle = 1,$$

$$\left\|\left(0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\|' = \left\|\left(0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \left\langle \left(0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(0,0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = 1,$$

obtenemos que $s_{12} + s_{21} = 0$ y $s_{34} + s_{43} = 0$. Finalmente, como quiera que también se verifican las igualdades

$$\begin{aligned}\|(0,0,1,0)\|' &= \|(0,1/2,1,0)\| = \langle (0,0,1,0),(0,1/2,1,0)\rangle = 1\\ \|(0,0,0,1)\|' &= \|(0,1/2,0,1)\| = \langle (0,0,0,1),(0,1/2,0,1)\rangle = 1,\end{aligned}$$

obtenemos $s_{32} = 0$ y $s_{42} = 0$. Resumiendo, la información anterior nos dice que cualquier operador con radio numérico cero tiene el siguiente aspecto

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ -s_{12} & 0 & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & 0 & 0 & s_{34} \\ s_{41} & 0 & -s_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos lo anterior al operador

$$U = TS - ST \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{14} + 2s_{23} & -s_{13} + 2s_{24} \\ 0 & 0 & -2s_{13} + s_{24} & -2s_{14} - s_{23} \\ s_{41} & -2s_{31} & 0 & 0 \\ -s_{31} & -2s_{41} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

($v(U) = 0$ gracias al Lema 2.3.4) y obtenemos que $s_{31} = s_{41} = 0$. Tenemos pues, que el operador U tiene radio numérico cero y que todos sus valores propios son nulos, con lo que la Observación 2.3.10 nos dice que $U = 0$. Por tanto, se tiene $s_{13} = s_{14} = s_{23} = s_{24} = 0$. La expresión matricial de S adopta ahora la siguiente forma

$$S \equiv \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

donde α y β son números reales. Es decir, hemos deducido ya que el espacio $\mathcal{Z}(X)$ de los operadores con radio numérico cero, tiene dimensión menor o igual que dos. Como $T \in \mathcal{Z}(X)$, tenemos que $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) \geqslant 1$. Veamos que se da la igualdad. Para ello, basta observar que si ocurriera $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) = 2$, entonces el operador S dado por (2.26) para $\alpha = \beta = 1$ tendría radio numérico cero 0, lo que obligaría a que $\exp(\rho S)$ fuera una isometría para cada $\rho \in \mathbb{R}$. Pero este no es el caso, ya que

$$\|(1,0,1,0)\| = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad \left\|\exp\left(\frac{\pi}{2}S\right)(1,0,1,0)\right\| = \|(0,1,0,1)\| = \frac{5}{4}.$$

Podemos decir ya que todo operador con radio numérico cero sobre X es un múltiplo de T. $\square$

Concluimos esta sección exponiendo un problema abierto relacionado con los resultados aquí presentados. Comencemos observando que el enunciado del Teorema 2.3.9 adopta una forma más sencilla si el espacio X tiene dimensión 2 o 3.

2.3.12 Corolario ([118, Theorem 3.1]). *Sea X un espacio de Banach real con índice numérico* 0.

a) Si $\dim(X) = 2$*, entonces X es isométricamente isomorfo al espacio de Hilbert real de dimensión dos.*

b) Si $\dim(X) = 3$*, entonces X es suma absoluta de $\mathbb{R}$ y del espacio de Hilbert real de dimensión dos.*

Poco más se puede decir del caso bidimensional, aunque sí haremos algunos comentarios para $\dim(X) = 3$. En este caso, X es suma absoluta del espacio de Hilbert de dimensión dos y $\mathbb{R}$. Si dicha suma absoluta es la euclídea, entonces X es un espacio de Hilbert y se tiene que $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) = 3$; si, por el contrario, la suma no es la euclídea, utilizando un resultado debido a R. Payá [104, Theorem 6], se tiene que los operadores de $\mathcal{Z}(X)$ conmutan con las proyecciones sobre los sumandos absolutos, lo que nos dice que $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) = 1$. Por tanto, para espacios tridimensionales, la dimensión de $\mathcal{Z}(X)$ no puede ser 2. Esta curiosidad nos lleva a plantearnos el siguiente problema:

2.3.13 Problema. Dado un número natural n, ¿cuáles son las posibles dimensiones de $\mathcal{Z}(X)$ cuando movemos X entre los espacios de Banach reales de dimensión n?

Este problema ya fue estudiado por H. Rosenthal en [118] y [119]; de hecho, él se propone estudiar cuáles son las subálgebras de Lie de $\mathcal{A}(n)$ que pueden ser el espacio de los operadores anti-hermitianos para algún espacio de Banach real de dimensión n. A continuación recopilamos la información conocida acerca del problema. En primer lugar, utilizando la Proposición 2.3.5 se tiene que $\mathcal{Z}(X)$ es un subespacio de $\mathcal{A}(n)$ y, por tanto, se verifica que

$$0 \leqslant \dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

Obviamente, los casos extremos son siempre posibles, basta tomar $X = \ell_\infty^n$ para tener $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) = 0$, y $X = \ell_2^n$ para tener $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) = \frac{n(n-1)}{2}$. Más aún, no resulta difícil comprobar que todas las dimensiones de la forma $\frac{k(k-1)}{2}$ con $1 \leqslant k \leqslant n$ son posibles: basta considerar el espacio

$$X = \ell_2^k \oplus_\infty \ell_\infty^{n-k}$$

y utilizar el Teorema 6 de [104] como hicimos en dimensión tres. Lo mismo ocurre con las dimensiones de la forma

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2},$$

que se obtienen si se toma $X = \ell_2^k \oplus_\infty \ell_2^{n-k}$; podríamos seguir obteniendo dimensiones posibles sin más que aumentar el número de sumandos. En la otra dirección se encuentra la curiosidad que hemos destacado para el caso $n = 3$, a saber, la dimensión de $\mathcal{Z}(X)$ no puede ser 2. Esta curiosidad responde a un hecho mucho más general probado por H. Rosenthal en [119]:

2.3.14 Teorema ([119, Theorem 2.1]). *Sea X un espacio de Banach real de dimensión n. Entonces,*

a) *Si* $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) > \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, *entonces X es un espacio de Hilbert y, por tanto,* $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) = \frac{n(n-1)}{2}$.

b) $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *si, y sólo si, X es suma absoluta (no euclídea) de un espacio de Hilbert de dimensión $n-1$ y $\mathbb{R}$.*

En [119] H. Rosenthal hace un estudio detallado del problema en dimensiones bajas, resolviéndolo totalmente hasta $n = 4$, donde las dimensiones posibles son $0, 1, 2, 3, 6$, que corresponden, por ejemplo, a los espacios

$$\ell_\infty^4, \qquad \ell_2^2 \oplus_\infty \ell_\infty^2, \qquad \ell_2^2 \oplus_\infty \ell_2^2, \qquad \ell_2^3 \oplus_\infty \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \ell_2^4,$$

respectivamente. De hecho, H. Rosenthal caracteriza cómo son todas las posibles álgebras de Lie que se materializan como $\mathcal{Z}(X)$ para algún espacio real de dimensión hasta $n = 4$. Por tanto, la primera dimensión en la que quedan casos sin resolver es $n = 5$, donde se tiene $0 \leqslant \dim\big(\mathcal{Z}(X)\big) \leqslant 10$ y las dimensiones $7, 8, 9$ no son posibles debido al teorema anterior. Se sabe que las dimensiones $0, 1, 2, 3, 4, 6, 10$ para $\mathcal{Z}(X)$ son posibles: las tienen, por ejemplo, los espacios

$$\ell_\infty^5, \quad \ell_2^2 \oplus_\infty \ell_\infty^3, \quad \ell_2^2 \oplus_\infty \ell_2^2 \oplus_\infty \mathbb{R}, \quad \ell_2^3 \oplus_\infty \ell_\infty^2, \quad \ell_2^3 \oplus_\infty \ell_2^2, \quad \ell_2^4 \oplus_\infty \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \ell_2^5,$$

respectivamente. Hasta donde nosotros sabemos, no es conocido si $\dim\big(\mathcal{Z}(X)\big)$ puede tomar el valor 5 para algún espacio X de dimensión 5.

2.4. Algunas consideraciones sobre el índice numérico de $L_p(\mu)$

En esta última sección del capítulo nos centramos en el problema, ya clásico, del cálculo del índice numérico de los espacios $L_p(\mu)$. Como ya se ha comentado en la introducción, se desconoce el índice numérico de estos espacios para $p \neq 1, 2, \infty$; en particular, se desconoce el índice de los espacios ℓ_p para p distinto de 1, 2 e ∞. Pretendemos aclarar el estado actual del problema, exponiendo resultados muy recientes debidos a E. Ed-dari y M. Khamsi (que aparecen en [44] y [45]) y dando, en algunos casos, demostraciones alternativas. El único resultado novedoso de esta sección es una mejora de la estimación del índice numérico de ℓ_p^2 dada en [44, Theorem 2.1] que aparecerá en la Proposición 2.4.5.

Recopilamos a continuación en un único teorema los resultados conocidos, que se encuentran en los trabajos de E. Ed-dari y M. Khamsi [44, 45].

2.4.1 Teorema ([44] y [45]). *Sean $1 < p < \infty$ y (Ω, Σ, μ) un espacio de medida σ-finita. Entonces,*

(i) $n(L_p(\mu)) \geqslant \inf\{n(\ell_p^m) \ : \ m \in \mathbb{N}\}$.

(ii) $n(\ell_p) = \lim\limits_{m\to\infty} n(\ell_p^m)$.

(iii) *Si $p \neq 2$ entonces $n(\ell_p^m) > 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Además, el radio numérico es una norma en $L(\ell_p)$.*

(iv) $n(L_p[0,1]) = \lim\limits_{m\to\infty} n(\ell_p^m)$.

(v) *En caso real se cumple que*

$$\frac{1}{2}\max_{t\in[0,1]}\frac{|t^{p-1}-t|}{1+t^p} \leqslant n(\ell_p^2) \leqslant \max_{t\in[0,1]}\frac{|t^{p-1}-t|}{1+t^p}.$$

Nuestro objetivo en esta sección es, por un lado, presentar las demostraciones de los apartados (i) a (iv) del teorema anterior, dando en algunos casos demostraciones diferentes (y, a nuestro juicio, más sencillas) de las originales y, por otro lado, mejorar la acotación dada en el apartado (v).

Enunciamos un resultado bien conocido que nos será de utilidad; se puede encontrar, por ejemplo, propuesto como ejercicio en [67, p. 154].

2.4.2 Lema. *Sea (Ω,Σ,μ) un espacio de medida finita y $1 \leqslant p < \infty$. Para cada partición finita π de Ω en conjuntos medibles, de medida positiva y dos a dos disjuntos, definimos el operador $P_\pi : L_p(\mu) \longrightarrow L_p(\mu)$ por*

$$P_\pi f = \sum_{A\in\pi}\left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A f(t)\,d\mu(t)\right)\chi_A \qquad \big(f\in L_p(\mu)\big).$$

Entonces P_π es una proyección contractiva y, si convertimos al conjunto de todas las particiones π del tipo descrito en un conjunto dirigido vía refinamiento, se tiene que

$$\lim_\pi \|P_\pi f - f\|_p = 0$$

para cada $f\in L_p(\mu)$.

Observemos que la imagen de la proyección P_π del lema anterior, que denotaremos V_π, está formada por las funciones de Ω en $\mathbb{K}$ que son constantes en cada uno de los conjuntos de la partición π, luego es isométricamente isomorfa a ℓ_p^m, donde m es el número de conjuntos que forman la partición π.

Demostración del apartado (i) del Teorema 2.4.1. Observamos en primer lugar que podemos reducir la demostración al caso en que (Ω, Σ, μ) sea un espacio de medida finita, pues si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finita, se puede construir una medida $\widetilde{\mu}$ finita sobre (Ω, Σ) de modo que $L_p(\mu)$ y $L_p(\widetilde{\mu})$ sean isométricamente isomorfos (véase [33, Proposition 1.6.1] por ejemplo) y se tendrá $n(L_p(\mu)) = n(L_p(\widetilde{\mu}))$. Suponemos entonces que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finita y consideramos $T \in L(L_p(\mu))$ un operador arbitrario de norma uno. Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $f_0 \in S_{L_p(\mu)}$ de modo que $\|Tf_0\|_p > 1 - \varepsilon$. El Lema 2.4.2 nos dice que $\lim_\pi \|P_\pi f_0 - f_0\|_p = 0$, luego podemos encontrar una partición π_0 de Ω tal que $\|T(P_{\pi_0} f_0)\|_p > 1 - \varepsilon$. Usando de nuevo el Lema 2.4.2, encontramos otra partición π de Ω, más fina que π_0, verificando que

$$\|P_\pi T(P_{\pi_0} f_0)\|_p > 1 - \varepsilon.$$

Definimos el operador $S \in L(V_\pi)$ por

$$Sf = P_\pi(Tf) \qquad \big(f \in V_\pi\big)$$

y comprobamos, usando que $V_{\pi_0} \subseteq V_\pi$, que

$$\|S\| \geqslant \|S(P_{\pi_0} f_0)\|_p = \|P_\pi T(P_{\pi_0} f_0)\|_p > 1 - \varepsilon.$$

Por tanto, utilizando que V_π es isométrico a ℓ_p^m para algún $m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$v(S) \geqslant n(V_\pi)\|S\| \geqslant \inf\{n(\ell_p^m) \ : \ m \in \mathbb{N}\}(1 - \varepsilon). \tag{2.27}$$

Si ahora tomamos $(f, x^*) \in \Pi(V_\pi)$ tal que $|x^*(Sf)| > v(S) - \varepsilon$, utilizando que $\|P_\pi^*\| = 1$ y que $(P_\pi^* x^*)(f) = x^*(f) = 1$, obtenemos que

$$v(T) \geqslant |(P_\pi^* x^*)(Tf)| = |x^*(Sf)| > v(S) - \varepsilon.$$

Por tanto, usando (2.27), se tiene que

$$v(T) \geqslant \inf\{n(\ell_p) \ : \ m \in \mathbb{N}\}(1 - \varepsilon) - \varepsilon,$$

lo que acaba la demostración sin más que hacer tender ε a cero. $\square$

Teniendo en cuenta que el índice numérico de un espacio de Banach es menor o igual que el de cualquier sumando absoluto suyo gracias a [86, Proposición 1], podemos mejorar la información anterior en el caso de $n(\ell_p)$. En efecto, como para cada número natural m podemos escribir

$$\ell_p = \ell_p^{m+1} \oplus_p \ell_p \qquad \text{y} \qquad \ell_p^{m+1} = \ell_p^m \oplus_p \mathbb{R},$$

obtenemos que

$$n(\ell_p) \leqslant n(\ell_p^{m+1}) \leqslant n(\ell_p^m).$$

De lo anterior se deduce inmediatamente que

$$n(\ell_p) \leqslant \inf\{n(\ell_p^m) \ : \ m \in \mathbb{N}\} = \lim_{m\to\infty} n(\ell_p^m).$$

Este razonamiento y la afirmación (i) del Teorema 2.4.1 acaban la demostración de la afirmación (ii) de dicho teorema.

Para comprobar la veracidad de (iii) en caso complejo basta recordar el Teorema de Bohnenblust y Karlin. En caso real, dados $p \neq 2$ y $m \in \mathbb{N}$, observamos que el número de isometrías de ℓ_p^m es finito, luego el Teorema 2.3.6 nos dice que $n(\ell_p^m) > 0$. Finalmente, el grupo de isometrías de ℓ_p, que ya fue completamente determinado por S. Banach [13, pp. 108], es totalmente disconexo. Este hecho, junto con el Teorema 2.3.3, nos dice que el radio numérico es una norma en $L(\ell_p)$.

Para demostrar que $n(L_p[0,1]) = \lim_{m\to\infty} n(\ell_p^m)$, necesitaremos el siguiente resultado bien conocido, cuya demostración incluimos por complitud.

2.4.3 Lema. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ los espacios $L_p[0,1]$ y $[\oplus_{k=1}^m L_p[0,1]]_{\ell_p}$ son isométricamente isomorfos. Concretamente, el operador*

$$\Phi_m : L_p[0,1] \longrightarrow \big[\oplus_{k=1}^m L_p[0,1]\big]_{\ell_p}$$

dado por

$$[\Phi_m(f)]_k(t) = \frac{1}{m^{1/p}} f\left(\frac{k-1+t}{m}\right) \qquad \big(t \in [0,1],\ k = 1,\dots,m,\ f \in L_p[0,1]\big)$$

es una isometría sobreyectiva.

Demostración. Φ_m es claramente lineal. Para ver que es una isometría, tomamos $f \in L_p[0,1]$ y observamos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_m(f)\| &= \left(\sum_{k=1}^{m}\int_0^1 |(\Phi_m(f))_k(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m}\int_0^1 \frac{1}{m}\left|f\left(\frac{k-1+t}{m}\right)\right|^p dt\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{m}\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} |f(s)|^p ds\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds\right)^{1/p} = \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Comprobemos que Φ_m es sobreyectiva: dada $(f_1,\dots,f_m) \in \left[\oplus_{k=1}^m L_p[0,1]\right]_{\ell_p}$, basta considerar como preimagen por Φ_m la función $f \in L_p[0,1]$ dada por

$$f(t) = m^{1/p} f_k(mt-k+1) \qquad \left(t \in \left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right],\ k = 1,\dots,m.\right) \qquad \square$$

Demos ya la demostración del apartado (*iv*) del Teorema 2.4.1, que es independiente de la exhibida por E. Ed-dari y M. Khamsi en [45, Theorem 2.1].

Demostración del apartado (iv) del Teorema 2.4.1. Sólo nos queda probar la desigualdad $n(L_p[0,1]) \leqslant \lim\limits_{m\to\infty} n(\ell_p^m)$. Para ello, demostramos que $n\left(\left[\oplus_{k=1}^m L_p[0,1]\right]_{\ell_p}\right)$ es menor o igual que $n(\ell_p^m)$ para cada m natural y apelamos al Lema 2.4.3. Fijados $m \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{jk})_{m\times m}$ en $L(\ell_p^m)$, definimos el operador $T \in L\left(\left[\oplus_{k=1}^m L_p[0,1]\right]_{\ell_p}\right)$ mediante la fórmula

$$T(f_1,\dots,f_m) = \left(\sum_{k=1}^m a_{1k}f_k, \dots, \sum_{k=1}^m a_{mk}f_k\right) \qquad (f_k \in L_p[0,1],\ k = 1,\dots,m).$$

Se tiene entonces que $\|T\| = \|A\|$ y que $v(T) = v(A)$. En efecto, si las funciones

$f_1, \ldots, f_m \in L_p[0,1]$ verifican que $\|f_1\|_p^p + \cdots + \|f_m\|_p^p = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|T(f_1, \ldots, f_m)\|^p &= \left\| \sum_{k=1}^m a_{1k} f_k \right\|_p^p + \cdots + \left\| \sum_{k=1}^m a_{mk} f_k \right\|_p^p \\
&= \int_0^1 \left(\left| \sum_{k=1}^m a_{1k} f_k(t) \right|^p + \cdots + \left| \sum_{k=1}^m a_{mk} f_k(t) \right|^p \right) dt \\
&= \int_0^1 \|A(f_1(t), \ldots, f_m(t))\|_p^p \, dt \\
&\leqslant \|A\|^p \int_0^1 \|(f_1(t), \ldots, f_m(t))\|_p^p \, dt \\
&= \|A\|^p \left(\|f_1\|_p^p + \cdots + \|f_m\|_p^p \right) = \|A\|^p ;
\end{aligned}$$

la desigualdad contraria se obtiene tomando $f_k = x_k \, \chi_{[0,1]}$ para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, donde $(x_1, \ldots, x_m)$ es un punto de norma uno en el que A alcanza su norma. Para probar que $v(T) = v(A)$, tomamos

$$((f_1, \ldots, f_m), (g_1, \ldots, g_m)) \in \Pi \left(\left[\oplus_{k=1}^m L_p[0,1] \right]_{\ell_p} \right)$$

y calculamos

$$\begin{aligned}
&|(g_1, \ldots, g_m) T(f_1, \ldots, f_m)| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \int_0^1 \left| g_1(t) \left(\sum_{k=1}^m a_{1k} f_k(t) \right) + \cdots + g_m(t) \left(\sum_{k=1}^m a_{mk} f_k(t) \right) \right| dt \\
&\qquad = \int_0^1 |(g_1(t), \ldots, g_m(t)) A(f_1(t), \ldots, f_m(t))| \, dt \\
&\qquad \leqslant v(A) \int_0^1 \|(g_1(t), \ldots, g_m(t))\|_q \|(f_1(t), \ldots, f_m(t))\|_p \, dt \\
&\qquad = v(A),
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usa que $|g_k(t)| = |f_k(t)|^{p/q}$ para cada $k = 1, \ldots, m$ y casi todo $t \in [0,1]$. Tenemos pues que $v(T) \leqslant v(A)$; para obtener la igualdad basta tomar, para cada k, f_k y g_k las funciones constantemente iguales a x_k e y_k respectivamente, donde $(y_1, \ldots, y_m) \in S_{\ell_q^m}$ y $(x_1, \ldots, x_m) \in S_{\ell_p^m}$ verifican que

$$\sum_{k=1}^m y_k \, x_k = 1 \qquad \text{y} \qquad (y_1, \ldots, y_m) A(x_1, \ldots, x_m) = v(A). \qquad \square$$

Los resultados anteriores dejan bien clara la utilidad de calcular, o por lo menos de estimar, el índice numérico de ℓ_p^m. Parece lógico empezar calculando $n(\ell_p^2)$, y para ello, buscar un operador con norma uno que tenga radio numérico "pequeño". Si miramos en los ejemplos conocidos, nos encontramos con que radio y norma coinciden para todos los operadores en ℓ_1^2 y ℓ_∞^2, así que de aquí no vamos a poder obtener mucha información. Sin embargo, si nos fijamos en ℓ_2^2 podemos obtener algunos operadores destacados. Como ℓ_2^2 es un espacio de Hilbert, tenemos $n(\ell_2^2) = 0$ en caso real y $n(\ell_2^2) = 1/2$ en caso complejo. De hecho, en caso real el operador

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene claramente radio numérico cero, esto es, nos da el índice numérico de ℓ_2^2. A continuación vamos a estimar el índice numérico de ℓ_p^2 en función del radio numérico de U considerado como operador sobre ℓ_p^2. Para ello, necesitaremos una expresión adecuada del radio numérico de los operadores sobre ℓ_p^2 que tomamos de [42]. En primer lugar, observamos que para calcular el radio numérico de un operador es suficiente considerar los puntos de la esfera de ℓ_p^2 con primera coordenada mayor o igual que cero. Estos puntos se pueden parametrizar como

$$x_{t,z} = \left(\frac{1}{(1+t^p)^{1/p}}, \frac{tz}{(1+t^p)^{1/p}} \right) \qquad \big(t \geqslant 0,\ z \in \{-1,1\}\big)$$

y sus correspondientes estados se pueden parametrizar como sigue

$$x_{t,z}^* = \left(\frac{1}{(1+t^p)^{1/q}}, \frac{t^{p-1}z}{(1+t^p)^{1/q}} \right) \qquad \big(t \geqslant 0,\ z \in \{-1,1\}\big).$$

Dado un operador $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en $L(\ell_p^2)$, es inmediato comprobar que

$$x_{t,z}^*(Tx_{t,z}) = \frac{a + btz + ct^{p-1}z + dt^p}{1+t^p}$$

y, por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
v(T) &= \sup\left\{ \frac{\left|a + btz + ct^{p-1}z + dt^p\right|}{1+t^p} \ : \ t \geqslant 0,\ z \in \{-1,1\} \right\} \\
&= \sup\left\{ \frac{|a + dt^p| + \left|bt + ct^{p-1}\right|}{1+t^p} \ : \ t \geqslant 0 \right\} \\
&= \text{máx}\left\{ \max_{t\in[0,1]} \frac{|a + dt^p| + \left|bt + ct^{p-1}\right|}{1+t^p},\ \max_{t\in[0,1]} \frac{|d + at^p| + \left|ct + bt^{p-1}\right|}{1+t^p} \right\}.
\end{aligned}$$

En particular,

$$v(U) = \max_{t\in[0,1]} \frac{\left|t^{p-1} - t\right|}{1+t^p}.$$

Enunciamos lo demostrado en el siguiente lema.

2.4.4 Lema ([42, Lemma 3.2]). *Sea* $1 < p < \infty$, *y sea* $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *un operador en* $L(\ell_p^2)$ *(real). Entonces,*

$$v(T) = \text{máx}\left\{ \max_{t\in[0,1]} \frac{|a + dt^p| + \left|bt + ct^{p-1}\right|}{1+t^p},\ \max_{t\in[0,1]} \frac{|d + at^p| + \left|ct + bt^{p-1}\right|}{1+t^p} \right\}.$$

El siguiente resultado mejora sensiblemente la información dada en la afirmación (v) del Teorema 2.4.1.

2.4.5 Proposición. *Sea* $1 < p < \infty$. *En caso real, se tiene la siguiente cadena de desigualdades:*

$$\text{máx}\left\{ \frac{1}{2^{1/p}}, \frac{1}{2^{1/q}} \right\} v(U) \leqslant n(\ell_p^2) \leqslant v(U).$$

Demostración. Demostramos en primer lugar el resultado para $1 < p \leqslant 2$. Para ello, probamos que $\frac{1}{2^{1/q}} v(U) \leqslant n(\ell_p^2) \leqslant v(U)$. La segunda desigualdad es clara, ya que $\|U\| = 1$. Para demostrar la primera desigualdad, dado un operador arbitrario $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L(\ell_p^2)$, vamos a probar que

$$v(T) \geqslant \text{máx}\,\{|a|+|c|,|b|+|d|\}\,v(U) \quad \text{y} \quad \|T\| \leqslant 2^{1/q}\,\text{máx}\{|a|+|c|,|b|+|d|\},$$

de donde se deduce claramente el resultado. Estimamos primero la norma de T:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{(x,y)\in S_{\ell_p^2}} \|(ax+by,\, cx+dy)\|_p = \sup_{(x,y)\in S_{\ell_p^2}} \big(|ax+by|^p + |cx+dy|^p\big)^{1/p} \\
&\leqslant \sup_{(x,y)\in S_{\ell_p^2}} |ax+by| + |cx+dy| \leqslant \sup_{(x,y)\in S_{\ell_p^2}} (|a|+|c|)|x| + (|b|+|d|)|y| \\
&= \|(|a|+|c|,|b|+|d|)\|_q = \big((|a|+|c|)^q + (|b|+|d|)^q\big)^{1/q} \\
&\leqslant 2^{1/q}\,\text{máx}\{|a|+|c|,\ |b|+|d|\}.
\end{aligned}$$

Para demostrar que

$$v(T) \geqslant \text{máx}\,\{|a|+|c|,\ |b|+|d|\}\,v(U)$$

distinguimos dos casos. Suponemos en primer lugar que $|a|+|c| \geqslant |b|+|d|$ y, usando el Lema 2.4.4, obtenemos lo siguiente para cada $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
v(T) &\geqslant \frac{|a|-|d|t^p+|c|t^{p-1}-|b|t}{1+t^p} \\
&= (|a|+|c|)\,\frac{t^{p-1}-t}{1+t^p} + |a|\,\frac{1-t^{p-1}}{1+t^p} + \frac{|a|t+|c|t-|b|t-|d|t^p}{1+t^p} \\
&\geqslant (|a|+|c|)\,\frac{t^{p-1}-t}{1+t^p} + |a|\,\frac{1-t^{p-1}}{1+t^p} + (|a|+|c|-|b|-|d|)\,\frac{t}{1+t^p} \\
&\geqslant (|a|+|c|)\,\frac{t^{p-1}-t}{1+t^p} = \text{máx}\{|a|+|c|,\ |b|+|d|\}\,\frac{t^{p-1}-t}{1+t^p}.
\end{aligned}$$

Si por el contrario $|b| + |d| \geqslant |a| + |c|$, para cada $t \in [0,1]$ tenemos

$$\begin{aligned}
v(T) &\geqslant \frac{|d| - |a|t^p + |b|t^{p-1} - |c|t}{1+t^p} \\
&= (|b| + |d|)\,\frac{t^{p-1} - t}{1+t^p} + |d|\,\frac{1 - t^{p-1}}{1+t^p} + \frac{|b|t + |d|t - |c|t - |a|t^p}{1+t^p} \\
&\geqslant (|b| + |d|)\,\frac{t^{p-1} - t}{1+t^p} + |d|\,\frac{1 - t^{p-1}}{1+t^p} + (|b| + |d| - |a| - |c|)\,\frac{t}{1+t^p} \\
&\geqslant (|b| + |d|)\,\frac{t^{p-1} - t}{1+t^p} = \text{máx}\{|a| + |c|,\ |b| + |d|\}\,\frac{t^{p-1} - t}{1+t^p}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso, sin más que tomar supremo con $t \in [0,1]$, obtenemos que

$$v(T) \geqslant \text{máx}\{|a| + |c|,\ |b| + |d|\}\, v(U),$$

lo que acaba la prueba en el caso $1 < p \leqslant 2$. Si $2 \leqslant p < \infty$, basta tener en cuenta que entonces $1 < q \leqslant 2$ y que

$$n(\ell_p^2) = n\big((\ell_p^2)^*\big) = n(\ell_q^2)$$

para obtener el resultado. □

Obsérvese que la estimación dada por el resultado anterior empeora a medida que p se acerca a 2, pero en este caso sabemos que se da la igualdad $n(\ell_2^2) = v(U)$. Parece, por tanto, que la fuerza perdida en el resultado anterior se debe a un problema de método y, por lo que nosotros sabemos, la igualdad $v(U) = n(\ell_p^2)$ es perfectamente posible. Sería interesante determinar si esto es así.

Mucho más complicado aún se antoja el cálculo de $n(\ell_p^m)$ para dimensiones superiores. En este campo todavía queda mucho trabajo por hacer, aunque algunas estimaciones numéricas hechas con ordenador avalan la conjetura

$$n(\ell_p^m) = n(\ell_p^2) = v(U)$$

en caso real.

Comentamos a continuación la escasa información conocida acerca del índice numérico de ℓ_p^m para $p \neq 1, 2, \infty$ en caso complejo. Para ello, enunciamos el resultado análogo al Lema 2.4.4, que permite calcular de manera sencilla el radio numérico de algunos operadores en ℓ_p^m.

2.4.6 Lema ([42, Lemma 3.2]). *Sea* $1 < p < \infty$, *y sea* $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *un operador en* $L(\ell_p^2)$. *Entonces,*

$$v(T) = \text{máx}\left\{ \max_{\substack{t\in[0,1]\\ z\in\mathbb{T}}} \frac{\left|a + dt^p + zbt + \overline{z}ct^{p-1}\right|}{1+t^p},\ \max_{\substack{t\in[0,1]\\ z\in\mathbb{T}}} \frac{\left|d + at^p + \overline{z}ct + zbt^{p-1}\right|}{1+t^p} \right\}.$$

Con este resultado no resulta muy difícil comprobar que el operador

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisface que

$$v(S) = \frac{1}{p^{1/p}q^{1/q}},$$

esto, junto con el hecho de que $\|S\| = 1$, nos dice que $n(\ell_p^2) \leqslant \frac{1}{p^{1/p}q^{1/q}}$. Obsérvese que esta desigualdad es una igualdad cuando $p = 2$, con lo que parece razonable conjeturar que

$$n(\ell_p^2) = \frac{1}{p^{1/p}q^{1/q}}$$

y, más aún, que

$$n(\ell_p^m) = \frac{1}{p^{1/p}q^{1/q}}$$

en caso complejo.

2.5. Problemas abiertos

Vamos a comentar brevemente las cuestiones que quedan sin respuesta en nuestro estudio del índice numérico. La primera de ellas surge en el estudio del índice numérico de espacios de funciones débil*-continuas:

2.5.1 Problema. Sea K un espacio topológico compacto y de Hausdorff y sea X un espacio de Banach. ¿Se da la igualdad $n(X^*) = n(C_{\omega^*}(K, X^*))$?

En la Proposición 2.2.17 probamos la desigualdad $n(X^*) \leqslant n(C_{\omega^*}(K, X^*))$ cuando X es un espacio de Asplund o cuando el compacto K tiene un conjunto denso de puntos aislados, pero no parece fácil adaptar la demostración que allí damos al caso general. Por otro lado, las técnicas usadas en el Teorema 2.2.13 para demostrar que $n(C_{\omega^*}(K, X^*)) \leqslant n(X)$ pasan por utilizar operadores débil*-continuos en $L(X^*)$ y tampoco parece fácil trasladarlas a operadores arbitrarios en $L(X^*)$. Parece, por tanto, que habrá que desarrollar nuevas técnicas para probar la posible desigualdad $n(C_{\omega^*}(K, X^*)) \leqslant n(X^*)$.

El siguiente problema que planteamos está relacionado con el estudio de los espacios de Banach de dimensión finita con índice numérico cero (véase el Problema 2.3.13).

2.5.2 Problema. Dado $n \in \mathbb{N}$, ¿cuáles son las posibles dimensiones de $\mathcal{Z}(X)$ cuando movemos X entre los espacios de Banach reales de dimensión n?

Aunque este problema ya fue estudiado con detenimiento en la Sección 2.3, recordamos aquí los detalles principales. En primer lugar, el problema ya fue completamente resuelto para $\dim(X) = 2, 3, 4$ por H. Rosenthal en sus trabajos [118, 119]. En el caso de dimensión cinco, no se sabe si la dimensión de $\mathcal{Z}(X)$ puede tomar el valor 5. Resolver el problema en toda su generalidad parece harto complicado, pero un primer paso podría ser probar que si se da la desigualdad $\dim(\mathcal{Z}(X)) > \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$, entonces $\dim(\mathcal{Z}(X)) \geqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

El siguiente problema que planteamos, que ha estado latente desde los comienzos de la teoría, consiste en calcular el índice numérico de los espacios ℓ_p para $1 < p < \infty$ con $p \neq 2$. Gracias al Teorema 2.4.1, este problema quedará resuelto si se consigue dar respuesta a la siguiente cuestión, en apariencia más abordable.

2.5.3 Problema. Calcular el índice numérico de ℓ_p^m para cada número natural $m \geqslant 2$ y cada $1 < p < \infty$.

Como ya se comentó en la Sección 2.4, se sabe que $n(\ell_p^m) \leqslant n(\ell_p^2)$ para cada $m \geqslant 2$, que $n(\ell_p^m) \leqslant \frac{1}{p^{1/p}q^{1/q}}$ en caso complejo y que

$$\max\left\{\frac{1}{2^{1/p}}, \frac{1}{2^{1/q}}\right\} \max_{t\in[0,1]} \frac{|t^{p-1} - t|}{1 + t^p} \leqslant n(\ell_p^2) \leqslant \max_{t\in[0,1]} \frac{|t^{p-1} - t|}{1 + t^p}$$

en caso real. Un primer avance pasa por dar respuesta a la siguiente cuestión.

2.5.4 Problema. Determinar el índice numérico de ℓ_p^2 para $1 < p < \infty$.

Aunque no se determine totalmente el índice numérico de ℓ_p, sería interesante saber si el radio numérico es o no una norma equivalente a la norma usual de operadores en $L(\ell_p)$ (caso real), esto es:

2.5.5 Problema. ¿Es cierto que el índice numérico del espacio real ℓ_p es estrictamente positivo para todo $1 < p < \infty$, $p \neq 2$?

Como vimos en el apartado *(iii)* del Teorema 2.4.1, se sabe que el radio numérico es una norma en $L(\ell_p)$ si $p \neq 2$ queda, por tanto, determinar si es equivalente o no a la norma de operadores.

Capítulo 3

Igualdades de normas para operadores

3.1. Introducción

A principios de la década de los 70, J. Duncan, C. McGregor, J. Pryce y A. White observan en su trabajo pionero sobre índice numérico [42] que un operador T satisface $v(T) = \|T\|$ si, y sólo si, existe $\omega \in \mathbb{T}$ de modo que se verifica

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = 1 + \|T\|,$$

y demuestran este hecho utilizando que la igualdad $\sup \operatorname{Re} W(T) = \|T\|$ para un operador T equivale a que

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|. \tag{DE}$$

Esta última igualdad es conocida como *ecuación de Daugavet* en honor al matemático I. Daugavet, quien en 1963 [38] demostró que se verifica para todo operador compacto T en $C[0,1]$. Poco después, G. Lozanovskii prueba el mismo resultado para los operadores compactos en $L_1[0,1]$ y, gracias a las aportaciones de numerosos autores, la ecuación de Daugavet fue extendida en los años ochenta a los operadores débilmente compactos en $L_1(\mu)$ y $C(K)$, donde μ es una medida positiva sin átomos y K es un espacio topológico compacto perfecto [50, 68, 69]. En el artículo de D. Werner [125] se puede encontrar un acercamiento elemental a estos resultados.

Fue necesario esperar hasta 1991 para contar con nuevos espacios en los que la ecuación de Daugavet es verificada por todos los operadores compactos; concretamente, Y. Abramovich exhibió varios ejemplos en [2], como $L_1[0,1] \oplus_\infty L_1[0,1]$ y $L_\infty[0,1] \oplus_1 L_\infty[0,1]$. Poco después, P. Wojtaszyk [128] prueba que la clase de los espacios en los que todos los operadores compactos verifican (DE) es estable por ℓ_1- y ℓ_∞-sumas y que no contiene espacios con la propiedad de Radon-Nikodým ni, por tanto, espacios reflexivos. Estos resultados llevaron al estudio en la década de los noventa de la llamada propiedad de Daugavet, introducida en 1997 por V. Kadets, R. Shvidkoy, G. Sirotkin, y D. Werner [76, 77].

3.1.1 Definición. Un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Daugavet* (también diremos que X es un *espacio de Daugavet*) si todos los operadores de rango uno en X satisfacen (DE).

Comentemos que existen definiciones de la propiedad de Daugavet anteriores a la que nosotros damos. Concretamente, para P. Chauveheid [34] un espacio de Banach tiene la propiedad de Daugavet si todo operador compacto satisface (DE) y Y. Abramovich, C. Aliprantis y O. Burkinshaw [5] dan una definición análoga usando esta vez operadores débilmente compactos. No obstante, las tres definiciones son equivalentes.

3.1.2 Teorema ([121, Theorem 4]). *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Daugavet. Entonces,*

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|$$

para todo $T \in L(X)$ que no fije ninguna copia de ℓ_1 (en particular, para todo operador compacto o débilmente compacto en X).

Digamos también que es en los trabajos de V. Kadets, R. Shvidkoy, G. Sirotkin y D. Werner [76, 77] donde se inicia el estudio sistemático de esta propiedad.

La propiedad de Daugavet admite varias caracterizaciones geométricas que dan una idea de lo restrictiva que es.

3.1.3 Lema ([77, Lemma 2.2]). *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad de Daugavet.*

(ii) *Dados $x \in S_X$, $x^* \in B_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in S_X$ verificando que*

$$\operatorname{Re} x^*(y) \geqslant 1 - \varepsilon \qquad y \qquad \|x + y\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

(iii) *Dados $x \in S_X$, $x^* \in B_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y^* \in S_{X^*}$ verificando que*

$$\operatorname{Re} y^*(y) \geqslant 1 - \varepsilon \qquad y \qquad \|x^* + y^*\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

(iv) *Para cada $x \in S_X$ y cada $\varepsilon > 0$, el conjunto*

$$\overline{\text{co}}\left(B_X \setminus \left(x + (2-\varepsilon)B_X\right)\right)$$

coincide con B_X.

Aunque la propiedad de Daugavet tiene un marcado carácter isométrico, induce numerosas restricciones de tipo isomórfico sobre los espacios que la poseen. Por ejemplo, con el resultado anterior en mente, es claro que los espacios de Daugavet no pueden tener la propiedad de Radon-Nikodým ya que cualquier rebanada de su bola unidad tiene diámetro 2. Otros resultados de este tipo para espacios con la propiedad de Daugavet son la contención de ℓ_1 [77] y la ausencia de base incondicional [72] e, incluso, la imposibilidad de embeber un espacio de Daugavet en un espacio con base incondicional [77]. De hecho, si un espacio con la propiedad de Daugavet se embebe en una suma incondicional de espacios de Banach, entonces alguno de los sumandos contiene a ℓ_1 [121].

Se puede encontrar una buena introducción a la ecuación de Daugavet en los libros [3, 4] y referencias precisas sobre el desarrollo de la teoría aparecen en los artículos [77, 127]. Para resultados muy recientes, remitimos al lector interesado a [16, 20, 73, 78] y a las referencias que allí se dan.

Como ya hemos comentado, el hecho de que todos los operadores de rango uno verifiquen (DE) implica que el espacio no es reflexivo. No obstante, si se cambia la condición que aparece en la ecuación (DE) por una desigualdad conveniente, es posible que los operadores compactos en algunos espacios reflexivos la cumplan. De modo más preciso, se demuestra en [19, Theorem 2] (véase también [108, §9]) que para cada $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, existe una función $\psi_p : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ de modo que la desigualdad

$$\|\mathrm{Id} + T\| \geqslant 1 + \psi_p(\|T\|) \tag{3.1}$$

se verifica para cada operador compacto no nulo T en $L_p[0, 1]$. Este resultado no se puede obtener en $L_2[0, 1]$, ya que para cualquier proyección ortogonal de rango finito P se tiene que $\|\mathrm{Id} - P\| = 1$. K. Boyko y V. Kadets demuestran en [30] que si en (3.1) se toma la mejor ψ_p posible, entonces

$$\lim_{p \to 1^+} \psi_p(t) = t$$

para cada $t > 0$, generando la ecuación de Daugavet de forma natural como caso límite de ciertas desigualdades. Recientemente, T. Oikhberg ha establecido desigualdades análogas a (3.1) para los espacios "L_p no conmutativos" [101] y para algunos espacios de operadores [102]. Otros resultados en esta línea aparecen en el trabajo de M. Popov y B. Randrianantoanina [109], donde se dan algunos resultados relacionados con (3.1) en el ambiente de los espacios de Lorentz y, en el trabajo de M. Martín [88], quien analiza el caso en el que la función φ que aparece en la ecuación (3.1) es lineal.

Volviendo a la relación existente entre el rango numérico y la ecuación de Daugavet, ya hemos comentado que para un operador T se tiene $v(T) = \|T\|$ si, y sólo si, existe $\omega \in \mathbb{T}$ de modo que ωT satisface (DE) o, equivalentemente, si se verifica la igualdad

$$\max_{\omega \in \mathbb{T}} \|\mathrm{Id} + \omega T\| = 1 + \|T\|. \tag{aDE}$$

Ya en el año 1970, J. Duncan, C. McGregor, J. Pryce y A. White demuestran que (aDE) se verifica para cada operador lineal y continuo en $C(K)$ o $L_1(\mu)$, hecho que fue redescubierto y redemostrado en algunos trabajos de los años 80 y 90 como, por ejemplo, los debidos a Y. Abramovich [1], J. Holub [68] y K. Schmidt [120]. A pesar de esta estrecha relación, el rango numérico de operadores y la propiedad de Daugavet han mantenido caminos separados durante mucho tiempo. Recientemente han aparecido algunos artículos en los que se trasvasan técnicas de una teoría a la otra como, por ejemplo, [31] y [95]. M. Martín y T. Oikhberg llegan un poco más lejos en [94] y definen la llamada propiedad de Daugavet alternativa, que liga los espacios de Daugavet y aquellos que tienen índice numérico 1.

3.1.4 Definición. Un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Daugavet alternativa* si todo operador de rango uno $T \in L(X)$ satisface (aDE).

Es claro que la propiedad de Daugavet y el hecho de tener índice numérico uno son condiciones suficientes para que un espacio de Banach tenga la propiedad de Daugavet alternativa. Sin embargo, dicha propiedad es estrictamente más débil: el espacio $X = c_0 \oplus_\infty C([0,1], \ell_2)$ tiene la propiedad de Daugavet alternativa pero no es un espacio de Daugavet ni tiene índice numérico 1 [94, Example 3.2].

Los citados autores demuestran en [94] que si un espacio de Banach tiene la propiedad de Daugavet alternativa, entonces la ecuación (aDE) se satisface para los operadores débil compactos, estudian la estabilidad de la mencionada propiedad frente a c_0, l_1 y l_∞-sumas y caracterizan las C^*-álgebras con la propiedad de Daugavet alternativa. En un trabajo muy reciente, M. Martín [89] continúa con el estudio de la propiedad de Daugavet alternativa, dando caracterizaciones geométricas de esta propiedad para C*-álgebras y para preduales de álgebras de Von Neumann.

Como hemos pretendido recoger en este breve repaso histórico, la ecuación de Daugavet (DE) y algunas ecuaciones similares a ella han sido objeto de un intenso estudio desde hace algunos años. Nuestro objetivo en este capítulo es analizar si existen otras propiedades que, como la propiedad de Daugavet, se pueden formular exigiendo que todos los operadores de rango uno sobre un espacio de Banach verifiquen alguna igualdad parecida a la ecuación (DE). Si X es un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, cuando hablemos de un operador de rango uno sobre X nos referiremos, como es habitual, a un operador $\mathbb{K}$-lineal y continuo cuya imagen tiene dimensión 1 sobre $\mathbb{K}$. Comenzaremos nuestro estudio analizando qué ecuaciones de la forma

$$\|g(T)\| = f\big(\|T\|\big)$$

pueden ser verificadas por todo operador de rango uno T, donde $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función entera (en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se entiende que g es una función entera que toma valores reales en el eje real) y $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria. Demostraremos en la sección 3.3 que la única posibilidad no trivial es la ecuación de Daugavet. Continuaremos nuestro estudio considerando ecuaciones de la forma

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f\big(\|g(T)\|\big)$$

donde $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función entera y $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua. Veremos que si todos los operadores de rango uno en un espacio complejo X satisfacen una ecuación como la anterior en la que la función g verifica que $\operatorname{Re} g(0) \neq -\frac{1}{2}$, entonces X es un espacio de Daugavet. Si $\operatorname{Re} g(0) = -\frac{1}{2}$, aparecerá una familia de propiedades, todas estrictamente más débiles que la propiedad de Daugavet. En caso real, el análisis anterior sigue siendo válido cuando la función g es sobreyectiva y, en otro caso, aparecerán de forma natural dos posibles nuevas propiedades. Finalmente, dedicaremos la última parte del capítulo a analizar las nuevas propiedades que surgen de nuestro estudio.

3.2. Preliminares

En esta sección presentamos algunos resultados técnicos que resultarán útiles en nuestro estudio posterior y facilitarán la lectura de las secciones siguientes.

Comenzamos mostrando una sencilla propiedad de los espacios normados, consecuencia inmediata de la convexidad de la norma, de la que se deduce que si un operador satisface (DE) entonces también lo hace cualquier múltiplo positivo suyo. Dicha propiedad, bien conocida, aparece explícitamente enunciada en [5].

3.2.1 Lema ([5, Lemma 2.1]). *Si dos vectores u y v en un espacio normado verifican la igualdad*

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|,$$

entonces $\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\|$ para cualesquiera $\alpha, \beta \geqslant 0$.

Obtenemos como consecuencia el siguiente resultado, que usaremos profusamente a lo largo del capítulo, la mayoría de las veces sin mención explícita.

3.2.2 Corolario. *Si un operador T sobre un espacio de Banach verifica la ecuación de Daugavet entonces cualquier múltiplo positivo suyo también lo hace.*

El siguiente comentario es también totalmente rutinario.

3.2.3 Observación. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Daugavet y $a, b \in \mathbb{K}$. Entonces, para cualquier operador débilmente compacto $T \in L(X)$, se tiene que*

$$\|a\,\mathrm{Id} + b\,T\| = |a| + |b|\,\|T\|.$$

Nuestra segunda observación es que, para espacios complejos, la definición de la propiedad de Daugavet puede resultar un poco confusa, puesto que los operadores de rango uno se pueden interpretar de dos maneras distintas: por una parte, podemos considerar los operadores complejo-lineales cuya imagen tiene dimensión compleja 1 (esto es, operadores de la forma $x^* \otimes x$ con $x^* \in X^*$ y $x \in X$) y, por otra, los operadores lineales en $X_{\mathbb{R}}$ cuya imagen tiene dimensión real 1 (esto es, operadores de la forma $\operatorname{Re} x^* \otimes x$ con $\operatorname{Re} x^* \in (X_{\mathbb{R}})^*$ y $x \in X$). Pues bien, las dos posibles definiciones de la propiedad de Daugavet que se pueden escribir en caso complejo son equivalentes, como muestra la siguiente proposición.

3.2.4 Proposición. *Sea X un espacio de Banach complejo. Son equivalentes:*

- (i) *Todo operador de rango uno (real) en $X_{\mathbb{R}}$ verifica la ecuación* (DE).
- (ii) *Todo operador de rango uno (complejo) en X verifica la ecuación*(DE).

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ es consecuencia inmediata del Teorema 3.1.2, aunque damos una prueba directa por complitud. Para ello, fijamos un operador de rango uno complejo $T = x_0^* \otimes x_0$ con $\|x_0^*\| = \|x_0\| = 1$ y usamos la hipótesis para obtener que

$$\|\mathrm{Id} + \operatorname{Re} x_0^* \otimes x_0\| = 2.$$

Con esto, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in S_X$ verificando que

$$\|x + \operatorname{Re} x_0^*(x)x_0\| \geqslant 2 - \varepsilon$$

de donde deducimos que

$$|\operatorname{Re} x_0^*(x)| \geqslant 1 - \varepsilon \qquad \text{y, por tanto,} \qquad |\operatorname{Im} x_0^*(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ahora ya podemos concluir que

$$\|\mathrm{Id} + T\| \geqslant \|x + Tx\| \geqslant \|x + \operatorname{Re} x_0^*(x)x_0\| - \|i \operatorname{Im} x_0^*(x)x_0\| \geqslant 2 - 2\varepsilon.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y un operador de rango uno real $T = \operatorname{Re} x_0^* \otimes x_0$ con

$$\|\operatorname{Re} x_0^*\| = \|x_0^*\| = 1 = \|x_0\|$$

y utilizamos (ii) para obtener que $\|\mathrm{Id} + x_0^* \otimes x_0\| = 2$, de donde deducimos que existe $x \in S_X$ verificando que

$$\|x + x_0^*(x)x_0\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

Tomamos finalmente $\omega \in \mathbb{T}$ de modo que $\omega x_0^*(x) = |x_0^*(x)|$ y observamos que

$$x_0^*(\omega x) = \omega x_0^*(x) = \operatorname{Re} x_0^*(\omega x),$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Id} + T\| &= \|\mathrm{Id} + \operatorname{Re} x_0^* \otimes x_0 + \| \geqslant \|\omega x + \operatorname{Re} x_0^*(\omega x)x_0\| \\ &= \|\omega x + \omega x_0^*(x)x_0\| = \|x + x_0^*(x)x_0\| \geqslant 2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

La siguiente idea que queremos resaltar es que la propiedad de Daugavet implica obviamente que para cada operador de rango uno T, la norma de $\mathrm{Id} + T$ sólo depende de $\|T\|$. Más aún, se prueba sin dificultad que este hecho caracteriza la propiedad de Daugavet. Enunciamos un resultado un poco más general que utilizaremos en la siguiente sección.

3.2.5 Proposición. *Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ y sea $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{K}$ de modo que la igualdad*

$$\|a\,\mathrm{Id} + b\,T\| = f(\|T\|)$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces,

$$f(t) = |a| + |b|\,t$$

para todo $t \in \mathbb{R}_0^+$. En particular, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces X tiene la propiedad de Daugavet.

Demostración. En primer lugar, observamos que si $ab = 0$, el resultado es obviamente cierto, así que suponemos que $a \neq 0$, $b \neq 0$ y llamamos

$$\omega_0 = \frac{\overline{b}}{|b|}\frac{a}{|a|} \in \mathbb{T}.$$

En segundo lugar, tomamos $x_0 \in S_X$ y $x_0^* \in S_{X^*}$ con $x_0^*(x_0) = \omega_0$ y, para cada $t \in \mathbb{R}_0^+$, definimos el operador de rango uno $T_t = t x_0^* \otimes x_0$. Como $\|T_t\| = t$, la hipótesis nos da la siguiente igualdad:

$$f(t) = \|a\mathrm{Id} + b\,T_t\| \qquad (t \in \mathbb{R}_0^+),$$

que utilizamos para escribir

$$\begin{aligned} |a| + |b|\,t \geqslant f(t) &= \|a\mathrm{Id} + b\,T_t\| \geqslant \|a\,x_0 + bt\,\omega_0\,x_0\| \\ &= |a + b\,\omega_0 t|\,\|x_0\| = \left| a + b\frac{\overline{b}}{|b|}\frac{a}{|a|}\,t \right| \\ &= \left| a + |b|\frac{a}{|a|} t \right| = \left| \frac{a}{|a|} \right| (|a| + |b|\,t) = |a| + |b|\,t, \end{aligned}$$

lo que prueba que $f(t) = |a| + |b|\,t$.

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, utilizando lo anterior y la hipótesis obtenemos que

$$\|a\,\mathrm{Id} + b\,T\| = |a| + |b|\,\|T\|$$

para cada $T \in L(X)$ de rango uno, de donde deducimos que

$$\left\| \mathrm{Id} + \frac{b}{a} T \right\| = 1 + \left\| \frac{b}{a}\,T \right\|$$

para cada $T \in L(X)$ de rango uno o, equivalentemente, que

$$\|\mathrm{Id} + S\| = 1 + \|S\|$$

para cada operador de rango uno $S \in L(X)$. $\square$

La proposición anterior nos dice que para buscar nuevas ecuaciones similares a la ecuación de Daugavet debemos cambiar la expresión $\mathrm{Id} + T$ por otras funciones del operador T. Como ya hemos comentado en la introducción, vamos a estudiar ecuaciones de la forma

$$\|g(T)\| = f\big(\|T\|\big) \qquad \text{y} \qquad \|\mathrm{Id} + g(T)\| = f\big(\|g(T)\|\big)$$

donde g es una función que debe llevar operadores en operadores. Como pretendemos que g se pueda aplicar a cualquier operador de rango uno sobre cualquier espacio de Banach, parece razonable considerar una serie de potencias con radio de convergencia infinito, esto es, tomar una función entera $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ y definir

$$g(T) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$$

para todo operador $T \in L(X)$, donde $g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$ es el desarrollo en serie de potencias de g centrado en 0. Si g es una función en las condiciones anteriores, utilizaremos la siguiente notación:

$$\widetilde{g}(\zeta) = g(\zeta) - g(0) \qquad (\zeta \in \mathbb{K}).$$

El siguiente resultado, de demostración totalmente predecible, nos muestra cómo calcular $g(T)$ para cualquier operador de rango uno T.

3.2.6 Lema. *Sea $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ una función entera con desarrollo en serie de potencias*

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \qquad (\zeta \in \mathbb{K})$$

y sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Dados $x^* \in X^*$ y $x \in X$, escribimos $T = x^* \otimes x$ y $\alpha = x^*(x)$. Entonces, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$g(\lambda T) = \begin{cases} a_0 \mathrm{Id} + a_1 \lambda T & \text{si } \alpha = 0 \\ a_0 \mathrm{Id} + \frac{\widetilde{g}(\alpha\lambda)}{\alpha} T & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar, es inmediato comprobar que para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$(\lambda T)^k = \alpha^{k-1} \lambda^k T.$$

Gracias a esto, si $\alpha = 0$, tenemos que $T^2 = 0$ y el resultado se sigue de forma obvia. Si por el contrario $\alpha \neq 0$, obtenemos que

$$\begin{aligned} g(\lambda T) &= a_0 \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \alpha^{k-1}\, \lambda^k\, T \\ &= a_0 \mathrm{Id} + \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \alpha^k \lambda^k \right) T = a_0 \mathrm{Id} + \frac{\widetilde{g}(\alpha\lambda)}{\alpha} T. \end{aligned}$$ □

Acabamos la sección con una obvia observación.

3.2.7 Observación. *Si X es un espacio de Banach con $\dim(X) \geqslant 2$ y $T \in L(X)$ es un operador de rango uno, entonces $\|g(T)\| \geqslant |g(0)|$.* En efecto, el Lema 3.2.6 nos dice que $\widetilde{g}(S)$ es un operador de rango uno y, como $\dim(X) \geqslant 2$, podemos encontrar $y \in S_X$ de modo que $[\widetilde{g}(S)](y) = 0$, luego

$$\|g(S)\| \geqslant \big\|g(0)y + [\widetilde{g}(S)](y)\big\| = |g(0)|.$$

3.3. Igualdades del tipo $\|g(T)\| = f(\|T\|)$

En esta sección vamos a estudiar qué ecuaciones de la forma

$$\|g(T)\| = f\big(\|T\|\big) \tag{3.2}$$

pueden ser válidas para todos los operadores de rango uno T en un espacio de Banach, donde $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función entera y $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función arbitraria. Nuestro objetivo es demostrar que la única posibilidad no trivial en espacios de Banach de dimensión mayor o igual que dos es la propiedad de Daugavet. Comenzamos demostrando que g ha de ser necesariamente un polinomio de grado menor o igual que 1.

3.3.1 Teorema. *Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ con $\dim(X) \geqslant 2$, sea $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria y sea $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ una función entera. Supongamos que la igualdad*

$$\|g(T)\| = f(\|T\|)$$

se cumple para todo operador de rango uno $T \in L(X)$*. Entonces, existen* $a, b \in \mathbb{K}$ *de modo que*

$$g(\zeta) = a + b\,\zeta \qquad (\zeta \in \mathbb{K}).$$

Demostración. Sea $g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$ el desarrollo en serie de potencias de g centrado en 0. Dado $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leqslant 1$, tomamos $x_\alpha \in S_X$ y $x_\alpha^* \in S_{X^*}$ tales que $x_\alpha^*(x_\alpha) = \alpha$ (aquí es donde utilizamos que $\dim(X) \geqslant 2$), definimos el operador de rango uno $T_\alpha = x_\alpha^* \otimes x_\alpha$ y usamos el Lema 3.2.6 para obtener que

$$g(\lambda T_0) = a_0 \mathrm{Id} + a_1 \lambda\, T_0 \qquad \text{y} \qquad g(\lambda T_\alpha) = a_0 \mathrm{Id} + \frac{1}{\alpha} \widetilde{g}(\lambda \alpha)\, T_\alpha \quad (\alpha \neq 0)$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Deducimos inmediatamente que

$$f(|\lambda|) = \|g(\lambda T_0)\| = \|a_0 \mathrm{Id} + a_1 \lambda T_0\|$$

y

$$f(|\lambda|) = \|g(\lambda T_\alpha)\| = \left\| a_0 \mathrm{Id} + \frac{1}{\alpha} \widetilde{g}(\lambda \alpha) T_\alpha \right\|,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, luego

$$\left\| a_0 \mathrm{Id} + \frac{1}{\alpha} \widetilde{g}(\lambda \alpha) T_\alpha \right\| = \|a_0 \mathrm{Id} + a_1 \lambda T_0\| \qquad (\lambda \in \mathbb{K},\ 0 < |\alpha| \leqslant 1). \tag{3.3}$$

En este punto separamos la demostración del caso complejo de la del caso real. En caso complejo es suficiente utilizar la igualdad (3.3) para $\alpha = 1$ y la desigualdad triangular para obtener que

$$|\widetilde{g}(\lambda)| \leqslant 2|a_1| + |a_1||\lambda| \qquad (\lambda \in \mathbb{C}), \tag{3.4}$$

de donde deducimos que $\widetilde{g}$ es un polinomio de grado uno sin más que acudir a las desigualdades de Cauchy (véase [35, §IV.3 Exercise 1, pp. 80] o [59, Theorem 3.4.4], por ejemplo), lo que acaba la prueba en este caso.

Es claro que en caso real la desigualdad (3.4) no nos garantiza que $\widetilde{g}$ sea un polinomio de grado uno (piénsese en las funciones seno o coseno) y, por tanto, hemos de utilizar toda la información obtenida en (3.3). Sin más que aplicar la desigualdad triangular, de dicha ecuación obtenemos que

$$\left|\frac{\widetilde{g}(\lambda\alpha)}{\alpha}\right| - |a_0| \leqslant |a_0| + |a_1|\,|\lambda| \qquad \text{y} \qquad |a_1|\,|\lambda| - |a_0| \leqslant \left|\frac{\widetilde{g}(\lambda\alpha)}{\alpha}\right| + |a_0|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $\alpha \in [-1,1] \setminus \{0\}$, de donde deducimos que

$$\left|\left|\frac{\widetilde{g}(\lambda\alpha)}{\alpha}\right| - |a_1|\,|\lambda|\right| \leqslant 2|a_0| \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ \alpha \in [-1,1] \setminus \{0\}).$$

Ahora, para cualquier $t \in]1,+\infty[$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$, utilizamos la desigualdad anterior con $\lambda = t^k$ y $\alpha = \frac{1}{t^{k-1}}$ para obtener que

$$\big||\widetilde{g}(t)| - t\,|a_1|\big| \leqslant \frac{2|a_0|}{t^{k-1}}$$

y tomando límite $k \longrightarrow \infty$, deducimos que

$$|\widetilde{g}(t)| = |a_1|\,t \qquad \big(t \in]1,+\infty[\big).$$

Finalmente, la igualdad anterior junto con un simple argumento de continuidad nos permite asegurar que $\widetilde{g}$ coincide con un polinomio de grado uno en el intervalo $]1,+\infty[$ y lo mismo pasa en todo $\mathbb{R}$ gracias a la analiticidad de $\widetilde{g}$. □

El siguiente corolario recopila la información obtenida en la Proposición 3.2.4 y el Teorema 3.3.1.

3.3.2 Corolario. *Sea X un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ con $\dim(X) \geqslant 2$, sea $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria y sea $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ una función entera. Supongamos que la igualdad*

$$\|g(T)\| = f(\|T\|)$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces, se da una de las siguientes posibilidades:

a) g es una función constante (caso trivial).
b) Existe $b \in \mathbb{K}$ de modo que $g(\zeta) = b\,\zeta$ para todo $\zeta \in \mathbb{K}$ (caso trivial).
c) Existen escalares no nulos $a, b \in \mathbb{K}$ de modo que $g(\zeta) = a + b\,\zeta$ para todo $\zeta \in \mathbb{K}$ y X tiene la propiedad de Daugavet.

3.4. Igualdades del tipo $\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$

Siguiendo con la búsqueda de propiedades similares a la propiedad de Daugavet, nos planteamos ahora estudiar cuándo una igualdad del tipo

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|), \tag{3.5}$$

donde $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es una función entera y $f : [|g(0)|, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, puede cumplirse para todo operador de rango uno en un espacio de Banach. La primera observación que debemos hacer, totalmente evidente, es que si un espacio tiene la propiedad de Daugavet, entonces todos los operadores de rango uno satisfacen (3.5) si tomamos las funciones $g(\zeta) = \zeta$ y $f(t) = 1 + t$. La segunda observación, también sencilla, es que esto mismo ocurre para cualquier función entera g sin más que tomar una función f conveniente.

3.4.1 Observación. *Sea X un espacio de Banach real o complejo con la propiedad de Daugavet. Entonces, la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = |1 + g(0)| - |g(0)| + \|g(T)\|$$

es cierta para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y toda función entera $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$. En efecto, el Lema 3.2.6 nos dice que $\widetilde{g}(T)$ es un operador de rango uno siempre que lo sea T, luego podemos usar la Observación 3.2.3 para escribir

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Id} + g(T)\| &= \|\mathrm{Id} + g(0)\,\mathrm{Id} + \widetilde{g}(T)\| = |1 + g(0)| + \|\widetilde{g}(T)\| \\
&= \big(|1 + g(0)| - |g(0)|\big) + \big(|g(0)| + \|\widetilde{g}(T)\|\big) \\
&= |1 + g(0)| - |g(0)| + \|g(0)\,\mathrm{Id} + \widetilde{g}(T)\| \\
&= |1 + g(0)| - |g(0)| + \|g(T)\|.
\end{aligned}$$

Por tanto, en esta sección nuestro objetivo no es determinar la forma concreta de la función g, sino limitar el número de propiedades del tipo (3.5) que se pueden verificar en un espacio de Banach. Como se verá, el hecho de que la función g sea sobreyectiva jugará un papel fundamental en nuestro estudio. Es por esto que separamos el caso real del caso complejo, pues en este último la sobreyectividad de g viene garantizada (salvo para, eventualmente, un valor) por el Teorema de Picard.

3.4.1. Caso complejo

En este caso, podemos cambiar g en nuestra igualdad por un polinomio de grado uno.

3.4.2 Teorema. *Sea X un espacio de Banach complejo de dimensión mayor o igual que 2, $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función entera no constante y $f : [|g(0)|, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces, también se verifica que

$$\|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T\| = |1 + g(0)| - |g(0)| + \|g(0)\mathrm{Id} + T\|$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$.

Demostración. En un primer paso vamos a probar que la igualdad

$$\|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T\| = f\big(\|g(0)\mathrm{Id} + T\|\big) \tag{3.6}$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Para ello, fijamos un operador $T = x^* \otimes x$ con $x \in X$, $x^* \in X^*$ y $x^*(x) \neq 0$ y utilizamos el Teorema de Picard para encontrar (exceptuando, eventualmente, un valor $x^*(x) = \alpha_0$) un número $\xi \in \mathbb{C}$ de modo que $\widetilde{g}(\xi) = x^*(x)$. Utilizamos ahora el Lema 3.2.6 para el operador $\frac{\xi}{x^*(x)}T$ y obtenemos que

$$g\left(\tfrac{\xi}{x^*(x)}T\right) = g(0)\mathrm{Id} + \frac{\widetilde{g}(\xi)}{x^*(x)}T = g(0)\mathrm{Id} + T$$

y usando la hipótesis deducimos que

$$\|\mathrm{Id} + g(0)\mathrm{Id} + T\| = \left\|\mathrm{Id} + g\left(\tfrac{\xi}{x^*(x)}T\right)\right\| = f\left(\left\|g\left(\tfrac{\xi}{x^*(x)}T\right)\right\|\right) = f\left(\|g(0)\mathrm{Id} + T\|\right).$$

Para acabar la prueba de (3.6) basta observar que los casos en los que $x^*(x) = 0$ y $x^*(x) = \alpha_0$ se deducen de lo anterior y de la continuidad de f.

La segunda parte de la demostración consiste en comprobar que

$$f(t) = |1 + g(0)| - |g(0)| + t \qquad \big(t \geqslant |g(0)|\big).$$

Para ello, distinguimos dos casos. Suponemos en primer lugar que $g(0) = -1$, tomamos $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ tales que $x^*(x) = 1$ y, para cada $t \geqslant 1$, definimos el operador $T_t := (1 - t)x^* \otimes x$. Es inmediato comprobar que

$$\|T_t\| = t - 1 \qquad \text{y} \qquad \|-\mathrm{Id} + T_t\| = t,$$

luego la igualdad (3.6) nos dice que $f(t) = t - 1$, lo que concluye la demostración en este caso.

Si por el contrario $g(0) \neq -1$, tomamos $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ tales que $x^*(x) = 1$ y, para cada $t \geqslant |g(0)|$, definimos el operador

$$T_t := \frac{1 + g(0)}{|1 + g(0)|}\big(t - |g(0)|\big)\, x^* \otimes x$$

y observamos que

$$\|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T_t\| = |1 + g(0)| + t - |g(0)|.$$

En efecto, la desigualdad $\|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T_t\| \leqslant |1 + g(0)| + t - |g(0)|$ es obvia, y la otra se consigue mediante la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T_t\| &\geqslant \|x\| \left|(1 + g(0)) + \frac{1 + g(0)}{|1 + g(0)|}(t - |g(0)|)\right| \\ &= |1 + g(0)| + t - |g(0)|.\end{aligned}$$

Por tanto, utilizando (3.6) tenemos que

$$f\big(\|g(0)\mathrm{Id} + T_t\|\big) = |1 + g(0)| + t - |g(0)| \tag{3.7}$$

y la demostración quedará terminada si somos capaces de probar que

$$\|g(0)\mathrm{Id} + T_t\| = t.$$

Para ello, observamos que

$$\|g(0)\mathrm{Id} + T_t\| \leqslant |g(0)| + t - |g(0)| = t$$

y que la desigualdad anterior se convierte trivialmente en una igualdad cuando $g(0) = 0$. Podemos asumir entonces que $g(0) \neq 0$ y lo que nos queda por demostrar es que

$$\|g(0)\mathrm{Id} + T_t\| \geqslant t.$$

Con este propósito, definimos el operador

$$S_t := \frac{g(0)}{|g(0)|}\big(\|g(0)\mathrm{Id} + T_t\| - |g(0)|\big)\, x^* \otimes x$$

y observamos, por una parte, que

$$\|g(0)\mathrm{Id} + S_t\| \leqslant |g(0)| + \|g(0)\mathrm{Id} + T_t\| - |g(0)| = \|g(0)\mathrm{Id} + T_t\|$$

y, por otra, que

$$\begin{aligned}\|g(0)\mathrm{Id} + S_t\| &\geqslant \|x\| \left| g(0) + \frac{g(0)}{|g(0)|}\left(\|g(0)\mathrm{Id} + T_t\| - |g(0)|\right)\right| \\ &= |g(0)| + \|g(0)\mathrm{Id} + T_t\| - |g(0)| = \|g(0)\mathrm{Id} + T_t\|,\end{aligned}$$

luego

$$\|g(0)\mathrm{Id} + S_t\| = \|g(0)\mathrm{Id} + T_t\|.$$

Usando lo anterior, (3.6) y (3.7), obtenemos que

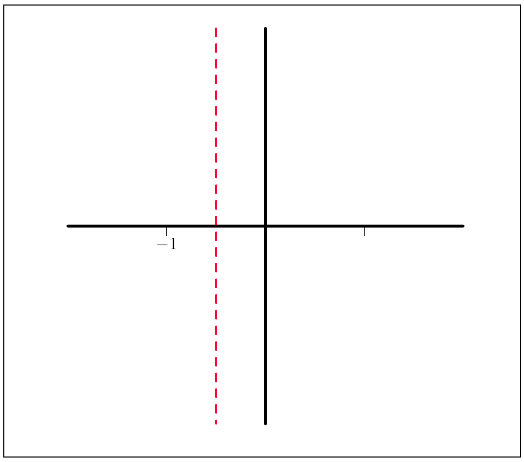
$$\begin{aligned}|1+g(0)|+t-|g(0)| &= f\big(\|g(0)\mathrm{Id}+T_t\|\big)\\ &= f\big(\|g(0)\mathrm{Id}+S_t\|\big)\\ &= \|(1+g(0))\mathrm{Id}+S_t\|\\ &\leqslant |1+g(0)|+\|S_t\|\\ &= |1+g(0)|+\|g(0)\mathrm{Id}+T_t\|-|g(0)|,\end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$t \leqslant \|g(0)\mathrm{Id}+T_t\|,$$

lo que concluye la demostración. □

Observamos que el teorema anterior nos proporciona mucha información en algunos casos: por ejemplo, cuando $g(0)=0$, nos dice que el espacio que estamos considerando tiene la propiedad de Daugavet y lo mismo pasa si $g(0)=-1$. Parece lógico plantearse si hay más valores de $g(0)$ para los que ocurre esto mismo. Si se analiza con un poco de detenimiento la ecuación que aparece en la tesis del Teorema 3.4.2, se intuye que puede haber un cambio de comportamiento cuando $|1+g(0)|=|g(0)|$, o lo que es lo mismo, cuando $\operatorname{Re} g(0) = -\frac{1}{2}$.



En el siguiente teorema demostramos que si $\operatorname{Re} g(0) \neq -\frac{1}{2}$ entonces el espacio que estamos considerando tiene la propiedad de Daugavet.

3.4.3 Teorema. *Sea X un espacio de Banach complejo con* $\dim(X) \geqslant 2$. *Supongamos que existen una función entera no constante $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con* $\operatorname{Re} g(0) \neq -\frac{1}{2}$ *y una función continua $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces, X tiene la propiedad de Daugavet.

Demostración. Comenzamos con el caso en el que $\operatorname{Re} g(0) > -\frac{1}{2}$. Fijamos $\omega, \xi \in \mathbb{T}$ tales que

$$\omega\,(1 + g(0)) = |1 + g(0)| \qquad \text{y} \qquad \xi\, g(0) = |g(0)|$$

y utilizamos el Teorema 3.4.2 para obtener que

$$\|\mathrm{Id} + g(0)\mathrm{Id} + T\| = |1 + g(0)| - |g(0)| + \|g(0)\mathrm{Id} + T\| \tag{3.8}$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Observamos ahora que el número $\alpha := |1 + g(0)| - |g(0)|$ es positivo, con lo que podemos dividir la ecuación anterior por α y obtenemos que

$$\left\| \tfrac{1+g(0)}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{1}{\alpha}\, T \right\| = 1 + \left\| \tfrac{g(0)}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{1}{\alpha}\, T \right\|.$$

Por otro lado, observamos que

$$\left\| \tfrac{1+g(0)}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{1}{\alpha}\, T \right\| = \left\| \tfrac{|1+g(0)|}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{\omega}{\alpha}\, T \right\| = \left\| \mathrm{Id} + \tfrac{|g(0)|}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{\omega}{\alpha}\, T \right\|$$

y

$$\left\| \tfrac{g(0)}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{1}{\alpha}\, T \right\| = \left\| \tfrac{|g(0)|}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{\xi}{\alpha}\, T \right\|,$$

luego

$$\left\| \mathrm{Id} + \tfrac{|g(0)|}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{\omega}{\alpha}\, T \right\| = 1 + \left\| \tfrac{|g(0)|}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{\xi}{\alpha}\, T \right\|$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$, o lo que es lo mismo,

$$\left\| \mathrm{Id} + \tfrac{|g(0)|}{\alpha}\, \mathrm{Id} + T \right\| = 1 + \left\| \tfrac{|g(0)|}{\alpha}\, \mathrm{Id} + \tfrac{\xi}{\omega}\, T \right\| \tag{3.9}$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. De esto se deduce inmediatamente que
$$\left\|\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + T\right\| \geqslant \left\|\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + \tfrac{\xi}{\omega}\,T\right\|$$
y, de hecho, esto es una igualdad para todo T. En efecto, fijados T y $n \in \mathbb{N}$, aplicamos la desigualdad anterior n veces y obtenemos que
$$\left\|\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + T\right\| \geqslant \left\|\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + \tfrac{\xi}{\omega}\,T\right\| \geqslant \cdots \geqslant \left\|\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + \left(\tfrac{\xi}{\omega}\right)^{n}\,T\right\|.$$
Tenemos ahora dos posibilidades: si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{n_0} = 1$, la desigualdad anterior nos da obviamente la igualdad deseada; en otro caso, podemos encontrar una sucesión parcial de $\left\{(\xi/\omega)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergiendo a 1 y esto, junto con la desigualdad anterior, nos dice que
$$\left\|\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + T\right\| = \left\|\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + \tfrac{\xi}{\omega}\,T\right\|.$$
Utilizamos la igualdad que acabamos de probar y la igualdad (3.9), y obtenemos que
$$\left\|\mathrm{Id} + \tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + T\right\| = 1 + \left\|\ \tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + T\right\|$$
para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y, gracias al Corolario 3.2.2, deducimos que
$$\left\|\mathrm{Id} + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + T\right)\right\| = 1 + \left\|\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{|g(0)|}{\alpha}\,\mathrm{Id} + T\right)\right\|$$
para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, fijamos un operador de rango uno $S \in L(X)$, utilizamos la igualdad anterior para nS obteniendo que
$$\left\|\mathrm{Id} + S + \tfrac{|g(0)|}{n\alpha}\,\mathrm{Id}\right\| = 1 + \left\|\tfrac{|g(0)|}{n\alpha}\,\mathrm{Id} + S\right\|$$
y, tomando límite $n \to \infty$, deducimos que
$$\|\mathrm{Id} + S\| = 1 + \|S\|.$$

Cuando $\mathrm{Re}\, g(0) < -\frac{1}{2}$, basta reescribir la ecuación (3.8) en la forma
$$\|g(0)\mathrm{Id} + T\| = |g(0)| - |1 + g(0)| + \|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T\|$$
y continuar la demostración de modo análogo al caso anterior. □

Si $\operatorname{Re} g(0) = -\frac{1}{2}$ la demostración anterior no es válida y, de hecho, la tesis del Teorema 3.4.3 deja de ser cierta. Para explicar esta última afirmación observamos que cuando consideramos las funciones $g(\zeta) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\zeta$ y $f(t) = t$, la ecuación que obtenemos es

$$\left\| \tfrac{1}{2}\mathrm{Id} + \tfrac{1}{2}T \right\| = \left\| -\tfrac{1}{2}\mathrm{Id} + \tfrac{1}{2}T \right\|$$

que es obviamente equivalente a

$$\|\mathrm{Id} + T\| = \|\mathrm{Id} - T\|.$$

En el siguiente ejemplo presentamos un espacio de Banach X en el que se verifica esta última ecuación para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y que, sin embargo, no tiene la propiedad de Daugavet.

3.4.4 Ejemplo. *El espacio de Banach (real o complejo) $X = C[0,1] \oplus_2 C[0,1]$ no tiene la propiedad de Daugavet; no obstante, la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\| \tag{3.10}$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $\omega \in \mathbb{T}$.

Demostración. X no tiene la propiedad de Daugavet gracias a [20, Corollary 5.4]. Para demostrar la segunda afirmación, basta ver que $\|\mathrm{Id} + \omega T\|^2 \geqslant \|\mathrm{Id} + T\|^2$, para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $\omega \in \mathbb{T}$. Para ello, fijamos $\omega \in \mathbb{T}$ y un operador de rango uno $T = x^* \otimes x$ en X y escribimos $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ y $x = (x_1, x_2)$, donde x_1^*, $x_2^* \in C[0,1]^*$ y x_1, $x_2 \in C[0,1]$. Obsérvese que podemos suponer que

$$x_1^* = \mu_1 + \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j\, \delta_{r_j} \qquad x_1^* = \mu_2 + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j\, \delta_{s_j},$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{n_2} \in \mathbb{C}$, $r_1, \ldots, r_{n_1}$, $s_1, \ldots, s_{n_2} \in [0,1]$ y μ_1 y μ_2 son medidas no atómicas en $[0,1]$ (basta tener en cuenta que cualquier operador de rango uno se puede aproximar por operadores verificando la condición anterior y que el conjunto de los operadores de rango uno que satisfacen la ecuación (3.10) es cerrado).

En un segundo paso, fijamos $0 < \varepsilon < 1$ y tomamos $y = (y_1, y_2) \in S_X$ verificando que

$$\|y + Ty\|^2 = \|y_1 + x^*(y)x_1\|^2 + \|y_2 + x^*(y)x_2\|^2 \geqslant \|\mathrm{Id} + T\|^2 - \varepsilon. \tag{3.11}$$

Como x_1, x_2, y_1 e y_2 son funciones continuas y $[0,1]$ es perfecto, podemos encontrar intervalos abiertos Δ_1, Δ_2 de modo que

$$|y_i(t) + x^*(y)x_i(t)| \geqslant \|y_i + x^*(y)x_i\| - \varepsilon \qquad (t \in \Delta_i\,,\ i = 1,2) \tag{3.12}$$

y

$$\Delta_1 \cap \{r_j \ :\ j = 1,\dots,n_1\} = \varnothing \qquad \text{y} \qquad \Delta_2 \cap \{s_j \ :\ j = 1,\dots,n_2\} = \varnothing\,. \tag{3.13}$$

Utilizando que μ_1 y μ_2 no tienen átomos y reduciendo Δ_1 y Δ_2 si fuera necesario, podemos suponer que Δ_1 y Δ_2 también verifican que

$$|\mu_1(f)| < \|f\|\,\varepsilon \qquad \text{y} \qquad |\mu_2(g)| < \|g\|\,\varepsilon \tag{3.14}$$

para toda $f \in C[0,1]$ con soporte contenido en Δ_1 y toda $g \in C[0,1]$ con soporte contenido en Δ_2.

Ahora fijamos $t_1 \in \Delta_1$ y $t_2 \in \Delta_2$, construimos funciones continuas ϕ_i de $[0,1]$ en $[0,1]$ verificando que

$$\phi_i(t_i) = 1 \qquad \text{y} \qquad \phi_i([0,1] \setminus \Delta_i) = \{0\} \qquad (i = 1,2) \tag{3.15}$$

y definimos

$$\widetilde{y_i} := y_i\,(1 - \phi_i + \omega\,\phi_i) \qquad (i = 1,2)$$

que verifica $\widetilde{y_i}(t_i) = \omega\, y_i(t_i)$. Además, resulta sencillo comprobar que

$$|1 - \phi_i(t) + \omega\phi_i(t)| \leqslant 1 \qquad \big(t \in [0,1],\ i = 1,2\big),$$

luego $\|\widetilde{y_i}\| \leqslant \|y_i\|$, lo que implica que $\|\widetilde{y}\| = \|(\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2})\| \leqslant 1$ y, por tanto,

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\|^2 \geqslant \|\widetilde{y} + \omega T\widetilde{y}\|^2 = \|\widetilde{y_1} + \omega x^*(\widetilde{y})x_1\|^2 + \|\widetilde{y_2} + \omega x^*(\widetilde{y})x_2\|^2. \tag{3.16}$$

Por otra parte, se deduce inmediatamente de la definición de $\widetilde{y}_i$ que

$$y_i - \widetilde{y}_i = y_i\,\phi_i(1-\omega) \qquad (i = 1, 2)$$

y, usando (3.13), (3.14) y que el soporte de ϕ_i está contenido en Δ_i, obtenemos que

$$|x^*(y - \widetilde{y})| \leqslant |1-\omega|\,|x_1^*(y_1\,\phi_1)| + |1-\omega|\,|x_2^*(y_2\,\phi_2)| \leqslant 2\|x_1^*\|\,\varepsilon + 2\|x_2^*\|\,\varepsilon.$$

Utilizando ahora (3.12), hacemos la siguiente estimación para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{y}_i + \omega x^*(\widetilde{y})x_i\| &\geqslant \|\widetilde{y}_i + \omega x^*(y)x_i\| - |x^*(y-\widetilde{y})|\,\|x_i\| \\
&\geqslant |\widetilde{y}_i(t_i) + \omega x^*(y)x_i(t_i)| - 2\big(\|x_1^*\| + \|x_2^*\|\big)\,\|x_i\|\,\varepsilon \\
&= |y_i(t_i) + x^*(y)x_i(t_i)| - 2\big(\|x_1^*\| + \|x_2^*\|\big)\,\|x_i\|\,\varepsilon \\
&\geqslant \|y_i + x^*(y)x_i\| - \varepsilon - 2\big(\|x_1^*\| + \|x_2^*\|\big)\,\|x_i\|\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando (3.11) y (3.16) no resulta difícil encontrar una constante $K > 0$ (independiente de ε) de modo que

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\|^2 \geqslant \|\mathrm{Id} + T\|^2 - K\,\varepsilon,$$

lo que acaba la demostración. □

La aparición de la igualdad $\|\mathrm{Id} + \omega\,T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$ no es casual, de hecho, cuando $\operatorname{Re} g(0) = -\frac{1}{2}$ se puede demostrar que siempre se verifica una ecuación similar a la anterior.

3.4.5 Teorema. *Sea X un espacio de Banach complejo con $\dim(X) \geqslant 2$. Supongamos que existen una función entera no constante $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} g(0) = -\frac{1}{2}$ y una función continua $f : [|g(0)|, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, de modo que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces, existe un número complejo $\omega_0 \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ tal que la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + \omega_0 T\| = \|\mathrm{Id} + T\| \tag{3.17}$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Más aún, existe un subgrupo multiplicativo cerrado no trivial $A \subseteq \mathbb{T}$ tal que

$$\|\mathrm{Id} + \omega\, T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $\omega \in \mathbb{T}$.

Demostración. Utilizando el Teorema 3.4.2 obtenemos que

$$\|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T\| = \|g(0)\mathrm{Id} + T\|$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Por tanto, como $|1 + g(0)| = |g(0)|$, deducimos que existen números complejos $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ de modo que $\omega_1 \neq \omega_2$, $|\omega_1| = |\omega_2|$ y

$$\|\mathrm{Id} + \omega_1 T\| = \|\mathrm{Id} + \omega_2 T\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ o, equivalentemente, que existe $\omega_0 \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ tal que

$$\|\mathrm{Id} + \omega_0\, T\| = \|\mathrm{Id} + T\| \tag{3.18}$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$.

Para probar la última parte del teorema, basta observar que el conjunto de aquellos números complejos $\omega_0 \in \mathbb{T}$ para los que (3.18) es cierta tiene estructura de subgrupo multiplicativo cerrado de $\mathbb{T}$. □

El resultado anterior nos da una nueva familia de propiedades que se escriben en términos de una ecuación que involucra a los operadores de rango uno: si $A \subset \mathbb{T}$ es un subgrupo multiplicativo cerrado de $\mathbb{T}$, nos planteamos estudiar qué espacios de Banach complejos X verifican que

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $\omega \in A$. Gracias al Ejemplo 3.4.4 sabemos que todas estas propiedades son estrictamente más débiles que la propiedad de Daugavet. En la sección 3.5 analizaremos las consecuencias estructurales que implican sobre los espacios que las poseen.

3.4.2. Caso real

La situación en caso real no es, ni mucho menos, tan clara como en el caso complejo. Por una parte, la demostración del Teorema 3.4.2 sigue siendo válida si la función g es sobreyectiva, pues este hecho sustituye al Teorema de Picard y, salvado ese escollo, la demostración de los Teoremas 3.4.3 y 3.4.5 no depende del cuerpo.

3.4.6 Teorema. *Sea X un espacio de Banach real con $\dim(X) \geqslant 2$. Supongamos que existen una función entera sobreyectiva $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y una función continua $f : [|g(0)|, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces, la igualdad

$$\|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T\| = |1 + g(0)| - |g(0)| + \|g(0)\mathrm{Id} + T\|$$

se satisface para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Además, se tiene una de las dos siguientes posibilidades:

a) Si $g(0) \neq -\frac{1}{2}$, entonces X tiene la propiedad de Daugavet.
b) Si $g(0) = -\frac{1}{2}$, entonces se verifica

$$\|\mathrm{Id} - T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$.

Por otra parte, no sabemos lo que pasa cuando la función g no es sobreyectiva y podrían aparecer nuevas propiedades. En lo que queda de sección nos vamos a limitar a comentar cuál es la situación cuando consideramos dos casos especialmente sencillos:

$$g(t) = t^2 \qquad \text{y} \qquad g(t) = -t^2.$$

En el primer caso, es fácil comprobar que si la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = f(\|T^2\|)$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$, entonces

$$f(t) = 1 + t \qquad (t \in \mathbb{R}_0^+).$$

En efecto, si fijamos $t \geqslant 0$, $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ de modo que $x^*(x) = 1$, y tomamos $T_t = t^{1/2} x^* \otimes x$ obtenemos que $\|T_t^2\| = t$ y, por tanto,

$$1 + t \geqslant f(t) = \|\mathrm{Id} + T_t^2\| = \|\mathrm{Id} + t x^* \otimes x\| \geqslant \|x\|\,|1 + t| = 1 + t.$$

Esto nos lleva a plantearnos qué espacios de Banach X verifican que

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\| \tag{3.19}$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Obsérvese que la condición se verifica para $X = \mathbb{R}$ y para cualquier espacio de Banach con la propiedad de Daugavet.

En el segundo caso no somos capaces ni siquiera de obtener información sobre la función f. De hecho, no está muy claro qué propiedad será razonable enunciar en este caso, pues cuando tomamos como espacio el propio $\mathbb{R}$ tenemos que

$$|1 - t^2| = \max\{1 - t^2,\ t^2 - 1\} \qquad (t \in L(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R})$$

y una función f como la anterior no tiene sentido para espacios de dimensión mayor o igual que 2 (ya que en tal caso ocurre que $\|\mathrm{Id} - T^2\| \geqslant 1$ para todo operador de rango uno). Para mantener el espíritu de maximalidad de la ecuación de Daugavet, lo lógico parece considerar $f(t) = 1 + t$ y estudiar, por tanto, qué espacios de Banach X satisfacen que

$$\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\| \tag{3.20}$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Obsérvese que cualquier espacio de Banach con la propiedad de Daugavet es de este tipo.

Podría argumentar el lector, y no le faltaría razón, que la elección de las funciones g_1 y g_2 ha sido más o menos arbitraria y que, por tanto, las propiedades que acabamos de introducir podrían carecer de interés. En la siguiente sección veremos que estas propiedades están íntimamente ligadas con la propiedad de Daugavet y que ambas implican la propiedad de Daugavet alternativa.

3.5. Las nuevas propiedades

3.5.1. La ecuación $\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$

Nos planteamos en este apartado estudiar las nuevas propiedades que han surgido en los Teoremas 3.4.5 y 3.4.6. Dado un espacio de Banach X real o complejo y un subgrupo multiplicativo cerrado no trivial A de $\mathbb{T}$, queremos estudiar qué repercusiones tiene sobre el espacio X el hecho de que se verifique la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $\omega \in A$. Nuestro primer comentario, inmediato, es que esta propiedad pasa del dual de un espacio de Banach al espacio.

3.5.1 Observación. *Si en X^* todos los operadores de rango uno verifican la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

para todo ω en un subgrupo multiplicativo cerrado de $\mathbb{T}$, entonces lo mismo ocurre para todos los operadores de rango uno en X. En efecto, dado un operador de rango uno $T \in L(X)$, basta tener en cuenta que T^* es un operador de rango uno en X^* y que

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + \omega T^*\| = \|\mathrm{Id} + T^*\| = \|\mathrm{Id} + T\|.$$

Nuestro siguiente objetivo es probar que si un espacio de Banach real o complejo satisface cualquiera de las propiedades que estamos estudiando entonces no tiene la propiedad de Radon-Nikodým ni es un espacio de Asplund.

3.5.2 Proposición. *Sea X un espacio de Banach y sea A un subgrupo multiplicativo cerrado de $\mathbb{T}$. Supongamos que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

se verifica para todo de rango uno $T \in L(X)$ y para todo $\omega \in A$. Entonces, el diámetro de cualquier rebanada de B_X y de cualquier débil-rebanada de B_{X^*} es mayor o igual que*

$$2 - \inf\{|1 + \omega| \ : \ \omega \in A\}.$$

Demostración. Sea $S(B_X, x^*, \alpha)$ la rebanada determinada por $x^* \in S_{X^*}$ y $0 < \alpha < 1$. Dado $0 < \varepsilon < \alpha$ y $\omega \in \mathbb{T}$, tomamos $x \in S_X$ tal que $\operatorname{Re} x^*(x) > 1 - \varepsilon$, definimos el operador de rango uno $T = x^* \otimes x$ que verifica

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

y observamos que

$$\|\mathrm{Id} + T\| \geqslant \|x\| \, |1 + x^*(x)| \geqslant |1 + \operatorname{Re} x^*(x)| > 2 - \varepsilon,$$

luego podemos encontrar $y \in S_X$ de modo que

$$\|y + \omega x^*(y) x\| > 2 - \varepsilon.$$

Si tomamos $\xi \in \mathbb{T}$ de modo que $\xi x^*(y) = |x^*(y)|$, de la desigualdad anterior obtenemos que

$$\operatorname{Re} x^*(\xi y) = x^*(\xi y) = |x^*(y)| > 1 - \varepsilon$$

luego $\xi y \in S(B_X, x^*, \alpha)$. Hacemos ahora la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \|\xi y - x_0\| &= \big\|\xi y + \omega x^*(\xi y) x_0 - \omega x^*(\xi y) x_0 - x_0\big\| \\ &\geqslant \big\|\xi y + \omega x^*(\xi y) x_0\big\| - \big|1 + \omega x^*(\xi y)\big| > 2 - \varepsilon - \big|1 + \omega |x^*(y)|\big| \end{aligned}$$

y observamos que

$$\begin{aligned}\big|1+\omega|x^*(y)|\big| &\leqslant \big|1+\omega+\omega(|x^*(y)|-1)\big| \\ &\leqslant |1+\omega| + \big|1-|x^*(y)|\big| < |1+\omega|+\varepsilon,\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\|\xi y - x_0\| \geqslant 2 - 2\varepsilon - |1+\omega|,$$

lo que concluye la prueba sin más que hacer $\varepsilon \to 0$.

La demostración para débil*-rebanadas de B_{X^*} se hace de modo análogo. □

Es un hecho bien conocido que la bola unidad de un espacio de Banach X con la propiedad de Radon-Nikodým tiene abundantes puntos dientes y que la bola unidad del espacio dual de un espacio de Asplund tiene numerosos puntos débil*-dientes. Recordemos que $x_0 \in B_X$ es un *punto diente* de B_X si pertenece a rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeño. Si X es un espacio dual y las rebanadas se pueden tomar débil*-abiertas decimos que $x_0 \in B_X$ es un *punto débil*-diente*. En [29, 41] el lector puede encontrar un detallado estudio de estos conceptos.

3.5.3 Corolario. *Sea A un subgrupo multiplicativo cerrado no trivial de $\mathbb{T}$ y sea X un espacio de Banach de modo que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

se verifica para todo $T \in L(X)$ de rango uno y para todo $\omega \in A$. Entonces, X no tiene la propiedad de Radon-Nikodým ni es un espacio de Asplund.

En la siguiente proposición demostramos que las propiedades que estamos considerando en esta sección pasan a sumandos absolutos.

3.5.4 Proposición. *Sea A un subgrupo cerrado no trivial de $\mathbb{T}$ y sea X un espacio de Banach de modo que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $\omega \in A$. Si Y es un sumando absoluto de X con $\dim(Y) \geqslant 2$, entonces se verifica la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + \omega S\| = \|\mathrm{Id} + S\|$$

para todo operador de rango uno $S \in L(Y)$ y todo $\omega \in A$.

Demostración. Existe una norma absoluta $|\cdot|_a$ en $\mathbb{R}^2$ de modo que X se descompone como $X = Y \oplus_a Z$. Fijamos un operador de rango uno $S \in L(Y)$ y construimos $T \in L(X)$ mediante la fórmula

$$T(y,z) = (Sy, 0) \qquad \big(y \in Y, z \in Z\big),$$

que obviamente también tiene rango uno, y para acabar la demostración basta probar que para cada $\xi \in \mathbb{T}$ se tiene que

$$\|\mathrm{Id} + \xi S\| = \|\mathrm{Id} + \xi T\|,$$

pues de aquí claramente deducimos que

$$\|\mathrm{Id} + \omega\, S\| = \|\mathrm{Id} + \omega\, T\| = \|\mathrm{Id} + T\| = \|\mathrm{Id} + S\|$$

para cada $\omega \in A$. En efecto, la desigualdad $\|\mathrm{Id} + \xi S\| \leqslant \|\mathrm{Id} + \xi T\|$ es obvia y la otra se obtiene mediante la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Id} + \xi T\| &= \sup_{\|(y,z)\|=1} \|(y + \xi S y, z)\| = \sup_{\|(y,z)\|=1} \big|(\|y + \xi S y\|, \|z\|)\big|_a \\ &\leqslant \sup_{\|(y,z)\|=1} \big|(\|\mathrm{Id} + \xi S\|\, \|y\|, \|\mathrm{Id} + \xi S\|\, \|z\|)\big|_a = \|\mathrm{Id} + \xi S\|\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el crecimiento de la norma absoluta en cada una de sus variables y que $1 \leqslant \|\mathrm{Id} + \xi S\|$, pues S tiene rango uno y $\dim(Y) \geqslant 2$. $\square$

En caso complejo no sabemos si todas las propiedades que se pueden definir al cambiar de subgrupo $A \subset \mathbb{T}$ son equivalentes entre sí. Cualquier avance en este sentido sería interesante, así como encontrar nuevos ejemplos de espacios de Banach que verifiquen alguna de estas propiedades.

3.5.2. La ecuación $\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$

En este apartado pretendemos analizar los espacios de Banach reales X para los que la igualdad

$$\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Comenzamos dando una caracterización geométrica de esta propiedad que recuerda mucho a la que se tiene para la propiedad de Daugavet (véase el Lema 3.1.3).

3.5.5 Proposición. *Sea X un espacio de Banach real. Son equivalentes:*

(i) $\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$ *para todo operador de rango uno $T \in L(X)$.*

(ii) $\|\mathrm{Id} + x^* \otimes x\| = 1 + \|x^* \otimes x\|$ *para $x^* \in X^*$, $x \in X$ tales que $x^*(x) \leqslant 0$.*

(iii) *Dados $\varepsilon > 0$, $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ con $x^*(x) \leqslant 0$, existe $y \in S_X$ de modo que*

$$x^*(y) > 1 - \varepsilon \qquad y \qquad \|x + y\| > 2 - \varepsilon.$$

(iv) *Dados $\varepsilon > 0$, $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ con $x^*(x) \leqslant 0$, existe $y^* \in S_{X^*}$ de modo que*

$$y^*(x) > 1 - \varepsilon \qquad y \qquad \|x^* + y^*\| > 2 - \varepsilon.$$

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Fijamos $x \in X$ y $x^* \in X^*$ tales que $x^*(x) < 0$, definimos $T = x^* \otimes x$ y observamos que el operador de rango uno $S = \big(- x^*(x)\big)^{-1/2} T$ verifica que $-S^2 = T$ y, por tanto,

$$1 + \|T\| = 1 + \|S^2\| = \|\mathrm{Id} - S^2\| = \|\mathrm{Id} + T\|.$$

Para acabar la prueba de esta implicación basta observar que cualquier operador $x^* \otimes x$ con $x^*(x) = 0$ se puede aproximar por operadores $y^* \otimes y$ que verifican que $y^*(y) < 0$ y que el conjunto de operadores que satisfacen (DE) es cerrado.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fijado un operador de rango uno $T = x^* \otimes x$, tenemos que

$$T^2 = x^*(x)T,$$

luego $-T^2 = y^* \otimes x$ donde $y^* = -x^*(x)x^*$ e $y^*(x) = -\big(x^*(x)\big)^2 \leqslant 0$, y ahora la hipótesis nos dice que $-T^2$ verifica (DE).

La equivalencia entre (ii) y (iii) es una obvia adaptación de la demostración de [77, Lemma 2.1] o [127, Lemma 2.2], que incluimos por complitud.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea $\varepsilon > 0$ y sean $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ de modo que $x^*(x) \leqslant 0$. Utilizando (ii) obtenemos que $\|\mathrm{Id} + x^* \otimes x\| = 2$, luego existe $y \in S_X$ verificando que

$$\|y + x^*(y)x\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde se obtiene inmediatamente que $|x^*(y)| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Podemos suponer que y también satisface que $x^*(y) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (si no es así, cámbiese y por su opuesto), con lo que podemos escribir

$$\|x + y\| \geqslant \|y + x^*(y)x\| - |x^*(y) - 1|\,\|x\| > 2 - \varepsilon.$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Fijamos $\varepsilon > 0$, $x \in S_X$ y $x^* \in S_{X^*}$ con $x^*(x) \leqslant 0$ y utilizamos (iii) para encontrar $y \in S_X$ verificando que

$$x^*(y) > 1 - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|x + y\| > 2 - \varepsilon,$$

de donde deducimos que

$$\|y + x^*(y)x\| \geqslant \|x + y\| - |1 - x^*(y)|\,\|x\| > 2 - 2\varepsilon$$

y, por tanto,

$$\|\mathrm{Id} + x^* \otimes x\| = 2.$$

Para acabar la demostración basta tener en cuenta el Corolario 3.2.2.

La equivalencia entre (ii) y (iv) es totalmente análoga a la anterior. $\square$

Es obvio que un espacio con la propiedad de Daugavet también tiene la propiedad que estamos estudiando, aunque no sabemos si el recíproco es cierto. En vista de esta relación, parece razonable preguntarse si nuestra propiedad también implica alguna de las restricciones isomórficas que impone la propiedad de Daugavet.

3.5.6 Proposición. *Sea X un espacio de Banach real en el que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces, todas las rebanadas de B_X y todas las débil-rebanadas de B_{X^*} tienen diámetro* 2.

Demostración. Sea $S(B_X, x^*, \alpha)$ la rebanada determinada por $x^* \in S_{X^*}$ y $0 < \alpha < 1$. Dado $0 < \varepsilon < \alpha$, tomamos $x \in S_X$ de modo que $x^*(x) > 1 - \varepsilon$ luego

$$x^*(-x) < -1 + \varepsilon$$

y podemos utilizar la Proposición 3.5.5 para encontrar $y \in S_X$ verificando que

$$\| - x + y\| > 2 - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad x^*(y) > 1 - \varepsilon,$$

luego $x, y \in S(B_X, x^*, \alpha)$ y $\|y - x\| > 2 - \varepsilon$.

Para las débil*-rebanadas la demostración es completamente análoga. $\square$

3.5.7 Corolario. *Sea X un espacio de Banach real tal que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces, X no tiene la propiedad de Radon-Nikodým ni es un espacio de Asplund.

3.5.8 Observación. *Si X es un espacio de Banach tal que*

$$\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador $T \in L(X)$ de rango uno, entonces X tiene la propiedad de Daugavet alternativa y el recíproco no es cierto en general. En efecto, gracias a la Proposición 3.5.5 es claro que nuestra propiedad implica la propiedad de Daugavet alternativa y para ver que el recíproco no es cierto basta considerar un espacio de dimensión finita con índice numérico 1.

Para concluir nuestro estudio sobre esta propiedad demostramos que pasa a L-sumandos y M-sumandos.

3.5.9 Proposición. *Sea X un espacio de Banach real tal que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Si Y es un L-sumando o un M-sumando de X, entonces Y tiene la misma propiedad que X.

Demostración. Suponemos que X se descompone como $X = Y \oplus Z$ y, fijados $y_0 \in S_Y$ e $y_0^* \in S_{Y^*}$ tales que $y_0^*(y_0) \leqslant 0$, consideramos $(y_0, 0) \in S_X$ y $(y_0^*, 0) \in S_{X^*}$ que también verifican $(y_0^*, 0)(y_0, 0) \leqslant 0$. Dado $\varepsilon > 0$, utilizamos la Proposición 3.5.5 para encontrar $(y, z) \in S_X$ de modo que

$$y_0^*(y) = (y_0^*, 0)(y, z) > 1 - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|(y, z) + (y_0, 0)\| > 2 - \varepsilon.$$

Si la suma en la que se descompone X es de tipo ∞, tenemos que

$$2 - \varepsilon < \|(y, z) + (y_0, 0)\| = \max\{\|y + y_0\|,\ \|z\|\} = \|y + y_0\|$$

lo que acaba la demostración en este caso; si por el contrario la suma es de tipo 1, utilizamos que $y_0^*(y) > 1 - \varepsilon$ para deducir que $\|y\| > 1 - \varepsilon$ y , por tanto, $\|z\| < \varepsilon$. Usamos esto y el hecho de que

$$\|y + y_0\| + \|z\| = \|(y, z) + (y_0, 0)\| > 2 - \varepsilon$$

para obtener que $\|y + y_0\| > 2 - 2\varepsilon$, lo que concluye la demostración. $\square$

3.5.3. La ecuación $\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$

Consideramos ahora los espacios de Banach reales X en los que la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Es claro que un espacio de Banach con la propiedad de Daugavet tiene la propiedad anterior, aunque no sabemos si nuestra propiedad es estrictamente más débil. A continuación damos una caracterización geométrica de esta propiedad que es análoga a la que obtuvimos para la ecuación $\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$ en la Proposición 3.5.5 y que no demostraremos.

3.5.10 Proposición. *Sea X un espacio de Banach real. Son equivalentes:*

(i) $\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$ *para todo operador de rango uno* $T \in L(X)$.

(ii) $\|\mathrm{Id} + x^* \otimes x\| = 1 + \|x^* \otimes x\|$ *para* $x^* \in X^*$, $x \in X$ *tales que* $x^*(x) \geqslant 0$.

(iii) *Dados* $\varepsilon > 0$, $x \in S_X$ *y* $x^* \in S_{X^*}$ *con* $x^*(x) \geqslant 0$, *existe* $y \in S_X$ *de modo que*

$$x^*(y) > 1 - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|x + y\| > 2 - \varepsilon.$$

(iv) *Dados* $\varepsilon > 0$, $x \in S_X$ *y* $x^* \in S_{X^*}$ *con* $x^*(x) \geqslant 0$, *existe* $y^* \in S_{X^*}$ *de modo que*

$$y^*(x) > 1 - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|x^* + y^*\| > 2 - \varepsilon.$$

En vista de la proposición anterior, es claro que nuestra propiedad implica la propiedad de Daugavet alternativa aunque el recíproco no es cierto como demuestra el siguiente ejemplo.

3.5.11 Ejemplo. *El espacio $X = \ell_1^2$ tiene la propiedad de Daugavet alternativa (de hecho, tiene índice numérico 1) pero no se verifica la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

para todo operador de rango uno $T \in L(\ell_1^2)$. En efecto, si tomamos

$$x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in S_{\ell_1^2} \qquad \text{y} \qquad x_0^* = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \in S_{\ell_\infty^2}$$

es inmediato comprobar que $x_0^*(x_0) = 0$ y que

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Id} + x_0^* \otimes x_0\| &= \text{máx}\left\{ \big\|(\mathrm{Id} + x_0^* \otimes x_0)(1,0)\big\|_1,\ \big\|(\mathrm{Id} + x_0^* \otimes x_0)(0,1)\big\|_1 \right\} \\ &= \text{máx}\left\{ \left\|\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\|_1,\ \left\|\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)\right\|_1 \right\} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Ahora basta usar la Proposición 3.5.10.

Una demostración completamente análoga a la de la Proposición 3.5.9 nos asegura que la propiedad que estamos estudiando pasa a L-sumandos y M-sumandos.

3.5.12 Proposición. *Sea X un espacio de Banach real en el que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Si Y es un L-sumando o un M-sumando de X, entonces Y tiene la misma propiedad que X.

No sabemos si un resultado análogo a la Proposición 3.5.13 es cierto; no obstante, demostramos que nuestra propiedad también obliga a los espacios que la poseen a carecer de la propiedad de Radon-Nikodým.

3.5.13 Proposición. *Sea X un espacio de Banach real con* $\dim(X) \geqslant 2$. *Supongamos que*

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. Entonces, X no tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

Demostración. Suponemos por reducción al absurdo que X tiene la propiedad de Radon-Nikodým y tomamos un punto $x_0 \in S_X$ que está fuertemente expuesto por $x_0^* \in S_{X^*}$. En un primer paso demostramos que

$$X = \ker x_0^* \oplus_1 x_0\mathbb{R}.$$

Para ello, fijados $x \in \ker x_0^*$ de norma uno y $n \in \mathbb{N}$, utilizamos la Proposición 3.5.10 para encontrar $x_n \in S_X$ tal que

$$\{x_0^*(x_n)\} \longrightarrow 1 \qquad \text{y} \qquad \{\|x_n + x\|\} \longrightarrow 2.$$

Puesto que x_0^* expone fuertemente a x_0, tenemos que $\{x_n\} \longrightarrow x_0$ y, por tanto,

$$\|x_0 + x\| = \|x_0\| + \|x\| = 2.$$

Como esta igualdad es válida para todo $x \in \ker x_0^*$ de norma uno, el Lema 3.2.1 nos permite deducir que $X = \ker x_0^* \oplus_1 x_0\mathbb{R}$. Ahora la Proposición 3.5.12 y el hecho de que la propiedad de Radon-Nikodým pasa a subespacios, nos permiten aplicar el razonamiento anterior a $\ker x_0^*$ (aquí utilizamos que $\dim X \geqslant 2$), con lo que podemos descomponer el espacio X como:

$$X = (Y \oplus_1 x_1\mathbb{R}) \oplus_1 x_0\mathbb{R} \equiv Y \oplus_1 \ell_1^2.$$

Utilizando de nuevo la Proposición 3.5.12 obtenemos que cada operador de rango uno $T \in L(\ell_1^2)$ debería verificar que

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|,$$

lo que entra en contradicción con el Ejemplo 3.5.11. □

La ecuación que estamos estudiando tiene una diferencia fundamental con la ecuación de Daugavet: no es posible que todos los operadores lineales y continuos en un espacio de Banach satisfagan (DE) (basta pensar en el operador $-\mathrm{Id}$), pero tiene sentido plantearse si existe un espacio de Banach X en el que se verifique la ecuación

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

para todo operador $T \in L(X)$. Obviamente, esto pasa para $X = \mathbb{R}$, pero no sabemos si hay más espacios de Banach con esta propiedad.

3.5.14 Problema. *¿Existe algún espacio de Banach real X distinto de $\mathbb{R}$ en el que la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifique para todo operador $T \in L(X)$?

Aunque, desgraciadamente, no hemos podido dar respuesta a este problema, sí que podemos dar algunas condiciones necesarias sobre un espacio de Banach X que lo resuelva afirmativamente. En primer lugar, si X es un tal espacio, la Proposición 3.5.13 nos dice que X no tiene la propiedad de Radon-Nikodým. En segundo lugar, el siguiente resultado, cuya demostración sigue las líneas de [72, Theorem 2.1], nos dice que X no puede tener base incondicional.

3.5.15 Proposición. *Sea X un espacio de Banach real en el que todo operador $T \in L(X)$ satisface la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|.$$

Entonces, X no admite base incondicional.

Demostración. Suponemos por reducción al absurdo que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de X con constante de incondicionalidad $K \geqslant 1$ y cuyo conjunto de funcionales biortogonales asociado es $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el operador de rango dos $T_n \in L(X)$ dado por

$$T_n = x_{2n}^* \otimes e_{2n-1} - x_{2n-1}^* \otimes e_{2n},$$

y para cada $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned} T_n^2(x) &= \left(x_{2n}^* \otimes e_{2n-1} - x_{2n-1}^* \otimes e_{2n}\right)\left(x_{2n}^*(x)e_{2n-1} - x_{2n-1}^*(x)e_{2n}\right) \\ &= -x_{2n-1}^*(x)e_{2n-1} - x_{2n}^*(x)e_{2n} \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$-x = \sum_{n=1}^{\infty} -x_n^*(x)\, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \big(- x_{2n-1}^*(x) e_{2n-1} - x_{2n}^*(x) e_{2n} \big) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^2(x)$$

o, lo que es lo mismo, la siguiente igualdad se verifica puntualmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n^2 = -\mathrm{Id}.$$

Por otra parte, es claro que

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i \in A} T_i^2 \right\| \ : \ A \subseteq \mathbb{N},\ A \text{ finito} \right\} \leqslant K < \infty$$

y, por tanto, podemos encontrar un subconjunto $A_0 \subseteq \mathbb{N}$ finito de modo que

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i \in A} T_i^2 \right\| \ : \ A \subseteq \mathbb{N},\ A \text{ finito} \right\} < \left\| \sum_{i \in A_0} T_i^2 \right\| + 1. \tag{3.21}$$

Observamos que, claramente, $\sum_{i \in A_0} T_i^2 = \big(\sum_{i \in A_0} T_i \big)^2$, luego utilizando la hipótesis obtenemos que

$$\left\| \mathrm{Id} + \sum_{i \in A_0} T_i^2 \right\| = 1 + \left\| \sum_{i \in A_0} T_i^2 \right\|.$$

Tomamos ahora una sucesión creciente de conjuntos finitos $A_n \subseteq \mathbb{N}$ de modo que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N} \setminus A_0$ y deducimos que puntualmente se tiene que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i \in A_n} T_i^2 = -\mathrm{Id} - \sum_{i \in A_0} T_i^2$$

y, por tanto,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i \in A_n} T_i^2 \right\| \geqslant \left\| \mathrm{Id} + \sum_{i \in A_0} T_i^2 \right\| = 1 + \left\| \sum_{i \in A_0} T_i^2 \right\|,$$

lo que entra en clara contradicción con (3.21). $\square$

Concluimos nuestro estudio sobre la cuestión planteada en el Problema 3.5.14 observando que existe una restricción sobre las isometrías sobreyectivas que puede haber en un espacio que resuelva dicho problema afirmativamente.

3.5.16 Observación. *Sea X un espacio de Banach real con* $\dim(X) \geqslant 2$ *de modo que*

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador $T \in L(X)$. Entonces, cualquier isometría sobreyectiva $\mathrm{J} \in L(X)$ *verifica que* $(\mathrm{J} - \mathrm{J}^{-1})^2 = 0$. En efecto, si J es una isometría sobreyectiva, definiendo el operador

$$T := \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{J} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{J}^{-1} \in L(X),$$

tenemos que $T^2 = \frac{1}{2}\mathrm{J}^2 - \mathrm{Id} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{J}^{-1}\right)^2$ y, por tanto,

$$\left\|\frac{1}{2}\mathrm{J}^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{J}^{-1}\right)^2\right\| = \|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\| \geqslant 1$$

pero, claramente,

$$\left\|\frac{1}{2}\mathrm{J}^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{J}^{-1}\right)^2\right\| \leqslant 1,$$

de donde deducimos que $T^2 = 0$.

Usamos la observación anterior para ver que los espacios $L_1[0,1]$ y $C[0,1]$ no son soluciones afirmativas del Problema 3.5.14.

3.5.17 Ejemplo. *En los espacios $L_1[0,1]$ y $C[0,1]$ no se verifica la igualdad*

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

para todo operador lineal y continuo T. Efectivamente, consideramos las funciones biyectivas $\varphi, \psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dadas por

$$\varphi(t) := \sqrt{t} \quad \big(t \in [0,1]\big) \qquad \text{y} \qquad \psi(t) := \begin{cases} \frac{1}{2} + t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \\ 1 - t & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

cuyas inversas son

$$\varphi^{-1}(t) := t^2 \qquad \text{y} \qquad \psi^{-1}(t) := \begin{cases} 1 - t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[, \\ \\ t - \frac{1}{2} & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

y definimos los operadores $\mathrm{J} \in L\big(C[0,1]\big)$ y $K \in L\big(L_1[0,1]\big)$ por

$$\mathrm{J}f := f \circ \varphi \quad \big(f \in C[0,1]\big) \qquad \text{y} \qquad Kg := g \circ \psi \quad \big(g \in L_1[0,1]\big).$$

Es claro que

$$\|\mathrm{J}f\| = \|f\| \qquad \big(f \in C[0,1]\big) \qquad \text{y} \qquad \|Kg\| = \|g\| \qquad \big(g \in L_1[0,1]\big)$$

y que

$$\mathrm{J}^{-1}f = f \circ \varphi^{-1} \quad \big(f \in C[0,1]\big) \qquad \text{y} \qquad K^{-1}g = g \circ \psi^{-1} \quad \big(g \in L_1[0,1]\big).$$

Como

$$\big(\mathrm{J} - \mathrm{J}^{-1}\big)^2 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \big(K - K^{-1}\big)^2 \neq 0,$$

el resultado se deduce entonces de la Observación 3.5.16.

3.6. Problemas abiertos

Comentamos brevemente algunos de los problemas abiertos que han surgido en nuestro estudio.

3.6.1 Problema. Sea X un espacio de Banach complejo y sea A un subgrupo multiplicativo cerrado de $\mathbb{T}$ con $A \neq \mathbb{T}$. Supongamos que la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $\omega \in A$. ¿Se verifica esta igualdad para todo $\omega \in \mathbb{T}$?

Por ahora, el único ejemplo de espacio de Banach que sabemos que satisface una propiedad de este tipo es $C[0,1] \oplus_2 C[0,1]$, pero aquí $A = \mathbb{T}$.

3.6.2 Problema. Obtener caracterizaciones geométricas de los espacios de Banach X en los que la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$ y todo $\omega \in \mathbb{T}$.

En lo que se refiere a las propiedades que son exclusivas de los espacios reales, en primer lugar tenemos la pregunta planteada en el Problema 3.5.14.

3.6.3 Problema. ¿Existe algún espacio de Banach real X (distinto de $\mathbb{R}$) para el que la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifique para todo operador $T \in L(X)$?

Otras preguntas interesantes son las dos siguientes.

3.6.4 Problema. Sea X un espacio de Banach real en el que la igualdad

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. ¿Tiene X la propiedad de Daugavet?

3.6.5 Problema. Sea X un espacio de Banach real en el que la igualdad

$$\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

se verifica para todo operador de rango uno $T \in L(X)$. ¿Tiene X la propiedad de Daugavet?

Apéndice A

Summary and conclusions

This memoir is devoted to the study of various topics within the Geometry of Banach spaces which are related to the theory of numerical ranges. Let us introduce this concept before explaining the contents of the memoir. Given a Banach space X the *spatial numerical range* of a bounded linear operator $T \in L(X)$ is the subset $W(T)$ of the scalar field defined by

$$W(T) = \{x^*(Tx) \, : \, x \in S_X, \ x^* \in S_{X^*}, \ x^*(x) = 1\}.$$

This definition of numerical range was introduced in the 60's by F. Bauer [14] as an extension of Toeplitz's numerical range of matrices [123], and, concerning applications, it is equivalent to Lumer's numerical range [85] which had appeared independently shortly before. Another concept of numerical range for operators appeared in the sixties based on the fact that an operator T is an element of the Banach algebra $L(X)$. The *algebra numerical range* of the operator T is defined as the subset of the scalar field given by

$$V(T) = \{\Phi(T) \, : \, \Phi \in L(X)^*, \ \|\Phi\| = \Phi(\mathrm{Id}) = 1\}.$$

Let us specify the notation and some necessary definitions. Given a Banach space Y over $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$), we write B_Y for the closed unit ball and S_Y for the unit sphere of Y. The dual space of Y will be denoted by Y^*. If Z is another Banach space, we write $L(Z,Y)$ for the Banach space of all bounded linear operators from Z into Y; if $Z = Y$ we simply write $L(Y) := L(Y,Y)$. Finally, the unit sphere of the base field $\mathbb{K}$ will be denoted by $\mathbb{T}$.

A.1. Intrinsic and spatial numerical range

The preceding definitions of numerical range can be extended to broader settings. Namely, they apply equally well to continuous functions defined on the sphere of a Banach space as was shown by F. Bonsall, B. Cain y H. Schneider in [25] and L. Harris in [66]. Actually, both definitions can be extended to bounded functions defined on the unit sphere of a Banach space X which take values on the space without any extra effort. Concretely, given a Banach space Y and a closed subspace X of Y with isometric inclusion $\mathrm{J} : X \longrightarrow Y$, we denote by $B(S_X,Y)$ the Banach space of all bounded functions from S_X to Y, endowed with the natural supremum norm, and we write $C_u(S_X,Y)$ for its closed subspace consisting of all bounded and uniformly continuous functions. For $f \in B(S_X,Y)$ we define the *spatial numerical range* of f by

$$W(f) := \{y^*(f(x)) \ : \ x \in S_X,\ y^* \in S_{Y^*},\ y^*(\mathrm{J}x) = 1\},$$

and the *intrinsic numerical range* of f by

$$V(f) := \left\{\Phi(f) \ : \ \Phi \in B(S_X,Y)^*,\ \|\Phi\| = \Phi\left(\mathrm{J}|_{S_X}\right) = 1\right\}.$$

The name of intrinsic numerical range comes from the fact that if f belongs to any closed subspace Z of $B(S_X,Y)$, we can calculate $V(f)$ using only elements in Z^*. As we commented before, these two numerical ranges appeared in the aforementioned papers [25, 66] for continuous functions. In the particular case when $X = Y$ and f is (the restriction to S_Y of) a bounded linear operator, the spatial numerical range coincides with that introduced by F. Bauer and the intrinsic numerical range coincides with the algebra numerical range. We refer the reader to the monographs by F. Bonsall and J. Duncan [26, 27] for general information and background. When f is (the restriction to S_Y of) a uniformly continuous function from B_Y to Y which is holomorphic on the interior of B_Y, both ranges appeared for the first time in [65], where some applications are given.

Let us fix a Banach space Y and a closed subspace X. For every $f \in B(S_X, Y)$, $V(f)$ is closed and convex, and we have

$$\overline{\mathrm{co}}\, W(f) \subseteq V(f), \tag{A.1}$$

where $\overline{\mathrm{co}}$ means closed convex hull. In the case when $X = Y$ and $\mathrm{J} = \mathrm{Id}$, the inclusion above is known to be an equality whenever f is a uniformly continuous function [66, Theorem 1] (see also [26, §9] for bounded linear operators, [65] for holomorphic functions, and [116] for a slightly more general result). On the other hand, the equality $\overline{\mathrm{co}}\, W(f) = V(f)$ for arbitrary bounded functions cannot be expected in general. Indeed, this equality holds for every $f \in B(S_Y, Y)$ if and only if Y is uniformly smooth [115]. In the general case when X is a proper subspace, two sufficient conditions are given in [66, Theorems 2 and 3] for the equality in Eq. (A.1), namely, such a equality holds for all $f \in C_u(S_X, Y)$ if either X is finite-dimensional or Y is uniformly smooth.

Our aim in this section is to find conditions on the function f and the spaces X and Y in order to get an equality in Eq. (A.1).

A.1.1. Equality of ranges for linear operators

In this part we focus our attention to bounded linear operators and we study conditions on the space Y and the subspace X to get the equality in (A.1) for every $T \in L(X, Y)$.

On the one hand, as a consequence of a Harris' result [66], given a finite-dimensional Banach space X, for every Banach space Y containing X as a subspace, we have

$$\overline{\text{co}}\, W(T) = V(T)$$

for every $T \in L(X, Y)$. We prove that this fact characterizes finite-dimensional spaces.

A.1.1 Theorem. *Let X be an infinite dimensional Banach space. Then there exist a Banach space Y containing X as a subspace and an operator $T \in L(X, Y)$ such that $\overline{\text{co}}\, W(T) \neq V(T)$.*

We also show that, in fact, the space Y in the above theorem can be taken in such a way that $\dim(Y/X) = 1$.

Second, we study the Banach spaces Y in which the equality $\overline{\text{co}}\, W(T) = V(T)$ holds for every subspace X and every operator $T \in L(X, Y)$. The first examples of spaces having the above property were given again by L. Harris: uniformly smooth spaces and finite-dimensional spaces [66, Theorems 2 and 3]. In the other direction, we exhibit some examples of Banach spaces lacking the above property.

A.1.2 Examples. If $Y = c_0$ or $Y = \ell_2 \oplus_\infty (\ell_2 \oplus_1 \ell_2)$, then there exist a closed subspace X and an operator $T \in L(X, Y)$ satisfying $\overline{\text{co}}\, W(T) \neq V(T)$.

We also show a negative isomorphic result for non reflexive spaces:

A.1.3 Proposition. *Every non reflexive Banach space Y admits an equivalent norm such that there exist a closed subspace X and an operator $T \in L(X, Y)$ satisfying $\overline{\text{co}}\, W(T) \neq V(T)$.*

A.1.2. The Bishop-Phelps-Bollobás property

In this part we give a positive result related to the problem of finding spaces for which the equality of ranges holds for every closed subspace and every uniformly continuous function. To do so, we introduce a new geometrical property for Banach spaces which is related to the classical Bishop-Phelps-Bollobás Theorem.

A.1.4 Definition. Let Y be a Banach space and let X be a closed subspace of Y. We say that (X, Y) is a *Bishop-Phelps-Bollobás pair* (*BPB-pair* in short) if for every $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that whenever $x_0 \in S_X$, $y_0^* \in S_{Y^*}$ satisfy $\operatorname{Re} y_0^*(x_0) > 1 - \delta$, it is possible to find $x \in S_X$ and $y^* \in S_{Y^*}$ so that

$$\operatorname{Re} y^*(x) = 1, \qquad \|x_0 - x\| < \varepsilon, \qquad \text{and} \qquad \|y_0^* - y^*\| < \varepsilon.$$

We say that a Banach space Y has the *BPB property* if for every closed subspace X of Y, (X, Y) is a BPB-pair.

As we announced above, we have the following result.

A.1.5 Theorem. *Let Y be a Banach space and let X be a closed subspace such that (X, Y) is a BPB-pair. Then, the equality $\overline{\operatorname{co}}\, W(f) = V(f)$ holds for every $f \in C_u(S_X, Y)$.*

The above result together with Theorem A.1.1 give us the following corollary.

A.1.6 Corollary. *Let X be an infinite-dimensional Banach space. Then, there is a Banach space Y containing X as a subspace such that (X, Y) is not a BPB-pair.*

On the other hand, if we restrict the BPB property to finite-dimensional subspaces, we get a characterization of the strongly subdifferentiable norms. We recall that the norm of a Banach space Y is *strongly subdifferentiable* (*ssd* in short) at $u \in S_Y$ whenever there exists

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\|u + \alpha y\| - 1}{\alpha}$$

uniformly for $y \in B_Y$. When this happens for every $u \in S_Y$ we say that the norm of Y is ssd.

A.1.7 Proposition. *Let Y be a Banach space. Then, the norm of Y is ssd if, and only if, for every finite-dimensional subspace $X \subseteq Y$, the pair (X, Y) is BPB.*

Since the norm of any finite-dimensional Banach space is ssd [53, pp. 48], we have the following corollary.

A.1.8 Corollary. *Every finite-dimensional Banach space has the BPB property.*

We are also able to characterize uniform smoothness in terms of the BPB property, as the following theorem shows.

A.1.9 Theorem. *A Banach space Y is uniformly smooth if and only if it has the BPB property in such a way that the relationship between ε and δ in Definition A.1.4 does not depend on the subspace X.*

So far we have showed that uniform smoothness is a sufficient condition to have the BPB property and that strong subdifferentiability of the norm is necessary. Thus, it is reasonable to think that there may be any relationship between the BPB property and Fréchet differentiability of the norm. But, on the one hand, every finite dimensional space has the BPB property, so it does not imply Frechét differentiability of the norm and, on the other hand, there exist Banach spaces with Fréchet differentiable norm which lack the BPB property.

A.1.10 Example. *The norm of the Banach space*

$$Y = \Big[\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \ell_{k+1}^2 \Big]_{\ell_2}$$

is Fréchet differentiable and Y does not have the BPB property.

We conclude our study of the BPB property proving that a pair (X, Y) is a BPB-pair provided that X is an absolute ideal of Y. Let us introduce the necessary definitions. We refer the reader to [27, § 21], [104], and references therein for background. A closed subspace X of a Banach space Y is said to be an *absolute summand* of Y if there exists another closed subspace Z such that $Y = X \oplus Z$ and, for every $x \in X$ and $z \in Z$, the norm of $x + z$ only depends on $\|x\|$ and $\|z\|$. In this case we also say that Y is an *absolute sum* of X and Z. This implies that there exists an absolute norm on $\mathbb{R}^2$ such that

$$\|x + z\| = \big|(\|x\|, \|z\|)\big|_a \qquad \big(x \in X,\ z \in Z\big).$$

By an *absolute norm* we mean a norm $|\cdot|_a$ on $\mathbb{R}^2$ such that $|(1,0)|_a = |(0,1)|_a = 1$ and $|(a,b)|_a = |(|a|,|b|)|_a$ for every $a, b \in \mathbb{R}$. We say that X is an *absolute ideal* of Y if $X^\perp$ is an absolute summand of Y^*, in which case, Y^* can be identified with $X^* \oplus X^\perp$ with a convenient absolute sum. Absolute summands and absolute ideals are generalizations of the well-known *M-summands*, *L-summands*, *M-ideals*, and the more general class of *L_p-summands* [18, 64].

A.1.11 Proposition. *Let Y be a Banach space and let X be an absolute ideal of Y. Then the pair (X, Y) is BPB.*

A.1.12 Corollary. *If X is an M-embedded or an L-embedded space, then (X, X^{**}) is a BPB-pair.*

Since every Banach space is an ideal in its bidual (of course, not necessarily absolute), it is natural to ask if the pair (X, X^{**}) is always a BPB pair. The following example tells us that this is not the case.

A.1.13 Example. *Let X be the Banach space given by*
$$X = \Big[\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \big(c_0 \oplus_{\frac{k+1}{k}} \ell_1 \big) \Big]_{\ell_2}.$$
Then the pair (X, X^{**}) is not a BPB pair.

The results of this section were obtained in collaboration with M. Martín and R. Payá and have appeared in the paper: On the intrinsic and the spatial numerical range, *J. Math. Anal. Appl.* **318** (2006), 175–189.

A.2. Numerical index of Banach spaces

Given a bounded linear operator T on a Banach space X its *numerical radius* is defined by
$$v(T) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in W(T)\}.$$
It is clear that the numerical radius is a seminorm on $L(X)$, and that $v(T) \leqslant \|T\|$ for every $T \in L(X)$. Quite often, v is actually an equivalent norm on $L(X)$. It is then natural to consider the so called *numerical index* of the space X, namely the constant $n(X)$ defined as the greatest constant $k \geqslant 0$ such that $k\|T\| \leqslant v(T)$ for every $T \in L(X)$. Equivalently,
$$n(X) = \text{ínf}\{v(T) \ : \ T \in L(X),\ \|T\| = 1\}.$$
This concept was introduced by G. Lumer in 1968 [42] and it is immediate that $0 \leqslant n(X) \leqslant 1$. The maximum value $n(X) = 1$ is attained if and only if $v(T) = \|T\|$ for every $T \in L(X)$; the minimum value $n(X) = 0$ means that v is not an equivalent norm to the usual one in $L(X)$.

It was known even before Lumer's definition that in a complex Hilbert space H with dimension greater than 1 one has $\|T\| \leqslant 2v(T)$ for all $T \in L(X)$, and that this inequality is sharp, so $n(H) = \frac{1}{2}$. In the real case, there always exists a norm-one operator which numerical range reduces to zero; therefore $n(H) = 0$. Actually, real and complex general Banach linear spaces behave in a very different way with regard to the numerical index, as summarized in the following equalities [42]:

$$\begin{aligned} \{n(X) \ : \ X \text{ complex normed linear space } \} &= [\mathrm{e}^{-1}, 1] \\ \{n(X) \ : \ X \text{ real normed linear space } \} &= [0, 1]. \end{aligned} \tag{A.2}$$

The fact that $n(X) \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ for every complex Banach linear space was observed by B. Glickfeld [55] (by making use of a classical Theorem of H. Bohnenblust and S. Karlin [23]), who also gave an example where this inequality becomes an equality. In the already cited paper [42], J. Duncan, C. McGregor, J. Pryce, and A. White showed that $C(K)$, $L_1(\mu)$, and their isometric preduals have numerical index 1. Other examples of spaces with numerical index one are the function algebras [126] and, in particular, the disc algebra [27, Theorem 32.9].

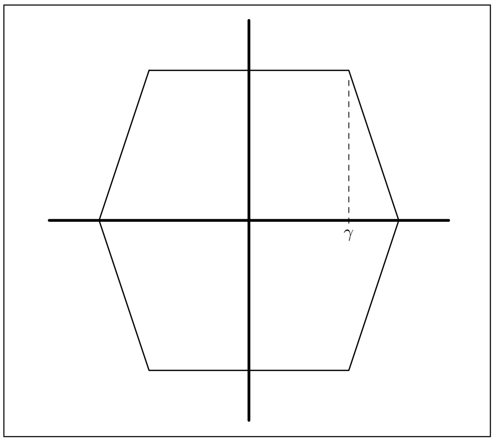
A.2.1. Computation of some numerical indices

Computing the numerical index of a concrete Banach space usually is a tough task. Let us comment that, roughly speaking, when one finds an explicit computation of the numerical index of a Banach space in the literature, only few values appear; namely, 0 (real Hilbert spaces), e^{-1} (Glickfeld's example), $1/2$ (complex Hilbert spaces), and 1 ($C(K)$, $L_1(\mu)$, and many more). The exact values of classical Banach spaces such as $n(\ell_p)$ are not still known. Let us also say that, when the authors of [42] proved (A.2), they only used examples of Banach spaces whose numerical indices are the extremes of the intervals, and then a connectedness argument was applied. We start our study computing explicitly the numerical index for four families of norms on $\mathbb{R}^2$ which give concrete examples of spaces whose numerical index is none of the above.

• Hexagonal norms

For each $\gamma \in [0,1]$ let us write $X_\gamma = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\gamma)$, where the norm is given by

$$\|(x,y)\|_\gamma = \text{máx}\,\{|y|, |x| + (1-\gamma)|y|\} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$



A.2.1 Theorem. *For every $\gamma \in [0,1]$, let X_γ be defined as above. Then,*

$$n(X_\gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+2\gamma} & \text{if } 0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{1}{3-2\gamma} & \text{if } \frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1 \end{cases}$$

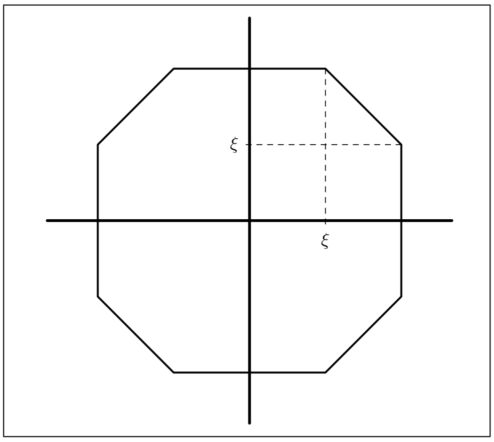
• Octogonal norms

For $\xi \in [0,1]$, we define $X_\xi = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\xi)$, where the norm $\|\cdot\|_\xi$ is given by

$$\|(x,y)\|_\xi = \text{máx}\left\{|x|,\ |y|,\ \frac{|x|+|y|}{1+\xi}\right\} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

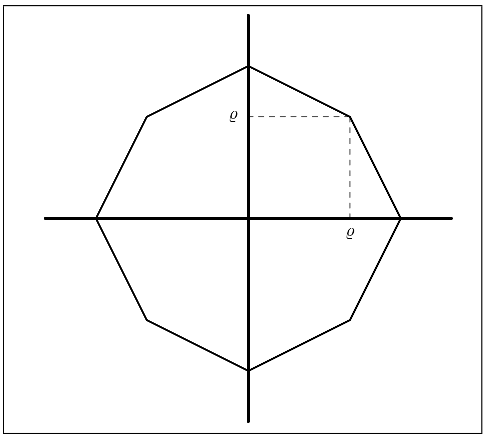
A.2.2 Theorem. *For every $\xi \in [0,1]$, let X_ξ be defined as above. Then,*

$$n(X_\xi) = \text{máx}\left\{\xi,\ \frac{1-\xi}{1+\xi}\right\}.$$



Since the numerical index of a finite-dimensional normed linear space and the one of its dual coincide, the above theorem allows us to calculate the numerical indices of the elements of another family of octagonal norms: the one consisting of the duals of the above family. Concretely, for $\varrho \in [1/2, 1]$, we consider the space $Y_\varrho = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\varrho)$, where the norm is given by

$$\|(x,y)\|_\varrho = \text{máx}\left\{|x| + \frac{1-\varrho}{\varrho}|y|,\ |y| + \frac{1-\varrho}{\varrho}|x|\right\} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big).$$



A.2.3 Corollary. *For every $\varrho \in [1/2, 1]$, let Y_ϱ be defined as above. Then,*

$$n(Y_\varrho) = \text{máx}\left\{\frac{1-\varrho}{\varrho}, 2\varrho - 1\right\}.$$

• Regular Polygons

Let n be a positive integer greater or equal than 2. We define X_n to be the two dimensional real Banach space such that

$$\text{ext}(B_{X_n}) = \left\{\left(\cos\left(\tfrac{k\pi}{n}\right), \sin\left(\tfrac{k\pi}{n}\right)\right) \ : \ k = 1, 2, \ldots, 2n\right\}$$

i.e. the unit ball of X_n is a $2n$-regular polygon.

A.2.4 Theorem. *Let n be a positive integer greater or equal to 2, and let X_n be defined as above. Then,*

$$n(X_n) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) & \text{if } n \text{ is even,} \\ \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right) & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

These results can be found in the joint work with M. Martín entitled Numerical index of some polyhedral norms on the plane, to appear in *Linear Multilinear Algebra*.

• Spaces of vector-valued continuous functions

Our next aim is to study the numerical index of some spaces of vector valued continuous functions. In [95, Theorem 5], it was proved that $n(C(K, X)) = n(X)$ for every compact Hausdorff space K and every Banach space X. We generalize this result by proving that the same equality holds when $C(K, X)$ is replaced by $C_\omega(K, X)$, the Banach space of all weakly continuous functions from K into X, equipped with the supremum norm.

A.2.5 Theorem. *Let K be a compact Hausdorff space and let X be a Banach space. Then,*

$$n\left(C_\omega(K,X)\right) = n(X).$$

As a consequence, $n\big(W(X,C(K))\big) = n(X^*)$.

We focus now in the study of the numerical index of $C_{\omega^*}(K,X^*)$, the Banach space of weakly-star continuous functions from a compact Hausdorff space K into the dual of a Banach space X. Unfortunately, we are not able to completely determine such numerical index, but some partial results can be established. The first one gives an upper bound for $n\left(C_{\omega^*}(K,X^*)\right)$.

A.2.6 Proposition. *Let K be a compact Hausdorff space and X a Banach space. Then,*

$$n\left(C_{\omega^*}(K,X^*)\right) \leqslant n(X).$$

We are not able to obtain a lower bound for $n\left(C_{\omega^*}(K,X^*)\right)$ in the general case but our next partial result gives sufficient conditions on K or X to obtain the desired bound.

A.2.7 Proposition. *Let K be a compact Hausdorff space and X a Banach space. If X is an Asplund space or K has a dense subset of isolated points then,*

$$n(X^*) \leqslant n\left(C_{\omega^*}(K,X^*)\right).$$

All these results will appear in the joint work with G. López and M.Martín entitled Numerical index of Banach spaces of weakly or weakly-star continuous functions, to appear in *Rocky Mountain J. Math.*

A.2.2. Banach spaces with numerical index zero

The next part of our discussion deals with real Banach spaces having numerical index 0. As we already commented, it is known that the class of such Banach spaces contains all Hilbert spaces of dimension greater than one, and all real spaces underlying complex Banach spaces (the isometry $x \longmapsto ix$ on a complex Banach space has real numerical radius 0). The first result that we present says that the sum of the real space underlying a complex space and another real space has numerical index zero, provided that the norm is invariant under rotations in the complex part.

A.2.8 Proposition. *Let X be a real Banach space, and let Y, Z be closed subspaces of X, with $Z \neq 0$. Suppose that Z is the real space underlying a complex space, that $X = Y \oplus Z$, and that the equality $\|y + \mathrm{e}^{i\rho} z\| = \|y + z\|$ holds for every $(\rho, y, z) \in \mathbb{R} \times Y \times Z$. Then, we have $n(X) = 0$.*

In view of the preceding proposition one may wonder if some kind of complex structure must appear in every Banach space with numerical index zero. With the next example we show that this is not the case.

A.2.9 Example. *We consider the Banach space*

$$X = \left[\bigoplus_{n=2}^{\infty} X_n\right]_{c_0},$$

where $\{X_n\}_{n\geqslant 2}$ is the family of spaces given in Theorem A.2.4. Then, $n(X) = 0$ but X is polyhedral and, therefore, it does not contain any isometric copy of $\mathbb{C}$.

The next result characterizes finite-dimensional spaces with numerical index zero in terms of the appearance of a complex structure in the space.

A.2.10 Theorem. *Let $(X, \|\cdot\|)$ be a finite-dimensional real Banach space. Then,* *the following are equivalent:*

(i) *The numerical index of* X *is zero.*

(ii) *There are nonzero* complex *vector spaces* $X_1, \dots, X_n$*, a* real *vector space* X_0*, and positive integer numbers* $q_1, \dots, q_n$ *such that* $X = X_0 \oplus X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ *and*

$$\left\| x_0 + e^{iq_1\rho}x_1 + \dots + e^{iq_n\rho}x_n \right\| = \|x_0 + x_1 + \dots + x_n\|$$

for all $\rho \in \mathbb{R}$*,* $x_j \in X_j$ $(j = 0, 1, \dots, n)$.

The equivalence given in the above theorem had appeared in the 1985 Rosenthal's paper [118] with real numbers $q_1, \dots, q_m$, but the fact that the q_j's can be taken integers is new. When we read the above result in the particular cases in which X has dimension 2 or 3 we get the following corollary.

A.2.11 Corollary. *Let* X *be a real Banach space with numerical index* 0*.*

(a) If $\dim(X) = 2$*, then* X *is isometrically isomorphic to the two-dimensional real Hilbert space.*

(b) If $\dim(X) = 3$*, then* X *is an absolute sum of* $\mathbb{R}$ *and the two-dimensional real Hilbert space.*

Given an n-dimensional normed space X, we discuss some questions related to the set $\mathcal{Z}(X)$ of those operators $T \in L(X)$ such that $v(T) = 0$ (called *skew-hermitian operators*), which is known to be a Lie algebra [118, Proposition 1.5]. The main problem we consider is that of finding the possible dimensions for $\mathcal{Z}(X)$.

The results of this part where obtained in collaboration with M. Martín and A. Rodriguez-Palacios and they were published in: Finite-dimensional Banach spaces with numerical index zero, *Indiana Univ. Math. J.* **53** (2004), 1279–1289.

A.2.3. Numerical index of $L_p(\mu)$

The computation of the numerical index of the $L_p(\mu)$-spaces is an open problem from the beginning of the subject. This part of the memoir is devoted to the compilation of all known facts about this problem. We state some recent results due to E. Ed-dari and M. Khamsi [44, 45] which give some advances in the computation of such numerical indices. We prove all these results giving simpler proofs for some of them. The only original result that we present in this part is an inequality bounding the numerical index of ℓ_p^2 in the real case. Given $1 < p < \infty$, we denote by q the only positive number such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

A.2.12 Proposition. *Let $1 < p < \infty$. In real case the following holds:*

$$\max\left\{\frac{1}{2^{1/p}}, \frac{1}{2^{1/q}}\right\} \max_{t\in[0,1]} \frac{|t^{p-1} - t|}{1 + t^p} \leqslant n(\ell_p^2) \leqslant \max_{t\in[0,1]} \frac{|t^{p-1} - t|}{1 + t^p}.$$

A.3. Norm equalities for operators

In the early 70's, J. Duncan, C. McGregor, J. Pryce y A. White observed in a work devoted to the numerical index [42] that an operator T satisfies $v(T) = \|T\|$ if and only if there exists $\omega \in \mathbb{T}$ such that the equality $\|\mathrm{Id} + \omega T\| = 1 + \|T\|$ holds. They prove this fact using that the equation $\sup \operatorname{Re} W(T) = \|T\|$ for an operator T is equivalent to

$$\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|. \tag{DE}$$

This equation had already been shown to hold for every compact operator T in $C[0,1]$ by I. Daugavet [38], in honor of whom it has become known as the *Daugavet equation*. We say that a Banach space X has the *Daugavet property* [77] if every rank-one operator $T \in L(X)$ satisfies (DE). Examples of spaces having this property are $C(K)$ and $L_1(\mu)$, provided that K is perfect and μ does not have any atoms (see [125] for an elementary approach), and certain function algebras such as the disk algebra $A(\mathbb{D})$ or the algebra of bounded analytic functions H^∞ [126, 128]. Although the Daugavet property is of isometric nature, it brings with it several structural implications. For instance, a Banach space with the Daugavet property cannot have the Radon-Nikodým property [128] (in fact, every weakly open subset of its unit ball has diameter 2 [121]), it contains a copy of ℓ_1, and it does not embed into a space with an unconditional basis [77].

One may wonder if there are other properties which, like the Daugavet property, can be stated by requiring all rank-one operators on a Banach space to satisfy a norm equality similar to the Daugavet equation. This is the aim of this part of the thesis.

A.3.1. Equalities of the form $\|g(T)\| = f(\|T\|)$

In the first place we consider equations of the form

$$\|g(T)\| = f(\|T\|)$$

where $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ is an arbitrary function and g should be a function carrying operators to operators. Since we want g to be applied to any rank-one operator on any Banach space, we consider a power series with infinite radius of convergence, i.e. an analytic function $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ and define

$$g(T) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, T^k \qquad \big(T \in L(X)\big),$$

where $g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \zeta^k$ is the power series expansion of g.

Our target in this section is to show that the only non trivial norm equality of the form $\|g(T)\| = f(\|T\|)$ valid for all rank-one operators on a Banach space of dimension greater than one is the Daugavet equation.

A.3.1 Theorem. *Let X be a Banach space over $\mathbb{K}$ with $\dim(X) \geqslant 2$, $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ an arbitrary function and $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ an analytic function. Suppose that the* *norm equality*

$$\|g(T)\| = f(\|T\|)$$

holds for every rank-one operator T on X. Then, only three possibilities may happen:

(a) g is a constant function (trivial case).

(b) There is a non-null $b \in \mathbb{K}$ such that $g(\zeta) = b\,\zeta$ for every $\zeta \in \mathbb{K}$ (trivial case).

(c) There are non-null $a, b \in \mathbb{K}$ such that $g(\zeta) = a + b\,\zeta$ for every $\zeta \in \mathbb{K}$, and X has the Daugavet property.

A.3.2. Equalities of the form $\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$

Our next aim is to deal with norm equalities of the form

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|) \tag{A.3}$$

where $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ is analytic and $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ is continuous. First of all, if X is a Banach space with the Daugavet property and g is an analytic function, then the equality

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = |1 + g(0)| - |g(0)| + \|g(T)\|$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$. Therefore, we are not able to completely determine the function g in this section, but we show that in many occasions it is possible to replace g by a "simpler" function.

We have to separate from now on the complex and real cases.

• Complex case

A.3.2 Theorem. *Let X be a complex Banach space with* $\dim(X) \geqslant 2$. *Suppose that there exist a non-constant entire function $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ and a continuous function*

$f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, *such that the norm equality*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$. *Then, the equality*

$$\|(1 + g(0))\mathrm{Id} + T\| = |1 + g(0)| - |g(0)| + \|g(0)\mathrm{Id} + T\|$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$.

As may be wondered in view of the preceding result, the number $g(0)$ plays a key role in our discussion. On the one hand, if $\operatorname{Re} g(0) \neq -\frac{1}{2}$ and Eq. (A.3) holds for every rank-one operator, then the Banach space involved has the Daugavet property.

A.3.3 Theorem. *Let* X *be a complex Banach space with* $\dim(X) \geqslant 2$. *Suppose that there exist a non-constant entire function* $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *with* $\operatorname{Re} g(0) \neq -\frac{1}{2}$ *and a continuous function* $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, *such that the norm equality*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$. *Then,* X *has the Daugavet property.*

On the other hand, a similar result cannot be expected when $\operatorname{Re} g(0) = -\frac{1}{2}$. In this case we get another family of norm equations for operators, none of them implying the Daugavet property.

A.3.4 Theorem. *Let* X *be a complex Banach space with* $\dim(X) \geqslant 2$. *Suppose that there exist a non-constant entire function* $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *with* $\operatorname{Re} g(0) = -\frac{1}{2}$ *and a continuous function* $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, *such that the norm equality*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$. Then, there is $\omega_0 \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ such that

$$\|\mathrm{Id} + \omega_0 T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

for every rank-one operator $T \in L(X)$. Moreover, two possibilities may happen:

(a) If $\omega_0^n \neq 1$ for every $n \in \mathbb{N}$, then

$$\|\mathrm{Id} + \omega\, T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

for every rank-one operator $T \in L(X)$ and every $\omega \in \mathbb{T}$.

(b) Otherwise, if we take the minimum $n \in \mathbb{N}$ such that $\omega_0^n = 1$, then

$$\|\mathrm{Id} + \omega\, T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

for every rank-one operator $T \in L(X)$ and every n^{th}-root ω of the unit.

In the next example we show a Banach space without the Daugavet property in which all the equations given in the preceding theorem hold for every rank-one operator.

A.3.5 Example. *The complex Banach space $X = C[0,1] \oplus_2 C[0,1]$ does not have the Daugavet property. However, the norm equality*

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$ and every $\omega \in \mathbb{T}$.

• **Real case**

The situation in the real case is far away from being so clear, but results analogous to Theorems A.3.2 and A.3.4 remain valid when the function g is onto.

A.3.6 Theorem. *Let X be a real Banach space with dimension greater than one. Suppose that there exist an onto analytic function $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ and a continuous* *function* $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$*, such that the norm equality*

$$\|\mathrm{Id} + g(T)\| = f(\|g(T)\|)$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$*. Then, either* $g(0) \neq -\frac{1}{2}$ *and* X *has the Daugavet property, or* $g(0) = -\frac{1}{2}$ *and the equality*

$$\|\mathrm{Id} - T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$*.*

The next example shows that the two possibilities given in the preceding theorem are essentially different.

A.3.7 Example. *The real Banach space* $X = C[0,1] \oplus_2 C[0,1]$ *does not have the Daugavet property. However, the norm equality*

$$\|\mathrm{Id} - T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$*.*

We do not know if a result similar to Theorem A.3.2 is true when the function g is not onto. We study two simple cases, namely $g(t) = t^2$ and $g(t) = -t^2$ for $t \in \mathbb{R}_0^+$. In the first case it is easy to see that if the equation $\|\mathrm{Id} + T^2\| = f\big(\|T^2\|\big)$ holds for every rank-one operator then $f(t) = 1 + t$ for $t \in \mathbb{R}_0^+$. Therefore, we obtain the equation $\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$ which admits the following geometric characterization.

A.3.8 Proposition. *Let* X *be a real Banach space. The following are equivalent:*

(*i*) $\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$ *for every rank-one operator* T*.*

(*ii*) $\|\mathrm{Id} + x^* \otimes x\| = 1 + \|x^* \otimes x\|$ *for every* $x^* \in X^*$*,* $x \in X$ *with* $x^*(x) \geqslant 0$*.*

(*iii*) *For every* $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ *with* $x^*(x) \geqslant 0$, *and every* $\varepsilon > 0$, *there exists* $y \in S_X$ *such that*

$$\|x+y\| > 2-\varepsilon \qquad \text{and} \qquad x^*(y) > 1-\varepsilon.$$

(*iv*) *For every* $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ *with* $x^*(x) \geqslant 0$, *and every* $\varepsilon > 0$, *there exists* $y^* \in S_{X^*}$ *such that*

$$\|x^*+y^*\| > 2-\varepsilon \qquad \text{and} \qquad y^*(x) > 1-\varepsilon.$$

When we consider the function $g(t) = -t^2$ we are not even able to determine the function f. If we take $f(t) = 1+t$ for every $t \in \mathbb{R}_0^+$, we get the equation $\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$ which also admits a geometric characterization:

A.3.9 Proposition. *Let* X *be a real Banach space. The following are equivalent:*

(*i*) $\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\|$ *for every rank-one operator* T.

(*ii*) $\|\mathrm{Id} + x^* \otimes x\| = 1 + \|x^* \otimes x\|$ *for every* $x^* \in X^*$, $x \in X$ *with* $x^*(x) \leqslant 0$.

(*iii*) *For every* $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ *with* $x^*(x) \leqslant 0$, *and every* $\varepsilon > 0$, *there exists* $y \in S_X$ *such that*

$$\|x+y\| > 2-\varepsilon \qquad \text{and} \qquad x^*(y) > 1-\varepsilon.$$

(*iv*) *For every* $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ *with* $x^*(x) \leqslant 0$, *and every* $\varepsilon > 0$, *there exists* $y^* \in S_{X^*}$ *such that*

$$\|x^*+y^*\| > 2-\varepsilon \qquad \text{and} \qquad y^*(x) > 1-\varepsilon.$$

A.3.3. The new equations

We devote the last part of this chapter to study the new properties that arise in our discussion. Like the Daugavet property, they bring with them some structural consequences. We begin our study with the equation

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\| \tag{A.4}$$

for ω belonging to a closed subgroup of $\mathbb{T}$. This property implies that the space involved does not have the Radon-Nikodým property; in fact, it is possible to quantify the diameter of the slices of its unit ball.

A.3.10 Proposition. *Let X be a Banach space and let A be a closed subgroup of $\mathbb{T}$. Assume that the equality*

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$ and every $\omega \in A$. Then, the diameter of every slice of B_X and every w^*-slice of B_{X^*} is greater or equal to

$$2 - \text{ínf}\{|1+\omega| \ : \ \omega \in A\}.$$

A.3.11 Corollary. *Let X be a Banach space and let A be a non-trivial closed subgroup of $\mathbb{T}$. Assume that*

$$\|\mathrm{Id} + \omega T\| = \|\mathrm{Id} + T\|$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$ and every $\omega \in A$. Then, X does not have the Radon-Nikodým property and it is not an Asplund space.

We also show that the properties we are dealing with are inherited by absolute summands. More precisely:

A.3.12 Proposition. *Let A be a non-trivial closed subgroup of $\mathbb{T}$ and let X be a Banach space such that Eq.* (A.4) *holds for every rank-one operator $T \in L(X)$ and every $\omega \in A$. If Y is an absolute summand of X with* $\dim(Y) \geqslant 2$*; then, Eq.* (A.4) *also holds for every rank-one operator $T \in L(Y)$ and every $\omega \in A$.*

Now we consider real Banach spaces X in which the equation

$$\|\mathrm{Id} - T^2\| = 1 + \|T^2\| \tag{A.5}$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$. As in the preceding case this property implies that the Banach space involved does not have the Radon-Nikodým property (furthermore, every slice of B_X has diameter 2) and it is inherited by L-summands and M-summands.

A.3.13 Proposition. *Let X be a real Banach space. Suppose that Eq.* (A.5) *holds for every rank-one operator $T \in L(X)$. Then, the following hold:*

a) Every slice of B_X and every w^*-slice of B_{X^*} has diameter 2.

b) If Y is a L-summand or a M-summand of X, then Eq. (A.5) *holds for every rank-one operator $T \in L(Y)$.*

Finally, we deal with real Banach spaces X in which the equation

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\| \tag{A.6}$$

holds for every rank-one operator $T \in L(X)$. This property also implies that X does not have the Radon-Nikodým property and it is inherited by L-summands and M-summands.

A.3.14 Proposition. *Let X be a real Banach space with* $\dim(X) \geqslant 2$. *Suppose that Eq.* (A.6) *holds for every rank-one operator $T \in L(X)$. Then:*

a) X does not have the Radon-Nikodým property.

b) If Y is a L-summand or a M-summand of X, then Eq. (A.6) *holds for every rank-one operator $T \in L(Y)$.*

We observe that Eq (A.6) makes sense for arbitrary operators. Therefore, we consider the following problem.

A.3.15 Problem. Does there exist a real Banach space X (different from $\mathbb{R}$) such that Eq (A.6) holds for every $T \in L(X)$?

If X is a Banach space which answers positively the above problem, Proposition A.3.14 tells us that X must be infinite-dimensional and the following result shows that it does not have unconditional basis.

A.3.16 Proposition. *Let X be an infinite-dimensional real Banach space such that*

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\|$$

holds for every $T \in L(X)$. Then, X does not have unconditional basis.

We also observe that some spaces like c_0, ℓ_p, $C[0,1]$, and $L_1[0,1]$ do not serve as positive answer to the above problem.

Bibliografía

[1] Y. Abramovich, A generalization of a theorem of J. Holub, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 937–939.

[2] Y. Abramovich, New classes of spaces on which compact operators satisfy the Daugavet equation, *J. Operator Theory* **25** (1991), 331–345.

[3] Y. Abramovich and C. Aliprantis, *An invitation to Operator Theory*, Graduate Texts in Math. **50**, AMS, Providence, RI, 2002.

[4] Y. Abramovich and C. Aliprantis, *Problems in Operator Theory*, Graduate Texts in Math. **51**, AMS, Providence, RI, 2002.

[5] Y. Abramovich, C. Aliprantis, and O. Burkinshaw, The Daugavet Equation in Uniformly Convex Banach spaces, *J. Funct. Anal.* **97** (1991), 215–230.

[6] M. D. Acosta, F. J. Aguirre, and R. Payá, A new sufficient condition for the denseness of norm attaining operators, *Rocky Mountain J. Math.* **26** (1996), 407–418.

[7] J. Adams *Lectures on Lie groups*, W.A. Benjamin Inc., New York, 1969.

[8] F. J. Aguirre, *Algunos problemas de optinización en dinensión infinita: aplicaciones lineales y multilineales que alcanzan su norma*, Tesis doctoral, Secretariado de Publicaciones, Universidad de Granada 1995.

[9] C. Aparicio, F. Ocaña, R. Payá and A. Rodríguez-Palacios, A non-smooth extension of frechet differentiability of the norm with applications to numerical ranges, *Glasgow Math. J.* **28** (1986), 121–137.

[10] J. Arias de Reyna, J. Diestel, V. Lomonosov, and L. Rodriguez-Piazza, Some observations about the space of weakly continuous functions from a compact space into a Banach space, *Quaestiones Math.* **15** (1992), 415–425.

[11] M. Artin, *Algebra*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

[12] E. Asplund, Fréchet differentiability of convex functions, *Acta Math.* **121** (1968), 31–47.

[13] S. BANACH, *Theory of linear operations*, North-Holland Mathematical Library **38**, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[14] F. L. BAUER, On the field of values subordinate to a norm, *Numer. Math.* **4** (1962), 103–111.

[15] B. BEAUZAMY, *Introduction to Banach spaces and their geometry*, Mathematics Studies **68**, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[16] J. BECERRA GUERRERO, AND M. MARTÍN, The Daugavet property of C^*-algebras, JB^*-triples, and of their isometric preduals, *J. Funct. Anal.* **224** (2005), 316–337.

[17] E. BEHRENDS, *M-structure and the Banach-Stone Theorem*, Lecture Notes in Math. **736**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[18] E. BEHRENDS ET AL., *L^p-structure in real Banach spaces*, Lecture Notes in Math. **613**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[19] Y. BENYAMINI, AND P. K. LIN, An operator on L^p without best compact approximation, *Israel J. Math.* **51** (1985), 298–304.

[20] D. BILIK, V. KADETS, R. SHVIDKOY, AND D. WERNER, Narrow operators and the Daugavet property for ultraproduts, *Positivity* **9** (2005), 45–62.

[21] E. BISHOP AND R. R. PHELPS, A proof that every Banach space is subreflexive, *Bull. Amer. Math. Soc* **67** (1961), 97–98.

[22] E. BISHOP AND R. R. PHELPS, The support functionals of a convex set, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. VII: Convexity, pp. 27–35. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1963.

[23] H. F. BOHNENBLUST AND S. KARLIN, Geometrical properties of the unit sphere in Banach algebras, *Ann. of Math.* **62** (1955), 217–229.

[24] B. BOLLOBÁS, An extension to the theorem of Bishop and Phelps, *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 181–182.

[25] F. F. BONSALL, B. E. CAIN AND H. SCHNEIDER, The numerical range of a continuous mapping of a normed space, *Aequationes Math.* **2** (1968), 86–93.

[26] F. F. BONSALL AND J. DUNCAN, *Numerical Ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series **2**, Cambridge University Press, 1971.

[27] F. F. BONSALL AND J. DUNCAN, *Numerical Ranges II*, London Math. Soc. Lecture Note Series **10**, Cambridge University Press, 1973.

[28] F. F. BONSALL AND J. DUNCAN, Numerical ranges, in: *Studies in functional analysis* (R. Bartle, Ed.), pp. 1–49, MAA Studies in Math. **21**, 1980.

[29] R. R. BOURGIN, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodym Property*, Lecture Notes in Math. **993**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[30] K. BOYKO AND V. KADETS, Daugavet equation in L_1 as a limiting case of the Benyamini-Lin theorem for L_p, (preprint).

[31] K. BOYKO, V. KADETS, M. MARTÍN, D. WERNER, Numerical index of Banach spaces and duality, aparecerá en *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*.

[32] J. BUNCE, Shorted operators and the structure of operators with numerical radius one, *Integral Equations Oper. Theory* **11** (1988), 287–291.

[33] P. CEMBRANOS AND J. MENDOZA, *Banach spaces of Vector-Valued Functions*, Lecture Notes in Mathematics **1676**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[34] P. CHAUVEHEID, On a property of compact operators in Banach spaces, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **51** (1982), no. 9–12, 371–378.

[35] J. B. CONWAY, *Function of one complex variable*, Graduate Text in math. **11**, Springer-Verlag, New York, 1973.

[36] K. DAS, S. MAJUMDAR, AND B. SIMS, Subsets characterizing the closure of the numerical range, *J. Aust. Math. Soc.* **40** (1986), 1–4.

[37] K. DAS, S. MAJUMDAR, AND B. SIMS, Restricted numerical range and weak convergence on the boundary of the numerical range, *J. Math. Phys. Sci.* **21** (1987), 35–42.

[38] I. K. DAUGAVET, On a property of completely continuous operators in the space C, *Uspekhi Mat. Nauk* **18** (1963), 157–158.

[39] R. DEVILLE, G. GODEFROY AND V. ZIZLER, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **64**, Longman Scientific & Tecnical, London, 1993.

[40] J. DIESTEL, *Geometry of Banach Spaces-Selected Topics*, Lecture Notes in Math. **485**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[41] J. DIESTEL AND J. J. UHL, *Vector Measures*, Math. Surveys **15**, AMS, Providence, 1977.

[42] J. DUNCAN, C. M. MCGREGOR, J. D. PRYCE, AND A. J. WHITE, The numerical index of a normed space, *J. London Math. Soc.* **2** (1970), 481–488.

[43] N. DUNFORD AND J. SCHWARTZ, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience, New York, 1957.

[44] E. ED-DARI, On the numerical index of Banach spaces, *Linear Algebra Appl.* **403** (2005), 86–96.

[45] E. ED-DARI AND M. KHAMSI, The numerical index of the L_p space, *aparecerá en Proc. Amer. Math.Soc.*

[46] R. EVANS, *Projectionen mit normbedingungen in reellen Banachraumen*, Disertation, Freie Universitat, Berlin, 1974.

[47] M. FABIAN ET AL., *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS books in mathematics **8**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[48] M. FAN, A result about the numerical range of operators, *Chin. Ann. Math.* **7** (1986), 408–412.

[49] C. FINET, M. MARTÍN, AND R. PAYÁ, Numerical index and renorming, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 871–877.

[50] C. FOIAS AND I. SINGER, Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions, *Math. Z.* **87** (1965), 434–450.

[51] V. P. FONF, J. LINDENSTRAUSS, AND R. R. PHELPS, Infinite dimensional convexity. In: *Handbook of the geometry of Banach spaces*, Vol. I, 599–670, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[52] V. P. FONF AND L. VESELÝ, Infinite-Dimensional Polyhedrality *Canad. J. Math.* **56**, (2004), no. 3, 472–494.

[53] C. FRANCHETTI AND R. PAYÁ, Banach spaces with strongly subdifferentiable norm., *Bolletino U. M. I.* **7** (1993), 45–70.

[54] J. R. GILES, *Convex analysis with application in differentiation of convex functions*, Research Notes in Math. **58**, Pitman, Boston, 1982.

[55] B. W. GLICKFELD, On an inequality of Banach algebra geometry and semi-inner-product space theory, *Illinois J. Math.* **14** (1970), 76–81.

[56] G. GODEFROY, Some applications of Simons' inequality, *Serdica Math. J.* **26** (2000), 59–78.

[57] G. GODEFROY, V. MONTESINOS AND V. ZIZLER, Strong subdifferentiability of norms and geometry of Banach spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.* **36** (1995), no.3, 493–502.

[58] H. GOWDA AND C. PUTTAMADAIAH, On spatial numerical range of operators on Banach spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* **19** (1988), 177–182.

[59] R. E. GREENE AND S. G. KRANTZ, *Function Theory of One Complex Variable*, Graduate Studies in Mathematics **40**, AMS, Providence, RI, 2002.

[60] D. GREGORY, Upper semi-continuity of subdifferential mappings, *Canad. Math. Bull.* **23** (1980), 11–19.

[61] K. E. GUSTAFSON AND D. K. M. RAO, *Numerical range. The field of values of linear operators and matrices*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[62] P. HALMOS, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, New York, 1967.

[63] G. H. HARDY AND E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers (5th edition)*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[64] P. HARMAND, D. WERNER, AND D. WERNER, *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras*, Lecture Notes in Math. **1547**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[65] L. A. HARRIS, The numerical range of holomorphic functions in Banach spaces, *American J. Math.* **93** (1971), 1005–1019.

[66] L. A. HARRIS, The numerical range of functions and best approximation, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **76** (1974), 133–141.

[67] F. HIRSCH AND G. LACOMBE, *Elements of Functional Analysis*, Graduate texts in Mathematics **192**, Springer-Verlag, New York, 1999.

[68] J. R. HOLUB, A property of weakly compact operators on $C[0,1]$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), 396–398.

[69] J. R. HOLUB, Daugavet's equation and operators on $L_1(\mu)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **100** (1987), 295–300.

[70] Z. HU, AND M. A. SMITH, On the extremal structure of the unit balls of Banach spaces of weakly continuous functions and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), 1901–1918.

[71] T. HURUYA, The normed space numerical index of C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **63** (1977), 289–290.

[72] V. KADETS, Some remarks concerning the Daugavet equation, *Quaest. Math.*, **19** (1996), 225–235.

[73] V. KADETS, N. KALTON, AND D. WERNER, Remarks on rich subspaces of Banach spaces, *Studia Math.* **159** (2003), 195–206.

[74] V. KADETS, M. MARTÍN, AND J. MERÍ, Norm equalities for operators, (preprint).

[75] V. KADETS AND M. POPOV., The Daugavet property for narrow operators in rich subspaces of the spaces $C[0,1]$ and $L_1[0,1]$. *Algebra i Analiz*, **8** (1996), no. 4, 43–62.

[76] V. KADETS, R. SHVIDKOY, G. SIROTKIN, AND D. WERNER, Espaces de Banach ayant la propriété de Daugavet, *C. R. Acad. Sci. Paris* **325** (1997), 1291–1294.

[77] V. KADETS, R. SHVIDKOY, G. SIROTKIN, AND D. WERNER, Banach spaces with the Daugavet property, *Trans. Amer. Math. Soc.* **352** (2000), 855–873.

[78] V. KADETS AND D. WERNER, A Banach space with the Schur and the Daugavet property, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (2004), 1765–1773.

[79] A. KAIDI, A. MORALES, AND A. RODRÍGUEZ-PALACIOS, Geometrical properties of the product of a C^*-algebra, *Rocky Mountain J. Math.* **31** (2001), 197–213.

[80] Å. LIMA, Intersection properties of balls in spaces of compact operators, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **28** (1978), 35–65.

[81] Å. LIMA, On extreme operators on finite-dimensional Banach spaces whose unit balls are polytopes, *Ark. Mat.* **19** (1981), 97–116.

[82] Å. LIMA, The metric approximation property, norm-one projections and intersection properties of balls, *Israel J. Math.* **84** (1993), 451–475.

[83] G. LÓPEZ, M. MARTÍN, AND M. MERÍ, Numerical index of Banach spaces of weakly or weakly-star continuous functions, aparecerá en *Rocky Mountain J. Math.*

[84] G. LÓPEZ, M. MARTÍN, AND R. PAYÁ, Real Banach spaces with numerical index 1, *Bull. London Math. Soc.* **31** (1999), 207–212.

[85] G. LUMER, Semi-inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **100** (1961), 29–43.

[86] M. MARTÍN, Índice numérico y subespacios, (Spanish) *Proceedings of the Meeting of Andalusian Mathematicians (Sevilla, 2000)*, Vol. II, 641–648, Colecc. Abierta, **52**, Univ. Sevilla Secr. Publ., Sevilla, 2001.

[87] M. MARTÍN, Banach spaces having the Radon-Nikodým property and numerical index 1, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), 3407–3410.

[88] M. MARTÍN, The Daugavetian index of a Banach space, *Taiwanese J. Math.* **7** (2003), 631–640.

[89] M. MARTÍN, The alternative Daugavet property of C^*-algebras and JB^*-triples, (preprint).

[90] M. MARTÍN AND J. MERÍ, Numerical index of some polyhedral norms on the plane, aparecerá en *Linear Multilinear Algebra*.

[91] M. MARTÍN, J. MERÍ AND R. PAYÁ, On the intrinsic and the spatial numerical range, *J. Math. Anal. Appl.* **318** (2006), 175–189.

[92] M. MARTÍN, J. MERÍ AND A. RODRÍGUEZ-PALACIOS, Finite-dimensional Banach spaces with numerical index zero, *Indiana Univ. Math. J.* **53** (2004), no. 5, 1279–1289.

[93] M. MARTÍN, J. MERÍ AND A. RODRÍGUEZ-PALACIOS, Finite-dimensional Banach spaces with numerical index zero, *Extracta Math.* **19** (2004), 151–153.

[94] M. MARTÍN AND T. OIKHBERG, An alternative Daugavet property, *J. Math. Anal. Appl.* **294** (2004), 158–180.

[95] M. MARTÍN AND R. PAYÁ, Numerical index of vector-valued function spaces, *Studia Math.* **142** (2000), 269–280.

[96] M. MARTÍN AND A. R. VILLENA, Numerical index and Daugavet property for $L_\infty(\mu, X)$, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **46** (2003), 415–420.

[97] J. MARTÍNEZ, J. F. MENA, R. PAYÁ AND A. RODRÍGUEZ-PALACIOS, An approach to numerical ranges without Banach algebra theory, *Illinois J. Math.* **29** (1985), no. 4, 609–626.

[98] C. M. MCGREGOR, Finite dimensional normed linear spaces with numerical index 1, *J. London Math. Soc.* **3** (1971), no. 2, 717–721.

[99] R. MEGGINSON, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, **183**, Springer-Verlag, New York, 1998.

[100] V. MONTESINOS, A note on weakly continuous Banach space valued functions, *Quaestiones Math.* **15** (1992), 501–503.

[101] T. OIKHBERG, The Daugavet Property of C^*-Algebras and Non-conmutative L_p-Spaces, *Positivity* **6** (2002), 59–73.

[102] T. OIKHBERG, Spaces of operators, the ψ-Daugavet property, and numerical indices, *Positivity* **9** (2005), no. 4, 607–623.

[103] R. PAYÁ, *Técnicas de rango numérico y estructura en espacios normados*, Tesis doctorales de la Universidad de Granada **319**, 1980.

[104] R. PAYÁ, Numerical range of operators and structure in Banach spaces, *Quart. J. Math. Oxford* **33** (1982), 357–364.

[105] R. PHELPS, *Lectures on Choquet´s Theorem*, Van Nostrand Mathematical Studies, **7**. D. Van Nostramd Company, INC. Priceton, New Yersey, 1966.

[106] R. R. PHELPS, Support cones in Banach spaces and their applications, *Adv. Math.* **13** (1974), 1–19.

[107] R. R. PHELPS, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lecture Notes in Math. **1364**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[108] A. PLICHKO AND M. M. POPOV, Symmetric function spaces on atomless probability spaces, *Diss. Math.* **306** (1990), 1–85.

[109] M. M. POPOV AND B. RANDRIANANTOANINA, A pseudo-Daugavet property for narrow projections in Lorentz spaces, *Illinois J. Math.* **46** (2002), no. 4, 1313–1338.

[110] V. V. PRASOLOV, *Problems and Theorems in Linear Algebra*, Translations of Mathematical Monographs **134**, AMS, Providence, Rhode Island, 1994.

[111] S. REICH, Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators, *J. Funct. Anal.* **36** (1980), 147–168.

[112] S. REISNER, Certain Banach spaces associated with graphs and CL-spaces with 1-unconditonal bases, *J. London Math. Soc* **43** (1991), no. 2, 137–148.

[113] N.J. ROBBIN, Lie algebras of infinitesimal norm isometries, *Lin. Alg. and its Appl.* **10** (1975), 95–102.

[114] A. RODRÍGUEZ-PALACIOS, An approach to Jordan-Banach algebras from the theory of Nonassociative complete normed algebras, *Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand II Math.* **27** (1991), 1–57.

[115] A. RODRÍGUEZ-PALACIOS, A numerical range characterization of uniformly smooth Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 815–821.

[116] A. RODRÍGUEZ-PALACIOS, Numerical ranges of uniformly continuous functions on the unit sphere of a Banach space, *J. Math. Anal. Appl.* **297** (2004), 472–476.

[117] S. ROLEWICZ, *Metric Linear Spaces (Second edition)*, Mathematics and its Applications (East European Series), **20**. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht; PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1985.

[118] H. ROSENTHAL, The Lie algebra of a Banach space, *Lecture Notes in Math.* **1166**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[119] H. ROSENTHAL, Functional hilbertian sums, *Pac. J. Math.* **124** (1986), 417–467.

[120] K. D. SCHMIDT, Daugavet's equation and orthomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 905–911.

[121] R. V. SHVIDKOY, Geometric aspects of the Daugavet property, *J. Funct. Anal.* **176** (2000), 198–212.

[122] I. SINGER, *Bases in Banach Spaces I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **154**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

[123] O. TOEPLITZ, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer, *Math. Z.* **2** (1918), 187–197.

[124] H. TUY, *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[125] D. WERNER, An elementary approach to the Daugavet equation, in: *Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis and Probability* (N. Kalton, E. Saab and S. Montgomery-Smith editors), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **175** (1994), 449–454.

[126] D. WERNER, The Daugavet equation for operators on function spaces, *J. Funct. Anal.* **143** (1997), 117–128.

[127] D. WERNER, Recent progress on the Daugavet property, *Irish Math. Soc. Bull.* **46** (2001), 77-97.

[128] P. WOJTASZCZYK, Some remarks on the Daugavet equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 1047–1052.

[129] Y. YANG, Numerical ranges of operators on Hilbert C^*-modules, *Bull. Korean Math. Soc.* **24** (1987), 52–52.

[130] V. ZIZLER, On some extremal problems in Banach spaces, *Math. Scand.* **32** (1973), 214–224.

Glosario