Rasgos de talento matemático en estudiantes de secundaria. Generalización en un contexto funcional

Jason Ureña, María José Beltrán-Meneu y Rafael Ramírez

Este trabajo registra rasgos diferenciadores de talento matemático en estudiantes de primero y segundo de ESO que resuelven una prueba de acceso a un programa de estímulo del talento matemático. Se comparan los estudiantes admitidos en el programa y los no admitidos, centrando el análisis en la resolución de un problema de generalización que involucra una relación funcional. Los resultados revelan la aplicación de estrategias eficientes y la consistencia entre sus respuestas. Los estudiantes admitidos destacaron por realizar regularidades completas y representar simbólicamente sus generalizaciones evidenciando estructuras más variadas, coherentes y complejas que otros estudiantes.

Términos clave: Estrategias; Pensamiento algebraico; Pensamiento funcional; Representaciones de la generalización; Talento matemático

Traits of mathematical talent in secondary school students. Generalization in a functional context

This work identifies differentiating traits of mathematical talent in seventh and eighth grade secondary school students who solved an admission test to a program to stimulate mathematical talent. A comparison is carried out between the students admitted to the program and those not admitted, focused on the analysis of the resolution of a generalization problem that involves a functional relationship. The results reveal the application of efficient strategies and the consistency between their responses. Admitted students stood out for mainly following complete regularities and symbolically representing their generalizations, they evidenced more varied, coherent and complex structures than the other students.

Keywords: Algebraic thinking; Functional thinking; Mathematical talent; Representations of generalization; Strategies

Ureña, J., Beltrán-Meneu, M. J. y Ramírez, R. (2024). Rasgos de talento matemático en estudiantes de secundaria. Generalización en un contexto funcional. *PNA, 19*(1), 53-79. http://doi.org/10.30827/pna.v19i1.28279

Características do talento matemático em estudantes de Ensino Médio. Generalização em um contexto funcional

Este trabalho identifica características diferenciadoras do talento matemático em estudantes da sétima e oitava séries do Ensino Médio que fazem um vestibular para um programa de estímulo ao talento matemático. Fazemos uma comparação entre os estudantes admitidos e não admitidos, centrando a análise na resolução de um problema de generalização que envolve uma relação funcional. Os resultados revelam a aplicação de estratégias eficientes e a consistência entre suas respostas. Os estudantes admitidos se destacaram por fazerem regularidades completas e representar simbolicamente suas generalizações, evidenciando estruturas mais variadas, coerentes e complexas que os restantes estudantes.

Palavras-chave: Estratégias; Pensamento algebráico; Pensamento funcional; Representação da generalização; Talento matemático

Las personas con talento matemático manifiestan "un conjunto único de habilidades matemáticas que abre la posibilidad de un desempeño exitoso en la actividad matemática" (Krutetskii, 1976, p. 77). Presentan habilidades inusualmente más altas para resolver problemas que las de sus compañeros, aunque su identificación suscita controversia, pudiéndose encontrar en la literatura test de inteligencia, test de rendimiento y de habilidad matemática y test de creatividad (p. e., Pitta-Pantazi et al., 2011).

Varios estudios han mostrado que cuestionarios basados en la resolución de problemas matemáticos son más eficaces que los test de inteligencia para la detección de los estudiantes con talento matemático (p.e., Butto et al., 2016; Castro et al., 2006; Díaz et al., 2008; Niederer et al., 2003). Los problemas de generalización algebraica pueden resultar interesantes en este sentido al permitir identificar habilidades de generalización, abstracción y simbolización (Amit y Neria, 2008; Arbona et al., 2019), más desarrolladas en estudiantes de talento matemático que en la mayoría de estudiantes de la misma edad o curso escolar. Especialmente el pensamiento funcional como componente esencial del pensamiento algebraico valida contextos ricos para la exploración y descripción de habilidades matemáticas, entre estas el uso pertinente y variado de representaciones (p.e., Blanton et al., 2011; Radford, 2018). Estos contextos integran el razonamiento, manipulación, justificación, generalización y representación de las relaciones que se pueden establecer entre cantidades que covarían (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008).

A su vez, la literatura ha mostrado interés en el análisis de las estrategias de resolución empleadas por estudiantes de primaria o secundaria en situaciones de generalización con patrones (p.e., Amit y Neria, 2008; Barbosa et al., 2012; El

Mouhayar y Jurdak, 2015; Stacey, 1989) o en contextos funcionales (p.e., Pinto y Cañadas, 2021; Ureña et al., 2023). Resultados de estos trabajos permiten identificar diversidad en las estrategias usadas y un bajo desempeño de los estudiantes a la hora de emplear estrategias adecuadas para generalizar o para expresar sus generalizaciones (p.e., Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989; Ureña et al., 2023). Los escasos trabajos que abordan estos aspectos en estudiantes con rasgos de talento matemático tanto de educación primaria (Arbona et al., 2019; Fritzlar y Karpinski-Siebold, 2012; Yildiz y Durmaz, 2021) como de secundaria (Amit y Neria, 2008) evidencian una alta competencia de los estudiantes a la hora de generalizar y usar correctamente estrategias funcionales. Es por esto que reconocemos en el pensamiento algebraico, y en particular en el contexto funcional de generalización, una oportunidad para seguir profundizando en la identificación de rasgos característicos de talento matemático.

Objetivos de investigación

El objetivo general de este trabajo es describir rasgos de talento matemático asociados a la resolución de un problema de generalización por parte de estudiantes de primer y segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (12-14 años) que se presentaron a la prueba de acceso de un programa de estímulo del talento matemático. La generalización y su representación son los focos a los que prestamos atención como elementos esenciales del pensamiento algebraico (p.e., Kaput, 2008; Radford, 2018) y por involucrar pensamiento de orden superior (Greenes, 1981; Sriraman, 2003). A su vez, integramos el estudio de las estrategias de resolución que emplean los estudiantes al generalizar, como un área de estudio en desarrollo (p.e., Arbona et al., 2021a; Ureña et al., 2023) y que podría ilustrar diferentes formas de abordar una tarea de generalización y destacar formas de razonamiento (Ureña et al., 2023). El objetivo general se pretende alcanzar a través de los siguientes objetivos específicos:

- Comparar las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes admitidos en el programa (A) con las de los no seleccionados (N).
- Comparar las regularidades evidenciadas y las estructuras de las relaciones funcionales utilizadas o manifestadas por A y N.
- Describir y comparar las representaciones de la generalización utilizadas por A y N.

Se pretende que los resultados de esta investigación puedan contribuir en la descripción de características de talento matemático asociadas a la resolución de problemas desde el pensamiento algebraico y puedan resultar de interés a la hora de diseñar instrumentos que permitan al profesorado identificar rasgos de talento matemático en el aula ordinaria para la atención del estudiantado.

TALENTO MATEMÁTICO

En la literatura es posible encontrar diversos términos que designan al estudiantado que destaca por encima de la media, entre ellos los de *estudiante superdotado*, de *altas capacidades* o *talentoso*. También son diversas sus definiciones. En este trabajo consideraremos las siguientes: el término superdotado hace referencia a estudiantes con una capacidad superior generalizada y que destacan en todas las áreas o ámbitos (Jaime y Gutiérrez, 2014); el término altas capacidades refiere a estudiantes que presentan un rendimiento intelectual superior en un amplio abanico de capacidades y que aprenden con facilidad cualquier área (Torrego, 2011); el término talentoso, sin embargo, alude al estudiantado que presenta habilidades específicas propias de un área o ámbito (Jaime y Gutiérrez, 2014), distinguiéndose así distintos tipos de talento, entre ellos el talento matemático.

Krutetskii (1976) define el talento matemático como “un conjunto único de habilidades matemáticas que ofrecen la posibilidad de un desempeño exitoso en la actividad matemática” (p. 77). Este autor fue uno de los principales referentes en la identificación de características de talento matemático mediante el proceso de resolución de problemas. A partir de su trabajo, diversos investigadores (p.e., Greenes, 1981; Miller, 1990) han profundizado en dichas características, diferenciándolas entre habilidades matemáticas –como memoria matemática o resolución atípica de problemas–, y rasgos personales generales –como la perseverancia, la tolerancia a la frustración o el interés por tareas desafiantes (Singer et al., 2016). Algunas de estas características son especialmente importantes para resolver tareas de generalización, entre estas, la capacidad para identificar patrones, relaciones entre elementos y generalizar, para transferir ideas matemáticas entre contextos numéricos y algebraicos, así como localizar la clave de los problemas. También destacan el desarrollo de estrategias eficientes y abreviar los procesos de resolución, y la habilidad para organizar la información o invertir procesos (Arbona et al., 2019).

El alto rendimiento académico no es adecuado por sí solo en la identificación del talento matemático (Dündar et al., 2016), pues no refleja el razonamiento matemático independiente de los estudiantes (Leikin, 2018; Paz-Baruch et al., 2022). En el presente trabajo partimos de la definición de Leikin (2018) de estudiante con talento matemático, que hace referencia a aquel que “exhibe un alto nivel de rendimiento matemático dentro del grupo de referencia y es capaz de crear ideas matemáticas nuevas respecto a su historia educativa” (p. 3). En su trabajo la autora indica que los problemas de olimpiadas de matemáticas pueden ser un buen instrumento para la identificación de estos estudiantes.

GENERALIZACIÓN

La generalización constituye un componente matemático fundamental, particularmente del álgebra (Mason et al., 2005). Diferentes son las concepciones de generalización que se encuentran en la literatura (p.e., Polya, 1989). Kaput (1999) se refiere a generalizar como a la extensión del razonamiento más allá de los casos considerados, ya sea explicando la similitud presente o ampliando el razonamiento centrándose en patrones, procedimientos y estructuras y sus interrelaciones. En este trabajo tomamos la definición de Kaput aplicándola al contexto funcional, en un problema que involucra el establecimiento de una relación entre variables, es decir, identificar y extender a más casos de los presentados la regularidad reconocida, así como representarla mediante una regla general.

Para describir el desempeño de los estudiantes en tareas funcionales de generalización, se toman como herramientas las estrategias de resolución y las representaciones mediante las que se expresa la generalización (Ureña et al., 2023).

Estrategias de generalización

Las estrategias empleadas por los estudiantes para resolver situaciones matemáticas evidencian procesos de razonamiento, pudiendo constituir un recurso valorativo de habilidades matemáticas. Estas refieren a los procedimientos para resolver un problema, derivar conclusiones desde un conjunto de ideas y establecer relaciones (Rico, 1997).

Existen numerosos trabajos en los que se analizan las estrategias de resolución que los estudiantes de primaria y primeros cursos de secundaria utilizan en la resolución de tareas de generalización que involucran directa o indirectamente relaciones funcionales lineales $f(n) = an + b$ (p.e., Barbosa et al., 2012; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Stacey, 1989; Ureña et al., 2023).

Entre la variedad de procedimientos reportados, los estudiantes suelen generalizar usando principalmente estrategias funcionales, proporcionalidad o recursividad (p.e., Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Stacey, 1989). La estrategia funcional implica usar, analizar o expresar relaciones funcionales entre dos variables (Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006). En el caso de la proporcionalidad se establece una relación de proporcionalidad a partir de resultados determinados previamente (Lannin et al., 2006; Stacey, 1989). En la estrategia recursiva se añade reiteradamente la diferencia constante entre el valor de dos términos consecutivos a uno conocido, siguiendo procedimientos de la forma $f(n) = f(n-1) + d$ (d, diferencia común) (p.e., Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015). Sin embargo, en la educación secundaria la estrategia funcional tiene un rol más protagonista revelando un uso más frecuente conforme los estudiantes se acercan a casos generales (p.e., Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Lannin et al., 2006). En contraposición, el uso incorrecto de la proporcionalidad es un hallazgo común en varios estudios (p.e., Arbona et al., 2019; Arbona et al., 2021b; Stacey, 1989).

Investigaciones también identifican el uso de operaciones aritméticas a partir de resultados previos, sin guardar relación con la estructura del patrón (p.e., Morales et al., 2018), y respuestas directas en las que no se explica el proceso seguido (p.e., Morales et al., 2018). Otras estrategias son el conteo, en que se obtiene el valor del término a partir de su dibujo (Barbosa et al., 2012; Stacey, 1989), el uso de conocimientos adquiridos (p.e., progresiones aritméticas), o establecer y probar una regla no necesariamente aplicable a la situación (Akkan, 2013).

Complementario a las evidencias aportadas por las estrategias empleadas, las relaciones identificadas en las tareas de generalización pueden ser descritas mediante las estructuras que los estudiantes reflejan en sus respuestas (p.e., Ramírez et al., 2022; Torres et al, 2019; Ureña et al., 2023). Estas refieren a cómo se organiza y expresa una regularidad entre variables (Pinto y Cañadas, 2017), o cómo valores numéricos o indeterminados operan cuando se usan o son representados en la regularidad. La descripción de estructuras usadas al generalizar es un elemento clave del pensamiento algebraico (Hunter y Miller, 2022). Estas contribuyen a comprender cómo los estudiantes interpretan y generalizan regularidades mostrando conexiones y relaciones entre conceptos y procesos matemáticos (Ramírez et al., 2022).

Representación de la generalización

Como componente inherente a la generalización están las representaciones (Kaput, 2008; Radford, 2018). El consenso es que, si bien el simbolismo algebraico es una forma de expresar la generalización, también son posibles otras formas de representación (externa), como gestos, gráficos, lenguaje natural, entre otros. En este trabajo las representaciones de la generalización refieren a cómo la generalización se evidencia y expresa externamente (Ureña et al., 2023). Estas son un valioso recurso para entender, explicar, predecir y justificar el modo en que se relacionan las variables implicadas (Pinto y Cañadas, 2021; Ureña et al., 2023).

La literatura reconoce formas diversas de expresar la generalización. Particularmente, la representación verbal es ampliamente utilizada a lo largo de los cursos, aunque tiene mayor protagonismo en primaria (p.e., Pinto y Cañadas, 2017, 2021). Por otro lado, el uso de representaciones simbólicas aumenta a medida que nos acercamos a la educación secundaria (p.e., Akkan, 2013; Amit y Neria, 2008). Allí es donde el estudio de estructuras que revelan los estudiantes permite describir en más profundidad y establecer matices en sus respuestas. Ureña et al. (2023) distinguen en su trabajo que estudiantes de sexto curso de primaria a segundo curso de secundaria que desean ser parte de un proyecto de estímulo de talento matemático, representan la generalización de relaciones funcionales mediante verbalización con lenguaje natural, el uso de símbolos algebraicos o usando representaciones mixtas en que combinan lenguaje natural con simbolismo algebraico. Los autores también valoran cuándo una regularidad es reconocida, aunque no es expresada de forma general, sino que es representada numéricamente. Amit y Neria (2008) identifican que estudiantes de 11-13 años matemáticamente talentosos usan la representación verbal, simbólica algebraica, y semi-simbólica (que combina expresiones algebraicas con lenguaje verbal) para expresar relaciones funcionales ligadas a patrones. En contraposición, Torres et al. (2019) observan que estudiantes de segundo curso (7-8 años), sin instrucción algebraica previa, utilizan representaciones numéricas o verbales, sin llegar a generalizar las relaciones identificadas. También es esencial valorar que las generalizaciones pueden sustentarse en otras representaciones o combinaciones de estas, por ejemplo, dibujos (Hunter y Miller, 2022), tablas de valores o ejes de coordenadas (Wilkie, 2016).

Generalización y talento matemático

La habilidad para generalizar objetos matemáticos, relaciones y operaciones es uno de los componentes básicos de la estructura matemática y un componente especial en el desarrollo del talento matemático (Greenes, 1981; Krutetskii, 1976). Esta involucra pensamiento de orden superior como flexibilidad de razonamiento, pensamiento holístico, abstracción y visualización, característico del talento matemático (p.e., Amit y Neria, 2008; Greenes, 1981; Sriraman, 2003).

A pesar de esto, existen reducidos trabajos que describen las estrategias o las representaciones de la generalización en estudiantes con rasgos de talento matemático (Arbona et al., 2019). Arbona et al. (2019) evidencian diferencias significativas en las estrategias empleadas por estudiantes de primaria de nivel medio y estudiantes buenos resolutores de problemas con patrones geométricos. Se observa que mientras los primeros presentan un uso incorrecto y frecuente de estrategias funcionales y de estrategias proporcionales, los segundos destacan por utilizar correctamente estrategias funcionales que sustituyen por recursivas cuando no logran identificar la estructura del patrón. Arbona et al. (2021b) muestran estas diferencias entre estudiantes de primaria ordinarios y estudiantes con superdotación general en el entorno de una aplicación móvil que permitía la resolución y autocorrección de problemas de patrones geométricos. Determinan que los estudiantes superdotados necesitan menos intentos que los demás para llegar a la respuesta correcta, a pesar de haber recibido menos instrucción.

Fritzlar y Karpinski-Siebold (2012) no observan grandes diferencias en las resoluciones de una tarea que involucraba un patrón de tipo cuadrático entre estudiantes de 9-10 años de talento matemático y estudiantes de alto desempeño académico en matemáticas, aunque sí en las resoluciones a un patrón de tipo lineal. Amit y Neria (2008) reconocen que estudiantes matemáticamente talentosos de los cursos 6-7 (11 a 13 años) generalizan patrones lineales y cuadráticos empleando estrategias recursivas para casos particulares y estrategias funcionales para casos generales. Además, muestran flexibilidad para cambiar entre representaciones gráficas, verbales y numéricas y para abandonar estrategias aditivas a favor de estrategias multiplicativas más eficaces. Yildiz y Durmaz (2021) observan el razonamiento empleado por un estudiante de talento matemático de décimo curso a la hora de trabajar con patrones geométricos y detectan que mientras que en los patrones lineales usan razonamientos visuales, en los cuadráticos destacan los de tipo numérico.

Desde los resultados mostrados, en nuestro trabajo pretendemos ahondar en la descripción de estrategias y representaciones de generalización de estudiantes con rasgos de talento matemático.

Metodología

El trabajo realizado es de tipo cualitativo ya que sigue un proceso inductivo, partiendo de lo particular a lo general, y analiza en detalle la información en la que se focaliza para extraer conclusiones. Específicamente tiene una naturaleza descriptiva en cuanto expone cómo se evidencian los objetos focos del trabajo, y exploratoria al abordar un problema poco estudiado o que puede ser profundizado desde otras perspectivas (Hernández et al., 2014).

En el estudio participaron 280 estudiantes de entre 12 y 14 años, 167 de primero de ESO (1 ESO) y 113 segundo de ESO (2 ESO), que se presentaron voluntariamente a responder un cuestionario como prueba de acceso a un programa de estímulo del talento matemático (Ramírez y Cañadas, 2018). Ellos habían sido recomendados por sus profesores de matemáticas al ser reconocidos como buenos resolutores de problemas y por mostrar especial interés en la asignatura. Del conjunto de 280 estudiantes, únicamente los que obtuvieron las 30 mejores puntuaciones en la prueba fueron seleccionados para la siguiente fase de selección que consistía en una entrevista. Las puntuaciones dependieron no solo de la cantidad de resoluciones correctas, sino también de la forma de abordar los problemas y la originalidad.

Para describir los resultados y establecer comparaciones de acuerdo con los objetivos de la investigación, los participantes fueron divididos en dos grupos: admitidos en el programa (A) y no admitidos (N). La distribución de estudiantes por curso es la indicada en la tabla 1.

Es importante informar que los estudiantes admitidos en el programa, aunque no fueron diagnosticados mediante un test estandarizado, constituyen una muestra seleccionada mediante un procedimiento similar al usado en el trabajo de Amit y Neria (2008) sobre estudiantes con talento matemático. Se usa un cuestionario que pretende hacer aflorar el pensamiento matemático independiente de los estudiantes, con poca relación con el conocimiento matemático escolar, y que permite identificar formas eficientes u originales de aproximarse a los problemas. La capacidad para crear ideas matemáticas nuevas respecto al contexto educativo y una habilidad matemática superior a la media caracterizan el talento matemático según la definición de Leikin (2018).

Tabla 1
Distribución de participantes en la prueba de acceso al programa

Participantes	1 ESO	2 ESO	Total
Admitidos	16	14	30
No admitidos	151	99	250
Total	167	113	280

Por tanto, el conjunto de la población considerada se ajusta a los objetivos de la investigación y constituye una valiosa fuente de información para reconocer características de talento matemático tomando como referencia las estrategias utilizadas y las representaciones de la generalización manifestadas por los dos grupos de estudiantes.

Instrumento

La prueba de acceso consistió en la resolución de cinco problemas con distinto contenido matemático (funciones, operaciones con números, divisibilidad, medida y construcciones espaciales) que, como se ha mencionado anteriormente, involucraban conocimientos matemáticos básicos. Estaban diseñados para permitir evidenciar distintos tipos de pensamiento y habilidades matemáticas, así como distintos modos de abordar los problemas.

En correspondencia con el estudio del talento matemático desde el pensamiento algebraico, analizamos las respuestas a un solo problema, llamado "la situación del agricultor" (Ramírez y Cañadas, 2018). El problema presenta un enunciado verbal y una representación pictórica de la información (Figura 1) y pretende que los estudiantes determinen, generalicen y representen la relación funcional lineal existente entre las variables que intervienen. Dicho problema fue validado por profesores de educación secundaria involucrados en el programa, que valoraron su pertinencia de acuerdo con la edad, conocimientos y habilidades matemáticas de los estudiantes. El problema parte de casos específicos al general y requiere indicar la cantidad de cuadrados que se pueden formar considerando una serie de puntos, que van aumentando de 3 en 3 cada día (semillas de patata), como vértices. Se solicita a los estudiantes determinar y justificar la cantidad de cuadrados que se pueden formar los días 3, 4, 100 y n. Esta organización inductiva tiene como objetivo facilitar el reconocimiento de la regularidad y determinar la función que relaciona el número de días con el número de cuadrados y, en consecuencia, generalizarla y representarla. La función implícita es $f(n) = 4n - 6, n \geq 2$ (ya que cada día se forman 4 cuadrados más, excepto en los dos primeros días, en que se forman menos).

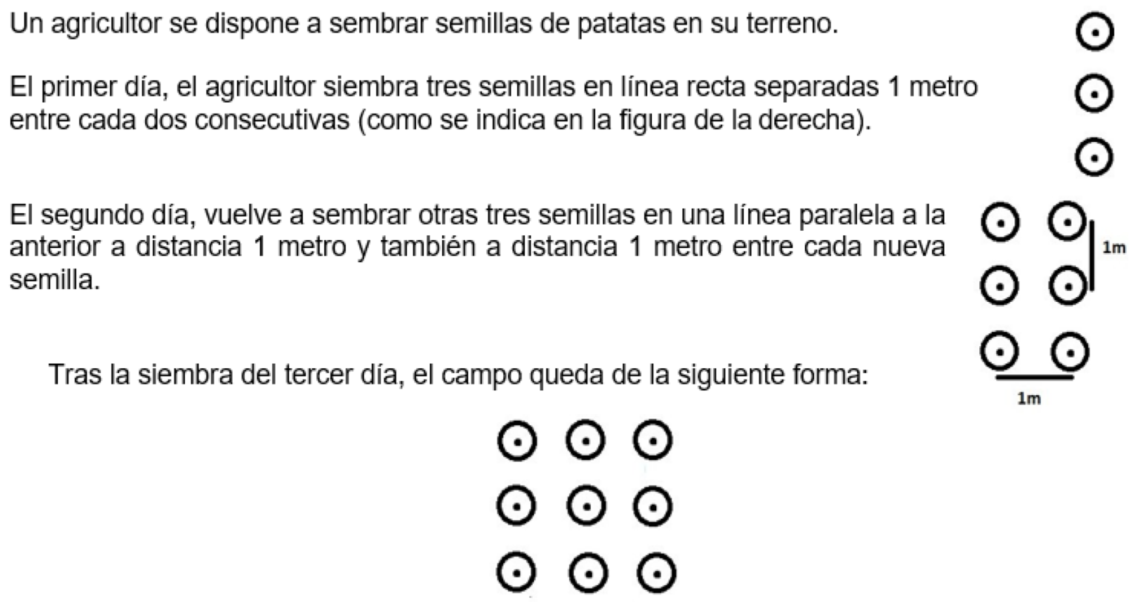


Figura 1. La situación del agricultor

Análisis

La unidad de análisis fueron las respuestas de cada estudiante a los cuatro casos propuestos (días 3, 4, 100 y n). Analizamos todas las estrategias y representaciones de la generalización usadas por los estudiantes al responder a las diferentes cuestiones del problema, para profundizar en las diferencias entre los estudiantes admitidos y los no admitidos en el programa.

Las categorías de análisis para las estrategias y las representaciones de la generalización surgieron de una revisión preliminar de los datos, posteriormente fueron refinadas y fundamentadas de acuerdo con los antecedentes. Las categorías que presentamos fueron reconocidas previamente por Ureña et al. (2023) en las producciones de los participantes. Estas se fundamentaron en otras investigaciones (p.e., Amit y Neria, 2008; Barbosa et al., 2012; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Morales et al., 2018; Stacey, 1989).

En la categoría de estrategias reconocimos las siguientes:

- Conteo: consiste en contar los elementos que componen la solución en una representación pictórica.
- Recursividad: consiste en añadir la diferencia entre soluciones consecutivas al valor del caso anterior.
- Operatoria aditiva: consiste en aplicar, explícita o implícitamente, sumas aisladas que no se relacionan con operaciones efectuadas en otras respuestas.
- Operatoria multiplicativa: consiste en aplicar, implícita o explícitamente, multiplicaciones o divisiones aisladas que no se relacionan con operaciones efectuadas en otras respuestas.

- Proporcionalidad: consiste en aplicar el razonamiento proporcional para obtener una respuesta a partir de otra.
- Funcional: consiste en establecer y hacer uso de una correspondencia funcional entre las variables que determinan la situación considerada.
- Progresión aritmética: consiste en aplicar la fórmula de progresión aritmética $a_n = a_1 + (n-1)d$ donde a_n es el valor general de la progresión, a_1 el valor del primer término de la progresión, y d la diferencia constante entre valores consecutivos.
- Respuesta directa: la respuesta no informa del procedimiento seguido.
- Otra: la respuesta sigue un procedimiento no clasificable en las categorías previas.

En referencia a la generalización, consideramos que los estudiantes representaron la misma cuando expresaron la regularidad subyacente a la tarea. Se reconocieron tres representaciones de la generalización:

- Verbal: la regularidad detectada se expresa en lenguaje natural, citando cantidades indeterminadas interrelacionadas y sus relaciones.
- Simbólica: la regularidad detectada se expresa mediante símbolos algebraicos para representar cantidades indeterminadas y sus relaciones.
- Múltiple: la regularidad detectada se expresa mediante una combinación de representación verbal y simbólica.

A su vez, vinculando las estrategias para generalizar y las representaciones de generalización mostradas, las generalizaciones de los estudiantes son descritas en términos de su estructura y el tipo de regularidad que evidencian. Para la descripción de la regularidad consideramos las categorías definidas por Ureña et al. (2023):

- Regularidad parcial: se utiliza una regularidad basada en el análisis de la solución a uno o dos casos particulares, que no es coherente con el resto de las soluciones.
- Regularidad completa: se usa una regularidad coherente con el análisis de las soluciones a los casos particulares explorados previamente.

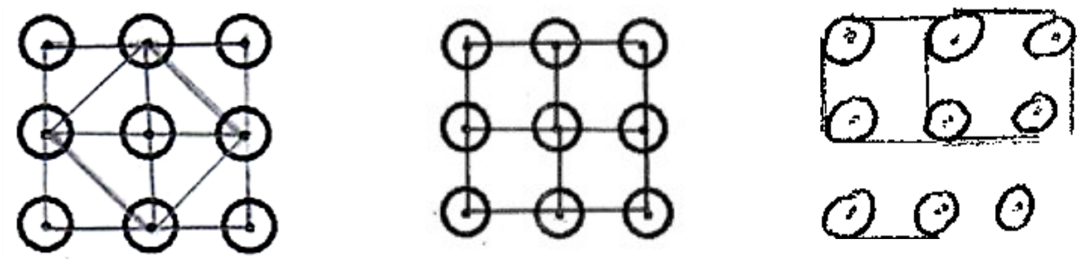
Para asegurar la validez y fiabilidad del análisis de los datos, se realizó un análisis por triangulación por parte de los investigadores. Cada respuesta fue analizada de forma independiente por dos de los investigadores, y ambos análisis fueron revisados posteriormente por el investigador restante. En el caso de encontrarse discrepancias, estas se debatieron hasta llegar a un consenso.

Para el análisis de la información y la presentación de los resultados, designamos a cada estudiante admitido por la letra A y un número del 1 al 16, así como un subíndice numérico que refiere al curso (1 para primero de ESO y 2 para segundo). Los estudiantes no admitidos los denotamos con la letra N y un número del 1 al 151, con el correspondiente subíndice que indica el curso. Por ejemplo, el estudiante $A15_1$ representa al estudiante número 15 del grupo de admitidos que cursaba primero de ESO.

RESULTADOS

Organizamos los resultados en tres secciones, en correspondencia con los tres objetivos de investigación: análisis comparativo de las estrategias usadas por los estudiantes admitidos en el programa de estímulo del talento matemático y los estudiantes no admitidos, análisis comparativo de las regularidades identificadas y estructuras utilizadas o evidenciadas, y la descripción comparativa de las representaciones de la generalización mostradas.

Cabe destacar que la mayoría de los estudiantes no reconocieron todos los cuadrados del problema (p.e., Figura 2a), sino únicamente los que se apoyan sobre la base, descritos por la relación funcional $f(n) = 3n - 4, n \geq 2$ (p.e., Figura 2b). También hubo algunos que identificaron únicamente algunos de los cuadrados de lado una unidad (p.e., Figura 2c). Los resultados muestran el análisis de las respuestas de todos los estudiantes, aunque estas sean incorrectas.



a b c

Figura 2. a. Todos los cuadrados, b. Cuadrados apoyados sobre la base, c. Otros

Análisis comparativo de estrategias

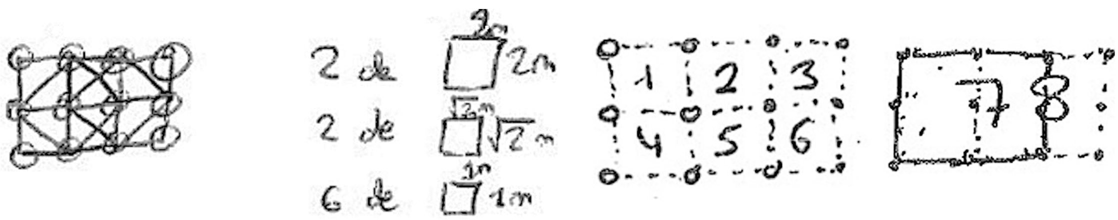
Los estudiantes mostraron diversidad en las estrategias utilizadas, variando estas según el caso requerido y reconociéndose matices según si fueron o no admitidos en el programa. La Tabla 2 muestra, por grupo (A: estudiantes admitidos; N: estudiantes no admitidos) y por casos (días 3 y 4, día 100, y día n), el porcentaje de estudiantes que usaron cada estrategia distinguiendo según el curso (primero y segundo de ESO).

Al analizar las estrategias por caso, identificamos que en los casos 3 y 4, el conteo fue la estrategia más usada, independientemente del grupo de estudiantes. A modo de ejemplo, el estudiante admitido $A13_2$ dibuja todos los cuadrados que se pueden formar en el caso 4 (Figura 3a), distinguiendo la cantidad por tamaño (dos de lado 2 unidades, dos de lado $\sqrt{2}$ unidades, y seis de lado 1 unidad). Luego, en la Figura 3b, el estudiante $N1_1$, también los separa por tamaño, dibujando y numerando únicamente aquellos cuadrados que se pueden formar apoyados sobre la base.

Tabla 2

Porcentajes de estrategias empleadas por los estudiantes de primero y segundo de ESO

Estrategia	Días 3 y 4				Día 100				Día n			
	1 ESO		2 ESO		1 ESO		2 ESO		1 ESO		2 ESO	
	N	A	N	A	N	A	N	A	N	A	N	A
Conteo	43,7	50,0	60,6	92,9	0,0	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,0
Aditiva	0,7	0,0	0,0	0,0	2,6	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0
Multiplicat.	0,0	0,0	0,0	0,0	9,9	0,0	7,1	0,0	2,6	0,0	1,0	0,0
Funcional	0,0	0,0	0,0	0,0	14,6	87,5	15,2	71,4	11,3	87,5	14,1	71,4
Proporc.	0,0	0,0	0,0	0,0	19,9	0,0	20,2	7,1	6,6	0,0	7,1	7,1
Recursivid.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	2,0	0,0
Prog. Aritm.	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	7,1	0,0	0,0	1,0	0,0
Directa	37,1	43,8	19,2	7,1	15,2	0,0	19,2	0,0	7,9	0,0	7,1	0,0
Otra	6,0	0,0	9,1	0,0	7,9	0,0	6,1	0,0	7,3	0,0	7,1	0,0
Sin respuest.	12,6	6,2	11,1	0,0	29,8	12,5	30,3	14,3	62,2	12,5	59,6	21,4



a. Respuesta de $A13_2$ b. Respuesta de $N1_1$

Figura 3. Uso del conteo en el caso 4

Por otro lado, en la Tabla 2 se observa que prácticamente todos los estudiantes realizaron un cambio de estrategia al pasar de los casos 3 y 4 a los casos 100 y n. En estos últimos dos casos es donde se observan diferencias significativas entre los dos grupos (*A* y *N*). Mientras que la mayoría de los estudiantes admitidos usaron la estrategia funcional en ambas cuestiones (87,5% en primero y 71,4% en segundo), con un número reducido de cuestiones sin responder, esta estrategia sólo fue usada por una pequeña parte de los estudiantes no admitidos de ambos cursos. En el caso n el porcentaje de cuestiones no contestadas es más alto que en el caso 100, apreciándose una diferencia entre el grupo de no admitidos (el 62,2% de primero y el 59,6% de segundo curso) y admitidos (el 12,5% y el 21,4%, respectivamente por curso).

En la misma línea, en el grupo de no admitidos se reconoce una dispersión en las estrategias utilizadas en los dos casos finales, rasgo que no es apreciable en el grupo de admitidos. Algunas estrategias fueron usadas únicamente por los no admitidos, como ocurre con las estrategias aditivas, multiplicativas (Figura 4) u otras no clasificables. Entre ellos las estrategias más frecuentes fueron la proporcionalidad (19,2% y 20,2% por curso, respectivamente, en el caso 100) que genera respuestas incorrectas en esta tarea (Figura 5), y las respuestas directas.

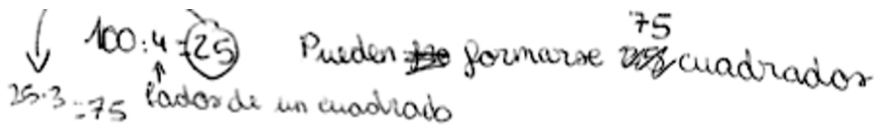


Figura 4. Uso de la estrategia operatoria multiplicativa por N162, caso 100

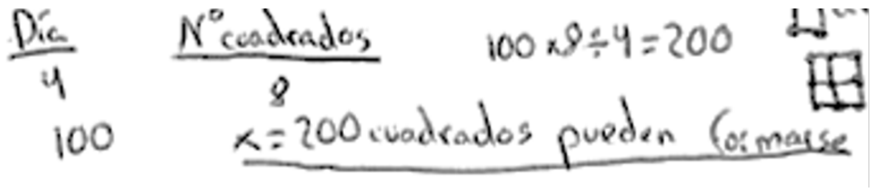


Figura 5. Uso de la proporcionalidad por N61, caso 100

En contraposición, la dispersión desaparece en el grupo de estudiantes admitidos, donde prácticamente todos contestan y usan estrategias funcionales de forma consistente en ambos casos finales (Tabla 2) y manteniendo el uso de la misma estructura de la relación funcional como se describe en la siguiente sección.

En conexión con la generalización, todos los estudiantes que evidencian haber reconocido una regularidad y la generalizaron, lo hicieron usando la estrategia funcional, tanto en el grupo de admitidos como de no admitidos (a excepción de $A14_2$, que generaliza planteando una progresión aritmética). Por este motivo, en el siguiente apartado analizamos en detalle dicha estrategia, atendiendo a las regularidades que evidencian los estudiantes y las estructuras que exhiben.

Análisis comparativo de regularidades identificadas

Los estudiantes que generalizaron lo hicieron en el caso 100 o n y casi exclusivamente mediante la estrategia funcional, como se reconoció anteriormente. La Tabla 3 muestra el total de estudiantes por curso que generalizaron usando la estrategia funcional en al menos uno de los casos.

Tabla 3

Uso de la estrategia funcional para generalizar en los casos 100 o $\boldsymbol{n}$

1 ESO		2 ESO	
N	A	N	A
24 (15,9%)	14 (87,5%)	16 (16,2%)	10 (71,4%)

Como muestra la Tabla 3, un total de 38 estudiantes en primero y 26 en segundo de ESO usaron la estrategia funcional en alguno de los últimos dos casos, siendo su uso significativamente más frecuente en el grupo de los estudiantes admitidos.

Al analizar en profundidad las generalizaciones a la luz del empleo de la estrategia funcional, reconocemos dos tipos de regularidades identificadas y planteadas, de acuerdo con Ureña et al. (2023). Por un lado, está la regularidad parcial, que se extrae del análisis de la solución de uno o dos casos particulares, sin que sea coherente con el resto de las soluciones a los casos. Por otro lado, está la regularidad completa, caracterizada por ser coherente con el análisis de las soluciones a todos los casos particulares explorados.

En la tabla 4 mostramos el tipo de regularidad evidenciada por los estudiantes que generalizaron en los casos 100 o n.

Tabla 4
Uso de la estrategia funcional: Regularidades en los casos 100 y $\boldsymbol{n}$

Regularidad	1 ESO		2 ESO	
	N	A	N	A
Parcial	12 (50%)	3 (21,4%)	7 (43,8%)	1 (10%)
Completa	12 (50%)	11 (78,6%)	9 (56,2%)	9 (90%)

Se revela que, en ambos grupos, independientemente del nivel escolar, la regularidad más seguida es la completa, que asegura coherencia entre los casos trabajados. Sin embargo, mientras que en el grupo de admitidos la mayoría establece regularidades completas (el 78,6% en primero y el 90,0% en segundo), en el grupo de no admitidos esta cifra alcanza el 50,0% en primer curso, mejorando ligeramente hasta el 56,6% en segundo. Si tomamos como referencia el total de estudiantes de cada curso en cada grupo, obtenemos que únicamente el 7,9% de los estudiantes no admitidos de primero y el 9,1% de segundo identifican una regularidad completa, mientras que estas cifras ascienden a un 68,8% y un 64,3%, respectivamente, en el caso de los admitidos.

La identificación de una regularidad parcial se correspondió con el uso de relaciones funcionales incorrectas basadas en el análisis de la solución al caso 3 o al 4. En el grupo de no admitidos, esta se tradujo, principalmente, en el uso de estructuras multiplicativas de relaciones funcionales como $2n$, $3n$ o $4n$. Estas fueron aplicadas al reconocer que el número de cuadrados aumentaban constantemente en 2, 3 o 4 cuadrados por día, aunque la estructura no necesariamente aplicaba a los resultados determinados previamente. Del grupo de admitidos sólo $A12_1$ usó una estructura de este tipo. Otros estudiantes basaron su generalización en el análisis de un solo caso particular, principalmente el día 4. En este último caso, ellos extrajeron de la solución a ese caso estructuras que usaron de modo genérico en los casos siguientes. Por ejemplo, el estudiante $N10_1$, tras identificar 8 cuadrados en el día 4, afirma que en el día 100 “pueden formarse 200 cuadrados” y en el día n, “$n \cdot 2$”. N46$_1$, en cambio, tras determinar que en el día 4 pueden formarse “8 cuadrados, 2 grandes y los demás pequeños”, usa la estructura “$n : 2 + 2(n-1)$”. También A9$_2$, del grupo de admitidos, se basa en que el día 4 tiene 6 cuadrados grandes, 2 medianos y 2 pequeños para concluir que el término general se corresponde con “$[(n-1)\cdot 2] + \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)$” cuadrados.

Por otro lado, la identificación de una regularidad completa se correspondió con la exhibición o uso de diferentes estructuras, principalmente ligadas a los cuadrados que se apoyan sobre la base. Estas aportan otra nueva información sobre la forma en que los estudiantes plantearon la generalización y cómo la construyeron, mostrando consistencia entre los casos particulares y generales. En esta tipología se agrupan los únicos ocho estudiantes (N149$_1$, N10$_2$, N94$_2$, A8$_1$, A6$_1$, A15$_1$, A4$_2$ y A10$_2$) que respondieron correctamente a la tarea. Ellos identificaron todos los cuadrados que se forman, usando la relación funcional $y = 4n - 6$. Cinco de estos estudiantes pertenecen al grupo de admitidos. Ellos usaron variedad de estructuras de relaciones funcionales como $(n-5)\cdot 4 + 14$ (A8$_1$) o $4(n-2)+2$ (A15$_1$). Algunas estructuras revelaron distintos abordajes en la determinación de la relación funcional. Por ejemplo, tomar como punto de partida el número de cuadrados hallado en uno de los primeros días y describir la regularidad reconocida con base en este. Ejemplificando, A4$_2$ toma como base los 10 cuadrados que se forman los primeros 4 días y reconociendo que cada día hay un aumento de 4 cuadrados, plantea la relación $(n-4)\cdot 4 + 10$ (figura 6). Este procedimiento es aplicado por otros estudiantes tanto admitidos como no admitidos y que solo reconocen los cuadrados que se apoyan sobre la base mediante estructuras de relaciones funcionales como $3(n-2)+2$, $3(n-4)+8$ o $3(n-3)+15$.

$(n-4)\times 4 + 10$ → A n le restas 4 porque he tomado como punto de partida que en 4 días forman 10, la misma razón por la que luego se suman los 10. Se multiplica por 4 porque cada día suma 4 cuadrados.

Figura 6. Respuesta de A42 al caso n

Algunas estrategias funcionales surgen de organizar la cantidad de cuadrados de cada tamaño en los 4, 5 o 6 primeros días. Estas dan lugar a estructuras del tipo $(n-1)\cdot 2 + (n-2)$ o $(n\cdot 2) - 2 + (n-2)$ cuando se contemplan únicamente los cuadrados apoyados sobre la base, o $(n-1)\cdot 2 + (n-2)\cdot 2$, $2 + 2\cdot(n-2) + (n-2) + (n-2)$ o $(n+n-2) + (n-2) + (n-2)$ (ver figura 7) cuando se consideran todos los cuadrados.

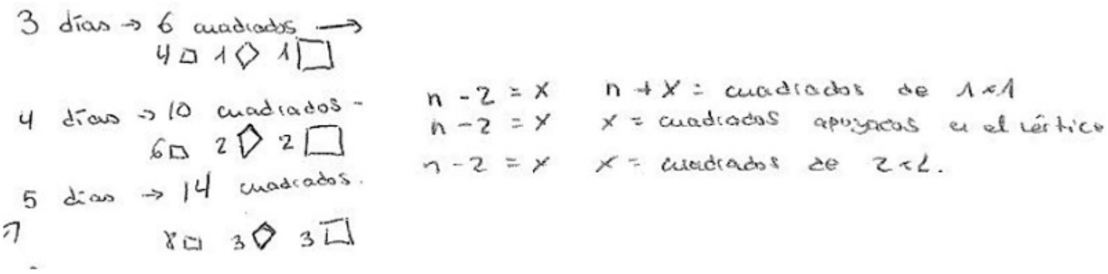


Figura 7. Respuesta de A6$_1$ al caso n

En ambos grupos de estudiantes, y principalmente en el grupo de no admitidos, también se reconocieron otras estructuras asociadas a una cantidad aún menor de cuadrados identificados. Por ejemplo, una de la más frecuentes es $(n-1)\cdot 2$, que describe la cantidad de cuadrados pequeños de lado 1 unidad.

Representación de la generalización

La generalización en ambos cursos ocurrió en los casos 100 o n, con representaciones de tipo verbal, simbólica y múltiple.

En las Tablas 5 y 6 se muestran los distintos perfiles de representación de la generalización usados por los estudiantes no admitidos y admitidos, respectivamente, que utilizaron la estrategia funcional en al menos uno de los casos 100 o n. Se identificaron tres casuísticas: estudiantes que no representan la generalización y no evidencian identificar la regularidad, estudiantes que no representan la generalización pero sí evidencian haber identificado una regularidad, y estudiantes que sí representan la generalización. Tanto en el grupo de estudiantes no admitidos (Tabla 5) como en el de admitidos (Tabla 6), la representación verbal es la más usada a la hora de expresar la generalización en el caso 100, principalmente en primer curso. Esta deja constancia de la regularidad identificada, con expresiones del tipo "cada día se añaden 3 [cuadrados]", que se vincularon con variedad de estructuras de relaciones funcionales usadas no sólo de la forma $3n$ o similares, sino con otras como $8+3(n-4)$ (A4$_2$). La ambigüedad en la representación verbal en relación con la estructura usada caracterizó a ambos grupos de estudiantes. Sin embargo, también otras representaciones verbales describieron con mayor fidelidad la estructura de la relación funcional empleada. Por ejemplo, los estudiantes N8$_2$ y A9$_1$ generaron expresiones como "siempre son los días por 3 - 4 y esos son los cuadrados", en la que subyace la relación funcional $n\cdot 3-4$.

Tabla 5
Representaciones de la generalización por parte de los estudiantes no admitidos

Caso 100	Caso n		
	Ausencia de identificación y representación de una regularidad	Rep. verbal.	Rep. simbólica
Ausencia de identificación y representación de una regularidad	-	-	(2,1)
Ausencia de representación, presencia de identificación de una regularidad	(0,1)	-	(4,2)
Representación verbal	(7,1)	(5,3)	(5,7)
Representación simbólica	-	-	(0,1)
Representación múltiple	-	-	(1,0)

Nota: En (a_1, a_2), a_1 y a_2 refieren a la cantidad de estudiantes de primero y segundo de ESO, respectivamente, que evidenciaron dichas representaciones de la generalización.

Tabla 6
Representaciones de la generalización por parte de los estudiantes admitidos

	Caso n	
Caso 100	Rep. verbal	Rep. simbólica
Ausencia de representación, presencia de identificación de una regularidad	(0,0)	(4,5)
Representación verbal	(2,1)	(5,3)
Representación simbólica	-	(1,1)
Representación múltiple	-	(2,0)

Nota: En (a_1, a_2), a_1 y a_2 refieren a la cantidad de estudiantes de primero y segundo de ESO, respectivamente, que evidenciaron dichas representaciones de la generalización.

En el grupo de no admitidos destaca la presencia de estudiantes que no dan evidencias de identificar ni representar la regularidad. Estudiantes de primer curso, principalmente, pasan de representar verbalmente la generalización en el caso 100 a no identificar ni representar la regularidad en el caso n. Otros, por el contrario, es en el caso 100 donde muestran este comportamiento para luego representar simbólicamente la generalización en el caso n. En el grupo de estudiantes admitidos (Tabla 6), todos los estudiantes dan evidencia de reconocimiento de una regularidad en el caso 100 o n.

Por otro lado, en ambos grupos en el caso 100 se reconoce la casuística de identificar la regularidad, pero no representarla. Estos se comportan similarmente en primer curso, sin embargo, en segundo se observa más en el grupo de admitidos, expresando numéricamente relaciones entre las cantidades implicadas (ver figura 8). Este es el caso de N37$_2$, quien responde que se forman “$97 \cdot 3 + 5 = 296$ cuadrados”, revelando la estructura $(n - 3) \cdot 3 + 5$, o “cuadrado pequeño = $(100 - 1) \cdot 2$, cuadrado grande = $100 - 2$”, que se vincula con la estructura $(n - 1) \cdot 2 + n - 2$. Es únicamente en el grupo de no admitidos en el que esta casuística se reconoce también en el caso n. En el grupo de admitidos, todos los estudiantes en esta casuística luego representan simbólicamente la generalización en el caso n de forma coherente con la relación funcional usada en el caso 100 (ver figura 8).

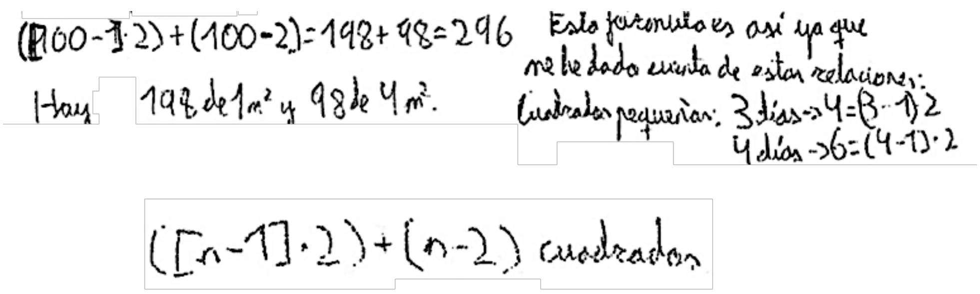


Figura 8. Respuestas de A6$_2$ a los días 100 y n, respectivamente

Respecto a los estudiantes que usan una representación verbal en el caso 100, en el caso n se aprecian algunas diferencias por nivel y grupo de estudiantes. En el grupo de no admitidos, mientras que en segundo curso la mayoría de estos estudiantes pasan a una representación de tipo simbólico en el caso n, en primer curso una parte importante no dan evidencias de identificar la regularidad o bien, usan la representación verbal o simbólica en el caso n. En cambio, en el grupo de admitidos, la mayoría de estos estudiantes pasan a una representación simbólica.

En relación con la representación simbólica, se observa que en ambos cursos y grupos su uso es mayoritario en las respuestas al día n, siendo más prominente en el grupo de admitidos. En el grupo de no admitidos se presentaron expresiones del tipo $3n$ o $4n$, siendo estas menos comunes en el grupo de admitidos. Otras estructuras usadas en sus representaciones simbólicas fueron $n \cdot 3 - 4$ (N71$_1$), $(n - 4) \cdot 3 + 8$ (N41$_2$), $(n - 2) + (n - 1) \cdot 2$ (A4$_1$), para los cuadrados apoyados sobre la base, o $n \cdot 4 - 4 - 2 = n \cdot 4 - 6$ (N10$_2$), $2 + 4(n - 2)$ (A15$_1$) o $(n - 4) \cdot 4 + 10$ (A5$_2$), para todos los cuadrados que se pueden formar.

La representación múltiple únicamente se usó en primer curso en ambos grupos de estudiantes y en el caso 100, siendo sustituida por la representación simbólica en el caso n (ver figura 9).

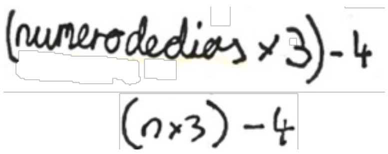


Figura 9. Respuestas de $A9_1$ a los días 100 y n

De forma general, de la Tabla 5 se deriva que el grupo de estudiantes no admitidos presenta mayoritariamente un perfil verbal-ausencia de identificación y representación de una regularidad en primero y verbal-simbólico en segundo curso, de acuerdo con la representación de generalización para el caso 100 y n, respectivamente. En el grupo de admitidos (Tabla 6) en primer curso el perfil más frecuente es el verbal-simbólico y en segundo es identificar la regularidad sin representarla-simbólico.

Conclusiones

En este trabajo se han identificado rasgos diferenciadores de talento matemático en el marco de la resolución de una tarea de generalización que involucra pensamiento funcional. Para ello, se ha realizado un estudio comparativo entre las producciones efectuadas por estudiantes de primero y segundo de ESO que se presentaron a la prueba de acceso a un programa de estímulo del talento matemático. Para la identificación de estos rasgos nos hemos centrado en las estrategias usadas a la hora de resolver los distintos apartados de la tarea, las regularidades identificadas, y las representaciones de la generalización utilizadas, cada uno de estos elementos relacionado con un objetivo específico de investigación. Hemos tomado como referencia a los estudiantes admitidos en el programa para describir los rasgos de talento matemático, con respecto a los no admitidos.

La tarea propuesta supuso un desafío para los estudiantes. Por su similitud con problemas de olimpiadas de matemáticas, partimos de que el éxito en su resolución podría ser un indicador de talento matemático (Leikin, 2018), resultado únicamente apreciado en el grupo de estudiantes admitidos. Dadas las diferencias en las producciones entre los dos grupos de estudiantes, desde las regularidades seguidas, la coherencia a lo largo de los casos, así como en las estructuras empleadas y representadas, la tarea puede resultar adecuada para discriminar talento matemático de alto desempeño en la asignatura de matemáticas. Mientras que en otras investigaciones se propone un patrón explícito a los estudiantes (p.e., Amit y Neria, 2008; El Mouhayar y Jurdak, 2015; Stacey, 1989), en esta investigación los estudiantes fueron motivados a construir una regularidad basada en sus propias producciones estimulando y evidenciando la generalización como habilidad de orden superior (Amit y Neria, 2008; Greenes, 1981, Sriraman, 2003) y haciendo aflorar como rasgo de talento matemático la habilidad para organizar la información y utilizar estrategias de forma consistente a lo largo de la tarea

(Arbona et al., 2019). Dichas estrategias se corresponden con la de tipo funcional, que fue usada mayoritariamente por los estudiantes admitidos, frente a una dispersión de métodos exhibida por los no admitidos. Esta destaca por ser una estrategia más avanzada, compleja y eficiente que otras (p.e., El Mouhayar y Jurdak, 2015). Se muestra en nuestros resultados de forma más frecuente en los estudiantes admitidos, revelándose como rasgo de talento la generalización de regularidades y la capacidad para identificar patrones y relaciones entre elementos.

Profundizando en las estrategias, el estudio complementa trabajos previos realizados con grupos más pequeños de participantes en los que se comparan las estrategias usadas por estudiantes de educación primaria con superdotación general o buenos resolutores de problemas de patrones geométricos, con las de estudiantado ordinario (p.e., Arbona et al., 2019; Arbona et al., 2021b). En estos se reconoció un uso abundante de estrategias proporcionales incorrectas entre estudiantado ordinario de distintos cursos. En nuestro estudio destaca también su uso en el grupo de estudiantes no admitidos, a pesar de ser considerados como de alto desempeño matemático por sus propios docentes. Sin embargo, se trata de una estrategia que prácticamente no usa ningún estudiante admitido, por lo que reforzamos la hipótesis de que la ausencia de uso de estrategias proporcionales incorrectas añade un rasgo diferenciador de talento matemático.

A su vez, se reconocen otros rasgos distintivos en los estudiantes admitidos. Uno de los principales refiere al tipo de regularidad seguida. Casi todos los estudiantes admitidos que generalizaron destacaron por su capacidad para determinar una relación funcional coherente con las soluciones proporcionadas en los casos previos y con las de nuevos casos creados, determinando así regularidades completas. Ellos exhibieron, en consecuencia, una comprensión más profunda de la secuencia que se muestra en la variedad de estructuras de relaciones funcionales utilizadas y la consistencia de estas. Las estructuras empleadas, elemento central del pensamiento algebraico (Hunter y Miller, 2022), han permitido diferenciar formas distintas de resolver la tarea, plantear las relaciones funcionales y generalizar. Como rasgo característico, se aprecian estructuras más complejas, coherentes y variadas en los estudiantes admitidos, estando en este grupo los únicos estudiantes que determinan la relación funcional correcta. En contraposición, gran parte de los estudiantes no admitidos identificaron regularidades parciales atendiendo únicamente a un caso, sin ser coherentes con el resto de los casos.

Otros posibles rasgos de talento matemático identificados en este trabajo podrían ser la capacidad para justificar adecuadamente la generalización, evitando respuestas directas, y la ausencia de estrategias aditivas, multiplicativas o no clasificables que no guardan relación con la estructura del patrón. Se observa que este tipo de estrategias, así como las proporcionales, parecen limitar la identificación de la relación entre las variables.

En referencia a la representación de la generalización a través de la estrategia funcional, al igual que en el trabajo de Amit y Neria (2008), se observa el uso de representaciones verbales, simbólicas, y múltiples. Mientras en el grupo de estudiantes admitidos todos evidencian al menos el reconocimiento de una regularidad, esto no ocurre en el otro grupo. En el caso de los estudiantes admitidos la mayoría pasa de representar verbalmente la generalización o de identificar una regularidad y no representarla, en el caso 100, a representarla simbólicamente en el caso n, mientras que el perfil verbal-ausencia de identificación y representación de una regularidad o el verbal-simbólico es más frecuente en los no admitidos. Esto se debe a que una gran parte de los estudiantes del primer grupo, una vez identifican la relación funcional entre variables, la simbolizan algebraicamente. En cambio, el resto de estudiantes se centra principalmente en características particulares de la regularidad verbalizando expresiones del tipo "se añaden 3", "se añaden 4" y que a su vez dan paso a estructuras funcionales incorrectas como $3n$ o $4n$, resultado que es menos apreciable en el grupo de admitidos. La mayoría de los estudiantes de ambos grupos que simboliza la relación funcional lo hace principalmente en el caso n, a diferencia de lo ocurrido en Amit y Neria (2008).

Una posible limitación del trabajo es el hecho de que los estudiantes objeto de estudio no han sido identificados como de talento matemático a través de un test estandarizado. Sin embargo, exhiben un nivel más alto de desempeño matemático dentro del grupo de referencia a la hora de resolver problemas matemáticos que no involucran contenido escolar, por lo que pueden considerarse con rasgos de talento matemático (Leikin, 2018). Otra limitación radica en el análisis de la resolución de una sola tarea.

Los resultados de este trabajo pueden resultar de interés para la comunidad educativa, pues de este se deriva un listado de posibles rasgos diferenciadores de talento matemático asociadas a la resolución de problemas de generalización que pueden facilitar la identificación en el aula de este tipo de estudiantes. Se identifican como factores clave la determinación de una relación funcional correcta a partir de la comprensión de la estructura de la regularidad, la verificación de la coherencia con los primeros casos y la representación adecuada de la misma, no necesariamente simbólica. Se pueden tener en cuenta estos factores a la hora de diseñar intervenciones que faciliten el desarrollo de las habilidades de abstracción, generalización, y simbolización del estudiantado.

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolló en el marco de los proyectos EDU2016-75771-P, EDU2017-84377-R (AEI/ERDF, EU) financiados por la Agencia Estatal de Investigación y European Regional Development Fund (ERDF), y los proyectos PID2020-117395RB-I00 (Ministerio de Ciencia e Innovación) y PID2020-113601GB-I00 del Ministerio de Economía y Competitividad. Este trabajo se deriva del trabajo doctoral del primer autor, apoyado por la Universidad de Costa Rica.

Referencias

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders's efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. *Bolema, 27*(47), 703-732. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400002

Amit, M. y Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM, 40*, 111-129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, A. (2019). Strategies exhibited by good and average solvers of geometric pattern problems as source of traits of mathematical giftedness in grades 4-6. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)* (pp. 534-541). ERME.

Arbona, E., Beltrán-Meneu, M. J. y Gutiérrez, A. (2021a). Estrategias empleadas por estudiantes de primaria en la resolución de problemas de patrones geométricos. En P. Diago, D. Yáñez, M. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 133-140). SEIEM.

Arbona, E., Gutiérrez, A. y Beltrán-Meneu, M. J. (2021b). Características diferenciadoras de estudiantes con alta capacidad matemática en la resolución de problemas de patrones geométricos. En Á. Gutiérrez, M. J. Beltrán-Meneu, J. M. Ribera, R. Ramírez-Uclés, A. Jaime, E. Arbona, C. Sua, L. Rotger, C. Jiménez-Gestal, A. A. Magreñán y A. M. Damián (Eds.), *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 29-36). Universidad de La Rioja.

Barbosa, A., Vale, I. y Palhares, P. (2012). Pattern tasks: Thinking processes used by 6th grade students. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(3), 273-293.

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (Eds.) (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. NCTM.

Butto, C., Andrade, A. y Lanz, M.Y. (2016). Identificación de estudiantes con altas capacidades matemáticas en educación primaria. *Horizontes Pedagógicos, 18*(2), 66-85.

Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca: Revista de Altas Capacidades, 11*(13), 4-22.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Faisca: Revista de Altas Capacidades, 13*(15). 30-39.

Dündar, S., Temel, H. y Gündüz, N. (2016). Development of a mathematical ability test: a validity and reliability study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(7), 1061-1075. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1153734

El Mouhayar, R. y Jurdak, M. (2015). Variation in strategy use across grade level by pattern generalization types. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(4), 553-569. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.985272

Fritzlar, T. y Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking – An interview study with primary school students. En *ICME 12 Pre-proceedings* (pp. 2022-2031). ICME.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill.

Hunter, J. y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: supporting young diverse students to identify structures and generalise, *ZDM*, *54,* 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez y L. Puig (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Publicaciones Universidad de Valencia.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 133–155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D.W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school-children*. The University of Chicago Press.

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28. https://doi.org/10.1007/BF03217440%20

Leikin, R. (2018). Giftedness and high ability in mathematics. En S. Lerman (Eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_65-4

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. The Open University and Paul Chapman Publishing.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent*. Eric.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Niederer, K., Irwin, R. J., Irwin, K. C. y Reilly, I. L. (2003). Identification of mathematically gifted children in New Zealand. *High Ability Studies, 14*(1), 71-84. https://doi.org/10.1080/13598130304088

Paz-Baruch, N., Leikin, M. y Leikin, R. (2022). Not any gifted is an expert in mathematics and not any expert in mathematics is gifted. *Gifted and Talented International, 37*(1), 25-41. https://doi.org/10.1080/15332276.2021.2010244

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolamo, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal 33*, 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kontoyianni, K. y Kattou., M. (2011). A model of mathematical giftedness: integrating natural, creative, and mathematical abilities. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 11*(1), 39-54. https://doi.org/10.1080/14926156.2011.548900

Pólya, G. (1989). *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Trillas.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3–25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Ramírez-Uclés, R. y Cañadas, M. C. (2018). Nominación y atención del talento matemático por parte del docente. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 79*, 23-30.

Ramírez, R., Cañadas, M. C. y Damián, A. (2022). Structures and representations used by 6th graders when working with quadratic functions. *ZDM*, *54,* 1393-1406. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01423-w

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Horsori.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Brandl, M., Freiman, V. y Kakihana, K. (2016). Activities for, and research on, mathematically gifted students. En G. Kaiser (Ed.), *Proceedings of the 13th ICME* (pp. 391-395). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_31

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations: The problem-solving experiences of four gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education, 14*, 151-165. https://doi.org/10.4219/jsge-2003-425

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Torrego, J. C. (Coord.) (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa.* Fundación SM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM.

Ureña, J., Ramírez-Uclés, R., Molina, M. y Cañadas. M.C. (2023). Generalization: Strategies and Representations used by Sixth to Eighth graders in a Functional Context, *Mathematics Education Research Journal, 36*, 519-545. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00458-w

Wilkie, K. J. (2016). Students' use of variables and multiple representations in generalizing functional relationships prior to secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, *93*, 333-361. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9703-x

Yildiz, D. G. y Durmaz, B. (2021). A Gifted High School Student's Generalization Strategies of Linear and Nonlinear Patterns via Gauss's Approach. *Journal for the Education of the Gifted, 44*(1), 56-80. https://doi.org/10.1177/0162353220978295

Jason Ureña Alpízar
Universidad de Costa Rica
jason.urenaalpizar@ucr.ac.cr

María José Beltrán Meneu
Universitat Jaume I, España
mmeneu@uji.es

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada, España
rramirez@ugr.es

Recibido: mayo de 2023. Aceptado: marzo de 2024
doi: 10.30827/pna.v19i1.28279

ISSN: 1887-3987

TRAITS OF MATHEMATICAL TALENT IN SECONDARY SCHOOL STUDENTS. GENERALIZATION IN A FUNCTIONAL CONTEXT

Jason Ureña, María José Beltrán-Meneu, and Rafael Ramírez

In this work, differentiating traits of mathematical talent are identified in seventh and eighth graders who solved an admission test to a program to stimulate mathematical talent. A comparison was carried out between the students admitted to the program and those not admitted, focused on the analysis of the resolution of a generalization problem that involves a functional relationship. The strategies used to solve the different sections of the task, the regularities identified, and the representations of generalization used were the focus of study.

The students were motivated to build a regularity based on their own productions, stimulating and evidencing generalization as a higher order skill. This brings out the ability to organize information and develop efficient strategies consistently throughout the task as a trait of mathematical talent. Here the main strategies were of functional type. They were used mostly by admitted students, against a scattering of methods exhibited by non-admitted students. The functional strategy stood out for being a more advanced, complex and efficient strategy than others. The results revealed, as a differentiating feature, the generalization of regularities and the ability to identify patterns and relationships between elements.

In turn, almost all admitted students who generalized distinguished by their ability to generate a functional relationship coherent with the solutions provided in the first cases and with the new ones, thus determining full regularities. They exhibited a variety of functional relationship structures and their consistency. The structures used, as central element of algebraic thinking, allowed us to identify different ways of solving the task, establish functional relationships, and generalize. Other possible traits of mathematical talent recognized in this work could be the ability to adequately justify generalization, avoiding direct answers, and the absence of strategies that are not related to the structure of the pattern.

For the educational community the results of this work may be of interest since it derives a set of possible differentiating features of mathematical talent associated with the resolution of generalization problems. The approach of a correct functional relationship from the understanding of the structure of the regularity, the verification of the coherence with the first cases and its adequate representation, not necessarily symbolic, are identified as fundamental features. These elements can be considered when designing interventions that facilitate the development of students' abstraction, generalization and symbolization skills.