



**UNIVERSIDAD DE GRANADA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA  
MATEMÁTICA**

**TESIS DOCTORAL**

**CONOCIMIENTO PROFESIONAL DE MAESTROS  
DE PRIMARIA EN EJERCICIO SOBRE  
MODELIZACIÓN MATEMÁTICA**

**Karen Porras Lizano**

Granada, España, 2024

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales  
Autor: Karen Porras Lizano  
ISBN: 978-84-1195-514-0  
URI: <https://hdl.handle.net/10481/96751>

El presente trabajo de Tesis Doctoral se enmarca en el grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico FQM-0193* de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

*A mi hija Gaëlle Sofía Navarro Porras y  
mi madre Rosa Porras Lizano.*

## AGRADECIMIENTOS

Agradezco infinitamente a Dios, por permitirme concluir esta etapa de formación profesional y crecimiento personal. Brindándome la fortaleza espiritual necesaria, como fuente de perseverancia y motivación durante todo este trabajo de investigación.

A mi familia, quienes con su comprensión incondicional constituyeron un pilar valioso. En especial a mi hija, Gaëlle Sofía, quien ha sido mi fuente de motivación y mi apoyo más significativo en este proceso. A mi madre Rosa, por la paciencia y la fuerza que siempre me ha transmitido. A ambas, agradezco su comprensión, paciencia e inmenso cariño manifestado desde siempre.

Un sincero agradecimiento a mi directores de tesis. A pesar de la distancia, su calidad en el acompañamiento se ve reflejado en el fruto final de este trabajo. A la Dra. Elena Castro-Rodríguez, gracias por acogerme bajo su dirección, por orientarme durante por más de cuatro años y por su exigencia profesional en esta investigación. Al Dr. Juan Luis Piñeiro, gracias por llegar a ser el complemento perfecto en la dirección de este trabajo. A ambos agradezco su dedicación y paciencia en las infinitas orientaciones que me brindaron, en mi formación en valores y cualidades como investigadora. Además, por su apoyo en todas las comunicaciones y artículos realizados como parte de este proceso investigativo, gracias por no limitarme en esto.

Al departamento de profesores de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por brindarnos una educación de calidad y formación en las herramientas profesionales investigativas que nos diferencian a nivel nacional e internacional. En particular, a la profesora María Cañadas, gracias por su guía como tutora y por el apoyo durante la estancia doctoral en España.

A todos los profesionales que de una u otra forma han influido con su guía acertada en mi crecimiento profesional. En particular, agradezco a la M. Sc Jessenia Chavarría que como jefa me brindo su apoyo para que pudiera realizar la estancia doctoral. También le agradezco el interés y apoyo brindado desde el equipo de trabajo en modelización matemática de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica

Al grupo de séptimo, cuya participación, aportes y sinceridad fueron enriquecedoras, al resolver las tareas de modelización propuestas. También a los profesores que participaron en las entrevistas, gracias por aceptar la invitación a participar en este estudio, cuya finalidad fue el mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la modelización.

Agradezco a todos mis amigos y compañeros de trabajo, que con su afecto, valiosa amistad y colaboración han sido determinantes en este camino. Sin su apoyo emocional esto no hubiera sido posible.

## RESUMEN

La modelización es entendida como el proceso de construir y desarrollar un modelo matemático de una situación específica, donde se matematiza la realidad de ella (Castro y Castro, 2000). Ayuda a dotar a los estudiantes de sistemas conceptuales que son a menudo, más sofisticados que los que se han tratado de enseñar de forma tradicional (Lesh y Doerr, 2003), lo que demanda que el profesor posea el conocimiento necesario para realizar una enseñanza efectiva de dicho proceso (Borromeo Ferri, 2018). Con la finalidad de brindar más importancia al estudio del conocimiento sobre procesos específicos (Lester, 2013), esta investigación se centra en el conocimiento especializado sobre la modelización que debe poseer un profesor de educación primaria al enseñar. Abordamos este trabajo a partir de dos perspectivas. En primer lugar, estudiamos aspectos relacionados con la resolución de tareas de modelización por parte de estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria. En segundo lugar, el conocimiento profesional manifestado por profesores en ejercicio de Costa Rica acerca de la modelización.

El trabajo se estructura en 10 capítulos, más la lista de referencias y los anexos. En el capítulo 1 presentamos nuestro problema de investigación enmarcándolo en la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática y el conocimiento del profesor en educación de primaria. Finalizamos el capítulo exponiendo las preguntas, los objetivos generales y específicos que guiaron el estudio.

En el capítulo 2 reseñamos las principales investigaciones relacionadas con los dos objetivos generales de la investigación. Es decir, en primer lugar, presentamos estudios sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la modelización. En segundo lugar, revisamos investigaciones sobre el conocimiento del profesor sobre modelización.

En el capítulo 3, reseñamos los fundamentos teóricos relacionados con elementos presentes en la resolución de tareas de modelización y el conocimiento del profesor sobre este proceso.

El capítulo 4 expone el diseño metodológico, concretamente fue un estudio de casos colectivo, compuesto por dos fases metodológicas. En la primera fase nos enfocamos en estudiar las características de elementos que aparecen en la resolución de tareas de modelización por parte de los estudiantes. En la segunda fase caracterizamos el conocimiento del profesor sobre la modelización. Para cada fase, presentamos una descripción de las fuentes de información,

técnica e instrumentos de recolección de información, así como su diseño, construcción y validación, por último, las categorías que permitieron analizar la información.

En el capítulo 5, ubicamos los resultados de los dos estudios empíricos realizados para la consecución de la primera fase metodológica. Concretamente el primero está centrado en las estrategias de resolución y el segundo, en los errores, acompañándolos de las representaciones como medio de comunicación de la información al resolver dos tareas de modelización, donde cada uno de estos elementos son relacionados con el estilo de pensamiento de estudiantes.

Para el capítulo 6 exponemos los resultados correspondientes al *estudio 3* de la fase 2. Específicamente, efectuamos un análisis del currículo de Costa Rica para delimitar aspectos relativos a la modelización, adaptando el modelo de conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019). Finalizamos este capítulo con una propuesta del modelo acerca del conocimiento del profesor sobre la modelización matemática.

Basados en la propuesta de componentes, caracterizamos el conocimiento del profesor sobre la modelización, en particular del profesor de primaria en ejercicio. En el capítulo 7, exhibimos los resultados en tres apartados, correspondientes al conocimiento del profesor sobre la modelización.

Posteriormente, en el capítulo 8 reportamos los hallazgos del conocimiento didáctico sobre la modelización manifestado por los profesores en ejercicio de educación primaria. Este capítulo, fue dividido en cuatro apartados según las categorías propuestas en el capítulo 6.

En el capítulo 9 discutimos los resultados obtenidos en cada una de las fases llevadas a cabo en esta investigación.

Finalmente, en el capítulo 10 mostramos las conclusiones derivadas del desarrollo de esta investigación, en función de la consecución de los objetivos. Realizamos un apartado donde describimos las principales aportaciones. Finalmente, exhibimos las limitaciones y las líneas abiertas de continuación emanadas de la investigación.

## ÍNDICE DE CONTENIDO

|                                                                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>                                                                                | <b>1</b>  |
| 1. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA .....                                                            | 2         |
| 2. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL CURRÍCULO DE COSTA RICA .....                                                            | 4         |
| 3. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS .....                                                                         | 5         |
| 4. PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN .....                                                                           | 9         |
| <b>2. ANTECEDENTES .....</b>                                                                                              | <b>16</b> |
| 1. INVESTIGACIÓN SOBRE EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE EN LA<br>MODELIZACIÓN.....                                     | 17        |
| 1.1 INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN.....                                                              | 17        |
| 1.2. INVESTIGACIÓN SOBRE ASPECTOS DEL APRENDIZAJE DE LA MODELIZACIÓN ..                                                   | 19        |
| 2. INVESTIGACIÓN RELATIVA AL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE<br>MODELIZACIÓN.....                                         | 28        |
| 2.1 INVESTIGACIONES QUE UTILIZAN PERSPECTIVAS TEÓRICAS DEL CONOCIMIENTO<br>DEL PROFESOR SOBRE LA MODELIZACIÓN .....       | 29        |
| 2.2 INVESTIGACIÓN SOBRE LA MODELIZACIÓN COMO HERRAMIENTA PARA EL<br>DESARROLLO PROFESIONAL .....                          | 40        |
| <b>3. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DESDE UNA PERSPECTIVA DE LOS PROCESOS: EL<br/>CASO DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA.....</b> | <b>45</b> |
| 1. ENFOQUES TEÓRICOS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA .....                                                                  | 46        |
| 1.1 MODELIZACIÓN APLICADA O REALISTA .....                                                                                | 47        |
| 1.2 MODELIZACIÓN EDUCATIVA .....                                                                                          | 48        |
| 1.3 MODELIZACIÓN COGNITIVA Y AFECTIVA (COMO METAPERSPECTIVA) .....                                                        | 52        |
| 1.4 MODELIZACIÓN EPISTEMOLÓGICA O TEÓRICA .....                                                                           | 54        |
| 1.5 MODELIZACIÓN DESDE UNA VISIÓN SOCIOCRTICA: ETNOMODELIZACIÓN .....                                                     | 56        |
| 1.6 MODELIZACIÓN CONTEXTUAL.....                                                                                          | 57        |
| 2. MODELO DE LA COMPETENCIA PROFESIONAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA<br>MODELIZACIÓN.....                                      | 61        |
| 3. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (CPRP).....                                                  | 63        |
| 3.1 COMPONENTES A CERCA DEL CONOCIMIENTO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE<br>PROBLEMAS .....                                        | 63        |
| 3.2 COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE<br>PROBLEMAS .....                                      | 64        |
| 4. CONOCIMIENTO SOBRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA .....                                                                    | 66        |
| 4.1 NOCIÓN DE MODELO.....                                                                                                 | 66        |
| 4.2 NOCIÓN DE MODELO MATEMÁTICO .....                                                                                     | 67        |
| 4.3 NOCIÓN DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA.....                                                                                | 68        |
| 5. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA .....                                                          | 69        |
| 5.1 CICLOS DE MODELIZACIÓN.....                                                                                           | 70        |
| 5.2 ESTILOS DE PENSAMIENTO Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN .....                                                              | 70        |
| 5.3 REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS .....                                                                                    | 71        |
| 5.4 ERRORES Y DIFICULTADES EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA<br>MODELIZACIÓN.....                                 | 72        |
| 5.5 CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE TAREAS DE<br>MODELIZACIÓN.....                                      | 74        |
| 5.6 CONOCIMIENTO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN.....                                                               | 77        |
| 5.7 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE DIAGNÓSTICO EN LA MODELIZACIÓN ...                                                    | 80        |

|                                                                                                         |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4. METODOLOGÍA.....</b>                                                                              | <b>84</b>  |
| 1. ENFOQUE Y DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN .....                                              | 85         |
| 2. CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DE LA FASE 1 .....                                                     | 87         |
| 2.1 PARTICIPANTES.....                                                                                  | 88         |
| 2.2 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN .....                                                        | 88         |
| 2.3 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN .....                                                    | 90         |
| 2.4 ANÁLISIS .....                                                                                      | 92         |
| 3. CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DE LA FASE 2 .....                                                     | 95         |
| 3.1 ANÁLISIS DEL CURRÍCULO DE COSTA RICA .....                                                          | 95         |
| 3.2 CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE MODELIZACIÓN .....                                                   | 97         |
| 4. RIGOR DE LA INVESTIGACIÓN.....                                                                       | 111        |
| <b>5. RESULTADOS SOBRE ELEMENTOS PRESENTES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN .....</b>         | <b>113</b> |
| 1. RESULTADOS DEL ESTUDIO 1 SOBRE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN Y REPRESENTACIONES EN LA MODELIZACIÓN ..... | 114        |
| 1.1 RUTAS DE MODELIZACIÓN PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LA TAREA 1 ...                                 | 114        |
| 1.2 RUTAS DE MODELIZACIÓN PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LA TAREA 2 ...                                 | 116        |
| 1.3 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN PRESENTES EN RESPUESTAS DE LA TAREA 1 ...                                 | 117        |
| 1.4 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN PRESENTES EN RESPUESTAS DE LA TAREA 2 ...                                 | 122        |
| 1.5 EJEMPLOS DE SITUACIONES SIMILARES .....                                                             | 128        |
| 2. RESULTADOS DEL ESTUDIO 2 SOBRE ERRORES Y REPRESENTACIONES EN LA MODELIZACIÓN.....                    | 129        |
| 2.1 ERRORES PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LA TAREA 1.....                                              | 129        |
| 2.2 ERRORES PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LA TAREA 2.....                                              | 134        |
| 3. SINTESIS DE RESULTADOS .....                                                                         | 140        |
| <b>6. RESULTADOS SOBRE EL ANÁLISIS DEL CURRÍCULO DE COSTA RICA .....</b>                                | <b>141</b> |
| 1. MODELIZACIÓN EN EL CURRÍCULO .....                                                                   | 142        |
| 2. CONOCIMIENTO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN EN EL CURRÍCULO .....                  | 143        |
| 2.1 CATEGORÍA 1. NOCIÓN DEL PROBLEMA DE MODELIZACIÓN.....                                               | 143        |
| 2.2 CATEGORÍA 2. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA .....                                                        | 147        |
| 2.3 CATEGORÍA 3. DISPOSICIÓN .....                                                                      | 148        |
| 3. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN EN EL CURRÍCULO .....        | 149        |
| 3.1 CATEGORÍA 1. EL ESTUDIANTE COMO RESOLUTOR .....                                                     | 149        |
| 3.2 CATEGORÍA 2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO TAREA ESCOLAR .....                                       | 150        |
| 3.3 CATEGORÍA 3. FACTORES NO COGNITIVOS.....                                                            | 152        |
| 3.4 CATEGORÍA 4. GESTIÓN DE LA ENSEÑANZA.....                                                           | 153        |
| 4. PROPUESTA DE COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE MODELIZACIÓN.....                       | 155        |
| 4.1 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN.....                     | 156        |
| 4.2 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN.....                        | 162        |
| <b>7. RESULTADOS FASE II: ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE LA MODELIZACIÓN.....</b>          | <b>173</b> |
| 1. RESULTADOS DE COMPONENTE 1: NOCIÓN DEL PROBLEMA DE MODELIZACIÓN ...                                  | 174        |
| 1.1 NOCIONES BÁSICAS DE MODELIZACIÓN .....                                                              | 174        |

|                                                                                                      |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1.2 PROBLEMA DE MODELIZACIÓN .....                                                                   | 178        |
| 1.3 CONSIDERACIÓN DEL RESOLUTOR .....                                                                | 181        |
| 1.4 TIPOS DE TAREAS EXISTENTES DE MODELIZACIÓN .....                                                 | 183        |
| 2. RESULTADOS DE COMPONENTE 2: RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE<br>MODELIZACIÓN.....                     | 185        |
| 2.1 CICLOS DE MODELIZACIÓN Y SUS CARACTERÍSTICAS .....                                               | 185        |
| 2.2 ESTRATEGIAS.....                                                                                 | 189        |
| 2.3 METACOGNICIÓN.....                                                                               | 203        |
| 2.4 FACTORES NO COGNITIVOS .....                                                                     | 205        |
| 3. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 3: DISPOSICIÓN.....                                                   | 206        |
| 3.1 MOTIVACIÓN AL RESOLVER UN PROBLEMA DE MODELIZACIÓN.....                                          | 206        |
| <b>8. RESULTADOS FASE II: ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO .....</b>                              | <b>211</b> |
| <b>SOBRE LA MODELIZACIÓN.....</b>                                                                    | <b>211</b> |
| 1. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 1: ESTUDIANTE COMO RESOLUTOR DE TAREAS<br>DE MODELIZACIÓN.....        | 212        |
| 1.1 CARACTERÍSTICAS DE RESOLUTORES DE TAREAS DE MODELIZACIÓN.....                                    | 212        |
| 1.2 DIFICULTADES Y ERRORES DE LOS ESTUDIANTES EN LA MODELIZACIÓN.....                                | 213        |
| 2. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 2: PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN COMO TAREA<br>ESCOLAR.....               | 216        |
| 2.1 SELECCIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN.....                                                         | 216        |
| 2.2 MODELOS TEÓRICOS DE MODELIZACIÓN.....                                                            | 221        |
| 2.3 INVENCION DE PROBLEMAS .....                                                                     | 224        |
| 3. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 3: FACTORES NO COGNITIVOS .....                                       | 226        |
| 4. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 4: GESTIÓN DE ENSEÑANZA.....                                          | 231        |
| 4.1 ENFOQUES DE ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN .....                                                   | 232        |
| 4.2 GESTIÓN DEL DISCURSO .....                                                                       | 233        |
| 4.3 GESTIÓN DE ATASCOS .....                                                                         | 237        |
| 4.3 GESTIÓN DE EVALUACIÓN .....                                                                      | 239        |
| 4.4 GESTIÓN DE RECURSOS.....                                                                         | 242        |
| <b>9. DISCUSIÓN .....</b>                                                                            | <b>244</b> |
| 1.DISCUSIÓN SOBRE ELEMENTOS PRESENTES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE<br>MODELIZACIÓN MATEMÁTICA ..... | 245        |
| 1.1 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO 1.....                                                   | 245        |
| 1.2 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO 2.....                                                   | 247        |
| 2. DISCUSIÓN ACERCA DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE MODELIZACIÓN .....                           | 248        |
| 2.1 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO 3.....                                                   | 248        |
| 2.2 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO 4.....                                                   | 254        |
| <b>10. CONCLUSIONES .....</b>                                                                        | <b>267</b> |
| 1. RECAPITULACIÓN.....                                                                               | 268        |
| 2. CONCLUSIONES DEL PRIMER OBJETIVO GENERAL .....                                                    | 269        |
| 2.1 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO 1.....                                                                  | 269        |
| 2.2 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO 2 .....                                                                 | 270        |
| 3. CONCLUSIONES DEL SEGUNDO OBJETIVO GENERAL.....                                                    | 271        |
| 3.1 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO 3.....                                                                  | 271        |
| 3.2 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO 4.....                                                                  | 272        |
| 4. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN .....                                                            | 276        |
| 5. LÍNEAS ABIERTAS DE LA INVESTIGACIÓN .....                                                         | 277        |

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| <b>REFERENCIAS.....</b>         | <b>279</b> |
| <b>ANEXOS .....</b>             | <b>300</b> |
| 1. TAREA DE MODELIZACIÓN 1..... | 300        |
| 2. TAREA DE MODELIZACIÓN 2..... | 300        |
| 3. GUÍA DE ENTREVISTA 1.....    | 301        |
| 4. GUÍA DE ENTREVISTA 2.....    | 307        |

## ÍNDICE DE FIGURAS

|                                                                                                                 |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 1</b> Esquema de la teoría de Modelización Matemática .....                                           | 46  |
| <b>Figura 2</b> Ciclo de modelización desde la perspectiva modelización educativa .....                         | 49  |
| <b>Figura 3</b> Ciclo de modelización al usar tecnología .....                                                  | 50  |
| <b>Figura 4</b> Proceso de modelización desde la cognición de los individuos .....                              | 51  |
| <b>Figura 5</b> Ciclo de modelización desde la perspectiva cognitiva y afectiva.....                            | 52  |
| <b>Figura 6</b> Ciclo de modelización desde la perspectiva contextual .....                                     | 58  |
| <b>Figura 7</b> Secuencia de actividades de desarrollo de modelos (MDS).....                                    | 60  |
| <b>Figura 8</b> Conocimiento del contenido pedagógico específico de la modelización .....                       | 62  |
| <b>Figura 9</b> Modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas (CPRP) .....               | 63  |
| <b>Figura 10</b> Modelo de competencias necesarias en la enseñanza de la modelización matemática .....          | 69  |
| <b>Figura 11</b> Ejemplo de problema abierto de modelización .....                                              | 76  |
| <b>Figura 12</b> Diseño de la investigación .....                                                               | 86  |
| <b>Figura 13</b> Tarea 1 de modelización “Cocinando con mi mamá” y sus principios de construcción.....          | 90  |
| <b>Figura 14</b> Tarea 2 de modelización “Calculando mi mesada” y sus principios de construcción .....          | 91  |
| <b>Figura 15</b> Ejemplos de categorización de estrategias y representaciones .....                             | 93  |
| <b>Figura 16</b> Ejemplos de categorización de errores.....                                                     | 94  |
| <b>Figura 17</b> Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización 1 .....                              | 114 |
| <b>Figura 18</b> Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización 2 .....                              | 116 |
| <b>Figura 19</b> Ejemplos de la estrategia uso de operaciones aritméticas básicas. ....                         | 118 |
| <b>Figura 20</b> Ejemplos de la estrategia uso de correspondencias .....                                        | 119 |
| <b>Figura 21</b> Ejemplo de la estrategia de uso de patrones del grupo 9.....                                   | 120 |
| <b>Figura 22</b> Ejemplo de la estrategia de uso de diagramas.....                                              | 121 |
| <b>Figura 23</b> Ejemplo de la estrategia del uso de cálculos numéricos del grupo 1 .....                       | 122 |
| <b>Figura 24</b> Ejemplo de la estrategia del uso de cálculo numéricos del grupo 2 y 7 .....                    | 124 |
| <b>Figura 25</b> Ejemplo de la estrategia del uso de cálculo numéricos del grupo 5 y 6 .....                    | 125 |
| <b>Figura 26</b> Ejemplo de la estrategia del uso de cálculo numéricos del grupo 3 y 4 .....                    | 125 |
| <b>Figura 27</b> Ejemplo de la estrategia del uso de cálculo numéricos del grupo 8 .....                        | 127 |
| <b>Figura 28</b> Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática.....        | 130 |
| <b>Figura 29</b> Ejemplo de error debidos a inferencias o asociaciones incorrectas. ....                        | 131 |
| <b>Figura 30</b> Ejemplos de errores de la tarea 1 de modelización .....                                        | 132 |
| <b>Figura 31</b> Ejemplo de error debido al cálculo incorrecto al resolver la tarea 1 .....                     | 133 |
| <b>Figura 32</b> Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática.....        | 135 |
| <b>Figura 33</b> Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática.....        | 136 |
| <b>Figura 34</b> Ejemplo de error del tipo asociaciones incorrectas al resolver la tarea 2 de modelización .... | 137 |
| <b>Figura 35</b> Errores obtenidos solucionar la tarea 2 debidos a supuestos incorrectos .....                  | 138 |
| <b>Figura 36</b> Ejemplo de error debido a cálculos incorrectos obtenidos solucionar la tarea 2 .....           | 138 |
| <b>Figura 37</b> Pasos del proceso de modelización presentes en el currículo de Costa Rica.....                 | 144 |
| <b>Figura 38</b> Triángulo didáctico del conocimiento sobre la enseñanza de la modelización.....                | 162 |
| <b>Figura 39</b> Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización propuestas por los profesores ....   | 187 |
| <b>Figura 40</b> Ordenamiento de las etapas del ciclo de modelización del profesor 1 .....                      | 189 |

## ÍNDICE DE TABLAS

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabla 1</b> Competencias parciales de modelización .....                                                                      | 49  |
| <b>Tabla 2</b> Taxonomía de asistencia de Zech (1998) .....                                                                      | 79  |
| <b>Tabla 3</b> Niveles de intervenciones .....                                                                                   | 79  |
| <b>Tabla 4</b> Ejemplo de ficha de evaluación en grupos de una tarea 1 de modelización .....                                     | 80  |
| <b>Tabla 5</b> Perspectivas teóricas usadas en la tesis .....                                                                    | 83  |
| <b>Tabla 6</b> Esquema general de metodología .....                                                                              | 87  |
| <b>Tabla 7</b> Categorías de análisis del currículo de Costa Rica .....                                                          | 96  |
| <b>Tabla 8</b> Características de los participantes .....                                                                        | 100 |
| <b>Tabla 9</b> Componentes del conocimiento del profesor sobre la modelización matemática .....                                  | 101 |
| <b>Tabla 10</b> Categorías según su numeración de preguntas de entrevista 1 .....                                                | 103 |
| <b>Tabla 11</b> Categorías para la construcción de las preguntas de la entrevista 2 .....                                        | 103 |
| <b>Tabla 12</b> Ejemplos de preguntas de categoría 1: Noción del problema de modelización .....                                  | 107 |
| <b>Tabla 13</b> Ejemplos de preguntas de categoría 2: Resolución de un problema de modelización .....                            | 108 |
| <b>Tabla 14</b> Ejemplos de preguntas de categoría 3: Disposición .....                                                          | 108 |
| <b>Tabla 15</b> Ejemplos de preguntas de categoría 4: Estudiante como resolutor de tareas de modelización .....                  | 108 |
| <b>Tabla 16</b> Ejemplos de preguntas de categoría 5: Problemas de modelización como tarea escolar .....                         | 109 |
| <b>Tabla 17</b> Ejemplos de preguntas de categoría 6: Factores no cognitivos .....                                               | 109 |
| <b>Tabla 18</b> Ejemplos de preguntas de categoría 7: Gestión de Enseñanza .....                                                 | 109 |
| <b>Tabla 19</b> Estrategias y representaciones realizadas por los grupos de estudiantes .....                                    | 115 |
| <b>Tabla 20</b> Estrategias y representaciones realizadas por los grupos de estudiantes .....                                    | 117 |
| <b>Tabla 21</b> Implementación de etapas del ciclo de modelización en la tarea 1 .....                                           | 129 |
| <b>Tabla 22</b> Tipos de errores matemáticos presentes en las respuestas a la tarea 1 .....                                      | 130 |
| <b>Tabla 23</b> Implementación de etapas del ciclo modelización en la tarea 2 .....                                              | 135 |
| <b>Tabla 24</b> Tipos de errores presentes en las respuestas a la tarea 2 .....                                                  | 136 |
| <b>Tabla 25</b> Componentes del conocimiento sobre la resolución de problemas de modelización .....                              | 161 |
| <b>Tabla 26</b> Dificultades más comunes de los estudiantes en la modelización de problemas .....                                | 164 |
| <b>Tabla 27</b> Componentes del conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas de modelización .....                    | 171 |
| <b>Tabla 28</b> Categorización de respuestas de profesores según las nociones básicas de modelización .....                      | 174 |
| <b>Tabla 29</b> Características que debe tener un problema de modelización .....                                                 | 178 |
| <b>Tabla 30</b> Respuestas de profesores sobre la consideración del resolutor .....                                              | 182 |
| <b>Tabla 31</b> Resultados según el conocimiento sobre tipos de problemas de modelización .....                                  | 184 |
| <b>Tabla 32</b> Clasificación de respuestas de profesores sobre conocimiento de los ciclos de modelización .....                 | 185 |
| <b>Tabla 33</b> Respuestas sobre las estrategias de resolución de un problema de modelización .....                              | 190 |
| <b>Tabla 34</b> Resultados sobre estrategias generales de resolución de problemas de modelización .....                          | 191 |
| <b>Tabla 35</b> Estrategias usadas por los estudiantes para resolver problemas de modelización propuestos .....                  | 193 |
| <b>Tabla 36</b> Respuestas sobre características de estrategias de resolución de problemas de modelización .....                 | 195 |
| <b>Tabla 37</b> Respuestas sobre diferencias de las estrategias de resolución de problemas de modelización .....                 | 198 |
| <b>Tabla 38</b> Resultados sobre métodos matemáticos presentes en estrategias de resolución de un problema de modelización ..... | 199 |
| <b>Tabla 39</b> Respuestas sobre la cantidad decimal presente en la estrategia 2 .....                                           | 200 |
| <b>Tabla 40</b> Resultados a cerca de las formas gráficas en la estrategia 3 .....                                               | 202 |
| <b>Tabla 41</b> Respuestas sobre uso de procesos metacognitivos al resolver problemas de modelización .....                      | 203 |
| <b>Tabla 42</b> Resultados del papel de los factores no cognitivos al resolver un problema de modelización .....                 | 205 |
| <b>Tabla 43</b> Respuestas sobre la motivación al resolver un problema de modelización .....                                     | 207 |
| <b>Tabla 44</b> Respuestas sobre la disposición al resolver un problema de modelización .....                                    | 208 |

|                 |                                                                                                                                |     |
|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabla 45</b> | Respuestas sobre la motivación y disposición al resolver un problema de modelización .....                                     | 210 |
| <b>Tabla 46</b> | Características del resolutor de un problema de modelización .....                                                             | 212 |
| <b>Tabla 47</b> | Dificultades y errores de los estudiantes en la modelización.....                                                              | 213 |
| <b>Tabla 48</b> | Razones de porqué debe conocer las limitaciones de estudiantes al enseñar la modelización .                                    | 215 |
| <b>Tabla 49</b> | Aspectos sobre el contexto real que debe poseer una tarea de modelización.....                                                 | 216 |
| <b>Tabla 50</b> | Aspectos estructurales que debe poseer una tarea de modelización .....                                                         | 219 |
| <b>Tabla 51</b> | Aspectos sobre el desarrollo del estudiante que debe poseer una tarea de modelización.....                                     | 219 |
| <b>Tabla 52</b> | Aspectos necesarios que debe poseer un problema de modelización.....                                                           | 220 |
| <b>Tabla 53</b> | Aspectos necesarios que debe poseer un problema de modelización.....                                                           | 220 |
| <b>Tabla 54</b> | Profesores que manifestaron conocimiento general del ciclo de modelización .....                                               | 221 |
| <b>Tabla 55</b> | Rutas usadas para justificar la importancia de las fases del ciclo de modelización .....                                       | 222 |
| <b>Tabla 56</b> | Uso de la invención de problemas de modelización por los profesores .....                                                      | 224 |
| <b>Tabla 57</b> | Uso de invención de problemas de modelización por los estudiantes.....                                                         | 225 |
| <b>Tabla 58</b> | Conocimiento según las afirmaciones sobre las creencias y concepciones no adecuadas para la enseñanza de la modelización ..... | 228 |
| <b>Tabla 59</b> | Conocimiento según las afirmaciones sobre las creencias y concepciones adecuadas para la enseñanza de la modelización .....    | 229 |
| <b>Tabla 60</b> | Concepciones y creencias sobre la enseñanza de la modelización .....                                                           | 230 |
| <b>Tabla 61</b> | Importancia de las concepciones y creencias de los estudiantes en su aprendizaje .....                                         | 231 |
| <b>Tabla 62</b> | Enfoques de enseñanza de la modelización .....                                                                                 | 232 |
| <b>Tabla 63</b> | Discurso desde un estilo de enseñanza tradicional .....                                                                        | 233 |
| <b>Tabla 64</b> | Discurso desde un estilo de enseñanza más activo .....                                                                         | 235 |
| <b>Tabla 65</b> | Ayudas del para el avance del estudiante al resolver un problema de modelización .....                                         | 238 |
| <b>Tabla 66</b> | Información sobre intervenciones para ayudar al estudiante atascado en la modelización .....                                   | 239 |
| <b>Tabla 67</b> | Respuestas sobre tipos de instrumentos de evaluación formativa en la modelización .....                                        | 240 |
| <b>Tabla 68</b> | Respuestas sobre instrumentos de evaluación sumativa para la modelización .....                                                | 240 |
| <b>Tabla 69</b> | Criterios de los profesores para evaluar las competencias de modelización de los estudiantes                                   | 241 |
| <b>Tabla 70</b> | Recursos para trabajar la modelización matemática en el aula .....                                                             | 242 |

# **1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

---

Este capítulo contiene el planteamiento general del problema de investigación que abordamos como trabajo de tesis. En el primer apartado, presentamos la problemática surgida en torno a la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. En un segundo apartado, contextualizamos la pertinencia del estudio dentro del currículo escolar de Costa Rica. En el tercer apartado, exhibimos modelos del conocimiento del profesor y su falta de alcance en el estudio del conocimiento específico en la modelización matemática. Por último, para la cuarta sección, mostramos el problema de investigación y sus justificantes, además exponemos las preguntas de investigación, los objetivos generales y objetivos específicos que marcan el camino a seguir durante todo el estudio.

# **1. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE EN LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA**

La modelización matemática ha incrementado su atención en la comunidad de educadores e investigadores en las últimas décadas (Stender, 2018). Muestra de ello, son los números especiales dedicados a este tópico en revistas como ZDM (véase v. 38, n. 2-3; v. 50, n. 1-2) o AIEM (véase n. 17), o la celebración del congreso *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA). Además, en ellos han surgido grupos de trabajo como el *International Congress on Mathematical Education* (ICME) y el *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME). Específicamente en América Latina, el Encuentro Latinoamericano de Educación Matemáticas (RELME) y en la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM). En estos eventos, han surgido diversas ideas teóricas sobre “el significado y papel de la modelización matemática en el campo de la educación matemática” (Ärlebäck y Doerr, 2020, p. 5), que convergen en la concepción de la modelización como una transición entre la realidad y la matemática y viceversa, al resolver un problema con contexto real (Borromeo Ferri, 2018; Ledezma et al., 2022). También, algunos países han implementado la modelización como parte obligatoria e integral del currículo escolar de matemáticas (e.g., Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012; Ministerio de Educación de Chile, 2012). La creciente consciencia sobre la importancia de la modelización en la investigación y en los currículos escolares de educación matemática la observamos como un éxito, pero a la vez constituye un desafío, pues surge la necesidad en los profesores de enseñarla con calidad (Borromeo Ferri, 2021). Así, en diversas investigaciones se plantea la cuestión de si los profesores están realmente preparados para enseñar la modelización (Shahbari y Tabach, 2016).

A través de la construcción y desarrollo de un modelo matemático se realiza una mejor comprensión de una determinada situación problema con contextos reales. La importancia de la modelización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha destacado en la literatura (e.g., Doerr y Lesh, 2011; Stillman y Galbraith, 2011; Yu y Chang, 2011). Este constructo es visto como una práctica necesaria para el aprendizaje de las matemáticas, que ayuda a preparar a los estudiantes para su vida diaria y profesional (e.g., Hernández-Martínez y Vos, 2018; Porras y Fonseca, 2015). Es decir, sirve de apoyo en el aprendizaje y contribuye al desarrollo de diversas

competencias y actitudes apropiadas de los estudiantes hacia la matemática (Blum y Borromeo Ferri, 2009; Borromeo Ferri, 2021). Además, mejora la comprensión de los conceptos matemáticos y aumenta la capacidad de los estudiantes para trabajar en forma colaborativa, así como su interés por la matemática misma al descubrir su aplicabilidad (Biembengut y Hein, 2006). Asimismo, este proceso estimula la creatividad en la formulación y resolución de problemas matemáticos y permite la integración de la matemática con otras áreas del conocimiento (Biembengut y Hein, 2006). Sin embargo, a pesar de los múltiples beneficios de la modelización en el aprendizaje de los estudiantes, aún existen muchos desafíos y necesidades, como es su implementación y enseñanza (Ärlebäck y Doerr, 2020).

Para Şahin y Eraslan (2016) en los últimos años, la comunidad de educadores matemáticos ha enfatizado en la necesidad de que los enfoques de modelización incluyan procesos de pensamiento cognitivo y metacognitivo para estudiantes de todos los niveles, desde los primeros años de la escuela hasta la educación superior. Algunas investigaciones han revelado resultados positivos al resolver problemas de modelización en diversos niveles educativos como en educación primaria (e.g., Bonotto, 2007; Leavy y Hourigan, 2021; Turner et al., 2021; Verschaffel, 2002), educación secundaria (e.g., Aymerich y Albarracín, 2022; Doerr y English, 2003) y educación superior (e.g., Aviña et al., 2019; Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo, 2021; Rodríguez y Quiroz, 2016). Concretamente, Lesh y Doerr (2003) destacan que la base de una modelización efectiva en niveles superiores comienza desde los primeros niveles educativos. Por ello, investigaciones como las de Lesh y Doerr (2003) o English (2002, 2006, 2010) han mostrado cómo los niños de primaria son realmente capaces de lidiar con problemas de modelización y obtener resultados notables. En particular, si a los mismos profesores les agrada usar la modelización, tienen conocimiento de cómo comunicarse en las clases con este enfoque y han trabajado con tareas de modelización.

En esta línea, el profesor es el principal responsable de planificar y dirigir la acción dentro del aula, por eso es necesario prestar atención a su competencia profesional, específicamente en su conocimiento (Blömeke et al., 2022). Dicho conocimiento debe ser amplio, dado que inicia desde los primeros años escolares y es gestado más profundamente durante toda su carrera profesional, abarcando conocimientos propios del contenido y del conocimiento didáctico, que permitirá desarrollar con éxito su tarea docente (Piñeiro et al., 2019). Así, el profesor, en su

actuar diario en el aula, durante el uso de algunas prácticas matemáticas para la enseñanza, debe ser capaz de anticipar los métodos intuitivos, responder las dudas de sus estudiantes, planificar tomando en cuenta el currículo, evaluar y atender el aprendizaje y las dificultades presentadas por el estudiante, estructurar sus lecciones con la finalidad de estimular el aprendizaje, propiciar ambientes eficaces que fomenten el diálogo y la participación entre los estudiantes, la igualdad de oportunidades, entre otros (Piñeiro et al., 2019). Por tanto, son múltiples las tareas que el docente debe realizar para lograr la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes durante procesos como la modelización, lo que requiere un conocimiento especializado (Blum, 2015; Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022; Wess et al., 2021).

En resumen, la investigación existente sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelización matemática considera que el papel del docente es crucial, debe poseer conocimientos y competencias adecuadas sobre el proceso de modelización, para que el aprendizaje de los estudiantes pueda darse en forma efectiva (Borromeo Ferri y Blum, 2009).

## **2. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL CURRÍCULO DE COSTA RICA**

El currículo actual de Costa Rica adopta el significado de competencia matemática como “una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales” (MEP, 2012, p. 14). Para esto, se incentiva el uso de la resolución de problemas matemáticos asociados al entorno físico, social, cultural y científico de los estudiantes (MEP, 2012) como vía para establecer relaciones de la matemática y su cotidianidad. Es decir, experimentar con una matemática más aplicable al contexto del estudiante. Lo que conlleva a identificar, construir, manipular, evaluar, modificar y reutilizar estructuras conceptuales como los modelos matemáticos (Lesh y Doerr, 2003; MEP, 2012).

En Costa Rica la modelización matemática es presentada como parte fundamental del currículo y aunque en algunas partes de este documento encontramos menciones sobre la perspectiva de modelización contextual propuesta por Lesh y Doerr (2003), la perspectiva teórica de modelización que sigue este documento no es clara. Por ejemplo, al mencionar que en el currículo se usa el concepto de *modelo*

de una forma amplia y flexible: puede ser un diagrama con flechas, un manipulable, una tabla, una gráfica. Un modelo refiere a una situación específica, pero al mejorarse con acciones cognitivas deberá ser capaz de poder usarse en otros contextos. (MEP, 2012, p. 31).

Este concepto coincide con lo propuesto por Lesh y Doerr (2003), pero la fundamentación teórica no es explícita lo que resta claridad a lo escrito en el programa. Ante esto, Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022) señalan que algunos currículos de educación matemática atienden de forma descuidada a la modelización. Igualmente, apuntan que las interpretaciones sobre la modelización presentes en el currículo influyen en el tipo de nociones que tienen los profesores, más si no poseen experiencia con el proceso (Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022). Asimismo, las autoras consideran que cuando la naturaleza, los objetivos y las metas de la modelización en la escuela no están definidos explícitamente dentro de los currículos, esto trae como consecuencia que muchos docentes: a) no tienen suficiente conocimiento sobre cómo abordar la modelización en el aula; b) tienen dificultades para reconocer las etapas de un proceso de modelización y para trabajar con tareas abiertas; y c) presentan dificultades para vincular contenidos curriculares con problemas de modelización matemática (Paolucci y Wessels, 2017). Así, consideramos que el currículo es un elemento primordial en este proceso, por ser una guía para planificar, seleccionar e implementar tareas adecuadas para el aprendizaje (Rojas, 2014), por ello es necesario profundizar en los aspectos relativos a la modelización matemática presentes en el documento curricular, tanto a nivel de educación primaria como a nivel de educación secundaria de Costa Rica, como un aspecto primordial de la enseñanza, y por tanto, como parte esencial del conocimiento del profesor.

### **3. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS**

En el campo del conocimiento del profesor han surgido múltiples aportes como la topología del conocimiento profesional de Bromme (1994), el conocimiento del profesor en un contexto específico de Fennema y Franke (1992), el conocimiento profesional del profesorado de Ponte (1994, 2012), el modelo teórico de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de Ball et al. (2008), el cuarteto del conocimiento de Rowland et al. (2005) y Turner y Rowland (2011), el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) de Carrillo et al. (2018) o el conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK) de Mishra y Koehler (2006), entre otros. En todos los modelos mencionados, existen divisiones o categorías del conocimiento,

como el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido. A continuación, describimos brevemente estos modelos y sus categorías.

Inspirado en los aportes de Shulman (1986, 1987), Bromme (1994) establece una topología del conocimiento profesional que analiza la conexión entre el conocimiento y la actividad profesional de profesores expertos desde la psicología cognitiva. El autor establece seis categorías para describir las cualidades del conocimiento profesional: (a) conocimiento del contenido sobre las matemáticas como disciplina, (b) conocimiento matemático escolar, (c) filosofía de las matemáticas escolares, (d) conocimiento pedagógico, (e) conocimiento didáctico del contenido específico y (f) la integración cognitiva del conocimiento de diferentes disciplinas.

Debido a que el conocimiento de los profesores posee un dinamismo creciente, Fennema y Franke (1992) proponen un modelo del conocimiento del profesor desde el contexto del aula, compuesto por tres componentes que a la vez son interrelacionados entre ellos y con el contexto y no en forma aislada, específicamente estos son: (a) contenido de las matemáticas, (b) conocimiento pedagógico y (c) cogniciones de los estudiantes. Dichos componentes del conocimiento docente tienen que ver con el contenido de matemáticas, conocimiento de la pedagogía, conocimiento de los estudiantes cogniciones y creencias de los profesores (Fennema y Franke, 1992).

Como resultado de estudios investigación empírica, surge la perspectiva teórica sobre la naturaleza del conocimiento profesional del profesorado de Ponte (1994), cuya premisa principal es que el profesorado tiene un conocimiento profesional, distinto del conocimiento obtenido formalmente y el común que posee cualquier persona. Este conocimiento particular del profesorado de matemáticas “asume su especificidad en función de su actividad práctica y de las condiciones en las cuales esta se ejerce” (Ponte, 2012, p. 3). El conocimiento profesional del profesorado está orientado a una actividad práctica, es decir la enseñanza de estudiantes, apoyado en conocimientos teóricos en diversos campos (matemática, educación en general, enseñanza de la matemática, entre otros); y conocimientos sociales y basados en la experiencia (sobre el estudiante, dinámica de aula, valores y cultura de la comunidad, comunidad escolar y profesional, entre otros) (Ponte, 2012). Este modelo del conocimiento del profesor surge como una alternativa al contemplar “las complejidades de la práctica profesional, por lo que el profesorado tiene que desarrollar un conjunto de competencias para lidiar con las situaciones

inestables e imprevisibles con las que se encuentra constantemente” (Ponte, 2012, p. 4). El modelo del conocimiento profesional del profesorado es dividido en cuatro dimensiones: (a) conocimiento de matemáticas para su enseñanza, (b) conocimiento del estudiante y de sus procesos de aprendizaje, (c) conocimiento del currículo y (d) conocimiento didáctico relativo a la práctica educativa.

Otra perspectiva teórica, que surge de los aportes de Shulman (1986) es el Cuarteto de Conocimiento (*The Knowledge Quartet*) de Rowland et al. (2005) y Turner y Rowland (2011), el cual sienta su base empírica en las discusiones de repaso de lecciones con un enfoque en el contenido matemático de la lección y el papel del alumno conocimiento de la materia de matemáticas (SMK) y conocimiento del contenido pedagógico (PCK). Con “el fin de ser una herramienta útil para quienes la utilizarían en el contexto de prácticas, tal marco debería capturar una serie de importantes ideas y factores sobre el conocimiento del contenido matemático en relación con la enseñanza” (Turner y Rowland, 2011, p. 197). Turner y Rowland (2011) establecen que el Cuarteto del Conocimiento está conformado por cuatro dimensiones conceptuales: (a) fundamentación, (b) transformación, (c) conexión y (d) contingencia.

El modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching - MKT) de Ball y colaboradores (2008), está basado en la práctica del conocimiento matemático al utilizarse en la enseñanza, a través de la identificación de las tareas fundamentales que conlleva el trabajo de la docencia y la matemática que exige estas (Ball et al., 2008). Es decir, se refiere a todas las acciones que realiza el profesor para lograr el aprendizaje de los estudiantes (Hill et al., 2005). El modelo (MKT) se divide en dos dominios: conocimiento del contenido matemático (SMK) y el conocimiento pedagógico del contenido (PCK). El primer dominio se divide en tres subdominios: (a) Conocimiento común del contenido (CCK), (b) Conocimiento especializado del contenido (SCK) y (c) Conocimiento en el horizonte matemático (HCK). El segundo dominio se divide en tres subdominios: (d) Conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), (e) Conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT), y (f) Conocimiento del contenido y el currículo (KCC).

A pesar del enorme avance que supuso este modelo del conocimiento del profesor, existen algunas deficiencias del modelo que son expuestas en Carrillo et al. (2018). Un primer elemento tiene relación con si realmente las categorías definen elementos exclusivos de los profesores de

matemáticas. En segundo lugar, existen dificultades referidas a la naturaleza extrínseca de la noción de especialización que sustenta el modelo, la falta de claridad de los límites entre los subdominios, lo que tiende a que los subdominios superpongan y que se genere dificultades al usarse analíticamente. Según, Carrillo et al. (2018) el modelo MKT y el trabajo de Rowland et al. (2009) “centran su atención en la práctica realizada en clase, ignorando los conocimientos que los profesores pueden poner en juego a la hora de realizar cualquier otro tipo de actividad como docente” (p. 3), lo que significa que aún faltan elementos del conocimiento del profesor que deben ser considerados. El modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge - MTSK) de Carrillo et al. (2018), mantiene los dos dominios de los modelos originales, es decir el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico del contenido. Las categorías contemplan el conocimiento dividido en subdominios más específicos, permitiendo un análisis del conocimiento matemático más detallado (Carrillo et al., 2018). En el primer dominio, Conocimiento matemático (MK) es entendido como “una red de conocimiento sistémico estructurado según sus propias reglas” (Carrillo et al., 2018, p. 6). Por tanto, es dividido en tres subdominios: el contenido matemático en sí mismo (Conocimiento de Temas - KoT); los sistemas de interconexión que unen al sujeto (Conocimiento de la estructura de Matemáticas - KSM); y cómo se procede en matemáticas (Conocimiento de prácticas en Matemáticas - KPM). Asimismo, la noción de especialización es entendida para ambos dominios, lo que permite sanar la dificultad de diferenciar entre conocimiento común y el especializado en el modelo MKT (Carrillo et al., 2018). Con respecto al segundo dominio del conocimiento pedagógico del contenido (PCK), según los autores es considerado como “una parte del conjunto de conocimientos para la enseñanza, y necesita ser complementado por MK” (Carrillo et al., 2018, p. 10). Este dominio provee información y orientación de las decisiones y acciones del profesor durante el proceso de enseñanza (Carrillo et al., 2018). El primer subdominio, corresponde al Conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (KFLM). El segundo subdominio es el Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Por último, el tercer subdominio es el Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

El modelo del conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK) de Mishra y Koehler (2006) “enfatisa en las conexiones, interacciones, posibilidades y limitaciones entre contenido (C), pedagogía (P) y tecnología (T)” (Mishra y Koehler, 2006, p. 1025) para una

buena enseñanza. Establece como subdominios las intersecciones entre los tres conocimiento de contenido pedagógico (PCK), conocimiento del contenido tecnológico (TCK), pedagógico tecnológico conocimiento (TPK), y los tres tomados en conjunto como tecnológicos conocimiento del contenido pedagógico (TPCK). El conocimiento del contenido (CK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento de contenido pedagógico (PCK), surgen de las ideas de Shulman (1986), lo que coincide con las ideas de los modelos del conocimiento expuestos previamente. Además, involucran tres subdominios más: (a) conocimiento tecnológico (TK), (b) conocimiento del contenido tecnológico (TCK) y (c) conocimiento pedagógico tecnológico (TPK). Por último, la componente del conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido (TPACK) que es el conocimiento que une los tres tipos de conocimiento (contenido, pedagogía y tecnología).

En síntesis, a pesar de que los modelos del conocimiento del profesor expuestos anteriormente suponen un avance significativo en la investigación, no observamos alusiones a los procesos o aspectos propios de la modelización. Además, encontramos que en el modelo MTSK existe un subdominio sobre el conocimiento de prácticas en matemáticas (KPM), referido a los “medios de producción y funcionamiento matemático” (Carrillo et al. 2018, p. 10), pero este aún se encuentra en desarrollo, dado que no está claro en la práctica matemática. Por lo que, coincidiendo con Lester (2013) en la importancia a los procesos específicos, consideramos necesario dilucidar qué aspectos deben formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas en ambientes de modelización.

#### **4. PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN**

En la investigación en educación matemática han surgido diversas posturas teóricas que convergen en la concepción de la modelización como una transición entre la realidad y la matemática, al resolver un problema de contexto real (Ledezma et al., 2022). A través de la construcción y desarrollo de un modelo matemático de una determinada situación problema, la modelización es relevante para comprender mejor el mundo, sirve de apoyo en el aprendizaje, contribuye al desarrollo de diversas competencias y actitudes apropiadas en los estudiantes hacia la matemática (Borromeo Ferri y Blum, 2009). Borromeo Ferri (2018) señala que una enseñanza de calidad constituye el factor de impacto principal en el aprendizaje de los estudiantes, en

particular si hablamos de la modelización matemática. Para lograr este objetivo el profesor debe poseer conocimientos propios del contenido y del conocimiento didáctico, que permitirá desarrollar con éxito su tarea docente (Piñeiro et al., 2019).

Son múltiples los esfuerzos realizados para caracterizar la competencia profesional del profesor. Piñeiro (2019) destaca el conocimiento profesional como elemento esencial de dicha competencia. El conocimiento del profesor ha sido ampliamente estudiado. Sin embargo, estas perspectivas teóricas están centradas en los conceptos, dándole más importancia a estos y dejando de lado a los procesos (Piñeiro et al., 2019) o prácticas matemáticas relevantes como la modelización matemática. No obstante, entendemos que los contenidos matemáticos escolares se componen de tanto conceptos como de procesos, por ello los profesores deberían de tener conocimiento sobre ambos. Asumimos el término de modelo matemático como una representación de un objeto o hecho concreto de la realidad, expresado por diferentes sistemas que ayudan a comunicar las variaciones individuales, tendencias y detalles lo más aproximados posibles a la realidad del fenómeno (Erbaş et al., 2014; NCTM, 2000). Por tanto, un modelo es un producto y la modelización es la acción de crear un modelo físico, simbólico o abstracto de una situación (Kaiser y Sriraman, 2006; NCTM, 2000). Así, observamos que no hay acuerdo respecto a lo que debe saber un profesor sobre los procesos (Piñeiro, 2019). En especial a cerca de la modelización matemática. Por esto en esta investigación los marcos teóricos existentes del conocimiento del profesor no son adecuados para ser usados.

Anudado a lo anterior, Wess et al. (2021) señala que “la formación docente requiere un análisis detallado de las competencias docentes y de la competencia profesional para la enseñanza de la modelización matemática” (p. 250). Ante esto, existen esfuerzos empíricos de profesionalización, que vislumbran conocimientos teóricos y prácticos que deben conocer los profesores aplicados a situaciones particulares en la modelización (e.g., Doerr, 2006; Doerr y English, 2006; Paolucci y Wessels, 2017). Pero los estudios son insuficientes debido a la complejidad de integrar la modelización en aula (Villa-Ochoa et al., 2021), siendo así necesario realizar más investigación acerca del conocimiento del profesor sobre la modelización matemática y su especificidad (Wess et al., 2021). Esto debiese de tener la finalidad delimitar el conocimiento sobre modelización en función de saber qué conocimiento profesional es ineludible para su enseñanza.

Además, existen problemáticas que afectan a la formación sobre la modelización de los docentes en muchos países (Bassanezi, 2002; Blum, 2015; Cetinkaya et al., 2016; Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022). Por ejemplo, Cetinkaya et al. (2016) exponen que “los docentes tienen un conocimiento profesional limitado sobre la naturaleza de los modelos matemáticos y cómo usarlos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas” (p. 290). También, hay obstáculos que impiden la implementación de la modelización en el aula. Se destaca la falta de manifestación del conocimiento profesional de los docentes sobre la modelización matemática (Kuntze et al., 2013; Bassanezi, 2002). Blum (2015) menciona que otras barreras son: (1) matemáticas la modelización y las aplicaciones hacen que la instrucción sea más abierta y exigente y, por tanto, la evaluación es más compleja; (2) se requieren conocimientos matemáticos y extramatemáticos, y (3) tener conocimiento limitado sobre tareas de modelización y/o tener creencias inútiles sobre la enseñanza a través de la modelización.

En este contexto, Bassanezi (2002), manifiesta que los profesores no se sienten cómodos usando tareas de modelización en la enseñanza. Esto debido a que creen que les hace falta formación o conocimiento sobre el proceso de modelización matemática. Desde la perspectiva de los profesores, la enseñanza de la modelización les requiere mucho tiempo de preparación e implementación de las clases. Sobre esto, Schmidt (2011) señala que los profesores revelan preocupación pues podría perjudicar el no completar el programa de estudios de un nivel educativo particular (Schmidt, 2011). Al mismo tiempo, por desconocimiento del proceso o miedo, los profesores sienten que pueden encontrarse con situaciones embarazosas, en cuanto a las aplicaciones de las matemáticas en áreas que no conocen. Por tanto, prefieren preservar el carácter de precisión y verdad absoluta de la matemática, versus el uso de contexto real que les genera incertidumbre o pérdida de control. Además, son limitadas las experiencias de enseñanza sobre “el uso de actividades de modelización matemática por parte de los maestros en su día a día” (Cetinkaya et al., 2016, p. 290), con lo cual muchos profesores no tienen acceso a un material adecuado o tiempo suficiente para el diseño de actividades o preparar material original para sus clases de modelización (Schmidt, 2011).

En particular, en Costa Rica no existe un programa estandarizado de formación de docentes para la educación primaria, ni hay una definición clara de un perfil de egreso de este tipo de formadores. Este hecho deriva en la inexistencia de estándares mínimos del conocimiento

profesional pedagógico y del contenido (Alpízar-Vargas y Alfaro-Arce, 2020). Si bien, las universidades han efectuado esfuerzos de reformar los planes de formación, algunos maestros egresados consideran insuficiente la formación recibida, pues no es adecuada para enfrentar los cambios vertiginosos educativos actuales, en particular en el área de matemática y su didáctica. Una de las justificaciones expuestas para esto es que existe una falta de conocimiento necesario para su práctica docente, sumado a un proceso de desactualización después de su egreso de la carrera (Alpízar-Vargas y Alfaro-Arce, 2020). Al respecto, Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022) señalan que en los planes de formación inicial de los profesores no es introducida la enseñanza de la modelización.

Así, y debido a que algunos currículos han incorporado recientemente la modelización, es requerido que los maestros enseñen este proceso sobre el que no tienen conocimiento, ni la formación necesaria y tampoco se proveen espacios de formación continua donde puedan actualizarlos (Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022). Las autoras Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022), vislumbran que la problemática anterior acarrea consecuencias que afectan directamente al desarrollo profesional, sea esta antes o durante su ejercicio, repercutiendo en sus procesos de enseñanza dentro de las aulas y por consiguiente en la formación de sus estudiantes. En particular, destacamos que debido a la ausencia de experiencias de modelización durante la formación docente, tanto futuros maestros como en ejercicio tienden a construir estrategias pedagógicas y didácticas que no permiten la práctica de una modelización en forma eficaz (Andrews y Sayers, 2012; Paolucci y Wessels, 2017). También, los profesores no formados en ambientes de modelización incurren en la producción de algunos errores asociados a procesos de modelización y aplicaciones de contenidos matemáticos (Moreno et al., 2021). En esta investigación, nos interesamos en estudiar la conexión entre el aprendizaje de los estudiantes y el conocimiento de profesor en la modelización. Atendiendo, a estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria y su vínculo con los profesores que trabajan en el mismo nivel educativo y con la enseñanza de la modelización.

Por tanto, el poner en práctica la enseñanza de metodologías que impliquen nuevos aspectos, como la modelización matemática, involucra cambios a los que muchos profesores no están preparados. Al mismo tiempo, es requerida una formación adicional y necesaria sobre la modelización para que los futuros profesores y en servicio enseñen en sus aulas (Guerrero-Ortiz

y Borromeo Ferri, 2022). Además, estos deben asumir el reto de innovarse constantemente y sus formadores deben propiciar espacios de formación y actualización (Alpízar-Vargas y Alfaro-Arce, 2020), tomando conciencia de los cambios y avances en los currículos educativos.

Debido a las razones expuestas anteriormente y dado que la investigación en el campo de la modelización matemática es amplia y ha mostrado “la complejidad que involucra integrar la modelización en la vida escolar cotidiana y las altas exigencias que implica para los docentes” (Villa-Ochoa et al., 2021, p. 12), aún hay vacíos y desafíos en su implementación y enseñanza (Ärlebäck y Doerr, 2020), en especial desde el conocimiento profesional específico que debe tener el profesor para lograr el éxito en este enfoque. Por ello, siguiendo los trabajos del grupo de investigación “FQM 193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”, en particular la línea del conocimiento del profesor y modelización, pretendemos contribuir a la construcción del conocimiento en este campo.

En síntesis, como puntos relevantes expuestos hasta el momento, encontramos que:

- La modelización es entendida por muchos investigadores como una transición entre la realidad y la matemática y viceversa, al resolver un problema con contexto real.
- La importancia de la modelización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha destacado en la literatura, al ser visto como una práctica necesaria para el aprendizaje de las matemáticas, que ayuda a preparar a los estudiantes para su vida diaria y profesional. Además, permite el desarrollo de diversas competencias y actitudes apropiadas en los estudiantes hacia la matemática, al integrarla con otras áreas del conocimiento. Por ello es recomendable desarrollar esto desde los primeros años de educación de los estudiantes, para garantizar la efectividad del proceso.
- Para lograr lo anterior el papel del docente es crucial, debiendo poseer conocimientos y competencias adecuadas para enseñar la modelización, para que el aprendizaje de los estudiantes pueda darse de forma efectiva. No obstante, es un desafío para los profesores enseñar la modelización.
- La modelización desde el punto de vista de un proceso a enseñar implica un conocimiento concreto del profesor que no está específicamente relacionado con el contenido matemático, sino con su naturaleza como proceso (en el sentido del NCTM, 2000). La investigación y los modelos sobre el conocimiento del profesor no brindan la atención

necesaria que requiere la aprendizaje-enseñanza de la modelización. Este hecho deriva en una falta de acuerdo respecto a lo que debe saber un profesor sobre los procesos, en especial a cerca de la modelización matemática.

Por estas razones, este estudio pretende profundizar en aspectos relacionados con la resolución de tareas de modelización por parte de los estudiantes y el conocimiento profesional que el maestro de primaria en ejercicio manifiesta sobre la enseñanza de la modelización matemática. Para lograr este propósito, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

P1: ¿Qué estrategias de resolución, representaciones y errores utilizan los estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria, al resolver una tarea de modelización matemática?

P2: ¿Qué conocimientos profesionales sobre modelización matemática manifiestan los maestros de primaria en ejercicio?

Para dar respuesta a la pregunta de investigación 1 sobre el aprendizaje de los estudiantes en la modelización, planteamos el objetivo general 1:

OG1. Caracterizar las estrategias de resolución, representaciones y errores al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria.

Para lograr objetivo general 1, planteamos dos objetivos específicos:

OE1.1 Identificar y describir las estrategias de resolución y representaciones que realizan los estudiantes según su estilo de pensamiento al resolver una tarea de modelización matemática.

OE1.2 Identificar y describir los errores y representaciones que realizan los estudiantes según su estilo de pensamiento al resolver una tarea de modelización matemática.

Dado que el papel del profesor es crucial para lograr una enseñanza que genere un aprendizaje efectivo en la modelización y el investigar el conocimiento del profesor permite mejorar la formación inicial de profesores y los cursos de desarrollo profesional (Piñeiro et al., 2022), propusimos el segundo objetivo general para dar respuesta a la pregunta de investigación 2:

OG2. Profundizar en el conocimiento profesional de los maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática.

El objetivo general 2 lo concretizamos en los siguientes objetivos específicos:

OE2.1 Establecer componentes de conocimiento del profesor referentes al proceso de modelización.

OE2.2 Identificar qué componentes del conocimiento sobre modelización matemática ponen en juego los maestros de primaria al enseñar la modelización.

OE2.3 Caracterizar el conocimiento de los maestros de primaria en ejercicio sobre el proceso de modelización matemática.

## 2. ANTECEDENTES

---

En este capítulo mostramos los principales resultados obtenidos en investigaciones relacionadas con los dos objetivos generales del presente estudio. En un primer apartado, presentamos estudios sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la modelización. Particularmente, exhibimos trabajos sobre estudiantes competentes, dificultades y errores, uso de representaciones y el uso de estrategias de resolución, todos estos aspectos durante el proceso de modelización. En segundo apartado, revisamos investigaciones sobre el conocimiento del profesor acerca de la modelización. Específicamente, investigaciones que utilizan perspectivas teóricas del conocimiento del profesor sobre la modelización. Este apartado lo dividimos en dos partes: (a) estudios del conocimiento del profesor sobre la modelización en forma general y (b) investigaciones sobre aspectos específicos del conocimiento del profesor sobre la modelización. Por último, cerramos el apartado con estudios relativos al uso de la modelización como herramienta para el desarrollo profesional.

# **1. INVESTIGACIÓN SOBRE EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE EN LA MODELIZACIÓN**

En esta sección, exponemos los antecedentes tanto sobre la enseñanza como en el aprendizaje de la modelización en el aula de matemática. Dividimos las investigaciones en dos apartados: (a) estudios sobre la enseñanza y (b) estudios sobre aspectos del aprendizaje de la modelización.

## **1.1 INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN**

En el caso de la enseñanza de la modelización, encontramos propuestas para el uso de la modelización matemática como una alternativa que permite integrar las matemáticas con otras áreas de conocimiento. Entre estos estudios encontramos los de Masanja (2002), el de Blomhøj y Kjeldsen (2006), y también el de Michelsen (2006), cuyo fin principal es describir la interdisciplinariedad de la matemática. La primera investigación de Masanja (2002) expone el desarrollo de proyectos con problemas matemáticos relacionados con otras materias del currículo de educación secundaria. En forma similar, en el segundo trabajo de Blomhøj y Kjeldsen (2006) fueron desarrolladas actividades de modelización matemática relacionadas directamente con ciencias, donde los modelos de fenómenos utilizados mostraron la afinidad de ambas disciplinas. El tercer estudio de Michelsen (2006), sugiere la utilización de la modelización matemática como metodología de enseñanza, con el fin de disminuir las líneas divisorias entre las diferentes áreas en que las matemáticas juegan un rol, como Física, Biología, Economía, Informática, entre otras. Una consecuencia común de los tres estudios es que al utilizar actividades donde es mostrado el carácter interdisciplinario de la matemática, se produce una mejora en la comprensión del estudiante y ayuda a que este obtenga una formación integral, eficaz y significativa. Esto a su vez incentiva el interés del estudiante por aprender sobre distintas áreas disciplinarias y los currículos de la educación matemática se dotarían de un eje interdisciplinario que aún algunos de ellos carecen.

En la investigación de Rodríguez y Quiroz (2016) se detalla una experiencia didáctica al usar la tecnología en ambientes de modelización matemática a nivel universitario, con estudiantes de ingeniería. Los autores concluyen que la modelización matemática utilizada como estrategia didáctica en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales permitió el acercamiento de los alumnos

a problemas de contexto. De esta manera, es posible que los estudiantes utilicen las matemáticas para dar respuesta a fenómenos propios de la ingeniería. Asimismo, los autores señalan que las clases de este tipo requieren de un diseño específico, cuidadoso de las diversas etapas de la modelización matemática reflejadas en una secuencia de actividades que promuevan, tanto su desarrollo, como el tránsito entre ellas.

Por último, encontramos que existen algunas investigaciones sobre la importancia de promover la utilización de la modelización matemática en actividades de aula, como es el estudio de English (2010) donde exploraron los procesos utilizados por pequeños grupos de niños mientras construyen de forma independiente sus propios modelos matemáticos al final de su sexto grado. Como resultados, los autores destacan que los problemas de modelización son excelentes oportunidades para que los estudiantes del nivel de primaria participen en una variedad de procesos matemáticos, junto con el desarrollo de construcciones matemáticas importantes que están integradas en el problema. Además de que los problemas de modelización son vehículos ideales para desarrollar habilidades de resolución de problemas durante el trabajo colaborativo. En la investigación se menciona que los estudiantes lograron realizar con éxito procesos matemáticos y sociales como interpretar y reinterpretar la información del problema, tomar decisiones apropiadas, justificar su razonamiento, plantear hipótesis, presentar argumentos y contraargumentos, aplicar el aprendizaje previo y actuar metacognitivamente.

En la misma línea que la pesquisa anterior, el trabajo de Mousoulides et al. (2006) muestra que fueron obtenidos resultados positivos al poner en práctica actividades con problemas de modelización matemática en el aula, particularmente en educación primaria. La investigación presenta los resultados de una clase de sexto grado trabajando en la resolución de un problema de modelización. Además, los estudiantes trabajaron en grupos pequeños y participaron activamente en discusiones fructíferas con sus compañeros y el maestro. Los resultados mostraron que los estudiantes sin experiencia previa en actividades de modelización lograron aplicar en forma efectiva su conocimiento matemático informal y en la parte social las interacciones en grupo potenciaron el descubrimiento del conocimiento matemático necesario para resolver un problema real.

Sintetizando los hallazgos previos, para enseñar la modelización deben utilizarse estrategias

que lo promuevan como alternativa para integrar las matemáticas con otras áreas del conocimiento (Blomhøj y Kjeldsen, 2006; Masanja, 2002; Michelsen, 2006) y mostrar su carácter interdisciplinario, además de ayudar a disminuir las líneas divisorias entre estas disciplinas y la misma matemática (Michelsen, 2006). Por ello, el profesor debe:

- Poseer conocimientos sobre el diseño de tareas de modelización (Rodríguez y Quiroz, 2016).
- Ser cuidadoso en el abordaje de las diversas etapas de la modelización matemática reflejadas en una secuencia de actividades que las promuevan (Rodríguez y Quiroz, 2016).
- Ser consciente de que los problemas de modelización son excelentes oportunidades para que los estudiantes construyan su conocimiento matemático (English, 2010; Mousoulides et al., 2006), debido a que este tipo de tareas permiten el desarrollo exitoso de procesos matemáticos y sociales necesarios para la formación profesional futura del estudiante.

## **1.2. INVESTIGACIÓN SOBRE ASPECTOS DEL APRENDIZAJE DE LA MODELIZACIÓN**

En este apartado presentamos investigaciones acerca aspectos relacionados con el aprendizaje de los estudiantes al utilizar la modelización como estrategia de enseñanza. Específicamente, sobre los aspectos que se abordan en este trabajo: estudiantes competentes, dificultades y errores en el proceso de aprendizaje, y uso de representaciones y estrategias de resolución en la modelización.

### ***Investigación sobre estudiantes competentes***

Para Doerr y English (2003), un enfoque para la enseñanza y el aprendizaje de la modelización debe permitir encontrar una solución a un problema particular y crear un sistema de relaciones que es generalizable y reutilizable. Los autores analizan la naturaleza de una secuencia de tareas para ser utilizadas bajo este enfoque. Este estudio, fue realizado con estudiantes de educación secundaria y muestra resultados positivos al resolver tareas. Se observó que los estudiantes lograron verbalizar su comprensión inicialmente implícita, lo que condujo a un refinamiento y explicación clave de las construcciones matemáticas. Los estudiantes pudieron desarrollar un modelo matemático que se volvió cada vez más refinado y sofisticado, es decir crearon un sistema o modelo generalizable y reutilizable. Además, el grado de variación en los enfoques de resolución usados por los estudiantes sugiere que se logró obtener múltiples caminos

para el desarrollo de las ideas matemáticas, al interpretar los datos útiles para la toma de decisiones al resolver el problema.

Similar al estudio anterior, Aymerich y Albarracín (2022) promueven el aprendizaje de conocimientos estadísticos a partir de la modelización matemática. En concreto, usaron problemas estadísticos abiertos donde estudiaron fenómenos sociales reales a partir de grandes cantidades de datos. Las tareas promovieron el desarrollo del concepto de variabilidad y aplicarlo para entender la situación estudiada a partir de un modelo matemático. Entre los resultados se resaltan que los estudiantes lograron aprender a modelizar grandes cantidades de datos contextualizados y desarrollar su razonamiento estadístico general. Además, al haber generado sus propios modelos matemáticos, los estudiantes han identificado aspectos que definen el concepto de variabilidad de datos para concretarlo posteriormente de forma adecuada con las herramientas curriculares propias de la estadística y conectar su experiencia en esta actividad con esos conocimientos.

Asimismo, hallamos los trabajos de Leavy y Hourigan (2021) y Turner et al. (2021) sobre experiencias de aprendizaje con estudiantes de primaria. El primer estudio utiliza la modelización de datos para desarrollar habilidades y competencias necesarias para resolver problemas del mundo real. Concretamente, este trabajo identifica los enfoques utilizados por niños de 5 a 6 años al hacer inferencias informales sobre los datos y las estrategias de comunicación que usan los estudiantes para mostrar como comprenden la inferencia estadística. Los hallazgos sugieren que hacer inferencias puede ser un desafío para los estudiantes más jóvenes principalmente debido a la poderosa influencia del desarrollo de su sentido numérico. Por su parte, Turner et al. (2021) realizan un estudio de casos con estudiantes de primaria (tercer y quinto grado), al aplicar una tarea de modelización la cual poseía un contexto de la vida real sobre reciclaje. Entre los hallazgos se menciona que los estudiantes recurrieron a conocimientos matemáticos, estrategias y herramientas para representar relaciones y operar sobre cantidades en sus modelos. Además, es mencionado como los estudiantes aprovecharon sus experiencias anteriores para modelos cuando fue necesario. Este trabajo destaca la importancia de proveer oportunidades para probar y discutir conjeturas en las tareas de modelización matemática, ya que esto permite a los estudiantes confirmar o confrontar ideas que aún pueden estar en desarrollo. En este sentido, los autores consideran que el contexto seleccionado de la tarea tuvo relación con los resultados positivos de los estudiantes.

Por último, dentro de la literatura encontramos trabajos como el de Vargas et al. (2018) y Şahin y Eraslan (2016) que reportan resultados positivos de los estudiantes al trabajar la modelización. En la primera investigación, Vargas et al. (2018) reflexionan sobre las competencias matemáticas mostradas por estudiantes de bachillerato cuando realizaron una tarea de modelización. Sus resultados muestran que los estudiantes probaron los supuestos relacionados con la vida diaria durante el proceso, produjeron ideas, probaron la precisión de sus modelos asociándolos con la vida real y trataron de hacer que sus modelos fueran generalizables. De igual forma, el estudio de Şahin y Eraslan (2016) tuvo como objetivo examinar los procesos de pensamiento de los estudiantes de 4º grado del nivel primaria al resolver una tarea de modelización. Entre los resultados destacamos que la mayoría de los grupos mostraron el desarrollo de competencias como la comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva.

En resumen, los estudiantes competentes en modelización mostraron tener competencias como:

- La creación de modelos matemáticos generalizables y reutilizables (Doerr y English, 2003; Vargas et al., 2018).
- Realizaron inferencias informales (Leavy y Hourigan, 2021).
- Lograron obtener múltiples caminos para el desarrollo de las ideas matemáticas, al interpretar los datos útiles para la toma de decisiones al resolver el problema (Doerr y English, 2003).
- Las estrategias de comunicación usadas permitieron visualizar su comprensión conceptual (Doerr y English, 2003; Şahin y Eraslan, 2016).
- Fluidez procedimental (Şahin y Eraslan, 2016).
- La competencia estratégica (Şahin y Eraslan, 2016).
- El razonamiento adaptativo (Şahin y Eraslan, 2016).
- La disposición productiva al resolver los problemas de modelización matemática (Şahin y Eraslan, 2016).
- Aprender a modelizar grandes cantidades de datos contextualizados y desarrollar su razonamiento conceptual (Aymerich y Albarracín, 2022).

## ***Investigación sobre dificultades y errores en el proceso de aprendizaje de la modelización***

En las actividades de modelización, el pensamiento matemático del resolutor se involucra en tareas complejas, requiriendo “describir, explicar, debatir, justificar, predecir, escuchar de forma crítica y cuestionar de manera constructiva” (English, 2007, p. 8). Dichos procesos son esenciales para una vida profesional futura. La complejidad de las tareas de modelización matemática genera una serie de dificultades y errores en los que incurren los estudiantes, que no han pasado desapercibidos por los expertos en el área. La mayoría de las investigaciones estuvieron centradas en detectar y categorizar los errores cometidos en el proceso de resolución de problemas (Guerrero, 2016; Socas et al., 2016), existiendo escasas investigaciones que detecten errores cometidos en el proceso de modelización (Guerrero, 2016).

Investigaciones como la de Socas et al. (2016) y Guerrero (2016) que realizan un análisis de los errores al resolver tareas de modelización matemática, buscando sus causas, son iluminadoras. Socas et al. (2016) utilizan el modelo Socas (1997, 2007), que propone tres orígenes para los errores: actitudes afectivas, ausencia de sentido y obstáculo. Los resultados muestran que los estudiantes presentan grandes dificultades con el proceso de modelización. En relación con los errores, el origen más frecuente es la ausencia de sentido debido al uso de un conocimiento matemático deficiente, manifestándose en dos ámbitos diferenciados. En uno, los errores son ocasionados por aspectos que han quedado sin resolver en la aritmética o la geometría. En el otro, la ausencia de sentido ha sido producida mayoritariamente por las características propias del lenguaje algebraico, en los procesos de sustitución formal y generalización. En relación con las actitudes, los autores consideran esencial buscar las razones por las que los alumnos no han respondido a algunas preguntas, siendo en muchas ocasiones los bloqueos ocasionados por las actitudes la principal causa del error. Por su parte, en el estudio de Guerrero (2016), los estudiantes no tenían ninguna experiencia en el proceso de modelización. Sus resultados recogen los errores con mayor frecuencia, a saber: (a) la particularización, originado en la ausencia de sentido, pues el sistema conceptual previo es insuficiente para dotar de significado a la construcción de los nuevos conocimientos, es decir, no le encuentran sentido al uso del lenguaje algebraico, pues siguen pensando numéricamente; y (b) el modelo matemático incompleto debido

a un descuido al resolver parcialmente los problemas, originado en las actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática.

Asimismo, los trabajos de Vargas et al. (2018) y Şahin y Eraslan (2016) revelaron dificultades de los estudiantes participantes al trabajar la modelización. En el caso de la primera investigación, las dificultades de los estudiantes mostraron que existieron dos grupos que expusieron conocimientos, habilidades y competencias matemáticas poco integradas y desarrolladas. Uno de los grupos presentó una competencia de comprensión conceptual limitada, manifestándose en la falta de conocimientos matemáticos para resolver el problema y además, su fluidez procedimental y la competencia estratégica era deficiente. Esto se evidenció en errores como “formular, representar y resolver problemas matemáticos, pues no lograban pensar, reflexionar, explicar y justificar de manera lógica” (Vargas et al., 2018, p. 230). Además, su razonamiento adaptativo era limitado, debido a que no tenían confianza en sus conocimientos y capacidades. De igual manera, el segundo grupo no logró construir un modelo matemático para resolver el problema, aunque algunos integrantes de este grupo lograron realizar una aproximación vaga. Sus ideas no fueron estructuradas ni justificadas adecuadamente, debido a una comprensión deficiente que no mejoró a pesar de observar argumentos más adecuados presentes en las soluciones de otros grupos durante una socialización de estas.

En el trabajo de Şahin y Eraslan (2016), los estudiantes también encontraron algunas dificultades como el comprender e interpretar datos en varios formatos y representaciones presentes en el problema, así como inconvenientes para entender el enunciado del problema. Asimismo, al trabajar en grupo los estudiantes tenían problemas para concentrarse, querían todo estuviera en silencio o dejar de trabajar en forma individual. Ante esto, el investigador intervino y pidió a los estudiantes que se enfocaran en el problema, enfatizó en la importancia de trabajar en equipo para producir ideas y llegar a un resultado común.

En síntesis, encontramos que las dificultades sobre el proceso de aprendizaje de la modelización se deben a causas como:

- Un sistema conceptual matemático previo deficiente.
- Debido bloqueos ocasionados por las actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática, que en ocasiones produce que los estudiantes no respondan las preguntas propuestas en el problema o construyen un modelo matemático incompleto.

- Debido a una comprensión conceptual limitada se produce una fluidez procedimental y la competencia estratégica deficiente.
- Un razonamiento adaptativo limitado ocasiona estudiantes que no tengan confianza en sus conocimientos y capacidades.
- La falta de comprensión y entendimiento del enunciado del problema, o al comprender e interpretar datos presentados en varios formatos y representaciones.
- Falta de oportunidades de aprendizaje en la modelización, que les permitan desarrollar habilidades sociales.

### ***Investigación sobre el uso de representaciones en el proceso de modelización***

Sobre investigaciones centradas en el uso de representaciones en la resolución de tareas de modelización, la investigación de forma explícita es limitada. Guerrero y Ortiz (2012) implementaron una tarea de modelización con estudiantes de primer año de educación secundaria, cuya edad fue entre 12 y 14 años. Sus resultados muestran que los sistemas de representación más usados son el lenguaje natural y el numérico, aunque para este nivel idealmente deberían haber utilizado el sistema algebraico. Además, los estudiantes no poseían todas las competencias para llevar a cabo un proceso de modelización de manera independiente (proceso intuitivo), presentando mayor dificultad en la etapa de construcción del modelo matemático. Los autores concluyen que las competencias de modelización podrían adquirirse con tiempo y práctica de aula.

Los trabajos de Aviña et al. (2019), Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo (2021) describen y analizan lo que ellos denominan *ciclos progresivos de construcción de entendimiento*. Los autores explican este constructo como la actividad de modificar, extender y refinar el conocimiento y habilidades al realizar una tarea de modelización. El primer estudio fue realizado con estudiantes de la carrera de medicina y el segundo estudio los de ingeniería industrial. Las actividades usadas involucraron una situación cercana a la vida real y relacionada con su futuro entorno profesional.

Ambos trabajos documentaron distintos ciclos de entendimiento iterativos asociados con los conceptos y representaciones utilizadas al abordar la situación problemas. Durante estos ciclos, los estudiantes al inicio realizan modelos burdos que luego son refinados volviéndose más

sofisticados (Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo, 2021). En las investigaciones se hace referencia a ciclos de entendimiento del estudiante, donde el primero es de carácter cualitativo debido a que “el estudiante no utiliza representaciones numéricas o algebraicas o tabulares o gráficas” (Aviña et al., 2019, p. 69), sino que se limita a medios de representación que describan su comportamiento como una metáfora y lenguaje verbal (Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo, 2021).

También es descrito un segundo ciclo de entendimiento del estudiante que posee un carácter más cuantitativo, Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo (2021) citando a Vargas et al. (2016) definen este ciclo donde “el estudiante da una interpretación numérica a las variables que identificó previamente, y utiliza medios de representación más complejos que el anterior, como tablas o gráficos” (p. 1143). Además, Aviña et al. (2019) plantea un ciclo de entendimiento adicional, el algebraico, donde el estudiante puede llegar a mostrar fluidez entre los distintos tipos de sistemas de representación y el manejo de símbolos algebraicos al resolver una situación problema.

Los dos estudios, demuestran en sus resultados que los modelos creados por los estudiantes evolucionaron durante los ciclos de entendimiento. Esto es visto en el uso de sistemas de representación cada vez más sofisticadas, que permitieron describir, comunicar, predecir el comportamiento de la situación problema (Aviña et al., 2019). Por ejemplo, en el primer estudio “se evidenció un cambio en las descripciones y comparaciones, las cuales, pasaron de ser verbales a numéricas y evolucionaron a representaciones tabulares, denotando la identificación de patrones, procesos de generalización e indicios de expresiones algebraicas” (Aviña et al., 2019, p. 83). De igual manera, el segundo estudio menciona en sus resultados evidencias de los tres ciclos de entendimiento y su evolución. Para el primer ciclo cualitativo los estudiantes usaron representaciones como el lenguaje hablado, metáforas y diagramas, que ilustraron sus ideas e interpretaciones del problema. En el caso del segundo ciclo de entendimiento, el cuantitativo fue evidenciado por medio de los sistemas de representación del ciclo cualitativo, más otros sistemas de representación como el algebraico y el numérico. En el tercer ciclo de entendimiento, se observaron varios aspectos de los ciclos anteriores demostrando que los ciclos son iterativos (Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo, 2021).

Sintetizando destacamos que el uso de los sistemas de representación es importante, debido a que evidencian las estructuras cognitivas que poseen los estudiantes. Específicamente en la modelización, la fluidez representacional es crucial para construir modelos y entender conceptos matemáticos (Aviña et al., 2019). Dado que el utilizar distintas representaciones para explicar, describir e interpretar la tarea de modelización es un indicador del entendimiento del conocimiento matemático (Aviña et al., 2019). Por ello, los sistemas de representación permiten al profesor visualizar la evolución de la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes por medio de los ciclos iterativos de entendimiento (Aviña et al., 2019; Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo, 2021). En la investigación de Guerrero y Ortiz (2012), es exhibido que los sistemas de representación más usados son el lenguaje natural y el numérico. Además, los estudiantes no poseían todas las competencias para llevar a cabo un proceso de modelización de manera independiente, presentando dificultades en algunas etapas del proceso. Por ello, la cantidad de sistemas de representación que usen los estudiantes puede afectar al proceso de modelización.

### ***Investigación sobre el uso de estrategias de resolución en la modelización***

Con respecto a la investigación sobre el uso de estrategias en tareas de modelización, encontramos escasa investigación en la literatura que lo trate de manera explícita. Un primer trabajo es el desarrollado por Rellensmann et al. (2017) donde pidieron a 61 estudiantes crear un dibujo de la situación y un dibujo del modelo matemático antes de resolver una situación-problema de modelización. La estrategia usada es la construcción de una representación visual en la que se evidencie la comprensión de los objetos y relaciones involucradas en una tarea de modelización. Aquí, los estudiantes “tienen que reducir la cantidad de información proporcionada centrándose en las piezas de información relevantes que se van a representar en el dibujo” (Rellensmann et al., 2017, p. 2). Los autores encontraron que el conocimiento sobre estrategias de resolución al usar el dibujo como medio de expresión fue relacionado positivamente con el desempeño al modelizar.

Borromeo Ferri (2018) establece que las estrategias en la modelización matemática son basadas en el estilo de pensamiento del resolutor. Es decir, según sea el estilo de pensamiento del estudiante, así serán los modos de proceder o estrategias que selecciona y aplica el estudiante para abordar una tarea de modelización. Específicamente, Borromeo Ferri (2018) establece tres tipos de estrategias según el estilo de pensamiento: (a) analítico, (b) visual y (c) integrado. En el

caso de las estrategias de pensadores analíticos son capaces de comprender hechos matemáticos idealmente a través de representaciones simbólicas o verbales existentes y prefieren hacer uso del formalismo matemático. Los pensadores visuales prefieren las características internas distintivas, imaginaciones y representaciones pictóricas externalizadas, así como una comprensión de hechos matemáticos y conexiones a través de representaciones holísticas. Por último, los pensadores integrados son aquellos que usan estrategias que combinan formas de pensamiento visual y analítico. Son capaces de cambiar en forma flexible entre las diferentes representaciones o formas de proceder. Muestran un equilibrio entre la realidad y las matemáticas.

Con las investigaciones presentadas en este apartado mostramos como:

- La modelización es una práctica necesaria para el aprendizaje de la matemática, dado que ayuda a los estudiantes visualicen la integralidad de la matemática en otras disciplinas (Blomhøj y Kjeldsen, 2006; Masanja, 2002; Michelsen, 2006), con el objetivo de prepararse para su vida diaria y profesional (Rodríguez y Quiroz, 2016).
- Los problemas actuales de modelización son excelentes oportunidades en la construcción de conocimiento matemático de los estudiantes (English, 2010; Mousoulides et al. 2006).
- Las investigaciones sobre aspectos relacionados con el aprendizaje de los estudiantes al utilizar la modelización destacan la existencia de múltiples experiencias positivas en la formación de estudiantes competentes con este enfoque (Aymerich y Albarracín, 2022; Doerr y English, 2003; Leavy y Hourigan, 2021; Şahin y Eraslan, 2016; Turner et al., 2021; Vargas et al., 2018).
- Existen dificultades en el aprendizaje de los estudiantes al trabajar la modelización (Guerrero, 2016; Şahin y Eraslan, 2016; Socas et al. 2016; Vargas et al., 2018).
- La importancia del uso de representaciones (Aviña et al., 2019; Guerrero y Ortiz, 2012; Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo, 2021).
- Estrategias adecuadas en la resolución de problemas de la modelización (Rellensmann et al., 2017).
- Destacamos que el papel del profesor es de suma importancia, dado que con una competencia y conocimiento profesional adecuado se puede lograr un aprendizaje efectivo

de los estudiantes, en el contexto específico de modelización (Borromeo Ferri y Blum, 2009).

## **2. INVESTIGACIÓN RELATIVA AL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE MODELIZACIÓN**

El aprendizaje y la enseñanza se relacionan, siendo preciso suponer que la investigación en estos campos debería mostrar dicha relación desde el inicio y avanzar en forma conjunta (Borromeo Ferri, 2021). Sin embargo, según esta autora esto no ha sido así, pues la investigación de la modelización ha sido desarrollada en niveles distintos de importancia, relegando la investigación en educación y formación de los docentes a un último lugar.

Un ejemplo es el desarrollo poco avanzado de la investigación relativa a las competencias del profesor para enseñar modelización que deriven en una enseñanza de calidad y afecten directamente el aprendizaje de los estudiantes (Borromeo Ferri, 2021). Lo anterior lo visualizamos en la división en tres períodos que hace la autora de la investigación sobre la formación de los docentes en la modelización. El primer periodo abarca la literatura antes del año 2000, donde la investigación sobre el tema era escasa y dándole más importancia al aprendizaje de los estudiantes (Borromeo Ferri, 2021). El segundo periodo inicia a partir del año 2000, donde al desarrollo de la formación docente fue de gran relevancia en la política educativa de la mayoría de los países, afectando varias áreas de la educación matemática, en particular a la modelización. Por ejemplo, en estudios como el llamado *Formación del Profesor y Estudio de Desarrollo en Matemáticas* (TEDS-M por sus siglas en inglés, Borromeo, 2021). En este mismo periodo, otro ejemplo es la investigación sobre cursos de formación continua docente en la modelización con enfoques de enseñanza como: (1) días/semanas de modelización; (2) cursos de modelización en la universidad/formación continua; (3) cursos a distancia/online. El tercer y último periodo, se desarrolla desde el 2019, cuando comenzaron a realizarse investigaciones sobre como medir las competencias del profesor sobre la modelización matemática (Borromeo Ferri, 2021; Wess et al., 2021). La autora menciona que aún existen desafíos que deben ser enfrentados por la investigación acerca de la formación de docentes, por ejemplo, en la

construcción materiales adecuados, la evaluación sobre la modelización y su conocimiento profesional.

En relación con lo anterior, en este apartado exponemos la investigación centrada en el conocimiento del profesor relativa a la modelización. En primer lugar, presentamos investigaciones que analizan el conocimiento del profesor sobre la modelización y en segundo lugar, investigaciones sobre la modelización como herramienta para el desarrollo profesional.

## **2.1 INVESTIGACIONES QUE UTILIZAN PERSPECTIVAS TEÓRICAS DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE LA MODELIZACIÓN**

Este apartado muestra en primer lugar estudios que utilizan de manera general perspectivas teóricas del conocimiento del profesor acerca de la modelización. En segundo lugar, trabajos que abordan conocimientos específicos del profesor sobre la modelización matemática.

### ***Investigación relativa al conocimiento del profesor sobre modelización***

En la literatura encontramos estudios que usan diferentes modelos del conocimiento del profesor sobre la modelización (e.g., Huincahue et al., 2018; Guerrero-Ortiz, 2021). Huincahue et al. (2018) estudiaron la evolución del conocimiento de la enseñanza de la modelización desde la reflexión de un participante a lo largo de un curso de modelización para profesores en formación en Chile. Usando como categorías de análisis el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), muestran que el conocimiento didáctico del profesor fue desarrollado en forma paulatina, desde “una ejercitación algorítmica hasta la preocupación por generar procesos de modelización matemática en sus propuestas” (Huincahue et al., 2018, p. 111). Además, el curso tuvo un impacto significativo en el conocimiento didáctico del contenido (PCK), donde las actividades planificadas en el curso mostraron “relaciones de los conocimientos matemáticos (específicamente KPM) con todos los subdominios del PCK” (Huincahue et al., 2018, p. 111). De acuerdo con los autores, esto permitió formar un conocimiento sobre cómo la actividad de crear modelos permite al profesor lograr los objetivos de aprendizaje propuestos y también, estudiar y usar herramientas evaluativas.

Otro trabajo es el de Guerrero-Ortiz (2021), quien mediante un estudio de caso de enfoque cualitativo, analiza los conocimientos del profesor con el modelo del contenido pedagógico

tecnológico (TPACK) y el ciclo de modelización de Greefrath et al. (2018). La autora solicitó a los profesores en formación diseñar una tarea para un grupo de estudiantes (15 a 16 años). Concretamente, la tarea debía integrar su conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido sobre la modelización restringiéndose al concepto de elipse como lugar geométrico al realizar simulaciones dinámicas con tecnología (TPK). En el diseño de la tarea los profesores en formación usaron diferentes tipos de conocimiento. Los hallazgos revelaron que, al explorar la situación elegida por ellos, surgieron conocimientos sobre el movimiento planetario (CK, EMK). Luego, en la construcción de simulación dinámica (TPK), fueron utilizados modelos de la física y la matemática como herramienta para resolver las tareas de modelización (TCK). Así, los profesores en formación lograron mejorar sus conocimientos matemáticos y extramatemáticos, particularmente apoyándose en conocimientos de otras ciencias. Además, la autora concluye con la necesidad de repensar los escenarios de aprendizaje incluidos en los programas de formación para que aprendan de manera interdisciplinaria y comprendan mejor cómo el uso de la tecnología influye en el diseño de los contenidos y la enseñanza.

A su vez, dos investigaciones Greefrath et al. (2022) y Borromeo Ferri (2021) estudiaron el conocimiento del contenido pedagógico de los profesores en formación como parte de la competencia profesional para la enseñanza de la modelización. Ambos estudios proponen un curso estructurado desde el modelo de las competencias didácticas en la modelización (Borromeo Ferri, 2014, 2018; Borromeo Ferri y Blum, 2010). Además, en cuanto a la metodología, las dos investigaciones son muy similares. Particularmente, el trabajo de Greefrath et al. (2022) siguió el método cuasi-experimental con un diseño pre-post test para medir conocimiento del contenido pedagógico, especialmente en la creación de tareas de modelización y en la intervención docente al aplicar dichas tareas a sus estudiantes. En este estudio, el tratamiento aplicado a todos los grupos fue la aplicación de un seminario de formación en modelización matemática de 12 sesiones. Entre los hallazgos, destacamos que los conocimientos sobre tareas, procesos de modelización e intervenciones aumentan significativamente en ambos grupos experimentales, pero en diversos grados. En forma contraria, los participantes del grupo de control no demostraron cambios significativos en su nivel de conocimiento del contenido pedagógico con relación a la modelización. En general, las diferencias entre los conocimientos de los grupos experimentales y el grupo control, indican la eficacia del seminario de formación, lo que brinda indicaciones importantes para el diseño de cursos de modelización.

Por otra parte, para el estudio de Borromeo Ferri (2021), los participantes fueron 66 profesores en formación de educación secundaria que fueron sometidos al experimento en un curso de modelización, aplicando antes y después del curso de modelización (pre-test y post-test) el instrumento creado para medir el conocimiento pedagógico del contenido (PCK). En sus hallazgos, la autora indica que la diferencia entre los resultados de las cuatro dimensiones — dimensión teórica, dimensión tarea, dimensión instrucción y dimensión diagnóstica— del modelo del conocimiento del profesor utilizado, en ambas pruebas fue significativa. La autora detalla que el instrumento puede ser utilizado en otros países, si mantuvieran las mismas condiciones del experimento para medir las competencias del profesor.

El estudio Villa-Ochoa et al. (2021) muestra como el conocimiento del profesor sobre la modelización matemática puede ser evaluado formativamente. En este trabajo, los autores brindan su propia perspectiva teórica, dividiendo el conocimiento para la enseñanza de la modelización en dos categorías: la modelización como herramienta y la modelización como objeto de aprendizaje. Estos autores desarrollaron un curso para profesores en formación donde realizaron tareas de modelización y analizaron su propia experiencia a partir de los constructos teóricos y empíricos estudiados durante el proceso. También participaron en talleres y discutieron con investigadores y con maestros en servicio que tenían experiencia con la modelización. Durante el curso, los participantes tuvieron que desarrollar un proyecto de modelización y diseñar un plan de lección. Para promover el conocimiento para la enseñanza de la modelización, los autores implementaron estrategias de evaluación formativa como: diagramas heurísticos, autoevaluaciones combinadas con coevaluación, retroalimentación formativa, evaluación negociada, entre otras. Estas estrategias brindaron al profesor la idea de cómo estaban desempeñándose, hacia dónde debían avanzar y qué pueden hacer para lograr un desempeño adecuado al enseñar la modelización. Los resultados muestran conocimiento de los profesores sobre sus planes de clase, contribuciones y limitaciones de las rúbricas. Asimismo, se indica que la participación de profesores en la construcción de las rúbricas contribuyó al desarrollo del conocimiento sobre “enseñar por y a través de la modelización” (Villa-Ochoa et al., 2021, p. 12) y la retroalimentación lo fortaleció.

Otro trabajo es el de Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022), quienes siguieron un enfoque cualitativo, particularmente un estudio de caso exploratorio. El objetivo fue investigar cómo los

profesores en formación gestionan sus conocimientos para enseñar la modelización cuando no han sido formados para ello. En los resultados fue presentada la noción o conceptualización sobre la enseñanza de la modelización de uno de los profesores en formación, aunque inicialmente analizaron las nociones de 5 profesores. Para el análisis, fue utilizada la perspectiva teórica del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de Ball et al. (2008). Las autoras focalizan en tres subdominios: conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), conocimiento del contenido y estudiantes (KCS), y conocimiento de contenido especializado (SCK).

Como resultados encontramos que el profesor en formación poseía un rico conocimiento didáctico del contenido: (a) al ser consciente de las dificultades que pueden tener los estudiantes, (b) al ser capaz de manejar el salón de clases, (c) al promover las interacciones entre los estudiantes y (d) facilitar el trabajo colaborativo; lo que influía en aumentar la motivación y mejorar las actitudes de sus estudiantes. Sin embargo, el conocimiento del profesor sobre la enseñanza de la modelización era débil, dado que las tareas que diseñó reflejaron una noción sobre la modelización asociada a problemas verbales (como los propuestos en los libros de texto). No obstante, estas tareas no mostraban evidencias de contextos realistas, es decir no eran tareas de modelización. A pesar de lo anterior, en la enseñanza de dichas tareas, fueron identificados elementos del conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) y el conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT). Por ejemplo, en la preocupación del profesor en formación sobre las dificultades importantes al trabajar con problemas verbales, y el uso de diferentes representaciones y estrategias para resolver problemas.

En las conclusiones, las autoras indican que el docente no enseña ni una sola lección de modelización, o intenta poner en práctica el enfoque usando sus propias interpretaciones de lo que dice el currículo escolar. Debido a esto las interpretaciones sobre la modelización presentes en el currículo influyen en el tipo de nociones que desarrolla el futuro profesor, más si estos no poseen experiencia en este enfoque. Además, de que las nociones del profesor también están permeadas por el conocimiento del contenido pedagógico y por sus modelos de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, es destacado que el conocimiento del contenido matemático (CK) como el conocimiento didáctico del contenido (PCK) son necesarios para la enseñanza de la modelización matemática, siendo aquí importante que el docente conozca que existen varios tipos de ciclos de modelización y pueda diferenciar su uso con fines escolares o de investigación.

Asimismo, destacan la necesidad desarrollar conocimientos del profesor sobre el objetivo y las distintas perspectivas de la modelización, haciendo énfasis en referencias a la realidad, para que puedan seleccionar, evaluar y mejorar las actividades propuestas en los libros de texto y el currículo. Además, las nociones que tienen los futuros profesores en cuanto a la modelización no son las ideales, pero hay que entender que estas nociones van cambiando y pueden evolucionar a medida que ellos tengan un acercamiento al conocimiento de la teoría de la modelización, las tareas, la instrucción y el diagnóstico.

Por otro lado, dentro de la literatura hallamos un modelo del conocimiento del profesor sobre modelización propuesto por Borromeo Ferri y Blum (2010), el cual es profundizado en el tercer capítulo de esta tesis.

Finalmente, observamos que existen múltiples esfuerzos en la investigación que se han realizado con el fin de brindar respuesta a la interrogante ¿cuáles deben ser los conocimientos del profesor sobre la modelización? Sin embargo, estos avances se han abordado desde varias perspectivas teóricas del conocimiento del profesor, lo que ha producido una falta de acuerdo al estudiar dicho conocimiento específico. Además, existen dos formas de comprender este conocimiento específico. En primer lugar, desde una perspectiva cuantitativa, se ha creado un instrumento para medir el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) como parte de la competencia profesional para la enseñanza de la modelización, desde cuatro dimensiones: (a) teoría, (b) tarea, (c) instrucción y (d) diagnóstico (Borromeo Ferri, 2021; Greefrath et al., 2022).

En segundo lugar, desde una perspectiva cualitativa donde obtuvimos que

- Los conocimientos del profesor sobre modelización se orientan hacia relacionar de distintos tipos de conocimiento —por ejemplo, KPM con todos los subdominios del PCK— en el diseño de las tareas (Huinchahue et al., 2018; Guerrero-Ortiz, 2021).
- El diseño y aplicación de planes de clase y rúbricas para evaluar permite al profesor analizar la idea de cómo estaban desempeñándose, hacia dónde deben avanzar y qué pueden hacer para lograr un desempeño adecuado al enseñar la modelización (Villa-Ochoa et al., 2021).
- Los profesores que no han sido formados para enseñar la modelización no enseñan bajo este enfoque o tratan implementarla a través de sus interpretaciones del currículo escolar (Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022).

## ***Investigación sobre aspectos específicos del conocimiento profesor sobre la modelización***

Algunas investigaciones indagan conocimientos teóricos y prácticos que deben conocer los profesores sobre situaciones particulares en la modelización (Doerr, 2006; Doerr y English, 2006; Lingefjård y Meier, 2010; Stender, 2018). Estos trabajos reportan elementos relevantes acerca del conocimiento del profesor sobre aspectos particulares en la enseñanza de la modelización.

Como ejemplo de lo anterior es el estudio de Doerr (2006) que investiga la relación entre el trabajo de los estudiantes y las acciones de los docentes en el aula, particularmente en el nivel de educación secundaria. En este trabajo, la autora examinó de cerca las formas en que cuatro profesores vieron e interpretaron múltiples formas de pensamiento de los estudiantes cuando resuelven una tarea de modelización y cómo las interpretaciones de la maestra influyeron en su práctica. Concretamente, el estudio indaga en cómo escuchó las estrategias de solución alternativa de los estudiantes y cómo respondió a estas estrategias en su práctica. Los resultados reflejan que los profesores pudieron, aumentar su comprensión del contenido matemático y las formas usadas para desarrollar y representar las ideas de los estudiantes. También los profesores aprendieron a escuchar a los estudiantes y desarrollar nuevas formas de respuesta, algunos de ellos propiciaron en sus estudiantes formas de autoevaluar su trabajo y el explorar enfoques alternativos de resolución.

De manera similar al trabajo anterior, el trabajo de Doerr y English (2006) informa sobre cómo dos profesoras de educación secundaria apoyaron el razonamiento matemático de sus alumnos al resolver una tarea de modelización. Específicamente, examinaron el desarrollo del conocimiento de las profesoras a medida que sus estudiantes fueron involucrados en tareas con características particulares. Como resultados destacamos que los profesores pudieron adoptar nuevos roles en sus interacciones con los estudiantes, incluido un enfoque en escuchar y observar, y en hacer preguntas para comprender y aclarar. Al mismo tiempo, participar en formas de escucha interpretativa que cambiaron el papel de la evaluación del maestro al estudiante.

Lingefjård y Meier (2010) detallan la experiencia de dos maestros cuando desarrollaban su conocimiento sobre intervenciones durante la modelización, es decir la capacidad del profesor de

decidir cuándo y cómo intervenir para que el proceso mantenga su naturaleza. También, saber qué hacer para que el estudiante avance, dándoles una orientación adecuada. Para esto se les pidió no decir a los profesores cómo resolver el problema en cuestión, pero dando un apoyo cuando fuese necesario. Los autores concluyen, que el profesor necesita más formación y retroalimentación sobre cómo actuar en situaciones específicas. Además, es necesario un conjunto de posibilidades de las que pueda elegir, ser competente matemáticamente y en los métodos de enseñanza.

Por último, el trabajo Stender (2018) promueve el uso de intervenciones docentes estratégicas de Zech (1998), es decir mediaciones verbales y no verbales del profesor, que pueden servir de apoyo en el proceso de solución de los estudiantes, desarrollando a la vez la independencia de estos al trabajar la modelización. Dentro de los resultados de este estudio destacamos que las intervenciones estratégicas de Zech (1998) —motivar, retroalimentación, brindar una ayuda de qué hacer a continuación, estrategia orientada al contenido, dar ayuda relacional con el contenido— a menudo tuvieron éxito cuando un profesor ayudó a los estudiantes a trabajar en problemas de modelización complejos. Los autores atribuyen este hecho al uso de las estrategias heurísticas por parte de los estudiantes, pero se necesita tiempo para formarlos en su uso.

Otro conocimiento específico es la selección y uso de tareas de modelización en la clase. Al respecto, Villa-Ochoa (2015) indaga como cuatro profesores de educación secundaria seleccionan y usan tareas para la enseñanza de la modelización. Para los resultados, son seleccionados tres de los profesores que evidenciaron aspectos que “parecen condicionar las maneras en que usan situaciones denominadas por ellos como *reales* y por medio de las cuales justifican la implementación de la modelización matemática en sus aulas de clase” (Villa-Ochoa, 2015, p. 139). Como resultado, se logró identificar algunos de los argumentos que tienen los profesores para favorecer los problemas de enunciados verbales como principal manera de hacer modelación matemática. Villa-Ochoa (2015) señala que algunas de las razones en las que los profesores se apoyan para justificar el uso de problemas rutinarios enunciados verbalmente son:

- Los estudiantes pueden resolver este tipo de problemas de manera inmediata, pues pocas veces están motivados a resolver problemas más amplios. Esto se justifica en ciertas limitaciones impuestas a algunas actitudes de los estudiantes que están inmersos en tradiciones “facilistas” de las matemáticas. (p. 140)
- Otro argumento es debido a que los estudiantes deben conocer previamente las matemáticas involucradas en las situaciones que deben abordar y, en consecuencia, se

asume que en contextos más amplios podrían encontrarse matemáticas que no conocen; por tanto, no podrían abordarlos. (p. 141)

- La existencia de *currículos rígidos* en su organización de los contenidos y en términos del tiempo de la clase, no permiten el uso de otro tipo de problema. (p. 142)
- La noción básica de modelación relacionada con el estudio de fenómenos de la “realidad”, los profesores sienten que, de alguna manera, están trabajando modelización al resolver problemas rutinarios presentados verbalmente. (p. 144)

Estos hallazgos sugieren la necesidad de generar estrategias que permitan un empoderamiento de los profesores sobre la modelización que trascienda del uso los enunciados verbales estereotipados hacia situaciones más realistas que involucren aspectos de la cotidianidad y la cultura en las matemáticas escolares.

Pesquisas como Paolucci y Wessels (2017); Sevinc y Lesh (2022); Sevinc (2022) son enmarcados en el conocimiento del profesor relacionado con la invención de problemas de modelización. Los estudios fueron realizados con profesores en formación, el primero a nivel de primaria, los otros dos a nivel de secundaria. Paolucci y Wessels (2017) examinó la capacidad de los profesores en formación al crear problemas de modelización para los grados 1 a 3 de educación primaria. Los 93 participantes crearon un total de 42 de problemas de modelización, según el nivel de estudio de preferencia y alineando el contenido matemático con el currículo. Los hallazgos resaltan una inclinación hacia la creación de problemas para los niveles de grado más altos. Para los autores esto es por la falta o la no disponibilidad de recursos o materiales para la enseñanza de la modelización en los primeros grados. Asimismo, se encontraron debilidades en la comprensión por parte de los profesores debido a deficiencias entre el contenido matemático en sus problemas de modelización con el currículo y en su preferencia a crearlos para áreas de contenido particulares (Espacio y forma, Patrones y Álgebra Temprana). Esto sugiere una concepción limitada de qué contenidos matemáticos son propicios para ser incorporados a los problemas.

Además, el trabajo de Sevinc y Lesh (2022) investiga las concepciones que tienen los profesores sobre lo que significa que un problema sea matemáticamente rico y contextualmente realista y cómo evolucionaron dichas concepciones durante una serie de actividades de desarrollo profesional. Reveló que esto ayudó a los profesores a producir problemas interesantes y alentadores para que los estudiantes desarrollen sus propios métodos de solución. Las concepciones de los profesores también evolucionaron en una comunidad colectiva y reflexiva.

Finalmente, Sevinc (2022) realiza un trabajo que se sustenta en las prácticas reflexivas de los profesores al “elaborar o inventar problemas matemáticos contextuales como una acción profesional que involucra crear, revisar y refinar problemas matemáticamente ricos presentados en contextos significativos y realistas y como una indicación del arte profesional docente” (Sevinc, 2022, p. 13). Los resultados obtenidos muestran que las reflexiones de los futuros docentes indicaron que el conocimiento en la elaboración de problemas matemáticos realistas abarcó varios conocimientos particulares del contenido (pedagógico, curricular e interdisciplinario). Es decir, para los profesores no solo es importante conocer conceptos, reglas y procedimientos matemáticos, sino también las relaciones entre estos (conocimiento de conexiones matemáticas), lo que les fue útil para crear problemas contextuales matemáticamente ricos.

Shahbari y Tabach (2016) investigan cómo los profesores desarrollan sus habilidades para identificar los ciclos de modelización al resolver tareas. En la investigación participan 34 profesores en ejercicio y que estudiaban un máster en educación. Los datos fueron recolectados a partir de dos informes y una reflexión docente sobre una actividad de modelización implementada con estudiantes. Los hallazgos indican que antes de participar en la actividad, la mayoría de los profesores describieron la participación de los estudiantes en la actividad de modelización como un proceso lineal. Los profesores escribieron el modelo matemático final y los resultados matemáticos obtenidos de la aplicación del modelo, pero la mayoría ignoró los resultados realistas, el proceso de validación y la naturaleza cíclica del progreso del modelo matemático. Sin embargo, después de que los docentes participaran en actividades de modelización como aprendices, sus informes indicaron que la mayoría pudo reconocer todas las etapas de la modelización y distinguir los procesos cíclicos del progreso de los modelos matemáticos. Además, según los análisis de las reflexiones, los docentes participantes fueron conscientes de los cambios en sus descripciones.

El trabajo de Villarreal et al. (2018) identifica qué tecnologías eligen los profesores de matemáticas de secundaria en formación, para qué fines de modelización y en qué etapas del proceso de modelización son utilizadas. Durante el proceso de modelización, los futuros profesores utilizaron tecnología como el Internet, hojas de cálculo, software matemático y lenguajes de programación. El Internet fue la tecnología más utilizada para buscar información o

datos, para seleccionar variables o para formular problemas. Los otros tres tipos de tecnologías —hojas de cálculo, software matemático y lenguajes de programación— influyeron significativamente al obtener la solución matemática del problema y su validación. Los resultados mostraron que el acceso a herramientas tecnológicas transformó la producción matemática de los estudiantes y reveló posibilidades de descubrir formas significativas de utilizar la tecnología para producir modelos matemáticos. También, los profesores aprovecharon las posibilidades visuales que brindan las tecnologías digitales. El estudio concluye con la necesidad de la acción coordinada entre profesores de matemáticas y matemáticos para generar una comprensión más profunda de la modelización como propuesta pedagógica y actividad matemática.

La investigación expuesta en este apartado muestra avances sobre cuáles deben ser los conocimientos que deben poseer los profesores a cerca de la modelización. Estos trabajos reportan elementos relevantes acerca del conocimiento del profesor sobre aspectos particulares en la enseñanza de la modelización. A continuación, sintetizando presentamos cada una de las conclusiones sobre el conocimiento específico de la modelización que debe conocer el profesor.

Conocimiento de los profesores sobre intervenciones durante la modelización:

- Fueron capaces de aumentar su comprensión del contenido matemático y las formas usadas para desarrollar y representar las ideas de los estudiantes (Doerr, 2006).
- Adoptaron nuevos roles en sus interacciones con los estudiantes, incluido un enfoque en escuchar y observar, y hacer preguntas para comprender y aclarar (Doerr y English, 2006).
- Algunos de ellos propiciaron en sus estudiantes formas de autoevaluar su trabajo y el explorar enfoques alternativos de resolución (Doerr, 2006).
- Necesitan más formación y retroalimentación sobre cómo actuar en situaciones específicas. Un conjunto de posibilidades de las que pueda elegir, ser competente matemáticamente y en los métodos de enseñanza (Lingefjärd y Meier, 2010). Un ejemplo son las intervenciones docentes estratégicas de Zech, pero es necesario tiempo para formar a estos en su uso. (Stender, 2018).

Conocimiento de los profesores sobre la selección y uso de tareas de modelización en la clase:

- Los profesores prefieren los problemas de enunciados verbales como principal manera de hacer modelación matemática, por razones como: actitudes de los estudiantes hacia el

facilismo, los estudiantes deben conocer los conceptos matemáticos involucrados en un problema antes de resolverlo, el currículo es rígido y no acepta cambios en el abordaje de los contenidos, los profesores sienten que están trabajando la modelización al resolver este tipo de problema (Villa-Ochoa, 2015).

Conocimiento sobre la invención de problemas de modelización:

- Los profesores se inclinan más por la creación de problemas para los niveles de grado más altos... debido a una falta de recursos o materiales para la enseñanza en niveles inferiores (Paolucci y Wessels, 2017).
- Los profesores prefieren inventar problemas de contenidos matemáticos fáciles para ellos, debido a que poseen debilidades en los contenidos que consideran más difíciles. Además, poseen una concepción limitada de qué contenidos matemáticos son propicios para ser incorporados a los problemas (Paolucci y Wessels, 2017).
- Las actividades de desarrollo profesional ayudaron a los profesores a producir problemas interesantes y alentadores para que los estudiantes desarrollen sus propios métodos de solución (Sevinc y Lesh, 2022).
- Para los profesores no solo es importante conocer conceptos, reglas y procedimientos, sino también las relaciones entre estos (conocimiento de conexiones matemáticas), lo que les fue útil para crear problemas ricos en contexto matemático (Sevinc, 2022).

Conocimiento sobre los ciclos de modelización al resolver tareas:

- La mayoría de los profesores describieron la participación de los estudiantes en la actividad de modelización como un proceso lineal (Shahbari y Tabach, 2016).
- Los profesores escribieron el modelo matemático final y los resultados obtenidos de la aplicación del mismo, pero la mayoría ignoró los resultados realistas, el proceso de validación y la naturaleza cíclica del progreso del modelo matemático. Pero, después del curso de formación los profesores lograron reconocer todas las etapas del ciclo y en sus reflexiones los docentes fueron conscientes de este cambio (Shahbari y Tabach, 2016).

Conocimiento sobre el uso recurso de la tecnología al enseñar la modelización:

- El acceso a herramientas tecnológicas transformó la producción matemática de los estudiantes de los profesores y reveló posibilidades de descubrir formas significativas de utilizar la tecnología para producir modelos matemáticos (Villarreal et al., 2018).

- Los profesores aprovecharon las posibilidades visuales que brindan las tecnologías digitales (Villarreal et al., 2018).

Solamente hemos encontrado dos perspectivas teóricas del conocimiento del profesor exclusivas sobre la modelización (Borromeo Ferri y Blum, 2010; Wess et al., 2021). Estas perspectivas son recientes por lo que apenas hay investigación sobre su uso. Aunado a esto, las investigaciones encontradas se centran en algunos conocimientos, realizando el estudio de estos en forma aislada y provocando lagunas o faltas de investigación por dejar de lado otros conocimientos importantes. Por tanto, aún es necesario delimitar y clarificar de este tipo de conocimiento específico, para una formación adecuada del profesor en este campo.

## **2.2 INVESTIGACIÓN SOBRE LA MODELIZACIÓN COMO HERRAMIENTA PARA EL DESARROLLO PROFESIONAL**

La investigación de Kaiser et al. (2013) detalla la experiencia de un estudio de casos acerca el conocimiento profesional de los futuros profesores de matemáticas sobre la modelización. Los autores señalan que para desarrollar una comprensión integral de la modelización y su valor pedagógico, los futuros docentes necesitan conocimientos y competencias matemáticas, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento pedagógico general. Donde el conocimiento pedagógico de las matemáticas es central en el desarrollo del conocimiento profesional de los docentes. Los resultados destacan que la formulación de las tareas de modelización que los profesores propondrían en su futuro trabajo laboral, estarían influenciadas por sus actitudes y expectativas del tipo de estudiante que piensan que tendrían a futuro. Es decir, dos de los profesores indicaron que a futuro se observan trabajando en ambientes donde predominen estudiantes de bajo rendimiento, por lo que sus tareas no deberían poseer problemas de alta complejidad y se limitarían al uso de problemas verbales que son más sencillos. En contraste con ellos, un tercer profesor considera que trabajará con estudiantes de alto rendimiento en el nivel secundario superior y, por tanto, en sus tareas de modelización usará contextos del mundo real de manera integral.

En los últimos años, algunos estudios fueron centrados en el diseño y desarrollo de cursos de modelización para profesores en formación (e.g., Borromeo Ferri y Blum, 2010; Sevinc y Galindo, 2022). Borromeo Ferri y Blum (2010) detallan que al considerar como obligatoria la

modelización matemática en el currículo de matemática en Alemania, la formación de profesores debe ser sólida en diferentes en “aspectos de la modelización —competencia teórica, competencia de tareas, competencia docente y competencia diagnóstica— y también sobre métodos apropiados para enseñar la modelización” (Borromeo Ferri y Blum, 2010, p. 2046). En consecuencia, los cursos universitarios de modelización tienen que incluir todos estos aspectos. En el artículo reporta sobre la puesta en práctica universitarios sobre modelización para 25 estudiantes en su cuarto año de estudio. Los resultados mencionan limitaciones en el conocimiento del profesor en formación al participar en el curso como: (a) comprender la variedad de direcciones de la modelización y las distinciones entre ciclos de modelización en la literatura; (b) distinguir las etapas del proceso en general y también al analizar las transcripciones de los procesos de modelización de los estudiantes; (c) análisis de temas de problemas de modelización; y (d) finalmente tratar con la cuestión de la autenticidad mientras es creado un problema.

Por su parte, Sevinc y Galindo (2022) informan que una futura maestra tuvo limitaciones al notar y entender el pensamiento matemático de los estudiantes al trabajar la modelización. Las autoras resaltan que la falta de atención de la docente es relacionada con una falta de conocimiento del contenido matemático involucrado en la tarea de modelización. Además, las autoras señalan que al enseñar la modelización, las lecciones fueron mucho más desafiantes y requieren mucho tiempo para los profesores participantes. Sin embargo, también encontramos investigaciones señalan una mejoría en el conocimiento de los profesores al participar en el curso de modelización en aspectos como:

- Comprensión de las direcciones del ciclo de modelización y las diferencias entre los ciclos de modelización presentes en la literatura, distinción de las etapas del ciclo de modelización, entendimiento de los procesos de modelización de sus estudiantes y análisis sobre las tareas de modelización, como el tratar la cuestión de la autenticidad mientras se crea un problema (Borromeo Ferri y Blum, 2010).
- Las creencias de los profesores al haber una mayor consideración de los modelos y el contexto del mundo real en la enseñanza de la matemática (Kaiser y Schwarz, 2006).
- La comprensión de las características de los problemas realistas y las habilidades que se necesitan para escribir, revisar y refinar tales problemas (Sevinc y Lesh, 2018).

- Notar y comprender el pensamiento matemático de los estudiantes para poder enseñar en forma efectiva (Sevinc y Galindo, 2022).

Asimismo, los autores recomiendan que un curso de modelización para este tipo de población, en general debe:

- Lograr el equilibrio entre la teoría y la práctica mediante una adecuada estrategia didáctica (Borromeo Ferri y Blum, 2010).
- Ofrecer tanto oportunidades para discutir y enseñar la importancia de los ciclos de modelización (Lingefjård, 2006).
- Contemplar aplicaciones enfocadas en la vida cotidiana (Lingefjård, 2006).
- Resaltar la utilidad de la matemática (Lingefjård, 2006).
- Producir un cambio positivo en la percepción en la práctica de aprendizaje y enseñanza de la matemática en ambientes universitarios (Kaiser y Schwarz, 2006).
- Brindar oportunidades a los futuros profesores de interactuar con los estudiantes donde puedan estudiar su pensamiento matemático (Sevinc y Galindo, 2022).

Una conclusión que se desprende de los estudios anteriores es que diseñar e implementar este tipo de cursos, podría contribuir a formar profesores más competentes para la modelización matemática (Sevinc y Lesh, 2018) y desarrollar aún más su comprensión de los temas matemáticos (Borromeo Ferri y Blum, 2010; Lingefjaerd, 2006).

Por otra parte, en la literatura existen estudios que plantean programas de desarrollo profesional sobre la modelización para profesores en servicio (e.g., Blomhøj y Kjeldsen, 2006; Doerr, 2006, 2007; Doerr y English, 2006; Maaß y Gurlitt, 2010, 2011; Tan y Ang, 2016). En Maaß y Gurlitt (2011) es presentado el proyecto *Aprendizaje y Educación en y a través de la Modelización y las Aplicaciones* (LEMA, por sus siglas en inglés). Este proyecto, de carácter internacional, tuvo como objetivo el diseño de un curso de desarrollo profesional para la modelización. Los docentes fueron formados a través de cinco módulos: (a) información básica sobre la modelización, (b) selección de tareas, (c) diseño de lecciones, (d) evaluación y (e) reflexión sobre las lecciones implementadas. Los hallazgos destacan que el curso de desarrollo profesional no tuvo ningún efecto en las creencias sobre la enseñanza de modelos matemáticos de los profesores, pero sí un efecto positivo sobre su conocimiento del contenido pedagógico y la

autoeficacia en términos de la modelización, así como un alto grado de satisfacción entre los profesores en su desarrollo profesional.

De igual manera, el trabajo de Tan y Ang (2016) detalla y evalúa un programa *Desarrollo Profesional Basado en la Escuela* (SBPD, por sus siglas en inglés) destinado a desarrollar las competencias de los profesores de matemáticas de la escuela secundaria para enseñar modelos matemáticos en Singapur. Los cursos de formación de profesores propuestos por Maaß y Gurlitt (2011) y Tan y Ang (2016) no eran iguales, debido a que el primer estudio utiliza como guía el modelo para enseñanza de la modelización propuesto por Borromeo Ferri y Blum (2010), es decir utiliza conocimientos sobre Modelado-Tareas-Lecciones-Evaluación y añade una nueva que es Reflexión docente. En cambio, el curso de Tan y Ang (2016) trabaja las mismas áreas, pero obvia la Evaluación y Reflexión. El estudio de Tan y Ang (2016) vislumbra resultados como que el curso de desarrollo profesional SBPD influye positivamente en el conocimiento y los recursos, las metas y las orientaciones de los docentes en la planificación, el diseño y la puesta en práctica de la modelización en experiencias de aprendizaje, siendo un primer paso importante para sostener la mejora de las decisiones de los docentes en el aula de modelización matemática.

Blomhøj y Kjeldsen (2006) presenta y analiza experiencias al desarrollar y ejecutar un curso de desarrollo profesional relativo a la modelización para profesores de educación secundaria. El objetivo del curso es apoyar a los profesores a desarrollar, probar en sus propias clases, evaluar y reportar un proyecto basado en un problema orientado en la modelización. En los hallazgos, se revela que para que los profesores apoyen el desarrollo de la competencia de modelización de los estudiantes de manera efectiva, deben ser conscientes de los diferentes subprocesos involucrados en todo el proceso de modelización y sobre cómo apoyar y desafiar a los estudiantes. Esto, debido a que los profesores tienden a centrarse más en los subprocesos relacionados con el contenido matemático. Es necesario brindar a los estudiantes oportunidades donde se pongan en práctica todas las etapas del proceso de modelización, al mismo tiempo desarrollen una metacognición del significado de este enfoque. Otro aspecto señalado tiene relación con ver la modelización como un objetivo educativo o como un medio para motivar y apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Esto debe equilibrarse en la práctica de la enseñanza de los modelos matemáticos, pues el profesor debe saber cuando debe intervenir para apoyar a sus estudiantes y

cuando no, para lograr la meta de aprendizaje. Ya que deben ser responsables de la mayoría de las decisiones, pero también deben ser “las correctas” (o al menos factibles) para llevar a cabo la modelización en forma efectiva.

A modo de resumen, los estudios relativos a la modelización como herramienta para el desarrollo profesional detallan:

- La experiencia acerca del conocimiento profesional de los futuros profesores de matemáticas sobre la modelización. Donde se señala que para desarrollar una comprensión integral de la modelización y su valor pedagógico, los futuros docentes necesitan conocimientos y competencias matemáticas, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento pedagógico general (Kaiser et al., 2013).
- El diseño y desarrollo de cursos de modelización para profesores en formación, en los que reportan limitaciones y mejoría en el conocimiento del profesor en formación al participar en el curso (Sevinc y Galindo, 2022).
- Planteamiento de programas de desarrollo profesional sobre la modelización para profesores en servicio (Blomhøj y Kjeldsen, 2006; Maaß y Gurlitt, 2011; Tan y Ang, 2016). Obteniendo resultados como un efecto positivo en el conocimiento del contenido pedagógico, la autoeficacia de los docentes y un alto grado de satisfacción en su desarrollo profesional. Además, de propuestas de solución a dilemas en torno a la enseñanza de modelos matemáticos que puede seguir el profesor.

### **3. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DESDE UNA PERSPECTIVA DE LOS PROCESOS: EL CASO DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA**

---

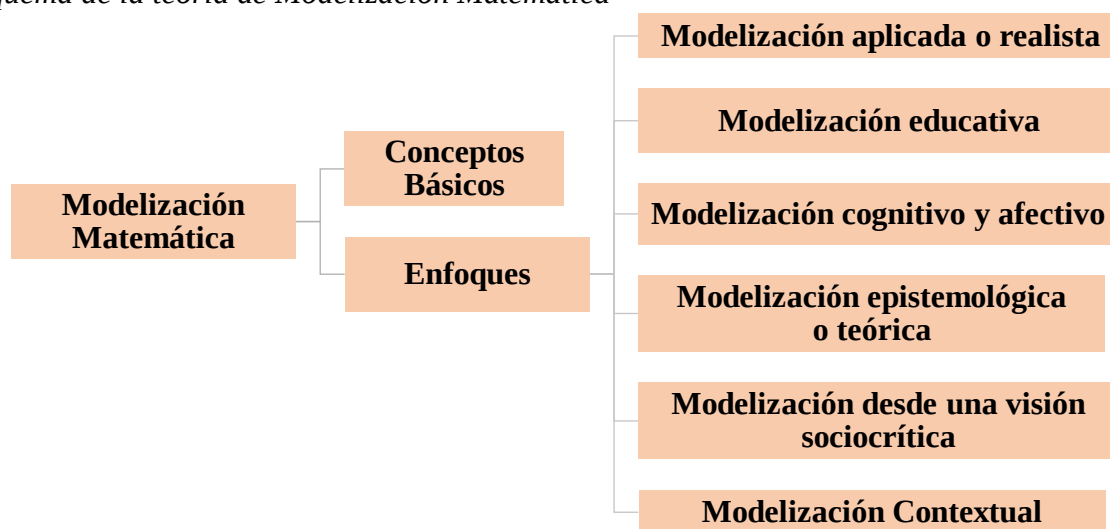
El conocimiento del profesor es uno de los elementos centrales de su competencia profesional (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008) y tiene un efecto en el aprendizaje de los estudiantes (Blömeke et al., 2022). Por ello en este apartado presentamos una síntesis realizada de distintos modelos del conocimiento del profesor desde una perspectiva de los procesos. Asumiendo que los contenidos matemáticos escolares se componen tanto de conceptos como de procesos, consideramos que los profesores deben tener conocimiento de ambos. Siguiendo lo anterior, este capítulo fue dividido en cinco apartados. En primer lugar, presentamos los referentes teóricos relacionados con la modelización matemática que han surgido en los últimos años. En segundo lugar, exhibimos el modelo de la competencia profesional para la enseñanza de la modelización propuesto por Wess et al. (2021). Destacamos como tercer lugar, el aporte del modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas (CPRP) propuesto por Piñeiro et al. (2019), dado que el proceso de resolución de problemas está relacionado con los modelos matemáticos. Exponemos en cuarto lugar el conocimiento sobre la modelización matemática donde ubicamos la noción de modelo, la noción de modelo matemático y la noción de modelización. Como quinto lugar y finalizando el apartado, ubicamos el conocimiento didáctico sobre la modelización matemática, desde el modelo de competencias necesarias en la enseñanza de la modelización matemática propuesto por Borromeo Ferri y Blum (2010) y desarrollado en Borromeo Ferri (2014).

# 1. ENFOQUES TEÓRICOS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Dado que la modelización matemática no es un enfoque nuevo y ha sido ampliamente desarrollado desde múltiples perspectivas teóricas durante las últimas décadas, en la que siguiente figura mostramos sucintamente cada una de ellas.

**Figura 1**

*Esquema de la teoría de Modelización Matemática*



Borromeo Ferri (2018) detalla los objetivos y justificaciones de la inclusión de la modelización en la enseñanza de la matemática en forma continua expuestos por Blum (2011). Cuatro justificaciones muestran la importancia de modelizar para aprender u obtener una comprensión más profunda del contenido matemático, además de hacer una contribución a la educación general:

1. La justificación *pragmática* incluye ordenar, comprender y dominar situaciones del mundo real, lo que significa trabajar en aplicaciones y modelar ejemplos explícita y continuamente;
2. La justificación *formativa* significa mejorar las competencias participando en actividades de modelado;
3. La justificación *cultural* es centrada en los aportes que el mundo real puede hacer para proporcionar una imagen más amplia de las matemáticas;
4. La justificación *psicológica* significa que los ejemplos del mundo real deben hacer una contribución a aumentar el interés de los estudiantes por las matemáticas, para motivarlos o ayudarlos a comprender mejor el contenido matemático. (p. 18)

En consecuencia, en las últimas décadas, la investigación de la modelización matemática ha sufrido un incremento, dando como resultado el surgimiento de múltiples posturas teóricas sobre el proceso (Kaiser y Sriraman, 2006). Durante varios congresos realizados por el grupo *Modelización Matemático y Aplicaciones*, dichas posturas han sufrido varias modificaciones y además, han servido como perspectivas de investigación, ya que ayudan a comprender y analizar los problemas del proceso de modelización en profundidad, como planificación e instrucción en las clases de modelización (Borromeo Ferri, 2018). Aunque difieren en el significado de modelización matemática, convergen en el objetivo del proceso al construir y desarrollar un modelo matemático de una determinada situación real (Ärlebäck y Doerr, 2020). Es decir, enfatiza en la relación entre la modelización y la realidad del mundo real que nos rodea. Algunas de las posturas teóricas son las siguientes: Modelización aplicada o realista (Haines y Crouch, 2005), Modelización educativa (Blum y Leiß, 2006; Niss et al., 2007), Modelización cognitivo y afectivo (Borromeo Ferri, 2006), Modelización epistemológica o teórica (Chevallard, 1989), Modelización desde una visión sociocrítica (Biembengut y Hein, 2002; Rosa y Orey, 2018) y la perspectiva de Modelización contextual (Lesh y Doerr, 2003).

## **1.1 MODELIZACIÓN APLICADA O REALISTA**

Desde una perspectiva pragmática (Pollak, 1969) es planteada la resolución de problemas de modelización con el objetivo de mostrar la utilidad de la matemática, al mismo tiempo que es desarrollada la competencia de modelización (Kaiser y Sriraman, 2006). Este enfoque es muy utilizado en matemática aplicada, a través de la resolución de problemas auténticos de la industria y la ciencia, no como desarrollo de la teoría matemática (Haines y Crouch, 2005). Así la modelización no se visualiza como un proceso aislado, sino en forma conjunta como se da en la vida real (Kaiser y Sriraman, 2006). Por tanto, su objetivo es invertir tiempo en la implementación de problemas de modelización, con el fin de promover la competencia de modelización a largo plazo, siendo una forma de incentivar el aprendizaje de la matemática (Borromeo Ferri, 2018).

En este enfoque los problemas reales son muy complejos en comparación con aquellos que se aplican durante las lecciones normales de matemáticas. Por ello, este tipo de actividades son recomendadas para estudiantes de años superiores de secundaria y, en general, se utilizan para el

trabajo de proyectos, concursos o jornadas de modelización como *Modeling Days* o *Modeling weeks*, es decir son eventos de varios días donde son resueltos.

## 1.2 MODELIZACIÓN EDUCATIVA

Este enfoque es una continuación de la ciencia-humanística donde el mundo real, sus ejemplos e interrelaciones con la matemática, constituyen el foco principal para la estructuración de la enseñanza y el aprendizaje (Kaiser y Sriraman, 2006). Su propósito incluye metas relacionadas con el proceso y el contenido, desde dos tipos de modelización: didáctica y conceptual (Greefrath y Vorhölter, 2016). El primer tipo, la modelización didáctica, trabaja en estructurar procesos de aprendizaje para las tareas, es decir está completamente incorporado en la enseñanza de la matemática (Borromeo Ferri, 2018; Greefrath y Vorhölter, 2016). Incluye “fomentar el proceso de aprendizaje de la modelización y, por otro lado, tratar con ejemplos para introducir y practicar nuevos métodos matemáticos” (Greefrath y Vorhölter, 2016, p. 17). Los mismos autores, aclaran que la intención de la modelización conceptual es “mejorar el desarrollo de los estudiantes y la comprensión de la terminología dentro de las matemáticas y con respecto al proceso de modelización” (Greefrath y Vorhölter, 2016, p. 17). Es decir, concentrarse en insertar y fortalecer un concepto matemático en el proceso de modelización (Borromeo Ferri, 2018; Erbaş et al., 2014).

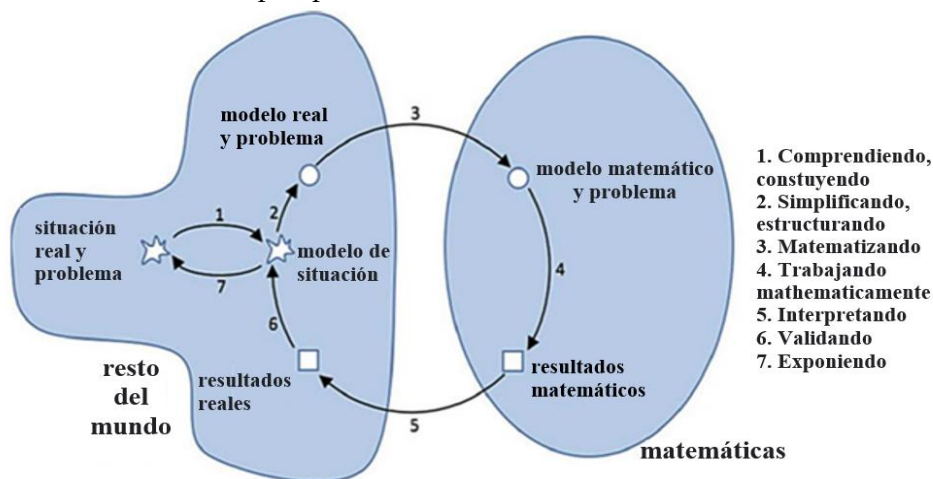
Además, esto incorpora enseñar la metacognición del ciclo de modelización, evaluar la idoneidad de los modelos (Greefrath y Vorhölter, 2016), conceptualizar términos como *modelo real*, *modelo matemático* o *validación* como etapa del ciclo de modelización (Borromeo Ferri, 2018), entre otros. Los problemas utilizados son creados para la enseñanza de la matemática, por tanto, son más sencillos y simplificados (Greefrath y Vorhölter, 2016). Por lo que, la modelización es considerada como medio para la enseñanza de las matemáticas (Erbaş et al., 2014).

Para Blum y Leiß (2007) “las habilidades de modelización es la capacidad para realizar adecuadamente los pasos necesarios en el proceso de retroceso y avance entre la realidad y la matemática, así como analizar y evaluar modelos al compararlos” (p. 223). Para ello, dentro de la modelización educativa podemos incluir el enfoque desarrollado por Blum (1985), el cual ha

sufrido modificaciones constantes desde su origen. Desde una perspectiva cognitiva, Blum y Leiß (2007) proponen el ciclo del proceso de modelización que se presenta en la figura 2.

**Figura 2**

*Ciclo de modelización desde la perspectiva modelización educativa*



*Fuente:* Traducción de Blum y Leiß (2007, p. 225).

El ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007) (Figura 2) describe los subprocesos de la modelización de forma más precisa y detallada, siendo la capacidad de realizar dichos subprocesos como una competencia de modelización en forma parcial (Kaiser y Brand, 2015; Maaß, 2006). En la tabla 1, mostramos las características de estas competencias parciales o subcompetencias.

**Tabla 1**

*Competencias parciales de modelización*

| Competencia                | Descripción                                                                                                                                                     |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Construyendo               | Los estudiantes construyen su propio modelo mental a partir de un problema dado, y así formulan una comprensión de su problema.                                 |
| Simplificando              | Los estudiantes identifican información relevante e irrelevante de un problema real.                                                                            |
| Matematizando              | Los estudiantes traducen y simplifican la información relevante en modelos matemáticos como, por ejemplo, términos, ecuaciones, figuras, diagramas y funciones. |
| Trabajando matemáticamente | Los estudiantes trabajan con métodos matemáticos en el modelo matemático y obtienen soluciones matemáticas.                                                     |
| Interpretando              | Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos de la manipulación dentro del modelo la situación real y así obtienen resultados reales.                    |

**Tabla 1**

*Competencias parciales de modelización*

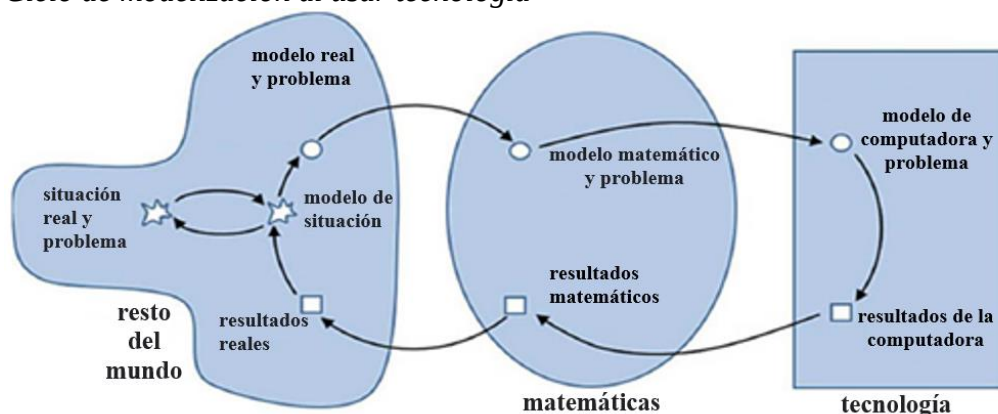
| Competencia | Descripción                                                                                                                                                 |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Validando   | Los estudiantes juzgan los resultados reales en términos de plausibilidad.                                                                                  |
| Exponiendo  | Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos en el modelo situacional con los resultados reales situación, y así obtiene una respuesta del problema. |

Fuente: Greefrath y Vorhölter (2016, p. 19).

Por otra parte, diversas investigaciones destacan que la tecnología es una herramienta efectiva al desarrollar las etapas del ciclo de modelización (Greefrath, 2020). Por ejemplo, juzgar los resultados reales en términos de las condiciones del problema. La manipulación del modelo y el cálculo de los resultados matemáticos es más fácil, preciso y requiere menos tiempo, por ejemplo, una función en Cálculo o una esfera en Geometría Dinámica (Greefrath, 2020; Porras y Arroyo, 2019). Así, en el ciclo de modelización matemática evoluciona a uno más amplio, donde tomamos en cuenta la tecnología (Greefrath, 2020, p. 43). En la figura 3 presentamos el ciclo de modelización usando tecnología.

**Figura 3**

*Ciclo de modelización al usar tecnología*



Fuente: Traducción de Greefrath y Vorhölter (2016, p. 23).

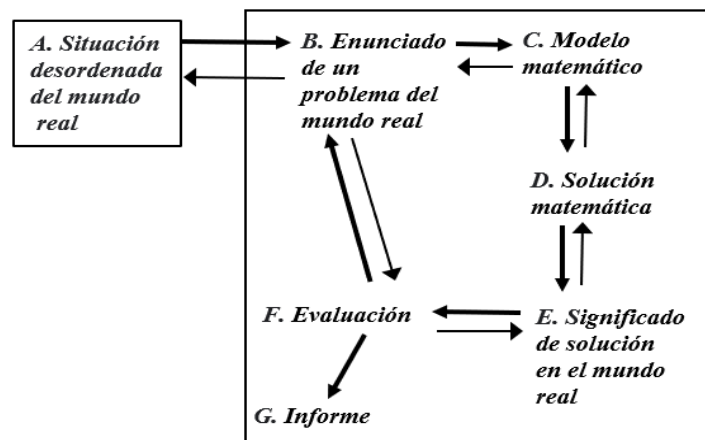
En cuanto al proceso de modelización y su relación con la invención o planteamiento de problemas hemos encontrado un ciclo de modelización que expone dicha relación, el cual parte del modelo propuesto por Blum y Leiß (2007). Dado que su interés es la enseñanza y el aprendizaje, es imprescindible que este centrado en la cognición de los individuos que participan en este proceso. Ante esto, Galbraith y Stillman (2006) proponen un ciclo de modelización para

capturar lo que sucede en la mente de los individuos a medida que resuelven problemas de modelización.

En la figura 4 se muestra dicho ciclo, las letras A-G representan las etapas del proceso de modelización, y las flechas gruesas en negrita son las transiciones entre las etapas, que describen el proceso de modelización en sentido de las agujas del reloj. El proceso termina en la creación del reporte final, etapa G, al obtener con éxito el resultado de la modelización, sino de lo contrario debemos realizar un ciclo adicional. Al comparar este ciclo con el propuesto por Blum y Leiß (2007), en este último las etapas A-B son involucradas en una etapa posterior, es decir en el modelo de la situación, dicha diferencia no es realizada en el ciclo de Galbraith y Stillman (2006). Los mismos autores brindan una serie de actividades cognitivas que describen lo que sucede cuando los resolutores logran una transición exitosa (o no) que permite (o no) el paso a la etapa siguiente en especial interesa la identificación de bloqueos que impiden el progreso (Galbraith y Stillman, 2006).

#### Figura 4

*Proceso de modelización desde la cognición de los individuos*



*Fuente:* Traducción de Galbraith y Stillman (2006, p. 144).

La estructura restante incluida en la figura 4 consta de flechas tenues en sentido contrario de las agujas del reloj, esto enfatiza que el proceso de modelización está lejos de ser lineal, o unidireccional, donde la actividad metacognitiva es involucrada en todas las etapas del proceso (Galbraith y Stillman, 2006). La evaluación, según las actividades cognitivas de la etapa E se realizará en todas las etapas, por ejemplo:

La transición  $A \rightarrow B$ , se refiere a lo desordenado contexto de un problema ayudará a construcción de un enunciado factible del problema; dentro de la transición  $B \rightarrow C$  referencia hacia atrás y adelante con el enunciado del problema del mundo real es esencial en el diseño de un modelo matemático que captura sus características necesarias; dentro de transición  $C \rightarrow D$  comprobación de las soluciones matemáticas en términos del tipo de resultado esperado del modelo es importante en el seguimiento de la corrección del procesamiento matemático - y así para las otras transiciones. (Galbraith y Stillman, 2006, p. 144)

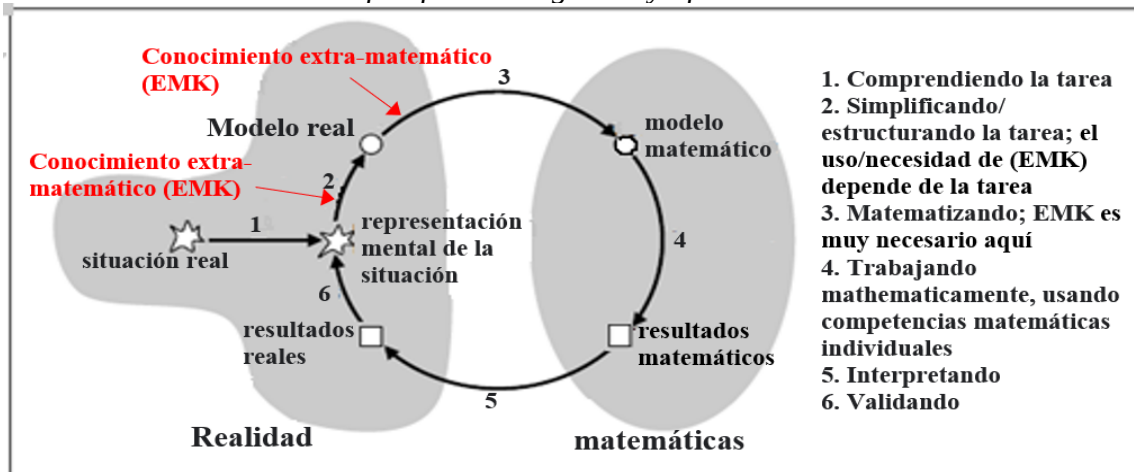
Por tanto, Galbraith y Stillman (2006) proponen una serie de transiciones en el proceso de modelización: (a) de la situación desordenada del mundo real a la declaración del problema del mundo real, (b) de la declaración de problemas del mundo real al modelo matemático, (c) del modelo matemático a la solución matemática, (d) de la solución matemática al significado de la solución en el mundo real y (e) desde el significado de la solución en el mundo real hasta la revisión del modelo o la solución de aceptación (p. 144).

### 1.3 MODELIZACIÓN COGNITIVA Y AFECTIVA (COMO METAPERPECTIVA)

El enfoque de modelización cognitivo y afectivo es considerado como una nueva perspectiva llamada metaperspectiva, porque “no es un enfoque normativo conectado a los objetivos de enseñanza de la modelización en las instituciones educativas, por el contrario, parte de una posición más descriptiva” (Kaiser y Sriraman, 2006, p. 307).

**Figura 5**

*Ciclo de modelización desde la perspectiva cognitiva y afectiva*



Fuente: Traducción de Borromeo Ferri (2018, p. 15).

Sigue el objetivo de estudiar los procesos de modelización en diferentes tipos de situaciones, distintos niveles de autenticidad o complejidad matemática (Kaiser y Sriraman, 2006). Los trabajos de Blum y Leiß (2006), Borromeo Ferri (2006) están centrados en el proceso cognitivo de los individuos durante la modelización. Un ejemplo, es el estudio de Borromeo Ferri (2006) que analiza las rutas o caminos de pensamiento utilizados por los individuos durante su trabajo de modelización matemática, como se muestra en la figura 5.

Este ciclo de modelización se desarrolla en una serie de transiciones o etapas del ciclo de modelización de Borromeo Ferri (2006):

**Etapas 1: de la situación real a la representación mental de la situación (MRS).**

Entendiendo la situación real como la situación presentada en el marco de un problema. En esta transición el individuo comienza a entender el problema y realiza una reconstrucción mental de la situación dada en el problema a un nivel implícito y mayormente inconsciente para el individuo. Incluso si el individuo no comprende el problema, puede seguir trabajando en la tarea. La representación mental de la situación (MRS) puede ser muy diferente entre cada uno de los individuos, esto depende del estilo de pensamiento matemático de cada uno. Al diferenciar entre la situación real y la MRS hay que tomar en cuenta dos aspectos muy relevantes: 1) simplificaciones inconscientes de la tarea y al conectarse, con 2) las preferencias del individuo, cómo abordar el problema en la próxima etapa de modelización.

**Etapas 2: de la representación mental de la situación (MRS) al modelo real.** En esta etapa ocurre una idealización y simplificación de la representación mental más consciente del individuo. Debido a que durante la MRS el individuo toma decisiones, lo que influye en la forma de “filtrar” la información del problema. Es decir, según sea el problema planteado, así será el uso de conocimiento extramatemático que demandará. Por tanto, el modelo real se basa principalmente en un nivel interno del individuo. Lo que significa que representaciones externas como por ejemplo bocetos o fórmulas, pueden representarse como un modelo real. Esto depende de las declaraciones verbales de los individuos al hacer una representación externa.

**Etapas 3: del modelo real al modelo matemático.** En esta etapa el individuo realiza un progreso en la matematización. Además, hay una demanda del conocimiento extramatemático que debe poseer el individuo para lograr construir el modelo matemático, por lo que

completamos la transición a la matemática. Aquí hay un uso de distintos tipos de representaciones externas, como bocetos o fórmulas; donde las declaraciones verbales de los individuos están más en un nivel matemático, menos en un nivel de la realidad.

**Etapas 4: del modelo matemático a los resultados matemáticos.** Aquí los individuos usan sus competencias matemáticas para obtener los resultados al resolver el modelo matemático.

**Etapas 5: de los resultados matemáticos a los resultados reales.** La mayoría de las personas anotan sus resultados, que obtienen sobre la base del modelo matemático. La interpretación de los resultados tiene lugar en esta transición. Además, esta etapa, que es importante, a menudo no hay conciencia por parte los individuos.

**Etapas 6: de los resultados reales a representación mental de la situación (MRS).** En esta transición se discute si los resultados matemáticos obtenidos pueden ser o no resultados reales. Es decir, el proceso validación es donde los individuos piensan en la correspondencia de sus resultados reales y su MRS. La validación puede realizarse de dos formas diferentes: intuitiva (más inconsciente) o basada en el conocimiento (más consiente).

Ambos tipos de validaciones están conectados con sus reflexiones anteriores que realiza en forma individual. La razón por la que la mayoría de las personas no validan, se debe a que realizan una *validación matemática interna*, es decir para ellos el proceso de validar se reduce a solamente *calcular* el modelo matemático. No relacionan los resultados con la situación real y el papel que juegan estos en la realidad. Esto brinda información empírica del pensamiento del individuo sobre lo que está sucediendo desde una perspectiva cognitiva.

## 1.4 MODELIZACIÓN EPISTEMOLÓGICA O TEÓRICA

El origen de la teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) está ligado a la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1989) y está basada en los objetivos de desarrollo y fundamentación desde la epistemología romana (Kaiser y Sriraman, 2006; Rey, 2016). La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propone que toda actividad humana puede ser estudiada por medio de praxeologías desde dos visiones, la primera corresponde a la praxis, concretamente *saber hacer* o la parte práctica, compuesto por las tareas y las técnicas o maneras de resolver dichas tareas. En la segunda visión, logos, corresponde al *saber* o la parte teórica, conformando

la tecnología “como el discurso que explica, produce y justifica las técnicas y la teoría, como el discurso más general que explica, produce y justifica las tecnologías” (Rey, 2016, p. 10).

En ella es planteada “la existencia de fenómenos didácticos ligados a la relatividad institucional del conocimiento matemático” (García et al., 2019, p. 77). Surgiendo así la necesidad de investigar tanto el saber matemático presente en el modelo epistemológico global, como a nivel local presente en las instituciones que intervienen en los procesos de la transposición didáctica (García et al., 2019; Gascón, 2014). Para ello, han sido elaborados modelos epistemológicos propios de la actividad matemática en general, así como en el ámbito específico. Denominados *modelos epistemológicos de referencia* (MER), que siguen una óptica de la actividad matemática determinada y clara desarrollada en una institución, lo que permite la identificación de fenómenos didácticos. Para esto, se utilizan los *recorridos de estudio e investigación* (REI) que permiten desarrollar procesos de estudio escolares según los postulados de la TAD.

Desde los inicios de la TAD, se postula que la modelización matemática está vinculada a objetos intramatemáticos y extramatemáticos (Chevallard, 1989), por lo que “asumimos que hacer matemáticas consiste esencialmente en la actividad de producir, transformar, interpretar y hacer evolucionar modelos matemáticos para poder aportar respuestas a ciertas cuestiones problemáticas” (Florensa et al., 2020, p. 23).

Según algunos autores (Chevallard, 1989; Florensa et al., 2020; Gascón, 1994) desde esta perspectiva el proceso de modelización matemática es involucrado en una serie de estadios o etapas, específicamente estas son:

1. Planteamos la situación y problemática inicial (extra-matemática o intramatemática) en la cual construimos el sistema a modelizar y plantea las cuestiones generales que surgen acerca del sistema sin respuesta inmediata.
2. Construimos un modelo matemático al definir el sistema a modelizar, identificando y asignando variables que son consideradas pertinentes y estableciendo relaciones entre ellas.
3. Trabajamos con el modelo, lo cual puede requerir un trabajo manipulativo con el modelo creado para refinar el modelo que es ajustado lo mejor posible al sistema e interpretar este trabajo y los resultados dentro del sistema modelizado.
4. Aquí realizamos nuevas cuestiones, las cuales no hubieran podido ser planteadas con anterioridad, cuya resolución aumentará el conocimiento del sistema estudiado o puede llevar a un nuevo proceso de modelización. (Florensa et al., 2020, p. 23)

## **1.5 MODELIZACIÓN DESDE UNA VISIÓN SOCIOCRÍTICA: ETNOMODELIZACIÓN**

Desde la perspectiva sociocrítica, las dimensiones socioculturales de las matemáticas están íntimamente relacionadas con la Etnomatemática (D'Ambrosio, 1990), donde todos los grupos culturales poseen un legado de conocimiento, conductas y reglas que desean preservar. Para esto la transmisión entre generaciones es fundamental y permite su continuidad. Para Biembengut y Hein (2002) “ese conocimiento en gran parte es generado por las necesidades prácticas de la realidad” (p. 33), donde el individuo enfrenta situaciones o problemas que busca resolver. Por otro lado, ninguna acción es aislada o sin significado. Toda acción está “insertada en un contexto sociocultural, luego, sufre influencia de este, de la misma forma que tal acción también ejerce una influencia en este contexto” (Biembengut y Hein, 2002, p. 36). Por ello, se usa la representación para generar un modelo matemático, y que está condicionada a la experiencia cultural del individuo. Por tanto, desde la perspectiva sociocrítica, se enfatiza el papel de la matemática en la sociedad y establece la necesidad de apoyar el pensamiento crítico, proponiendo el uso de la modelación matemática<sup>1</sup> como proceso trascendental (Kaiser y Sriraman, 2006).

Así, la vida real de distintas culturas puede ser representada mentalmente, a través de la modelación desde la etnomatemática (Biembengut y Hein, 2002; Rosa y Orey, 2018). Donde

la utilización de las ideas, procedimientos y practicas matemáticas que están presentes en el día a día de tales miembros tiene por objetivo la ampliación y el perfeccionamiento de su conocimiento matemático, pues busca el fortalecimiento de la identidad cultural de los individuos, como seres autónomos y capaces. (Rosa y Orey, 2018, p. 21)

En este contexto, Rosa y Orey (2018) mencionan que “sofisticadas ideas y prácticas matemáticas, que incluyen principios geométricos en el trabajo artesanal, conceptos arquitectónicos y prácticas, son encontrados en actividades y artefactos de muchas culturas locales y globales” (p. 19). Por ejemplo, relaciones numéricas en la medición, el cálculo, los juegos, la adivinación, la navegación, la astronomía, en fin, en una amplia variedad de situaciones donde utilizamos conocimientos matemáticos locales de grupos culturales distintos. Por ello,

---

<sup>1</sup> Según Bassanezi y Biembengut (1997) el término de Modelación surge al unir la Modelización + Educación.

conocer, entender y explicar un modelo o aun como determinadas personas o grupos sociales utilizaron o lo utilizan, puede ser significativo, principalmente, porque ofrece una oportunidad de “penetrar en el pensamiento” de una cultura y obtener una mejor comprensión de sus valores..., entre otros. (Biembengut y Hein, 2002, p. 34)

En la modelación matemática, el objetivo principal es matematizar la realidad, a través de la traducción de hechos o situaciones problema al lenguaje matemático, lo que permite iniciar la acción pedagógica del programa etnomatemáticas por medio de la etnomodelación. Esta propuesta permite que los estudiantes visualicen la matemática en las prácticas cotidianas por medio de situaciones didácticas innovadoras al mismo tiempo que contemplan diferentes realidades socioculturales y fomentan la conexión de las practicas matemáticas presentes en la comunidad con los contenidos matemáticos propuestos en el currículo y enseñados en las aulas (Bassanezi, 2002; Biembengut y Hein, 2002; Rosa y Orey, 2018). Por ello, es necesario comenzar con el contexto social, la realidad y los intereses de los estudiantes, pues esto permite trabajar con situaciones auténticas y problemas de la vida real (Rosa y Orey, 2010). Al mismo tiempo “valorando y respetando las expresiones de la cultura social que heredada y las que están en el porvenir” (Biembengut y Hein, 2002, p. 37).

## **1.6 MODELIZACIÓN CONTEXTUAL**

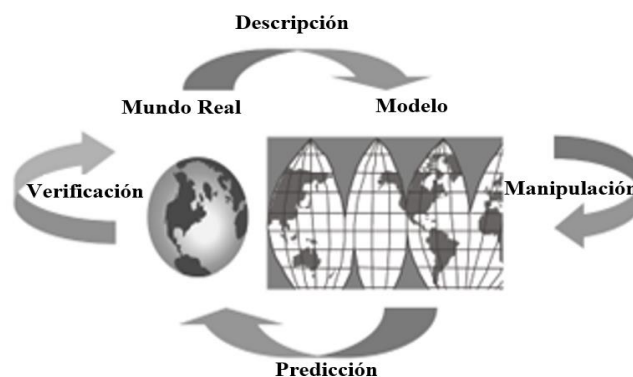
Desde el punto de vista de la resolución de problemas, surge la modelización contextual (Kaiser y Sriraman, 2006), la cual tiene una larga tradición, especialmente en el ámbito estadounidense. Partiendo de los aportes de Piaget y Vygotsky a la teoría constructivista del aprendizaje, esta perspectiva es basada en premisas como:

- los sistemas conceptuales son construcciones humanas, y que también son fundamentalmente sociales en la naturaleza.
- los significados de estos constructos tienden a ser distribuidos en una variedad de medios de representación que van desde lenguaje verbal, lenguaje escrito, a diagramas y gráficos, modelos concretos, experiencias metáforas.
- el conocimiento es organizado en torno a la experiencia al menos tanto como en torno a las abstracciones, y que las formas de pensar son necesarias para dar sentido a la toma de decisiones en situaciones complejas, casi siempre debe integrar ideas de más de una disciplina, o área temática del libro de texto, o gran teoría.
- los "mundos de experiencia" que los humanos necesitan comprender y explicar no son estáticos. Son en gran parte, productos de creatividad humana. Entonces, están cambiando continuamente y también las necesidades de conocimiento de los humanos que los crearon. (Kaiser y Sriraman, 2006, p. 306)

Basándose en la modelización contextual, surge la perspectiva de Modelos y Modelización (Lesh y Doerr, 2003) que concibe la construcción de modelos matemáticos desde el punto de vista de la psicología, donde el desarrollo de las tareas debe motivar y naturalmente permitir que los estudiantes desarrollen las matemáticas necesarias para dar sentido a tales situaciones (Kaiser y Sriraman, 2006). Asimismo, desde esta perspectiva la modelización matemática la relacionamos con la resolución de problemas, donde los estudiantes dan sentido a situaciones significativas e inventan, amplían y perfeccionan sus propios constructos matemáticos. En otras palabras, mientras el objetivo tradicional de la resolución de problemas es procesar información con un procedimiento dado, la modelización matemática provoca el proceso dentro de sí mismo como una herramienta. Esto permite que los estudiantes tomen su modelo matemático obtenido a través de la resolución del problema original y lo extiendan o apliquen a nuevas situaciones problema (Kaiser y Sriraman, 2006; Lesh y Doerr, 2003). En consecuencia, en este enfoque considera a la modelización como un medio para la enseñanza de las matemáticas, dado que concibe como un vehículo para apoyar los esfuerzos de los estudiantes, en la creación y desarrollo de modelos al construir su conocimiento matemático (Erbaş et al., 2014). En la figura 6 presentamos un esquema de las etapas del ciclo de modelización del enfoque teórico que tratamos en este apartado.

**Figura 6**

*Ciclo de modelización desde la perspectiva contextual*



*Fuente:* Traducción de Lesh y Doerr (2003, p. 17).

Además, se concibe el ciclo de modelización en cuatro etapas, en las cuales observamos el desarrollo de la construcción del pensamiento del estudiante. Específicamente estas etapas son denominadas: descripción, manipulación, predicción y validación. En la primera etapa, el estudiante identifica, selecciona y ordena la información relevante del problema. Para la etapa de

manipulación, el estudiante crea un modelo matemático y lo resuelve, utilizando para estos conocimientos previos. En la siguiente etapa predicción, realizamos interpretaciones de los resultados de la etapa anterior, tomado en cuenta para esto los datos que proporciona la situación problema. Por último, en la validación realizamos una evaluación de las soluciones del problema, efectuamos una retrospectiva de los procesos matemáticos realizados y juzgamos la utilidad de la solución del problema matemático.

En esta perspectiva de modelización, el diseño de tareas consiste en proponer y resolver problemas, donde la matemática es visualizada como herramienta para dar sentido en el mundo real (Ärlebäck y Doerr, 2020) y dejando de lado la memorización de procedimientos rutinarios. El resultado final será la construcción de estructuras de pensamiento del estudiante, más poderosas, significativas, flexibles y reutilizables en situaciones similares (Porrás y Fonseca, 2015). Aquí los modelos matemáticos son concebidos como estructuras conceptuales representadas por medio de “elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones, son expresadas en forma de notación externa y que utilizan para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas” (Lesh y Doerr, 2003, p. 10). También esperamos que trabajen creando modelos compartibles y reutilizables, al fomentar la interacción entre los estudiantes. Por lo tanto, el aspecto social del aprendizaje es otro elemento relevante de este enfoque (Erbaş et al., 2014).

Las actividades provocadoras de modelos o Model-Eliciting Activities (MEAs) deben cumplir con una serie de principios de construcción —significado personal, construcción del modelo, autoevaluación, documentación, prototipo simple y generalización del modelo— que las diferencian de actividades tradicionales, los cuales son los siguientes:

1. Principio de significado personal: consiste en proponer situaciones del contexto real del estudiante, es decir, basadas en situaciones de la vida real del que aprende.
2. Principio de construcción del modelo: tiene como propósito principal proponer actividades que permitan generar la necesidad de construir, modificar, extender o refinar un modelo matemático como herramienta para resolver el problema propuesto.
3. Principio de auto-evaluación: la actividad debe poseer criterios claros de evaluación donde el estudiante sea capaz de juzgar la utilidad y el progreso de las interpretaciones preliminares.
4. Principio de documentación: debe tener directrices que ayuden al estudiante a documentar las construcciones que desarrolla, que permitan plasmar explícitamente las representaciones internas obtenidas por el estudiante durante la resolución del problema.
5. Principio de prototipo simple: hay que motivar al estudiante a formular o pensar en situaciones similares, donde la solución propuesta del problema sirva también para resolverlas.

6. Principio de generalización del modelo: la idea es proponer al estudiante otras soluciones del problema, es decir debe ser desafiado a ir más allá de producir una sola solución, sino que sea capaz de producir otras maneras de pensar reutilizables. (Lesh et al., 2003)

Las actividades provocadoras de modelos o Model-Eliciting Activities (MEAs) forman parte de una secuencia de actividades para enseñar bajo el proceso de modelización matemática. Constituye el primer tipo de actividad de la secuencia que debemos aplicar, su objetivo principal es provocar la construcción del modelo matemático de la situación problema. Luego, es seguida por la aplicación de una o varias actividades de exploración de modelos o Model-Exploration activities (MXAs), sigue el propósito de profundizar la estructura del modelo obtenido, fortaleciéndolo a través de distintos sistemas de representación y su comprensión sobre las formas de usar e interpretar las representaciones. Por último, el tercer tipo de actividad es la de aplicación de modelos o Model-Adaption activities (MAAs). La cual involucran a los estudiantes en la aplicación de su modelo a nuevas situaciones, lo que a menudo resulta en más adaptaciones a sus modelos (Ärlebäck y Doerr, 2020). En la figura 7 mostramos la secuencia de actividades de modelización explicada anteriormente.

**Figura 7**

*Secuencia de actividades de desarrollo de modelos (MDS)*



*Fuente:* Traducción de Ärlebäck y Doerr (2020, p. 7).

Según Lesh et al. (2003), los tipos de actividades anteriores no deben usarse como actividades aisladas de resolución de problemas. Deben utilizarse en el desarrollo de la secuencia de actividades de modelización, donde las actividades de calentamiento y seguimiento también juegan un rol relevante (Erbaş et al., 2014). Coincidiendo en visualizar “la modelización matemática como una forma de resolución de problemas de la vida real, pero no es una forma cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo” (Castro y Castro, 1997, p. 110), donde la resolución de problemas es un proceso, una herramienta dentro de la

modelización y no como un producto acabado, es decir “esta matematización escolar no busca dar un modelo final y acabar la acción allí. Trata de la creación y uso sucesivo de modelos que se refinan, adecúan y amplían su rango de acción” (MEP, 2012, p. 31).

Finalmente, aunque cada uno de los enfoques teóricos de la modelización son interesantes por sí mismos, para esta investigación hemos escogido el enfoque de la perspectiva contextual y la perspectiva cognitiva y afectiva, debido a que se relacionan con aspectos necesarios para construcción de los modelos matemáticos, como lo es el uso de las representaciones según los estilos de pensamiento de los estudiantes al seleccionar las estrategias de resolución del problema propuesto, entre otros.

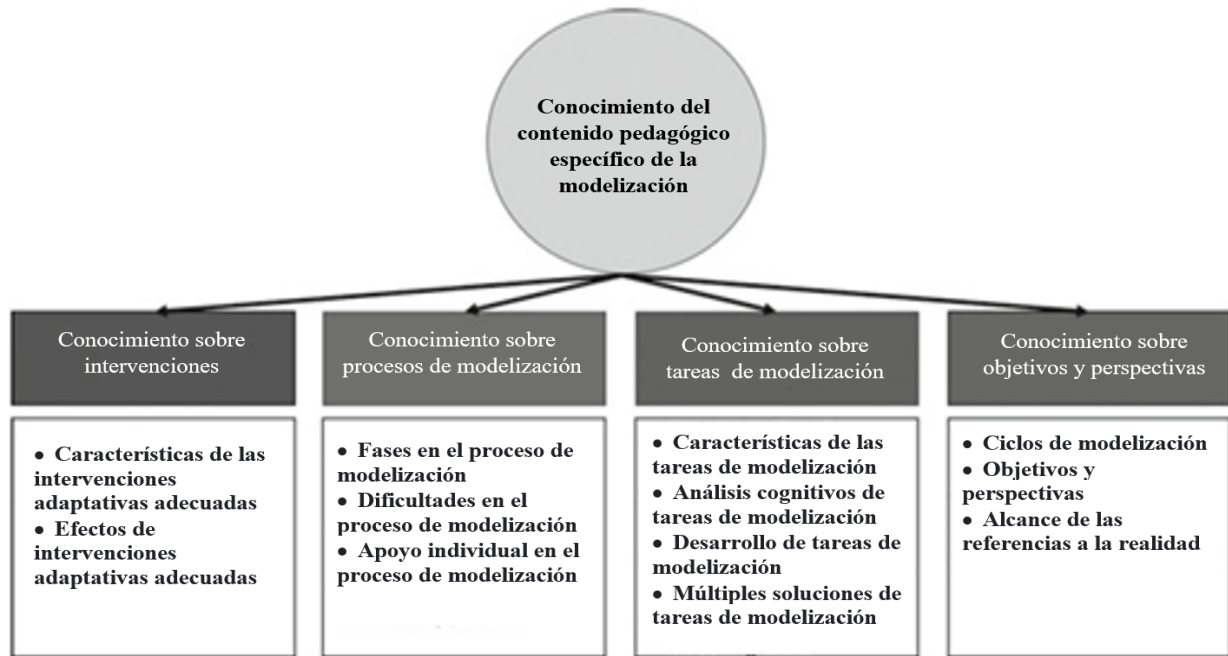
## **2. MODELO DE LA COMPETENCIA PROFESIONAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN**

Para lograr en forma eficaz la competencia de la modelización en los estudiantes, es requerido que los profesores posean competencias específicas sobre este campo (Blum, 2015; Wess et al., 2021). Wess et al. (2021) adapta el modelo del conocimiento del profesor COACTIV (Baumert y Kunter, 2013), para estudiar la competencia profesional de la modelización matemática. Dado que este modelo relaciona el conocimiento docente y la competencia profesional, entendiendo este último término como una disposición a logros cognitivos que son adquiridos por aprendizaje y cuya necesidad es la demandada en *dominios específicos* (Baumert y Kunter, 2013). Wess et al. (2021) afirman que, dentro de las competencias del profesor necesarias para enseñar la modelización encontramos las creencias-valores-metas, orientaciones motivacionales y el conocimiento del contenido pedagógico, como parte del saber profesional. A continuación, detallamos el dominio de conocimiento profesional involucrados en la modelización.

En la propuesta Wess et al. (2021) se considera que el conocimiento del contenido pedagógico específico de la modelización utiliza las cuatro dimensiones de competencia propuestas por Borromeo Ferri y Blum (2010) para el desarrollo de las competencias de modelización en los estudiantes. En la figura 8, mostramos estas facetas de competencia que son desarrolladas con aspectos seleccionados de las dimensiones de la competencia.

**Figura 8**

*Conocimiento del contenido pedagógico específico de la modelización*



*Fuente:* Traducción de Wess et al. (2021, p. 252).

Concretamente estas son: la dimensión teórica, la dimensión tarea, la dimensión instrucción y la dimensión diagnóstica. Dichas dimensiones son establecidas junto con conocimientos y habilidades, que se “relacionan tanto con aspectos declarativos como procedimentales del conocimiento de los profesores en formación” (Wess et al., 2021, p. 252). Además, desde la perspectiva teórica del modelo COACTIV (Baumert y Kunter, 2013), el conocimiento del contenido pedagógico específico de la modelización es establecido en los subdominios: conocimiento sobre intervenciones, conocimiento sobre procesos de modelización, conocimiento sobre tareas de modelización y el conocimiento sobre objetivos y perspectivas de la modelización matemática.

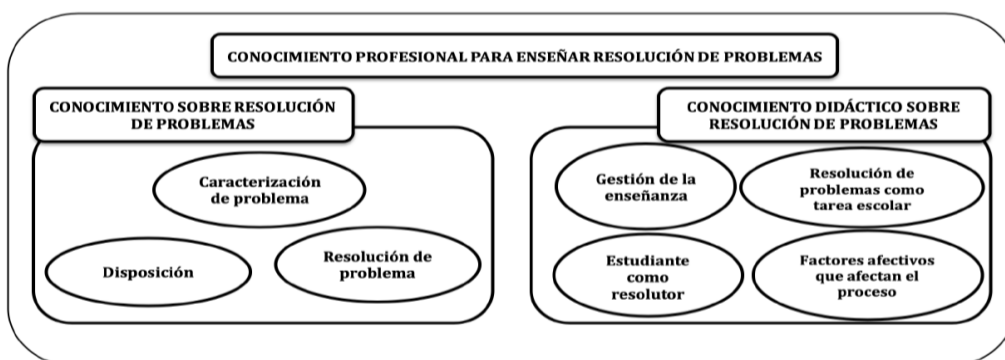
Finalmente, destacamos que el modelo de la competencia profesional para la enseñanza de la modelización de Wess et al. (2021) no hace alusión al conocimiento propiamente de la modelización sino a aspectos didácticos del mismo proceso.

### 3. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (CPRP)

Diversas investigaciones han hecho notar que los modelos del conocimiento del profesor y más utilizados por la comunidad de educación matemática presentan limitaciones al caracterizar el conocimiento del profesor sobre procesos como la resolución de problemas, por ejemplo, Piñeiro et al. (2019). Como alternativa, estos autores proponen una serie de componentes del conocimiento profesional sobre la resolución de problemas del profesor de educación primaria, a partir del modelo teórico de Chapman (2015) y una revisión de los currículos de educación primaria (Piñeiro et al., 2022).

**Figura 9**

*Modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas (CPRP)*



Fuente: Tomada de Piñeiro (2019, p. 266).

Como se observa en la figura 9, en este modelo, se diferencia entre: conocimiento del profesor sobre resolución de problemas y conocimiento pedagógico sobre resolución de problemas. Cada uno de estos con sub-componentes específicos.

#### 3.1 COMPONENTES A CERCA DEL CONOCIMIENTO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aquí hacemos referencia al conocimiento o nociones teóricas de la resolución de problemas y contempla la caracterización del problema, el proceso de resolución y la disposición a resolverlo.

**Caracterización del problema.** Hace referencia a qué se entiende por problema en matemática. Aquí debemos tomar en cuenta tres aspectos para hacer la selección del problema por parte del profesor. En primer lugar, la necesidad de carecer de un conocimiento del procedimiento de

resolución, en segundo lugar, la consideración del resolutor en que una tarea sea problema, y por último, el tipo y sus características de la tarea.

**Resolución de problemas. Etapas de resolución y su caracterización, estrategias, metacognición y factores no cognitivos (afectos y creencias):** El profesor debe conocer en la práctica las *Etapas* de resolución de problemas y la flexibilidad para retroceder (cuando el estudiante así lo necesite) en ellas. Además, cuando los estudiantes elaboran un plan de *estrategias* y debe tener conocimiento de cómo son, cuáles son y cómo incentivar las estrategias que utilizan y necesitan para resolver el problema. Este conocimiento debe tener un carácter *metacognitivo* (es decir, donde el resolutor se autorregula, monitorea y controla los heurísticos y los conocimientos, permitiendo que pueda tomar decisiones acertadas sobre lo que hace). También, el profesor debe ser consciente que los *factores no cognitivos*, como las emociones, actitudes y creencias juegan un papel determinante al resolver el problema.

**Disposición:** Concretamente, cuando se está al frente de una tarea que es realmente un problema, el resolutor acepta involucrarse en el proceso de resolución. Aquí, hacemos diferencia entre disposición y la motivación, pues la primera tiene que ver con un acto de voluntad, es decir, aceptar el desafío de resolver un problema y no tanto con la motivación.

### **3.2 COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

Esta componente considera elementos relativos a los aspectos del aprendizaje y la enseñanza de la resolución de problemas y contempla al estudiante como resolutor, la resolución de problemas como tarea escolar, la influencia de los factores no cognitivos en la enseñanza de la resolución de problemas y la gestión de una clase en que se pretenda desarrollar la competencia para resolver problemas de los estudiantes.

**Estudiante como resolutor.** Este aspecto corresponde a las características de resolutores exitosos, y las dificultades y errores que la literatura reporte. Este tipo de conocimiento permite al profesor poner atención en las fortalezas y debilidades de sus estudiantes. Como conocer la capacidad de ellos al resolver problemas, comprender las dificultades e interpretarlas adecuadamente desde la posición de los estudiantes, las cualidades cognitivas y disposición de los estudiantes exitosos, entre otros (Piñeiro, 2019).

**Resolución de problemas como tarea escolar.** En este aspecto convergen conocimientos relativos a la selección de problemas, los diferentes modelos de resolución y posibles estrategias que pueden contribuir en la enseñanza y el rol pedagógico de la invención de problemas. Concretamente, aquí ubicamos conocimientos sobre la tarea como problema y del proceso de resolución, es decir en términos de las posibles modelos de resolución (etapas) y enfoques (estrategias) que se podrían sugerir al resolutor. Asimismo, este conocimiento pedagógico es sobre características de una tarea escolar, es decir como una actividad que provocará aprendizajes. Además, se releva las posibilidades que provee la invención de problemas al aprendizaje,

**Factores no cognitivos.** Este aspecto trata sobre influencia mutua de creencias y concepciones y que se produce entre resolutor y profesor. Este tipo de conocimiento es concerniente a la interacción entre el profesor y el estudiante en términos de los factores no cognitivos (emociones, actitudes y creencias) de cada uno en torno a la resolución de problemas. Por ejemplo, la forma de actuar y creencias del profesor afectan el comportamiento de los estudiantes y su forma de resolver problemas; asimismo como las oportunidades de aprendizaje que proveerá.

**Gestión de la enseñanza de la resolución de problemas.** El último elemento es la gestión de la resolución de problemas en términos de los posibles enfoques o vías de acceso, y la gestión del discurso, los atascos, la evaluación y los recursos. El conocimiento sobre los enfoques hace referencias a la enseñanza *para* (aplicación), *sobre* (heurísticos) y *a través* la resolución. Cada uno de estos enfoques genera diferentes gestiones relativas al discurso, los atascos, la evaluación y los recursos. La gestión discurso hace referencia a todas las acciones (verbales o no) que devengan en una conducción de la clase en la que los estudiantes participen, colaboran y hacen una verdadera resolución del problema. La gestión de los atascos alude a un conocimiento de estrategias específicas de enseñanza para que el profesor pueda mediar en los procesos de resolución cuando los estudiantes se bloquean. La gestión de la evaluación corresponde al conocimiento que permite establecer criterios e indicadores que promuevan aprendizajes y que sean traducidos en instrumentos adecuados y variados. Finalmente, la gestión de los recursos se relaciona con el uso de materiales, tanto manipulables como no (representaciones).

Debido a que parte importante de este proceso investigativo es visualizar “la modelización como una forma de resolución de problemas de la vida real, pero no es una forma cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo” (Castro y Castro, 1997, p. 110), donde la resolución de problemas es un proceso, una herramienta dentro de la modelización y no como un producto acabado. Por ello, en el siguiente apartado discutimos aspectos del modelo sobre el conocimiento del profesor para la resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019) que nos servirán de fundamentación en el estudio del conocimiento del profesor sobre la modelización.

## **4. CONOCIMIENTO SOBRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA**

Borromeo Ferri (2018) señala que una enseñanza de calidad constituye el factor de impacto principal en el aprendizaje de los estudiantes, en particular si hablamos de la modelización matemática. Con respecto al conocimiento sobre la modelización como proceso, encontramos que el profesor debe comprender nociones básicas como la de *modelo*, *modelo matemático* y *modelización matemática* (Borromeo Ferri, 2018).

### **4.1 NOCIÓN DE MODELO**

En el lenguaje cotidiano existen muchas acepciones sobre la palabra modelo. Rico (2001) señala distintos significados de la noción de *modelo* como *modulus* (latín) que significa molde, un arquetipo o punto de referencia para imitarlo o reproducirlo. El autor también considera que un *modelo* es una persona o cosa por imitar o que debe imitar, por sus obras de ingenio y las acciones morales que son indicadores de perfección. A la vez, menciona el significado de *modus* como medida para medir algo. Además, el término *modelo* puede ser entendido como una cosa que puede concebirse y construirse o realizarse para servir de modelo para hacer otras idénticas o similares. Otro significado expuesto por el autor es percibir el *modelo* como una persona u objeto que posa como modelo y que copia el artista, o una persona encargada de exhibir creaciones de moda. De igual manera, lo comprendemos como un esquema teórico de un sistema o de una realidad compleja. Por último, es entendido como un esquema conceptual, susceptible de un tratamiento matemático, que interpreta o predice el comportamiento de un sistema en el que es desarrollado un fenómeno determinado. Asimismo, *modelar* es considerado como conformar, constituir algo por procesos naturales, humanos, históricos. Como dar forma artística a una

sustancia plástica, hacer que una persona adquiriera o desarrolle una aptitud o su personalidad, educar (Rico, 2001).

## 4.2 NOCIÓN DE MODELO MATEMÁTICO

Otro nivel de reflexión que realiza Rico (2001) es el empleo técnico del término en otras disciplinas, donde cada una hace un uso específico del término *modelo*, pero mantiene el significado original y lo dota de mayor precisión (Rico, 2001). En particular, en educación matemática podemos encontrar un uso propio del concepto de *modelo* en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo es en la educación matemática, los *modelos* son considerados como sistemas conceptuales expresados por medio de sistemas de notación externos, y que se utilizan para construir, describir o explicar los comportamientos de otro (s) sistema (s) (Erbaş et al., 2014; Lesh y Doerr, 2003). Así el término *modelo matemático* representa un objeto o hecho concreto de la realidad, expresado por diferentes sistemas de representación que ayudan a comunicar las variaciones individuales, tendencias y detalles lo más aproximados posibles a la realidad del fenómeno (Erbaş et al., 2014). Es decir, un intento de construir una analogía entre un sistema desconocido y un sistema previamente conocido o familiar (Lehrer y Schauble, 2003), dándole sentido a la situación real través de la interpretación utilizando modelos para ello (Erbaş et al., 2014). Por lo que, un modelo es “la expresión de las percepciones de la realidad, del deseo de la aplicación, de la representación... que puede ser derivado de otro y servir como base para otros que vendrán” (Biembengut y Hein, 2002, pp. 28-29). En efecto, Montejó-Gómez et al. (2021) señalan que, para caracterizar un *modelo matemático* en un ámbito escolar, debemos contemplar la unión de tres elementos que le dan forma, como el sistema real a modelar, su matematización y las representaciones utilizadas para expresar ambos. Concretamente, para Biembengut y Hein (2002), el modelo matemático es “un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, un fenómeno en cuestión” (Biembengut y Hein, 2002, p. 28). Sin embargo, si nos posicionamos en ambientes de educación infantil o los primeros niveles de educación primaria, el término *modelo matemático* es usado con significado distinto debido a que el “desarrollo cognitivo de los niños determina su capacidad de abstracción, ya que su pensamiento es concreto y, en consecuencia, los modelos que pueden crear también son concretos, por eso los llaman modelos concretos” (Alsina y Salgado, 2021, p.1722).

### 4.3 NOCIÓN DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Modelización matemática es el proceso de construir, obtener y validar los modelos matemáticos, donde los sistemas conceptuales y modelos son utilizados para crear y desarrollar modelos en nuevos contextos (Lesh y Doerr, 2003). En consecuencia, un modelo es un producto y la modelización es el proceso de creación de un modelo físico, simbólico o abstracto de una situación (Kaiser y Sriraman, 2006). Otros autores lo consideran como un mecanismo donde los procesos de abstracción y generalización son utilizados con el propósito de transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos y en forma inversa, y donde las soluciones deben ser descifradas en la misma realidad (Erbaş et al., 2014).

Julie y Mudaly (2007) expresan que la modelización es clasificada como *vehículo* para desarrollar la matemática o como *contenido* sí mismo. En el primer caso, la modelización como *vehículo* sigue el propósito principal de representar la matemática en algún contexto, no en sí el desarrollo de la competencia de modelización. Es decir, usar “los contextos y los modelos matemáticos como un mecanismo para el aprendizaje de conceptos, procedimientos y, a veces, desarrollar justificaciones basadas en el contexto para obtener conjeturas” (Julie y Mudaly, 2007, p. 504). Para el segundo caso, la modelización como contenido parte de la situación real para construir el problema, involucra

la construcción de modelos matemáticos de fenómenos naturales y sociales sin receta de ciertos conceptos matemáticos, los procedimientos o similares deben ser el resultado del proceso de construcción del modelo. También implica el escrutinio, disección, crítica, ampliación y adaptación de los modelos existentes con vistas a llegar a comprender los mecanismos subyacentes de la construcción de modelos matemáticos y la valoración y evaluación de los modelos matemáticos contruidos. (Julie y Mudaly, 2007, p. 504)

Similar a las clasificaciones de la modelización expuestas anteriormente, Erbaş et al. (2014) expone que la modelización es dividida como la modelización como *propósito de la enseñanza de la matemática* y modelización como *medio para enseñar matemática* (Galbraith, 2012; Niss et al., 2007). En la primera perspectiva, la modelización como *propósito de la enseñanza de la matemática*, los conceptos y modelos matemáticos son proporcionados previamente y más tarde estos conceptos o modelos prefabricados son aplicados a situaciones del mundo real (Niss et al., 2007), es decir son considerados como objetos ya existentes (Gravemeijer, 2002). En la segunda perspectiva, la modelización como *medio*, parte del supuesto subyacente de que los estudiantes pueden aprender los conceptos matemáticos fundamentales de manera significativa, a través del

proceso de modelización en el que descubren intuitivamente conceptos matemáticos al resolver una situación problema de la realidad (Lesh y Doerr, 2003).

## 5. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

En este trabajo, para fundamentar y comprender las estrategias de resolución, representaciones y errores al resolver una tarea de modelización matemática pretendemos utilizar la perspectiva teórica de modelización contextual, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes participantes involucrado en las rutas individuales visibles de modelización de Borromeo Ferri (2018). Asimismo, ambas conceptualizaciones teóricas nos ayudarán a establecer las componentes de conocimiento del profesor sobre proceso de modelización tanto para su enseñanza y aprendizaje, para luego describir el conocimiento de los profesores de primaria en ejercicio poseen.

Para Borromeo Ferri (2018) la enseñanza de calidad es el factor de impacto principal en el aprendizaje de los estudiantes. Por ello, Borromeo Ferri y Blum (2010); Borromeo Ferri (2014) desarrollaron un modelo de competencias necesarias en la enseñanza de la modelización matemática, las cuales exponemos en figura 10.

**Figura 10**

*Modelo de competencias necesarias en la enseñanza de la modelización matemática*

|                              |                                                                                                                                                              |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Dimensión teórica</b>     | a) Ciclos de modelización<br>b) Objetivos y perspectivas de la modelización<br>c) Tipos de tareas de modelización                                            |
| <b>Dimensión tarea</b>       | a) Solución múltiple de tareas de modelización<br>b) Análisis cognitivos de tareas de modelización<br>c) Desarrollo de tareas de modelización                |
| <b>Dimensión instrucción</b> | a) Planificación de clases con tareas de modelización<br>b) Realización de clases con tareas de modelización<br>c) Intervenciones, apoyo y retroalimentación |
| <b>Dimensión diagnóstica</b> | a) Reconocimiento de fases en el proceso de modelización<br>b) Reconocer dificultades y errores<br>c) Tareas de modelización de marcado                      |

*Fuente:* Traducción de Borromeo Ferri y Blum (2009); Borromeo Ferri (2014).

## 5.1 CICLOS DE MODELIZACIÓN

En educación matemática existen varios ciclos de modelización matemática. Borromeo Ferri (2018) sugiere desde su experiencia en la formación continua de profesores, que los ciclos con cuatro etapas son más sencillos para comprender el proceso de modelización y además son adecuados para los estudiantes. Sin embargo, los ciclos con más etapas, con una mayor profundidad en la visualización de los procesos cognitivos son más útiles para los profesores (Borromeo Ferri, 2018). En consecuencia, es necesario propiciar en los estudiantes la conciencia de la transferencia de un mundo real al matemático y al revés, a través de la modelización. Asimismo, incentivar el uso de conceptos como *modelo real*, *modelo matemático*, *modelización*, entre otros.

## 5.2 ESTILOS DE PENSAMIENTO Y ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

Las rutas de modelización son consideradas como un proceso individual (interno o externo) que realiza el sujeto según su preferencia al modelizar (Borromeo Ferri, 2018). Es decir, en la modelización “el individuo inicia este proceso durante una determinada etapa, según sus preferencias, y luego pasa por diferentes etapas varias veces o solo una, enfocándose en ciertas etapas y/o ignorando otras” (Borromeo Ferri, 2007, p. 265). Además, hablamos de rutas de modelización visibles, donde el sujeto puede usar representaciones externas para expresar los pensamientos matemáticos generados durante el recorrido de las etapas del proceso de modelización (Borromeo Ferri, 2007). Así, el estilo de pensamiento de los estudiantes es entendido como “la forma en que un individuo prefiere presentar, comprender y pensar detenidamente, hechos matemáticos y conexiones, mediante ciertos pensamientos internos y/o representaciones externas” (Borromeo Ferri, 2010, p. 34). Borromeo Ferri (2018) identifican el estilo de pensamiento del resolutor y lo expresan mediante estrategias según el tipo de pensamiento.

**1. Estrategias de pensadores analíticos:** realizan la transición del modelo real al modelo matemático y viceversa. Trabajan principalmente de manera formalista, es decir prefieren el uso de las representaciones externas utilizando el formalismo matemático y son mejores para “percibir” los aspectos matemáticos de una situación real dada. Son capaces de comprender hechos matemáticos idealmente a través de representaciones simbólicas o verbales existentes y prefieren proceder en una secuencia de pasos.

**2. Estrategias de pensadores visuales:** prefieren las características internas distintivas, imaginaciones y representaciones pictóricas externalizadas, así como una comprensión de hechos matemáticos y conexiones a través de representaciones holísticas. En su mayoría representan mentalmente la situación en imágenes. Su razonamiento durante el proceso de modelización suele ser muy vívido, incluso mientras están trabajando dentro del modelo matemático. Siguen el ciclo de la modelización dado. Las imaginaciones internas son afectadas principalmente por fuertes asociaciones con situaciones que han experimentado.

**3. Estrategias de pensadores integrados** combinan formas de pensamiento visual y analítico. Son capaces de cambiar en forma flexible entre las diferentes representaciones o formas de proceder. Muestran un equilibrio entre la realidad y las matemáticas.

Por tanto, el estilo de pensamiento matemático del individuo se basa en dos componentes relevantes: representaciones internas y externas, y un listado de estrategias o formas de proceder.

### 5.3 REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS

Al resolver tareas matemáticas, las descripciones, explicaciones y construcciones proporcionadas por los estudiantes son expresadas a través de distintas representaciones, por ello constituyen un elemento central en el desarrollo de estrategias de resolución (Morgan y Kynigos, 2014). En la modelización, las representaciones constituyen una de las componentes más importantes, pues no solo son usadas producir una solución, sino también muestran el proceso de análisis y reflexión del estudiante (Lesh y Doerr, 2003; Morgan y Kynigos, 2014).

En educación matemática el término representación ha adquirido distintos significados y connotaciones (Rico, 2009). Entre las distintas causas, encontramos su doble naturaleza referida tanto al proceso de capturar un concepto o relación matemática, como al producto de la forma misma (NCTM, 2000), —así como la dualidad entre representación externa e interna— en forma de lenguaje hablado, símbolos escritos, imágenes u objetos físicos o ideas con las que la mente opera (Hiebert y Carpenter, 1992). En este trabajo consideramos las representaciones como signos específicos que permiten comunicar los conceptos y procesos matemáticos (Lesh y Doerr, 2003). Estos signos no pueden entenderse de forma aislada, sino dentro de un sistema de representación que satisface un conjunto de reglas con el que podemos identificar o crear representaciones, operar sobre y con ellas, y determinar relaciones (Goldin, 2002; Kaput, 1991).

Dentro de los modos convencionales de representación de las estructuras numéricas, Castro y Castro (1997), Goldin (2002) y Kaput (1991) distinguen entre:

1. **Simbólico-numérico:** formado por símbolos alfanuméricos con los cuales podemos relacionar y hacer operaciones con cantidades numéricas.
2. **Tabular:** tablas de valores, arreglos de filas y columnas es decir en forma matricial.
3. **Representación icónica-gráfica:** iconos, diagramas visuales, representaciones pictóricas, gráficos, figuras geométricas, gráficas, entre otros; que visualizan las ideas matemáticas.
4. **Representación lenguaje verbal (oral o escrito):** consiste en expresar enunciados verbales orales o escritos en lenguaje tradicional.

#### 5.4 ERRORES Y DIFICULTADES EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA MODELIZACIÓN

La modelización matemática es considerada un proceso complejo (Gallart et al., 2017). El papel del profesor es de suma importancia para el aprendizaje de los estudiantes y debe ayudar a vencer sus dificultades, a través de métodos de enseñanza adecuados e innovadores y no los clásicos métodos rutinarios, que producen respuestas sin análisis alguno y sin comprensión conceptual (Escudero, 2007; Socas, 1998). Es decir, se debe promover situaciones de aula que propicien “un conflicto al alumno porque le provoca una reestructuración nueva del conocimiento total, produciéndose posteriormente una acomodación de la estructura anterior, que le permite recobrar el equilibrio perdido” (Ruano et al., 2008, p. 62). No obstante, la complejidad de las tareas de modelización matemática que promueven su aprendizaje conlleva una serie de errores y dificultades en los que incurren los estudiantes (Guerrero, 2016). Los autores Rico (1998) y Rodríguez (2015) destacan algunas líneas de investigación con relación a este tema, una de ellas es enmarcada desde una perspectiva curricular en el aprendizaje de las matemáticas, ya que pretende diagnosticar y documentar algunos de los errores más comunes, enseñando a la vez que los errores no son un fracaso, sino parte de su proceso de aprendizaje del estudiante (Chavarría, 2014).

Asimismo, diversos autores han realizado clasificaciones, permitiendo diagnosticarlos y evaluarlos con el fin ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades (Rodríguez, 2015). Por

ejemplo, Abrate et al. (2006) proponen una clasificación de los errores conformada por siete categorías, tomando como base las propuestas de Movshovitz-Hadar et al. (1987) y Radatz (1980), la cual a continuación se detalla:

**Errores debidos al lenguaje matemático:** producidos por una traducción incorrecta entre lenguajes, como del lenguaje natural al lenguaje formal matemático y en forma inversa. Son causados por errores al traducir de un lenguaje simbólico o icónico y en forma inversa.

**Errores debidos a dificultades para obtener información espacial:** referidos a las de dificultades de los estudiantes al procesar información presentada mediante imágenes espaciales o visuales (representaciones icónicas), lo que ocasionan interpretaciones incorrectas de información o hechos matemáticos.

**Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas:** son generados por aplicar reglas y propiedades válidas en contextos parecidos o relacionados, ocasionados por falacias de razonamiento, y no se deben al contenido específico. Aquí, el alumno es consciente que la situación planteada es diferente de otras abordadas, no obstante, “inventa” nuevas o deforma reglas y deriva la validez de las que conoce de otras situaciones para el caso que está tratando.

**Errores debidos a la recuperación de un esquema previo:** causados por “la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas” (Del Puerto et al., 2006, p. 4), es decir, por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de solución de una situación, aún si la tarea es nueva. El alumno no es consciente de que la situación es diferente a otras planteadas, por ello no realiza inferencias de validez de las propiedades, sino más bien, las aplica por considerar que está en un contexto conocido.

**Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales:** se deben a situaciones como: añadir datos extraños o información inconsistente, olvido de algún dato, respuestas innecesarias, lectura incorrecta del enunciado, tomar datos incorrectamente de una tabla, entre otros. El procedimiento realizado de la tarea es correcto, pero la solución final no.

**Errores eventuales debidos a deficiencias en la construcción de conocimientos previos:** son causados por aprendizajes incorrectos o inadecuados de hechos, destrezas y conceptos previos que interfieren en un adecuado procesamiento de la información. De esta forma identificamos aquellas respuestas que se presentaron de manera aislada o

casual, y de las que no fue posible establecer el patrón de error.

**Errores debidos a la ausencia de conocimientos previos:** son causados por la carencia de aprendizajes de hechos, destrezas y conceptos previos, que inhiben total o parcial el procesamiento de la información.

Además, Socas (2007) realiza una “clasificación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que son las que, en definitiva, provocan los errores” (Arce y Ortega, 2013, p. 62). Divide los errores según su origen en tres ejes no disjuntos: obstáculo, ausencia de sentido y actitudes afectivas y emocionales; y pueden abordarse desde varias perspectivas según sea su naturaleza y que van más allá de lo estrictamente matemático (Fernández y Brey, 2012).

La mayoría de las investigaciones están centradas en detectar y categorizar los errores cometidos en el proceso de resolución de problemas, así como sus causas (e.g., Guerrero, 2016; Socas et al., 2016), dejando de lado las dificultades y errores específicos de procesos como la modelización. Los estudios existentes muestran que los estudiantes presentan deficiencias tanto en el contenido matemático como en el manejo de las etapas del ciclo de modelización, que se desarrolla de forma cíclica y no-lineal debido a la complejidad del pensamiento del estudiante (Czocher, 2017). Por ello, es necesario estudiar tanto los errores matemáticos, como los que se involucran en las etapas del proceso de modelización.

## **5.5 CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN**

Borromeo Ferri y Blum (2010) y Borromeo Ferri (2018) destacan la importancia de la utilización de buenas tareas, pues estas son el núcleo de las lecciones de matemática, donde la “selección y calidad de las tareas son esenciales para la comprensión, para promover las prácticas y competencias matemáticas de los estudiantes, y pueden ser la base para estructurar lecciones y utilizando varios métodos de enseñanza” (p. 41). En particular, si requerimos de una buena enseñanza y de alta calidad debemos poner atención en la construcción de tareas de modelización, y máxime si queremos incorporarlas a la enseñanza diaria. Esta competencia profesional no es trivial y necesita tiempo para poder llevarse a cabo, más si hablamos de la creación de problemas de modelización, pues debemos pensar y buscar el contexto apropiado según el nivel educativo del estudiante, pensar la complejidad de la tarea en conexión con el

tiempo de trabajo y los materiales que los estudiantes necesitan para resolver el problema (Borromeo Ferri, 2018).

Las tareas matemáticas que los profesores utilizan en sus lecciones deben ser de calidad, es decir, cognitivamente exigentes para los estudiantes con el fin de promover varias prácticas, como el razonamiento, comunicación, integradas a sistemas abiertos y formatos de tareas cerradas. Los problemas de modelización son exigentes cognitivamente debido al contexto y las transiciones entre la realidad y las matemáticas. Además, el mismo problema de modelización puede ser resuelto por un estudiante con diferente nivel de razonamiento (bajo, intermedio o avanzado). El profesor necesita entender que un problema de modelización no puede resolverse con algoritmos conocidos y necesita estrategias para hacerlo (Borromeo Ferri, 2018; Lesh y Doerr, 2003; Schoenfeld, 1994). Los problemas de modelización son definidos como preguntas de la vida real que provienen del mundo extramatemático. Por lo que, no podemos hablar de problemas de modelización matemática sin un contexto real (Borromeo Ferri, 2018).

Por tanto, el problema de una tarea de modelización tiene características especiales que las diferencian de otras tareas matemáticas. Algunos autores, como Maaß (2007a) han establecido una tipología de rasgos de las tareas de modelización, específicamente este tipo de tarea es: abierta, compleja, realista, auténtica, donde sea propuesto un problema y este sea solucionable mediante el proceso de modelización. Además, según Lesh y Doerr (2003) las tareas de modelización matemática deben cumplir 6 principios de construcción (ver página 55). Borromeo Ferri y Lesh (2013) realizaron una actualización de los criterios que una tarea debe cumplir para que sea de modelización. Estos surgen del trabajo con profesores en formación y en ejercicio, dichos criterios son los siguientes:

- 1. Importancia de la tarea de modelización:** los alumnos deben poder manejar esta tarea y debe tener sentido para ellos trabajar en ello.
- 2. Contexto realista basado en la edad:** todos tienen su propia visión de la realidad y sus propias experiencias, por tanto, incluso una clase es muy heterogénea. Por lo que, debemos tener en cuenta consideraciones al elegir tareas de modelización, que sean interesantes para un grupo de edad en particular.
- 3. Provocación de más preguntas:** la tarea de modelización debe abrir la oportunidad para que los alumnos planteen nuevas preguntas. Estas preguntas pueden ser de nivel matemático y, por supuesto, del contexto y la situación real de la tarea.
- 4. Estimular formas holísticas de aprendizaje:** *Aprender con todos los sentidos* también es posible con tareas de modelización, en particular para aquellos problemas de modelización complejos que podemos resolver principalmente fuera del salón de clases.

**5. Nivel apropiado del lenguaje:** la tarea debe formularse de manera que los alumnos puedan comprenderla, dependiendo de su nivel de educación. Las frases poco claras también impiden que los alumnos construyan una representación mental del contexto en la tarea. (p. 47)

La figura 11 muestra un ejemplo de tarea que cumple con las características previamente señaladas.

**Figura 11**

*Ejemplo de problema abierto de modelización*

**Mudanza**

Tu hermana mayor se muda con su esposo a una nueva casa. Ambos quieren ahorrar dinero. Aunque tienen muchas cosas, alquilan un coche pequeño por solo 1 día, como se ve en las fotos. Ayúdelos a pensar en una forma óptima de colocar el máximo número de cajas de mudanza en el automóvil. Describe su forma de solución. Haz un boceto. Hable con los miembros de su grupo, si la solución tiene sentido.



*Fuente:* Traducción de Borromeo Ferri (2018, p. 83).

Para muchos profesores, los problemas de modelización parecen ser demasiado difíciles para sus estudiantes. Debido a que el uso de problemas de respuesta abierta ocasiona la dificultad de no tener control de las respuestas que el estudiante puede generar, se obstaculiza el trabajo de aula en comparación a las tareas de respuesta cerrada o las que provienen de un enfoque tradicional de enseñanza. Sin embargo, esta dificultad o malestar es minimizada conforme el profesor adquiere experiencia al trabajar en forma continua este tipo de tareas (Borromeo Ferri, 2018).

Según Borromeo Ferri (2018), los problemas de modelización ofrecen un rico potencial para trabajar con estudiantes de bajas a altas capacidades matemáticas. Se puede trabajar en igualdad de condiciones, aunque en la clase tengamos estudiantes de pensamiento muy heterogéneo. Por lo que, los problemas de modelización son inclusivos, pues admiten múltiples soluciones en distintos niveles de razonamiento. Un ejemplo es presentado en Borromeo Ferri (2018), al trabajar un mismo problema con estudiantes del nivel de primer a cuarto año de primaria, mostrando que el potencial de autodiferenciación es muy alto, pues cada alumno tiene la oportunidad de trabajar en el nivel matemático y extramatemático que sea adecuado para ellos

(Borromeo Ferri, 2018). Por tanto, recae en el profesor la responsabilidad de construir, planificar y aplicar un problema, donde promueva la competencia de modelización y las subcompetencias necesarias del ciclo de modelización, sin importar el nivel cognitivo de los estudiantes (Borromeo Ferri, 2018).

Los problemas de modelización son basados en la realidad del mundo extramatemático o contexto real, es decir hay un contexto para una tarea, y no solo matemático. Aquí es relevante la interpretación individual por parte de la persona que trabaja en la tarea, pues según las experiencias o asociaciones de esta, puede que el contexto influya o no. Ahora bien, elegir un contexto real que sea de gusto para todos los estudiantes o sean capaces de manejar es muy complicado. Sin embargo, “la modelización matemática ofrece a los estudiantes una perspectiva y una visión más amplia de las preguntas de la vida real y para qué se necesitan las matemáticas en el mundo circundante” (Borromeo Ferri, 2018, p. 75). Al mismo tiempo, brinda una idea al profesor del tipo de razonamiento que el estudiante prefiere al enfrentar el contexto real que posee la tarea. Al enseñar la modelización matemática, es importante comprender como ese contexto influye en el proceso de modelización, con el fin de analizar las reacciones de los alumnos, lo que provee información para el profesor que usará en su trabajo práctico y flexibilidad instruccional.

## **5.6 CONOCIMIENTO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN**

Es relevante que el profesor sea capaz de planificar y ejecutar lecciones de modelización y el conocimiento de las intervenciones durante los procesos de modelización de los estudiantes.

### ***Planificación y ejecución de lecciones de modelización matemática***

Borromeo Ferri (2018) incentiva el uso de una guía de principios para la planificación y realización de las lecciones de modelización, en especial si el maestro no tiene experiencia en este campo. En total, son ocho principios de los cuales, cinco corresponden a la preparación y planificación de una clase de modelización:

1. Elección de un problema con un contexto interesante, adecuado, auténtico y de la realidad circundante de los estudiantes, con el cual se estimule las etapas del ciclo de modelización.

2. Resolver el problema previamente, para obtener los modelos matemáticos, soluciones y pensar las barreras cognitivas de los estudiantes, con el fin de brindar ayudas adecuadas.
3. Pensar cuál es el objetivo de la lección de modelización, profundizar en la comprensión de un determinado contenido matemático o capacitar a más profundidad a los estudiantes en etapas específicas del ciclo de modelización.
4. Establecer que herramientas se necesitan para lograr una resolución exitosa del problema de modelización.
5. Establecer el tiempo necesario para resolver el problema de modelización.

Los otros tres corresponden a la ejecución y reflexión de una lección al resolver un problema de modelización:

1. Al inicio, el profesor debe comunicar las directrices que deben seguir los estudiantes.
2. Durante el proceso, el profesor debe observar los diferentes modelos generados por los grupos. Para elegir las soluciones distintas del problema para la presentación y discusión de todo el grupo, lo que generaría conocimiento importante para los estudiantes.
3. Reflexionar sobre el éxito de la lección de la modelización y aspectos podemos mejorar.

La guía de principios anteriores puede ser útil en las primeras lecciones de modelización. Es recomendable validar los planes de lección con otros colegas antes de llevarlo a la práctica, con la finalidad de realizar posteriormente una reflexión del plan. En estos planes de lección hay que seguir los criterios de calidad de las buenas lecciones, por ejemplo, es necesario que los estudiantes tengan suficiente tiempo para discutir y anotar los resultados.

### ***Intervenciones durante las actividades de modelización***

Apoyar a los estudiantes mientras realizan actividades de modelización es una parte crucial de la enseñanza de la modelización matemática y, por lo tanto, es necesario que el profesor posea este conocimiento. El maestro tiene que reconocer si un estudiante está progresando o no mientras resuelve un problema de modelización. A la vez, saber qué hacer para que el estudiante avance, en otras palabras, decidir si es necesario intervenir o no. Borromeo Ferri (2018) menciona dos intervenciones que los profesores pueden realizar durante el proceso de modelización. La primera es formulada por Zech (1998) y plantea una taxonomía de asistencia o apoyo, desarrollada para ambientes de resolución de problemas. Esta taxonomía, fue establecida en niveles de ayuda. La tabla 2 muestra ejemplos de este tipo de intervenciones.

**Tabla 2***Taxonomía de asistencia de Zech (1998)*

| <b>Asistencia</b>      | <b>Ejemplo de intervención</b>                                      |
|------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| Motivación             | ¡Sigue e inténtalo, ya casi resolverás este problema, estoy seguro! |
| Retroalimentación      | ¡Sí, estás en el camino correcto!                                   |
| General-estratégico    | Hacer un boceto o leer el texto de nuevo.                           |
| Orientada al contenido | ¡Quizás la regla de tres le ayude a encontrar la solución!          |
| Orientado al contenido | ¿Cuál es la definición de velocidad?                                |

*Fuente: Zech (1998, p. 24).*

En segundo lugar, las intervenciones del maestro tanto verbales como no verbales que se dan durante la resolución de problemas de modelización, pueden servir de apoyo o ayuda mínima a los estudiantes, para que puedan trabajar por sí mismos. Así Leiß (2007), crea una clasificación de intervenciones para las lecciones de modelización, diferenciando entre niveles, objetivos y activadores de las intervenciones. Mostramos dicha clasificación en la tabla 3.

**Tabla 3***Niveles de intervenciones*

| <b>Nivel de intervenciones</b>                                                                                                                     | <b>Niveles objetivos de las intervenciones</b>                                                                                                                              | <b>Activadores de intervención</b>                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Respecto al contenido:</i> intervenciones del docente referentes al contenido sobre el proceso de modelización y la matemática correspondiente. | <i>Diagnosticar:</i> el maestro pregunta a los estudiantes sobre el estado actual de su proceso de solución.                                                                | <i>Invasiva:</i> propia iniciativa del docente para intervenir en la solución proceso de los estudiantes. |
| <i>Estratégico:</i> intervenciones relativas al meta-nivel, es decir, aspectos generales de la modelización y proceso de resolución del problema.  | <i>Evaluar / retroalimentar:</i> el profesor proporciona comentarios sobre el proceso de solución de los estudiantes sin más información ni corrección.                     | <i>Sensible:</i> los estudiantes piden consejo                                                            |
| <i>Afectivo:</i> intervenciones que intentan influir en el estado mental de los estudiantes.                                                       | <i>Asesoramiento indirecto:</i> sugerencias sutiles del profesor para ayudar a los estudiantes a encontrar la <i>mejor manera de resolver</i> según la opinión del profesor | explícitamente al maestro.                                                                                |
| <i>Organizativo:</i> intervenciones relativas a las condiciones básicas del trabajo de los estudiantes, interacciones o presentaciones.            | <i>Asesoramiento directo:</i> el docente da explícitamente explicaciones e información relevante a los estudiantes.                                                         |                                                                                                           |
|                                                                                                                                                    | <i>No intervención consciente:</i> sin intervención del profesor, aunque los alumnos pueden tener problemas.                                                                |                                                                                                           |

*Fuente: Leiß (2007, p. 101).*

## 5.7 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE DIAGNÓSTICO EN LA MODELIZACIÓN

Borromeo Ferri (2018) señala que el saber sobre diagnosticar, es decir, la capacidad para identificar etapas en los procesos de modelización de los estudiantes y para diagnosticar las dificultades durante dichos procesos es crucial. Tener conocimiento sobre esta, permitirá al profesor el conocer y entender de una manera más asertiva el pensamiento matemático de los estudiantes, visualizado en las representaciones que utilizan. A la vez el profesor puede detectar sus dificultades, y a través de sus intervenciones retroalimentar sistemáticamente. Borromeo Ferri (2018) distingue dos tipos de diagnóstico según el objetivo que persigamos, el diagnóstico orientado al producto y al proceso. El primer tipo está concentrado en el producto realizado por el estudiante en forma individual. Por ejemplo, una prueba o examen sirve como instrumento diagnóstico donde calificamos la producción del estudiante en un tema específico. Los resultados pueden servir como indicadores del aprendizaje de los estudiantes y de toma de decisiones, para mejorar este si requiere. El segundo tipo, está orientado a comprender los procesos de pensamiento o el origen de los resultados, con el fin de dar intervenciones adecuadas. Borromeo Ferri (2018) propone algunos ejemplos de herramientas de este tipo de diagnóstico pueden ser los cuadernos o diarios de aprendizaje, las tareas de aula, las entrevistas de diagnóstico, entre otros; que pueden revelar falencias conceptuales de los estudiantes.

Borromeo Ferri (2018) propone una herramienta para documentar el comportamiento de los estudiantes durante la modelización. Dicha herramienta consiste en una tabla para desglosar todas las subcompetencias foco de la modelización matemática y permiten diagnosticar y documentar el aumento o disminución de la competencia de modelización del estudiante al realizar una observación en forma sistemática. Además, esto proporciona una forma de como calificar al estudiante durante el proceso de modelización en el aula. Un ejemplo de este tipo de tabla se muestra a continuación:

**Tabla 4**

*Ejemplo de ficha de evaluación en grupos de una tarea 1 de modelización*

| Estudiantes             | Juan | Marcos | Jazmín | Anabel | ... |
|-------------------------|------|--------|--------|--------|-----|
| Entendiendo el problema | +    | .      | +      | .      |     |
| Haciendo suposiciones   | .    | .      | +      | +      |     |
| Matematizando           | —    | —      | +      | .      |     |

**Tabla 4***Ejemplo de ficha de evaluación en grupos de una tarea 1 de modelización*

| Estudiantes                           | Juan | Marcos | Jazmín | Anabel | ... |
|---------------------------------------|------|--------|--------|--------|-----|
| Trabajando matemáticamente            | .    | .      | +      | .      |     |
| Validación, reflexión crítica         | .    | .      | +      | +      |     |
| Procedimiento orientado por objetivos | .    | .      | +      | +      |     |

*Fuente:* Traducción de Borromeo Ferri (2018, p. 105).

*Nota:* Significado de símbolos + excelente; • dudoso; –conceptos erróneos/incorrectos.

***Retroalimentación escrita en la modelización***

Según Borromeo Ferri (2018), el profesor también debe saber realizar la retroalimentación adecuada para promover las competencias de modelización cuando son obtenidas las soluciones escritas de los estudiantes. Tratar con soluciones escritas es diferente que con explicaciones verbales durante la implementación de una tarea de modelización en el aula. Inclusive los estudiantes deberían aprender a escribir las representaciones externas de su pensamiento matemático claramente en todas las tareas matemáticas, en especial las relativas a la modelización matemática. Para esto, podemos utilizar el ciclo de modelización, pues ayuda a estructurar el proceso de escritura para los estudiantes, ya que

al principio estudiantes deben escribir su solución con el mayor detalle posible. Una vez que se haya introducido el ciclo de modelización y sea usado mientras trabajan en grupos, los estudiantes pueden practicar la estructuración escrita de sus soluciones utilizando los pasos del ciclo. (Borromeo Ferri, 2018, p. 110)

A su vez, es importante mencionar a los estudiantes que al detallar el proceso de solución, pueden reconocer o revisar sus avances, con el fin de detectar errores y dificultades, que pueden corregirse en el camino (Borromeo Ferri, 2018).

***Evaluación de la modelización mediante pruebas escritas***

Existen diferencias entre un problema de modelización para el aula y un problema de modelización usado en una prueba. Estas radican tanto en su objetivo como en su estructura, por ejemplo, el primer tipo de problema lo utilizamos para desarrollar la competencia de modelización del estudiante, el segundo es usado para probar la comprensión básica de la modelización. También en cuanto a complejidad tienden a variar, pues para una prueba escrita

debemos utilizar problemas menos complejos que los que podemos plantear en el aula. Al trabajar, durante un largo período, las tareas de modelización en el aula los estudiantes aprenden estrategias para resolverlos y como desempeñarse en las etapas del proceso de modelización, lo que produce resultados en las pruebas más confiables y satisfactorios. Además, hacen conciencia en la necesidad de hacer la transición del mundo real a las matemáticas y viceversa. Por lo que, el primer tipo de tarea de modelización es necesaria para formar la base del segundo tipo de tarea (Borromeo Ferri, 2018).

Sin embargo, la evaluación sumativa o el calificar el trabajo de aula y la de una prueba escrita al final de un tema, requieren un conocimiento profesional más elevado del maestro que el utilizado en una prueba escrita estandarizada. Los resultados de una prueba escrita estandarizada podrían servir de indicadores de diagnóstico de la competencia de modelización del estudiante. En conjunto con esto, Borromeo Ferri (2018) sugiere establecer criterios de evaluación con una distribución de puntos para las diferentes etapas del ciclo de modelización y las expectativas que los estudiantes deben cumplir, en la solución de un problema de modelización.

Para finalizar el capítulo, la tabla 5 presenta en qué parte del trabajo de investigación han sido usadas las perspectivas teóricas expuestas anteriormente.

**Tabla 5***Perspectivas teóricas usadas en la tesis*

| <b>Perspectivas teóricas</b>                                                                                     |                                                                                                                                                                                                | <b>Diseño de tareas</b> | <b>Análisis de tareas</b> |           | <b>Diseño de las componentes del conocimiento del profesor sobre modelización.</b> | <b>Diseño de Entrevistas</b> | <b>Análisis de entrevistas</b> |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|---------------------------|-----------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------|-----------|
|                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                |                         | <b>E1</b>                 | <b>E2</b> |                                                                                    |                              | <b>E3</b>                      | <b>E4</b> |
| Referentes teóricos                                                                                              | Perspectiva contextual (Lesh y Doerr, 2003).                                                                                                                                                   | X                       |                           | X         | X                                                                                  | X                            | X                              |           |
| relacionados de modelización.                                                                                    | Perspectiva cognitiva y afectiva (Borromeo Ferri, 2006; 2018).                                                                                                                                 |                         | X                         |           | X                                                                                  | X                            |                                | X         |
| Modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas (CPRP) propuesto por Piñeiro et al. (2019). |                                                                                                                                                                                                |                         |                           |           | X                                                                                  | X                            | X                              | X         |
| Noción s básicas                                                                                                 | Modelo (Rico, 2001).                                                                                                                                                                           |                         |                           |           | X                                                                                  |                              |                                |           |
|                                                                                                                  | Modelo Matemático (Rico, 2001; Erbaş et al., 2014; Lesh y Doerr, 2003; Lehrer y Schauble, 2003; Biembengut y Hein, 2002; Montejo-Gámez et al., 2021; Alsina y Salgado, 2021).                  |                         |                           |           |                                                                                    |                              |                                |           |
|                                                                                                                  | Modelización (Erbaş et al., 2014; Lesh y Doerr, 2003).                                                                                                                                         |                         |                           |           | X                                                                                  |                              |                                |           |
|                                                                                                                  | Clasificación de la modelización como vehículo y contenido (Julie y Mudaly, 2007) o como propósito de la enseñanza de la matemática y como medio para enseñar matemática (Erbaş et al., 2014). |                         |                           |           | X                                                                                  |                              |                                |           |
| Modelo de competencias necesarias en la enseñanza de la modelización (Borromeo Ferri y Blum, 2010; 2014).        |                                                                                                                                                                                                |                         | X                         | X         | X                                                                                  | X                            |                                |           |
| Representaciones matemáticas (Lesh y Doerr, 2003; Castro y Castro, 1997; Goldin, 2002 y Kaput, 1991).            |                                                                                                                                                                                                |                         | X                         |           | X                                                                                  |                              |                                |           |
| Errores y dificultades en el proceso enseñanza-aprendizaje de la modelización (Abrate et al., 2006).             |                                                                                                                                                                                                |                         |                           | X         | X                                                                                  |                              |                                |           |

*Notas: E1=Estudio 1, E2=Estudio 2, E3=Estudio 3 y E4=Estudio 4.*

## 4. METODOLOGÍA

---

En este capítulo presentamos las características del diseño metodológico. La investigación fue dividida en dos fases secuenciales. En la primera fase, realizamos dos estudios (*estudio 1* y *estudio 2*) enfocados en elementos presentes en la resolución de tareas de modelización que dan respuesta a los objetivos específicos OE1.1 y OE1.2. La segunda fase está formada por dos estudios (*estudio 3* y *estudio 4*), que dan respuesta a los objetivos OE2.1, OE2.2 y OE2.3 y cuyo interés fue profundizar en el conocimiento profesional de los maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática, en particular el profesor de primaria en ejercicio. Para cada uno de los estudios presentamos, una descripción de las fuentes de información o participantes, técnica e instrumentos de recolección de información, así como su diseño, construcción y validación, por último, el tipo de información analizada y sus respectivas categorías de análisis. Finalmente, explicamos los criterios de rigor aplicados para garantizar la calidad de la investigación.

## 1. ENFOQUE Y DISEÑO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

Ante la complejidad que implica el llevar la modelización a la vida escolar, debido al conocimiento exigente que el profesor debe poseer (Villa-Ochoa et al., 2021). Además, de la existencia de vacíos y desafíos en la implementación y enseñanza de la modelización que son reportados en la investigación (Ärlebäck y Doerr, 2020), pretendemos con nuestro estudio contribuir a la construcción del conocimiento en este campo. Para esto, en primer lugar queremos caracterizar las estrategias de resolución, representaciones y errores al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria. En segundo lugar, Profundizar en el conocimiento profesional de los maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática de profesores de primaria en ejercicio de Educación General Básica de Costa Rica. Por lo que esta investigación sigue un paradigma naturalista, cuyo interés radica en el estudio de “los significados de las acciones sociales y de la vida social” (Hernández-Sampieri et al., 2014, p. 152).

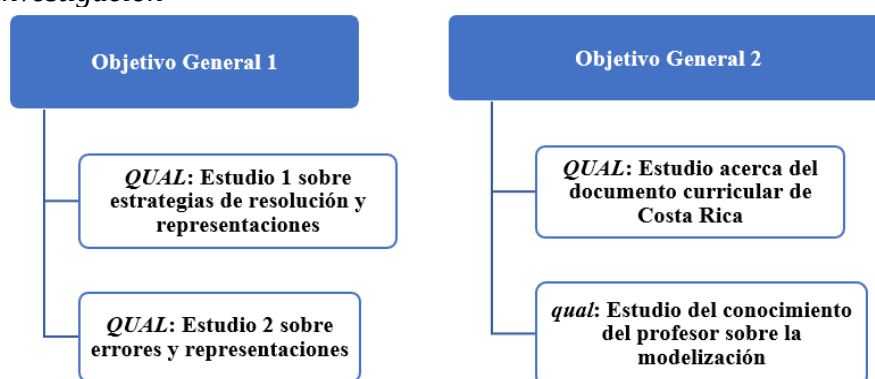
Este trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo, el cual “estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar, los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas” (Ballester, 2004, p. 234). Además, constituye una *construcción social* donde son importantes los significados que los participantes atribuyen. En primer lugar, aspectos del aprendizaje de los estudiantes al trabajar la modelización. En segundo lugar, el conocimiento de los profesores sobre la enseñanza de la modelización. Asimismo, este estudio lo ubicamos dentro del tipo de investigación no exploratoria, con el fin de “observar fenómenos tal como se dan en su contexto natural, para analizarlos” (Hernández-Sampieri et al., 2014, p. 152), pues la idea es realizar un análisis sistemático y empírico, sin intervenir directamente en el fenómeno, observando relaciones de la situación en forma natural. Así, adquiriendo comprensión del fenómeno, por medio de la interpretación de los resultados de la observación de las características de elementos presentes al resolver tareas de modelización por estudiantes y el conocimiento que los profesores manifiestan sobre la enseñanza de la modelización.

Su diseño metodológico es un estudio de casos colectivo (Sandín, 2003; Stake, 1998), pues involucra varios estudios de casos instrumentales con el fin de profundizar y construir el cuerpo teórico: sumar hallazgos, encontrar elementos comunes y diferencias, así como acumular

información (Sandín, 2003; Stake, 1998). El estudio no se focaliza en un caso concreto, sino en un determinado conjunto de casos (Sandín, 2003). En este tipo de trabajo investigamos e informamos “las complejas interacciones dinámicas y en desarrollo de eventos, relaciones humanas y otros factores en una única instancia” (Cohen et al., 2018, p. 376); buscando entender las percepciones personales de los informantes sobre los acontecimientos. Por tanto, realizamos una descripción contextualizada rica de hechos relevantes para el conjunto de casos, la cual es combinada con el análisis de los hechos, a través de una observación profunda de la realidad conduce a una visión completa del fenómeno y su complejidad (Alfaro et al., 2015). Inspirados en las notaciones propuestas por Morse (2003), en la figura 12 mostramos el diseño de esta investigación. En ella, *QUAL* refiere a los dos primeros estudios que dan respuesta al primer objetivo general. El primero de los estudios sobre las estrategias de resolución, y el segundo sobre errores, donde utilizamos como medios de expresión de los procedimientos matemáticos las representaciones. Para dar respuesta al objetivo 2, encontramos el *estudio 3 QUAL*, acerca del documento curricular costarricense y finalmente, el *estudio 4 qual*, que hace referencia a la profundización mediante entrevistas individuales sobre el conocimiento del profesor en la modelización.

**Figura 12**

*Diseño de la investigación*



*Fuente:* Elaboración propia.

*Nota:* Objetivo General 1: Caracterizar las estrategias de resolución, representaciones y errores al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria. Objetivo General 2: Profundizar en el conocimiento profesional de los maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática.

El diseño de este trabajo está compuesto por diferentes fases metodológicas. En la primera fase nos enfocamos en elementos presentes al resolver tareas de modelización, en especial nos interesó estudiar qué características tienen las estrategias de resolución, representaciones y errores al resolver una tarea de modelización matemática, relacionándolo con el estilo de pensamiento de estudiantes. En la segunda fase caracterizamos el conocimiento del profesor sobre la modelización tanto para su enseñanza y aprendizaje. Ambas fases, brindan una serie de datos necesarios y complementarios, que permitió una visión más amplia y profunda del aprendizaje y la enseñanza de la modelización. En la tabla 6 realizamos un esquema general de la metodología de nuestra investigación.

**Tabla 6**

*Esquema general de la metodología*

| Primera Fase |                                                                                             |         |                  | Segunda Fase                                                                   |                                     |                                              |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------|------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------|
| Centrado en  | Objetivo General 1: Sobre el aprendizaje de la modelización                                 |         |                  | Objetivo General 2: Acerca del conocimiento del profesor sobre la modelización |                                     |                                              |
|              | Objetivo específico 1.1 y 1.2                                                               |         |                  | Objetivo específico 2.1                                                        | Objetivos específicos 2.2 y 2.3     |                                              |
|              | Estrategias de resolución                                                                   | Errores | Representaciones | Currículo                                                                      | Conocimiento sobre la modelización  | Conocimiento didáctico sobre la modelización |
| Sujetos      | 24 estudiantes costarricenses de un mismo grupo que recién terminaron su educación primaria |         |                  | Costa Rica                                                                     | 11 profesores de educación primaria | 10 profesores de educación primaria          |
| Instrumentos | Observación                                                                                 |         | Observación      | Entrevistas                                                                    |                                     |                                              |
|              | Tareas                                                                                      |         | Tareas           |                                                                                |                                     |                                              |
|              | Entrevistas                                                                                 |         | Entrevistas      |                                                                                |                                     |                                              |
| Análisis     | Análisis de contenido                                                                       |         |                  |                                                                                |                                     |                                              |

## **2. CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DE LA FASE 1**

Esta primera fase da respuesta al primer objetivo general: caracterizar las estrategias de resolución, representaciones y errores al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria. Para esto realizamos dos estudios empíricos, concretamente el primero está centrado en las estrategias de resolución y el segundo, en los errores, acompañándolos de las

representaciones como medio de comunicación de la información en los procesos de modelización.

Para el logro del primer objetivo general, planteamos dos objetivos específicos. En cuanto, al primer objetivo específico identificamos y describimos las estrategias de resolución y representaciones al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes han finalizado recientemente educación primaria. Debido a la relevancia del uso de estrategias y representaciones adecuadas para expresar las ideas matemáticas al resolver una tarea de modelización (Lesh y Doerr, 2003), y debido a la limitada investigación centrada en el tema, consideramos necesario realizar una investigación que atienda a ambos elementos (Ärlebäck y Doerr, 2020; Orey y Rosa, 2018). Por ello, desarrollamos y aplicamos un primer estudio empírico (*estudio 1*) en el que planteamos la pregunta de investigación: ¿cuáles son las estrategias y representaciones que utilizan los estudiantes al resolver una tarea de modelización según su estilo de pensamiento? Por otro lado, pretendimos con el segundo objetivo específico identificar y describir los errores y representaciones al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes han finalizado recientemente educación primaria. Para ello, realizamos un segundo estudio empírico (*estudio 2*) que nos permitió contestar la pregunta: ¿cuáles son los errores y representaciones que utilizan los estudiantes al resolver una tarea de modelización según su estilo de pensamiento?

## **2.1 PARTICIPANTES**

En este estudio participó una clase de 24 estudiantes de la provincia de San José en Costa Rica. Elegimos estudiantes que recién hubieran completado el I y II ciclo de educación general básica correspondiente a educación primaria. Por lo que, según el currículo oficial, a lo largo de su formación, los estudiantes han de haber sido instruidos en ambientes de modelización.

## **2.2 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN**

Esta parte constituye un proceso de gran relevancia para cualquier investigación, pues si los datos recogidos son de buena calidad, se obtiene una comprensión ideal del fenómeno investigado. Por ello, describimos las técnicas de recolección de información utilizadas en este

estudio:

### ***Observación participante***

Es una técnica de recolección de datos interactiva, en la cual el observador es “un investigador externo, pero participa en una dinámica conjunta con las personas observadas, las cuales pueden ser invitadas a participar en el proceso de observación, como... en la observación por parte de un educador en un aula” (Ballester, 2004, p. 374). En otras palabras, el investigador se involucra en las acciones desarrolladas por los participantes, donde “son estudiados en el propio contexto natural en el que se desarrolla su conducta” (Ballester, 2004, p. 37). En nuestro estudio la investigadora aplicó la observación durante la implementación de las tareas de modelización, siendo el papel del investigador activo y participativo. Con esta técnica se obtuvo evidencias sobre las estrategias de resolución, representaciones y errores generados por los estudiantes al resolver las tareas de modelización matemática, pero en su trabajo habitual de clases.

### ***Entrevistas***

La segunda técnica de recolección de la información que utilizamos es la entrevista en profundidad. Según Rodríguez et al. (1999) el investigador lo que persigue con este procedimiento es “acercarse a las ideas, creencias y supuestos mantenidos por otros” (p. 168). Es decir, proporciona información detallada relacionada sobre las experiencias y los puntos de vista de los participantes de un tema en particular. Llevamos a cabo las entrevistas, con el fin de profundizar en las respuestas escritas, contrastar los datos y comprender respuestas ambiguas. En otras palabras, conocer más acerca de los procesos realizados que se evidenciaban en las estrategias de resolución, las representaciones y los errores de los estudiantes al resolver las situaciones problema presentes en las tareas de modelización matemática. Las entrevistas fueron realizadas en forma individual a algunos de los estudiantes de los grupos participantes. Para ello, se seleccionó de forma aleatoria a un estudiante de cada grupo. La selección de las preguntas fue realizada teniendo en consideración los resultados de las producciones de los estudiantes y observaciones al resolver las tareas de modelización y correspondieron a ítems de carácter abierto (Cohen et al., 2018). Además, realizamos preguntas espontáneas, vinculadas al relato del estudiante entrevistado, dirigidas a confirmar o refutar la información antes obtenida con las otras técnicas.

## 2.3 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Parte relevante de todo proceso investigativo es la recolección de información pertinente que cumpla con el objetivo del estudio. En nuestro caso, utilizamos dos tareas de modelización como instrumentos de recolección de información. Dichas tareas nos permitieron obtener información importante sobre como los resolutores crean, refinan o adaptan sus ideas matemáticas y procedimientos, presentes en las estrategias de resolución y que son expresados por medio de distintos tipos de representaciones según el estilo de pensamiento de los estudiantes (Doerr y English, 2003). Además, entre sus características destacamos que debe ser una tarea compleja (Maaß, 2007a), lo que conlleva una serie de errores y dificultades por parte de los estudiantes que son objeto de interés en nuestro estudio.

### Tareas de modelización

Para el primer estudio (*estudio 1*), utilizamos como instrumento de recolección de información una tarea de modelización matemática “Cocinando con mi mamá” (Figura 13).

**Figura 13**

*Tarea 1 de modelización “Cocinando con mi mamá” y sus principios de construcción*



Fuente: Elaboración propia.

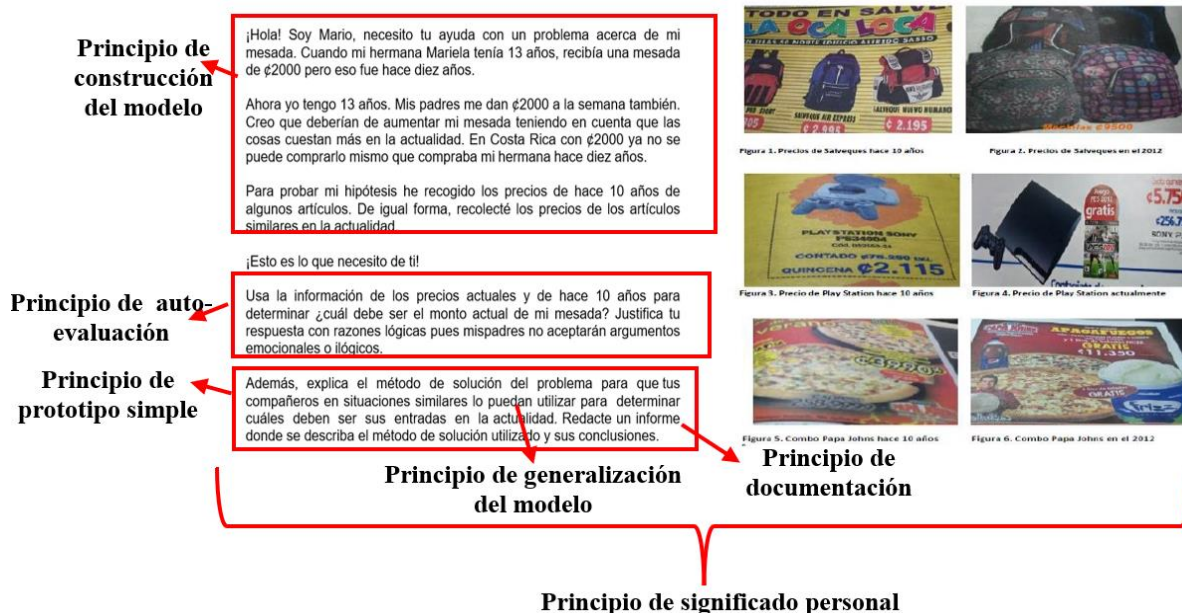
Trata sobre la realización de una receta de cocina, donde idealmente esperamos que los estudiantes obtengan el incremento de las cantidades de los ingredientes dados, cuya única solución correcta es 5,5 tazas de leche y 110 panecillos. Esta tarea fue validada en un proceso de

investigación previo (Porras, 2013). Además, fue construida según los lineamientos del currículo de Costa Rica y siguiendo los principios propuestos por Lesh et al. (2003) para las tareas de modelización —significado personal, construcción del modelo, autoevaluación, documentación, prototipo simple y generalización del modelo. Es decir, la actividad posee un contexto familiar del estudiante, pero el método de resolución es desconocido para este. En la figura 13 mostramos los principios de construcción de tareas de modelización en la tarea propuesta.

Para el segundo estudio (*estudio 2*), utilizamos una segunda tarea construida bajo los mismos principios (Lesh et al., 2003). Dicha actividad la hemos titulado “Calculando mi mesada” (ver figura 14) y consiste en determinar el aumento que debe realizarse a la mesada de Mario, la cual tiene un monto de dinero que no ha cambiado desde hace diez años. Para resolver esta actividad, brindamos una tabla de artículos de precios de hace diez años y su precio homólogo en la actualidad. Esperamos idealmente que el estudiante obtenga como respuesta correcta que el aumento de la mesada debe ser aproximadamente 3 veces más que la cantidad de ₡2000, es decir ₡6000.

**Figura 14**

*Tarea 2 de modelización “Calculando mi mesada” y sus principios de construcción*



Fuente: Elaboración propia.

La segunda tarea de modelización “Calculando mi mesada” fue validada en un proceso de investigación previo (Porras y Fonseca, 2015). Para su construcción, usamos lo dispuesto en

currículo de Costa Rica y los principios para la construcción de tareas de modelización de Lesh et al. (2003). Dichos principios se cumplen forma análoga a la tarea 1 (ver figura 13). En la tarea utilizamos un contexto familiar, dado que usan productos que son de la cotidianidad de los estudiantes. En la tarea es establecido ningún método para resolver la tarea.

### ***Procedimiento de recolección de la información***

La tarea (Figura 13) la implementamos durante dos sesiones de 40 minutos cada una. La llevamos a cabo en el horario habitual de la asignatura de matemáticas. Los 24 participantes fueron divididos en grupos de 2 a 3 estudiantes, esta configuración fue realizada por los mismos estudiantes como es habitual en su trabajo de aula, obteniendo 9 grupos en total. Luego, solicitamos la escritura de todas las respuestas y soluciones en un informe detallado. Algunos, realizaron borradores de los procesos en los cuadernos, los cuales también fueron solicitados. La investigadora ejerció el papel de guía en la aplicación de la tarea, pues la finalidad principal fue que los estudiantes resolvieran las actividades de forma autónoma. El profesor oficial de la clase proporcionó datos de los sujetos del estudio y ayudó en la aplicación de la tarea.

## **2.4 ANÁLISIS**

Las producciones de los estudiantes fueron analizadas mediante la técnica del análisis de contenido (Cohen et al., 2018) y que fue llevado a cabo en dos momentos. El primer momento consistió en la categorización de los datos realizada por la autora, en donde analizamos las rutas de modelización generadas por los estudiantes, buscando la identificación de las estrategias según el estilo de pensamiento del resolutor: analítico, visual e integrado, utilizando las categorías propuestas por Borromeo Ferri (2018). Para categorizar una estrategia correspondiente al pensamiento analítico, tomamos en cuenta aspectos relacionados al uso de representaciones simbólico-numéricas, a través de los símbolos numéricos, los símbolos de las operaciones y flechas, entre otros —ver figura 15(a). En el caso del pensamiento visual, representaciones pictóricas, dibujos, entre otros —ver figura 15(b). Ambos tipos de estrategias fueron acompañadas con representaciones verbales escritas mostradas en frases o explicaciones.

Posteriormente analizamos las representaciones utilizadas en las estrategias, usando las categorías de sistemas de representación: simbólico-numérico, tabular, icónica-gráfica, y verbal-

escrita, propuestas por Castro y Castro (1997), Goldin (2002) y Kaput (1991) presentadas en el marco teórico. Por ejemplo, en la figura 15(a), observamos una estrategia que fue categorizada como de pensamiento analítico, por el uso representación del tipo simbólico-numérico, donde mostramos el uso del sistema de numeración arábigo, símbolos de operaciones como la división, multiplicación y la igualdad, entre otros. Para la figura 15(b), fue categorizada como una estrategia de pensamiento visual, dado que usa el sistema de representación icónica-gráfica al dibujar cajas para representar las tazas de leche (en Costa Rica es tradicional vender la leche líquida en cajas) y circunferencias que representan las tasas de harina.

### Figura 15

*Ejemplos de categorización de estrategias y representaciones*

(a) Estrategia de pensamiento analítico



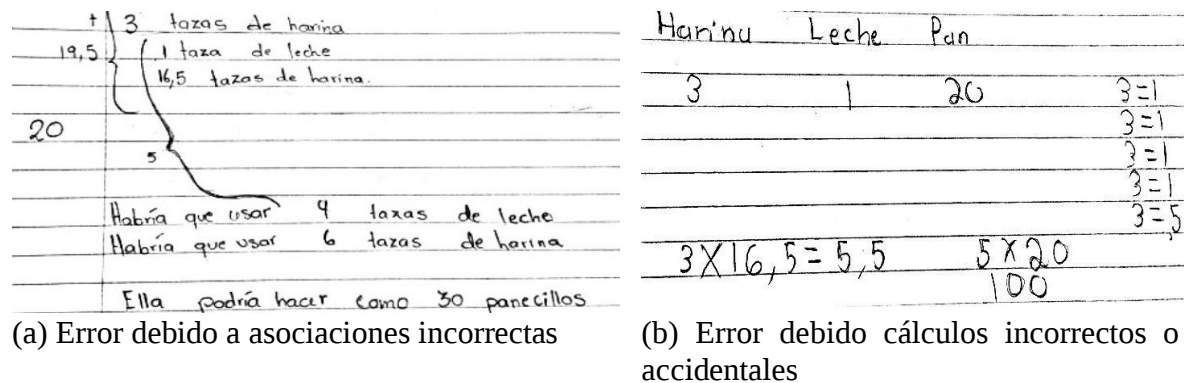
(b) Estrategia de pensamiento visual

*Fuente:* Elaboración propia.

El análisis de contenido (Cohen et al., 2018; Fraenkel et al., 2011) realizado a la segunda tarea siguió las ideas de Lesh y Doerr (2003) para los errores específicos de las etapas del ciclo de modelización. Para este caso estudiamos cada una de las rutas de modelización generadas por los grupos participantes al resolver cada una de las tareas. Además, utilizamos la categorización de Abrate et al. (2006) para el análisis de errores matemáticos. En ella encontramos clasificaciones de errores debidos a (a) uso del lenguaje matemático (C1), (b) dificultades para obtener información espacial (C2), (c) inferencias o asociaciones incorrectas (C3), (d) la recuperación de un esquema previo (C4), (e) cálculos incorrectos o accidentales (C5), (f) deficiencias en la construcción de conocimientos previos (C6) y (g) la ausencia de conocimientos previos (C8). Para categorizar un error matemático según esta clasificación, tomamos en cuenta aspectos relacionados al uso de representaciones y las aclaraciones realizadas por los estudiantes en las entrevistas. Algunos ejemplos de las categorizaciones de error según Abrate et al. (2006), son las siguientes:

**Figura 16**

*Ejemplos de categorización de errores*



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 16(a), exponemos un ejemplo de la categoría de errores debidos a asociaciones incorrectas al brindar respuestas con aumentos incorrectos que debían ser el monto actual de la mesada. En el caso de la figura 16(b), es un ejemplo de la categoría de errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales, ya que los estudiantes en su procedimiento utilizan la correspondencia simbólica  $3=1$ , es decir tres tazas de harina que le corresponde a una taza de leche. La solución es incorrecta debido a que falta introducir una correspondencia más. Otro error cometido fue introducir la correspondencia  $3 = 0,5$  donde en la parte derecha de la correspondencia dividen a la mitad la unidad, pero la parte izquierda se muestra invariante.

Para el análisis de las entrevistas del *estudio 2*, efectuamos un análisis de contenido (Cohen et al., 2018) de la información suministrada en las respuestas al preguntar sobre los procedimientos escritos donde se vislumbraban errores incurridos durante la resolución de la segunda tarea. Para esto, la teoría de Lesh y Doerr (2003) en cuanto a los errores específicos de las etapas del ciclo de modelización y utilizamos la misma categorización de errores matemáticos de Abrate et al. (2006).

En el segundo momento y para validar lo hecho, la directora de esta tesis volvió a analizar los datos. Después, la doctoranda y la directora discutieron los resultados hasta no haber discrepancias.

### **3. CARACTERÍSTICAS METODOLÓGICAS DE LA FASE 2**

La fase 2 fue guiada por el segundo objetivo general: Profundizar en el conocimiento profesional de los maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática. En primer lugar, realizamos un estudio documental (*estudio 3*), donde analizamos el currículo de Costa Rica con la finalidad de establecer las componentes del conocimiento del profesor referentes al proceso de modelización, así como a su enseñanza y aprendizaje. Luego, efectuamos un estudio empírico (*estudio 4*) con el propósito de identificar qué componentes del conocimiento sobre modelización matemática ponen en juego los maestros de primaria al enseñar la modelización y además, de caracterizar el conocimiento de los maestros de primaria en ejercicio sobre el proceso de modelización matemática.

#### **3.1 ANÁLISIS DEL CURRÍCULO DE COSTA RICA**

Dado que el currículo contiene conocimientos necesarios para el profesor sobre la enseñanza de la modelización, realizamos un análisis de contenido al documento curricular de matemática correspondiente a la educación general básica y educación diversificada de Costa Rica (MEP, 2012).

##### ***Fuentes documentales de información***

El documento curricular corresponde al programa oficial y obligatorio que rige a la educación matemática costarricense (MEP, 2012). Debido a que en él se detallan elementos importantes para la labor del profesor, siendo guía para planificar, seleccionar e implementar tareas adecuadas para el aprendizaje de los estudiantes (Rojas, 2014). Además, contiene las diferentes normas, recomendaciones y contenidos de importancia para el ejercicio de la labor docente (MEP, 2012). En relación con la estructura, el documento curricular costarricense incluye los capítulos: introducción, fundamentos, ejes, gestión y planeamiento pedagógicos, metodología, evaluación, programas de estudio para cada ciclo educativo y otros elementos. En la introducción se brinda una presentación general del documento, en los fundamentos se realiza una conceptualización de los términos más relevantes que adopta el currículo, en los ejes se describe los ejes disciplinares del currículo, el capítulo gestión y planeamiento pedagógicos plantea indicaciones generales que debe seguir el profesor al gestionar sus lecciones y su planeamiento. Asimismo, en la metodología se brindan directrices generales sobre organización de las

lecciones, áreas y los procesos, las actitudes y creencias en la matemática y el uso de recursos como tecnología y la historia de las matemáticas. En la evaluación se brindan indicaciones y principios generales a ser tomados en cuenta al realizar la evaluación en el aula. El siguiente capítulo, los planes de estudio, se distribuyen los conocimientos y habilidades de todos los ciclos educativos. Por último, en el último capítulo *otros elementos*, se incluyen diversos apartados como un resumen de la distribución de los temas matemáticos por nivel, glosario, bibliografía general, entre otros.

### ***Análisis de los datos***

Las categorías de análisis utilizadas (Tabla 7) son una adaptación de las componentes del modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas propuesto por Piñeiro et al. (2019) y sirvieron para delimitar aspectos relativos a la modelización presentes en el currículo.

**Tabla 7**

*Categorías de análisis del currículo de Costa Rica*

| <b>Dimensión</b>                     | <b>Categorías</b>                              | <b>Subcategorías</b>                                                                                                                                     |
|--------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Conocimiento del contenido           | C1. Noción del problema de modelización        | C1.1 Tarea de modelización<br>C1.2 Consideración del resolutor<br>C1.3 Tipos de tareas existentes de modelización                                        |
|                                      | C2. Resolución de problemas                    | C2.1 Etapas de resolución y su caracterización<br>C2.2 Estrategias<br>C2.3 Metacognición<br>C2.4 Factores no cognitivos                                  |
|                                      | C3. Disposición                                | C3.1 Aceptación del desafío de resolver el problema                                                                                                      |
| Conocimiento didáctico del contenido | C4. Estudiante como resolutor                  | C4.1 Características de resolutores exitosos<br>C4.2 Dificultades y errores                                                                              |
|                                      | C5. Resolución de problemas como tarea escolar | C5.1 Selección de problemas<br>C5.2 Modelos de resolución y estrategias<br>C5.3 Invención de problemas                                                   |
|                                      | C6. Factores no cognitivos                     | C6.1 Influencia mutua de creencias y concepciones                                                                                                        |
|                                      | C7. Gestión de Enseñanza                       | C7.1 Enfoques o vías de acceso<br>C7.2 Gestión del discurso<br>C7.3 Gestión de los atascos<br>C7.4 Gestión de evaluación<br>C7.5 Gestión de los recursos |
|                                      |                                                |                                                                                                                                                          |

Las categorías utilizadas permitieron la clasificación “de los elementos de significación constitutivos del mensaje” (Bardin, 1996, p. 28). En los apartados de introducción general, fundamentos, ejes, gestión y planeamiento pedagógico, metodología y evaluación del currículo de Costa Rica, dividiendo la información en unidades análisis temáticas (Krippendorff, 1990). Es decir, fragmentos de texto que brindan explicaciones o interpretaciones sobre las definiciones de los distintos conocimientos del profesor sobre la modelización matemática siguiendo el modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019). Así, logramos inferencias válidas acerca del conocimiento del profesor sobre la modelización y permitiendo establecer las componentes necesarias para el *estudio 4* de esta investigación. Un ejemplo es el extracto: “existen problemas que por su naturaleza no admiten una solución en poco tiempo y otros que tal vez no tengan” (MEP, 2012, p. 29). La frase anterior la consideramos una unidad de análisis temática relacionada con la categoría *Noción del problema de modelización* del conocimiento sobre la modelización. Específicamente de la subcategoría *Tipos de tareas existentes de modelización*. Debido a que la frase del currículo evidencia un significado sobre la cantidad de soluciones plausibles del problema de modelización, es decir si un problema puede tener o no solución o que posee múltiples soluciones. En otras palabras, el profesor puede usar en el aula de matemática problema abiertos o cerrados al trabajar la modelización en el aula.

### **3.2 CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE MODELIZACIÓN**

En el aprendizaje de la modelización, un factor importante es la enseñanza de calidad (Borromeo Ferri, 2018). Para lograr este objetivo el profesor debe poseer conocimientos propios sobre la modelización, que permitirán desarrollar con éxito su tarea docente (Piñeiro et al., 2019). En este apartado presentamos las características metodológicas sobre el *estudio 4*, cuyo fin fue el identificar qué componentes del conocimiento sobre modelización matemática ponen en juego los maestros de primaria al enseñar la modelización y luego, caracterizar el conocimiento de los maestros de primaria en ejercicio sobre el proceso de modelización matemática.

#### ***Participantes***

Para realizar el análisis del conocimiento del profesor sobre modelización matemática utilizamos una muestra no probabilística, cuya selección fue orientada por las características de

la investigación y que no pretende la generalización de los resultados. Específicamente, la estrategia de muestreo fue mixta combinando dos tipos de muestra, en nuestro caso fue una muestra autoseleccionada, pero a la vez por conveniencia (Hernández-Sampieri et al., 2014). Autoseleccionada debido a que invitamos a participar en la investigación a 11 maestros de instituciones educativas de la provincia de San José en Costa Rica, escogiéndolos por recomendaciones de sus directores en cuanto a sus características y compromiso profesional. Por conveniencia, pues fue seleccionada por la viabilidad de realización de la entrevista. Específicamente, participaron 11 profesores que al menos durante un ciclo escolar habían impartido la materia de matemática. 10 de ellos trabajaban como docentes de educación pública y 1 para educación privada. Además, 3 de los participantes impartían clases en el primer ciclo y 8 de los profesores en segundo ciclo de educación primaria. En la tabla 8, en la categoría “Población que atiende” clasificamos a los profesores en dos tipos. En primer lugar, los identificados con el término “Primaria” que se refiere a los profesores que solo trabajaban con niños. En segundo lugar, corresponde a los profesores clasificados con el término “Primaria /Educación de Adultos” que son los profesores, que trabajan con niños pero que también laboraban con estudiantes adultos que no tenían su educación primaria. Destacamos, que es muy importante estudiar este último tipo de profesor, debido a que es capaz de impactar con su enseñanza a poblaciones con características muy distintas (niños y adultos). En relación con su experiencia laboral, observamos que 8 de los profesores poseían 10 o más años de experiencia docente en educación primaria. Algunos de ellos, específicamente 6 profesores poseían una formación adicional distinta a la de enseñanza.

En Costa Rica, el *grupo o categoría profesional* de los maestros en educación primaria se usa en forma estandarizada el código PT que significa *Profesor de Enseñanza Primaria Titulado*, cuyas clasificaciones son PT-6, PT-5, PT-4, PT-3, PT-2 y PT-1. La clasificación PT6 es el grado académico máximo obtenido por un profesor con una Licenciatura más otro grado académico. En la tabla 8, en la columna *Formación continua*, utilizamos Sí cuando el maestro ha recibido cursos de formación continua recientemente sobre modelización matemática, resolución de problemas, contextualización activa o el currículo de matemática. En el caso de la respuesta negativa, significa que el profesor recientemente no ha recibido dicha formación. Luego, la categoría *Localidad* los profesores que optaron por la primera opción Sí corresponde a profesores que viven o vivieron en el barrio donde se ubica la institución educativa, o han

trabajado por muchos años en ella. Lo que permite al profesor identificar más fácilmente el contexto cotidiano derivado de la localidad y que es presentado en las tareas de modelización propuestas en el estudio. En el caso de la segunda opción de respuesta, corresponde a los profesores que no viven o es la primera vez que trabajan en la institución educativa, o su experiencia como docente es muy poca en dicha institución, lo que no ha permitido el identificar tan fácilmente elementos del contexto de la localidad.

Un ejemplo de cómo debemos leer la tabla 8 es la primera fila donde el sujeto P1, es el primer profesor entrevistado, un profesor varón y de edad 36 años. Su categoría profesional es PT6, es decir Profesor de Enseñanza Primaria Titulado con Licenciatura más otro grado. Con una experiencia como profesor de 5 o menos años. Trabaja en la educación primaria pública atendiendo a niños de edades entre los 6 y 12 años. El nivel educativo que imparte actualmente es sexto año. No ha recibido ninguna formación continua sobre cursos de modelización o aspectos relacionados. Por último, no vive o tiene muy poco tiempo de servicio en dicha institución educativa.

**Tabla 8***Características de los participantes*

| <b>Sujeto</b> | <b>Sexo</b> | <b>Edad</b> | <b>Grado</b> | <b>Años de Experiencia</b> | <b>Modalidad de trabajo</b> | <b>Población que atiende</b>   | <b>Nivel que imparte clases</b> | <b>Formación continua</b> | <b>Localidad</b> |
|---------------|-------------|-------------|--------------|----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------|------------------|
| P1            | M           | 36          | PT6          | 5 o menos                  | Público                     | Primaria                       | 6°                              | No                        | No               |
| P2            | F           | 34          | PT6          | Entre 5 y 10               | Público                     | Primaria                       | 5°                              | No                        | Sí               |
| P3            | M           | 55          | PT6          | 10 o más                   | Público                     | Primaria                       | 4°                              | Sí                        | Sí               |
| P4            | F           | 55          | PT6          | 10 o más                   | Público                     | Primaria /Educación de Adultos | 4°                              | No                        | Sí               |
| P5            | F           | 61          | PT4          | 10 o más                   | Privado                     | Primaria                       | 2°, 3°                          | No                        | No               |
| P6            | M           | 52          | PT6          | 10 o más                   | Público                     | Primaria                       | 4°                              | No                        | No               |
| P7            | F           | 47          | PT5          | 10 o más                   | Público                     | Primaria                       | 6°                              | Sí                        | Sí               |
| P8            | F           | 45          | PT6          | 10 o más                   | Público                     | Primaria                       | 1°                              | Sí                        | Sí               |
| P9            | F           | 32          | PT3          | 5 o menos                  | Público                     | Primaria                       | 5°                              | No                        | Sí               |
| P10           | F           | 45          | PT6          | 10 o más                   | Público                     | Primaria /Educación de Adultos | 4°                              | Sí                        | Sí               |
| P11           | F           | 46          | PT6          | 10 o más                   | Público                     | Primaria                       | 2°                              | No                        | Sí               |

*Fuente:* Elaboración propia.

*Notas:* M=Masculino, F=Femenino. PT3=Profesor de enseñanza de primaria con el grado académico de bachillerato, PT4= de enseñanza de primaria con el grado académico de bachillerato + otra especialidad, PT5= bachilleres en Ciencias de la Educación, con especialidad en Primaria, PT-6= Licenciatura más otro grado académico.

### ***Técnica de recolección de información***

Como herramienta de recolección de información, fue aplicada la entrevista semiestructurada. Según Rabionet (2011) la entrevista es “una herramienta flexible y poderosa para capturar las voces y las formas en que las personas dan sentido a sus experiencias” (p. 563). Es decir, proporciona información detallada sobre las experiencias y los puntos de vista de los participantes de un tema en particular, en esta investigación concretamente acerca del conocimiento del profesor sobre la modelización matemática. Específicamente, para recoger la información aplicamos dos entrevistas a los participantes, cada una con su propio instrumento.

Las cuestiones de ambas entrevistas fueron construidas a partir de las componentes evolucionadas del conocimiento del profesor sobre la modelización matemática, es decir originalmente fueron establecidas realizando una adaptación hacia la modelización de las componentes del modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019). Pero se le realizaron modificaciones producto de los resultados del análisis del documento curricular de Costa Rica (*estudio 3*) y además, fueron contrastadas con la teoría de la modelización presente en la literatura consultada. Dichas componentes las presentamos en la tabla 9. La primera entrevista fue relativa al conocimiento del contenido y la segunda acerca del conocimiento didáctico sobre la modelización matemática que poseen los maestros de primaria.

**Tabla 9**

#### ***Componentes del conocimiento del profesor sobre la modelización matemática***

| <b>Dimensión</b>                     | <b>Categorías</b>                                       | <b>Subcategorías</b>                                                                                                                                          |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Conocimiento del contenido           | C1. Noción del problema de modelización                 | C1.1 Nociones básicas de modelización<br>C1.2 Problema de modelización<br>C1.3 Consideración del resolutor<br>C1.4 Tipos de tareas existentes de modelización |
|                                      | C2. Resolución de problemas                             | C2.1 Ciclos de modelización y sus características<br>C2.2 Estrategias<br>C2.3 Metacognición<br>C2.4 Factores no cognitivos                                    |
|                                      | C3. Disposición                                         | C3.1 Disposición al resolver un problema de modelización                                                                                                      |
| Conocimiento didáctico del contenido | C4. Estudiante como resolutor de tareas de modelización | C4.1 Características de resolutores tareas de modelización                                                                                                    |
|                                      |                                                         | C4.2 Dificultades y errores de los estudiantes en                                                                                                             |

**Tabla 9***Componentes del conocimiento del profesor sobre la modelización matemática*

| <b>Dimensión</b> | <b>Categorías</b>                                              | <b>Subcategorías</b>                                                                                                                                                    |
|------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                  |                                                                | procesos de modelización                                                                                                                                                |
|                  | C5. Resolución de problemas de modelización como tarea escolar | C5.1 Selección de tareas de modelización<br>C5.2 Modelos teóricos de modelización<br>C5.3 Invención de problemas de modelización                                        |
|                  | C6. Factores no cognitivos                                     | C6.1 Influencia mutua de creencias y concepciones                                                                                                                       |
|                  | C7. Gestión de Enseñanza                                       | C7.1 Enfoques de enseñanza de la modelización<br>C7.2 Gestión del discurso<br>C7.3 Gestión de los atascos<br>C7.4 Gestión de evaluación<br>C7.5 Gestión de los recursos |

Para diseñar y construir los dos instrumentos seguimos el siguiente proceso seguido en estudios similares (Piñeiro, 2019): a) análisis de las perspectivas teóricas sobre modelización matemática para su enseñanza y aprendizaje, b) estudio de los lineamientos del currículo de educación matemática a nivel de primaria en Costa Rica, específicamente los relacionados con la modelización (Porras y Castro-Rodríguez, 2021), c) revisión de la literatura de experiencias investigativas sobre modelización con profesores, d) construcción de una versión piloto de los instrumentos 1 y 2, e) revisión por expertos y pruebas piloto de los instrumentos 1 y 2 y f) construcción de la versión final de cada una de los instrumentos de entrevista.

**Diseño y construcción de los instrumentos**

El diseño de la primera entrevista fue concretado utilizando una estructura de dos partes. En la primera parte, establecimos preguntas acerca de información general de los participantes y en la segunda parte, indagamos en la dimensión relativa al conocimiento sobre la modelización matemática, logrando así las preguntas para el primer instrumento con el fin de explorar este tipo de conocimiento. La estructura del instrumento la resumimos en la tabla 10, donde presentamos las categorías según su numeración de preguntas en la entrevista 1.

**Tabla 10***Categorías según su numeración de preguntas de entrevista 1*

| <b>Categorías</b>                                        | <b>Subcategorías</b>                                     | <b>N° de preguntas</b> |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------|
| K1. Noción del problema de modelización                  | K1.1 Nociones básicas de modelización                    | De 1 a la 4            |
|                                                          | K1.2 Problema de modelización                            | De 5 a la 9            |
|                                                          | K1.3 Consideración del resolutor                         | 10                     |
|                                                          | K1.4 Tipos de tareas existentes de modelización          | 11 y 12                |
| K2. Resolución de un problema de modelización matemática | K2.1 Ciclos de modelización y sus características        | 13 y 14                |
|                                                          | K2.2 Estrategias                                         | De 15 a la 18          |
|                                                          | K2.3 Metacognición                                       | 19                     |
|                                                          | K2.4 Factores no cognitivos                              | 20                     |
| K3. Disposición                                          | K3.1 Disposición al resolver un problema de modelización | De 21 a la 23          |

El instrumento 2 corresponde a las preguntas para efectuar la segunda entrevista. Las diseñamos utilizando una dimensión relativa al conocimiento didáctico sobre la modelización matemática. Para explorar este tipo de conocimiento, el instrumento lo construimos en una única parte donde elaboramos 32 preguntas agrupadas en categorías y subcategorías para obtener la información de los maestros de primaria en ejercicio. La estructura del instrumento 2 la presentamos en la tabla 11, donde presentamos las categorías según su numeración de preguntas de entrevista 2.

**Tabla 11***Categorías para la construcción de las preguntas de la entrevista 2*

| <b>Categorías</b>                                       | <b>Subcategorías</b>                                                       | <b>N° de preguntas</b> |
|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| K4. Estudiante como resolutor de tareas de modelización | K4.1 Características de resolutores de tareas de modelización              | 1 y 2                  |
|                                                         | K4.2 Dificultades y errores de los estudiantes en procesos de modelización | De 3 a la 5            |
| K5. Problemas de modelización como tarea escolar        | K5.1 Selección de tareas de modelización                                   | De 6 a la 10           |
|                                                         | K5.2 Modelos teóricos de modelización                                      | De 11 a la 13          |
|                                                         | K5.3 Invención de problemas de modelización                                | 14 y 15                |
| K6. Factores no cognitivos                              | K6.1 Influencia mutua de creencias y concepciones                          | De 16 a la 18          |
| K7. Gestión de Enseñanza                                | K7.1 Enfoques de enseñanza de la modelización                              | 19                     |
|                                                         | K7.2 Gestión del discurso                                                  | De 20 a la 26          |
|                                                         | K7.3 Gestión de los atascos                                                | 27 y 28                |
|                                                         | K7.4 Gestión de evaluación                                                 | De 29 a la 31          |
|                                                         | K7.5 Gestión de los recursos                                               | 32                     |

En ambas entrevistas cada una de las preguntas fueron de tipo abierto. Escogimos este tipo de pregunta abierta para que los profesores tuvieran la libertad de expresar sus respuestas sin ningún límite, ni presión. No obstante, la entrevistadora fue “gradualmente ejerciendo un mayor control sobre lo que se está hablando, dirigiendo progresivamente la conversación hacia aquellos temas que le ayudarán a descubrir lo que pensaban los participantes” (Rodríguez et al., 1999, p. 168).

### **Validación de los instrumentos de las entrevistas**

Con el fin de garantizar la obtención de información pertinente a través de la aplicación de las entrevistas, procedimos a hacer un proceso de validación del contenido de los instrumentos en tres momentos (Cohen et al., 2018). En el primer momento, construimos las preguntas de ambas entrevistas, garantizando “una representación adecuada de elementos que operacionalizan el concepto” (Dikko, 2016, p. 521), es decir de los conocimientos relacionados con la modelización en educación primaria. En el segundo momento, realizamos un pilotaje de las preguntas de ambas entrevistas. Valoramos aspectos como la claridad y comprensión de las preguntas; además del tiempo de aplicación del instrumento. El pilotaje fue realizado con una profesora de educación primaria y con características similares a los participantes del estudio (cantidad de años de experiencia, lugar de trabajo, entre otros). En una sesión de 1,5 horas, aplicamos las dos partes que conforman instrumento 1 (Parte 1: Información general y Parte 2: Información del estudio).

Del pilotaje, obtuvimos mejoras que fueron realizadas al instrumento de la entrevista 1. Específicamente, en la primera parte, en la información general cambiamos el término género por sexo, agregamos una pregunta adicional sobre la formación adicional del maestro y en el caso de la última pregunta, quitamos la palabra “nuevo” dado que el currículo de Costa Rica ya tiene más de 10 años de aplicarse, es decir ya no se puede catalogar como un documento nuevo. Con respecto a las preguntas de la segunda parte de la entrevista, las que corresponde propiamente a la información de la investigación, mejoramos las pautas del investigador y la redacción de las preguntas. Agregamos preguntas a la entrevista 1 para conducir más adecuadamente la conversación de los temas de interés. Por ejemplo, originalmente establecimos como primera pregunta: ¿Qué diferencias cree que existen entre un modelo y un modelo matemático?, pero en el pilotaje la maestra mostró confusión sobre lo preguntado. Por ello, agregamos dos preguntas antes para lograr dirigir progresivamente la conversación (Rodríguez et

al., 1999). Concretamente las preguntas fueron: ¿Qué es para usted un modelo? y ¿Qué entiendes por modelo matemático?

Con respecto, a la pregunta 14 de la entrevista 1, brindamos al participante varias tarjetas de las etapas del ciclo de modelización para que las ordenara y se le preguntó: ¿En qué orden seguirías las etapas de las tarjetas al resolver un problema de modelización? A la maestra le presentamos dos ciclos de modelización, como primera opción el ciclo de modelización propuesto por Lesh y Doerr (2003) y como segunda opción, el ciclo de modelización de Borromeo Ferri (2006). Para cada uno de los ciclos detallamos las etapas que los conforman. Le pedimos a la maestra escoger cuál de los ciclos de modelización era más adecuado, de mayor facilidad y comprensión para los profesores de primaria. La maestra escogió el modelo propuesto por Lesh y Doerr (2003), por tener menos etapas, ser más comprensible y con menos información que leer. Por ello, en el instrumento final de la entrevista 1 utilizamos solo el ciclo de modelización elegido por la maestra de la prueba piloto. Además, para mejorar la comprensión de las etapas, acompañamos con una imagen o representación gráfica que ilustrara la explicación de cada una de ellas. Esta corrección fue la única que también incorporamos para el instrumento 2. Con respecto al tiempo de aplicación de la entrevista 1 en la prueba piloto fue 1 hora y 30 minutos aproximadamente.

Con respecto, la segunda entrevista, la prueba piloto la aplicamos en una segunda sesión con la misma maestra que participó en el pilotaje del instrumento 1. De esta parte, solo obtuvimos como recomendación el mejorar la redacción de algunas preguntas, que fueron corregidas al mismo tiempo con las observaciones del siguiente momento. Para el tiempo de aplicación del segundo instrumento necesitamos de 2 horas aproximadamente. Asimismo, aclaramos que el pilotaje fue realizado antes de la evaluación de expertos (tercer momento) debido a que no teníamos certeza de cuál ciclo de modelización era más comprensible para los profesores de primaria.

El tercer momento, corresponde a una evaluación de los instrumentos por juicio de expertos. Según Piñeiro (2019) el aplicar “el juicio de expertos hace posible una evaluación cualitativa de los enunciados, contrastando su validez en relación con el grado de adecuación de cada una de las categorías de conocimiento sobre la resolución de problemas” (p. 147), en particular si hablamos de la modelización. Elegimos dos expertos para dicha evaluación, ambos fueron

elegidos siguiendo los criterios de selección citados por Piñeiro (2019) del trabajo Skjong y Wenworht (2000) como: a) amplia experiencia investigativa, publicaciones y proyectos, b) disponibilidad y motivación para participar en el proceso y c) imparcialidad en el proceso de investigación. Dado que no podíamos contar con la presencia física de ambos investigadores, en el caso del primer experto los instrumentos con las preguntas fueron enviados por medio de correo electrónico, junto con las componentes del conocimiento del profesor sobre la modelización y aspectos a evaluar. Los instrumentos fueron evaluados por medio de la función “revisor” de los documentos de Word. Para el segundo experto, por su disponibilidad logramos realizar la evaluación de las preguntas de ambas entrevistas por medio de una sesión virtual en la plataforma TEAMS.

En ambos casos, los expertos evaluaron aspectos como: a) redacción, comprensión de la pregunta según la información que queríamos conseguir con respecto la componente del conocimiento del profesor, b) si los ítems eran adecuados para evaluar el conocimiento del profesor acerca de la modelización y c) si el enunciado de la pregunta concordaba con la dimensión, la componente y el conocimiento en cuestión. Algunas de las mejoras del instrumento 1, las presentamos en:

- Mejorar la redacción de las preguntas. Por ejemplo, en la pregunta 8 el experto sugirió cambiar el término “complejidad” por “dificultad”, obteniendo: ¿Qué dificultad para el resolutor debería tener un problema de modelización?
- En la pregunta 14, quitamos la numeración de las etapas del proceso de modelización, pues brindaban una pista al participante del orden correcto de las etapas.

Sobre, la evaluación del instrumento 2, obtuvimos más recomendaciones relevantes como:

- Enumerar todas las listas presentes en los instrumentos, por ejemplo, la lista de errores y dificultades de los estudiantes al resolver problemas de modelización, la lista de características para construir o seleccionar un problema de modelización, entre otros.
- Agregar el enunciado de algunas categorías y subcategorías de las componentes del conocimiento del profesor que el instrumento 2 no poseía.
- Agregar en algunas preguntas opciones de respuesta positiva o negativa con sus respectivas pautas a seguir. Por ejemplo, en la pregunta 4 del instrumento 2, originalmente fue establecida como: Al trabajar la modelización, ¿considera relevante conocer y comprender

las limitaciones de los estudiantes para la toma de decisiones en el aula? Agregamos las opciones de respuesta:

**Respuesta negativa:** ¿Por qué?

**Respuesta positiva:** ¿Cómo consideraría esas dificultades?

- Cambiamos cuatro preguntas específicas de cada una de las etapas de modelización, por una sola interrogante que englobaba todas las etapas, concretamente cambió las preguntas de la 11 a la 14 por la 12: ¿Es necesario y relevante el realizar cada una de las etapas presentadas en el proceso de modelización? ¿Por qué? Amplíe su respuesta.

Así los tres momentos del proceso de validación del contenido de los instrumentos permitieron modificar y mejorar las preguntas de la entrevista, con la finalidad de obtener uno más adecuado para garantizar la información pertinente y confiable necesaria para esta investigación.

### **Preguntas de la entrevista 1: Conocimiento sobre la modelización matemática**

Dado que los ítems del instrumento 1 fueron presentados por medio de las categorías acerca del conocimiento sobre la modelización (ver Tabla 10). Las preguntas finales de la entrevista 1 usadas para recoger los datos se encuentran en los anexos de esta tesis. Algunos ejemplos de preguntas que corresponden a la categoría 1 “Noción del problema de modelización”, son:

**Tabla 12**

*Ejemplos de preguntas de categoría 1: Noción del problema de modelización*

| <b>Subcategoría</b>                             | <b>Ejemplo de Pregunta</b>                                                                                                    |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K1.1 Nociones básicas de modelización           | 3. ¿Qué diferencias cree que existen entre un modelo y un modelo matemático?                                                  |
| K1.2 Problema de modelización                   | 7. ¿Qué aspectos diferencian un problema de modelización con respecto a cualquier problema?                                   |
| K1.3 Consideración del resolutor                | 11. ¿Qué papel juega el resolutor en que una actividad / tarea matemática se convierta en un problema de modelización?        |
| K1.4 Tipos de tareas existentes de modelización | 12. ¿Conoce distintos tipos de problemas de modelización matemática? ¿Cuáles son? ¿En qué consisten? Justifique su respuesta. |

En la categoría 2 “Resolución de un problema de modelización”, ejemplos de ítems son:

**Tabla 13***Ejemplos de preguntas de categoría 2: Resolución de un problema de modelización*

| Subcategoría                                      | Ejemplo de Pregunta                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K2.1 Ciclos de modelización y sus características | 14. Con respecto al ciclo de modelización, ¿conoce las etapas que se utilizan al resolver un problema de modelización?<br><b>Respuesta negativa:</b> No se amplía la respuesta, se continúa con la siguiente pregunta.<br><b>Respuesta positiva:</b> Ampliar la respuesta y realizar la pregunta adicional ¿Qué conoces sobre las etapas del proceso de modelización? |
| K2.2 Estrategias                                  | 16. ¿Qué estrategias se utilizan cuando se resuelve un problema de modelización?                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| K2.3 Metacognición                                | 20. ¿Qué procesos metacognitivos pueden intervenir al resolver un problema de modelización? Amplie su respuesta.                                                                                                                                                                                                                                                      |
| K2.4 Factores no cognitivos                       | 21. ¿Qué rol juega las emociones, actitudes y creencias al resolver un problema de modelización? Explique su respuesta.                                                                                                                                                                                                                                               |

En el caso de la categoría 3 “Disposición”, específicamente realizamos preguntas como:

**Tabla 14***Ejemplos de preguntas de categoría 3: Disposición*

| Subcategoría                                             | Ejemplo de pregunta                                                                              |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K3.1 Disposición al resolver un problema de modelización | 24. ¿Qué rol juega la motivación y la disposición en la resolución de problemas de modelización? |

**Preguntas de la entrevista 2: Conocimiento didáctico sobre la modelización matemática**

Al igual que las preguntas de la entrevista 1, las de la entrevista 2 fueron ordenadas por medio de las categorías del conocimiento didáctico sobre la modelización matemática (ver Tabla 11). Los ítems de la entrevista 2 se encuentran en los anexos. Algunos ejemplos de preguntas que corresponden a la categoría 4 “Estudiante como resolutor de tareas de modelización”, son:

**Tabla 15***Ejemplos de preguntas de categoría 4: Estudiante como resolutor de tareas de modelización*

| Subcategoría                                                               | Ejemplo de Pregunta                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K4.1 Características de resolutores de tareas de modelización              | 1. ¿Qué características del resolutor debe considerar un profesor al seleccionar o diseñar un problema de modelización?                     |
| K4.2 Dificultades y errores de los estudiantes en procesos de modelización | 3. Al trabajar la modelización ¿Cuáles pueden ser algunas dificultades y errores que puede tener un estudiante cuando resuelva un problema? |

En la categoría 5 “Problemas de modelización como tarea escolar” realizamos preguntas como:

**Tabla 16**

*Ejemplos de preguntas de categoría 5: Problemas de modelización como tarea escolar*

| Subcategoría                             | Ejemplo de Pregunta                                                                                                                                                                |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K5.1 Selección de tareas de modelización | 7. ¿Cuáles criterios de selección usaría para seleccionar un problema de modelización? ¿De dónde los obtienen? ¿Por qué cree que son buenos criterios? Explique sus respuestas.    |
| K5.2 Modelos teóricos de modelización    | 11. ¿Conoce algún modelo teórico de modelización matemática? ¿Si es así en qué consiste? Justifique su respuesta.                                                                  |
| K5.3 Invención de problemas              | 14. ¿Has inventado, creado o modificado una actividad de modelización?<br><b>Respuesta negativa:</b> ¿Por qué?<br><b>Respuesta positiva:</b> Describe cómo has hecho este proceso. |

Para la categoría 6 “Factores no cognitivos”, algunos ejemplos de cuestiones son:

**Tabla 17**

*Ejemplos de preguntas de categoría 6: Factores no cognitivos*

| Subcategoría                                      | Ejemplo de pregunta                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K6.1 Influencia mutua de creencias y concepciones | 17. ¿Qué papel juegan las concepciones y las creencias del maestro en el aprendizaje de los estudiantes al resolver problemas de modelización? |

En la categoría 7 “Gestión de Enseñanza” algunos ejemplos de preguntas son:

**Tabla 18**

*Ejemplos de preguntas de categoría 7: Gestión de Enseñanza*

| Subcategoría                                  | Ejemplo de Pregunta                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| K7.1 Enfoques de enseñanza de la modelización | 19. ¿Conoce algún enfoque o método para fomentar las acciones de enseñanza en una clase de modelización? Explique su respuesta.               |
| K7.2 Gestión del discurso                     | 24. En una clase de modelización matemática ¿Qué acciones de participación activa debe fomentar el maestro para socializar los resultados?    |
| K7.3 Gestión de los atascos                   | 28. ¿Cuándo y cómo el maestro debe intervenir para ayudar al estudiante cuando este atascado en la resolución de un problema de modelización? |
| K7.4 Gestión de evaluación                    | 31. ¿Qué criterios utilizaría para evaluar las competencias de modelización de un estudiante?                                                 |
| K7.5 Gestión de los recursos                  | 32. ¿Qué materiales o recursos puede usar el maestro al trabajar la modelización matemática?                                                  |

### ***Trabajo de campo***

Informamos los pormenores de la investigación y solicitamos permiso para realizar grabaciones de las entrevistas, respetando los principios éticos de este proceso. Tras la recogida y su validación, la información obtenida fue tratada de forma confidencial y sin ningún perjuicio para el maestro en su labor, sino más bien en procura de mejorar su ejercicio profesional. Algunas de las entrevistas fueron aplicadas de forma presencial y otras de forma virtual según la disposición y preferencia del profesor. En total, se aplicó la entrevista 1 a once profesores y la entrevista 2 a diez. A uno de los profesores no se logró aplicar la entrevista 2 por razones personales de este participante.

### ***Análisis de los datos***

Realizamos un análisis de contenido (Cohen et al., 2018) de los datos obtenidos de las entrevistas aplicadas, acerca del conocimiento profesional sobre la modelización matemática. De esa manera, se propusieron dos constructos: (1) el conocimiento del profesor sobre la modelización y (2) conocimiento didáctico sobre la modelización. Las categorías de análisis correspondieron a las componentes del conocimiento del profesor sobre la modelización evolucionadas, es decir las que se adaptaron del modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019), los resultados del análisis del documento curricular de Costa Rica (*estudio 3*) y la teoría de modelización presente en la literatura. Las categorías las presentamos en la tabla 9.

Concretamente, utilizamos como unidades análisis temáticas (Krippendorff, 1990) los fragmentos de texto que brindaban explicaciones o interpretaciones de los distintos conocimientos del profesor sobre la modelización matemática. Un ejemplo es el extracto de texto de la respuesta de uno de los profesores participantes “enfocarse en lo real, lo que vive la época de ahora, de ellos, digamos en lo que vive...también ver las condiciones de cada uno”. La frase del profesor 5 (P5) hace referencia a la categoría *Estudiante como resolutor de tareas de modelización*, particularmente de la subcategoría *características de resolutores de tareas de modelización*. Debido a que una de las características del resolutor que los profesores tomarían en cuenta para seleccionar o diseñar un problema de modelización es el contexto real del estudiante.

## **4. RIGOR DE LA INVESTIGACIÓN**

En nuestra indagación cualitativa procuramos cumplir con el rigor de toda investigación para certificar su calidad. Para esto, apelamos a los criterios de dependencia, credibilidad y transferencia (Hernández-Sampieri et al., 2014). En primer lugar, la dependencia establecida por los autores como confiabilidad cualitativa la garantizamos por medio de estrategias como:

- Detallamos la perspectiva teórica que sigue el estudio y el diseño utilizado.
- Explicamos los criterios de selección de los participantes y el proceso de diseño de los instrumentos de recolección de información.
- Describimos el papel realizado por los investigadores en el campo y los métodos de codificación y el desarrollo de las categorías de análisis de la información.
- Especificamos el contexto de recolección de los datos.

En segundo lugar, en cuanto al criterio de credibilidad, es decir, para asegurarnos de capturar el significado profundo y completo del fenómeno, llevamos a cabo las siguientes acciones:

- Para el primer objetivo general, realizamos una triangulación metodológica (Hernández-Sampieri et al., 2014; Stake, 1998), recolectando información con distintas técnicas y en distintos periodos de tiempo. Usamos la observación participante en la resolución y aplicación de tareas, la revisión de las estrategias de resolución, representaciones y errores presentes en los procedimientos al resolver las tareas de modelización. Por último, contrastando la información obtenida de las entrevistas realizadas a los estudiantes.
- En el segundo objetivo general, usamos la triangulación de diversas fuentes de información (Hernández-Sampieri et al., 2014; Stake, 1998): información de la literatura sobre modelización y el conocimiento del profesor, además del currículo de Costa Rica y por último, de las entrevistas de los profesores a cerca del conocimiento sobre la modelización.
- Usamos un diario de campo para registrar descripciones correctas y precisas en forma literal y con términos utilizados por los participantes, garantizando la veracidad de la información. Así, los registros obtenidos por medio de las grabaciones de audio y video se plasmaron en notas, con el fin de conseguir la información precisa y completa del fenómeno en estudio.

- La información fue contrastada y completada con las ideas del marco conceptual. Cada uno de los resultados fueron verificados y comparados con la teoría y con las categorías planteadas, logrando información importante para la interpretación de los resultados.

Sobre el criterio de transferencia, para que cualquier investigador que le interese evaluar la posibilidad de replicar esta investigación en su propio contexto, realizamos una descripción lo más detallada posible sobre el ambiente, los participantes, técnicas, instrumentos, entre otros.

## **5. RESULTADOS SOBRE ELEMENTOS PRESENTES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN**

---

En este apartado mostramos los resultados correspondientes a la fase 1, orientada bajo la consecución del primer objetivo general de esta investigación, particularmente el caracterizar las estrategias de resolución, representaciones y errores al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de los estudiantes que recientemente han terminado su educación primaria. En la metodología, mencionamos que esta fase fue dividida en dos estudios empíricos, por ello presentamos en primer lugar, los resultados del *estudio 1* sobre las estrategias de resolución y representaciones. En segundo lugar, los resultados del *estudio 2* basados en los errores y representaciones en los procesos de modelización.

## **1. RESULTADOS DEL ESTUDIO 1 SOBRE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN Y REPRESENTACIONES EN LA MODELIZACIÓN**

En este apartado mostramos, en primer lugar, los resultados obtenidos sobre las rutas de modelización de estudiantes que han cursado recientemente todos los niveles de educación primaria. Específicamente, sobre la primera tarea de modelización. En segundo lugar, brindamos la misma información, pero relacionada con la segunda tarea de modelización. En tercer lugar, exponemos los resultados de las estrategias y representaciones según el estilo de pensamiento de los estudiantes al resolver la situación propuesta en la tarea 1. De igual manera, en el cuarto lugar, hemos colocado la información del tema anterior afín a la tarea 2. En quinto lugar, presentamos los resultados de los ejemplos que proporcionaron los participantes sobre situaciones similares donde podrían aplicar el mismo razonamiento matemático de la tarea resuelta. Por último, hacemos referencia a la información homóloga sobre la tarea 2.

### **1.1 RUTAS DE MODELIZACIÓN PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LA TAREA 1**

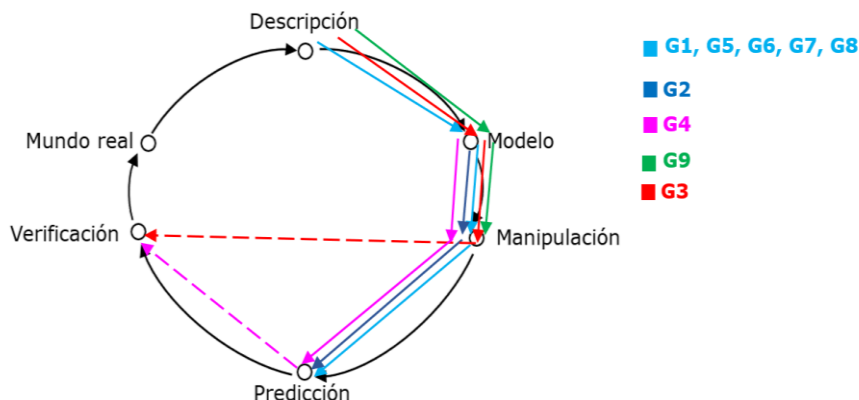
En la primera tarea de modelización (Figura 13) contamos con la participación de 24 estudiantes divididos en 9 grupos. Donde 6 de ellos estuvieron formados por 3 integrantes y 3 grupos por 2 estudiantes cada uno. Cada grupo de estudiantes planteó una respuesta a la tarea 1, por lo que obtuvimos un total de 9 respuestas en las que solo dos (G1 y G9) llegaron a una solución final correcta con distintas estrategias. La figura 17 presenta las distintas rutas de modelización de preferencia según el estilo de pensamiento matemático de los grupos participantes al resolver la tarea 1 propuesta.

En la figura 17 observamos que se obtuvieron 5 rutas distintas de modelización. Donde 5 de los grupos involucrados (G1, G5, G6, G7, G8), coincidieron en una misma ruta, es decir realizaron las mismas etapas del ciclo de modelización, específicamente: Descripción-Modelo-Manipulación-Predicción. El resto de los grupos realizaron rutas distintas variantes de la ruta anterior. Destacamos que en las rutas de modelización de los grupos G9 y G3, la última etapa fue realizada de forma incompleta, por ello aparece en la figura 17 como flechas con línea discontinua. También, observamos que ninguno de los grupos realizó todas las etapas del ciclo

de modelización, ni tampoco realizaron dicho ciclo varias veces, es decir que las soluciones no fueron mejoradas y ni retroalimentadas al recorrer varias veces las etapas del ciclo. En cada una de estas rutas, los participantes plasmaron diversas estrategias expresadas por medio de representaciones.

**Figura 17**

*Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización 1*



*Fuente:* Elaboración propia.

La tabla 19 presenta las estrategias y representaciones presentes en las respuestas de cada grupo. Además, los grupos fueron resaltados según el color de la ruta realizada que se presenta en la figura 17.

**Tabla 19**

*Estrategias y representaciones realizadas por los grupos de estudiantes*

| Estrategias según pensamiento |                    | RSN                        | RT | RIG | RVE                        |
|-------------------------------|--------------------|----------------------------|----|-----|----------------------------|
| Analítico                     | Cálculos numéricos | G1, G5, G6, G7, G3, G4, G9 |    |     | G1, G5, G6, G7, G3, G4, G9 |
|                               | Correspondencias   | G2, G8                     |    |     | G2, G8                     |
|                               | Patrones           | G9                         | G9 |     | G9                         |
| Visual                        | Diagramas          | G1                         |    | G1  | G1                         |

*Nota:* RSN=Representación simbólica-numérica, RT=Representación tabular, RIG=Representación icónica-gráfica, RVE=Representación verbal-escrita. Los  $G_i$  para  $i=1, \dots, 9$  corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

Presentamos los estilos de pensamiento analítico y visual, estilos usados de manera mayoritaria por los participantes. El grupo resaltado (G1) fue el único que utilizó un estilo de pensamiento integrado (mezcla de estilo visual y analítico) en la ruta 1, por ello se ha ubicado en ambas filas. En la ruta 4 (Descripción-Modelo-Manipulación) al resolver la tarea 1, el grupo 9

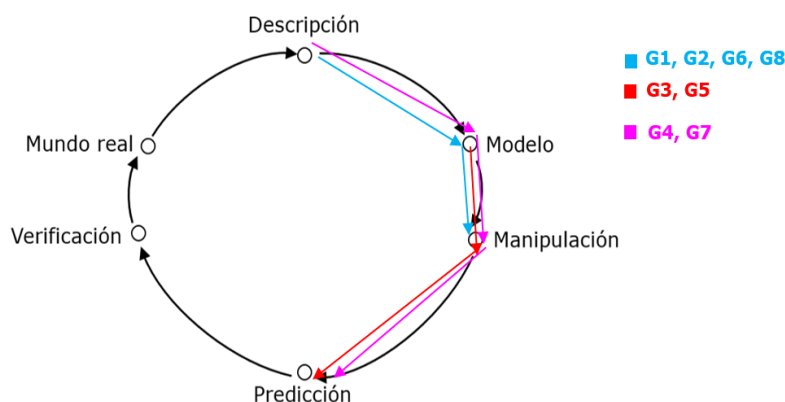
(G9) utilizó dos estrategias. En primer lugar, la estrategia *cálculos numéricos* donde se observó un estilo de pensamiento analítico, dado que utilizó sistemas de representación simbólico-numérico y representación verbal-escrita. En segundo lugar, la estrategia *patrones*, vislumbrando el mismo estilo de pensamiento que en la estrategia anterior, debido a que el grupo usó los mismos sistemas de representación antes mencionados, adicionando el sistema de representación tabular.

## 1.2 RUTAS DE MODELIZACIÓN PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LA TAREA 2

Para la segunda tarea, participaron 22 estudiantes, 2 menos que en la anterior ya que no asistieron a clase el día de la aplicación. Se formaron 6 grupos de 3 integrantes y 2 grupos de 2 estudiantes cada uno, por lo que conseguimos 8 respuestas distintas, todas ellas incorrectas. Las distintas rutas de modelización de preferencia según el estilo de pensamiento matemático de los grupos participantes al resolver la tarea 2 de modelización, las exponemos en la figura 18.

**Figura 18**

*Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización 2*



*Fuente:* Elaboración propia.

Sobre la información de figura 18, contemplamos que hallamos 3 rutas distintas de modelización. Particularmente, 4 grupos coincidieron con misma la ruta al realizar las etapas del ciclo de modelización: Descripción-Modelo-Manipulación. El resto de los grupos realizaron rutas distintas variantes de la ruta anterior. Al igual que la tarea 1 de modelización, los grupos de estudiantes no aplicaron todas las etapas del ciclo de modelización, ni fue aplicado múltiples

veces, ocasionando que las soluciones no fueran retroalimentadas. Los sistemas de representación fueron usados como medios de expresión de las estrategias de resolución al resolver la tarea de modelización. Al resolver la tarea 2, las estrategias y representaciones presentes en las respuestas de cada grupo las exponemos en la tabla 20. Aquí, exhibimos solamente el estilo de pensamiento analítico debido a que fue el único detectado en las respuestas.

**Tabla 20**

*Estrategias y representaciones realizadas por los grupos de estudiantes*

| <b>Estrategias según pensamiento</b> |                    | <b>RSN</b>                        | <b>RT</b> | <b>RIG</b> | <b>RVE</b>                         |
|--------------------------------------|--------------------|-----------------------------------|-----------|------------|------------------------------------|
| Analítico                            | Cálculos numéricos | G1, G2, G6, G8,<br>G3, G5, G4, G7 |           |            | G1, G2, G6, G8,<br>G3, G5, G4, G7, |

*Nota: RSN=Representación simbólica-numérica, RT=Representación tabular, RIG=Representación icónica-gráfica, RVE=Representación verbal-escrita. Los Gi para i=1, ..., 9 corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.*

De la tabla 20, observamos que los 4 de los grupos (G1, G2, G6, G8) que realizaron la ruta 1 al resolver la tarea 2, mostraron un pensamiento analítico al elegir la estrategia *cálculos numéricos* al utilizar sistemas de representación simbólica-numérica y representación verbal-escrita.

### 1.3 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN PRESENTES EN RESPUESTAS DE LA TAREA 1

En este apartado exponemos las estrategias utilizadas por los participantes al resolver la primera tarea de modelización. Obtuvimos tres tipos de estrategias o caminos de resolución, cada una sobre el estilo de pensamiento del resolutor propuesto por Borromeo Ferri (2018).

#### *Estrategias de pensadores analíticos*

En cuanto al pensamiento analítico de los participantes lo visualizamos en tres tipos estrategias: (a) cálculos numéricos, (b) correspondencias matemáticas y (c) patrones.

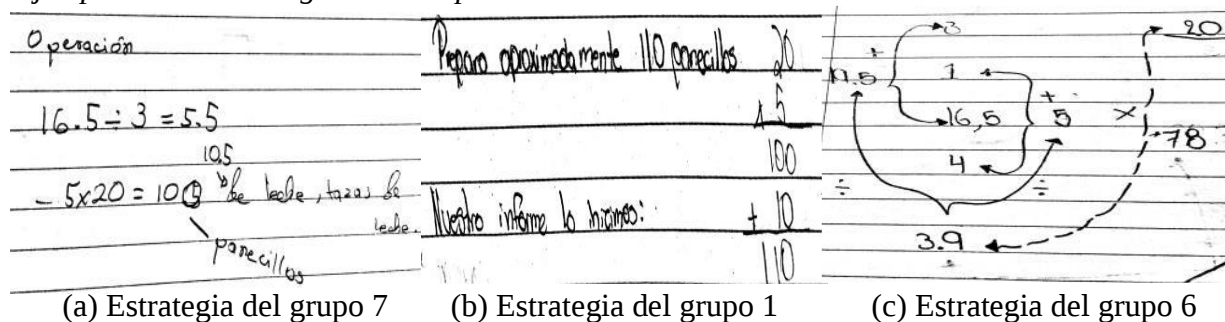
#### **Uso de cálculos numéricos**

El primer tipo de estrategia detectada de los resolutores de estilo de pensamiento analítico fue el uso de operaciones básicas aritméticas a través de cálculos numéricos para expresar procesos. Esta estrategia fue la más usada por los grupos al resolver la tarea, específicamente, estuvo

presente en las respuestas de 7 de los 9 grupos y se presentó al realizar operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, entre otros. La figura 19 muestra ejemplos de respuestas pertenecientes a esta categoría.

**Figura 19**

*Ejemplos de la estrategia uso de operaciones aritméticas básicas.*



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 19(a) evidencia el uso de operaciones de división y multiplicación al buscar la cantidad de veces que crece la cantidad de harina, es decir la constante de proporcionalidad, obteniendo el resultado de 5,5. Los estudiantes del grupo 7 la utilizaron para determinar la cantidad de tazas de leche. En la figura 19(b), el grupo 1 usa la cantidad de tazas de leche correcta (5,5 tazas), realizando el producto de la cantidad de 20 panecillos por la cantidad entera de tazas de leche. A los resultados anteriores le suman la mitad de una taza de leche que hace falta y, la mitad de los panecillos a la cantidad anterior (10 panecillos), obteniendo como solución correcta los 110 panecillos. Por último, en la figura 19(c) es exhibida en la respuesta del grupo 6, donde utiliza la estrategia de cálculos numéricos, pero esta solución observamos que es desordenada, no verifica las condiciones del problema y presenta errores conceptuales. Además, no se aplicó la etapa de validación del proceso de modelización matemática.

En las respuestas correspondientes a esta estrategia de pensamiento analítico realizada por siete de los nueve grupos participantes, observamos una preferencia del uso de representaciones simbólica-numérica, a través de los símbolos numéricos, los símbolos de las operaciones y flechas. En menor medida detectamos representaciones verbales escritas.

El segundo tipo de estrategia detectada en pensadores analíticos presenta una relación binaria entre dos conjuntos de elementos distintos. Esta estrategia la encontramos en 2 de los 9 grupos participantes. Ambas soluciones las presentamos en la figura 20.

### *Ejemplos de la estrategia uso de correspondencias*

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1,5 = 16,5$   
 5 tazas de leche y un cuarto de leche.  
 $20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 7,5 = 107,5$  panecillas.

*Fuente:* Elaboración propia.

Tazas de harina: 3  
Tazas de leche: 1  
Pancillos: 20

$3 = 1$   
 $3 = 1$   
 $3 = 1$   
 $3 = 1$   
 $3 = 5$

$3 \times 16,5 = 5,5$

$5 \times 20$   
100

(b) Estrategia del grupo 8

Un ejemplo del uso de la estrategia *uso de correspondencias* lo mostramos en la figura 20(a). Aquí mostramos la solución del grupo 2, donde observamos la frase “5 tazas de leche y un cuarto de leche”. De dicha frase inferimos que el grupo de estudiantes consideran la correspondencia de que cada 3 tazas de harina equivalen a 1 taza de leche. Sin embargo, obtenemos algunos errores cuando indican que 1,5 es la mitad de las 3 tazas de harina, asumiendo incorrectamente que ese 1,5 corresponde a “un cuarto de leche”. Para encontrar la cantidad de panecillos, el grupo asume la correspondencia de que cada 3 tazas de harina equivalen a 20 panecillos, pero de igual manera se equivocan en la cantidad de panecillos correspondientes a la mitad de las tres tazas de harina.

En la figura 20(b), observamos que el grupo 8 asume la correspondencia incorrecta  $3=1$ , en vez de la equivalencia correcta  $3:1$  que significa que por cada 3 tazas de harina tenemos 1 taza de leche. En este caso los elementos del primer conjunto corresponden a las cantidades de las tazas de harina y los elementos del segundo, serían las cantidades de tazas de leche. La solución de la imagen es incorrecta, debido a que aparece 4 veces la correspondencia “ $3=1$ ”. Al sumar los miembros izquierdos y derechos de las igualdades respectivamente, el grupo obtiene una correspondencia de que 15 tazas de harina es igual a 4,5 tazas de leche. Además, la correspondencia “ $3=0,5$ ” es errónea pues en la parte derecha de la igualdad dividen por el número dos obteniendo la mitad de 1, pero la parte izquierda es mostrada invariante.

Las soluciones de los grupos que presentamos en la figura 20 y que usaron este tipo de estrategia, prefirieron representaciones del tipo simbólico-numérico. Pero a diferencia de las respuestas de la estrategia uso de cálculos numéricos donde el símbolo de igualdad es usado dentro de un cálculo, en la figura 20(b) el mismo símbolo se utiliza para indicar una relación de proporcionalidad, siendo así una notación incorrecta al emplear igualdades para representar la proporcionalidad. Además, detectamos en menor medida el uso del lenguaje verbal-escrito.

### Uso de patrones

El tercer tipo de estrategia detectada fue el uso de patrones, identificada en una serie o comportamiento recurrente entre valores numéricos que se repiten de una manera predecible.

#### **Figura 21**

*Ejemplo de la estrategia de uso de patrones del grupo 9*

|           |     |            |
|-----------|-----|------------|
| 1 Taza    | 20  | panecillo  |
| 2 Tazas   | 40  | panecillos |
| 3 Tazas   | 60  | panecillos |
| 4 Tazas   | 80  | panecillos |
| 5 Tazas   | 100 | panecillos |
| 5,5 Tazas | 110 | panecillos |

*Fuente:* Elaboración propia.

Solo uno de los nueve grupos participantes, específicamente el grupo 9, usó esta estrategia (Figura 21). La respuesta es expresada en una tabla, donde en la primera fila observamos la cantidad inicial de 1 taza de leche, que equivale a 20 panecillos. Luego, los estudiantes utilizaron una iteración o patrón al ir aumentando en una unidad las tazas de leche, y en el caso de la cantidad de los panecillos, duplica la cantidad anterior. Este comportamiento, es mantenido hasta el quinto caso, es decir hasta las 5 tazas de leche donde el patrón utilizado cambia, pues a las tazas de leche le aumentaron 0,5, cuyo resultado final es 5,5 tazas de leche. Lo mismo lo hicieron con la cantidad de panecillos, pues aumentaron la mitad de la cantidad que iba creciendo, es decir 10 panecillos, obteniendo 110 panecillos, con ello lograron una solución correcta de la tarea de modelización.

En la estrategia del grupo 9 (Figura 21), observamos un pensamiento más analítico al escoger una representación tabular utilizando la exploración de patrones y formulación de conjeturas en su solución, sin aplicar mecanismos de memorización o fórmulas para determinar la cantidad de tazas de leche y de panecillos correctas. Además, en la representación tabular es usada una representación simbólica-numérica y verbal-escrita para explicar los procesos matemáticos, por lo que este grupo utilizó tres sistemas de representación distintos.

### ***Estrategias de pensadores visuales***

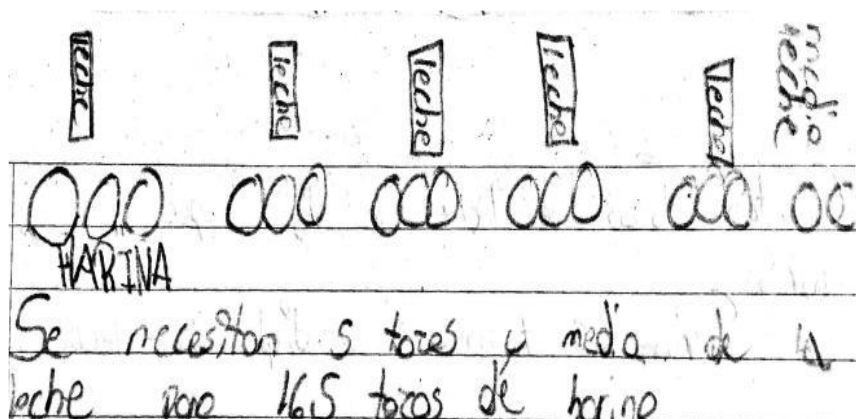
Sobre el pensamiento visual encontramos una única estrategia: uso de diagramas.

#### **Uso de diagramas**

El último tipo de estrategia es la realización de un diagrama, específicamente fue realizada por el grupo 1. Siendo así el único grupo que usó un estilo de pensamiento visual en la resolución del problema propuesto. Dicha solución la presentamos en la figura 22.

***Figura 22***

*Ejemplo de la estrategia de uso de diagramas*



Fuente: Elaboración propia.

En la solución del grupo 1 (Figura 22) están las tazas de harina representadas gráficamente como bolas y las tazas de leche como cajas. Además, el grupo establece la relación gráfica de 1 taza de leche equivale a 3 tazas de harina, deduciendo gráficamente que 5 tazas de leche equivalen a 15 tazas de harina. También, los estudiantes expresaron la mitad de la taza de leche en lenguaje verbal-escrito “media leche”, pero realizaron gráficamente una y media circunferencia para representar esta situación. La respuesta final fue brindada en lenguaje verbal-

escrito “Se necesitan 5 tazas y media de leche para 16,5 tazas de harina”. Por lo que, este grupo utilizó un sistema de representación icónico junto con un sistema numérico y verbal-escrito.

### ***Estrategias de pensadores integrados***

El mismo grupo anterior, el grupo 1, que usó la estrategia de pensamiento visual, utilizó una estrategia de pensamiento analítico para determinar la cantidad de panecillos. Es decir, este grupo usó estrategias de pensamiento integrado, dado que combinó formas pensamiento visual y analítico en su resolución del problema. La estrategia de pensamiento analítico utilizada fue el uso de cálculos numéricos (ver Figura 19(b)), donde emplearon el tipo de representación simbólico-numérico, logrando una solución correcta. Además, en ambas estrategias se presentó en menor medida una representación verbal-escrita para fundamentar sus procesos matemáticos, por lo que este grupo, además de utilizar varias estrategias, utilizó tres sistemas de representación: simbólico-numérico, icónico-gráfico y verbal-escrito.

## **1.4 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN PRESENTES EN RESPUESTAS DE LA TAREA 2**

Con respecto a la segunda tarea de modelización, en las respuestas hallamos una única estrategia de resolución donde observamos el estilo de pensamiento analítico.

### ***Estrategias de pensadores analíticos***

Al igual que la tarea 1, en la segunda tarea obtuvimos como estrategia el *uso de cálculos numéricos*, que tiene que ver con el estilo de pensamiento analítico. Todos los grupos utilizaron esta estrategia.

#### **Uso de cálculos numéricos**

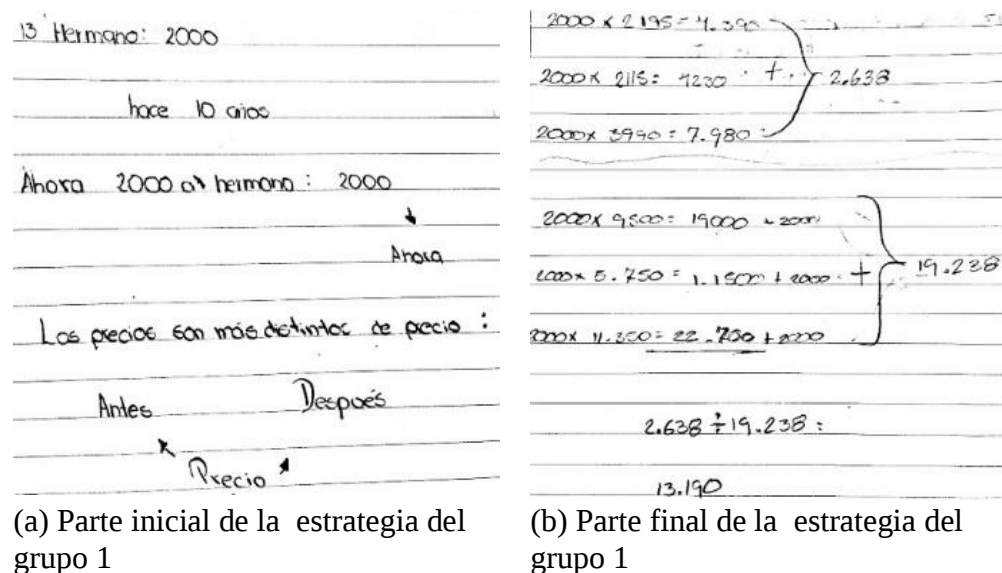
Los resolutores de estilo de pensamiento analítico utilizaron la estrategia, *cálculos numéricos*, de múltiples maneras y expresadas a través de las operaciones básicas aritméticas. Por ejemplo, al sumar los precios actuales con los precios hace diez años de cada artículo. Dicha estrategia fue aplicada de diversas maneras, una de las soluciones la presentamos en la figura 23.

En el primer proceso de la respuesta del grupo 1, realiza un esquema escrito de los datos suministrados en el problema (Figura23(a)). Luego, en la figura23(b) toman cada uno de los precios de hace 10 años y los multiplican por ₡2000. Después realizan la sumatoria de los

montos, según lo indicado en la imagen, pero se equivocan al escribir incorrectamente ¢2,638 y no ¢16600 como debería de ser. Repiten el mismo procedimiento para los precios actuales, sin embargo, en el segundo producto escriben erróneamente la cantidad, ya que con el razonamiento efectuado debían obtener como resultado 11500 y no 1.1500. Luego, al sumar cada uno de los resultados de los productos de las operaciones de los precios actuales, no coincide con el valor proporcionado por el grupo participante es decir ¢19238, por lo que no encontramos sentido a este proceso.

**Figura 23**

*Ejemplo de la estrategia del uso de cálculos numéricos del grupo 1*



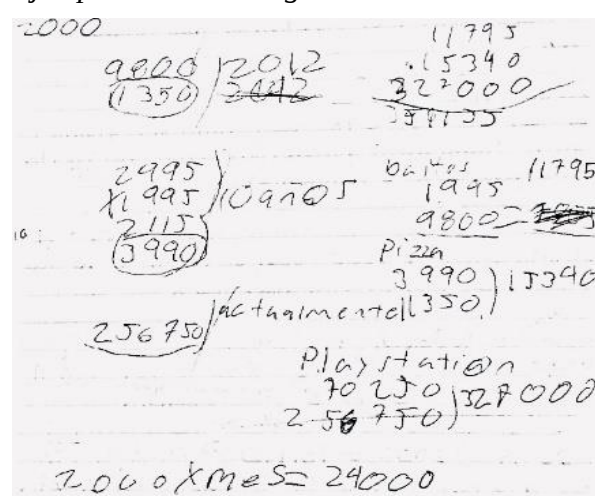
Fuente: Elaboración propia.

Por ello, llevamos a cabo una entrevista, cuyos resultados ratifican todos los procesos anteriores. En ella los estudiantes manifiestan que efectivamente realizan la multiplicación de cada uno de los precios por “2000” y luego su suma, esto debido a que “*al chiquito le daban ¢2000 y ahora los precios son más caros*”, luego suman todos los productos en forma independiente de los “*precios actuales*” con los “*precios pasados*” y realizan la diferencia entre las dos cantidades, es decir  $19238 - 16600$ , obteniendo como resultado ¢2638. Por último, esta cantidad la dividen entre el monto de la mesada, obteniendo como resultado incorrecto de ¢13,190.

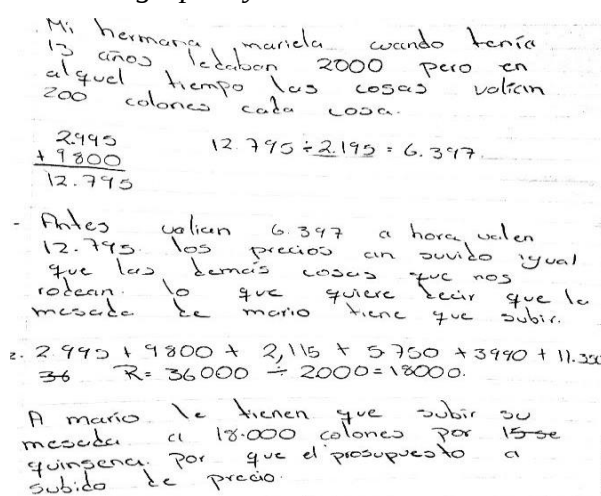
En la figura 24(a) mostramos una solución del grupo 2 donde algunos procedimientos carecen de sentido. Observamos en ella que los estudiantes suman los precios actuales con los precios de hace diez años respectivamente para cada uno de los artículos. Luego, realizan una suma de todos los resultados anteriores (esquina superior derecha), es decir  $11795 + 15340 + 327000 = \text{¢}354135$ . Además, realizaron el cálculo de la mesada lo que podría recibir Mario en un año, es decir en 12 meses obteniendo como resultado  $\text{¢}24000$ . Sin embargo, después de estos procesos, no visualizamos ninguna conclusión por parte del grupo de estudiantes. Estos resultados coinciden con los obtenidos en la entrevista.

**Figura 24**

*Ejemplo de la estrategia del uso de cálculo numéricos del grupo 2 y 7*



(a) Estrategia del grupo 2



(b) Estrategia del grupo 7

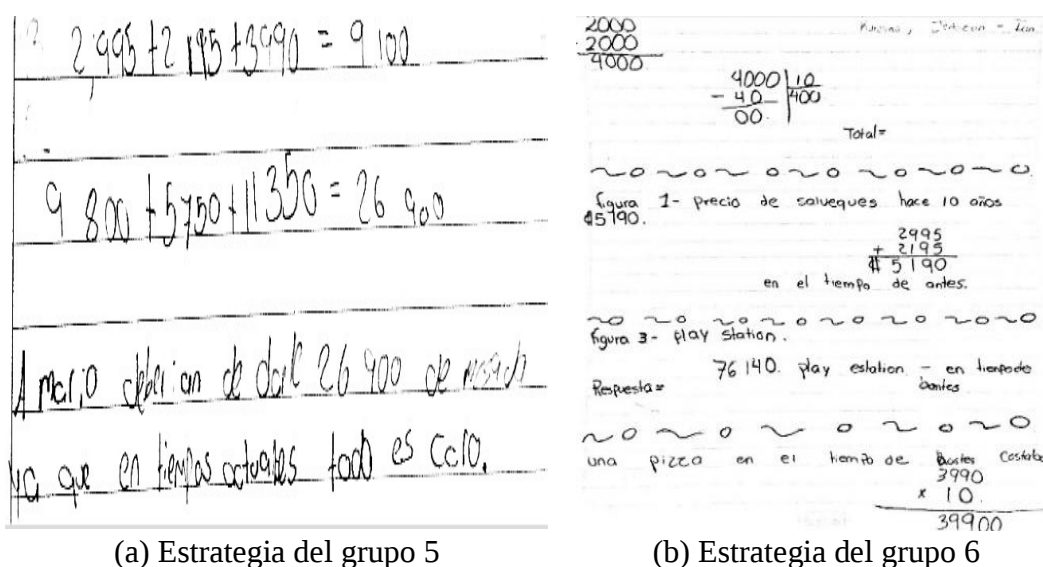
Fuente: Elaboración propia.

En la figura 24(b), en esta solución, evidenciamos que los estudiantes del grupo 7 sumaron el precio de hace 10 años con el precio actual, en el primer procedimiento realizan un caso particular en el primer artículo. Luego, en el segundo procedimiento realizaron la sumatoria de todos los precios de los artículos tanto de hace diez años como los actuales, obteniendo como resultado  $\text{¢}36000$ . Después, el resultado anterior es dividido por  $\text{¢}2000$  (mesada de Mario) obteniendo como resultado final  $\text{¢}18000$ . Concluyen “A Mario le tienen que subir su mesada a 18000 colones por quincena, porque el presupuesto ha subido de precio”. Estos resultados son corroborados con los obtenidos en la entrevista.

Otra de las soluciones del problema la presentamos en la figura 25(a) realizada por el grupo 5, donde usa el sistema de representación numérico, al realizar la sumatoria respectiva de los precios de hace 10 años, es decir  $2995 + 2195 + 3990$  obteniendo como resultado ₡9100. De igual manera, el grupo aplica el mismo razonamiento para los precios actuales, es decir  $9800 + 5750 + 11350$  obteniendo ₡26900. Concluyen que la solución del problema es el monto final de la sumatoria de los precios actuales, lo que es evidenciado en la respuesta “A Mario deberían de darle 26900 de mesada ya que en tiempos actuales todo es caro”, expresada en la solución del grupo.

**Figura 25**

*Ejemplo de la estrategia del uso de cálculo numéricos del grupo 5 y 6*



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 25(b), el grupo 6 primero realiza unas operaciones, pero descartan este camino. Luego, proceden a sumar en el caso de los bolsos dos de los precios de hace 10 años propuestos en la imagen obteniendo como resultado ₡5190. Después, escriben para los otros dos artículos el precio de hace 10 años, en el caso del Playstation tomaron el precio total. Por último, para el caso de la pizza, toman el precio de hace 10 años y lo multiplican por la cantidad de años transcurridos, en este caso 10 años, obteniendo como resultado ₡39900. Sin embargo, no brindan una respuesta final al problema, la solución no trasciende más.

En la figura 26(a), observamos que el grupo 3 multiplica el monto de la mesada por la cantidad de años que han transcurrido, obteniendo como resultado final  $\$20\,000$ . Para los estudiantes este es el monto de la mesada que se le debe brindar en ese momento a Mario. Otra solución, la presentamos en la figura 26(b), los estudiantes del grupo 4 en su solución brindan las cantidades de  $\$180\,500$  para Playstation,  $\$2805$  para el bolso y  $\$7360$  para la Pizza. Además, afirman que el monto de la mesada debe ser  $\$5000$ .

**Figura 26**

*Ejemplo de la estrategia del uso de cálculo numéricos del grupo 3 y 4*

¿Cuál debería ser el monto de Mario?

→ 2000

$\times 10$

20000

→ El monto de Mario debe ser de  $\$20000$ .

→ Justificación.

→ Le deben dar para su mesada a Mario  $\$20000$  ya que todo en la actualidad está muy caro, con  $\$2000$  no alcanza para nada.

→ Solución: Tiene que sumarle lo que en si comprar y quitar todo el dinero de su mesada para comprar lo que le hace falta.

(a) Estrategia del grupo 3

Fuente: Elaboración propia.

180500 Play3

2805 Bolso

7360 Pizza

Cual debería ser el monto actual de mi mesada?

Debe de ser  $\$5000$  Actual

Bolso: en 1 semana

Pizza: en 2 semanas

Play 3: en 60 días

(b) Estrategia del grupo 4

Sin embargo, no justifican como dedujeron estas cantidades, por lo que preguntamos a los estudiantes a cerca de este razonamiento:

Profesora: ¿Cómo obtuvieron los montos que ubican al inicio de la solución?

Estudiante: Lo que hicimos fue restar los números de hace 10 años con los actuales, por eso obtuvimos esos resultados.

Profesora: Y el monto de la mesada de  $\$5000$  ¿Cómo lo obtuvieron?

Estudiante: Lo que hicimos fue darnos una cantidad más alta y ver si efectivamente con ese monto, con el transcurrir de las semana o días, Mario podría comprar cada uno de los artículos actualmente.

Aunque este razonamiento es incorrecto para algunos casos. Por ejemplo, al realizar la diferencia del precio actual menos el precio hace diez años correspondiente al artículo bolso, no coincide con el resultado de  $\$2805$ . Tampoco, el multiplicar  $\$5000$  por 9 semanas

(aproximadamente 60 días), coincide un monto superior a ¢180 500, para que Mario compre el artículo. Por lo que, la solución propuesta no es correcta.

### Figura 27

Ejemplo de la estrategia del uso de cálculo numéricos del grupo 8

$$2000 \times 12 = 24.000$$

$$8.300 - 10 \text{ años}$$

$$\begin{array}{r} 2.105 = 9800 \\ 2.115 = 256.750 \\ + 3.900 = 11.350 \\ \hline 2000 \mid 277.900 \\ - 269.600 \end{array}$$

$$6$$

$$2000.33 = 66000$$

Fuente: Elaboración propia.

En la figura anterior observamos la solución del grupo 8, donde se utiliza el sistema de representación simbólico-numérico, al efectuar la operación de multiplicar el monto de la mesada ¢2000 por 12 meses, obteniendo el monto de ¢24000. Dicha cantidad representa el gasto anual del padre de Mario en la mesada hace 10 años. Este camino no trasciende más, pues no se vuelve a usar en el resto de la solución, por ello preguntamos por este procedimiento durante la entrevista:

Profesora: ¿Por qué realizaron la operación  $2000 \times 12$ ?

Estudiante: El primer dato 2000 por 12 es para ir viendo anualmente lo que le daban a Mario, pero no nos sirvió para el problema.

Otra solución propuesta por el mismo grupo de estudiantes, usando representaciones simbólico-numéricas al calcular los totales de sumatoria de los precios de los tres artículos de hace 10 años y los de la actualidad, obteniendo como resultados ¢8300 y ¢277900 respectivamente. Sin embargo, los estudiantes cometen errores, obteniendo datos incorrectos. Posteriormente buscaron la diferencia entre ambos totales, obteniendo como resultado ¢269600, por lo que los estudiantes querían saber cuánto dinero había aumentado los precios de los

mismos artículos al transcurrir 10 años. En la solución del problema aparece la representación simbólico-numérica de la multiplicación  $2000 \times 33 = \text{€}66000$ , pero se omite información en la solución sobre cómo se obtuvo el factor de 33. En la entrevista realizada, consultamos sobre ello:

Profesora: ¿Qué operaciones realizaron para obtener el factor de 33 que utilizan en el producto de  $2000 \times 33$  que aparece como la última operación de la solución del problema?

Estudiante: Comenzamos a darnos números que al multiplicarlos por esta cantidad (señalando el valor de 8300) nos dieran  $\text{€}277900$ . Probamos varios números, hasta que encontramos la cantidad más cercana.

Profesora: ¿Y esa cantidad cercana fue el número 33?

Estudiante: Sí, así es.

Como vemos en el diálogo anterior, los estudiantes observan que la solución es incorrecta, pero no realizaron una revisión de la solución del problema, es decir, no aplicaron la etapa de validación del proceso de modelización matemática.

Todas las respuestas relativas a la estrategia *cálculo numéricos* efectuadas por los 8 grupos participantes, evidencian el pensamiento analítico al preferir el uso del sistema de representación simbólico-numérico. Esto es visualizado al utilizar símbolos numéricos, de operaciones y flechas. Además, de representaciones verbales escritas en menor proporción.

## 1.5 EJEMPLOS DE SITUACIONES SIMILARES

Al final de la tarea 1 (ver Figura 13), solicitamos a los estudiantes brindar ejemplos de situaciones similares, donde aplicarán el mismo razonamiento matemático de la tarea. Obtuvimos que solo tres grupos, brindaron respuestas a través de representación verbal en lenguaje tradicional, visualizando claramente la utilidad de la matemática en situaciones de contexto laboral y cotidiano. Por ejemplo, el primer grupo (G1) propuso un contexto de construcción de edificios, donde se da el uso de un razonamiento similar, al calcular la cantidad de cemento, piedra, arena, agua, entre otros materiales al realizar edificaciones. El segundo grupo (G2) generó la situación de pintar las paredes de un departamento, donde fue usado el mismo razonamiento para realizar el cálculo de la división de la pintura por cada pared, o también en el pago de los pintores al dividir el dinero. El ejemplo del tercer grupo (G3) fue muy similar a los dos anteriores.

Por otro lado, con respecto a la tarea 2 (ver Figura 14) los grupos utilizaron la representación verbal escrita al expresar ejemplos de situaciones similares donde se podría aplicar el mismo

razonamiento matemático de la actividad. Cuatro de los grupos (G1, G2, G3, G6) brindaron ejemplos relacionados al comparar los precios y realizar de compra de artículos como comida y maquillaje en un supermercado, al comprar gasolina, una empresa cuando compra sus productos. El octavo grupo (G8) mencionó el ejemplo: “Cuando uno viaja a otros países, cuando vamos a comprar a algunas tiendas y en la tarifa de los buses”. El quinto grupo (G5) nos dice “cuando uno va a contar el dinero” debe aplicar un razonamiento similar y el cuarto grupo (G4) relaciona esta situación con la anterior, pero no brinda un ejemplo concreto. Por último, el grupo 7 (G7) omitió su respuesta.

## 2. RESULTADOS DEL ESTUDIO 2 SOBRE ERRORES Y REPRESENTACIONES EN LA MODELIZACIÓN

A continuación, presentamos los principales resultados organizados en dos apartados correspondientes a cada una de las tareas planteadas a los estudiantes.

### 2.1 ERRORES PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LA TAREA 1

En las respuestas, obtuvimos 9 soluciones distintas, de las cuales solo dos fueron correctas, específicamente las del primer y noveno grupo. En la tabla 21 mostramos la información de cómo los grupos de estudiantes hicieron las etapas del proceso de modelización en la tarea 1.

**Tabla 21**

*Implementación de etapas del ciclo de modelización en la tarea 1*

| <b>Etapas de modelización</b> | <b>Evidencias</b>                                                                | <b>Grupos<sup>a</sup></b>  |
|-------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| Descripción                   | Ordena y sistematiza la información en una tabla, esquema, dibujo o por etapas.  | G1, G5, G6, G7, G8, G9     |
|                               | No ordena la información, plantea directamente una operación.                    | G2, G4                     |
|                               | Inventa datos que no proporciona la tarea y ordena la información.               | G3                         |
| Manipulación                  | Obtiene un modelo matemático y lo resuelve.                                      | Todos                      |
| Predicción                    | Analizan e interpretan los resultados. Brindan una respuesta al problema.        | G1, G2, G4, G5, G6, G7, G8 |
|                               | Si resuelve la tarea, pero no interpreta los resultados.                         | G3, G9                     |
| Validación                    | Muestra una revisión preliminar al resolver la tarea.                            | G3, G4                     |
|                               | No muestra una revisión de la respuesta final incorrecta, se encuentran errores. | G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8 |
|                               | Resuelven correctamente la tarea, pero no realizan una revisión de la respuesta. | G1, G9                     |

<sup>a</sup> Los Gi para  $i=1, \dots, 9$  corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

Observamos que 6 de los nueve grupos aplicaron la primera etapa descripción del proceso de modelización, es decir comprendieron, ordenaron y sistematizaron la información propuesta en la tarea. En esta etapa, dos de los grupos, específicamente el segundo y cuarto grupo, realizaron el planteamiento del modelo matemático de forma incorrecta, sin realizar ningún proceso previo más que una lectura de la tarea (ver Figura 28(a)). Además, destacamos la respuesta dada por el grupo 3 en la que añadieron información inventada (cucharadas de sal, canela, etc.) que no proporciona la tarea original (ver Figura 28(b)).

**Figura 28**

*Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática*

leche  
¿Cuántas tazas debería usar?

- 15 tazas de leche  $\rightarrow$  Multiplicamos  $5 \cdot 3$   
15

¿Cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la harina?

- La mamá de Carlos pudo preparar 60 panecillos  $\rightarrow$  Multiplicamos  
 $20 \cdot 3 = \text{nos dio } 60$   
60

(a) Error del grupo 4

Fuente: Elaboración propia.

1. Calculamos que la mamá de Carlos ocupa  $2/1$  taza de leche, se ocupan 3 huevos, un cuarto de sal, 2 cucharas de canela, 2 tazas de azúcar, 1 cucharada de polvo de hornear.

2. 3 tazas de harina

3. 20 panecillos

4. Usamos una hipótesis para cada ingrediente, quiere decir que calculamos lo que ocupábamos para cada ingrediente lo que uno cree.

$2 \times 5 = 10 \div 5 = 2$

$3 \times 5 = 15 - 10 = 5 - 2 = 3$

(b) Error del grupo 3

Para la segunda etapa del proceso de modelización, manipulación, todos los grupos formularon un modelo matemático y lo resolvieron. En esta etapa encontramos distintos errores matemáticos para cada una de las siguientes categorías: errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales y errores debidos a la recuperación de un esquema previo. La tabla 22 resume estos errores en los que los participantes incurrieron en la tarea 1, así como los grupos que realizaron cada uno.

**Tabla 22**

*Tipos de errores matemáticos presentes en las respuestas a la tarea 1*

| Categorías            | Errores en la tarea 1                                   | Grupos <sup>b</sup> |
|-----------------------|---------------------------------------------------------|---------------------|
| C3. Errores debidos a | Realizan operaciones aritméticas sin tener en cuenta el | G6, G4              |

**Tabla 22**

*Tipos de errores matemáticos presentes en las respuestas a la tarea 1*

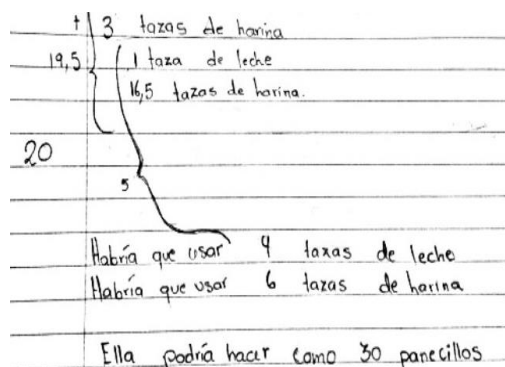
| Categorías                                                 | Errores en la tarea 1                                                                                         | Grupos <sup>b</sup> |
|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| inferencias o asociaciones incorrectas                     | contexto.<br>Invento de datos: 4 tazas de leche.                                                              | G6                  |
| C4. Errores debidos a la recuperación de un esquema previo | Error al confundir la división de números naturales con la de los números decimales 16,5 entre 20.            | G5                  |
| C5. Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales  | Falta introducir una correspondencia $3=1$                                                                    | G8                  |
|                                                            | Error al introducir la correspondencia $3 = 0,5$                                                              | G8                  |
|                                                            | Error al plantear la operación $16,5 \div 3$                                                                  | G8                  |
|                                                            | Falta introducir una correspondencia $3=1$                                                                    | G8                  |
|                                                            | Lectura incorrecta “una taza leche”.                                                                          | G3, G4              |
|                                                            | En la correspondencia $3=1$ , obtienen la mitad de 3, pero en la de 1 escriben “un cuarto” en vez de “mitad”. | G2                  |
|                                                            | Error al establecer la correspondencia $20=1$ , suman 7,5 en vez de 10.                                       | G2                  |
| C8. Información inventada                                  | Introducir datos que no proporciona la tarea en forma consciente.                                             | G3                  |

<sup>b</sup> Los Gi para  $i=1, \dots, 9$  corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

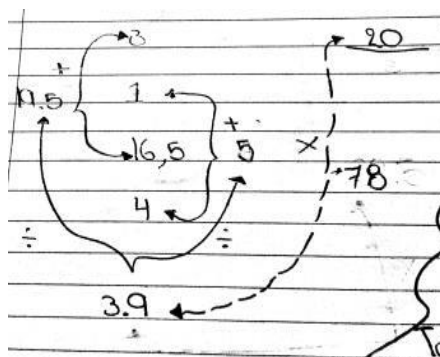
La categoría errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas los observamos en las respuestas del cuarto y el sexto grupo. En la respuesta del sexto grupo (Figura 29(a)) obtuvimos operaciones sin tener en cuenta el significado de los datos. Por ejemplo, los estudiantes sumaron  $3+16,5$  sin considerar que 3 representa la cantidad de tazas de harina y que estas tazas están dentro de las 16,5 tazas de harina.

**Figura 29**

*Ejemplo de error debidos a inferencias o asociaciones incorrectas.*



(a)Error del grupo 6 parte 1



(b)Error de grupo del grupo 6 parte 2

Fuente: Elaboración propia.

Ante este proceso, entrevistamos a uno de los integrantes de este grupo para indagar en la respuesta dada por los estudiantes:

Profesora: ¿Qué operaciones realizaron para obtener el resultado de 19,5 que aparece en la solución del problema?

Estudiante: Sumamos 16,5 tazas de harina con 3 tazas de harina y esto nos dio como resultado 19,5 tazas de harina.

Estudiante: Luego sumamos 1 taza de leche con las 4 tazas de leche que nos dio 5 tazas de leche.

Profesora: ¿Por qué usaron ese procedimiento?

Estudiante: Pues la idea era hacer más harina, hacer más ingredientes para obtener más pan.

En la misma respuesta del diálogo anterior, los estudiantes del sexto grupo consideraron 4 tazas de leche que el enunciado de la tarea no menciona, y a esta cantidad le sumaron 1 taza de leche, obteniendo como resultado final 5 tazas de leche, lo que representa una inferencia incorrecta. El grupo 4, planteó una respuesta similar en donde multiplicaron la cantidad de 20 panecillos por la cantidad de 3 tazas de harina, concluyendo que el resultado final 60 es la cantidad de panecillos correspondiente a 16,5 tazas (ver Figura 28(a)), realizando asociaciones incorrectas.

**Figura 30**

*Ejemplos de errores de la tarea 1 de modelización*

¿Cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la cantidad de ingredientes que uso?

$$\begin{array}{r} 16,5 \overline{) 20} \\ \underline{16} \phantom{0} \\ 0,5 \phantom{0} \\ \underline{0} \phantom{0} \\ 0 \end{array}$$

3 tazas de harina y le agrega 16,5  $3 \times 3 = 9$

¿En cuales otras situaciones similares se podría aplicar el razonamiento de este problema?

Lo que nosotros razonamos fue dividir 16,5 de harina entre los 20 panecillos y el total que nos dio fue

825 panecillos

(a) Error del grupo 5

| Harina                | Leche | Pan           |       |
|-----------------------|-------|---------------|-------|
| 3                     | 1     | 20            | $3=1$ |
|                       |       |               | $3=1$ |
|                       |       |               | $3=1$ |
|                       |       |               | $3=1$ |
|                       |       |               | $3=5$ |
| $3 \times 16,5 = 5,5$ |       | $5 \times 20$ | 100   |

(b) Error del grupo 8

Fuente: Elaboración propia.

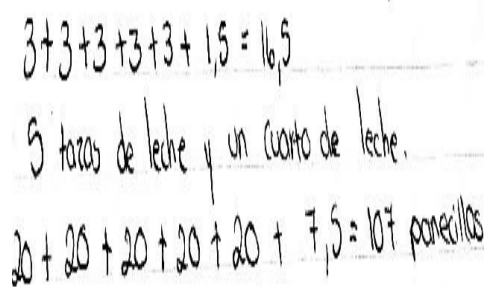
Con respecto a la categoría errores debidos a recuperación de un esquema previo, un ejemplo es la respuesta manifestada por el grupo 5 presente en la figura 30(a). En esta los estudiantes recurrieron al algoritmo de la división de números naturales para efectuar la división de los números 16,5 entre 20, utilizando un esquema de conocimiento antiguo. Durante este proceso,

estos participantes inventaron una técnica para poder resolver la operación, pues manifestaron no saber cómo hacerla. Asimismo, los estudiantes describen el proceso realizado de la siguiente manera: “Lo que nosotros razonamos fue dividir 16,5 de harina entre los 20 panecillos y el total que nos dio fue 825 panecillos”, confundiendo los números decimales con los números naturales.

En relación con la categoría errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales, en la figura 30(b), donde exponemos la respuesta del grupo 8, los estudiantes presentan la correspondencia simbólica  $3=1$ , es decir tres tazas de harina que le corresponde a una taza de leche. La solución es incorrecta debido a que aparece 4 veces la correspondencia  $3=1$ , falta introducir una correspondencia más, por lo que la categorizamos como cálculos incorrectos o accidentales. Otro error cometido fue introducir la correspondencia  $3=0,5$  donde en la parte derecha de la correspondencia dividen a la mitad la unidad, pero la parte izquierda es mostrada invariante. Otro ejemplo de este tipo de error del grupo 8 la evidenciamos en la misma figura del error anterior. Específicamente el producto 3 por 16,5 es incorrecto, pues lo que los estudiantes querían plantear era un cociente de la cantidad 16,5 entre 3 para las tazas de harina, lo que coincidirá en este caso con la cantidad correcta de tazas de leche. Estos estudiantes cometieron equivocaciones en el signo de la operación y en el orden de los elementos de ella, no en el resultado; siendo un descuido a la hora de escribir sus procesos.

### **Figura 31 1**

*Ejemplo de error debido al cálculo incorrecto al resolver la tarea 1*



Handwritten student work showing incorrect calculations for a problem involving flour and milk. The work is written on lined paper and includes three lines of text and calculations:

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1,5 = 16,5$$

5 tazas de leche y un cuarto de leche.

$$20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 7,5 = 107 \text{ panecillos}$$

*Fuente:* Elaboración propia.

Otro ejemplo de esta misma categoría lo exhibimos en la respuesta del grupo 2, presente en la imagen de la figura 31, donde los participantes brindan como respuesta “5 tazas de leche y un cuarto de leche”, en donde inferimos que el estudiante considera que cada 3 tazas de harina equivalen a 1 taza de leche. Además, los estudiantes obtienen la mitad de las 3 tazas de harina,

pero esta misma operación no es efectuada a 1 taza de leche, dado que escriben incorrectamente “un cuarto de leche o  $\frac{1}{4}$ ”. Para encontrar la cantidad de panecillos, los participantes aplicaron el mismo razonamiento utilizado al obtener la cantidad de leche, pero es realizado incorrectamente, pues en el último paso se debía usar la mitad de 20 y no fue así.

Por otra parte, encontramos un tipo de error no contemplado en las categorías de Abrate et al. (2006), por lo que lo consideramos como una categoría emergente catalogada como “otros”. Esto se observa en la respuesta dada por el grupo 3 en la que añadieron información inventada (cucharadas de sal, canela, entre otros) que no proporciona la tarea original, resolviendo la tarea utilizando los datos proporcionados por el problema y los inventados (ver Figura 28(b)).

En la etapa de predicción de modelización matemática, 7 de los nueve grupos interpretaron y analizaron los resultados en relación con los datos proporcionados en la tarea. Dos de los grupos, específicamente el tercer y noveno grupo omitieron esta etapa, a pesar de que el noveno grupo brindó una de las dos soluciones correctas del problema, no brindó una interpretación de la respuesta. La figura 28(b) presenta la solución del grupo 3 como ejemplo de este tipo de error.

En el caso de la etapa de la validación, obtuvimos que durante el proceso de resolución de la tarea solo dos de los grupos, el tercer y cuarto grupo, descuidan información presente en el enunciado, al adquirir la cantidad de leche que menciona la tarea, este error es categorizado como un error accidental y gestado en la segunda etapa del proceso de modelización. Los grupos arreglan su error logrando encontrar la cantidad de leche que ocupaban y brindan una solución al problema. No adquirimos evidencias de la revisión de las respuestas finales, además en ellas encontramos errores que pudieron haberse corregido a través de la ejecución de una reflexión y retroalimentación de las soluciones.

## **2.2 ERRORES PRESENTES EN LAS RESPUESTAS DE LA TAREA 2**

Con respecto a la tarea 2 (Figura 14) se formaron 8 grupos, obteniendo 8 respuestas distintas, todas ellas incorrectas. En la tabla 23 se presenta la información correspondiente a las etapas del proceso de modelización matemática que realizaron los diferentes grupos de estudiantes al resolver la tarea 2.

**Tabla 23**

*Implementación de etapas del ciclo modelización en la tarea 2*

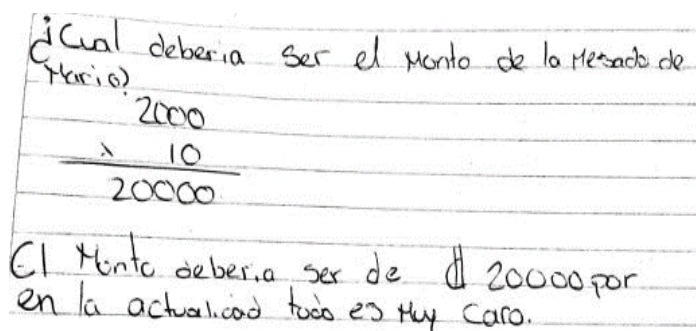
| <b>Etapas de modelización</b> | <b>Evidencias</b>                                                                                                                                                                    | <b>Grupos<sup>c</sup></b>                  |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Descripción                   | Ordena y sistematiza la información en una tabla, esquema, dibujo o por etapas.<br>No ordena la información, plantea directamente una operación.                                     | G1, G2, G4, G6, G7, G8<br>G3, G5           |
| Manipulación                  | Obtiene un modelo matemático y lo resuelve.                                                                                                                                          | G1, G2, G3, G5, G7, G8                     |
| Predicción                    | Resuelve parcialmente el modelo matemático.<br>Analizan e interpretan los resultados. Brindan una respuesta al problema.<br>Sí resuelve la tarea, pero no interpreta los resultados. | G4, G6<br>G3, G5, G7, G4<br>G1, G2, G6, G8 |
| Validación                    | No se muestra una revisión de problema, se encuentran errores.                                                                                                                       | Todos                                      |

<sup>c</sup> Los Gi para  $i=1, \dots, 9$  corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

En la primera etapa descripción, seis de los ocho grupos ordenaron y sistematizaron los datos de la tarea, algunos realizaron tablas y esquemas, entre otros. Dos de los grupos, el tercer y quinto grupo no simplificaron la información de la tarea, sino que directamente plantearon un modelo matemático en forma incorrecta. En la figura 32 mostramos la respuesta del grupo 3 como ejemplo.

**Figura 32**

*Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática*



Fuente: Elaboración propia.

Para la segunda etapa, manipulación, seis de los ocho grupos crearon un modelo matemático y resolvieron este. El sexto grupo obtiene un modelo matemático distinto, para dos de los tres los artículos presentes en la tarea, dejando de lado uno de los artículos, por lo que omitieron

información relevante en la solución del problema. El cuarto grupo brinda una respuesta aproximada a la solución de la tarea (ver Figura 33), sin crear para esto un modelo matemático.

**Figura 33**

*Ejemplo de error en la etapa de descripción del proceso de modelización matemática*

180500 Play  
2800 bolso  
1360 pizza

el cual debe ser el monto actual de mi mesada?  
tue de ser 3000\$ por que en 2 semanas tiene para bolso el 60 días tiene para on  
1er 3 y en 2 semanas tiene para PIZZA

Fuente: Elaboración propia.

Además, en esta etapa encontramos errores matemáticos que fueron clasificados en tres categorías: errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, errores debidos a la recuperación de un esquema previo y errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales. En la tabla 24 resumimos detallamos los errores realizados por cada uno de los grupos.

**Tabla 24**

*Tipos de errores presentes en las respuestas a la tarea 2*

| Categorías                                                   | Errores en la tarea 2                                                                                                                         | Grupos <sup>d</sup>            |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| C3. Errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas | Aumentos incorrectos.<br>Establecer 13,190 como una cantidad exacta.<br>Confundir el “punto” de las unidades de millar con la “coma” decimal. | G1, G3, G7, G5, G8<br>G1<br>G1 |
| C4. Errores debidos a la recuperación de un esquema previo   | Error al efectuar la operación división de números naturales.                                                                                 | G7                             |
| C5. Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales    | Tomar un dato mal de la tabla.<br>Escriben mal cantidad 13,190 cuando debió ser 1,3190.                                                       | G2<br>G1                       |

<sup>d</sup> Los Gi para i=1, ..., 9 corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

En cuanto a la categoría errores debidos a inferencias o asociaciones incorrectas, esta fue la más común en las respuestas. Particularmente, 5 de los 8 grupos participantes en esta tarea, usaron operaciones sin un camino válido y concluyeron que el resultado final era el aumento al



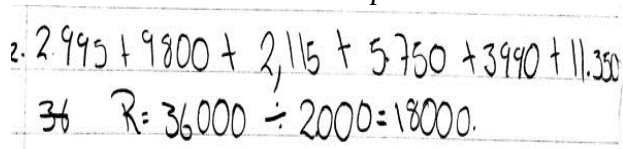
Así en los resultados anteriores inferimos que incorrectamente al multiplicar cada uno de los precios por el monto de la mesada para que Mario (personaje de la tarea) obtuviera más dinero. Otro de los errores fue debido al realizar la diferencia de los totales de los precios, cada uno de estos multiplicado por ¢2000, y volver a efectuar la división por este mismo monto. Además, encontramos la afirmación de que el número 13,190 es una cantidad exacta, lo cual es también una falacia en su razonamiento.

Asimismo, observamos otros errores de asociaciones incorrectas como la respuesta presente en la figura 32, donde para calcular el monto de la mesada de Mario, los integrantes del grupo 3 multiplicaron el monto de la mesada de hace 10 años por la cantidad de años que han transcurrido, obteniendo ¢20000, asumiendo incorrectamente que el aumento es el mismo para todos los años.

A estos errores también añadimos el encontrado en la respuesta del grupo 7 presente en la figura 35. En esta sumaron los precios de los artículos actuales con los precios de los artículos hace 10 años, obteniendo como resultado ¢36000. Posteriormente, realizan el cociente por el valor de ¢2000 (monto que le brindaban de mesada a Mario), obteniendo como resultado final ¢18000. Los estudiantes concluyen que este monto es el aumento actual de la mesada de Mario: “A Mario le tienen que subir su mesada a ¢18000 por quincena por el presupuesto ha subido de precio”. Las respuestas del grupo 5 y 8 fueron muy similares a la descrita.

### **Figura 35**

*Errores obtenidos solucionar la tarea 2 debidos a supuestos incorrectos*



$$2. 2.995 + 9800 + 2,115 + 5750 + 3990 + 11.350$$

$$36 \quad R: 36000 \div 2000 = 18000.$$

*Fuente:* Elaboración propia.

Con respecto a errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales, clasificamos la respuesta del grupo 2 esta categoría y la presentamos en la figura 36.

En uno de los cálculos, los estudiantes efectuaron la suma de los montos de los artículos de hace 10 años, considerando el precio ¢2115 que corresponde a el precio de la cuota quincenal del artículo Playstation, pero al realizar el mismo procedimiento con los precios actuales, el grupo considera erróneamente la cuota de contado de ¢256750, en lugar de la cuota quincenal.

**Figura 36**

*Ejemplo de error debido a cálculos incorrectos obtenidos solucionar la tarea 2*

The image shows several handwritten calculations on lined paper, illustrating errors in arithmetic. At the top, there is a calculation  $9800 / 2012$  with a result of  $1350$  and a remainder of  $2012$ . To the right, there is a calculation  $11795 \times 15340$  with a result of  $327000$ . Below these, there are more calculations:  $2995 \times 109705$  with a result of  $3990$ , and  $256750 / 109705$  with a result of  $23$ . At the bottom, there is a calculation  $256750 / 109705$  with a result of  $23$  and a remainder of  $70250$ . The final calculation is  $2000 \times 1200 = 24000$ .

Fuente: Elaboración propia.

Este proceso se reafirma con los datos proporcionados por la entrevista realizada a uno de los estudiantes del grupo participante:

Profesora: ¿Vieron que en las imágenes de los artículos de hace 10 años y los actuales de Playstation había dos precios, el precio por quincena y el precio por contado?

Estudiante: No profe, en la imagen de Playstation de hace 10 años solo vimos ese (señalando el  $\text{C}2115$ ) y en otro solo vimos el precio muy alto, el actual (refiriéndose al precio por contado del artículo de  $\text{C}256\,750$ ).

Otro ejemplo de esta categoría lo podemos observar en la figura 34 que presenta la solución realizada por el grupo 1. En ella observamos que al efectuar la operación  $2638 \div 2000$ , los estudiantes obtienen como resultado incorrecto  $\text{C}13,190$ , pues debería ser  $\text{C}1,3190$ , equivocándose en la posición de la coma.

Al igual que la tarea 1, una de las respuestas de la tarea 2 presenta un error debido a la recuperación de un esquema previo, evidenciado en la figura 35. En ella exhibimos la solución realizada por el grupo 7, en la cual visualizamos la operación  $36000 \div 2000$  obteniendo como resultado incorrecto  $\text{C}18000$ , donde los estudiantes confunden la división anterior la operación  $36000 \div 2 = 18000$  y no son conscientes de que las operaciones son distintas.

En la tercera etapa del proceso de modelización, la predicción del problema de modelización matemática, 3 de los 9 grupos después de resolver el modelo matemático y brindar una posible respuesta a este, brindaron una interpretación utilizando las hipótesis del problema (ver Figura 32 y Figura 33). Uno de los grupos, específicamente el grupo 4, no creó el modelo matemático, pero

brindó una respuesta aproximada (ver Figura 33), efectuando posteriormente una interpretación de ella. Cuatro de los grupos no aplicaron esta etapa, evidencian solamente una solución numérica, sin significado en relación con las condiciones del problema (ver Figura 34).

Por último, en todas las soluciones propuestas fueron incorrectas, pues en ellas hubo errores, por lo que ninguno de los grupos realizó una revisión exhaustiva de las respuestas realizadas, dejando de lado la aplicación de la cuarta etapa del proceso de modelización, la validación de las respuestas obtenidas.

### **3. SINTESIS DE RESULTADOS**

Los datos obtenidos muestran que, en general, los grupos participantes no aplicaron todas las etapas del proceso de modelización matemática. En relación con cada una de las etapas, encontramos que, en ambas tareas, dos de los grupos omitieron la primera etapa, descripción, plantearon directamente el modelo matemático sin realizar una sistematización previa de la información. Para la tarea 2, ocurrió lo contrario, dos de los grupos omitieron la construcción del modelo matemático y la resolución de este (segunda etapa del ciclo de modelización), pero sí ejecutaron la primera etapa. En relación con la tercera etapa, predicción, dos de los grupos en la tarea 1 y cuatro de los grupos en la tarea 2, omitieron esta etapa al gestar una respuesta numérica, pero no una interpretación de ella, ni especificar el proceso para llegar hasta ella, lo que sugiere que han estado expuestos a una enseñanza donde es prioridad la respuesta final, y no el proceso hasta llegar a ella. Cabe destacar, que para la tarea 1, solo dos de las respuestas obtenidas fueron correctas, para la tarea 2, ninguna fue correcta. Finalmente, para la cuarta etapa, validación del proceso de modelización matemática, en la tarea 1 solo dos de los grupos realizaron una revisión preliminar al formular el modelo matemático, es decir durante la segunda etapa. Sin embargo, ninguno de los grupos realizó una reflexión y juzgó la viabilidad de la solución final obtenida. De igual manera con la tarea 2, se no fue aplicada la cuarta etapa del proceso de modelización.

## 6. RESULTADOS SOBRE EL ANÁLISIS DEL CURRÍCULO DE COSTA RICA

---

En esta sección exponemos los resultados correspondientes a la fase 2, que da respuesta al objetivo específico 2.1. Concretamente, establecer componentes de conocimiento del profesor referentes al proceso de modelización. Para lograr esto, realizamos el *estudio 3* donde efectuamos un análisis del currículo de Costa Rica, con el objetivo de delimitar aspectos relativos a la modelización matemática presentes en este documento como un elemento primordial de la enseñanza, y a la vez como parte esencial del conocimiento del profesor. A través de una adaptación del modelo de conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas propuesto por Piñeiro et al. (2019), obtuvimos resultados relevantes que nos ayudaron a establecer las componentes del conocimiento del profesor referentes al proceso de modelización. Aclaramos que el análisis realizado parte de la resolución de problemas, porque en el currículo de Costa Rica, la modelización es entendida como la resolución de problemas con contextos de la vida real (MEP, 2012). En los resultados de este capítulo exponemos una propuesta del modelo acerca el conocimiento del profesor sobre la modelización matemática, cuyas componentes las dividimos en dos subapartados, en primer lugar, el conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas de la modelización y en segundo lugar, su conocimiento didáctico.

## **1. MODELIZACIÓN EN EL CURRÍCULO**

Desde el año 2012, la modelización matemática es incluida como parte fundamental del currículo en Costa Rica como una de las modificaciones en el plan de estudios de matemática tanto a nivel de primaria como a nivel de secundaria. Esta incorporación entiende que la modelización matemática es un proceso cíclico donde establecemos relaciones entre el mundo real y el mundo matemático, cuyo fin primordial es construir y desarrollar un modelo matemático de una determinada situación real, en el que los conceptos matemáticos constituyen una herramienta. A la vez, el estudiante adquiere una comprensión profunda del fenómeno y construye estructuras conceptuales más poderosas que las que podemos obtener por una enseñanza tradicional. Por ello, en este apartado delimitamos elementos relativos a la modelización matemática presentes en el documento curricular de Educación Primaria de Costa Rica.

Sobre el objetivo del proceso de modelización, los fundamentos del currículo costarricense coinciden con las posturas teóricas de modelización matemática al enfatizar la relación entre la modelización y la realidad del mundo real que nos rodea (e.g., la modelización contextual de Lesh y Doerr, 2003 y Modelización cognitivo y afectivo de Borromeo Ferri, 2006). Esto lo evidenciamos al expresar que “los modelos emergen siempre que se deba acudir a la realidad. Un modelo es en esencia un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica (explican, describen, permiten hacer predicciones)” (MEP, 2012, p. 31).

Asimismo, el documento señala que el proceso de “identificar, construir o usar un modelo de una situación real es una manera de matematizar esa realidad” (MEP, 2012, p. 31). Afirmación que coincide con Rico (2009) al conceptualizar el proceso de modelización matemática como una traducción de la realidad a una estructura matemática. Por tanto, el programa manifiesta que el “espíritu de la modelización reside en la identificación, manipulación, diseño y construcción de modelos matemáticos sobre situaciones auténticas del entorno. Este sentido de realidad es esencial para los aprendizajes” (MEP, 2012, p. 31).

## 2. CONOCIMIENTO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN EN EL CURRÍCULO

A cerca del conocimiento del contenido sobre la resolución de problemas de modelización, se han establecido tres categorías (a) noción del problema de modelización, (b) resolución de problemas y (c) disposición. En los siguientes párrafos evidenciamos cada una de ellas.

### 2.1 CATEGORÍA 1. NOCIÓN DEL PROBLEMA DE MODELIZACIÓN

En la primera categoría *noción del problema de modelización* encontramos que el profesor debe identificar una *tarea de modelización* (subcategoría) para sus alumnos por medio de los principios de significado personal, construcción del modelo y generalización del modelo desarrollado por Lesh et al. (2003). En el caso del *principio de significado personal*, encontramos la frase de los fundamentos del currículo que menciona “se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas” (MEP, 2012, p. 25).

Con respecto al *principio de construcción de modelo*, lo evidenciamos en el extracto:

La modelización siempre aparecerá de manera integrada al proceso Plantear y resolver problemas. El espíritu de la modelización reside en la identificación, manipulación, diseño y construcción de modelos matemáticos sobre situaciones auténticas del entorno. Este sentido de realidad es esencial para los aprendizajes. (MEP, 2012, p. 31)

Aquí es claro que el propósito principal es proponer tareas que permitan generar la necesidad de construir y modificar un modelo matemático como herramienta para resolver el problema propuesto, pero obvia el extender o refinar dichos modelos. Ahora bien, en otras partes del currículo, si hay presencia de otras actividades cognitivas. Además, algunas menciones hacen alusión al uso de distintos sistemas de representación para representar los modelos matemáticos, por ejemplo, en la frase “Este enfoque conceptúa el modelo de una forma amplia y flexible, puede ser un diagrama con flechas, un manipulable, una tabla, una gráfica” (MEP, 2012, p. 31). Pero, el escrito no menciona cuales sistemas de representación pueden ser usados por el estudiante para documentar sus procesos matemáticos. Sobre el *principio de generalización del modelo*, su noción la podemos encontrar levemente en la mención del currículo del capítulo de los fundamentos:

Un trabajo de reelaboración y abstracción de un modelo convoca actividades matemáticas más generales y abstractas. Se podría hablar de dos maneras de matematización: la primera que establece y usa un modelo (se pasa del mundo físico o social al simbólico matemático); la segunda, que refina y generaliza de manera teórica los resultados de la primera (trabaja en el mundo simbólico y abstracto de las Matemáticas) (MEP, 2012, p. 31).

Por otra parte, el documento no es claro sobre la perspectiva teórica de modelización que sigue en su fundamentación, aunque en algunas partes del escrito hay menciones implícitas que coinciden con la perspectiva contextual de Lesh y Doerr (2003). En particular, en los pasos al modelizar (como se nombra en el documento), muchas de las etapas propuestas coinciden con las del ciclo de modelización de Lesh y Doerr (2003). Esto lo observamos en la siguiente figura:

**Figura 37**

*Pasos del proceso de modelización presentes en el currículo de Costa Rica*

| Pasos                      | Descripción                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Paso 1. El Problema.       | Un problema que describe una situación de la realidad que debe ser modelizada.                                                                                                                                                                                                                                 |
| Paso 2. Sistematización.   | Una selección de los objetos, la información y las relaciones relevantes del problema que le permitan obtener una posible representación o idealización matemática.                                                                                                                                            |
| Paso 3. Modelo Matemático. | Una traducción de los objetos y las relaciones del paso anterior en lenguaje matemático, de tal forma que obtenga un modelo que represente lo que ocurre en la realidad.                                                                                                                                       |
| Paso 4. Solución.          | Uso de los conocimientos matemáticos previos para poder encontrar la solución o soluciones del modelo planteado en el paso anterior, de esta forma se podrá obtener una aproximación de la solución del fenómeno que se está idealizando en el paso 1.                                                         |
| Paso 5. Interpretación.    | Análisis de los resultados y las conclusiones considerando los conocimientos previos que se tienen del problema.                                                                                                                                                                                               |
| Paso 6. Evaluación.        | Verificación a la luz de los resultados matemáticos de la validez del modelo y el poder predictivo que dicho modelo tiene sobre el problema original. Para este proceso puede utilizarse la comparación con datos observados y/o el conocimiento teórico o por experiencia personal que se tenga del problema. |

*Fuente:* Tomado de MEP (2012, p. 28).

También en la frase que alude a las etapas del proceso de modelización de nuevo en forma implícita “Intuir, describir, plantear, resolver y generalizar problemas matemáticos define la actividad de estos profesionales en contextos sociohistóricos donde existen criterios y métodos de comunicación y validación” (MEP, 2012, p. 28). Por tanto, encontramos que con la tarea que el profesor trabaje en el aula, debe estimular las etapas de resolución de problemas de modelización (Lesh y Doerr, 2003), como lo es la descripción, manipulación y predicción. Sin embargo, la última etapa *validación* es mencionada débilmente en las partes del currículo analizado. Como observamos en el siguiente fragmento de la introducción del texto:

La contextualización que se propone busca fortalecer un papel estudiantil activo y comprometido con su aprendizaje, recalcando la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos adecuados para cada nivel educativo. Se da una asociación entre estos dos ejes que obedece precisamente al enfoque principal de este currículo: la resolución de problemas en contextos reales. Y es consistente con la selección y conceptualización del proceso matemático Plantear y resolver problemas. (MEP, 2012, p. 17)

Para la subcategoría *consideración del resolutor* encontramos que el profesor debe considerar el papel que juega el resolutor al establecer una tarea como un problema. Por ejemplo, la complejidad del problema debe establecerse según el nivel educativo del estudiante. Es decir, “el grado de complejidad de los modelos generados dependerá de las circunstancias a las que refiere, así como de los conceptos y procedimientos matemáticos implicados, lo cual debe ajustarse en cada nivel educativo” (MEP, 2012, p. 31). O en la mención sobre el tipo de tareas: “Para un grupo de estudiantes puede resultar de conexión, pero para otros de reflexión. Es necesario interpretar el contexto específico en el que se encuentra” (MEP, 2012, p. 33).

Con respecto a la cantidad de soluciones plausibles del problema encontramos referencias como que un problema puede tener o no solución o que posee múltiples soluciones. Esto lo evidenciamos en la mención “La resolución de problemas en entornos reales apoya una percepción de utilidad de las Matemáticas. También existen problemas que por su naturaleza no admiten una solución en poco tiempo y otros que tal vez no tengan” (MEP, 2012, p. 29). Por lo que, el profesor puede usar problemas cuya cantidad de soluciones sea variable.

Otra subcategoría es los *tipos de tareas existentes de modelización*. Encontramos que las tareas tienen que establecerse según el nivel de complejidad (reproducción, conexión y reflexión), lo que coincide con los tipos de tareas propuestas por Lesh y Doerr (2003). Pero, observamos algunas contradicciones, como al proponer el uso de ejercicios que va en contra del enfoque propuesto en todo el currículo de resolución de problemas de contexto real. Esto lo vemos en:

Reproducción. Son ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados. Usan el conocimiento de hechos y representación de problemas comunes, reconocimiento de cosas equivalentes, recolección de objetos matemáticos, procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos estándar, manipulación de expresiones con símbolos, fórmulas y cálculos sencillos. (MEP, 2012, p. 29)

Pero, observamos contradicciones y semejanzas en el nivel de complejidad de la tarea *conexión*:

Conexión. Se basa en capacidades que intervienen en el nivel de reproducción, pero va más lejos. Remite a la resolución de problemas que no son rutinarios, pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la interpretación con exigencias mayores que en el grupo de representación, y algo que lo define: la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación. (MEP, 2012, p. 33)

Las semejanzas encontradas aluden a mencionar la resolución de problemas no rutinarios desarrollados en contextos familiares y de exigencias mayores, es decir características que coinciden con la definición de una tarea de modelización propuesta por Lesh y Doerr (2003). Pero, la frase “capacidades que intervienen en el nivel de reproducción, pero va más lejos” (MEP, 2012, p. 33) se asemeja más a la definición de tarea rutinaria, siendo contradictorio a lo que entendemos por un problema de modelización (Lesh y Doerr, 2003). Además, al mencionar la frase “la conexión entre distintas representaciones de la situación” (MEP, 2012, p. 33), hay coincidencia con el objetivo del tipo de tarea de modelización *Model-Exploration Activities* (MXAs), al profundizar la estructura del modelo obtenido, fortaleciéndolo a través de distintos sistemas de representación y su comprensión sobre las formas de usar e interpretar las representaciones.

Por último, el tercer nivel de complejidad *reflexión* coincide con la definición de una actividad *provocadora de modelos* o *Model-Eliciting Activities* (MEAs), esto lo evidenciamos en:

Reflexión. El elemento significativo es la reflexión, realizada en ambientes que son más novedosos y contienen más elementos que los que aparecen en el otro nivel de complejidad. Se plantea aquí la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. Se exige la participación de varios métodos complejos para su solución. (MEP, 2012, p. 29)

También, no encontramos el tercer tipo de actividad de modelización, o sea la adaptación de modelos o *Model-Adaption Activities* (MAAs). La cual involucra a los estudiantes en la aplicación de su modelo a nuevas situaciones, lo que a menudo resulta en más adaptaciones a sus modelos (Ärlebäck y Doerr, 2020). Aunque en algunas partes del currículo si es mencionado estas adaptaciones como por ejemplo “Un modelo refiere a una situación específica, pero al mejorarse con acciones cognitivas deberá ser capaz de poder usarse en otros contextos” (MEP, 2012, p. 31), esto no es conectado con los niveles de complejidad de las tareas propuestas en el currículo.

En resumen, aunque observamos algunas congruencias en el currículo con la teoría de Lesh y Doerr (2003) sobre los tipos de tareas según el nivel de complejidad de los problemas. Lo encontrado no es claro en sus fundamentos y la definición propuesta de *problema de*

*modelización* es contradictoria (Lesh y Doerr, 2003; Maaß, 2007a; Sevinc, 2022), pues las tareas propuestas son de un tipo de procedimiento mecánico y conductista, específicamente *ejercicios*, lo que contradice el enfoque presente en todo el currículo sobre la resolución de problemas de modelización.

## 2.2 CATEGORÍA 2. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

En la categoría *resolución de un problema de modelización matemática* no encontramos evidencias sobre subcategoría *etapas de resolución y su caracterización*. Es decir, no hallamos información sobre la dirección que debe tener este ciclo de modelización a la hora de efectuarse, si el estudiante puede iniciar realizando cualquier etapa del proceso de modelización, siguiendo un proceso lineal y consecutivo, o si este puede ser un proceso flexible donde el resolutor puede avanzar y retroceder como lo disponga y ser un proceso no direccional.

Hallamos extractos que confirman la necesidad de que el profesor conozca y entienda elementos primordiales de la modelización, como las *estrategias de resolución* de tareas, veamos un ejemplo:

Se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas. Se trata de capacidades para determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente, además de la capacidad para evaluar y controlar el desarrollo de su trabajo en la resolución de problemas. (MEP, 2012, p. 25)

Y su relación estrecha con el uso de representaciones adecuadas en sus estrategias de resolución de una tarea de modelización:

El proceso busca favorecer la capacidad para elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas, para manipular distintas representaciones de objetos matemáticos. Propone también desarrollar capacidades para poder traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada. (MEP, 2012, p. 26)

Otro proceso importante durante el proceso de modelización que es mencionado en el currículo es la *metacognición* en extractos como:

La evolución o monitoreo del progreso durante la resolución de problemas y el estar consciente de las propias capacidades y limitaciones son fundamentales en esta etapa y se identifican con las estrategias denominadas metacognitivas. En este sentido, la

metacognición se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognitivo y al control activo de las decisiones y de los métodos utilizados en la resolución de un problema. Estos pasos generales deben ajustarse cuando se trabaja con problemas en contextos reales, pues requieren modelos. (MEP, 2012, p. 30)

Además, encontramos que los *factores no cognitivos* como las emociones, actitudes y creencias juegan un papel determinante al resolver un problema de modelización, particularmente el currículo menciona la participación activa y el interés.

Se plantea una contextualización activa que estimule la acción estudiantil, lo que requiere el uso importante de modelos sobre la realidad cercana. Al contrario, para despertar el interés y la participación, se propone usar problemas en contextos reales que provoquen la construcción o uso de modelos. (MEP, 2012, p. 36)

En el caso de las creencias, hallamos ejemplos de ellas como las que proceden de la cultura local o del ambiente familiar del estudiante. Una muestra es el siguiente fragmento:

Poner atención a las creencias, pues son base de actitudes. La mayoría de las actitudes están asociadas a creencias que a veces son muy difíciles de cambiar, porque pueden estar incrustadas en la cultura local. Pero si se sabe cuáles son esas creencias y se dispone de apoyo pedagógico es posible cultivar en las personas nuevas creencias y la generación de actitudes positivas asociadas a ellas. Cuando alguien piensa que al dedicar más de 10 minutos a un problema se pierde el tiempo, pensando que está mal formulado o porque es para genios y no puede hacerlo, se está frente a una creencia típica en la cultura local. Es una creencia según la cual el dominio de las Matemáticas requiere un talento que se trae al nacer, y que si no se tiene pues no hay nada que hacer. (MEP, 2012, p. 62)

Asimismo, el currículo propone medidas de solución que puede trabajar el maestro para cambiar esas creencias. Esto es:

Frente a esa creencia falsa es necesario cultivar aquella que afirma que el dominio de las Matemáticas se logra con el trabajo y la perseverancia. Al trabajar con un problema más de 10 minutos, media o una hora aunque no salga la solución, se logra aprendizaje, pues se entrena la mente, se repasa teoría, se exploran alternativas fallidas y se aprende sobre los límites de los métodos. Esto es fundamental, pues precisamente los problemas que permiten realizar procesos matemáticos fundamentales y originar capacidades matemáticas exigen dedicación, tiempo, esfuerzo y perseverancia. Si sólo se está en disposición de realizar esfuerzos mínimos difícilmente se podrá pasar de problemas del nivel de reproducción y con ello se limitará fuertemente el progreso de su competencia matemática. (MEP, 2012, p. 62)

## 2.3 CATEGORÍA 3. DISPOSICIÓN

En esta categoría, el currículo establece que uno de los conocimientos del profesor es la estimulación de la *disposición* del estudiante al resolver un problema de modelización. Esto lo

observamos en partes del texto donde el profesor debe promover la contextualización activa, es decir “busca fortalecer un papel estudiantil activo y comprometido con su aprendizaje, recalcando la identificación, uso y diseño de modelos matemáticos adecuados para cada nivel educativo” (MEP, 2012, p. 17), o en “las actividades de modelización sólo se pueden dar con un compromiso estudiantil activo que es vital para que la contextualización tenga éxito en la enseñanza” (MEP, 2012, p. 56). Esto está relacionado con la importancia de vincular como una de las tareas del profesor, el saber estimular la disposición del estudiante al resolver un problema, dado que, si los estudiantes son involucrados emocionalmente, despertarán y desatarán estructuras mentales poderosas en ellos como es el intelecto y la motivación e interés que inciden directamente en el proceso de resolución de problemas (Piñeiro, 2019).

### **3. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN EN EL CURRÍCULO**

Para establecer las componentes de este tipo de conocimiento, Piñeiro et al. (2019) utilizan como guía el triángulo didáctico estudiante-profesor-resolución de problemas y sus interacciones. Específicamente, en este trabajo se traducen en: (a) estudiante como resolutor, (b) la resolución de problemas de modelización matemática como tarea escolar, (c) los factores no cognitivos y (d) la gestión de la enseñanza de la resolución de problemas de modelización matemática.

#### **3.1 CATEGORÍA 1. EL ESTUDIANTE COMO RESOLUTOR**

Corresponde a la interacción entre el *estudiante y la resolución de problemas de modelización matemática*, específicamente elementos concernientes al aprendizaje. Establecimos dos subcategorías (a) características de resolutores exitosos y (b) dificultades y errores. En la primera subcategoría, *características de resolutores exitosos*, no obtuvimos evidencias sobre cuáles deben ser las características de aquellos estudiantes que resuelven con éxito los problemas.

En el caso de las *dificultades y errores* encontramos que, coincidiendo con otros currículos (Piñeiro et al., 2019) no hay menciones sobre el papel que juega las dificultades y errores al resolver problemas propiamente de modelización matemática y su relación como indicadores de

la comprensión conceptual del estudiante. Sin embargo, si encontramos recomendaciones de cómo tratar las fortalezas y debilidades de los estudiantes en general en las matemáticas, por ejemplo al trabajar las deficiencias cognitivas atendiendo al estilo de pensamiento de los estudiantes:

Algunas personas tienen mayor facilidad para representaciones visuales de los conceptos y procedimientos matemáticos, otras poseen mayor facilidad para aproximaciones secuenciales, sistemas numéricos, etc. No es sencillo identificar en las personas esas diferencias cognitivas, pero es vital tener presente el asunto, pues puede permitir un mejor aprovechamiento de la acción de aula para todos. Responder a esto se ve favorecido dentro de la lección cuando se seleccionan procesos relacionados con objetos matemáticos que poseen diversas representaciones matemáticas. (MEP, 2012, pp. 46-47)

Otra recomendación es:

el usar el tiempo de manera distinta para cada subgrupo de estudiantes... Eso se puede hacer por medio de una modulación específica de las sugerencias o indicaciones que puede dar. Es decir, se habla de las diferencias cognitivas asociadas a las diversas aproximaciones que los estudiantes pueden tener para aprender matemáticas, y por otro lado, las diferencias relacionadas con el talento y la dedicación al estudio... (MEP, 2012, p. 46)

Por último, otra sugerencia para atender la diversidad es “por medio de un adecuado tratamiento de la complejidad de los problemas matemáticos en el aula” (MEP, 2012, p. 60).

Ante esto:

Se trataría de establecer acciones con distinto peso en los niveles de complejidad de los problemas: para algunas personas un peso mayor en problemas de reproducción y de conexión, para otras un peso mayor en los de conexión y reflexión y para la mayoría probablemente una distribución *equilibrada*. Es una decisión que debe recaer en manos de los docentes. También puede dar lugar a acciones extraclase adicionales. (MEP, 2012, p. 60)

### **3.2 CATEGORÍA 2. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO TAREA ESCOLAR**

En la categoría *resolución de problemas como tarea escolar* destacamos el *seleccionar y utilizar adecuadamente un problema* como parte primordial de la modelización y labor fundamental de la tarea del profesor para lograr el objetivo del proceso. Esto lo hallamos en el extracto:

una acción docente crucial para generar aprendizajes en las cantidades y calidades que implica el escenario actual. Aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades. (MEP, 2012, p. 13)

Descubrimos alusiones a características como el contexto real, directamente al identificar, usar y construir modelos matemáticos (contextualización activa). Por ejemplo, al

usar o aplicar las Matemáticas dentro de contextos reales (bien seleccionados) se promueve el contacto con los objetos matemáticos en su relación privilegiada con la realidad de donde emergieron. Trabajar en estos contextos diversos favorece una matematización (usar matemáticas para representar o modelar situaciones del entorno) que —aunque debe ser adaptada al medio escolar— corresponde a aquellas actividades similares realizadas en los quehaceres matemáticos más generales. (MEP, 2012, p. 28)

A la vez, el currículo menciona que “La resolución de problemas en entornos reales apoya una percepción de utilidad de las Matemáticas” (MEP, 2012, p. 29). Además, propone elegir problemas que estimulen los procesos del currículo (razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar y representar) para relacionar la resolución de problemas con la modelización. Con los problemas propuestos incentivamos los medios (estrategias, heurísticas, métodos), que unido a la acción de aula permitirá cumplir con los propósitos de aprendizaje de un conocimiento matemático de acorde al nivel educativo del estudiante, es decir “la escogencia de un problema para el desarrollo de una lección debe estar establecida por los propósitos de aprendizaje de un conocimiento matemático y el desarrollo educativo que se realiza” (MEP, 2012, p. 29). También, contemplar el distinto nivel de complejidad del problema (no debe plantearse una tarea simple para el estudiante) y estimular la puesta en práctica de la base conceptual previa del estudiante. Considerar las condiciones específicas del grupo de estudiantes con el que se trabaja, asimismo de la función de problema según el momento de la lección, entre otros (MEP, 2012). El seleccionar el problema de modelización adecuado y sumado a la acción de aula, puede ayudar a lograr un trabajo efectivo para el aprendizaje de los estudiantes.

En cuanto a la subcategoría, *modelos de resolución y estrategias*, el documento menciona un método para el diseño de estrategias para resolver problemas (aquí es preciso recordar que partimos desde el enfoque de resolución de problemas, por la conceptualización de modelización presente en el currículo), como una guía de cuatro pasos: entendimiento del problema, diseño, control, revisión y comprobación, que tiene gran similitud con los métodos propuestos por Pólya (1981) y Schoenfeld (1992). Destaca la necesidad de “entrenar a los estudiantes en las diferentes etapas de la resolución de problemas como la comprensión de estos, el trazado de planes de acción y la evaluación o monitoreo de las acciones” (MEP, 2012, p. 56). Además, el mismo texto sugiere estrategias que poseen características específicas al enseñar bajo el enfoque de resolución

de problemas, por ejemplo, potenciar el uso de diagramas, el reconocimiento de patrones, o la prueba con la exhibición de casos, entre otros (MEP, 2012). La organización de la lección en la etapa de introducción y el aprendizaje de los nuevos conocimientos (propuesta de un problema, trabajo estudiantil independiente, discusión interactiva y comunicativa, clausura o cierre) coinciden con los momentos de aplicación de problemas de modelización matemática propuestos por Lesh y Doerr (2003). A modo de resumen, deducimos el currículo manifiesta la inclusión de modelos y estrategias de resolución de problemas que tiene gran similitud con los métodos propuestos por Pólya (1981) y Schoenfeld (1992). Sin embargo, en lo escrito no hay referencia en forma específica sobre los modelos de resolución y estrategias en la modelización.

Para la subcategoría, *invención de problemas* es mencionada en forma débil en el currículo. Hallamos solo una mención en los fundamentos del currículo, que destaca la importancia de

descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes (MEP, 2012, p. 29).

A pesar, de que el currículo hace referencia a procesos de la invención de problemas como el variar las condiciones del problema, observamos que el tipo de proceso que se propone no es exclusivo de la modelización. Aunque encontramos alusión a utilizar la invención en la etapa de validación del problema, destacamos que dentro de los resultados expuestos anteriormente la etapa de la *validación* es mencionada débilmente en las partes del currículo analizado, lo que indica que la conexión etapa validación-invención de problemas también es débil en el escrito. Asimismo, no obtuvimos evidencia sobre la invención de problemas de modelización y sus alcances en el uso de contextos reales, al modificar un problema para obtener una adaptación y convertirlo, por ejemplo, en una actividad MEAs o MXAs o MAAs. También, no encontramos sugerencias de estrategias de cómo puede el profesor trabajar el planteamiento de problemas de modelización en el aula.

### **3.3 CATEGORÍA 3. FACTORES NO COGNITIVOS**

En la categoría *factores no cognitivos*, el conocimiento relacionado con la interacción del profesor y el estudiante en términos de las emociones, actitudes y creencias está presente en el currículo, al ser importante el profesor al promover actitudes y creencias positivas hacia las

matemáticas a través de la acción de aula, por medio de la participación activa, la perseverancia, incentivar la confianza en la utilidad de las matemáticas, entre otros.

Poner atención a las creencias, pues son base de actitudes. La mayoría de las actitudes están asociadas a creencias que a veces son muy difíciles de cambiar, porque pueden estar incrustadas en la cultura local. Pero si se sabe cuáles son esas creencias y se dispone de apoyo pedagógico es posible cultivar en las personas nuevas creencias y la generación de actitudes positivas asociadas a ellas. (MEP, 2012, p. 62)

En contraposición, se encontraron menciones acerca de las actitudes negativas que pueden surgir por las dificultades del problema. También creencias falsas que el profesor debe saber abordar y controlar en el aula, como por ejemplo si un problema no puede resolverse en los primeros 10 minutos, entonces no tiene solución. Por ello, es importante que el profesor conozca que su forma de actuar, la gestión de clase y sus propias creencias afectan el comportamiento de los estudiantes y su forma de resolver problemas de modelización.

Esto es fundamental, pues precisamente los problemas que permiten realizar procesos matemáticos fundamentales y originar capacidades matemáticas exigen dedicación, tiempo, esfuerzo y perseverancia. Si sólo se está en disposición de realizar esfuerzos mínimos difícilmente se podrá pasar de problemas del nivel de reproducción y con ello se limitará fuertemente el progreso de su competencia matemática. (MEP, 2012, p. 62)

### **3.4 CATEGORÍA 4. GESTIÓN DE LA ENSEÑANZA**

En la última categoría, *gestión de enseñanza*, no encontramos evidencias explícitas de la subcategoría *enfoques de enseñanza*, es decir de modelos o enfoques que fomentan y propician las acciones en el aula durante la resolución de problemas de modelización. Sin embargo, detectamos fragmentos que aluden a la gestión de enseñanza en forma general:

organización de las lecciones es transversal en la enseñanza de los temas matemáticos... El entrenamiento en la metodología propuesta promueve además el desarrollo de capacidades para realizar investigación en otras ciencias naturales o sociales y en las humanidades. Eso es así porque el método seguido es similar al que domina en la construcción de conocimiento, es decir en la investigación: problema, planteo-hipótesis-conjetura, resolución, contrastación de soluciones, consignación de resultados en relación con el saber. (MEP, 2012, p. 43)

Con respecto, a la subcategoría *gestión del discurso* encontramos referencia al discurso utilizado por el profesor para la conducción de la clase al promover que los estudiantes colaboren y participen durante la resolución de problemas. Detectamos en el currículo frases sobre los momentos de organización de la lección (propuesta de un problema, trabajo estudiantil

independiente, discusión interactiva y comunicativa y clausura o cierre), el profesor debe ser conocedor de las características de cada uno de estos momentos. Por ejemplo, en el segundo momento la intervención del docente es limitada, en cambio en los últimos momentos debe ser un guía en la discusión y promover el debate en los estudiantes por medio de argumentos. Finalmente, en la clausura o cierre debe saber realizar la *síntesis cognoscitiva fundamental* para el aprendizaje matemático “enfatiando su consistencia con los elementos que se desarrollaron en esta lección, subrayando su conexión con otros temas que se verán en otras lecciones” (MEP, 2012, p. 45).

En la subcategoría *gestión de atascos* el currículo promueve la intervención del profesor como guía en la formulación de preguntas adecuadas y siendo consciente del momento en que debe actuar o dejar al estudiante confrontar el problema. Las indicaciones deben ser las necesarias y ajustadas a las características del que aprende. Evidenciamos lo anterior, en el extracto:

Es medular una intervención docente como guía y formulación de preguntas apropiadas, con plena conciencia del momento en que debe actuar y en el que debe dejar confrontar el problema. No conviene ofrecer la respuesta o la ruta de solución al problema, pues quita la posibilidad de activar las acciones cognitivas que provocaran el aprendizaje y desarrollo de capacidades matemáticas. Pero, en ciertos casos se tendrá que ofrecer soluciones y respuestas (cuando el estudiante no pueda actuar de manera autónoma). (MEP, 2012, p. 43)

En cuanto a la subcategoría *gestión de la evaluación*, el documento curricular establece que al aplicar un problema de modelización, la evaluación se debe realizar en todas las etapas del proceso y no solamente al valorar los resultados finales como un producto acabado, pues se perdería el significado del enfoque como tal. Además, las estrategias de evaluación deben ser congruentes con el nivel de complejidad de los problemas. En la evaluación sumativa “su diseño se debe garantizar el equilibrio entre los distintos niveles de los problemas incluidos, considerando para ello el abordaje realizado durante el proceso de mediación pedagógica” (MEP, 2012, p. 70).

Por último, en la subcategoría *gestión de recursos* el currículo sugiere el uso de la tecnología en la modelización, al simular una situación, mejorar la visualización del objeto matemático, reorganizar las demandas cognitivas que plantea un problema, redefinir las estrategias de resolución, entre otros. Como es mostrado seguidamente:

Con tecnología es posible simular situaciones reales y reorganizar las demandas cognitivas que plantea un problema; redefinir las estrategias que se pueden diseñar... El sentido de la contextualización y la manipulación con los entornos reales se puede alterar con los medios tecnológicos. En la resolución de problemas donde puede intervenir la tecnología se requiere incluir otras habilidades y procesos que están asociados a la relación interactiva entre conocimiento, pedagogía y tecnología, condiciones que son parte cada vez más de las generaciones de estudiantes que asisten a la escuela... (MEP, 2012, p. 32)

También, la historia como recurso, incentiva el uso de problemas de modelización que vislumbran algún momento histórico relevante para el disfrute de las matemáticas. El currículo menciona que “hay muchos problemas recreativos planteados en distintos momentos históricos que pueden fomentar el disfrute de las Matemáticas” (MEP, 2012, p. 65). Saber escoger los recursos adecuados, facilita muchos procesos involucrados en la modelización.

Finalmente, a pesar de que el currículo costarricense incluye variedad de elementos que han de ser considerados como conocimientos necesarios para la enseñanza de la modelización, algunos deben ser ampliados y profundizados como la invención de problemas y su relación con la resolución de problemas de modelización. Además, es necesario brindar estrategias para el profesor en su implementación y abordaje que relacionen ambos enfoques anteriores. Asimismo, el papel de las dificultades y errores al resolver problemas de modelización matemática y su relación como indicadores de la comprensión conceptual del estudiante, debe ser ampliado en relación con las etapas del proceso de modelización matemática. En particular, al aplicar la etapa de validación por ser un proceso no direccional y flexible. Todo esto en función de realizar un proceso eficaz de enseñanza-aprendizaje de la modelización matemática.

#### **4. PROPUESTA DE COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE MODELIZACIÓN**

El análisis realizado del currículo de Costa Rica nos sirvió para delimitar el conocimiento necesario que debe saber el profesor de la modelización. Tomando algunos elementos de este documento para crear las componentes del conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas de modelización matemática que exponemos en este apartado. La estructura de dichas componentes surge de la adaptación del modelo del conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas propuesto por Piñeiro et al. (2019), pero a través de la revisión la

literatura realizada y la construcción del marco referencial, las componentes se han vuelto más específicas hacia la modelización. Estas son expuestas en dos partes, en primer lugar, las correspondientes al conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas de modelización y en segundo lugar, acerca del conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas de modelización matemática.

#### **4.1 CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN**

Las componentes del conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas de modelización son distribuidas en las categorías: (a) noción del problema, (b) resolución de un problema y (c) disposición al resolver un problema; todas en la modelización matemática.

##### ***Categoría 1. Noción del problema de modelización***

El profesor ha de ser consciente de cuando una tarea es un problema de modelización para sus alumnos. Para ese cometido, consideramos fundamentales las siguientes componentes:

**(a) Nociones básicas de modelización:** La conceptualización de Rico (2001) brinda ejemplos de acepciones de *modelo* como *molde* o arquetipo o punto de referencia para imitarlo o reproducirlo, una persona o cosa que se debería imitar, por sus obras de ingenio y las acciones morales como indicadores de perfección, *modus* como medida, una persona u objeto que posa como modelo y que copia el artista, o una persona encargada de exhibir creaciones de moda, esquema teórico de un sistema o una realidad compleja y un esquema teórico de un sistema o de una realidad compleja. Además, *modelar* es como conformar, constituir algo por procesos naturales, humanos e históricos. Asimismo, Rico (2001) realiza un empleo técnico y específico del término en otras disciplinas. En particular, en educación matemática, el *modelo* se relaciona con los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, encontramos que *modelos* son sistemas conceptuales expresados usando sistemas de notación externos, para construir, describir o explicar los comportamientos de otro (s) sistema (s) (Erbaş et al., 2014; Lesh y Doerr, 2003). En cuanto, al *modelo matemático* es un objeto o hecho concreto de la realidad, comunicado usando distintos sistemas de representación para expresar una realidad aproximada del fenómeno (Erbaş et al., 2014). Para Montejó-Gámez et al. (2021) el *modelo matemático* en ambientes

escolares debe poseer características como un sistema real a modelar, su matematización y las representaciones utilizadas para expresar ambos.

*Modelización matemática* es el proceso de construir, obtener y validar los modelos matemáticos, donde los sistemas conceptuales y modelos son utilizados para crear y desarrollar nuevos modelos en otros contextos (Lesh y Doerr, 2003). En consecuencia, un modelo es un producto y la *modelización* es el proceso de creación de un modelo físico, simbólico o abstracto de una situación (Kaiser y Sriraman, 2006). Otros autores lo consideran como un mecanismo donde que utiliza la abstracción y generalización con el propósito de transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos y en forma inversa, y donde las soluciones deben ser descifradas en la misma realidad (Erbaş et al., 2014).

**(b) Problema de modelización:** Maaß (2007a) señaló que los problemas de modelización se diferencian de otras tareas matemáticas al poseer características especiales como: (a) debe resolverse mediante el proceso de modelización, (b) ser complejo, (c) debe ser un problema para el resolutor, (d) poseer un contexto realista, (e) ser un problema auténtico y (f) ser abierto. Con respecto a la primera característica, el problema debe provocar que el resolutor pueda pasar por todas etapas del ciclo de modelización, estableciendo conexiones entre la realidad y la matemática, siendo así necesario los procesos de transición *reales* para resolver el problema de modelización. Si esta característica no se cumple, a pesar de que posea un contexto real, entonces no sería un problema de modelización. La segunda característica es relativa a que el problema debe ser de una exigencia cognitiva mayor a los problemas tradicionales. Tomado en cuenta la tercera característica, un problema de modelización siempre debe ser un problema para el resolutor en el sentido de que no puede encontrar la solución inmediatamente mediante procedimientos rutinarios, pero tiene que pensar en estrategias para llegar a la solución. En relación con la cuarta característica, poseer un contexto real, los problemas de modelización son definidos como preguntas de la vida real que provengan del mundo extramatemático. Por tanto, no podemos hablar de problemas de modelización matemática sin un contexto real (Borromeo Ferri, 2018). La quinta característica, corresponde a que los problemas de modelización son auténticos por su relación con la realidad, utilizan la resolución de problemas y el pensamiento divergente para resolverlos. Por último, la sexta característica manifiesta que el problema de

modelización debe ser de respuesta abierta o múltiples soluciones, lo que contribuye a que sea de una complejidad mayor si los comparamos con otros tipos de problemas (Kaiser, 2007).

Sin embargo, en la perspectiva de modelización de Lesh y Doerr (2003), no enfatiza en la cantidad de soluciones que posea el problema. Explícitamente permite considerar el problema de respuesta cerrada o solución única, mientras provoque todas las etapas del ciclo de modelización. Además, analizando los problemas que proponen en el libro de Lesh y Doerr (2003) esto es reafirmado. Este estudio sigue ambas conceptualizaciones expuestas, dado que consideramos que un problema de modelización no debe ser limitado en su cantidad de soluciones, pues la diversidad de este tipo de problema (abierto o cerrado) puede contribuir a múltiples propósitos. Por ejemplo, al trabajar en el aula un problema de modelización de respuesta abierta, con un margen de tiempo más amplio o uno de respuesta cerrada, donde el tiempo sea más limitado.

Otra perspectiva la ofrece Sevinc (2022), donde propone que los problemas posean características esenciales como que el problema debe: desafiar el pensamiento matemático de los estudiantes, ser apropiado para los estándares y objetivos del currículo, involucrar un contexto que (a) sea significativo para (particulares) estudiantes, (b) es apropiado para el contenido matemático, y (c) incluye actividades de la vida diaria o conexiones interdisciplinarias.

**(c) Consideración del resolutor:** El profesor debe saber qué el papel que juega el resolutor en la consideración de una tarea como problema de modelización, es decir puede que sea un verdadero problema (cognitivamente exigente) para un determinado estudiante, pero no para otro que lo puede considerar como una tarea de aplicación con un procedimiento conocido o ejercicio de contexto (Agre, 1982; Mayer y Wittrock, 2006; Piñeiro et al., 2021). Por parte del profesor, realizar esta identificación es imperativa para un proceso efectivo de modelización, dado que conoce las características de sus estudiantes y tomando como referencia este conocimiento, debe ser capaz de plantear tareas que sean un problema o no para el que las resuelve (Agre, 1982).

**(d) Tipos de tareas existentes de modelización:** los tipos de tareas existentes de modelización MEAs, MXAs, MAAs propuestas por Lesh y Doerr (2003). Las *actividades provocadoras de modelos* o *Model-Eliciting Activities* (MEAs) tiene como objetivo principal provocar la construcción del modelo matemático de la situación problema. Luego, es seguida por la aplicación de una o varias *actividades de exploración de modelos* o *Model-Exploration Activities*

(MXAs), que sigue el propósito de profundizar la estructura del modelo obtenido, fortaleciéndolo a través de distintos sistemas de representación y su comprensión sobre las formas de usar e interpretar las representaciones. Por último, el tercer tipo de actividad es la de *aplicación de modelos* o *Model-Adaption Activities* (MAAs) que involucra a los estudiantes en la aplicación de su modelo a nuevas situaciones, lo que a menudo resulta en más adaptaciones a sus modelos (Ärlebäck y Doerr, 2020).

## ***Categoría 2. Resolución de un problema de modelización matemática***

Parte del conocimiento del profesor es conocer y entender diversos aspectos que son activados durante el proceso de resolución de un problema de modelización. De los cuales, destacamos:

**(a) Ciclos de modelización y sus características:** Incluye el conocimiento de los distintos ciclos de la modelización desde perspectivas como la perspectiva modelización educativa (Blum y Leiß, 2007), la adaptación de este de este último ciclo al incluir la tecnología (Greefrath y Vorhölter, 2016). También desde la perspectiva de la cognición de los individuos (Galbraith y Stillman, 2006), el enfoque de modelización cognitivo y afectivo (Borromeo Ferri, 2018), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Florensa et al., 2020), desde una visión sociocrítica (Rosa y Orey, 2018). Finalmente, desde la postura teórica de modelización contextual (Lesh y Doerr, 2003).

Algunos autores sugieren que los ciclos con cuatro etapas son más entendibles para la comprensión del proceso de modelización matemática y son adecuados para los estudiantes. Pero los ciclos con más etapas, con una mayor profundidad en la visualización de los procesos cognitivos, son más útiles para los profesores (Borromeo Ferri, 2018). También tomamos en cuenta el conocimiento de cada una de las etapas del ciclo de modelización. El comportamiento de las etapas cíclicas del proceso (descripción, manipulación, predicción y validación) no direccionales, que corresponden con un proceso flexible donde el resolutor puede retroceder y avanzar a algunas de las etapas cuando así lo necesite (rutas individuales visibles de modelización).

**(b) Estrategias:** el resolutor elabora un plan que incluye una estrategia según el estilo de pensamiento, por ello ha de tener conocimiento de cómo son y cuáles son las distintas estrategias

que pueden utilizarse o necesitar para resolver el problema de modelización (Borromeo Ferri, 2018). Para la misma autora, las estrategias según el estilo de pensamiento del estudiante son:

- **Estrategias de pensadores analíticos:** realizan la transición del modelo real al modelo matemático y viceversa. Prefieren el uso de representaciones utilizando el formalismo matemático y perciben adecuadamente aspectos matemáticos de una situación real. Comprenden hechos matemáticos idealmente a través de representaciones simbólicas o verbales existentes y prefieren proceder en una secuencia de pasos.
- **Estrategias de pensadores visuales:** Utilizan representaciones holísticas para comprender hechos matemáticos y sus conexiones. Representan mentalmente la situación en imágenes. Las imaginaciones internas se ven afectadas principalmente por fuertes asociaciones con situaciones que han experimentado.
- **Estrategias de pensadores integrados:** Muestran un equilibrio entre la realidad y las matemáticas al combinar formas de pensamiento visual y analítico, al cambiar flexiblemente entre las diferentes representaciones o formas de proceder.

**(c) Metacognición:** En la modelización, los sistemas conceptuales que desarrollan los estudiantes son “matemáticamente significativos, los constructos que se extienden, revisan o refinan pueden incluir versiones situadas de algunos de los constructos elementales más poderosos y profundos” (Lesh y Doerr, 2003, p. 5) que los obtenidos por métodos tradicionales, donde las descripciones, explicaciones y construcciones no son simplemente procesos que los estudiantes utilizan en el camino para producir una respuesta, el desarrollo del pensamiento de esta es lo más importante. En este proceso se aplica la metacognición entendiéndose como el proceso de reflexionar en elementos del problema, las estrategias utilizadas para resolverlo y las dificultades encontradas en este proceso. Es decir, un conocimiento de carácter metacognitivo es donde el resolutor se autorregula, monitorea y controla los heurísticos y los conocimientos, permitiendo que pueda tomar decisiones acertadas sobre lo que hace (Shoenfeld, 1985, 1992). Para el profesor poseer este conocimiento es muy importante, pues al estimular la metacognición en sus estudiantes puede desarrollar un proceso más efectivo e ideal de la modelización.

**(d) Factores no cognitivos:** El profesor debe ser consciente que los factores no cognitivos, como las emociones, actitudes y creencias juegan un papel determinante al resolver un problema de modelización (Mason, 2016; Shoenfeld, 1985, 1992). El profesor es el encargado de promover

actitudes y creencias positivas hacia las matemáticas a través de la acción de aula, por medio de la participación activa, la perseverancia, incentivar la confianza en la utilidad de las matemáticas, entre otro. Esto se podría hacer a través de la modelización al utilizar contextos reales que motiven a los estudiantes a participar activamente y estimule su interés al aprender.

### ***Categoría 3. Disposición al resolver un problema de modelización matemática***

No sólo es fundamental resolver el problema, sino también la disposición del estudiante de querer hacerlo. Es decir, si el profesor plantea un desafío adecuado, donde los estudiantes son involucrados emocionalmente (factores afectivos) y liberan estructuras mentales poderosas en ellos como el intelecto y motivación e interés que afectan directamente el proceso (Piñeiro, 2019).

La disposición tiene relación con el papel que juega el que un resolutor acepte el desafío de resolver el problema. Concretamente, se refiere a que una vez que se está frente a una tarea que es realmente un problema, el resolutor debe aceptar involucrarse en un proceso de resolución. Asimismo, se diferencia entre la disposición y la motivación. La disposición tiene más que ver con un acto de voluntad, es decir, aceptar el desafío de resolver un problema, que con la motivación.

Finalmente, en la tabla 25 exponemos a manera de resumen las componentes referentes al conocimiento sobre la resolución de problemas de modelización.

**Tabla 25**

#### ***Componentes del conocimiento sobre la resolución de problemas de modelización***

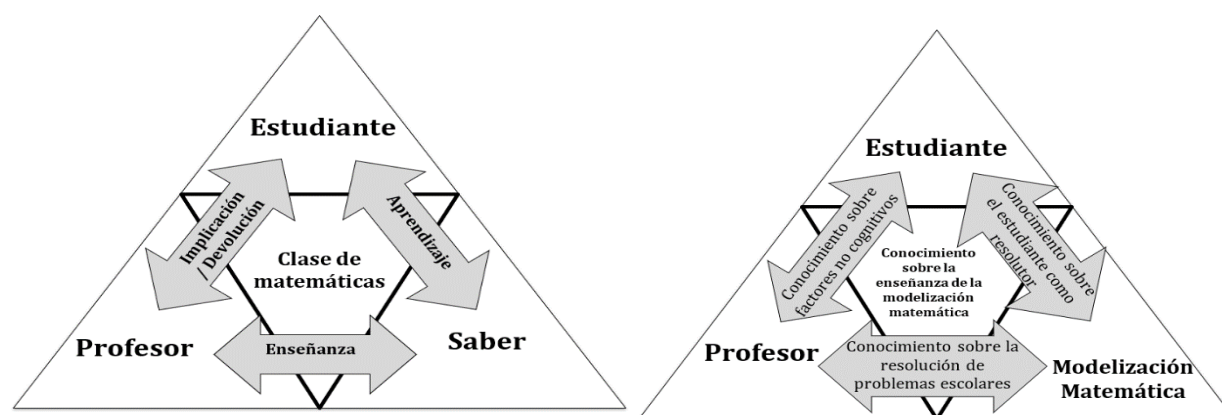
| <b>Componente</b>                                    | <b>Conocimientos</b>                                                                                                                       |
|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Noción del problema de modelización                  | Conceptos básicos de modelización<br>Problema de modelización<br>Consideración del resolutor<br>Tipos de tareas existentes de modelización |
| Resolución de un problema de modelización matemática | Ciclos de modelización y sus características<br>Estrategias<br>Metacognición                                                               |
| Disposición                                          | Factores no cognitivos<br>Disposición al resolver un problema de modelización matemática                                                   |

## 4.2 CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN

Para establecer las componentes de este tipo de conocimiento didáctico del profesor sobre la resolución de problemas de modelización utilizamos como guía el triángulo didáctico estudiante-profesor-resolución de problemas de modelización y sus interacciones (Schoenfeld, 2012). En estas interacciones dan origen a la relación estudiante-profesor, profesor-modelización, estudiante-modelización y el conocimiento sobre la enseñanza de la modelización como se presenta en la figura 38. Específicamente estas componentes son: (a) conocimiento sobre el estudiante como resolutor de tareas de modelización, (b) la resolución de problemas de modelización como tarea escolar, (c) factores no cognitivos y (d) la gestión de la enseñanza de la resolución de problemas de modelización matemática.

**Figura 38**

*Triángulo didáctico del conocimiento sobre la enseñanza de la modelización*



*Fuente:* Adaptación del triángulo didáctico del conocimiento de resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019).

### ***Categoría 1. Conocimiento sobre el estudiante como resolutor de tareas de modelización***

Corresponde a la interacción entre el estudiante y la resolución de problemas de modelización matemática, específicamente con los elementos concernientes al aprendizaje.

**(a) Características de resolutores de tareas de modelización:** Aquí se incluye las características de un resolutor competente en modelización. Entendiendo como las competencias de modelización “las destrezas y habilidades necesarias para realizar procesos de modelización

de manera adecuada y orientada a objetivos, así como la voluntad de ponerlos en práctica” (Maaß, 2006, 117). En la investigación sobre la modelización matemática distinguimos entre competencias y subcompetencias. Blum y Kaiser (1997) proponen una tipología de subcompetencias relacionadas con cada una de las etapas del ciclo de modelización, que la hemos adaptado como una lista de características para un estudiante competente al resolver problemas de modelización:

- **Comprende el problema real y establece un modelo basado en la realidad significa:** Hace suposiciones sobre el problema y simplifica la situación, reconoce las cantidades que influyen en la situación, nombra e identifica variables clave, construye relaciones entre las variables y diferencia entre información relevante e irrelevante.
- **Construye un modelo matemático a partir del modelo real significa:** matematiza y simplifica cantidades relevantes y sus relaciones, si es necesario, elige notaciones matemáticas apropiadas y representa situaciones gráficamente.
- **Resuelve cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático:** utiliza estrategias heurísticas como la división del problema en partes, estableciendo relaciones con problemas similares o análogos, reformulando el problema, viendo el problema en una forma diferente, variando las cantidades o los datos disponibles, entre otros. También utiliza el conocimiento matemático para resolver el problema.
- **Interpreta resultados matemáticos en una situación real:** interpreta resultados matemáticos en el contexto extramatemático, generaliza las soluciones que se desarrollaron para una situación especial, demuestra soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y / o comunica las soluciones.
- **Valida la solución significa:** revisa críticamente y reflexiona sobre las soluciones encontradas; para revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelización si las soluciones no se ajustan a la situación, reflexiona sobre otras formas de resolver el problema o si las soluciones pueden ser desarrolladas de manera diferente, discute en general las limitaciones del modelo.

Kaiser y Brand (2015) plantean competencias globales de la modelización. Además, incluimos el conocimiento sobre el estilo de pensamiento matemático de los estudiantes (analítico, visual e integrado), con el cual seleccionan las estrategias o modos de proceder para resolver problemas, contemplando las rutas de razonamiento en la modelización (Borromeo Ferri, 2018). Involucramos las tareas cognitivas que el sujeto realiza en cada una de las etapas del proceso de modelización.

**(b) Dificultades y errores de los estudiantes en procesos de modelización:** implica conocer y comprender las posibles dificultades que los estudiantes pueden presentar al resolver un problema de modelización, siendo expresadas a través de los errores como indicadores de la

comprensión conceptual de los estudiantes (Piñeiro, 2019). Específicamente son dificultades y errores de los estudiantes, obtenidas durante las etapas del proceso de modelización.

En general, este tipo de conocimiento del profesor permite poner atención a las fortalezas y debilidades e interpretarlas adecuadamente desde la posición de los estudiantes, en función de observar la comprensión conceptual del problema de modelización. Tener estos conocimientos permite al profesor tomar decisiones para acompañar a sus estudiantes, brindando estrategias de resolución con un mayor grado de eficiencia, al mismo tiempo que limita las expectativas de aprendizaje que espera construir con sus estudiantes y brinda estrategias de corrección de errores durante las etapas del proceso de modelización matemática, entre otros. Específicamente, en la tabla 26 presentamos las dificultades más comunes de los estudiantes al trabajar la modelización.

**Tabla 26**

*Dificultades más comunes de los estudiantes en la modelización de problemas*

| <b>Autores</b>                                                                                                                                                                             | <b>Dificultad</b>                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Crouch y Haines (2007); Deniz y Kurt (2022); Eraslan y Kant (2015); Galbraith y Stilman (2006); Maaß (2007b); Porras y Castro-Rodríguez (2021); Schapp et al. (2011); Wijaya et al. (2014) | El estudiante no comprende las partes esenciales del problema, es decir realiza una lectura superficial del problema, dejando de lado detalles relevantes o tomando en cuenta información no importante del problema.         |
| Crouch y Haines (2007); Deniz y Kurt (2022); Eraslan y Kant (2015); Maaß (2007b); Porras y Castro-Rodríguez (2021); Schapp et al. (2011); Wijaya et al. (2014)                             | Al crear y construir un modelo, es decir al realizar suposiciones erróneas los estudiantes crean modelos inapropiados para el contexto, lo que manifiesta una inconsistencia entre el mundo real y el modelo matemático.      |
| Crouch y Haines (2007); Deniz y Kurt (2022); Edo, et al. (2013); Eraslan y Kant (2015); Maaß (2007b); Porras y Castro-Rodríguez (2021); Schapp et al. (2011); Wijaya et al. (2014)         | Al utilizar conceptos y procedimientos matemáticos inapropiados para resolver el problema, es decir al utilizar las propiedades matemáticas incorrectamente o realizar errores de cálculo.                                    |
| Crouch y Haines (2007); Deniz y Kurt (2022); Edo, et al. (2013); Eraslan y Kant (2015); Galbraith y Stilman (2006); Maaß (2007b); Porras y Castro-Rodríguez (2021); Wijaya et al. (2014);  | El estudiante no evalúa la razonabilidad de una solución matemática en el contexto de un problema del mundo real, es decir no realiza una validación y reflexión que permitan conectar el mundo matemático con el mundo real. |

***Categoría 2. Problemas de modelización como tarea escolar***

Como producto del análisis del currículo, en esta componente consideramos las perspectivas teóricas de la modelización. Corresponde a la interacción producida entre el profesor y la

modelización, implica conocimientos relativos al problema y el proceso de resolución como tarea escolar. Ubicamos conocimientos sobre la tarea como problema y del proceso de modelización, es decir en términos de sus características matemáticas desde la perspectiva del resolutor. En tanto, este conocimiento didáctico, corresponde a características como tarea escolar, es decir como una tarea que provocará aprendizajes. Por ejemplo, podría ayudar al maestro a replantear las tareas cuando los estudiantes se atascan o realizar modificaciones a los problemas para atender adecuadamente a estudiantes con adecuaciones como con talento o con deficiencias cognitivas.

**(a) Selección de tareas de modelización:** aquí contemplamos elementos estructurales de la tarea como los principios de creación de tareas de modelización propuestos por Borromeo Ferri y Lesh (2013), además de Lesh y Doerr (2003). Las tareas de modelización que los profesores utilicen deben ser cognitivamente exigentes para los estudiantes con el fin de promover varias prácticas, como el razonamiento y la comunicación. En la selección de tareas, parte esencial para el proceso de modelización es seleccionar y utilizar en forma adecuada un problema, lo cual es una labor fundamental de la tarea de profesor para lograr el objetivo del proceso. Elegir un problema de modelización con un contexto interesante para los estudiantes, que sea adecuado para ellos, y al mismo tiempo sea auténtico y de la realidad circundante. Además, con el cual podamos estimular todas las etapas del ciclo de modelización. Como parte de la elección del problema, es indispensable resolver el problema previamente, siguiendo todas las etapas del ciclo de modelización. Esto permitirá tomar en cuenta previamente, todos los posibles modelos matemáticos que pueden surgir del problema, también todas sus múltiples soluciones. En resumen, proponemos una lista de características para construir o seleccionar un problema de modelización adaptada de Borromeo Ferri y Lesh (2013), además de Lesh y Doerr (2003):

- El contexto del problema debe estar basado en el entorno familiar, físico, social, cultural y científico del estudiante.
- Debe generar la necesidad de construir y modificar un modelo matemático.
- Debe tener condiciones necesarias para que el estudiante pueda decidir sobre la utilidad y le permitan avanzar con sus primeras suposiciones.
- Debe tener pautas claras para plasmar sus pensamientos matemáticos en forma explícita.
- Al resolver un problema, la solución de este puede servir para motivar la resolución de otros problemas con contextos similares y que se pueden resolver de la misma manera.
- El estudiante puede crear y formular otros caminos de solución para resolver el problema.

**(b) Modelos teóricos de modelización matemática:** El profesor debe tener conocimiento acerca de las perspectivas teóricas de la modelización que existen actualmente como la Modelización aplicada o realista de Haines y Crouch (2005), la Modelización educacional de Blum y Leiß (2007) y Niss et al. (2007), la Modelización cognitivo y afectivo de Borromeo Ferri (2006), la Modelización epistemológica o teórica de Chevallard (1989), la Modelización desde una visión sociocrítica de autores como Biembengut y Hein (2002); Rosa y Orey (2018) y por último, la perspectiva de Modelización contextual de Lesh y Doerr (2003). Con el fin, de entender, estimular y ayudar a la construcción del conocimiento durante la aplicación de las etapas del ciclo de modelización que los estudiantes realicen al resolver un problema.

**(c) Invención de problemas de modelización matemática:** Dentro de las etapas del proceso de modelización podemos utilizar la invención de problemas, también modificar condiciones para producir un nuevo problema (Ayllón, 2012; Galbraith y Stillman, 2006). Otra alternativa es la adaptación de un problema matemático a uno de modelización, el cual puede estar en un libro escolar o en alguna otra fuente bibliográfica (Borromeo Ferri, 2018). Conocer e implementar este tipo de estrategias de enseñanza en el aula de matemática y otras más, requiere de un conocimiento sobre cuál es el momento indicado para llevar a cabo la invención de problemas (Silver, 1994), además de cuáles son las estrategias adecuadas de enseñanza en el enfoque de invención de problemas de modelización (Hansen y Hana, 2015). Esta competencia profesional no es trivial y necesita de tiempo para poder llevarla a cabo, más si hablamos de la creación de problemas de modelización, pues es pensar y buscar el contexto apropiado según el nivel educativo del estudiante, pensar sobre la complejidad de la tarea en conexión con el tiempo de trabajo y los materiales que los estudiantes necesitan para modelar el problema (Borromeo Ferri, 2018).

### ***Categoría 3. Factores no cognitivos***

Es referido a la interacción entre el profesor y el estudiante en términos de los factores no cognitivos (emociones, actitudes y creencias) de cada uno en torno a la resolución de problemas de modelización. Por ejemplo, su forma de actuar y sus propias creencias afectan al comportamiento de los estudiantes y su forma de resolver problemas de modelización. También el manejo del docente en emociones como la ansiedad y frustración del estudiante, así como el estímulo que puede ejercer este con la formación de actitudes como la tolerancia, preservación,

responsabilidad, entre otros, al resolver un problema de modelización matemática. Fomentar creencias relativas al tiempo necesario para resolver un problema de modelización, las múltiples opciones de resolución o posibilidad de varias respuestas o la factibilidad de volver a algunas de las etapas del proceso de modelización, son responsabilidad del profesor que gestiona la clase, es decir, es importante que el profesor conozca que su forma de actuar, la gestión de clase y sus propias creencias afectan el comportamiento de los estudiantes y su forma de resolver problemas de modelización (Borromeo Ferri, 2018). Un ejemplo particular lo tenemos en la creencia de preferir problemas cerrados con una única solución versus los problemas abiertos que pueden tener múltiples soluciones o no tener solución. Dado que muchos profesores fueron enseñados bajo el enfoque de enseñanza tradicional, donde predomina la memorización de mecanismos por excelencia y la solución siempre es única (Blum, 2015). O si tiene varias soluciones tienden a favorecer fuertemente su propia solución, debido a que es más fácil enseñarla, ya que la diversidad de procedimientos de resolución puede hacer incontrolable el problema de modelización y además, muchas de estas puede que tengan posibles soluciones no tan obvias (Blum, 2015). Para sintetizar, de la literatura (Borromeo Ferri, 2018; Blum, 2015; Cetinkaya et al., 2016; Frejd, 2012; Shahbari, 2018) sistematizamos una lista de creencias de y sobre la modelización:

- La modelización matemática es el uso de materiales concretos y manipulativos en la enseñanza de las matemáticas.
- Solo existe una única forma de resolver el problema de modelización.
- Un problema de modelización se resuelve en poco tiempo, sino no se puede resolver.
- En un problema de modelización no es necesario revisar los procesos matemáticos, ni la solución final.
- Solo existe una única forma de resolver un problema de modelización.
- Un problema de modelización se debe resolver en forma individual.
- El maestro debe contestar todas las preguntas del estudiante o formular preguntas directas que lo guíen a la solución del problema de modelización.
- No es necesario integrar los conceptos matemáticos con su aplicación en la vida cotidiana.
- La matemática es útil en situaciones de la vida real.
- Lo más importante al resolver un problema de modelización es el modelo matemático y el encontrar una solución de este.
- Al enseñar la modelización puedo usar cualquier problema matemático de los libros.
- Los problemas de modelización deben ser complicados y que se usen bastantes conocimientos no matemáticos.
- Al enseñar bajo el enfoque de modelización matemática es importante el manejo de las emociones del estudiante como la ansiedad y frustración.

- En la enseñanza de la modelización matemática es relevante que el maestro forme actitudes en el estudiante como la tolerancia, la perseverancia, la responsabilidad, entre otros.

#### ***Categoría 4. Gestión de la enseñanza de la resolución de problemas de modelización***

Aquí se sitúan los modelos o enfoques de enseñanza que fomentan y propician actuaciones en el aula que promueven el desarrollo de la resolución de problemas de modelización matemática:

**4.1 Enfoques de enseñanza de la modelización:** Corresponden a los enfoques que fomentan y propician las acciones que debería aplicar el profesor en el aula durante la enseñanza de la modelización. La investigación de Blomhøj y Jensen (2007) brinda dos enfoques para formar las competencias de modelización. El primero es el enfoque holístico, el cual incentiva el abordaje eficaz de problemas de modelización en forma completa, pero la complejidad del problema debe ir acorde al nivel de las competencias de los estudiantes. El segundo enfoque es el atomístico, el objetivo es formar por separado las subcompetencias a través de las etapas individuales de todo el proceso de modelización, dado que resolver este tipo de problema conlleva demasiado tiempo. ¿Cuál es el objetivo central de la lección de modelización? Esta interrogante debe ser contestada para elegir el enfoque apropiado para enseñar la modelización, es decir pensar si la lección seguirá el objetivo de profundizar en la comprensión de un determinado contenido matemático, a través del problema de modelización. O si sigue el fin de capacitar con mayor profundidad a los estudiantes en etapas específicas del ciclo de modelización. O si la finalidad de la lección está en observar el trabajo en equipo entre los estudiantes, con el objetivo de retroalimentarlos y ayudarlos a mejorar la efectividad durante la aplicación de una tarea de modelización.

Borromeo Ferri (2018) estudia las ventajas de ambos enfoques, inclinándose más por el enfoque holístico. Aunque el enfoque atomístico es ideal para acentuar las subcompetencias en detalle, el enfoque holístico es más adecuado para profesores con poca o nula experiencia en la enseñanza de modelización, trabaja un problema en forma conjunta, incentiva el significado y comprensión de la modelización. Provee a los profesores la posibilidad de diagnosticar qué subcompetencias deben fomentarse en los estudiantes y organizar tareas donde sean practicadas varias subcompetencias.

**4.2 Gestión del discurso:** Corresponde a todas las acciones (verbales o no) que devengan en una conducción de la clase en la que los estudiantes participen, colaboren y hagan un proceso exitoso

de modelización. Siendo relevante la capacidad del profesor al organizar y estructurar las lecciones de modelización, para obtener el mejor resultado cognitivo, al construir su conocimiento y autonomía de pensamiento. Es decir, fomentar el desarrollo de competencias propias y estrategias de resolución al resolver problemas de modelización. Requiere una capacidad cognitiva por parte del profesor, que es activada en labores como proponer estrategias metodológicas al realizar clases de modelización, también al administrar en forma adecuada el tiempo. Junto a esto, el profesor deberá supervisar el trabajo de tal manera que a través de preguntas pueda hacer conscientes a los estudiantes del significado de la modelización (¿Qué significa?), en qué etapa de su proceso de modelización se encuentran (¿En qué etapa me encuentro en el proceso?), estimular el pensamiento sobre su proceso de forma retrospectiva y metacognitiva (¿Qué etapas he atravesado? y ¿cuáles me faltan?). El profesor debe conocer este tipo de tareas metacognitivas y saber ejecutarlas en su enseñanza, pues constituyen parte crucial de la enseñanza y el aprendizaje durante la modelización. Estimular la escucha activa de los estudiantes como medio de aprendizaje.

Algunos autores recomiendan el uso del trabajo en grupos o aprendizaje cooperativo en la modelización (Borromeo Ferri, 2018). Donde los estudiantes discutan y reflexionan sobre las soluciones, mientras el profesor revisa cada uno de los grupos valorando su progreso y detectando las dificultades y errores, para utilizarlos en forma constructiva en otros momentos de la lección. Al desarrollar las tareas de modelización, es importante entender que incentivar el trabajo en equipo es esencial, pues permite construir en los estudiantes una estructura cognitiva poderosa más que solo una socialización entre pares. Por tanto, deberían emerger acciones que hagan que los estudiantes puedan discutir sus estrategias, mostrarlas a los demás, explicarlas y evaluarlas (fomentar espacios de participación activa), dando paso a la socialización del conocimiento (orientaciones constructivistas como el trabajo colaborativo). Incluimos las ideas de Leiß (2007) sobre la clasificación de intervenciones para las lecciones de modelización. Para esto, las intervenciones realizadas por maestros son investigadas y basadas en los estilos de enseñanza. Se dividen en dos tipos, un estilo *directivo* más guiado por el maestro y un estilo *operativo-estratégico* enfocado más en el trabajo independiente de los estudiantes en grupos. En los resultados de la investigación, encontramos que el último estilo, tuvo un progreso significativamente mayor en el desarrollo de la competencia de modelización en clases donde existió un equilibrio entre la independencia de los estudiantes y la orientación de los profesores.

Siendo lo anterior, acorde a los principios del constructivismo, donde promovemos que los estudiantes construyan su conocimiento en forma activa e independiente, con el profesor como un guía en este proceso.

**4.3 Gestión de los atascos:** En esta parte es necesario un conocimiento sobre el diagnóstico de las dificultades y problemas del estudiante mientras realiza el proceso de modelización. Para esto debe ser indispensable que los maestros sean capaces de entender y distinguir entre las etapas del proceso de modelización lo que es reflejado al enseñar. Además, es ineludible el uso de estrategias específicas de enseñanza que sirvan como herramientas para que el profesor pueda mediar o intervenir en los procesos de resolución, como representaciones alternativas para la comprensión del problema, sugerir el uso de estrategias metacognitivas, entre otros. También, aquí incluimos la capacidad del profesor de decidir cuándo y cómo intervenir para que el proceso mantenga su naturaleza. Tener este tipo de conocimiento permite al maestro ayudar a sus estudiantes, dándoles orientación adecuada. Borromeo Ferri (2018) menciona la teoría de intervención de Zech (1998) en la que plantea una taxonomía con la finalidad de brindar apoyo o asistencia para que los estudiantes logren por si solos la solución del problema, hasta donde fuera posible.

**4.4 Gestión de la evaluación:** Otro aspecto tiene relación con la gestión de la evaluación del proceso de resolver un problema. Este conocimiento permitiría a los docentes establecer metas que promuevan aprendizajes y que estas sean traducidas a instrumentos adecuados y variados (Borromeo Ferri, 2018). Borromeo Ferri (2018) distingue dos tipos de diagnóstico según el objetivo que persigamos. El primer tipo está concentrado en el producto realizado por el estudiante en forma individual (una prueba o examen). Los resultados pueden servir como indicadores del aprendizaje de los estudiantes y de toma de decisiones, para mejorar este si requiere. El segundo tipo, está orientado a comprender los procesos de pensamiento, con el fin de dar intervenciones adecuadas (cuadernos o diarios de aprendizaje, las tareas de aula, las entrevistas de diagnóstico, entre otros) que pueden revelar falencias conceptuales de los estudiantes.

Según Borromeo Ferri (2018), el profesor también debe saber realizar la retroalimentación adecuada para promover las competencias de modelización cuando son obtenidas las soluciones

escritas. Tratar con este tipo de solución es diferente a explicaciones verbales durante la implementación de una tarea de modelización en el aula. Pero, la evaluación sumativa o el calificar el trabajo de aula y en una prueba al final de un tema, requiere un conocimiento profesional más elevado del maestro que el utilizado en una prueba estandarizada. Los resultados de una prueba podrían servir de indicadores de diagnóstico de la competencia de modelización del estudiante. Junto con esto, Borromeo Ferri (2018) sugiere establecer criterios de evaluación con una distribución de puntos para las diferentes etapas del ciclo de modelización y las expectativas que el estudiante debe cumplir, en la solución de un problema de modelización.

**4.5 Gestión de los recursos:** Corresponde al uso de los recursos y materiales (tanto manipulativos como intangibles) por parte del profesor, cómo son involucrados y afectan al proceso de la modelización, es decir contempla tanto su manipulación, potencialidad y limitación. Este conocimiento del profesor debe contestar la pregunta: ¿qué recursos se necesitan para aplicar con éxito el problema de modelización? (Borromeo Ferri, 2018). Poseer este conocimiento podría ser de ayuda para el profesor al superar barreras en la aplicación del proceso de modelización como por ejemplo el contemplar los recursos y materiales necesarios para la implementación del problema. También, el uso de recursos adecuados puede ayudar a que las etapas del proceso de modelización sean realizadas sin requerir de mucho tiempo y por último, faciliten al profesor la evaluación de dicho proceso (Borromeo Ferri, 2018). Un caso específico, es el uso de la tecnología que tiene muchos beneficios en la modelización y por ello, es necesario pensar en el papel que juegan los recursos en el problema con respeto a la integración de estos en el ciclo de modelización.

Finalmente, en la tabla 27 presentamos en forma resumida las componentes del conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas de modelización.

**Tabla 27**

*Componentes del conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas de modelización*

| <b>Componente</b>                                   | <b>Conocimientos</b>                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Estudiante como resolutor de tareas de modelización | Características de resolutores de tareas de modelización<br>Dificultades y errores de los estudiantes en procesos de |

**Tabla 27**

*Componentes del conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas de modelización*

| <b>Componente</b>                            | <b>Conocimientos</b>                                                                                                                           |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                              | modelización                                                                                                                                   |
| Problemas de modelización como tarea escolar | Selección de tareas de modelización<br>Modelos teóricos de modelización<br>Invención de problemas                                              |
| Factores no cognitivos                       | Influencia mutua de creencias y concepciones                                                                                                   |
| Gestión de Enseñanza                         | Enfoques de enseñanza de la modelización<br>Gestión del discurso<br>Gestión de los atascos<br>Gestión de evaluación<br>Gestión de los recursos |

## **7. RESULTADOS FASE II: ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE LA MODELIZACIÓN**

---

Este capítulo presenta los resultados del *estudio 4* realizado para la fase 2, que da respuesta a los objetivos específicos “Identificar qué componentes del conocimiento sobre modelización matemática ponen en juego los maestros de primaria al enseñar la modelización” y “Caracterizar el conocimiento de los maestros de primaria en ejercicio sobre el proceso de modelización matemática”. En esta sección, mostramos los resultados en tres apartados según las categorías del conocimiento profesor sobre la resolución de problemas de modelización: (a) noción del problema de modelización, (b) resolución de un problema de modelización matemática y (c) disposición.

# 1. RESULTADOS DE COMPONENTE 1: NOCIÓN DEL PROBLEMA DE MODELIZACIÓN

A continuación, exponemos los resultados sobre la noción del problema de modelización de los profesores participantes. Los hallazgos son divididos en cuatro subcategorías: (a) nociones básicas de modelización, (b) problema de modelización, (c) consideración del resolutor y (d) tipos de tareas existentes de modelización.

## 1.1 NOCIONES BÁSICAS DE MODELIZACIÓN

Presentamos en primer lugar los resultados obtenidos sobre la noción de modelo. En segundo lugar, exhibimos los que corresponden a la noción de modelo matemático. Por último, mostramos las respuestas sobre la noción de modelización. A modo de resumen, en la tabla 28 presentamos dichos resultados:

**Tabla 28**

*Categorización de respuestas de profesores según las nociones básicas de modelización*

|                         | Aspectos                                         | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------------|--------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Modelo                  | Molde o persona a imitar                         | X  | X  |    | X  |    |    | X  | X  | X  | X   | X   |
|                         | Modelo de pasarelas                              | X  |    |    |    |    | X  |    |    |    |     | X   |
|                         | Modelo como proceso                              |    |    | X  |    | X  | X  |    |    |    |     |     |
| Modelo matemático       | Fórmula                                          | X  | X  |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
|                         | Estructura                                       | X  |    |    |    |    | X  |    | X  |    |     |     |
|                         | Procedimiento                                    |    |    | X  |    | X  |    |    |    | X  |     | X   |
|                         | Estrategia de enseñanza                          |    |    |    | X  |    |    | X  |    |    | X   |     |
| Modelización matemática | Transformación de situaciones reales y viceversa |    |    |    |    |    |    |    |    | X  |     |     |
|                         | Nuevo proceso de enseñanza                       | X  |    |    | X  |    | X  |    | X  |    | X   | X   |
|                         | Proceso de aplicación de la matemática           | X  |    |    | X  |    |    |    |    |    |     |     |
|                         | Proceso para resolver                            | X  | X  | X  |    | X  |    | X  |    |    |     |     |
|                         |                                                  |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |

## ***Noción de modelo***

Las nociones manifestadas por los profesores sobre *modelo* más frecuentes fueron en el primer lugar, *molde o persona a imitar*. Es decir, un arquetipo o punto de referencia o persona para imitar o reproducir por su perfección. Aquí, 8 de los profesores tuvieron esta noción de modelo (P1, P2, P4, P7, P8, P9, P10, P11). Por ejemplo, para el profesor (P8) el modelo es:

**Maestro 8:** algo que seguimos, que ya está estructurado y a lo que le damos un seguimiento precisamente según esa estructura establecida.

En segundo lugar, el *modelo de pasarelas*, es decir una persona encargada de exhibir creaciones de moda. Dicha noción la evidenciaron 3 de los profesores (P1, P6, P11), como el profesor 6 (P6) que manifiesta que un modelo es:

**Maestro 6:** un modelo de modas.

En tercer lugar, el *modelo como proceso*, es decir cuando el modelo aún no es un producto acabado, sino que aún necesita ser ampliado o conformado por medio de un proceso. Tres profesores (P3, P5, P6) evidenciaron dicha acepción en frases que hacen referencia a una *estructura* como la brindada por el profesor 6, donde un modelo:

**Maestro 6:** puede ser algún sistema estructurado, o sea algo que ya está estructurado y que se tiene que trabajar.

## ***Noción de modelo matemático***

En primer lugar, encontramos que este es *una fórmula o un sistema de representación algebraica*, lo cual es evidenciado por dos profesores (P1, P2) en sus comentarios. Por ejemplo, el profesor 2 (P2) cuando usa términos como *fórmula* en su respuesta:

**Maestro 2:** modelo matemático tiene que ver con fórmulas, como por ejemplo en el caso del cuadrado al usar la fórmula del perímetro al sumar los lados.

En segundo lugar, un modelo matemático es *una estructura*, debe poseer ciertas características que no pueden ser cambiadas y que sirven de guía para un determinado fin. Tres profesores (P1, P6, P8) nos dieron esta respuesta, como lo expresa el profesor 6 (P6) que hace referencia a un *sistema estructurado*:

**Maestro 6:** ...digamos que se puede uno guiar ahí, con la parte del sistema de numeración, que eso ya está estructurado y tienes que verlo como es. O sea, se pueden hacer algunas variaciones pedagógicas, pero al final el modelo está estructurado de esa forma y así tiene que permanecer... todo modelo tiene su estructura, en la parte de modelaje, ya sabemos que se busca las personas con ciertas características para

desarrollar esa tarea. Y en la parte matemática, igual. O sea que hay que seguir una estructura, para llegar a conseguir un fin.

En tercer lugar, hallamos que el modelo matemático es *un procedimiento o estructura de pasos* que deben seguirse para resolver un problema. Cuatro profesores (P3, P5, P9, P11) tuvieron esta acepción en etapas como *guía o pauta a seguir para resolver*. Un ejemplo sobre esto es:

**Maestro 11:** Yo lo entiendo como una guía, una pauta a seguir para resolver algo. Por ejemplo, usted me da un ejemplo de suma, alguna operación, para mí eso es un modelo matemático, tengo que seguir más o menos esas pautas como me están explicando.

Por último, 3 profesores (P4, P7, P10) mencionaron que un modelo matemático es *un conjunto de estrategias para la enseñanza de la matemática*. En el siguiente diálogo mostramos un ejemplo:

**Maestro 4:** me parece que es un conjunto como el de estrategias a aplicar en la enseñanza de la matemática.

### ***Noción de modelización***

En cuanto a la noción de *modelización*, en primer lugar, obtuvimos que solo uno de los profesores (P9) entiende la modelización como *un mecanismo que permite transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos y en forma inversa* a través de la abstracción y generalización (Erbaş et al., 2014). En la respuesta del profesor 9 (P9), lo anterior se evidencia en oraciones como pasar o transformar un tema de la vida cotidiana al sistema de representación simbólico-numérico.

**Maestro 9:** ...sería así como tomar algún tema de la vida cotidiana y por medio de la matemática busco pasarlo a números...

En segundo lugar, encontramos que varios profesores entendieron la modelización como *un proceso nuevo de enseñanza*. Por ejemplo, 2 profesores (P1, P11) la visualizan como un proceso actualizado de la enseñanza, donde la memorización no predomine y el desarrollo de las habilidades de los estudiantes sea esencial, para entender mejor de los conceptos matemáticos, un ejemplo es la respuesta del profesor 1 (P1) que menciona frases como *nueva tendencia, explotación de habilidades, menos memorización*:

**Maestro 1:** Es la nueva tendencia de hacer que ya no seamos tan sistemáticos y que el ser humano tenga más explotación de las habilidades. Creo que eso es lo que anda haciendo eso de la modelización matemática, cambiando a buscar más habilidades y

menos el memorizar.

Aquí mismo, ubicamos la modelización como una actualización de las metodologías de enseñanza donde impere la resolución de problemas de la vida real del estudiante. Un ejemplo de esta noción es la respuesta del profesor 10 (P10) que se manifiesta en frases como *más actual, resolución de problemas, participación de los estudiantes*, entre otros:

*Maestro 10:* ... es como dar a los estudiantes algo diferente, más actual, donde ellos experimenten por sí mismos la resolución de problemas que salga de ellos mismos... una metodología donde se integre a los estudiantes a que ellos también participen, sean ellos el eje principal, los autores de ese sistema...

Además, 3 de los profesores (P4, P6, P8) consideraron a la modelización como un *conjunto de estrategias* para impartir una clase de matemática. Esto fue encontrado en extractos que mencionaban frases como *serie de pasos, desarrollar un tema matemático* como:

*Maestro 4:* estructurar una serie de pasos para dar una clase o poder desarrollar un tema matemático.

En tercer lugar, hallamos respuestas de los profesores que consideraron la modelización *como un proceso de aplicación de la matemática*. Por ejemplo, al tratarla como la aplicación de lo que el estudiante aprende en la vida diaria. Un solo profesor (P4) manifestó la modelización como:

*Maestro 4:* la aplicabilidad del aprendizaje en la cotidianidad, en la vida diaria.

También, obtuvimos la modelización como un *proceso matemático ordenado y universal*, es decir que es aplicado en todas las partes del mundo y en todo lo que nos rodea, y puede hacerse de distintas formas. Esto lo encontramos en el comentario de solo profesor (P1) que hace referencia a frases como *matemática es universal*. Por ejemplo:

*Maestro 1:* Tenemos que enseñar que la matemática es universal. Que se habla en cualquier parte del mundo. Eso tiene que saberse, que busco una exactitud, porque no es exacta, porque hay cálculos y estimaciones. Entonces no es exacta. Y también enseñarles que lleva un orden. Pero que al llevar ese orden puede haber diferentes formas de hacerlo, no una sola.

En último lugar, la modelización es *un proceso para resolver*, aquí obtuvimos tres énfasis. En primer lugar, para *resolver problemas de la vida real*. Esta acepción la mostraron 2 profesores (P5, P7) en frases como *uso de la moneda hoy en día, resolver problemas*, como se muestra en:

*Maestro 5:* el objetivo es más que todo por el conteo o el uso de la moneda hoy en día. Es lo básico que tiene el ser humano y como resolver problemas.

El segundo énfasis, es como una forma de resolver problemas que usan los estudiantes a través de procedimientos para adquirir conocimiento. Esta noción la brindó solo un profesor (P3) al decir oraciones como *hacer el procedimiento*, *resolver problemas*, como mostramos en la respuesta:

**Maestro 3:** Hacer el procedimiento. O sea, digamos, la resolución de problemas, en el caso de un modelo de matemática, enfocar bien el modelo, el problema y resolverlo, sea una forma de resolver los problemas.

Como tercer énfasis obtuvimos, la modelización como un proceso de aplicación de fórmulas para resolver algo que podemos hacerlo de distintas formas. Dos profesores (P1, P2) realizaron esta acepción, al usar frases como usar *fórmulas* y usar *contexto reales* en sus respuestas, en particular la mostramos en la siguiente frase:

**Maestro 2:** Usar las fórmulas para hacer estimaciones a largo plazo como por ejemplo al usar Excel y aplicar fórmulas para hacer una estimación dentro de 10 años de un determinado tema, tomando en cuenta por ejemplo el género de la población.

## 1.2 PROBLEMA DE MODELIZACIÓN

Para esta sección, los profesores participantes manifestaron, cuatro características que debe poseer un problema de modelización: (a) contexto real, (b) formato del problema, (c) estimular el análisis del estudiante y (d) modelo matemático. A manera de resumen, en la tabla 29 mostramos los resultados obtenidos.

**Tabla 29**

*Características que debe tener un problema de modelización*

| Aspectos                              |                                            | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|---------------------------------------|--------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Contexto real                         | Contexto real cotidiano                    | X  | X  | X  | X  | X  |    |    |    | X  |     | X   |
|                                       | Contexto real del estudiante               | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X   | X   |
|                                       | Contexto relacionado con otras disciplinas |    |    |    |    | X  | X  |    |    | X  |     |     |
|                                       | Incentiva el interés del estudiante        |    |    |    |    |    |    |    | X  |    |     |     |
|                                       | Formato del problema                       | X  | X  | X  | X  |    | X  | X  |    |    |     |     |
| Estimula el análisis del estudiante   |                                            |    |    |    |    |    |    | X  |    |    |     | X   |
| Modelo matemático                     |                                            |    | X  |    |    |    |    |    |    | X  |     | X   |
| Diferencias entre un problema MM y un |                                            |    |    |    |    | X  | X  |    | X  | X  |     |     |

**Tabla 29**

*Características que debe tener un problema de modelización*

| Aspectos            | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| problema cualquiera |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |

### ***Contexto real***

Como primera característica obtuvimos que el problema debe tener un *contexto real*. Sobre esto, obtuvimos cuatro clasificaciones de respuesta. En primer lugar, 7 profesores (P1, P2, P3, P4, P5, P9, P11) mencionaron el *contexto real al usar situaciones de la vida cotidiana*, como el realizar una receta de cocina que es una actividad que efectúa cualquier persona en algún momento de su vida. Un ejemplo, es la respuesta del profesor 9 (P9):

*Maestro 9:* ...situaciones de la vida cotidiana. En este caso, todos cocinamos en algún momento de nuestras vidas. Entonces están tomando como esas situaciones y ya la están usando a un problema matemático.

En segundo lugar, una característica de un problema de modelización es poseer un *contexto real del estudiante*. Esta característica fue mencionada por todos los profesores, al brindar respuestas donde sugerencias de mejora de los problemas en cuanto al contexto, como el incluir actividades diarias de la familia, como el realizar ventas para ganar dinero. Además, destacaban lugares de la misma comunidad, como la iglesia del barrio que debe ser conocida por el estudiante. Sobre esto, presentamos la respuesta del profesor 4 (P4):

*Maestro 4:* Claro que sí, el entorno inmediato. ¡A mira, si la iglesia! van a decir los guilas... incluso creo que si van a hacerlo ahí, van a querer estar en frente de la iglesia y poder probarlo de forma práctica.

En el tercer lugar, obtuvimos el uso del *contexto real relacionado con alguna disciplina* debe ser una característica de un problema de modelización. Esto lo encontramos en las respuestas de 3 profesores (P5, P6, P9), que expusieron la relación de la materia de estudios sociales con la matemática. Inclusive el profesor 6 brindó una sugerencia de mejora al problema 2, que evidenciaba dicha relación. El profesor 9 (P9) detalla que el tema de relieve se puede usar para resolver problemas matemáticos, como lo presentamos en su respuesta:

**Maestro 9:** Genial en el sentido, qué bonito, que cada situación de la vida cotidiana se pueda incluir o así en la matemática. Porque, en este momento que quisieran saber algo, del relieve que para uno simplemente es un tema de estudios sociales y de ahí no pasa. Y saber que uno lo puede complementar así con la resolución de problemas matemáticos, entonces me parece muy bien.

La cuarta clasificación, corresponde a la respuesta dada por el profesor 8 al mencionar que el problema de modelización debe poseer *un contexto real utilizado que despierte el interés* de los estudiantes. Por ejemplo, en la respuesta del profesor 8 (P8), menciona que aspectos brindados en el problema 1 como los ingredientes de una receta pueden lograr que el estudiante muestre interés por resolver el problema propuesto.

**Maestro 8:** Puede primero despertar el interés del estudiante. Y es algo con lo que está muy relacionado el tipo de ingredientes, por ejemplo, que utilizan, cuál es la cantidad, entonces me parece que es llamativo.

### ***Formato del problema***

La segunda característica, corresponde a aspectos de formato que debe poseer el problema. Encontramos que 7 profesores (P1, P2, P3, P4, P6, P7, P8) brindaron características sobre el formato del problema al presentarse en forma física al estudiante para resolverlo. Algunas respuestas hacen referencia a elementos como el poseer los datos necesarios para resolver el problema (P1, P2, P6). También sobre la extensión del problema, es decir debe ser más corto en extensión de texto y más concreto para el nivel de primaria (P1, P4, P7). Otro aspecto mencionado fue el colocar preguntas separadas y no seguidas como se presentan en los problemas, pues los estudiantes solo contestan la primera pregunta y se olvidan de la siguiente pregunta (P2). Además, que el problema debe ser comprensible para el estudiante (P2, P3, P8), es decir ser claro, estar bien redactado y tener un vocabulario adecuado para el lector, entre otros. En la respuesta del profesor 2 (P2) hallamos aspectos como el tener una *buena redacción, debe tener preguntas, datos*, entre otros; que hacen referencia a elementos estructurales.

**Maestro 2:** Debe estar muy bien redactado para que entienda lo que se pide, pues muchas veces el estudiante no entiende lo que se pide, por una mala redacción... Y debe tener preguntas. Debe tener datos y debe tener algo a resolver, algo que yo pueda resolver y alguna interrogante.

### ***Estimular el análisis del estudiante al resolver el problema***

Como tercera característica, tenemos que el problema de modelización debe estimular el análisis del estudiante al resolver dicho problema. Esta característica fue mencionada por dos profesores (P7, P11) al expresar frases como *analicen, pensar*, como lo indica el profesor 7(P7):

*Maestro 7:* Supongo que es un buen problema para que los chicos analicen.

### ***Modelo matemático***

En la cuarta característica, encontramos que el problema de modelización debe generar la necesidad de resolverlo con la matemática, es decir que se genere un modelo matemático y que se resuelva este. En esta parte, obtuvimos las respuestas de 3 profesores (P2, P9, P11). Un ejemplo es la respuesta del profesor 9 (P9):

*Maestro 9:* Yo diría que podría como que sí, en cuanto esos problemas de la vida cotidiana se pueden, buscar alguna estrategia para cuantificarlo, para pasarlo a números o cosas así.

### ***Diferencias entre un problema de modelización y un problema cualquiera***

Las respuestas de 4 de los profesores (P5, P6, P8, P9) mostraron diferencias entre un problema de modelización y otro problema. Un ejemplo es la *forma de representar y desarrollar un problema de modelización* en el aula. Esto se observa cuando el profesor 6 (P6) nos dice que, una diferencia es la manera de *abarcarse el problema*, de cómo *visualizarlo y desarrollarlo*. Es decir, la forma de como *representar* el problema.

*Entrevistadora:* Ok, ahora, ¿qué aspectos diferencian un problema de modelización con cualquier otro tipo de problema? ¿Qué le verías diferente?

*Maestro 6:* ¿Qué vería ser diferente? Digo quizás la manera de abarcar el problema.

*Entrevistadora:* ¿O sea la forma de cómo estructurarlo?

*Maestro 6:* La forma de cómo poder visualizarlo y después desarrollarlo. Saber qué capacidades puede contar uno con las personas involucradas, para ver si por un lado uno lo puede desarrollar o tiene que buscar otros medios para poder alcanzar lo que se requiere. Porque dependiendo de las poblaciones, algunas podrán captar por un lado y otras quizás puedan hacerlo mejor por el otro.

## **1.3 CONSIDERACIÓN DEL RESOLUTOR**

En esta sección, mostramos las respuestas dadas por los profesores sobre el papel que desempeña el resolutor para que una tarea matemática sea un problema de modelización. Los

resultados los clasificamos en: (a) el resolutor/estudiante desempeña el papel principal en la resolución de problemas de modelización y (b) tensiones en la consideración de resolutor. En la tabla 30 presentamos los resultados según el profesor participante que lo brindó.

**Tabla 30**

*Respuestas de profesores sobre la consideración del resolutor*

| Aspectos                                             | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| El resolutor/estudiante desempeña el papel principal |    |    | X  |    |    | X  | X  | X  |    | X   |     |
| Tensiones en la consideración del resolutor          |    | X  |    |    |    |    |    |    | X  |     |     |

***El resolutor/estudiante desempeña el papel principal en la resolución de problemas de modelización***

Encontramos las respuestas de cuatro profesores (P3, P6, P7, P8, P10) que mostraron justificaciones relacionadas al *proceso de enseñanza y aprendizaje en forma general* y no en forma específica hacia la modelización. Por ejemplo, lo expresado por el profesor 10 (P10) evidencia los papeles desempeñados por el estudiante y el profesor en ambientes constructivistas, pero no hay mención de que esto sea propiamente en la modelización. Esto se evidencia en oraciones estudiante *motivado, aprendizaje, disposición, apertura, interés del estudiante y el docente como facilitador*.

**Maestro 10:** Primero que el estudiante este motivado. Si un estudiante no está motivado o no tiene el interés hacia lo que se le está brindando, creo que no va a dar buenos resultados y que esté totalmente con esa apertura a recibir ese tipo de aprendizaje que él esté dispuesto. Osea, yo sé que el docente, nosotros somos facilitadores y como facilitadores tenemos también que brindarle las herramientas para que él produzca de manera correcta. Entonces tiene mucho que ver también la accesibilidad de él, de la apertura de él, el interés de él, la motivación que tenga.

**Entrevistadora:** ¿Entonces quiere decir que todo eso que me estás diciendo gira alrededor de él?

**Maestro 10:** Sí, claro que sí, él es el actor principal, pero nosotros somos facilitadores...

### ***Tensiones en la consideración del resolutor***

En segundo lugar, ubicamos respuestas que reflejan *tensiones en la consideración del resolutor*. Es decir, los profesores inicialmente consideran que el resolutor/estudiante desempeña el papel principal o más importante para que la tarea matemática sea un problema de modelización. Pero en el transcurso de la respuesta demuestra que no existe tal consideración. Sobre esto, dos de los profesores (P2, P9) dieron este tipo de percepción. Como lo expresa el profesor 2 (P2):

**Maestro 2:** Sí, en realidad, todo es de él. Ellos juegan el papel más importante. Porque ahí es donde uno ve si el problema está bien hecho y si ellos lo pueden resolver... A veces uno no los toma en cuenta. Y en cuanto a los ejercicios, pero realmente ellos juegan todo. Ahí es donde uno ve si lo hizo bien, si se dio a entender bien y si ellos lo pueden hacer bien.

En este diálogo, el profesor 2 enfatiza inicialmente que el estudiante juega un rol importante cuando una tarea matemática es de modelización. Sin embargo, hay contradicciones al expresar que hablamos tanto de *ejercicios como problemas* o al mencionar que a veces el profesor *no toma en cuenta* a los estudiantes. También al declarar

**Maestro 2:** ahí es donde uno ve si lo hizo bien, si se dio a entender bien y si ellos lo pueden hacer bien.

Lo que denota que más bien el protagonista principal es el docente y no el estudiante como fue mencionado por el profesor anteriormente.

## **1.4 TIPOS DE TAREAS EXISTENTES DE MODELIZACIÓN**

### ***Conocimiento sobre distintos tipos de problemas de modelización***

Para esta sección, mostramos las respuestas referidas a los tipos de tareas de modelización MEAs, MXAs, MAAs propuestas por Lesh y Doerr (2003). La información obtenida sobre el conocimiento de los profesores acerca de los tipos de problemas de modelización se organizó en tres patrones: (1) algunas similitudes con las MEAs, (2) un tipo de problema de modelización es un ejercicio matemático y (3) respuesta negativa, pues había docentes que no sabían sobre los distintos tipos de problemas de modelización. En la tabla 31, presentamos los resultados según las perspectivas obtenidas por profesor.

**Tabla 31**

*Resultados según el conocimiento sobre tipos de problemas de modelización*

| Aspectos                       | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|--------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Similitudes con las MEAs       |    |    |    |    | X  |    |    |    |    | X   |     |
| Problema de MM es un ejercicio |    | X  |    | X  |    |    |    |    |    |     |     |
| Respuesta negativa             | X  |    | X  | X  |    | X  | X  | X  | X  |     | X   |

En primer lugar, hallamos las respuestas de dos profesores, el profesor 5 y profesor 10 (P5, P10), que hacen alusión al uso de problemas con contexto real, donde encontramos *algunas similitudes con las MEAs*. Como evidencia, mostramos el diálogo del profesor 10 (P10) donde se expresa frases como el *contexto del estudiante* y algunos *momentos para gestionar una clase de modelización* (resolución del problema, conclusiones y cierre).

*Maestro 10:* Bueno, primero en tratar el contexto donde vive el estudiante... las características del lugar...

*Maestro 10:* Así, la situación problema. La situación problema, luego el estudiante resuelve de forma individualizada. También, digamos en la etapa en que ya se crearon las conclusiones y el docente al final brinda como un cierre...

El profesor brinda un ejemplo del tipo de contexto que propone para un problema, lo que coincide con el principio de significado personal propuesto por Lesh y Doerr (2003) para la construcción tareas de modelización. Además, menciona algunos de los momentos que propone el currículo de Costa Rica para trabajar las clases de matemática y que coinciden con lo propuesto al trabajar un problema en una actividad provocadora de modelos (MEAs), es decir la aplicamos en momentos de la clase como introducción, presentación y discusión, reflexión y conclusión o cierre. En segundo lugar, para dos de los profesores (P2, P4), *un problema de modelización es un ejercicio matemático*, al relacionarlo con tipos de ejercicios de distintos temas de matemática como el perímetro y el área, donde se utilizan contextos cotidianos del estudiante. Veamos:

*Maestro 2:* Si como los ejercicios, los distintos los que se usan al enseñar el perímetro y el área de una figura, otros como más analíticos y otros que tienen que ver con geometría. Sí, bueno, más que todo problemas de geometría, de buscar el área. Eso es que deben tener.

Por último, en tercer lugar, obtuvimos que 8 de los profesores que brindaron una respuesta negativa (P1, P3, P4, P6, P7, P8, P9, P11) pues *no tenían conocimiento* sobre distintos tipos de problemas de modelización.

## 2. RESULTADOS DE COMPONENTE 2: RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE MODELIZACIÓN

En este apartado exponemos los resultados sobre el proceso de resolución de problemas de modelización. Específicamente, recogemos los extractos que tratan sobre diversos aspectos que son activados durante el proceso de resolución de un problema de modelización. Presentamos los resultados atendiendo a cuatro categorías: (a) ciclos de modelización y sus características, (b) estrategias, (c) metacognición y (d) factores no cognitivos; de resolución de problemas de modelización.

### 2.1 CICLOS DE MODELIZACIÓN Y SUS CARACTERÍSTICAS

Para esta sección, agrupamos las respuestas que surgieron cuando se les pidió a los profesores ordenar las cuatro etapas del proceso de modelización: descripción, manipulación, predicción y validación. Para ello, brindamos a los profesores cuatro tarjetas con cada una de las etapas. Hemos categorizado las respuestas desde cuatro perspectivas. En primer lugar, el conocimiento sobre los ciclos de modelización. En segundo lugar, el conocimiento sobre el orden de las etapas del ciclo de modelización. Ubicamos como tercer lugar el comportamiento de las etapas. Por último, la repitencia de una misma etapa del ciclo de modelización al resolver un problema de modelización. La tabla 32 muestra los resultados según la respuesta de cada profesor.

**Tabla 32**

*Clasificación de respuestas de profesores sobre el conocimiento de los ciclos de modelización*

| Aspectos                                      |                  | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-----------------------------------------------|------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Conocimiento sobre los ciclos de modelización | Sin conocimiento |    |    | X  | X  |    |    | X  | X  | X  |     | X   |
|                                               | Algunas etapas   |    | X  |    |    | X  | X  |    |    |    | X   |     |
| Orden de las etapas                           | Ruta 1           | X  |    |    |    |    |    |    |    |    | X   |     |
|                                               | Ruta 2           |    | X  | X  | X  |    | X  |    | X  | X  |     |     |
|                                               | Ruta 3           |    |    |    |    | X  |    |    |    |    |     |     |
|                                               | Ruta 4           |    |    |    |    |    |    | X  |    |    |     | X   |
| Comportamiento de las etapas                  | En forma lineal  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X   | X   |
| Repitencia de las etapas                      |                  |    | X  |    |    |    |    |    |    |    | X   |     |

### ***Conocimiento sobre los ciclos de modelización***

En este apartado se agrupan los fragmentos de las respuestas de los profesores a cerca del conocimiento sobre cada una de las etapas del ciclo de modelización según la perspectiva teórica de Lesh y Doerr (2003): descripción, manipulación, predicción y validación. Particularmente, preguntamos a los profesores si conocían las etapas del ciclo de modelización al resolver un problema, encontrando dos clasificaciones: (1) profesores que no tenían conocimiento sobre las etapas del ciclo de modelización y (2) respuestas que mencionan algunas de ellas.

Hallamos que 6 de los profesores participantes (P3, P4, P7, P8, P9, P11) *no tenían conocimiento sobre los ciclos de modelización*, cuáles son los que existen en la literatura o en qué consisten cada una de las etapas del ciclo. Por otra parte, varios profesores (P2, P6, P10, P5) brindaron en sus repuestas *algunas de las etapas del ciclo de modelización*. Un ejemplo es la respuesta del profesor 2 (P2), que hace referencia al planteo de los datos de un problema asemejándose a la etapa de *descripción* del ciclo de modelización:

*Maestro2:* Sí. Lo principal es... ver que datos son los más importantes, porque algunos no son relevantes. Lo que se pregunta, para mí es importante... Siempre es importante que tengan claro eso, leer bastante, hacer una buena comprensión de lectura del ejercicio.

En el extracto de la respuesta, lo descrito hace alusión a la discriminación entre información que posee el problema, que es relevante y la que no. Además, en la respuesta observamos la importancia de la comprensión lectora de la información dada para la resolución del problema. Otra similitud es con respecto a la etapa de *manipulación* al realizar un modelo matemático (fórmula) y resolverlo, como mostramos en:

*Maestro2:* Luego hacer el planteo, ver que fórmula se puede utilizar y aplicar, que lo lean bien y luego ya después solucionar el ejercicio...

Asimismo, encontramos semejanzas con la etapa de validación del ciclo de modelización al mencionar frases como *la revisión de la información dada varias veces*.

*Maestro2:* revisar la información nuevamente y por último, redactar la respuesta. Y nuevamente volver a leer la pregunta a ver si está realmente bien la respuesta. Como realizar el planteo, operación y respuesta...

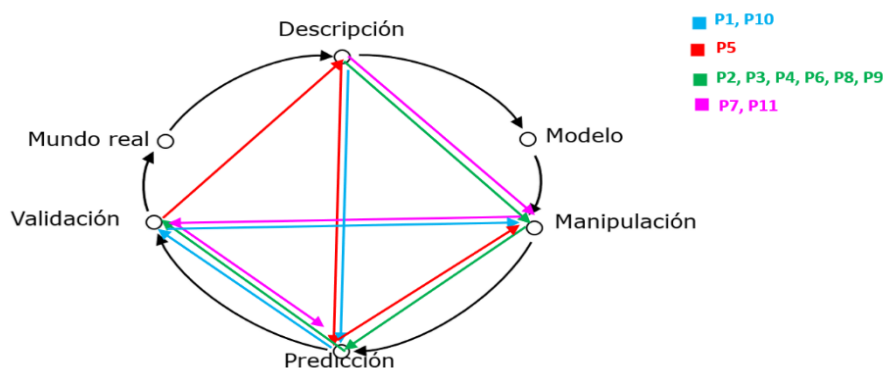
Finalmente, el profesor 2 (P2) concluye con la estructura: planteo, operación y respuesta. Específicamente, dos los profesores (P2, P5), afirmaron que las etapas del ciclo de modelización consistían en realizar dicha estructura mecánica, al resolver un problema de modelización.

### **Conocimiento sobre el orden de las etapas del ciclo de modelización.**

Los resultados obtenidos destacaron 4 *rutas de modelización* al resolver un problema. En la figura 39 describimos dichas rutas, donde hemos colocado las flechas directamente de etapa a etapa, pues los profesores no mencionaron detalles como el modelo matemático o el devolverse después de la validación al mundo real.

**Figura 39**

*Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización propuestas por los profesores*



*Fuente:* Elaboración propia.

Dos profesores (P1, P10) señalaron que el orden de las etapas del ciclo de modelización debía ser la *ruta 1*: Descripción, Predicción, Validación, Manipulación. Por ejemplo, el profesor 10 (P10) señala que:

**Maestro 10:** Yo haría el número uno: descripción, número dos: predicción, número tres: validación y número cuatro: manipulación.

**Entrevistadora:** ¿Y sólo una única vez? ¿O podría realizarlo varias veces?

**Maestro 10:** Este a varias veces sí, puede ser varias veces. Tal vez estoy indecisa porque también validación puede ser como al final de que ya resuelve la situación, puede ser también que realice una evaluación, un juicio.

En el caso de la *ruta 2*: Descripción, Manipulación, Predicción, Validación, hallamos que 6 profesores (P2, P3, P4, P6, P8, P9) manifestaron que el ciclo de modelización podría realizarse siguiendo dicha ruta, como lo expresa el profesor 2 (P2):

**Maestro2:** Ok, vamos a ver. El orden que seguiría sería: 1. Descripción, 2. Manipulación, 3. Predicción y 4. Validación. Y inclusive agregaría etapas, es decir no solo haría esas pues considero que se debe hacer una lectura profunda al inicio para entender el problema, sino puedes contestar cualquier cosa. Luego, plantearía los datos, también analizando que fórmula debo utilizar, una vez que ya tienen todos los datos realizan

ese ejercicio, reemplazo los datos y me devuelvo a revisar varias veces todo lo que tengo hecho. Por último, redactaría la respuesta considerando la información del ejercicio.

Particularmente, la *ruta 3*: Validación, Descripción, Predicción, Manipulación fue manifestada por un solo profesor 5 (P5). En el siguiente diálogo mostramos su respuesta:

*Maestro 5*: Porque dice que ahí realiza la evaluación o juicio, o sea el estudiante debe tomar validez sobre lo que va a leer con respecto al problema, yo diría que sería ahí. De segundo sería la descripción, porque ya ahí tiene que identificar y tiene que seleccionar y ordenar como va a ir con el problema. Y sigue la manipulación, que es donde va a hacer la operación, ya cuando tenga todo ordenado. Y al final que serían los resultados, qué sería la predicción.

Por último, la *ruta 4*: Descripción, Manipulación, Validación, Predicción la hallamos en las respuestas de dos profesores (P7, P11), como se presenta en la respuesta del profesor 4 (P4):

*Maestro 7*: Yo lo usaría: descripción, manipulación, validación y predicción...

*Maestro 7*: Porque dice que el estudiante identifica, selecciona y ordena la información relevante del problema, o sea, los datos que le van a servir para resolver el problema...

*Maestro 7*: La manipulación ahí realiza un procedimiento para resolver el problema, operaciones, dibujos, etc; lo que puede utilizar por eso pienso que es el segundo.

*Maestro 7*: Validación, pues ya se está evaluando lo que el chico hizo.

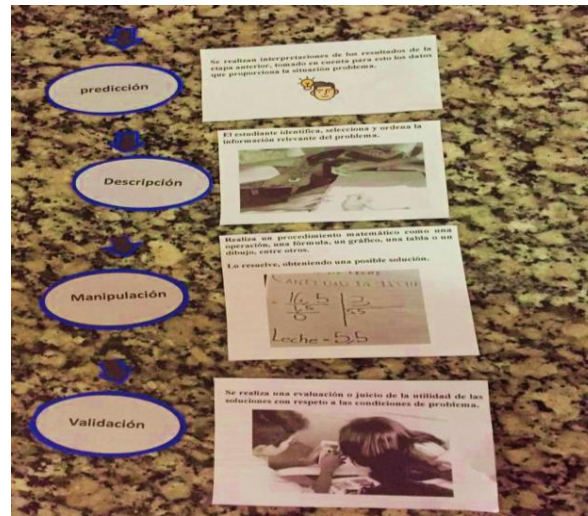
*Maestro 7*: Interpretaciones de los resultados, considero que sería lo último.

### ***Conocimiento sobre el comportamiento de las etapas del ciclo de modelización***

En este caso encontramos que todos los profesores consideraban que la construcción del pensamiento de los estudiantes debía realizarse linealmente. Particularmente, la figura 40 muestra el orden de las etapas que profesor 1 realizó cuando le pedimos ordenar las etapas manualmente. En este ejemplo, observamos como sobra una de las flechas que debería conectar la etapa 1 y etapa 4, que no tiene sentido en el lugar que fue colocada en el profesor en su ordenamiento.

**Figura 40**

*Ordenamiento de las etapas del ciclo de modelización del profesor 1*



Fuente: Elaboración propia.

### **Conocimiento sobre repitencia de una misma etapa del ciclo de modelización**

Preguntamos sobre la frecuencia en que el estudiante repite una misma etapa en el ciclo de modelización al resolver un problema. Ante esto, dos de los profesores (P2, P10) brindaron indicios sobre esta repitencia de las etapas. Como lo vemos en el extracto de la opinión del profesor 2 (P2), al mencionar que *el estudiante puede realizar las etapas que él requiera*.

**Entrevistadora:** ¿Cuántas veces podría un estudiante hacer esas etapas?

**Maestro2:** Las que sean necesarias para él... Por ejemplo, hay estudiantes que con solo una vez y ya, verdad realizan esos pasos, pero hay estudiantes que sí necesitan un poquito más al realizar esos esos pasos. Para estar más seguros, sobre todo aquellos estudiantes que son un poquito más metódicos o aquellos estudiantes que les cuesta un poquito más la materia.

## **2.2 ESTRATEGIAS**

Para esta sección, mostramos los extractos que tratan sobre las estrategias que pueden usarse en el proceso de modelización y que se agruparon en: (a) estrategias que consideran adecuadas los profesores al resolver un problema de modelización, (b) uso de estrategias generales y (c) sobre métodos matemáticos de resolución presentes en las estrategias propuestas.

### ***Estrategias que consideran adecuadas los profesores al resolver un problema de modelización***

Sobre las respuestas que aludían a las estrategias que consideran adecuadas los profesores al resolver un problema de modelización, se han podido agrupar en: (a) estrategias según el estilo de pensamiento y (b) uso de las etapas del ciclo de modelización como estrategia de resolución de problemas. En la tabla 33 presentamos en forma resumida, los resultados obtenidos por cada participante.

**Tabla 33**

*Respuestas sobre las estrategias de resolución de un problema de modelización*

| Aspectos                          | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-----------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Estilo de pensamiento             |    | X  |    | X  |    | X  | X  |    |    |     |     |
| Uso de las etapas de modelización |    |    |    |    | X  |    |    | X  |    |     |     |

En primer lugar, mostramos las respuestas referidas a estrategias según el *estilo de pensamiento* del resolutor al resolver un problema de modelización, es decir que puede ser un estilo pensamiento analítico, visual e integrado. Esto lo observamos en las respuestas de 4 profesores (P2, P4, P6, P7), como la del profesor 4 (P4) al mencionar el uso de representaciones simbólico-numéricas (fórmulas) y representaciones gráficas (diagramas, dibujos):

**Maestro 4:** Diferentes caminos a seguir. Hacer diferentes operaciones básicas para encontrar un resultado, aplicar diferentes fórmulas, que ya conoce, o incluso hacer dibujos. Puede hacer dibujos, diagramas.

Otra de las estrategias de resolución de problemas que mencionaron los profesores tiene que ver con el *uso implícito de las etapas del ciclo de modelización*. Aquí hallamos que dos profesores (P5, P8) mencionaron que el resolutor elabora un plan estratégico que incluye el uso de las etapas del ciclo de modelización. Por ejemplo, en el caso del profesor 5 (P5) encontramos indicios en su respuesta de la etapa “descripción” del ciclo de modelización al hacer alusión a frases como *ordenar los datos y buscar una estrategia para resolver* como lo vemos seguidamente:

**Maestro 5:** ¿Qué datos tiene el problema en sí? Primero ordenaría los datos, luego me iría a la pregunta que me hacen, para ver qué es lo que tengo que resolver...

**Entrevistadora:** En el problema de la receta ¿qué estrategia usaría para resolverlo?

**Maestro 5:** Sí. En ese caso lo tendría que poner como ordenar los cuantos ingredientes,

cuántos huevos, cuánto de harina, cuánto de leche, tantas tazas de leche, tantas tazas de harina. Ordenar de esa manera para luego ver si se tiene que sumar o multiplicar o dividir.

### ***Estrategias generales que consideran adecuadas los profesores al resolver un problema de modelización***

En esta apartado se agrupan las respuestas de los profesores que aludían a estrategias generales que pueden ser usadas para resolver el problema de modelización y que no tiene que ver propiamente con la matemática. En ellas, hemos encontrado cuatro grupos: (a) uso de estrategias que posea el estudiante en su conocimiento previo, (b) leer y comprender la información, (c) subrayar lo importante, (d) el cálculo mental, (e) realizar la estructura planteo, operación y respuesta y (f) estrategias metodológicas. La tabla 34 detalla las clasificaciones de las respuestas por profesor.

**Tabla 34**

#### ***Resultados sobre estrategias generales de resolución de problemas de modelización***

| <b>Aspectos</b>                            | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>P4</b> | <b>P5</b> | <b>P6</b> | <b>P7</b> | <b>P8</b> | <b>P9</b> | <b>P10</b> | <b>P11</b> |
|--------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Uso de estrategias del conocimiento previo | X         |           |           |           |           |           |           |           |           |            |            |
| Leer y comprender la información           |           | X         | X         |           |           | X         |           |           |           |            |            |
| Subrayar lo importante                     |           | X         |           |           |           |           |           |           |           |            |            |
| Cálculo mental                             |           | X         |           |           |           |           |           |           |           |            |            |
| Estructura planteo, operación y respuesta  |           | X         |           |           |           |           |           |           | X         |            |            |

En primer lugar, encontramos las respuestas que tratan sobre las estrategias previas que pueda usar un resolutor basado en sus *conocimientos previos*, como lo expone el profesor 1(P1) al usar oraciones como él conozca, el conocimiento adquirido, entre otras:

**Maestro 1:** Modelización y las que él conozca o las que él con el conocimiento ya adquirido anteriormente, puede usar cosas que ya vio en su vida...

Como segundo lugar tenemos la estrategia *leer y comprender la información*, que se relaciona con realizar una lectura exhaustiva y comprensiva de la información del problema. Tres profesores (P2, P3, P6) brindaron dicha estrategia en sus respuestas, como la del profesor 3 (P3):

**Maestro 3:** ...la estrategia de leer, comprender, analizar, interpretar la información que se esté

presentando para poder sacar conclusiones, verdad y poder realizar los procedimientos que se requiere para la solución de la de la situación.

En tercer lugar, los profesores señalan una estrategia que permite destacar los elementos más relevantes del problema por medio del *subrayado*. Solo el profesor 2 (P2) mencionó esta estrategia:

*Maestro 2:* ...Ven que es importante de lo que no lo es, subrayan lo relevante y lo que no lo sea, no lo subrayan. Este eso es lo principal. También que subrayen lo que es la pregunta.

Por último, el mismo profesor (P2), expuso la cuarta estrategia general el uso del *cálculo mental* para resolver el problema de modelización, esto es referido al uso de representaciones internas de los procedimientos matemáticos que realiza el estudiante y que muchas veces el estudiante no plasma en forma externa. Como lo menciona el profesor 2 (P2) en su respuesta:

*Maestro 2:* Sin embargo, hay estudiantes que como le digo a son muy cargas, son muy poquitos, son los que son menos, eso lo analizan mentalmente. Sin embargo, esos estudiantes uno trata de que ellos le pongan todo el proceso y también para uno poder entender ¿cuál fue el proceso que ellos hicieron? ¿cuál fue el análisis que ellos hicieron? Aunque ellos digan que es mental. Siempre habrá un proceso que ellos tienen que hacer.

La quinta estrategia que señalan los participantes es el uso de la *estructura de la solución: planteo (de los datos relevantes), operación y respuesta*. Esta estrategia fue mencionada en dos respuestas (P2, P9). En el siguiente extracto presentamos un ejemplo:

*Maestro 2:* Digamos en el planteo son los datos que ellos tienen relevantes, lo que ellos subrayaron. La operación ahí la hacen, la resuelven ahí mismo, en la parte de la operación. Por último, lo que es la respuesta...

Cuando preguntamos por las estrategias de resolución de problemas, encontramos que tres profesores (P7, P10, P11) brindaron respuestas sobre *estrategias metodológicas* para aplicar en ambientes de modelización, por lo que no los consideramos en esta parte.

### ***Estrategias de resolución de problemas de modelización propuestos***

En este apartado recogemos los resultados que atienden a estrategias de resolución que los profesores consideran que sus estudiantes pueden usar al resolver cada uno de los problemas de modelización brindados como ejemplos. Particularmente, encontramos tres tipos de estrategias en las respuestas de los profesores, y las hemos clasificados según el estilo de pensamiento del

estudiante: (a) analítico, (b) visual y (c) integrado. En la tabla 35, exponemos los resultados según las respuestas de cada participante.

**Tabla 35**

*Estrategias usadas por los estudiantes para resolver problemas de modelización propuestos*

| Aspectos  |                       | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-----------|-----------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Analítico | Operaciones básicas   | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X   | X   |
|           | Equivalencia          |    |    | X  |    |    |    |    |    |    |     |     |
| Visual    | Traslación de figuras |    |    |    | X  |    |    |    |    |    |     |     |
|           | Aspectos Gráficos     | X  |    |    |    |    |    | X  | X  |    |     |     |
| Integrado | Elementos             |    |    | X  |    | X  | X  |    |    |    |     |     |
|           | vivenciales           |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |

En el caso del pensamiento analítico encontramos dos estrategias: (a) el uso de operaciones básicas y (b) el uso de equivalencias. En cuanto, a la primera estrategia propuesta es *el uso de las operaciones básicas o fundamentales*: suma, resta, multiplicación y división. Esta estrategia resolución fue propuesta por todos los profesores entrevistados, en las opiniones de cada uno de cómo los estudiantes podrían resolver las tres tareas de modelización propuestas. Dicha estrategia, el uso de las operaciones básicas es expresada en frases como *resolver el problema por medio de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones*. Además, del uso de la multiplicación al decir *5 veces una cantidad o multiplicar por 5 por 10*. También al referirse a la *regla de tres o al uso de la fórmula del área del triángulo* donde se involucra el uso de operaciones básicas combinadas. Es decir, encontramos indicios de representaciones simbólicas-numéricas en las respuestas de los profesores. A cerca de esto mostramos la respuesta del profesor 11 (P11):

**Maestro 11:** ... Para agrandarlo tiene que sumar o multiplicar...

**Maestro 11:** Debe agrandar cinco veces más el original —lee de nuevo el problema. O sea que, si eso tiene un tamaño de diez cada lado, tiene que aumentar cinco veces cada lado. Entonces, ya sea cinco por diez, o diez, más diez, más diez, cinco veces. Creo yo...

**Maestro 11:** Además, ¿cuánto medirá cada lado del nuevo mapa? Bueno, para mí sería 50 cada lado. Y si lo amplifica diez veces sería 100, ¿cuál será la medida del nuevo lado? sí es 100. Y si lo amplifica 100 veces, ¿cuánto medirá el nuevo lado? Y ahí sería mil. ¿Qué características poseen todas las figuras involucradas en los procesos anteriores?

**Maestro 11:** ...No va a cambiar la cantidad de lados, solamente el tamaño...

Además, el diálogo anterior muestra como el profesor considera el uso de las operaciones básicas para resolver el problema, pero a la vez muestra indicios de la noción de semejanza en su respuesta.

En el caso de la segunda estrategia, el uso de las *correspondencias matemáticas* fue propuesto en la respuesta del profesor 3 (P3) al expresar que el estudiante podría establecer una correspondencia que relacione la sombra del árbol con la altura de este, que debe ser equivalente a la sombra del arbusto para obtener que su altura. Para el profesor al plantear la correspondencia lo que está ocurriendo es un patrón matemático donde la mitad de las medidas de las sombras de ambos objetos corresponde a la medida de las alturas de ellos. En su respuesta, el profesor usa representaciones simbólico-numéricas para la explicación, como mostramos seguidamente:

Entrevistadora: ¿Cómo resolverías ese problema?

Maestro 3: ... puede ser con patrones.

Entrevistadora: Patrones, patrones ¿cómo qué?

Maestro 3: Digamos, 14 metros a las 10:00, a la misma hora, en un arbusto cercano. Digamos, amplificado.

Entrevistadora: Ahí señalaste las sombras, ¿verdad?

Maestro 3: Sí, la sombra. Digamos que con un patrón. Digamos, si este mide 40 y el árbol mide diez. Es un arbusto de 20. Es la mitad de éste. Y así sucesivamente...

Para el estilo de pensamiento visual, encontramos dos tipos de estrategias: (a) traslación de figuras y (b) aspectos gráficos. Con respecto a la primera estrategia, obtuvimos que solo el profesor 4 (P4) mencionó frases como la *traslación de figuras* y el uso de escalas para resolver el problema haciendo alusión a representaciones visuales al mencionar las figuras geométricas en su respuesta:

Maestro 4: Sí aquí deberías saber utilizar escalas o problemas de traslación, no, sería una situación de traslación en un plano.

Sobre la segunda estrategia resolución del pensamiento visual, tenemos opiniones de tres profesores (P1, P7, P8) que hicieron referencia a aspectos gráficos o representaciones pictóricas, al brindar su respuesta de cómo los estudiantes podrían resolver las tareas de modelización propuestas. Aquí encontramos evidenciado esto en frases como *diagramas, gráficos, parte gráfica, dibujar*. Como se evidencia la respuesta del profesor 1 (P1):

Maestro 1: Es que también puede llegar a dibujar, en la pizarra.

Entrevistadora: ¿Qué dibujaría?

Maestro 1: El mapa. La figura geométrica empezaría a poner los puntos.

*Entrevistadora:* ¿Y qué figura geométrica dibujaría?

*Maestro 1:* Antes de hacer esto que le están poniendo acá —señalando el triángulo presente en la figura de la actividad—. Porque lo que le está diciendo es que tengo que hacer esto diez veces más grande. Eso es lo que le está pidiendo.

*Maestro 1:* Él diría. Profe, voy a dibujar, voy a hacer con los pupitres del mapa.

Sobre las estrategias del pensamiento integrado, encontramos tres profesores (P3, P5, P6) que manifestaron indicios de elementos vivenciales del problema. Es decir, al explicar sus respuestas relacionan aspectos de la realidad presentes en el problema con conceptos matemáticos, mostrando un equilibrio entre la realidad y la matemática. Evidencia de esto es mostrado en frases como la *proyección de la sombra*, también al referirse a datos como *la altura del arbusto, de la iglesia a la misma hora para realizar una secuencia matemática*. Esto último es mostrado en la respuesta del profesor 6 (P6):

*Entrevistadora:* Y el tipo de actividad ¿cómo usar esos tipos de elementos contexto reales como la Iglesia en este caso? ¿qué le parece?

*Maestro 6:* No, los elementos, yo los veo bien. Es algo con lo que ellos están familiarizados.

*Maestro 6:* Si usas la parte del arbusto, ya tienes ahí dos elementos, dos datos que puedes...

*Maestro 6:* Para después irse a la parte de la iglesia porque estamos trabajando a la misma hora y este se supone que la sombra va en el mismo sentido que la iglesia.

*Maestro 6:* Ok, pero entonces como que la idea es seguir la secuencia y llevarlos allá en un nivel más abstracto, verdad. Es como la idea.

### ***Características de estrategias de resolución propuestas de un problema de modelización***

En este apartado recogemos las respuestas a cerca de las características específicas que tiene cada una de las estrategias de resolución propuestas de un problema de modelización. Los resultados obtenidos se han organizado en: (a) diversidad de estilos de pensamiento, (b) uso de los sistemas de representación, (c) uso de conocimientos previos, (d) distintos niveles de razonamiento de los estudiantes y (e) estrategia más usada. Los resultados son expuestos en la tabla 36.

**Tabla 36**

*Respuestas sobre características de las estrategias de resolución de problemas de modelización*

| Aspectos                 | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|--------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Diversidad de estilos de |    | X  |    |    | X  |    | X  |    |    |     |     |

**Tabla 36**

*Respuestas sobre características de las estrategias de resolución de problemas de modelización*

| Aspectos                                             | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| pensamiento                                          |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
| Uso de los sistemas de representación                |    |    |    |    |    |    |    | X  | X  | X   |     |
| Uso de conocimientos previos                         | X  |    |    |    |    | X  |    |    |    | X   |     |
| Distintos niveles de razonamiento de los estudiantes |    |    | X  | X  |    |    |    |    |    |     | X   |
| Estrategia más usada                                 |    | X  |    |    |    |    |    |    |    |     |     |

La primera característica expuesta por los profesores (P2, P5, P7) es la *diversidad de estilos de pensamiento* que visualizaron en las tres estrategias, ya que consideran son involucrados tanto métodos más analíticos como visuales. Esto lo propone el profesor 2 (P2) en su respuesta:

*Maestro 2:* En la primera los estudiantes usan operaciones básicas como la multiplicación, división, usa procedimientos más matemáticos, haciendo uso de métodos más analíticos. La segunda usa proyecciones usando un poco más su imaginación. Y el último, usa más dibujos o imágenes utilizando su imaginación visual.

La segunda característica que los profesores mencionan es el *uso de los sistemas* usados para *representar* los procedimientos matemáticos de los estudiantes. Esto lo observamos en las respuestas de tres profesores (P8, P9, P10). A modo de ejemplo presentamos la percepción del profesor 10 (P10) que habla sobre la representación simbólica y gráfica.

*Maestro 10:* Esa, lo que es, la representación simbólica y representación por medio de dibujos y contextualización. Y también va mucho... la parte creativa...

*Maestro 10:* Y este es muy analítico —estrategia 1. Esto último sí fueron muy... Uyy sí, ellos no se fueron con las operaciones, sino que... imaginaron.

Como tercera característica de las estrategias, tiene que ver con el *uso de conocimientos previos*, que varían según cada estrategia. Tres profesores (P1, P6, P10) consideran que dicha característica existió en las estrategias propuestas, como lo mencionado por el profesor 10 (P10) que habla sobre el conocimiento que tiene un estudiante sobre la situación real.

*Maestro 10:* ... la percepción de ellos, la interpretación, el conocimiento que tienen ellos de la situación real que viven y este también, mucho la imaginación.

En cuarto lugar, tres profesores (P3, P4, P11) consideran que en las estrategias propuestas podemos observar los *distintos niveles de razonamiento de los estudiantes*. Por ejemplo, en la respuesta del profesor 3 (P3), encontramos que las estrategias fueron clasificadas por niveles de razonamiento de lo concreto a lo más abstracto, como lo presentamos en el siguiente diálogo:

*Entrevistadora:* Concreto, más específico, más concreto para ellos.

*Entrevistadora:* ¿la estrategia 3?

*Maestro 3:* Para ellos, más entendible, más gráfico y ya digamos, aquí más aplicable a lo que es la matemática.

*Entrevistadora:* ¿qué sería como más abstracto?

*Maestro 3:* Sería como la división, multiplicación, operaciones básicas, ya traspasar el conocimiento textual a gráficos, más que, como se volvió el nombre, más representativo matemático y ya interpretación estadística —el maestro compara las estrategias los niveles cognitivos estrategia 3, estrategia 1 y estrategia 2.

*Entrevistadora:* ¿La parte de los patrones?

*Maestro 3:* Sí

Por último, uno de los profesores (P2) consideró que dentro de las estrategias propuestas, existen algunas que *son más usadas* que otras por los estudiantes. El profesor detalla esto:

*Maestro 2:* La primera estrategia es la que comúnmente hace todo el mundo... Es la estrategia más usual. La segunda estrategia, yo pensaría que en un grupo que pueden ser de 30 estudiantes, dos o tres le pueden hacer esa estrategia... Y la última estrategia, la que menos pensaría uno que harían... Me impresiona totalmente, porque jamás uno pensaría que un estudiante se ponga a hacer dibujitos para resolver ese problema, pero es un estudiante que tiene más imaginación. Y llegó a la respuesta bien. Yo pienso que las tres son válidas, pero si la más corriente, la respuesta la más usual es la primera.

Aunque es la percepción de un solo profesor 2 (P2), destacamos que el uso de la estrategia de pensamiento visual e integrado que debería de darse comúnmente en todos los niveles de primaria, pero según el profesor esto no es así, más bien es sorprendente para él cuando mostramos dicha estrategia en la entrevista.

### ***Diferencias de las estrategias de resolución de un problema de modelización***

Obtuvimos que varias de las características expuestas en el apartado anterior coincidieron con las diferencias de las estrategias de resolución de un problema de modelización. Específicamente: (a) diversidad de estilos de pensamiento, (b) uso de los sistemas de representación, (c) uso de conocimientos previos y (d) distintos niveles de razonamiento de los

estudiantes. Por ello, en esta sección no presentaremos información sobre dichas clasificaciones. Sin embargo, hallamos dos clasificaciones de información nueva, concretamente: (e) distintos procedimientos de un mismo contenido y (f) ordenamiento interno de la información. En forma resumida, presentamos los resultados por profesor en la tabla 37.

**Tabla 37**

*Respuestas sobre diferencias de las estrategias de resolución de problemas de modelización*

| Aspectos                                             | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Diversidad de estilos de pensamiento                 |    | X  |    | X  |    |    | X  |    |    |     | X   |
| Uso de los sistemas de representación                |    |    |    |    |    |    |    |    | X  |     |     |
| Uso de conocimientos previos                         |    |    |    |    |    |    |    |    |    | X   |     |
| Distintos niveles de razonamiento de los estudiantes |    |    | X  |    |    |    |    |    |    |     |     |
| Distintos procedimientos de un mismo contenido       | X  |    |    |    | X  |    |    | X  |    |     |     |
| Orden interno de la información                      |    |    |    |    | X  |    |    |    |    |     |     |

Una de las diferencias que detectamos en las estrategias fue el uso de *distintos procedimientos para un mismo contenido matemático usado para resolver un problema de modelización*. Esto lo observamos en las respuestas de tres profesores (P1, P5, P8). Concretamente, mostramos el diálogo del profesor 5 (P5) como evidencia de lo anterior, al hacer alusión al contenido matemático de la multiplicación expresada usando distintos procedimientos como *forma gráfica, en tablas y el porcentaje*.

**Maestro 5:** La primera que era la multiplicación, enseña la multiplicación, la están usando gráficamente —estrategia 3— y la del centro esa la hicieron como en forma de esas tablas —estrategia2—, como lo que se utiliza uno cuando va a sacar un porcentaje.

**Entrevistadora:** Ok. ¿Y esta era la de la multiplicación y la división? —estrategia 1.

**Maestro 5:** Si usaron la misma operación. Es correcto.

Otra diferencia ubicamos la realizada por el profesor 6 (P6) en el *ordenamiento interno de la información* presentada en las tres estrategias. Consideró que las estrategias 1 y 3 eran más ordenadas y compresibles (claras) en forma de esquema, versus la estrategia 2, como vemos en su respuesta:

Entrevistadora: están más claras, más esquema.

Maestro 6: Sí, porque te va guiando, digamos, en lo que ellos van relacionando, pero en las operaciones...

### ***Sobre métodos matemáticos de resolución presentes en las estrategias propuestas***

Brindamos a los profesores tres estrategias realizadas por estudiantes al resolver la tarea de modelización *Cocinando con mi mamá*. Obtuvimos indicios sobre métodos matemáticos de resolución usados para explicar dichas estrategias. Estos son el uso de: (a) operaciones básicas, (b) correspondencias matemáticas y (c) forma gráfica o dibujos. En la tabla 38 presentamos en forma resumida las respuestas obtenidas por cada uno de los profesores.

**Tabla 38**

*Resultados sobre métodos matemáticos presentes en estrategias de resolución de un problema de modelización*

| Aspectos                | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Operaciones básicas     | X  | X  |    | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X   | X   |
| Correspondencias        | X  | X  | X  |    | X  | X  |    |    |    | X   |     |
| Forma gráfica o dibujos |    |    |    |    |    |    | X  | X  | X  |     |     |

En primer lugar, categorizamos las respuestas que mostraban indicios sobre el *uso de operaciones básicas* como procedimiento matemático usado por los profesores al explicar lo realizado por los estudiantes en las tres estrategias propuestas. Concretamente 10 profesores (todos los profesores menos P3) brindaron dicho procedimiento. Para evidenciar la explicación sobre este método matemático, hemos escogido el diálogo del profesor 1 (P1), que brinda argumentos a cerca de la operación de división y su relación con la tarea de repartir.

Maestro 1: Él está aplicando la fórmula de la división, operación. Y aquí está haciendo la repartición, aquí está explicando cómo se hace y aquí está explicando por qué se hace...

Maestro 1: Pero es que empezó a repartir 12345 —cuenta cada una de las cajas que representan las tazas de leche en la imagen. Puso la cinco de leche y entonces empezó a dar. ¿Cuántas pueden caber en cada una? Tres, tres y tres. Es lo mismo que hizo aquí. Lo que quiere decir aquí es que él en 16, como lo expliqué le dije 16,5 en los panes, en las tazas de leche. En las tres tazas de la receta. Entonces él empezó a repartir todo aquí es la división.

Como segundo método matemático hallamos el uso de la *correspondencia matemática*, seis profesores (P1, P2, P3, P5, P6, P10) hicieron referencia a este contenido matemático en sus

explicaciones, usando palabras como *serie* y *secuencia*. Ejemplo de esto es el extracto de la respuesta del profesor 10 (P10):

*Maestro 10:* ...Ya ahí lo ampliaron.

*Maestro 10:* Por una taza, 20 panecillos...

*Maestro 10:* ...De dos, 40. De 3, ajá...

*Maestro 10:* Ahí está utilizando... es como la serie de Fibonacci. Me parece una secuencia... sí como modelo, una secuencia que llamamos en matemática.

Con respecto a al mismo método, específicamente en la estrategia 2 hallamos evidencias sobre el conocimiento disciplinar de la matemática que los profesores poseían al momento del estudio y que es importante para la modelización. Concretamente nos referimos a indicios sobre el uso de la cantidad decimal por parte de los estudiantes al plantear la estrategia 2 para resolver el problema de modelización. Los profesores participantes al brindar una explicación sobre la estrategia 2 debían encontrarse con el caso específico del valor del 5,5 tazas de leche que le corresponde 110 panecillos, sobre esto hallamos distintas clasificaciones de las respuestas. Específicamente cuatro posibilidades: (a) eludieron el caso, (b) Comprensión limitada, (c) comprenden el caso, pero no lo fundamentan claramente y (d) comprendieron y fundamentaron el caso. En la siguiente tabla presentamos los resultados obtenidos por el profesor entrevistado:

**Tabla 39**

*Respuestas sobre la cantidad decimal presente en la estrategia 2*

| Aspectos                            | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Eludieron                           | X  |    |    | X  |    |    | X  | X  |    |     |     |
| Comprensión limitada                |    |    |    |    |    |    |    |    | X  | X   |     |
| Comprenden, pero sin fundamentación |    | X  | X  |    |    | X  |    |    |    |     |     |
| Comprenden y fundamentan            |    |    |    |    | X  |    |    |    |    |     | X   |

Para la primera posibilidad, en las respuestas de cuatro profesores (P1, P4, P7, P8) no detectamos presencia de explicación sobre el caso del valor de 5,5 tazas de la estrategia. Un ejemplo de esto lo evidenciamos en el diálogo de la respuesta del profesor 4 (P4):

*Maestro 4:* Aquí está sumando una taza, dos tazas, tres tazas y está haciendo una secuencia.

*Entrevistadora:* ¿Qué pasa en la última línea?

*Maestro 4:* Cinco tazas. Cuatro tazas son 80, que agrega 20. Solo agrega diez.

Para la segunda posibilidad, dos de los profesores (P9, P10) si visualizaron este caso, pero su comprensión fue limitada hasta los casos de cantidades enteras. El caso específico de 5,5 tazas no fue entendible para estos profesores. Un ejemplo de esto es la respuesta del profesor 9 (P9):

**Maestro 9:** ... Ellos tomaron la cantidad de tazas de leche pues con una taza de leche saldrían 20 panecillos. Y ahí entonces fueron agregando de uno en uno, una taza, dos tazas y hasta llegar a las 5,5 tazas que ellos de obtuvieron en general. No comprendo ese 5,5 de tazas, pero sí comprendo lo anterior, que por cada taza de leche se obtendría 20 panecillos con las tres tazas de harina. Entonces ahí lo que fueron sumando de 20, 40, 60, de 20 en 20.

En tercer lugar, colocamos toda la información brindada por los profesores (P2, P3, P6), que en sus respuestas mostraban un proceso válido para obtener el valor de 5,5 tazas, pero sus argumentos no eran claros o no eran expuestos por los profesores. Por ejemplo, la respuesta del profesor 6 (P6), que brinda como justificación que el valor de 5,5 es obtenido por medio de una regla de 3, pero no amplía y fundamenta esto porque necesita la calculadora para hacer el cálculo.

Por último, en las explicaciones de dos profesores (P11, P5) encontramos que comprendieron y fundamentaron el caso. Como lo menciona el profesor 11 (P11) en el extracto:

**Maestro 11:** Vamos a ver, 5 tazas son 100. Sacaron la mitad. Porque es cada 20, 40, 60, 80, 100. Sacaron la mitad de las tazas para el coma cinco —refiere a 0,5—, por ejemplo, para la otra parte.

**Entrevistadora:** ¿Te refieres a la mitad de la taza de leche?

**Maestro 11:** Sí, 1 taza son 20 y se ocupaba solo la mitad, entonces le dividieron 20 entre dos, por ejemplo, que son 10 panecillos y sumaron esto a los 100 panecillos.

Con respecto al tercer método matemático, obtuvimos el uso de una *forma gráfica o dibujos* para resolver el problema de modelización presentado solo en la estrategia 3. Esto lo observamos en los comentarios de tres profesores (P7, P8, P9). Para el profesor 7 (P7), esto es relacionado con la estadística por el uso de gráficos. La respuesta de este profesor es la siguiente:

**Maestra 8:** Una forma gráfica...

**Maestra 8:** Es que aquí lo está graficando, verdad. Aquí está utilizando más la parte estadística, eso es lo que veo, más gráfico, sí.

**Entrevistadora:** Ok. ¿Por qué crees que ellos lo ordenaron así? Por ejemplo, hacen una caja de leche y esos es círculos. ¿Qué crees vos que son esos círculos?

**Maestra 8:** son tazas de harina...entonces están tratando de representar a través del gráfico, la cantidad de harina versus las tazas de leche.

En esta parte, incluimos los resultados de explicaciones que nos brindaron los profesores sobre formas gráficas presentes en la estrategia 3. Específicamente acerca de las figuras geométricas que representaban los ingredientes de la receta y además, nos interesó saber por qué los estudiantes usaron ese tipo de figuras para representar las cantidades involucradas en el problema. Encontramos las clasificaciones: (a) debido al entorno familiar del estudiante y (b) argumentos parcialmente correctos. Exponemos los resultados en la siguiente tabla:

**Tabla 40**

*Resultados a cerca de las formas gráficas en la estrategia 3*

| Aspectos                          | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-----------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Contexto familiar del estudiante  |    |    | X  |    |    |    | X  | X  |    |     |     |
| Argumentos parcialmente correctos | X  | X  |    | X  | X  | X  |    |    | X  | X   | X   |

Tres de los profesores (P3, P7, P8) utilizaron *como argumentos el contexto familiar del estudiante*. Es decir, en el caso de la leche los estudiantes utilizaron el rectángulo, debido a que en el mercado la leche es vendida en cajas rectangulares. Con respecto a la harina, fue relacionado con círculos porque la masa es formada inicialmente en pelotitas para poder realizar los panecillos. Sobre esto el profesor 3 (P3) nos dice que:

*Entrevistadora:* ¿Por qué crees que la leche la representaron como una caja?

*Maestro 3:* Por lo cotidiano, porque ellos están más acostumbrados a vivir, a ver que la leche viene en caja... La harina, claro, como pelotitas de masa de harina, como cuando hacen pan. Entonces es más de acuerdo con la cultura, la vivencia social de ellos, porque digamos, si la leche viniera en cilindros, ellos van a dibujar un cilindros.

Las respuestas de 8 profesores que brindaron *argumentos parcialmente correctos* (P1, P2, P4, P5, P6, P9, P10, P11), debido a que argumentan correctamente solo uno de los dos ingredientes, pero el otro no. En el caso de las tazas de la leche fueron relacionados por los 8 profesores con las cajas de leche que los estudiantes observan en su entorno familiar. Pero las tazas de harina, al ser círculos encontramos interpretaciones erróneas y que fueron corregidas con el avance de las preguntas de la entrevista. Por ejemplo, algunos de los profesores (P1, P6, P11) en primer lugar mencionaron que los círculos eran el ingrediente de los *huevos* de la receta. Observamos en los resultados que los profesores al inicio presentan estas dificultades, pero con el avance de la

entrevista sus interpretaciones fueron modificadas y corrigen sus asunciones erróneas, como la respuesta del profesor 11 (P11):

*Entrevistadora:* Ok. ¿Y las tazas harinas? ¿Por qué las hicieron en forma circular?

*Maestro 11:* No sé, porque imagínese que ☹yo me enredé hasta con los huevos ☺ y después yo dije: "no, son tres tazas". Yo hubiera dibujado tal vez tacitas, pero di esos óvalos... Como le digo a cada uno, se imagina las cosas diferente. Yo en mi caso hubiera hecho tacitas, pero ellos lo hicieron así.

Uno de los profesores no le encontró sentido de porqué los estudiantes usaban bolitas para representar las tazas de harina. Como lo muestra la respuesta del profesor 10 (P10):

*Maestro 10:* ...No sé por qué la harina le pusieron como los huevos, esta raro eso...

*Maestro 10:* Porqué la harina va en círculos, si viene en paquete, en forma rectangular.

## 2.3 METACOGNICIÓN

Para esta sección, hemos categorizado las respuestas en: (a) procesos metacognitivos que intervienen al resolver un problema de modelización y (b) no hay necesidad de aplicar procesos metacognitivos en la resolución de problemas de modelización. Para sintetizar la información, presentamos los resultados obtenidos por profesor en la tabla 41.

**Tabla 41**

*Respuestas sobre uso de procesos metacognitivos al resolver problemas de modelización*

| Aspectos                                                                | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Revisar condiciones del problema constantemente                         |    | X  |    |    |    |    |    | X  | X  |     |     |
| Metacognición grupal                                                    |    |    | X  | X  |    |    |    |    |    | X   |     |
| Recordar experiencias previas de aprendizaje                            | X  |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
| Realizar algunas de las etapas del ciclo de modelización.               |    |    | X  |    |    | X  |    |    |    |     | X   |
| No es necesario aplicar los procesos metacognitivos en la modelización. |    |    |    |    | X  |    | X  |    |    |     |     |

### *Procesos metacognitivos que intervienen al resolver un problema de modelización*

Dentro de las respuestas encontramos cinco procesos metacognitivos que los profesores consideraron que se pueden usar al resolver un problema de modelización. Específicamente estos son: (a) revisar condiciones del problema constantemente, (b) metacognición grupal, (c) recordar

experiencias previas de aprendizajes y (d) realizar algunas de las etapas del ciclo de modelización.

El primer proceso metacognitivo propuesto por los profesores participantes (P2, P8, P9) es *revisar condiciones del problema constantemente* para abarcar todos los detalles posibles que brinde el problema. Como en la respuesta del profesor 2 (P2):

*Maestro 2:* considero que el revisar constantemente los datos, el hacer una lectura varias veces. A mí me sirve para autorregularme y saber que voy por buen camino al resolver un ejercicio.

Como segundo proceso metacognitivo tenemos la *metacognición grupal* que es aplicada al trabajar una tarea de modelización en subgrupos de estudiantes, que pueda ser resuelta en equipos a través del trabajo colaborativo, donde se autorregulen, monitoreen y controlen heurísticos y los conocimientos, con la finalidad de tomar decisiones acertadas al resolver un problema de modelización. Las respuestas de tres profesores (P3, P4, P10) muestran lo anterior, como la respuesta del profesor 4 (P4):

*Maestra 4:* Cuando se trabaja en grupo, ellos hacen muchas cosas prácticas... un día los puse a medir el escenario y no les di ninguna herramienta para medirlo. Entonces utilizaron cuadernos, papel periódico. Ellos discutían las estrategias a seguir y las ponían en práctica, a ver cuál era la más apropiada para resolverlo...

*Maestra 4:* Entonces eso es: ensayo, error, práctica, prueba...

*Entrevistadora:* ¿Y entonces entre ellos mismos se autorregularon?

*Maestra 4:* Exacto. Por medio del trabajo en equipo, de la discusión, de probar y ensayar.

El tercer proceso metacognitivo que puede intervenir al resolver un problema de modelización es el *recordar experiencias previas de aprendizaje*, al hacer uso de sus conocimientos previos. Por ejemplo, el profesor 1 (P1) en sus respuesta habla de *pasos* o procedimientos que puede utilizar al resolver un problema donde el contexto real sea conocido para el estudiante, esto es:

*Maestro 1:* si el problema está relacionado con la vida cotidiana, él va a empezar a usar su memoria, a recordar pasos, a recordar cosas...

En cuarto lugar, en las respuestas de algunos profesores (P3, P6, P11) encontramos indicios de palabras que describen *algunas de las etapas del ciclo de modelización como un proceso metacognitivo*. Por ejemplo, la descripción al *analizar* u obtener la información necesaria comenzar a resolver el problema. Luego, *manipulación* al tomar la decisión de comenzar a resolver el problema y aplicar los procedimientos necesarios para esto. Además, de la

verificación de los resultados que coincide con la última etapa. Como la respuesta del profesor 3 (P3):

**Maestro 3:** ...lo primero es tener contacto con experimentar, descubrir, confrontar, aplicar. Desde el momento que ellos ya analizan... confrontan las respuestas inclusive internamente. Ya después, una vez que toman esa decisión, entonces ya viene la aplicación donde vienen y aplican ciertos pasos y verifican que esos pasos estén bien, inclusive con la aplicación de conceptos matemáticos. Ellos pueden ya sacar las conclusiones. Y a lo último, verifican los resultados si están bien o están mal.

En las respuestas de dos profesores (P5, P7) encontramos menciones de que no es necesario para el estudiante realizar procesos metacognitivos al resolver problemas de modelización, sino simplemente preguntar al maestro si un procedimiento es correcto o no. Como lo manifiesta el profesor (P7):

**Maestro 7:** ...cuando ellos están trabajando, si tienen alguna duda o si quieren saber que van bien, le preguntan a la maestra.

## 2.4 FACTORES NO COGNITIVOS

En esta parte, ubicamos las respuestas que evidencian si el profesor considera que los factores no cognitivos juegan un papel determinante al resolver un problema de modelización. Los resultados se han organizado en: (a) la emoción, (b) la actitud y (c) las creencias. Como resumen exponemos los resultados por profesor en la tabla 42.

**Tabla 42**

*Resultados del papel de los factores no cognitivos al resolver un problema de modelización*

| Aspectos       | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Emoción        | X  | X  |    | X  |    |    |    | X  |    | X   | X   |
| Actitud        | X  | X  |    | X  |    |    |    |    | X  |     | X   |
| Creencias      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
| Del estudiante |    | X  | X  |    |    |    | X  |    |    |     |     |
| Del profesor   |    |    |    |    | X  |    |    |    |    |     |     |

En primer lugar, las respuestas de 5 de los profesores participantes (P1, P2, P4, P8, P10, P11) detallan que *la emoción al resolver un problema de modelización* es muy importante. Un ejemplo lo exhibimos con la opinión del profesor 6 (P6):

**Maestro 1:** La emoción juega mucho. La emoción en matemáticas es algo primordial...

**Entrevistadora:** ¿Pero específicamente en la resolución de problemas de modelización?

**Maestro 1:** De la resolución de problemas también, porque si es algo que le gusta o le da curiosidad. Si usted le pone un ejemplo de conversión de monedas a un niño basándose en un video de juegos de Play (PlayStation), o que se le da la idea de viajar por el mundo. Pero para viajar por el mundo tienes que conocer los

dólares y los cambios de monedas. Esa parte ya lo emociona.

En segundo lugar, sobre *la actitud al resolver un problema de modelización*, hallamos que cinco profesores (P1, P2, P4, P9, P11) nos mencionaron que la actitud juega un papel relevante en este proceso. Específicamente, el profesor 11(P11) nos mencionó en su respuesta la actitud positiva de la perseverancia:

**Maestro 11:** Sí, la actitud cuenta mucho porque puede ser que yo tenga una dificultad para entender X tema, pero si mi actitud es perseverante, insistente, las cosas cambian.

En tercer lugar, los profesores mencionaron que *las creencias en la resolución de problemas de modelización* son muy importantes para el éxito del proceso. Específicamente, tres profesores (P2, P3, P7) expusieron *creencias propias del estudiante*. Por ejemplo, creencias en la elección de estrategias al resolver el problema, el profesor 2 (P2) menciona que:

**Maestro 2:** Y en cuanto a las creencias, todo depende en la forma en la que ellos quieren resolver el problema. Una parte de la creencia es que, si yo quiero resolver bien el problema, o sea, para mí resolverlo bien, es que yo utilice mis estrategias. Algunos subrayan, otros pintan. Otros resuelven con dibujitos, otros no. Otros lo harán mentalmente, pero es cómo ellos quieren llegar a resolverlo y que le den ganas de hacerlo por lo que creen.

También, hallamos que las *creencias del profesor* son importantes al resolver el problema de modelización, debido a el proceso de modelización al resolver un problema por parte de los estudiantes. Sobre esto el profesor 5 (P5) opina que:

**Maestro 5:** A veces uno como profesor, como ya uno sabe el asunto a resolver, creemos que ellos —estudiantes— tienen que saberlo. O el profesor no los deja pensar, analizar y quieren darle la respuesta. Lo que afecta que el estudiante resuelva o no el problema.

### **3. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 3: DISPOSICIÓN**

En este apartado mostramos los resultados que aluden al rol de la disposición al resolver un problema de modelización matemática, surgidos tras responder a la pregunta ¿se debe estar motivado para resolver un problema de modelización?

#### **3.1 MOTIVACIÓN AL RESOLVER UN PROBLEMA DE MODELIZACIÓN**

Dividimos las respuestas encontradas en dos subcategorías. En primer lugar, las respuestas donde mostramos que la motivación es un factor muy importante al resolver una tarea de

modelización. Sobre esto clasificamos la información según los argumentos utilizados en: (a) afecta el desenvolvimiento del estudiante, (b) afecta directamente el aprendizaje del estudiante y (c) brinda un ejemplo, no una respuesta concreta; como se presenta en la tabla 43. En segundo lugar, exponemos las respuestas negativas, donde hace referencia de que la motivación no es lo más importante al resolver un problema de modelización.

**Tabla 43**

*Respuestas sobre la motivación al resolver un problema de modelización*

| Aspectos                                           | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|----------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Afecta el desenvolvimiento del estudiante.         |    | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  |    | X   | X   |
| Afecta directamente el aprendizaje del estudiante. |    |    | X  |    |    | X  |    |    |    | X   | X   |
| Brindan un ejemplo, no una respuesta concreta.     |    | X  |    | X  |    |    |    |    |    |     |     |
| No es lo más importante                            | X  |    | X  |    |    |    |    |    | X  |     |     |

En primer lugar, localizamos que 9 de los profesores participantes (P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P10, P11) mostraron indicios en sus respuesta de la *importancia de la motivación* al resolver un problema de modelización. Al respecto, los profesores brindaron tres tipos de argumentos. El primer tipo, resalta la importancia de la motivación pues el poseerla o no, *afecta directamente el desenvolvimiento o reacción de la estudiante* al trabajar en el aula. Es decir, si carece de motivación, no realizará dicho trabajo y se mostrará más negativo ante cualquier situación. Por el contrario, la persona posee motivación realizará en una forma más efectiva las actividades de aula y con una actitud positiva. Hallamos tres profesores (P5, P7, P8) que mencionaron lo anterior y lo evidenciamos con la respuesta del profesor 7 (P7):

**Maestro 7:** Porque el chico que está motivado a resolver, a equivocarse, incluso, etc; lo va a lograr entender en algún momento, el que él está desmotivado ...no le va a poner, ...las ganas de hacer las cosas.

**Maestro 7:** ...Si un chico ...no quieren hacer algo o no tiene la motivación adecuada, pues no lo logran, si se muestran negativos y no lo logran.

El segundo tipo, hace referencia a la importancia de la motivación en la modelización debido a que *afecta directamente el aprendizaje del estudiante*, es decir estar motivado despierta el interés o el ánimo que son necesarios para el aprendizaje en cualquier tarea que se realice. Aquí

encontramos las respuestas de 4 profesores (P3, P6, P10, P11) y este tipo de subcategoría la evidenciamos con la respuesta del profesor 3 (P3):

**Maestro 3:** El estar motivado es importante para cualquier actividad. No solo para resolver un problema, pero en dado caso, si usted tuviera un problema en frente, que tenga que solucionarlo... Difícilmente el niño o la persona va a o poner en juego todos los aprendizajes que él tiene, porque va a estar desmotivado, no hay ánimo para hacer las cosas... La motivación es sumamente importante porque eso le va a ejercer una mayor fuerza, una mayor positividad a la hora de enfrentar los problemas y analizarlos.

Como tercer tipo de justificación que obtuvimos son las respuestas de dos profesores (P2, P4) que *brindaban un ejemplo* de cómo el profesor puede incentivar la motivación. Sobre esto, los ejemplo muestran al profesor como responsable de plantear a sus estudiantes desafíos que despierten la motivación e interés durante el proceso de resolución de problemas. Al respecto, el profesor 4 (P4) dice que:

**Maestra 4:** Y eso genera motivación, que sea propiamente del área de interés de ellos, de cosas o de los deportes, tengo un estudiante deportista, de un estudiante costurero, que sea del área que a ellos les interesa y les estimula.

Finalmente, detectamos dos respuestas de dos profesores (P1, P9) con indicios de *que la motivación no es lo más importante* al resolver el problema de modelización. El profesor 9 (P9) manifiesta refiriéndose a la resolución de un problema de modelización que:

**Maestro 9:** si bien es cierto que la motivación es esencial... aunque uno no esté motivado, creo que sí lo lograría realizar.

### ***Disposición al resolver un problema de modelización***

Sobre la disposición al resolver un problema de modelización, ubicamos los resultados en dos subcategorías: (a) la disposición afecta la resolución de problemas y (b) argumentos generales. Como se expone en la tabla 44:

**Tabla 44**

*Respuestas sobre la disposición al resolver un problema de modelización*

| Aspectos                                          | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|---------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| La disposición afecta la resolución de problemas. | X  |    | X  | X  | X  |    | X  |    | X  | X   |     |
| Argumentos generales                              |    | X  |    |    |    | X  |    | X  |    |     | X   |

En la primera clasificación encontramos dos tipos de respuestas *sobre la disposición al resolver un problema*. En el primer caso, 6 de los profesores (P1, P3, P4, P5, P7, P10) consideran que la disposición afecta la resolución de problemas y es necesario tenerla. Encontramos que todas las respuestas se centran en la relación de la *disposición y las actitudes que el estudiante* debe poseer para resolver un problema. No se hace referencia específica a la modelización.

**Maestro 10:** También, disposición por parte del estudiante.

**Entrevistadora:** ¿Igual por qué crees que se debe tener esa disposición?

**Maestro 10:** Porque él debe estar preparado para resolver, no puede estar desconcentrado. Y también aplica la desconcentración, si no hay interés en lo que se le está dando... si no tomamos en cuenta las expectativas de él, los intereses, sinceramente el estudiante no va a tener como esa facilidad de aprendizaje o la va a tener muy disminuida. Tal vez sí, muy inteligente, muy capaz, pero tal vez esa parte si se le potencia con mucho más entusiasmo él va a estar resolviendo.

Como segundo caso, la respuesta muestra indicios de que la disposición es más importante que la motivación. Menciona la resolución de problemas, pero no concretamente la modelización. Sobre esto solo obtuvimos una respuesta la del profesor 9 (P9), donde reconoce que es esencial el estar dispuesto a resolver un problema, aunque no se esté motivado:

**Maestro 9:** Creo que la disposición sí que sería sumamente esencial, más que la motivación... por ejemplo, si yo en este momento no estoy motivada, pero sé que debo realizarlo porque es mi deber... yo sé cómo llegar a resolverlo y sé todo el procedimiento que tiene el problema, pues yo lo hago, porque no siempre se está motivado.

La segunda clasificación es mencionada en respuestas con *argumentos generales* (P2, P6, P8, P11), al referirse a aspectos generales del aprendizaje y no son enfocados hacia la resolución de problemas, ni a la modelización. En esta clasificación, encontramos tres perspectivas de respuestas. En primer lugar, las respuestas como que la disposición afecta el trabajo (P6). En segundo lugar, se puede carecer de disposición y realizar las cosas por obligación (P2, P11). Por último y tercer lugar, es la respuesta que nos dice que la motivación afecta a la disposición por aprender que tenga el estudiante (P2, P8). Mostramos la respuesta dada por el profesor 8 (P8):

**Maestro 8:** Precisamente como parte de esa motivación, si usted motiva al estudiante, él va a tener mayor disposición a lo que es el aprendizaje.

## ***Rol que juega la motivación y disposición en la resolución de problemas de modelización***

Todos los profesores manifiestan que la *motivación y disposición* son muy importantes al resolver un problema de modelización. Para justificar esto (ver tabla 45), encontramos dos posibles de argumentos: (a) argumentos generales y (b) las tareas del profesor son fundamentales.

**Tabla 45**

*Respuestas sobre la motivación y disposición al resolver un problema de modelización*

| Aspectos                                  | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Argumentos generales                      |    |    | X  | X  |    | X  |    |    | X  |     | X   |
| Las tareas del profesor son fundamentales | X  | X  |    |    | X  |    | X  | X  |    | X   |     |

El primer argumento detalla en *forma general*, algunas de las razones de los profesores (P3, P4, P6, P9, P11). Por ejemplo, el profesor 3 (P3) considera que la motivación y la disposición cumplen un rol relevante en el aprendizaje de los estudiantes debido a que ellos son involucrados emocionalmente (factores afectivos) y liberan estructuras mentales poderosas, lo que incide directamente en el proceso de resolución de problemas. Como se expresa en su respuesta:

**Maestro 3:** Es muy importante... poder poner la disposición y la motivación, la persona va a hacer mejor uso de sus capacidades y habilidades en ese tipo de problemas.

En la segunda posibilidad, 6 los profesores (P1, P2, P5, P7, P8, P10) mostraron que tanto la motivación como la disposición son importantes al resolver un problema. Al justificar esto argumentan de que para lograr dicho objetivo *las tareas que realice el profesor son fundamentales*. Aquí mismo, observamos que para el profesor 1 (P1), tanto la motivación como la disposición:

**Maestro 1:** Dependen del profesor, no el niño. Porque si usted llega como profesor, explica la materia todo triste y no tiene disposición, se la va a transmitir a cualquiera.

Solo una de las respuestas menciona que el profesor puede plantear desafíos usando el contexto real de los estudiantes, que los motiven y provoquen interés por resolverlo y con eso se estimule la disposición, pero el resto de los argumentos no había menciones sobre la modelización.

## **8. RESULTADOS FASE II: ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE LA MODELIZACIÓN**

---

Este capítulo exhibe los resultados que dan respuesta a los objetivos específicos “identificar qué componentes del conocimiento sobre modelización matemática ponen en juego los maestros de primaria al enseñar la modelización” y “caracterizar el conocimiento de los maestros de primaria en ejercicio sobre el proceso de modelización matemática”. En esta sección, presentamos los resultados en cuatro apartados según las categorías del conocimiento didáctico sobre la resolución de problemas de modelización, específicamente: (a) estudiante como resolutor, (b) resolución de problemas como tarea escolar, (c) factores no cognitivos y (d) gestión de enseñanza en la modelización.

# 1. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 1: ESTUDIANTE COMO RESOLUTOR DE TAREAS DE MODELIZACIÓN

A continuación, exponemos los resultados sobre la categoría estudiante como resolutor. Los hallazgos son divididos en dos subcategorías: (a) características de resolutores de tareas de modelización y (b) dificultades y errores de los estudiantes en la modelización.

## 1.1 CARACTERÍSTICAS DE RESOLUTORES DE TAREAS DE MODELIZACIÓN

Las características del resolutor que resuelve un problema de modelización y que los profesores consideran que deben tomarse en cuenta son: (a) habilidades/capacidades y (b) diversidad de aprendizaje. Sintetizamos la información en la tabla 46.

**Tabla 46**

*Características del resolutor de un problema de modelización*

| Aspectos                  |              | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|---------------------------|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Habilidad/ Capacidad      | Generales    |    |    | X  |    |    | X  |    |    | X   |     |
|                           | Modelización | X  | X  | X  | X  |    |    |    |    | X   | X   |
| Diversidad de aprendizaje |              |    | X  |    |    | X  | X  |    | X  |     |     |

La primera característica del resolutor, los participantes hacen referencia a las *habilidades y capacidades* de este, aludiendo a dos aspectos: (a) generales y (b) relacionados con la modelización. En el primer caso, fueron respuestas sobre *aspectos generales* de las habilidades y capacidades del resolutor al resolver un problema, no relacionadas con la modelización. Tres profesores (P3, P7, P10) brindaron este tipo de respuesta, como la del profesor 10 (P10):

*Maestro 10:* ... en los zapatos del estudiante, como ponerme también en las capacidades que tiene, en las habilidades que tiene él para resolverlo.

El segundo aspecto es la característica sobre las *habilidades y capacidades* del resolutor al realizar el proceso de modelización. Aquí, obtuvimos las respuestas de 6 profesores (P1, P2, P3, P5, P10, P11) y las agrupamos de acuerdo con las características de resolutores competentes según las etapas del ciclo de modelización. Cabe mencionar que no se encontraron respuestas sobre la etapa predicción. La respuesta del profesor 2 (P2) es evidencia de esto, en ella se argumenta la segunda característica: *construye un modelo matemático a partir del modelo real*,

atendiendo al modelo matemático como una *fórmula u operación básica* y además, hace alusión al uso de este:

**Maestro 2:** ...significa que ellos aplican la fórmula, si tiene hacer una multiplicación o una división ellos lo aplican. Pero lo aplican con los pasos que tiene que ser.

Por último, la segunda característica tiene que ver con la *diversidad de aprendizaje* de los resolutores de problemas. Aquí, las respuestas no hacen referencia directa a la modelización. Cuatro profesores (P2, P6, P7, P9) mencionaron esto en frases como *razonamiento lógico, la forma aprendizaje*, entre otros; como la respuesta del profesor 7 (P7):

**Maestro 7:** Y muchas veces, pues tengo que ver de qué forma aprende el estudiante. Es verdad que no todos aprenden de la misma forma.

## 1.2 DIFICULTADES Y ERRORES DE LOS ESTUDIANTES EN LA MODELIZACIÓN

Las respuestas de esta subcategoría las hemos agrupado en: (a) comprensión lectora, (b) respuesta sin reflexión, (c) conocimiento previo insuficiente, (d) emociones y actitudes y (e) necesidades educativas especiales, como se muestra en la tabla 47. Además, al final del apartado mostramos las razones propuestas por los profesores sobre por qué el maestro debe conocer las limitaciones de los estudiantes al enseñar la modelización matemática.

**Tabla 47**

*Dificultades y errores de los estudiantes en la modelización*

| Aspectos                          | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-----------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Comprensión lectora               | X  | X  | X  | X  |    | X  |    |    | X   | X   |
| Respuesta sin reflexión           | X  | X  |    | X  | X  | X  |    |    |     |     |
| Conocimiento previo insuficiente  | X  |    | X  |    | X  | X  | X  | X  |     | X   |
| Emoción/ actitud Frustración      | X  |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
| Actitud negativa                  |    |    |    |    |    | X  |    |    | X   |     |
| Necesidades educativas especiales |    | X  |    | X  |    |    | X  | X  | X   |     |

En primer lugar, una de las dificultades que los estudiantes tienen al trabajar la modelización señalada por los profesores corresponde a una *comprensión lectora* poco efectiva. Concretamente, cuando el estudiante no comprende las partes esenciales del problema y realiza una lectura superficial. Aquí, 7 profesores (P1, P2, P3, P5, P7, P10, P11) manifiestan esta dificultad, pero tres de ellos especifican que afecta la resolución del problema. Los participantes

señalan que los estudiantes dejan de lado detalles relevantes que hacen que cometan errores como el uso de una operación matemática equivocada, entre otros. Por ejemplo, en la respuesta del profesor 5 (P5):

**Maestro 5:** ...si no sabe hacer una comprensión de lectura, jamás va a poder hacer una comprensión de un problema... Por ejemplo, que va a aplicar la operación que no es la indicada, pueden que al no comprender crea que era una multiplicación ...pero al final, si ellos... ven que no era no multiplicación, sino una división.

En segundo lugar, otra dificultad es que el estudiante resuelve el problema de modelización *sin reflexión*, es decir, no profundiza en la situación y contesta prematuramente. Esto fue mencionado por 5 profesores (P1, P2, P5, P6, P7), con frases alusivas a que el estudiante *no analiza o razona*, entre otros. La respuesta del profesor 7 (P7) es evidencia de lo anterior:

**Maestro 7:** me ha costado en el aula, que el estudiante razone el problema, ...esa relación que se debe hacer con el entorno, muchas veces no la logra ...ahora los chicos, pues casi no analizan, ellos se concentran en el celular y ahí ellos juegan y no analizan.

En tercer lugar, 7 profesores (P1, P3, P6, P7, P8, P9, P11) señalan que una de las dificultades es carecer de los *conocimientos previos* necesarios para afrontar un problema. Esto se evidenciaba al expresar la *falta de conocimientos previos*, *malas bases*, entre otros. Aquí dos de los profesores (P8, P9) mencionaron que una consecuencia de lo anterior es el *uso de conceptos y procedimientos matemáticos inapropiados* para resolver el problema. Como la respuesta del profesor 9 (P9):

**Maestro 9:** ...en errores del procedimiento que use para resolver un problema... Por ejemplo... en la propiedad distributiva. Si usted no sabe que en operaciones combinadas, primero se realiza la multiplicación, luego suma o resta... ahí va ocurrir un error.

En cuarto lugar, tres de los profesores (P1, P7, P10) indicaron que una dificultad de los estudiantes al resolver un problema de modelización tiene que ver con las *emociones y actitudes*. Por ejemplo, hallamos referencias a esto al mencionar la *frustración y la actitud negativa*. Sobre esto, mostramos un ejemplo, en la respuesta del profesor 10 (P10):

**Maestro 10:** Algunos estudiantes vienen con una actitud negativa, indispuestos. Primero, porque ...ellos le temen a la matemática, entonces ya vienen con ese chip de que ¡Me da miedo! ¡No lo voy a resolver!

**Maestro 10:** Pero entonces una de las cosas, limitantes diría yo es esa actitud negativa...

Por último, otra dificultad que mencionaron los profesores corresponde a las *necesidades educativas especiales* que puede presentar el estudiante. Específicamente cinco profesores (P2,

P5, P8, P9, P10) mencionaron esta dificultad en frases como *condición especial, discapacidad, entre otros*. Un ejemplo es la respuesta del profesor 8 (P8) que presentamos en el siguiente extracto:

**Maestro 8:** Nosotros no podemos plantear un problema de forma generalizada, sin tomar en cuenta que hay estudiantes que tienen una capacidad cognitiva mayor o menor que otros. En este sentido, es muy importante el tener claro con qué población estamos trabajando y cuáles son sus capacidades y limitaciones.

Por otra parte, para 9 de los profesores (P1, P3, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11) son relevantes conocer los errores y dificultades de los estudiantes al resolver problemas de modelización, debido a: (a) puede afectar el proceso enseñanza-aprendizaje y además (b) sirven para la toma de decisiones y (c) corrección y avance. En la tabla 48, exponemos los resultados de cada participante.

**Tabla 48**

*Razones de porqué debe conocer las limitaciones de estudiantes al enseñar la modelización*

| Argumentos                    | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Proceso enseñanza-aprendizaje | X  | X  |    | X  |    |    |    | X  |     | X   |
| Toma de decisiones            |    |    |    |    | X  |    | X  |    | X   |     |
| Corrección y avance           |    | X  | X  |    | X  | X  |    | X  |     |     |

Sobre el primer argumento, hallamos que 5 profesores (P1, P2, P5, P9, P11) consideraron importantes las limitaciones pues afectan al *proceso enseñanza-aprendizaje* de los estudiantes.

Un ejemplo sobre este tipo de respuesta es la brindada por el profesor 9 (P9):

**Maestro 9:** Afecta a la enseñanza y aprendizaje. Entonces es sumamente esencial y fundamental que nosotros como docentes y también el estudiante en sí mismo, conozca o llegue o identifique el error que cometió.

En el segundo argumento, conocer las limitaciones es necesario para la *toma de decisiones* para acompañar a los estudiantes en el proceso de modelización. Aquí tres profesores (P6, P8, P10) mencionaron este tipo de respuesta, se evidencia en el diálogo:

**Maestro 6:** ...las decisiones que uno toma son de suma importancia, sin las decisiones que tome no van a lograr nada en el aula. Pero para tomar esas decisiones, debes tener bien claro cuáles son las necesidades o limitaciones de los estudiantes.

Por último, el tercer argumento se basa en que es necesario *retroalimentar para avanzar*. Es decir, el docente identifica las dificultades de los estudiantes para poder abordarlas y redirigirlas,

y lograr el aprendizaje. Aquí, 5 profesores (P2, P3, P6, P7, P9) realizaron este tipo de aporte como:

**Maestro 9:** Es sumamente importante porque si no se conoce en qué están fallando, nunca vamos a poder dar una solución a ese problema, a ese error... poder llevarlos a que aquellos comprendan de una mejor manera.

## 2. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 2: PROBLEMAS DE MODELIZACIÓN COMO TAREA ESCOLAR

En este apartado mostramos los resultados del conocimiento sobre la tarea como problema y del proceso de modelización, es decir, en términos de sus características como tarea escolar, que provocará el aprendizaje del resolutor. Exponemos los hallazgos en tres categorías: (a) selección de tareas, (b) ciclo de modelización e (c) invención de problemas.

### 2.1 SELECCIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN

Los resultados relativos a la selección de tareas las mostramos a través de criterios propuestos por los profesores: (a) contexto real, (b) aspectos de formato, (c) interés del estudiante, (d) estimular varias estrategias de resolución y (e) adecuación del currículo.

#### *Contexto real*

Este criterio consiste en elegir una tarea de modelización de la realidad circundante de los estudiantes. Los resultados los hemos organizado en contexto real: (a) sin objetivo, (b) interesante, (c) comprensible y (d) útil para el aprendizaje. En la tabla 49 resumimos los resultados obtenidos:

**Tabla 49**

*Aspectos sobre el contexto real que debe poseer una tarea de modelización*

| Aspectos                 |                                    | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|--------------------------|------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Sin objetivo             | General                            | X  |    |    |    |    | X  |    | X  |     |     |
|                          | Características de los estudiantes |    |    | X  | X  |    |    |    |    | X   |     |
| Interesante              |                                    | X  | X  |    | X  |    |    | X  |    | X   | X   |
| Comprensible             |                                    | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X   | X   |
| Útil para el aprendizaje |                                    |    | X  | X  | X  |    |    |    |    | X   |     |

El primer criterio de selección de una tarea de modelización es el *contexto real del estudiante*, pero sin objetivo. Estas respuestas se referían a dos aspectos: generales y a características de los estudiantes. En primer lugar, sobre los criterios generales, 3 profesores (P1, P7, P9) mencionan su uso en forma *general* en frases como *contexto social*, *entorno*, entre otros. Un ejemplo de esto es:

**Maestro 1:** Para diseñar, el contexto social donde se desenvuelven.

En segundo lugar, ubicamos respuestas de 3 profesores (P3, P5, P10) sobre el uso del *contexto real del estudiante*, pero con referencias a características particulares de los estudiantes como la *alimentación*, *intereses particulares*, entre otros. Un ejemplo es la respuesta del profesor 5 (P5):

**Maestro 5:** En cambio, ahora enfocarse en lo real, lo que vive la época de ahora, de ellos, digamos en lo que vive...también ver las condiciones de cada uno.

Con respecto a la segunda clasificación, 6 profesores (P1, P2, P5, P8, P10, P11) expusieron que, al seleccionar una tarea de modelización, este debe poseer un contexto real *interesante o llamativo* para el estudiante. Un ejemplo es un cambio sugerido por el profesor 1 (P1) al contexto de una tarea de modelización propuesta. Específicamente, *cambiar la cantidad de dinero*, donde el profesor argumenta que hay que posicionarse en el tipo de estudiante con el que se está trabajando. Es decir, si trabajamos con estudiantes con más recursos económicos, la cantidad de dinero que se plantea en la tarea (\$50) es insuficiente. Por ello, el contexto propuesto no sería interesante, ni adecuado para este tipo de estudiante. Exponemos su argumento en el siguiente diálogo:

**Maestro 1:** Contextualización del lugar, cosas emocionantes o que lo atraigan.

**Entrevistadora:** ¿En tu aula?

**Maestro 1:** Sí se podría aplicar con esa cantidad de dinero. Pero si lo llevamos a Rohrmoser, al Blue Valley o a un colegio de mucho dinero, no podemos poner \$50.

**Entrevistadora:** ¿Y cuánto le pondría?

**Maestro 1:** Le pondría \$5000.

**Entrevistadora:** Eso sería una Megafiesta.

**Maestro 1:** Por eso, depende de la contextualización, así lo van a ver ellos interesante o no.

En el tercer criterio, todos los profesores indicaron que al seleccionar la tarea de modelización, debe poseer un *contexto real que sea comprensible* para los estudiantes. De estos profesores, específicamente 4 de ellos (P3, P7, P10, P11) brindaron la sugerencia de hacer un

cambio a la tarea de modelización propuesta, con el fin de mejorar su comprensión por parte del estudiante. Dicha sugerencia es la *conversión monetaria*, pues una tarea que usa dólares no es adecuada a la realidad nacional. Los profesores justifican este cambio debido a que trabajan en sectores de escasos recursos económicos y consideran que el contexto de estos estudiantes no es adecuado. Además, señalan el nivel en que se encuentra el estudiante, pues en los niveles iniciales de educación primaria, no están preparados para realizar conversiones de dinero. Pero en niveles escolares superiores, si es viable aplicar ese tipo de tareas. Un ejemplo es la respuesta del profesor 10 (P10):

*Maestro 10:* Tal vez le cambiaría los dólares llevándolo a mi aula de 4º año, le cambio los dólares por colones, por moneda nacional... Si es 6º, sí, perfectamente lo dejaría.

Otro cambio para mejorar la comprensión de la tarea es brindar *datos adicionales*. Es sugerido por seis de los profesores (P3, P5, P6, P7, P9, P11) que consideran que a la tarea propuesta le hace falta datos y se le deberían agregar para su aplicación en el aula. Datos como la cantidad de personas que participaran en la fiesta, los artículos que se van a comprar para la fiesta, entre otros. Un ejemplo lo evidenciamos en la respuesta del profesor 5 (P5):

*Maestro 5:* ... agregaría a que ellos..., que yo puedo agregarle la cantidad de personas, qué cosas van a comprar para la fiesta. Le agregaría también los diferentes productos.

*Maestro 5:* Y los montos de cada uno exactamente, para que ellos puedan solucionar.

Por último, la cuarta clasificación referida a que, al seleccionar una tarea de modelización, esta debe ser de *contexto real útil* para el que *aprende*. Es decir, los conceptos matemáticos deben tener sentido en el aprendizaje del estudiante. Identificamos estos argumentos en las respuestas de 4 profesores (P2, P3, P5, P10) categorizadas por frases como *útil o utilidad*, entre otros.

*Maestro 2:* usted contextualiza y habla de las cosas que ellos están viviendo el día a día, van a sentir la utilidad, que realmente eso sirve, porque si usted les pone todo en abstracto, ellos no van a sentir y se preguntan: ¿Y para qué me sirve esto?

### ***Aspectos de formato***

El segundo criterio tiene que ver *aspectos de formato* que la tarea de modelización debe cumplir, como: (a) claridad y (b) vocabulario. Resumimos los resultados obtenidos en la tabla 50:

**Tabla 50***Aspectos de formato que debe poseer una tarea de modelización*

| Aspectos    | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Claridad    |    | X  | X  |    |    |    | X  | X  | X   |     |
| Vocabulario |    | X  |    |    |    | X  | X  |    |     |     |

El primer aspecto de formato es que la tarea de modelización debe poseer *claridad*. Aquí, 5 profesores (P2, P3, P8, P9, P10) mencionaron que la tarea debe ser clara en la redacción, que permita entender sin confusión los datos y lo que se pida. Como la respuesta del profesor 8 (P8):

**Maestro 8:** Los datos muy claros, si es para niños pequeños y viene la parte gráfica, que los dibujitos sean claros y no se presten a confusión y que las preguntas también sean claras. Que el estudiante pueda entender qué es lo que se requiere que conteste.

El *vocabulario* fue destacado por tres profesores (P2, P7, P8) y se refiere a que las palabras utilizadas deben adecuarse al estudiante. Es decir, este debe comprender las palabras usadas en la tarea, que sean de su conocimiento y de su realidad. Lo que es mencionado por el profesor 8 (P8):

**Maestro 8:** El vocabulario apto a su nivel y a su realidad. No podemos poner palabras que el estudiante no comprenda.

***Desarrollo del estudiante***

Como tercer criterio de selección de las tareas de modelización propuesto por los profesores tenemos el *desarrollo del estudiante*. Los participantes se refieren a dos aspectos: (a) conocimiento previo y (b) edad escolar. Exponemos las respuestas por participante en la tabla 51.

**Tabla 51** Aspectos sobre el desarrollo del estudiante que debe poseer una tarea de modelización*Aspectos sobre el desarrollo del estudiante que debe poseer una tarea de modelización*

| Aspectos            | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|---------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Conocimiento previo | X  |    |    |    | X  | X  | X  | X  | X   | X   |
| Edad escolar        |    |    | X  | X  |    |    |    | X  |     | X   |

En el caso del *conocimiento previo*, 7 profesores (P1, P6, P7, P8, P9, P10, P11) lo mencionaron al hacer referencia sobre el conocimiento que los estudiantes deberían poseer para enfrentar con éxito una tarea de modelización. Un ejemplo es la respuesta del profesor 6 (P6):

**Maestro 6:** Después el nivel cognitivo que tenga para no...hilar tan alto ni tan poco bajo nivel.

Para el *nivel escolar* hallamos 4 profesores (P3, P5, P9, P11) que mencionaron esto en oraciones señalando que es importante tener en cuenta *el grado del estudiante, su madurez*, entre otros. Un ejemplo de esto es el siguiente extracto de la respuesta del profesor 3 (P3):

**Maestro 3:** La edad, el nivel de madurez.

**Entrevistadora:** El de madurez, no es lo mismo que nivel en que están (nivel escolar).

**Maestro 3:** No, porque puede estar en 5°, pues el grado de madurez es el léxico que ellos manejan, o sea, el vocabulario.

### ***Estimular varias estrategias de resolución***

El cuarto criterio es que la tarea de modelización seleccionada debe estimular el uso de *varias estrategias de resolución* por parte de los estudiantes. Resumimos los resultados en la tabla 52:

**Tabla 52** Aspectos necesarios que debe poseer un problema de modelización

#### ***Aspectos necesarios que debe poseer un problema de modelización***

| <b>Aspectos</b>                  | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>P5</b> | <b>P6</b> | <b>P7</b> | <b>P8</b> | <b>P9</b> | <b>P10</b> | <b>P11</b> |
|----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Varias estrategias de resolución | X         |           |           |           | X         | X         |           |           | X          |            |

Ubicamos las respuestas de cuatro profesores (P1, P6, P7, P10) de este tipo. Para esto, usamos palabras claves como *varias estrategias o caminos para resolver*, entre otros; es decir la tarea debe poseer elementos que provoquen la creatividad de los estudiantes al proponer otras soluciones del problema. Como lo observamos en la respuesta del profesor 10 (P10):

**Maestro 10:** también tenga diversas formas para resolverlo. No solamente un solo camino que a veces buscamos solo un camino para resolver una situación, sino que él tenga diferentes caminos, como llegar a la solución.

### ***Adecuación del currículo***

Por último, como quinto criterio es la *adecuación del currículo*, es decir el profesor debe seleccionar la tarea de modelización siguiendo o adecuando los lineamientos expuestos en el currículo. Sintetizamos los resultados en la siguiente tabla:

**Tabla 53**

#### ***Aspectos necesarios que debe poseer un problema de modelización***

| <b>Aspectos</b>          | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>P5</b> | <b>P6</b> | <b>P7</b> | <b>P8</b> | <b>P9</b> | <b>P10</b> | <b>P11</b> |
|--------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Adecuación del currículo |           | X         |           | X         | X         | X         |           |           |            | X          |

Sobre esto, encontramos 5 respuestas de los profesores (P2, P5, P6, P7, P11), que señalaban la tarea debe cumplir con aspectos como el *contenido matemático, la dificultad de la tarea*, entre otros; de acorde con las directrices expresadas en el currículo. Un ejemplo es la respuesta del

profesor 11 (P11) donde explica que la tarea debe coincidir con el contenido matemático que se está impartiendo en el grado del estudiante. Por ejemplo:

*Maestro 11:* tiene que estar dentro de los contenidos que ellos están viendo. No les voy a meter otra cosa que no estén viendo, tengo que limitarme al contenido.

## 2.2 MODELOS TEÓRICOS DE MODELIZACIÓN

Aquí ubicamos los resultados sobre el conocimiento del profesor acerca de las perspectivas teóricas de la modelización. Concretamente, sobre cómo estimular y ayudar al aprendizaje de los estudiantes durante la aplicación de las etapas del ciclo de modelización al resolver un problema. Dicho conocimiento fue agrupado en dos perspectivas: (a) conocimiento general y (b) conocimiento específico de las fases del ciclo de modelización.

### *Conocimiento general del ciclo de modelización*

Aquí ubicamos las respuestas a cerca del conocimiento sobre el ciclo de modelización donde aludían a las fases sin dar características específicas sobre alguna de ellas. En la tabla 54 presentamos los profesores que lo manifestaron, el resto de los profesores no lo hicieron.

**Tabla 54**

*Profesores que manifestaron conocimiento general del ciclo de modelización*

| Aspectos    | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Manifiestan | X  |    |    | X  |    | X  |    |    |     |     |

En las respuestas de los profesores (P1, P5, P7) que manifestaron conocimiento general sobre el ciclo de modelización, observamos referencias a las etapas del ciclo de modelización de Lesh y Doerr (2003). Aquí, los 3 profesores aludieron al *planteamiento del problema* (P1, P5, P7), 1 profesor a la *manipulación* y 2 profesores a la *validación* (P1, P7). Ninguno manifestó conocimiento de todo el ciclo. Un ejemplo es la respuesta del profesor 1 (P1):

*Maestro 1:* ...el modelo que propuso el nuevo plan educativo en matemáticas. Donde se proponen los pasos: el planteamiento, la resolución y la explicación. Algo así era...

### *Conocimiento específico de las fases del ciclo de modelización*

Propusimos a los profesores las etapas del ciclo de modelización de Lesh y Doerr (2003), manifestando que es necesario y relevante realizar cada una de las etapas. Sus justificaciones se refirieron a dos tipos rutas: ruta 1 y ruta 2. En la tabla 55 mostramos los resultados obtenidos:

**Tabla 55**

*Rutas usadas para justificar la importancia de las fases del ciclo de modelización*

| Aspectos |        | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|----------|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Rutas    | Ruta 1 |    |    | X  |    | X  |    |    |    | X   |     |
|          | Ruta 2 |    | X  |    |    |    | X  | X  | X  |     | X   |

En el caso de la *ruta 1: Descripción, Predicción, Manipulación, Validación*; hallamos que 3 profesores (P3, P6, P10) justificaron la importancia de las fases del ciclo de modelización siguiendo dicha ruta en sus descripciones. Este orden fue establecido por los profesores previamente y la entrevistadora fue preguntando por la justificación de cada una de las fases según el orden dado por el profesor. Por ejemplo, profesor 3 (P3) expresa que:

**Maestro 3:** ...Ellos empiezan a hacer la descripción, a desmenuzar el problema, caracterizarlo y poder sacar las ideas.

**Entrevistadora:** ¿Por qué crees que es necesario y relevante hacer eso?

**Maestro 3:** Sí, claro. Para que entren en contacto con el problema.

Para el mismo profesor es necesario y relevante realizar la predicción debido a:

**Maestro 3:** Porque la predicción da los mecanismos claros para poder seguir en el problema... Entonces ya da los mecanismos o aclara un poco la descripción... por dónde tenemos que irnos.

Posteriormente, con respecto a la fase de la manipulación menciona que:

**Maestro 3:** Teniendo claro eso entonces empiezo a manipular todo lo que son los conceptos, los procedimientos matemáticos... de acuerdo con la descripción y predicción

Por último, sobre la fase de la validación el mismo profesor afirma que:

**Maestro 3:** Porque también se puede confrontar a nivel de grupo otro tipo de problemas, inclusive el grupo 1 puede estar trabajando en esto y le dio una orientación al problema, mientras que el grupo 2 le dio otra interpretación. Pero si tenemos que llegar a un mismo consenso, a la misma conclusión y la validación es sumamente importante, porque podemos ver en qué fallamos, o si procedimos bien o mal.

Por otra parte, cinco profesores (P2, P7, P8, P9, P11) justificaron la importancia de las fases del ciclo de modelización según el orden propuesto en la *ruta 2: Descripción, Manipulación, Predicción, Validación*. Sin embargo, algunos profesores evidenciaron, sus rutas originales fueron modificadas durante los diálogos generados la entrevista. Por ejemplo, el profesor 9 (P9):

**Maestro 9:** ...primero identificar cuál es el problema para buscar las soluciones y luego resolverlo. Entonces sí me parece importante —se refiere a la descripción.

**Maestro 9:** ...Yo diría que posteriormente a la descripción iría la manipulación, pero es que estoy entre la manipulación y validación —el profesor muestra indecisión.

*Entrevistadora:* ¿Por qué crees que es necesario y relevante realizar la manipulación?

*Maestro 9:* Porque es como los pasos para resolver el problema que nos dieron antes.

*Maestro 9:* Luego, la validación... Me parece que es importante... porque todos los estudiantes tienen maneras distintas de resolver un problema. Entonces ...si lo evaluamos o lo analizamos de manera conjunta. Ahí vamos a saber si es correcto o no, o si fuera erróneo, porque lo fue.

Sin embargo, notamos que la etapa de predicción queda la última en la ruta del profesor 9, por ello se le pregunta sobre la importancia de realizar dicha en el ciclo de modelización. Pero, el profesor muestra indecisión en su respuesta, generando el siguiente diálogo:

*Entrevistadora:* ¿por qué crees que es necesario y relevante realizar esa última etapa?

*Maestro 9:* Bueno, vieras que trato de leer y leer, yo creo que no lo hice bien el orden...

*Entrevistadora:* Pero si no estás seguro aún lo puedes cambiar... solo que me justifiques porqué haces el cambio.

*Maestro 9:* Sí, se realiza interpretaciones de los resultados de la etapa anterior. Tomando en cuenta eso los datos que proporciona la situación problema.

*Maestro 9:* Bueno, yo diría entonces, descripción, manipulación, predicción y validación.

*Entrevistadora:* Ok. Entonces ¿pondrías predicción antes de la validación?

*Maestro 9:* Sí, antes de la validación.

El profesor 9 (P9) cambia su ruta original después del análisis realizado, sin embargo, su dificultad sobre como justificar por qué es necesaria la etapa de predicción continua:

*Maestro 9:* Leyendo la característica que me está dando. Sería, como haciendo énfasis a los datos que nos proporcionan, pero la verdad... no sé cómo responder a esa pregunta.

Después, todos los profesores contestaron que estarían de acuerdo en utilizar las etapas del ciclo de modelización. Sobre esto, encontramos que el argumento de mayor frecuencia fue que el uso del ciclo de modelización provee distintos *beneficios para el desarrollo del aprendizaje del estudiante*. Como lo son: (a) ayuda a ordenar los pensamientos facilitando el proceso, (b) mejora la comprensión del problema y (c) mejora la relación social de los estudiantes. Sobre este último beneficio, el profesor 10 (P10) nos dice que:

*Maestro 10:* No solamente voy a enriquecer un tema matemático, sino que voy a enriquecer el trabajo entre ellos, la interacción entre las personas, con la realidad del estudiantado.

En esta pregunta, notamos que tres profesores (P1, P2, P11) mencionaron aspectos que tenían que ver con la enseñanza de la modelización y evaluación.

## 2.3 INVENCION DE PROBLEMAS

Hemos categorizado toda información suministrada por los profesores sobre el uso de la invención de problemas desde dos perspectivas la del: (a) profesor y (b) estudiante.

### *Uso de la invención de problemas de modelización por parte de los profesores*

Encontramos, que todos los profesores sí habían utilizado el proceso de invención de problemas. Aquí, obtuvimos tres grupos de respuestas: (a) tareas matemáticas, (b) contexto real y (c) modificación de problemas. Sintetizamos los resultados en la tabla 56:

**Tabla 56**

*Uso de la invención de problemas de modelización por los profesores*

| Aspectos                     | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Tareas matemáticas           |    |    | X  |    |    |    |    | X  |     |     |
| Contexto real del estudiante | X  |    |    | X  | X  | X  | X  | X  | X   | X   |
| Modificación de problemas    | X  | X  |    | X  |    |    |    | X  | X   |     |

En el primer grupo, algunos profesores (P3, P9) mostraron diferencias en sus respuestas al afirmar que habían utilizado la invención de problemas al crear *tareas matemáticas*, no específicamente relacionadas con la modelización. Por ejemplo, la respuesta del profesor 9 (P9):

**Maestro 9:** Sí he inventado problemas matemáticos, pero no sé si son de modelización...

**Maestro 9:** Ajá...yo siento que sí lo he hecho y como le digo, es siempre utilizando la vida cotidiana, contextos reales, plasmados ahí.

En el segundo grupo, 7 profesores (P1, P5, P6, P8, P9, P10, P11) mencionaron tareas con el uso del *contexto real del estudiante*, es decir que contemplaran actividades cercanas a la vida del estudiante. Por ejemplo, uno de los contextos más mencionados por los profesores fue el utilizar la *pulpería o tienda del barrio* como lugar para realizar las compras de artículos cotidianos, se encuentran con mucha frecuencia en el barrios de Costa Rica. Por ello, los profesores lo usan para la creación de sus problemas. Lo anterior fue observado en las respuestas de tres profesores (P5, P6, P9), en particular exponemos la respuesta del profesor 6 (P6):

**Maestro 6:** ...por ejemplo la actividad de la pulpería, eso de que ellos manejen, de que apliquen, ...vamos a hacer un grupito de dinero y ahí aprenden a seleccionar, a contar, a agrupar y después ir a resolver situaciones como ir a comprar algo, cuanto me dan, cuanto doy ...Mientras que cuando ellos aparte que están jugando y están viviéndolo, como decíamos ahora el entorno, el entorno tiene que ir a la pulpería...

Para el tercer grupo, ubicamos las respuestas de 5 profesores (P2, P3, P6, P11, P10) que utilizan la invención de problemas al *modificar problemas*. Por ejemplo, al cambiar: *cantidades*, *contexto*, entre otros; del problema. Un ejemplo es la respuesta del profesor 2 (P2):

**Maestro 2:** El problema si yo lo veo muy complejo, le cambio cosas, preguntas o el estilo de la pregunta, tal vez lo trato de hacer más directo.

Además, encontramos respuestas que hacen referencia al uso de recursos o materiales al inventar sus problemas, esto lo abordaremos más adelante en la subcategoría: Gestión de recursos.

### ***Uso de la invención de problemas de modelización con los estudiantes***

Respecto a utilizar la invención problemas de modelización, 3 profesores (P2, P10, P11) señalaron que la utilizan, *pero de forma condicionada*. Concretamente, refieren a que depende del grado del estudiante que la estrategia funcione. Por ejemplo, el profesor 10 (P10) nos dice que:

**Maestro 10:** Sí, sí lo he hecho, pero poco. Depende del nivel con el que esté trabajando.

Ahora bien, cuando se les pidió realizar una descripción de cómo han realizado el proceso encontramos tres tipos de respuestas: (a) contexto real, (b) con el uso de material concreto y (c) como una actividad dirigida por el profesor. En la tabla 57 mostramos estos resultados.

**Tabla 57**

#### ***Uso de invención de problemas de modelización por los estudiantes***

| <b>Aspectos</b>                    | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>P5</b> | <b>P6</b> | <b>P7</b> | <b>P8</b> | <b>P9</b> | <b>P10</b> | <b>P11</b> |
|------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Contexto real                      | X         |           |           | X         | X         |           |           | X         | X          |            |
| Uso del material concreto          |           |           |           |           |           |           | X         |           |            |            |
| Actividad dirigida por el profesor |           |           | X         | X         |           | X         |           |           | X          |            |

Hallamos que la respuesta de mayor frecuencia fue aquella que menciona el *contexto real*, con un total de 5 profesores (P1, P5, P6, P9, P10). Estos profesores al dar un ejemplo de cómo han utilizado la invención de problemas aludieron al uso del dinero en experiencias cotidianas como las *compras de artículos*, *trámites bancarios*, entre otros. Por ejemplo, el profesor 10 (P10) señala:

**Maestro 10:** Me encanta trabajar con ellos la pulpería, como tipo mall... a uno les toca el área de zapatos, otro vende joyas o ropa, entonces tienen que saber precios, ponen cartelitos de descuentos, 25%, 5% de descuento, entonces los pongo a trabajar ¿En cuánto le vendieron el zapato? Vale ₡5500. Ok, pero tiene un 25% de

descuento. Entonces ellos inventan. Esto es muy bueno y les manejo muchos conceptos como la moneda o dinero, sumas restas, interés o descuentos en porcentajes.

Respecto al uso de material concreto, solo el profesor 8 (P8) señaló su utilización, donde describe el proceso de invención de problemas por parte de los estudiantes, pero sin referir explícitamente la modelización. Concretamente, señala que:

*Maestro 8:* ...usamos los bloques multibase para determinar cuántas decenas, centenas, unidades habían en los bloques que estábamos utilizando... Entonces con lo que cada grupo han utilizado redactan su propio problema matemático y resuelven.

Por último, el tercer grupo de respuestas se corresponde a 4 profesores (P3, P5, P7, P10) que explican primero los contenidos y luego proponen a sus estudiantes que inventen y resuelvan otros problemas con temas propuestos por el profesor. Aquí los estudiantes pueden acercarse al profesor para pedir orientación en la elaboración de su problema. Como en la respuesta del profesor 3 (P3):

*Maestro 3:* ... hacer un trabajo previo, para que ellos comprendan las bases. Luego crean con el concepto de lo que trabajaremos en los problemas. Indicamos un tema... ellos necesitan la aprobación del maestro, cuando hacen algo y van a ver si está bueno...

### **3. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 3: FACTORES NO COGNITIVOS**

En esta parte agrupamos los resultados en tres grupos que refieren al conocimiento de los profesores sobre creencias y concepciones: (a) relativas a la modelización, (b) enseñanza de la modelización y (c) aprendizaje de la modelización.

#### ***Conocimiento sobre las creencias y concepciones relativas a la modelización***

Todos los profesores manifestaron este tipo de conocimiento. La tabla 58 expone los resultados sobre 8 afirmaciones propuestas a los profesores, según la literatura no son adecuadas para la enseñanza de la modelización. Agrupamos los resultados en dos grupos, al considerar que las afirmaciones: (a) no afectan y (b) afectan negativamente la enseñanza de la modelización. Para el primer grupo, la afirmación 1: *la modelización matemática es el uso de materiales concretos y manipulativos en la enseñanza de las matemáticas*, es la que más profesores consideraron que no

*afecta* negativamente a la enseñanza de la modelización, aunque desde la teoría esto no es cierto. Aquí, 6 profesores (P2, P3, P5, P7, P9, P10) la mencionaron, como el profesor 2 (P2):

*Maestro 2:* Sí, eso más bien es el ideal que uno pueda utilizar materiales... para que ellos puedan de una manera más concreta resolver los problemas.

En el segundo grupo, ubicamos el resto de las afirmaciones, para cada una 4 o más profesores las consideraron no adecuadas y por tanto, si el profesor posee esas creencias o concepciones puede *afectar* en forma negativa a la enseñanza de la modelización. Brindamos un ejemplo, con la respuesta del profesor 8 (P8) al referirse a la afirmación 2: *Solo existe una única forma de resolver el problema de modelización*, como lo vemos en su respuesta:

*Maestro 8:* mientras el estudiante logre la resolución del problema, no necesariamente tiene que ser con una única estrategia.

Por otro lado, en la tabla 59 ubicamos 4 afirmaciones propuestas a los profesores, que según la literatura son adecuadas para la enseñanza de la modelización. Igual que la parte anterior, encontramos dos tipos de respuestas al considerar las afirmaciones propuestas: (a) no afectan y (b) afectan negativamente la enseñanza de la modelización. En primer caso, localizamos que los profesores, consideraron que 3 de las afirmaciones propuestas constituían creencias o concepciones que *no afectan* negativamente a la enseñanza de la modelización. Por ejemplo, con respecto a la afirmación 9: *la matemática es útil en situaciones de la vida real*, 4 profesores (P2, P3, P9, P10) la consideraron que no afectaba. Al respecto, el profesor 3 (P3) expone que:

*Maestro 3:* la matemática es útil en situaciones de la vida real. Siempre va a ser todo lo que existe en matemática.

Sin embargo, con la afirmación 10: *los problemas de modelización deben ser complicados y se usan bastantes conocimientos no matemáticos*, hubo discrepancias. Aquí 7 profesores (P2, P3, P5, P6, P7, P8, P10) la consideraron que *afecta* negativamente a la enseñanza de la modelización, aunque desde la teoría es una afirmación adecuada. Como lo dice el profesor 7 (P7):

*Maestro 7:* Primero, esto de que deben ser complicados y que se usen. Al decir complicado, según yo lo que estoy entendiendo es que el problema tenga dificultad, pero obviamente a su nivel, verdad. Si yo estoy poniendo otra cosa, que ellos no puedan resolver, ¡Cómo que no!

**Tabla 58**

*Conocimiento según las afirmaciones sobre las creencias y concepciones no adecuadas para la enseñanza de la modelización*

| Aspectos                                                                                                                 |   | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 1.La modelización matemática es el uso de materiales concretos y manipulativos en la enseñanza de las matemáticas.       | V |    | X  | X  | X  |    | X  |    | X  | X   |     |
|                                                                                                                          | F |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
| 2.Solo existe una única forma de resolver el problema de modelización.                                                   | V |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
|                                                                                                                          | F | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X   | X   |
| 3.Un problema de modelización se resuelve en poco tiempo, sino no se puede resolver.                                     | V |    |    |    | X  |    |    |    |    |     |     |
|                                                                                                                          | F | X  | X  | X  |    | X  |    |    |    | X   |     |
| 4.En un problema de modelización no es necesario revisar los procesos matemáticos, ni la solución final.                 | V |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
|                                                                                                                          | F | X  | X  | X  |    |    | X  |    |    | X   | X   |
| 5.Un problema de modelización se debe resolver en forma individual.                                                      | V |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
|                                                                                                                          | F |    | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X  |     |     |
| 6.No es necesario integrar los conceptos matemáticos con su aplicación en la vida cotidiana.                             | V |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
|                                                                                                                          | F |    | X  | X  | X  |    | X  | X  | X  | X   | X   |
| 7.Lo más importante al resolver un problema de modelización es el modelo matemático y el encontrar una solución de este. | V |    |    |    |    |    |    |    | X  |     |     |
|                                                                                                                          | F | X  | X  |    |    |    | X  |    |    | X   |     |
| 8.Al enseñar la modelización puedo usar cualquier problema matemático de los libros de texto.                            | V |    | X  |    |    |    |    |    | X  |     |     |
|                                                                                                                          | F | X  |    | X  |    |    |    |    |    | X   | X   |

*Notas: V=De acuerdo, F=En desacuerdo.*

**Tabla 59**

*Conocimiento según las afirmaciones sobre las creencias y concepciones adecuadas para la enseñanza de la modelización*

| Aspectos                                                                                                                                                                             |   | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 9.La matemática es útil en situaciones de la vida real.                                                                                                                              | V |    | X  | X  |    |    |    |    | X  | X   |     |
|                                                                                                                                                                                      | F |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
| 10.Los problemas de modelización deben ser complicados y se usan bastantes conocimientos no matemáticos.                                                                             | V |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
|                                                                                                                                                                                      | F |    | X  | X  | X  | X  | X  | X  |    | X   |     |
| 11.Al enseñar bajo el enfoque de modelización matemática es importante el manejo de las emociones del estudiante como la ansiedad y frustración.                                     | V | X  | X  | X  | X  |    | X  |    | X  | X   |     |
|                                                                                                                                                                                      | F |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |
| 12.En la enseñanza de la modelización matemática es relevante que el maestro forme actitudes en el estudiante como la tolerancia, la perseverancia, la responsabilidad, entre otros. | V |    | X  |    | X  | X  |    | X  | X  | X   | X   |
|                                                                                                                                                                                      | F |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |

*Notas: V=De acuerdo, F=En desacuerdo.*

### ***Concepciones y creencias de profesores sobre la enseñanza de la modelización***

Para todos los profesores, las concepciones y las creencias del profesor sobre la enseñanza de la modelización juegan un papel relevante. Entre las razones que se esgrimen, encontramos dos tipos de argumentos: (a) forma de enseñanza y (b) pensamiento flexible del profesor. Ninguno de los argumentos hace referencia exclusiva a la modelización. La tabla 60 muestra cómo se distribuyeron los argumentos entre los participantes:

**Tabla 60**

#### ***Concepciones y creencias sobre la enseñanza de la modelización***

| <b>Argumentos</b>    | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>P5</b> | <b>P6</b> | <b>P7</b> | <b>P8</b> | <b>P9</b> | <b>P10</b> | <b>P11</b> |
|----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Forma de enseñanza   | X         | X         | X         | X         |           |           | X         | X         | X          |            |
| Pensamiento flexible |           |           |           |           | X         | X         |           |           |            | X          |

En el primer tipo de respuesta, los profesores reconocen el papel importante que tiene las concepciones y las creencias explicitadas en la *forma de enseñanza* del profesor (estilos o estrategias de enseñanza). A la vez, consideraron que pueden afectar tanto en forma positiva como negativa al aprendizaje del estudiante. Sobre esto, las respuestas de 6 profesores (P1, P3, P5, P8, P9, P10) fueron ubicadas. Como evidencia exponemos la respuesta del profesor 8 (P8):

**Maestro 8:** Yo creo que es una parte muy importante. A veces, el mismo maestro tiene ciertos estereotipos que le transmite al estudiante y quizá nos hemos quedado con un modelo de enseñanza un poco antiguo, donde a veces nosotros mismos, hacemos que el estudiante tenga que contestar de una manera muy específica y lo que nosotros queremos que ellos contesten. Lo limitamos muchísimas veces.

En el segundo grupo, agrupamos las respuestas de los profesores que recalcaron que el profesor debe poseer concepciones y creencias, como un *pensamiento flexible* ante las varias formas de resolución de los estudiantes. Encontramos que 3 profesores (P6, P7, P11) nos brindaron este tipo de respuesta. Por ejemplo, el profesor 7 (P7) nos dice que:

**Maestro 7:** ...siento que influyen, a la hora de hacer las cosas, pues muchas veces lo que yo considero que es la forma de hacerlo... obvio que tiene influencia sobre el estudiante. ...cuando tengo estudiantes que lo hicieron de diferentes formas, las hago en la pizarra y les explico que también existen esas otras formas de hacerlas, de buscar la solución... Papel muy importante, el estudiante siempre está pendiente de lo que hace el profesor...obviamente corta la creación del estudiante, la imaginación, los aspectos positivos que él tiene para resolver un problema. Cuando yo digo esta es mi única verdad y eso se aplica en cualquier tema, estoy cortando las posibilidades de que sus estudiantes desarrollen su potencial.

### ***Concepciones y creencias de estudiantes sobre el aprendizaje de la modelización***

En esta parte agrupamos en un único grupo las explicaciones de los profesores donde consideran que las concepciones y creencias de los estudiantes son muy importantes, debido a que generan una actitud —positiva o negativa— que afecta su aprendizaje. La tabla 61 muestra cómo se distribuyeron los argumentos entre los participantes:

**Tabla 61**

#### ***Importancia de las concepciones y creencias de los estudiantes en su aprendizaje***

| <b>Argumentos</b>                | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>P5</b> | <b>P6</b> | <b>P7</b> | <b>P8</b> | <b>P9</b> | <b>P10</b> | <b>P11</b> |
|----------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Actitudes afectan el aprendizaje | X         | X         | X         |           |           | X         | X         | X         | X          |            |

Aquí obtuvimos que 7 profesores (P1, P2, P3, P7, P8, P9, P10) brindaron este tipo de respuesta. De estos profesores, 3 de ellos (P1, P3, P8) afirmaron que las concepciones y creencias pueden afectar el aprendizaje, debido a que generan actitudes negativas que son influenciadas por el contexto social y familiar del estudiante. No hacen referencia directa a la modelización, sino más bien al aprendizaje matemático en general. Esto lo vemos en frases al referirse a estos elementos como un *obstáculo para el aprendizaje*, entre otros. Como lo menciona el profesor 9 (P9):

**Maestro 9:** Yo siento que esas creencias que traen los estudiantes, si afecta de manera negativa al aprendizaje de sí mismo.

**Maestro 9:** Exacto, si usted llega con una actitud positiva, si las matemáticas son importantes, porque voy a aprender, aplicar y demás, entonces obviamente va a lograr resultados positivos. Pero más bien consideran que las matemáticas son difíciles, no sirven para nada y demás, entonces obviamente nunca voy a encontrar ese gusto y tal vez respecto a eso, los resultados van a ser otros, van a ser negativos y no positivos.

## **4. RESULTADOS DE LA COMPONENTE 4: GESTIÓN DE ENSEÑANZA**

Este último grupo de respuestas trata sobre diversos aspectos que son activados durante las acciones que el profesor implementa para enseñar la modelización. Los resultados se presentan en cinco grupos: (a) enfoques de enseñanza de la modelización, (b) gestión del discurso, (c) gestión de atascos, (d) gestión de evaluación y (e) gestión de recursos.

## 4.1 ENFOQUES DE ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN

Organizamos las respuestas en dos perspectivas sobre enfoques de enseñanza: (a) relacionados con la matemática y (b) momentos de la clase. La tabla 62 muestra la respuesta de cada profesor:

**Tabla 62**

### *Enfoques de enseñanza de la modelización*

| Aspectos                       | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|--------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Relacionados con la matemática | X  | X  | X  | X  |    |    |    | X  | X   |     |
| Momentos de la clase           | X  |    |    |    |    | X  |    |    | X   | X   |

En primer lugar, tenemos que 6 de los profesores (P1, P2, P3, P5, P9, P10) mencionaron *enfoques de enseñanza de la matemática* no exclusivos de la modelización. Encontramos frases distintivas de cada enfoque como *dirigido*, *colaborativo*, entre otros. Para evidenciar esto, exponemos la respuesta del profesor 5 (P5) sobre un *enfoque dirigido* en su forma de enseñanza.

**Maestro 5:** ...yo trato de ir paso a paso, pero tal vez no como le enseñaron a uno... Yo trato primero analizarlo con los mismos estudiantes, comentar de qué se trata y finalmente, si se trata de algo de la vida real, hablar de lo que se está viviendo realmente... Ya luego, por ejemplo, resuelvo un ejemplo en la pizarra, paso a paso y les voy explicando lo que ellos tienen que realizar.

Un segundo grupo de profesores (P1, P7, P10, P11) proporcionó respuestas que referían a la utilización de un *enfoque de la enseñanza por etapas* como la introducción, observación, manipulación, comparación y análisis. Usamos estas mismas palabras como indicadores para clasificar dicha respuesta. Lo planteado guarda mucha similitud a las etapas de la modelización, aunque en las respuestas no se señala que sean exclusivas de dicho proceso. En algunas de las respuestas solo se mencionaban de 1 a 2 de las etapas. Solo en la respuesta del profesor 7 (P7) se mencionaron todas etapas antes indicadas, como lo evidenciamos en el siguiente extracto:

**Maestro 7:** En esas etapas, para mí sería como una introducción primero. O sea... yo las aplico, no sé qué nombre lleva cada etapa. Pero sí me gusta que sea de acuerdo con lo que uno va aprendiendo... Primero con la observación, luego la manipulación de algo, comparación, análisis. Eso es lo que busco, que ellos comparen, analicen, trabajen en el aula, no solo que lleguen y no solo llevar problemas sencillos, sino que yo sepa que tuvo que analizar para poder llegar a la resolución.

## 4.2 GESTIÓN DEL DISCURSO

Para esta sección, agrupamos las respuestas en dos perspectivas del discurso según el estilo de enseñanza del profesor: (a) tradicional y (b) más activo.

### *Discurso relacionado con un estilo de enseñanza tradicional*

En este tipo de discurso, ubicamos las respuestas en 6 perspectivas: (a) uso adecuado de una tarea de modelización, (b) distribución del tiempo, (c) organización de los estudiantes, (d) el profesor como protagonista, (e) socialización de los resultados y (f) rol de la comunicación y la argumentación. A modo de resumen, en la tabla 63 presentamos los resultados:

**Tabla 63**

#### *Discurso desde un estilo de enseñanza tradicional*

| Aspectos                                  | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Uso adecuado de una tarea de modelización |    |    |    | X  |    |    |    | X  | X   | X   |
| Distribución del tiempo                   | X  |    | X  |    |    | X  |    |    | X   | X   |
| Organización Individual y/o grupal        |    | X  |    |    |    | X  |    |    |     |     |
| El profesor como protagonista             | X  | X  | X  | X  |    |    | X  | X  |     | X   |
| Socialización de los resultados           |    | X  |    |    |    |    |    | X  |     |     |
| Comunicación y Modelización argumentación |    |    |    | X  |    |    |    |    |     |     |
| Aspectos generales                        | X  | X  |    |    |    | X  |    |    |     |     |

Sobre la primera perspectiva, el *uso adecuado de una tarea de modelización*, 4 profesores (P5, P9, P10, P11) coinciden en que es importante en que el maestro posea un conocimiento ideal sobre esto. Pero sus argumentos vislumbran acciones del profesor para la conducción de la clase, desde un estilo de enseñanza tradicional y que afectaría directamente al aprendizaje del estudiante. Esto lo observamos en la respuesta del profesor 5 (P5):

**Maestro 5:** Si yo no manejo bien un ejemplo de modelización, yo no sabría cómo explicarle a un estudiante. Si lo explico, a lo que yo entienda, difícilmente todos me van a entender. Tengo que buscar la técnica más adecuada, para que me puedan entender.

Como segunda perspectiva, para 5 profesores (P1, P3, P7, P10, P11) una *forma de distribuir el tiempo* es por medio de actividades tradicionales donde se muestra las acciones del profesor en tres momentos de la clase de matemática: introducción, desarrollo y cierre. Por ejemplo, al *introducir un tema y explicarlo*, entre otros. Como lo menciona el profesor 11 (P11):

*Maestro 11:* ...en dos lecciones puedo hacer una pequeña introducción del tema. Luego puedo poner varios ejemplos. Lanzar preguntas a ver qué lograron interiorizar. Y si me diera tiempo, pues que ellos realicen ejercicios.

La tercera perspectiva es la *organización de los estudiantes*. Aquí, dos profesores (P2, P7) mencionaron que los estudiantes se pueden organizar en forma *individual y/o grupal*. Es decir, uno de los profesores (P2) se inclinó a organizar a los estudiantes solo en forma individual, detallando una forma organización tradicional que aplica el profesor en todas sus clases. En cambio, el profesor 7 (P7) consideró que cualquiera de las dos formas se puede utilizar y esto depende de los objetivos de aprendizaje que el profesor establezca. Un ejemplo del primer tipo de respuesta es:

*Maestro 2:* Generalmente, yo a los chiquillos que les cuesta mucho o con déficit de atencional, siempre uno los trata de poner al frente...Y los más inteligentes atrás, pero trato de ponerlos cerca de chiquillos que les cuesta, para que se apoyen.

En cuarto lugar, ubicamos las respuestas de 7 de profesores (P1, P2, P3, P5, P8, P9, P11) sobre el *papel del profesor como protagonista*. Esto significa que dirige al estudiante en el proceso, y este último asume un papel pasivo en su aprendizaje. Como lo menciona el profesor 2 (P2):

*Maestro 2:* El papel de maestro es todo, porque uno tiene que explicar los problemas... Lo más importante es explicarles bien el problema paso a paso...

El quinto caso es la *socialización de los resultados* a través de *acciones de participación obligada*. Dos profesores (P2, P9) en sus respuestas mencionaron que ellos promueven la participación de los estudiantes —que casi no socializan o presentan deficiencias— para que escriban sus resultados a la pizarra. Como lo expone el profesor 2 (P2):

*Maestro 2:* Pasarlos a la pizarra... eso es importante. Ellos mismos tal vez empiezan a ver la respuesta y empiezan a hablar entre ellos, a ver si está malo o bueno.

Por último, en la sexta perspectiva reportamos los resultados sobre el *papel que juega la comunicación y argumentación* en la modelización. Los profesores manifestaron dos grupos de respuestas: (a) elementos sobre la modelización y (b) aspectos generales. En el primer caso, refiere a respuestas que muestran elementos relacionados con la modelización, vislumbrando el accionar del profesor como el único encargado. Por tanto, que el estudiante asume un *rol pasivo* en la comunicación y argumentación. Solo el profesor 5 (P5) nos brindó este tipo de respuesta:

*Maestro 5:* ...El profesor es el encargado de guiarlos y motivarlos para que ellos aprendan...

y no llegue a ser un problema entre ellos.

En el segundo tipo de respuesta tiene que ver con *aspectos generales* sobre enseñanza de la matemática, pero no exclusivamente de la modelización. Al igual que el tipo de respuesta anterior, aquí encontramos el mismo rol de la comunicación y argumentación. Tres profesores (P1, P2, P7) lo mencionaron implícito en su respuesta, como lo detalla el profesor 1 (P1):

**Maestro 1:** ...una parte escrita. O sea, yo debo tener, la planeación completa de la hoja y las argumentaciones para saber qué es lo que van a hacer esos chicos en ese momento y saber si están llevando el hilo que llevo...

### ***Discurso relacionado con un estilo de enseñanza más activo***

Establecimos 6 perspectivas de respuesta desde un estilo de enseñanza más activo: (a) uso adecuado de una tarea de modelización, (b) distribución del tiempo, (c) organización de los estudiantes, (d) el profesor como protagonista, (e) socialización de los resultados y (f) rol de la comunicación y la argumentación. A modo de resumen, en la tabla 64 presentamos los resultados:

**Tabla 64**

#### ***Discurso desde un estilo de enseñanza más activo***

| <b>Aspectos</b>                           |                          | <b>P1</b> | <b>P2</b> | <b>P3</b> | <b>P5</b> | <b>P6</b> | <b>P7</b> | <b>P8</b> | <b>P9</b> | <b>P10</b> | <b>P11</b> |
|-------------------------------------------|--------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
| Uso adecuado de una tarea de modelización |                          |           |           |           |           |           | X         | X         |           |            |            |
| Distribución del tiempo                   |                          |           | X         |           | X         | X         |           | X         | X         |            |            |
| Organización                              | Individual y/o grupal    | X         |           | X         | X         | X         |           | X         | X         | X          | X          |
| El profesor como mediador                 |                          |           |           |           |           | X         | X         |           |           | X          |            |
| Socialización de los resultados           | Exposición de cada grupo |           |           | X         | X         |           |           |           |           | X          |            |
|                                           | Lluvia de ideas          | X         |           |           |           | X         | X         | X         |           | X          | X          |
| Comunicación y argumentación              | Modelización             |           |           |           |           | X         |           | X         |           |            |            |
|                                           | Aspectos generales       |           |           | X         |           |           |           |           | X         |            | X          |

Sobre la primera perspectiva, *el utilizar adecuadamente un problema de modelización*, dos profesores (P7, P8) mencionan argumentos desde un estilo de enseñanza *más activo* y que tiene un efecto directo en el aprendizaje del estudiante. Por ejemplo, al propiciar acciones como la participación activa del estudiante. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la del profesor 8 (P8):

**Maestro 8:** Si vamos a hacer una clase más participativa, donde ellos mismos puedan a través de sus ideas, plantear una situación para resolver. Entonces no necesariamente es

el profesor va a tener el papel principal.

En segundo lugar, las respuestas de 5 profesores (P2, P5, P6, P8, P9) mencionaron la *distribución del tiempo* en momentos relacionados con la resolución de problemas: introducción, la resolución del problema y el cierre, donde se muestra las acciones que sigue el profesor para conducir a su grupo en una forma más activa. Un ejemplo es la respuesta del profesor 9 (P9):

**Maestro 9:** La actividad de inicio es una pequeña introducción del tema. Por decir algo, leemos y comentamos algo. En la actividad de desarrollo, pues ya se aplica o la operación se resuelve, el problema es lo que lo que deseo es llegar y ya es una actividad de cierre. Lo que hago es revisarlo siempre de manera oral. Todos damos nuestros puntos de vista y se llega al más acertado. No hay respuestas buenas, ni malas, simplemente se llega al que consideramos todos, como la mejor solución.

En la tercera perspectiva e igual que el tipo de discurso anterior, obtuvimos que los profesores detallaron desde un estilo de enseñanza más activo, una forma *individual y/o grupal* para *organizar a los estudiantes*. En este sentido, uno de los profesores (P8) considera que dicha organización puede ser *individual o grupal*, dependiendo del objetivo de enseñanza del profesor. Además, hallamos que 7 profesores (P1, P3, P5, P6, P9, P10, P11) se inclinaron hacia la forma de organización *solo grupal*, donde el profesor pueda estimular la metacognición de los estudiantes por medio de sus acciones. Un ejemplo es la respuesta del profesor 5 (P5):

**Maestro 5:** Tal vez comparando la solución con otros compañeros y ya al final, después se presenta ante el grupo. Sí, bueno, yo pienso que el maestro tendría que trabajar casi siempre en eso, para que ellos puedan trabajar y se autoevalúen por sí solos.

En cuarto lugar, 3 profesores (P6, P7, P10) afirman que el maestro debe asumir un papel de *mediador* o *facilitador* al trabajar un problema de modelización. De esta forma, el estudiante asume un papel activo en la construcción de su aprendizaje. Como lo expresa el profesor 6 (P6):

**Maestro 6:** cuando ellos están en alguna situación resolviendo, la labor mía es pasar por cada uno de los grupitos, ver cómo va el proceso. Si veo que algo no está funcionando, no decirles que algo no está funcionando, sino ponerlos a pensar en otras situaciones se pueden dar... como para que ellos vean que no van por un buen camino. Después en un debate entre todos los grupos, que fue lo que hicieron. Y entonces empezamos a validar todo ese proceso entre todos en el aula y al final hacemos un cierre.

Como quinto caso, es la *socialización de los resultados* al promover acciones de aula que provocan una participación más activa del estudiante. Un primer ejemplo es la *exposición* de la solución de cada grupo, propuesta por tres profesores (P3, P5, P10). Otro ejemplo, es la *lluvia de*

*ideas* en que los estudiantes participan exponiendo sus resultados, en conjunto con sus compañeros y llegan a un consenso sobre la solución del problema de modelización. Este tipo de respuesta las obtuvimos que 6 profesores (P1, P6, P7, P8, P10, P11). Como lo señala el profesor 11 (P11):

*Maestro 11:* Podemos hacer una mesita redonda, para que ya cada uno se exprese.

*Entrevistadora:* ¿Una mesa redonda es como un debate?

*Maestro 11:* Pues parecido, entonces nosotros nos ponemos en círculo y empezamos a escuchar a los demás. Y en el proceso se genera una retroalimentación.

Por último, la sexta perspectiva es el rol de la *comunicación y argumentación*. Al igual que el estilo de enseñanza tradicional, los profesores explicitaron dos tipos de argumentos: (a) elementos sobre la modelización y (b) aspectos generales. En primer tipo, ubicamos las justificaciones dos profesores (P6, P8), que mencionan *elementos relacionados con la modelización* y a la vez, muestran el accionar del profesor al fomentar espacios de participación activa, donde el estudiante es el encargado de la comunicación y la argumentación. Como lo menciona el profesor 6 (P6)

*Maestro 6:* ...los grupitos exponen estrategias, métodos utilizados y los resultados obtenidos. Entonces eso de comunicar “yo llegué a ese resultado, pero yo me fui por otro camino” ... ver que ellos aprenden a que, no es siempre hay un solo camino. O sea, llegamos todos, validamos resultados. Entre todos llegamos a conclusiones, lo hablamos, lo discutimos y damos un cierre a la actividad...

Con respecto, al segundo tipo de respuesta, hallamos las respuestas de tres profesores (P3, P9, P11) que mencionaron que *la comunicación y la argumentación en aspectos generales* sobre enseñanza de la matemática. Por ejemplo, al establecer una comunicación asertiva y basada en el respecto por los demás. Como lo menciona el profesor 11 en su respuesta:

*Maestro 11:* Hay que manejar mucho lo que es la tolerancia, el respeto por los demás. Todos van a tener derecho a expresar, pero siempre y cuando todos los demás escuchen al que está expresando, el que está exponiendo y respeten lo que está diciendo.

### 4.3 GESTIÓN DE ATASCOS

Respecto a la gestión de los atascos, los resultados mostraron dos perspectivas de los participantes: (a) el tipo de ayudas, y (b) los momentos para intervenir en la resolución de un problema de modelización.

### ***Ayudas para el avance del estudiante***

Las respuestas de los participantes sobre el tipo de ayudas se agruparon en: (a) trabajar en grupos, (b) brindar pistas o ayudas y (c) ayudas generales. En la tabla 65 sintetizamos los resultados a través de los participantes:

**Tabla 65**

*Ayudas del para el avance del estudiante al resolver un problema de modelización*

| Aspectos                | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Trabajar en grupos      |    |    |    |    |    |    |    |    | X   |     |
| Brindar pistas o pautas | X  | X  | X  |    | X  |    |    |    |     |     |
| Ayudas generales        |    | X  |    | X  |    | X  | X  | X  | X   | X   |

La primera perspectiva corresponde a propiciar que los estudiantes *trabajen grupos*, para que entre ellos puedan aclarar dudas y puedan apoyarse mutuamente. Aquí, solo un profesor (P10) nos brindó este tipo de respuesta:

**Maestro 10:** Sin estarles ayudando tanto... Primero, detectar esa dificultad para el razonamiento y el análisis, entonces trabajar un poquito las áreas débiles. Colocarlos en grupos donde tiene el refuerzo de otros compañeros que le pueden ayudar y apoyar.

Otra de las perspectivas fue el *brindar pistas o pautas* que ayuden a los estudiantes superar los atascos durante la resolución del problema de modelización. Concretamente, los participantes manifestaron referirse a pistas como el brindar *ejemplos* sobre contexto real y el contexto matemático y pautas como el incentivar la *lectura exhaustiva del problema*. Cuatro profesores (P1, P2, P3, P6) nos dieron este tipo de respuesta, como la respuesta del profesor 6 (P6):

**Maestro 6:** Sí es que digamos uno, en ocasiones, los guía no hay otra.

**Entrevistadora:** Entonces les daría pequeñas pistas, según la situación que estén trabajando.

**Maestro 6:** Sí, para ver si logran ubicarse en lo que pretende que ellos realicen.

La tercera perspectiva, identificada en las respuestas de 7 profesores (P2, P5, P7, P8, P9, P10, P11), trata sobre brindar *ayudas generales* que se utilizan en clases de matemática y no necesariamente de modelización. Un ejemplo es el dar *atención individual* al estudiante. Por ejemplo, el profesor 10 (P10) señala:

**Maestro 10:** Ayudarlo en forma individual, guiarlo un poquito en el proceso para que lo logre.

### ***Momentos para intervenir***

Respecto a los momentos en que se debe realizar la intervención, las respuestas manifiestan dos indicadores: (a) relativos a factores no cognitivos del estudiante y (b) sobre el tiempo transcurrido. La tabla 66 detalla las respuestas por profesor.

**Tabla 66**

*Información sobre intervenciones para ayudar al estudiante atascado en la modelización*

| Aspectos                                                        | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-----------------------------------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Actitudes del estudiante                                        | X  | X  | X  | X  |    |    |    | X  | X   | X   |
| Estudiante no avanza, a pesar un tiempo prudencial transcurrido |    |    |    |    | X  | X  | X  |    |     |     |

A cerca de *aspectos no cognitivos* del estudiante, 7 profesores (P1, P2, P3, P5, P9, P10, P11) mencionaron que ellos saben que deben intervenir cuando el estudiante muestre señales como la *frustración* o *inseguridad*. Por ejemplo, el profesor 11 (P11) señala:

**Maestro 11:** Hay muchos chiquitos que usted se les ve la cara frustración puede hacer este gesto —el profesor se pone las manos en la cabeza cabizbaja— y piensa y no le da. Hay otros que se ponen a llorar, otros que se quedan en blanco viendo para arriba y entonces usted dice: ¿qué está haciendo? Es ahí donde uno tiene que intervenir.

Respecto al tiempo transcurrido, tenemos que tres profesores (P6, P7, P8) indicaron que la intervención debe realizarse cuando el avance del trabajo del estudiante muestra espacios de estancamiento prolongados, es decir, cuando este *lo ha intentado, pero no avanza*. Por ejemplo, el profesor 7 (P7) señala:

**Maestro 7:** Sí, cuando yo ya vi que lo intentaron o trataron de hacerlo, que yo traté de guiarlos y no, aun así no lo lograron, entonces ahí intervengo.

## **4.3 GESTIÓN DE EVALUACIÓN**

Aquí mostramos tres perspectivas de respuesta: (a) instrumentos de evaluación formativa, (b) instrumentos de evaluación sumativa, y (c) criterios para evaluar competencias de modelización.

### ***Instrumentos de evaluación formativa***

Los participantes señalaron dos tipos de *instrumentos de evaluación formativa* al trabajar la modelización: (a) prueba corta formativa, (b) las rúbricas de desempeño, y (c) la invención de problemas. Los resultados de todos los participantes se exponen en la tabla 67.

**Tabla 67***Respuestas sobre tipos de instrumentos de evaluación formativa en la modelización*

| Aspectos               | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Prueba corta formativa |    | X  | X  |    |    | X  |    |    |     | X   |
| Rúbricas de desempeño  |    |    |    |    | X  |    | X  | X  | X   |     |

El primer tipo de instrumento, la *prueba corta formativa*, se refiere a una prueba individual que no tiene valor porcentual sobre la calificación. Se utiliza para conocer o diagnosticar el nivel de conocimiento que los estudiantes tienen en un determinado momento para la toma de decisiones. Los participantes la describen como una *prueba corta o quiz*. Cuatro profesores (P2, P3, P7, P11) nos mencionaron este tipo de instrumento, como el profesor 7 (P7):

**Maestro 7:** A veces aplico el famoso quiz para ver qué tanto dominan de un tema. Y si yo veo que no hay mucho dominio en ese tema, lo retomo otra vez.

El segundo tipo de instrumento fueron las rúbricas de desempeño, donde 4 profesores (P6, P8, P9, P10) mencionaron que es una forma de medir aspectos más cualitativos como por ejemplo el *trabajo en equipo*, entre otros. Evidenciamos lo anterior con la respuesta del profesor (P8):

**Maestro 8:** en la puntuación como tal no les vamos a dar una nota específica, sino que vamos a medir las habilidades conforme ellos van desarrollando los procedimientos.

Por último, 7 profesores (P1, P3, P5, P7, P8, P10, P11) hicieron referencia a actividades de invención de problemas como evaluación formativa. Un ejemplo es la respuesta del profesor 5 (P5) que hace alusión a utilizar un problema de la vida real para efectuar la evaluación formativa:

**Maestro 5:** puede ser con ejemplos de la vida real de la clase en sí, o alguna actividad que haya resuelto anteriormente ... Ahí sería el análisis del problema.

***Instrumentos de evaluación sumativa***

En este apartado mostramos las respuestas de los profesores acerca de dos *instrumentos de evaluación sumativa*: (a) rúbrica analítica y (b) pruebas escritas. En general, ninguna de las respuestas de los profesores menciona aspectos sobre la modelización, sino de aspectos generales de la evaluación en matemáticas. Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

**Tabla 68***Respuestas sobre instrumentos de evaluación sumativa para la modelización*

| Aspectos          | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Rúbrica analítica |    |    | X  |    |    |    | X  |    |     | X   |
| Pruebas escritas  | X  |    | X  | X  | X  | X  | X  | X  | X   |     |

En el primer grupo de instrumento de evaluación sumativa fue la *rúbrica analítica*, que aporta información acerca del progreso del estudiante, para identificar el nivel de desempeño —avanzado, intermedio e inicial— o logro del aprendizaje u otros aspectos que considere relevante para la toma de decisiones. Tres profesores (P3, P8, P11) brindaron este tipo de respuesta. Concretamente, esto se puede observar en la respuesta del profesor 3 (P3):

**Maestro 3:** para la clase de matemática sí es un problema, usar una rúbrica... eso es importante para uno y también para dar un avance bueno al estudiante.

En el segundo grupo fue la *prueba sumativa o examen escrito* que brinda información valiosa sobre el progreso del conocimiento del estudiante en forma individual, a través de una calificación cuantitativa. Aquí, 8 profesores (P1, P3, P5, P6, P7, P8, P9, P10) dieron este tipo de respuesta. Un ejemplo es el extracto de la respuesta del profesor 10 (P10):

**Maestro 10:** Si ya evalúa en.... exámenes, son los insumos que tiene uno ya más físicos. Ahí me doy cuenta si o no lo logró. En matemáticas como un tipo quiz individual, para evaluar cómo se cómo se desarrolla él, cómo trabaja, cómo se desempeña.

### ***Criterios para evaluar competencias de modelización***

Con respeto a los criterios, manifestaron que deben estar relacionados con: (a) aspectos cuantitativos y (b) aspectos cualitativos. La tabla 69 muestra la información por participante.

**Tabla 69**

*Criterios de los profesores para evaluar las competencias de modelización de los estudiantes*

| Aspectos      | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Cuantitativos | X  |    | X  | X  |    | X  | X  | X  |     |     |
| Cualitativos  | X  |    |    | X  | X  |    | X  | X  | X   | X   |

En el primer grupo (P1, P3, P5, P7, P8, P9), los participantes contemplan aspectos *cuantitativos* para los criterios, basándose en: (a) conocimientos previos y (b) procedimientos. La respuesta más frecuente fue sobre la calificación de los *procedimientos*, es decir, todos los pasos matemáticos que realiza el estudiante para resolver la tarea de modelización. Concretamente, 5 profesores (P3, P5, P7, P8, P9) nos dieron este tipo de respuesta, como la del profesor 8 (P8):

**Maestro 8:** Lo que es sumativo. Por ejemplo ¿cuántos puntos le voy a dar a ese problema? Especificarlo muy bien en una tabla, que es lo que le voy a calificar. O sea, el desarrollo de todo el procedimiento. ¿Cuántos puntos va a costar cada operación? Entonces sí le vamos a dar puntos a los datos, a la operación y a la respuesta.

En el segundo grupo, los participantes (P1, P5, P6, P8, P9, P10, P11) contemplan criterios sobre *aspectos cualitativos*. Específicamente, los profesores refieren al *uso de las fases del ciclo de modelización, actitudes y disposición*, entre otros. En el caso, del profesor (P6) mencionó el *uso de las fases del ciclo de modelización*, evaluando al estudiante según los niveles de desempeño —inicial, intermedio y avanzado. Como lo vemos en su respuesta:

- Maestro 6:** La utilización de modelos matemáticos es el más importante...uno espera que ellos propongan, el único punto donde se actúa es en la primera fase, antes de partir, necesitamos saber lo que nos están dando, qué me preguntan, qué tengo que resolver. Analizar todo y después ver hacia dónde voy... interpretar lo que se va a realizar...según los niveles del proceso que se está realizando.
- Entrevistadora:** ¿Y qué más que otros criterios podríamos utilizar?
- Maestro 6:** Y la resolución de operaciones... Tal vez la utilidad de utilización de estrategias que se usaron para resolver alguna situación y las soluciones.
- Entrevistadora:** ¿Qué eso lo harías como la validación?
- Maestro 6:** Exactamente.

#### 4.4 GESTIÓN DE RECURSOS

Esta sección muestra las respuestas sobre materiales o recursos que puede usar el profesor al trabajar la modelización matemática. Aquí identificamos dos grupos: (a) material no estructurado y (b) material estructurado. Exponemos los resultados de todos los participantes en la tabla 70.

**Tabla 70** Recursos para trabajar la modelización matemática en el aula

*Recursos para trabajar la modelización matemática en el aula*

| Aspectos                 | P1 | P2 | P3 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 | P11 |
|--------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| Material no estructurado |    |    |    | X  |    |    | X  |    | X   | X   |
| Material estructurado    |    | X  | X  |    |    |    | X  | X  |     |     |

El primer grupo es el *uso de materiales no estructurados*, como materiales cotidianos presentes en la casa o clase, material de reciclaje, entre otros. Aquí cuatro profesores mencionaron este tipo de respuesta (P5, P8, P10, P11). Un ejemplo de esto es la respuesta del profesor 10 (P10):

- Maestro 10:** Todo lo que se encuentra en su entorno... usar calendarios que botamos. Todo sirve como insumos para poder crear situaciones. Uso mucho son los panfletos, como los afiches que daban en los centros comerciales o en los supermercados, digamos vienen con los precios y todo, eso que lo regalan. Todo eso es súper útil.

En el segundo grupo, 4 profesores (P2, P3, P8, P9) mencionaron materiales estructurados, como *bloques multibase* y *libros de texto* para generar con sus estudiantes problemas. No se menciona propiamente que sean de modelización. Como la respuesta del profesor 8 (P8):

*Maestro 8:* en los niveles de primer ciclo, nosotros siempre partimos de la parte gráfica... a través de bloques multibase se utiliza mucho en lo que es primer ciclo para que ellos puedan tener la comprensión de la situación planteada...

## 9. DISCUSIÓN

---

En la primera parte de este apartado discutimos los resultados más relevantes sobre las características de elementos como las estrategias de resolución, representaciones y errores (*estudio 1 y estudio 2*), presentes en la resolución de dos tareas de modelización aplicadas a estudiantes que recientemente han culminado su educación primaria. En la segunda parte, discutimos los resultados más notables del conocimiento del profesor sobre la modelización y su conocimiento didáctico, al realizar el análisis del currículo (*estudio 3*) y las entrevistas a los profesores en ejercicio de primaria (*estudio 4*).

# **1.DISCUSIÓN SOBRE ELEMENTOS PRESENTES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA**

En este apartado presentamos en primer lugar la discusión de los resultados relativos a las características de estrategias de resolución (*estudio 1*), y en segundo lugar, acerca de los errores, acompañándolos de las representaciones al efectuar dos tareas de modelización (*estudio 2*).

## **1.1 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO 1**

En el *estudio 1*, obtuvimos evidencias de estrategias y representaciones según el estilo de pensamiento de un grupo de estudiantes al resolver dos tareas de modelización. En línea con la teoría propuesta por Borromeo Ferri (2018), los resultados de ambas tareas mostraron la influencia de los estilos de pensamiento de los estudiantes presentes en las rutas de modelización de su preferencia. Aquí, en concordancia con los hallazgos de Singh (2000), encontramos que los estudiantes manifestaron un predominio de un estilo de pensamiento analítico sus estrategias de resolución —uso de cálculos numéricos, correspondencias y el uso de esquemas de iteración o patrones. En forma contraria, exclusivamente en la tarea 1 hallamos en menor medida —solo un grupo— indicios del estilo de pensamiento integrado en las estrategias —uso de diagramas y uso de cálculos numéricos— de una de las rutas de modelización. Esto indica que solo un grupo usó estrategias con estructuras conceptuales más complejas para resolver los problemas de modelización, mostrando un equilibrio entre la realidad y las matemáticas como es propuesto en el trabajo de Rellensmann et al. (2017).

Sobre la tarea 1, las representaciones asociadas a las dos primeras estrategias —uso de cálculos numéricos y correspondencias matemáticas— corresponden al sistema de representación simbólico-numérico junto con el lenguaje natural (como apoyo al explicar sus procesos matemáticos), coincidiendo con los resultados de Guerrero y Ortiz (2012). La tercera estrategia, uso de patrones, empleó el sistema de representación tabular. En la cuarta estrategia, uso de diagramas, ocurre lo mismo que en la segunda, además de un uso del sistema de representación icónico. Dos de los grupos mostraron un uso mayor de distintos sistemas de representación en sus estrategias, con respecto al resto de grupos que solo usaron el sistema simbólico-numérico y lenguaje verbal-escrito, lo que sugiere un pensamiento más reflexivo y analítico como se pretende idealmente en ambientes de modelización (Morgan y Kynigos, 2014;

Tjoe y De la Torre, 2014; Van Dooren et al., 2006). Al igual que la tarea 1, en la tarea 2 encontramos que, en la única estrategia de resolución obtenida, existió un uso del sistema de representación simbólico-numérico, acompañado de la representación verbal-escrita. Sumado a esto, solo se dio en una de las respuestas al utilizar adicionalmente, una representación tabular para ordenar la información, lo que coincide con resultados de English y Sriraman (2010), además de López et al. (2017) al mostrar indicios de la diversidad del uso de los sistemas de representación.

Destacamos que la falta de uso de distintos sistemas de representación en las estrategias de resolución podría deberse a la formación de los estudiantes. La cual pudo estar focalizada en el uso específico de representaciones simbólico-numéricas y representaciones de lenguaje natural, incidiendo directamente en el tipo de estilo de pensamiento analítico al resolver las tareas de modelización. Además, estos son los sistemas de representación que en la educación escolar tradicional suelen considerarse como correctos y más comunes (Smith, 2003).

Por otra parte, este hecho no concuerda con lo planteado en el documento curricular de Costa Rica. En particular, con el limitado uso de estrategias y representaciones al resolver situaciones-problema, pues al momento del estudio los participantes debían de haber sido instruidos en ambientes de modelización y contar con un amplio repertorio de estrategias de resolución y un manejo flexible de sistemas de representación para expresar sus pensamientos matemáticos. Además, debían ser capaces de realizar acciones metacognitivas en todas las etapas del proceso de modelización, en especial en la etapa de validación donde esto no fue evidenciado. Esto podría haber detectado y evitado razonamientos desordenados y con errores, que también fueron visualizados en las representaciones de los procedimientos usados en las estrategias de resolución.

Por último, coincidiendo con los trabajos de Guerrero y Ortiz (2012) y Roorda et al. (2015), los grupos no manifestaron en sus respuestas uso del razonamiento proporcional, pues no incluyeron procesos o conceptos relativos a este tópico (como la regla de tres o el uso de porcentajes), conocimientos previos que los participantes debían manejar al momento del estudio. Por lo que, no observamos evidencias del modelo matemático idóneo que se esperaba que los estudiantes pudieran construir según lo que se propone en el currículo.

## 1.2 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO 2

Obtuvimos un predominio de categorías de errores en las respuestas que iban acorde a la literatura consultada. Específicamente, con clasificación de Abrate et al. (2006) —en la tarea 1, la categoría de error más frecuente fue *errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales* y en la tarea 2, fue *errores debidos a asociaciones incorrectas*. A su vez, otros errores (e.g, resolver incorrectamente operaciones aritméticas básicas por retomar un esquema antiguo del conocimiento) fueron fundamentados y coincidentes con investigaciones como Fernández y Brey (2012), también Isik y Kar (2012) y por último Socas et al. (2016). Destacamos que una de las respuestas, no concuerda con las categorías de Abrate et al. (2006), en la que los estudiantes resuelven la tarea utilizando los datos del enunciado y datos inventados. La particularidad de esta respuesta es debida al tipo de tarea (modelización matemática). En ese sentido, es necesario ampliar la investigación con un mayor número de estudiantes, pues las particularidades que presentan los estudiantes que han recibido enseñanza sobre modelización aún son desconocidas.

Con respecto a la aplicación de las etapas del proceso de modelización, obtuvimos evidencias de que los grupos participantes omitieron una o varias etapas de dicho proceso. En la tarea 1, la descripción fue omitida en ambas tareas en menor medida. De igual forma ocurrió con la manipulación, pero en la tarea 2. En el caso de la predicción, la omisión de esta etapa brindó indicios de que los estudiantes han estado expuestos a una enseñanza donde se prioriza la respuesta final, y no el proceso hasta llegar a ella, contradiciendo lo propuesto en la teoría de Borromeo Ferri (2018). Finalmente, para la etapa de validación, específicamente en la tarea 1, hallamos muy pocos indicios de la realización de una revisión preliminar al formular el modelo matemático. No obstante, en ambas tareas fue predominante el hecho de ninguno de los grupos reflexionara y juzgara la viabilidad de la solución final obtenida. En la tarea 2, no se encontró ningún indicio de aplicación de esta etapa. Si bien, la omisión de alguna etapa del proceso de modelización por sí sola no constituye un error, los resultados sugieren que gran parte de los errores matemáticos pudieron haber sido superados si se hubiera realizado la etapa de validación, ya sea a través de una revisión previa de los procesos matemáticos al final o durante el proceso cíclico de modelización. Lo anterior parece ser un hecho habitual en diferentes niveles educativos y es común a los resultados de investigaciones previas como Fernández y Brey (2012), también la de Guerrero (2016) y Socas et al. (2016). Por ello, creemos necesario que la

enseñanza incida en el manejo de esta etapa, al reflexionar y juzgar la viabilidad de la solución final obtenida, como es propuesto en Brown et al. (2016), Fernández y Brey (2012), Ruano et al. (2008) y por último por Socas et al. (2016). A la vez, es preciso investigar cuales son las posibles causas de la no aplicación de ella por parte de los estudiantes, como propone Socas et al. (2016).

## **2. DISCUSIÓN ACERCA DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR SOBRE MODELIZACIÓN**

En esta parte discutimos los resultados del conocimiento del profesor para la enseñanza de un proceso del modelización, desde la perspectiva del currículo y de los profesores.

### **2.1 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO 3**

Realizamos un análisis del currículo de Costa Rica con la finalidad de identificar componentes de conocimiento del profesor referentes al proceso de modelización. A pesar de que el documento incluye variedad de elementos que han de ser considerados para la enseñanza de la modelización, algunos deben ser ampliados y profundizados. En relación con el objetivo del proceso de modelización, los fundamentos del currículo costarricense coinciden con las posturas teóricas de modelización matemática al enfatizar la relación entre la modelización y la realidad del mundo real que nos rodea (e.g., la modelización contextual de Lesh y Doerr, 2003; Modelización cognitivo y afectivo de Borromeo Ferri, 2006).

Sumado a lo anterior, los resultados muestran en el currículo una falta definición sobre la perspectiva teórica de modelización en que se fundamenta. Por ejemplo, en algunas partes de este documento hay menciones implícitas que coinciden con la perspectiva contextual (Lesh y Doerr, 2003). En particular, en los pasos al modelizar (así se nombra en el documento), las etapas propuestas coinciden con las del ciclo de modelización de Lesh y Doerr (2003). Así, observamos que se alude a la estimulación de las etapas del ciclo de modelización (Lesh y Doerr, 2003), como la descripción, manipulación y predicción. No obstante, la última etapa de validación se menciona débilmente en el currículo analizado. Además, no hay evidencia sobre la dirección que debe tener el ciclo de modelización al efectuarse. Es decir, el resolutor debe seguir un proceso lineal y consecutivo, o por el contrario puede iniciar en cualquier etapa del ciclo y

desarrollar un proceso más flexible donde avance como lo disponga y aplicar un proceso no direccional (Czocher, 2017).

### ***Discusión del conocimiento sobre la modelización en el currículo costarricense***

En esta parte, discutimos lo referente al conocimiento sobre la modelización matemática, al analizar la información presente en el currículo. Dividimos la discusión en las categorías: (a) noción del problema de modelización, (b) resolución de un problema y (c) disposición.

#### **Categoría 1. Noción del problema de modelización**

Para identificar una *tarea de modelización* el currículo hace referencia a tres de los seis principios de construcción de tareas de modelización propuestos por Lesh et al. (2003). Específicamente los principios: (a) significado personal, (b) construcción del modelo y (c) generalización del modelo. En el primer principio encontrado *significado personal*, los resultados muestran menciones muy vagas de la consideración del estudiante, pues no deja claro que deben ser situaciones basadas en la vida real del que aprende. En cuanto al segundo principio hallado *construcción del modelo*, encontramos evidencias de que la conceptualización de modelo matemático manifestada en el currículo es similar a la definición de Lesh y Doerr (2003) y también la de Gallart et al. (2017). Es decir, se concibe un modelo matemático como un sistema conceptual que se expresa usando sistemas de notación externos, y que se utilizan para construir, describir o explicar los comportamientos de otro (s) sistema (s). Por último, el tercer principio manifestado *generalización del modelo*, tenemos que el currículo alude a dos maneras de matematización que desafían al estudiante a ir más allá de producir una sola solución, que sea capaz de producir otras maneras de pensar reutilizables. Sin embargo, notamos que no hay referencia en el currículo de 3 de los 6 principios de Lesh et al. (2003), concretamente: el principio de documentación, principio de auto-evaluación y el principio de prototipo simple. Por ejemplo, en caso del principio de documentación, en el currículo no hay alusión de si la tarea debe tener criterios claros sobre como documentar los pensamientos matemáticos, si el estudiante debe o no plasmarlos explícitamente. Por tanto, aunque para la tarea de modelización, en el currículo hemos encontrado algunos de los principios de construcción de tareas de modelización propuestos por Lesh et al. (2003) —significado personal, construcción del modelo y generalización del modelo— algunas de las menciones son muy vagas y hace falta más

profundización teórica. Además, de que otros principios no son tomados en cuenta del todo. Asimismo, en el currículo menciona que la cantidad de soluciones de un problema de modelización puede ser variable, es decir que posea solución única, que no tenga solución o que tenga múltiples soluciones (Lesh y Doerr, 2003; Maaß, 2007a).

El currículo encontramos evidencias de que una de las condiciones para que una tarea sea un problema es la *consideración del resolutor* como es propuesto en estudios como Mayer y Wittrock (2006) y además de Piñeiro et al. (2021). Por ejemplo, al mencionar que el profesor debe ser capaz de diferenciar una tarea que es un problema para el resolutor de la que no lo es, por medio de características propias de este como el nivel educativo (Sevinc, 2022), con lo cual según el currículo se puede establecer la complejidad del problema para él.

Observamos algunas semejanzas de lo que propone el currículo con la teoría de Lesh y Doerr (2003), en cuanto los *tipos de tareas de modelización* según el nivel complejidad de los problemas. Además, en el currículo se menciona tres niveles: reproducción, conexión y reflexión. Por tanto, encontramos indicios de una mezcla de perspectivas teóricas, por un lado, con el marco teórico de TIMSS (Grønmo et al., 2014) y por otro lado, con la teoría de modelización. Con respecto a esto último, solo el segundo y tercer nivel coincide con las actividades de exploración de modelos (MXAs) y las actividades provocadoras de modelos (MEAs). Para el nivel de reproducción hay contradicción con el tipo de tareas que proponen, pues se establecen tareas de un tipo de procedimiento mecánico y conductista, específicamente *ejercicios* (Blum, 2015; Maaß, 2006), lo que contradice al enfoque que se da en todo el currículo sobre la resolución de problemas, en particular de la modelización.

## **Categoría 2. Resolución de problemas**

También el profesor debe conocer y entender elementos primordiales del proceso de modelización, como las *estrategias de resolución* su relación con las *representaciones* y *metacognición* durante la resolución de un problema (Lesh y Doerr, 2003; Shoenfeld, 1985, 1992). Pero, se enfatiza en aspectos de la teoría de estos elementos y su relación, no profundiza en el proceso o su práctica, como se pueden utilizar en la modelización. De igual manera, pasa con los *factores no cognitivos*, en el currículo se considera las emociones, actitudes y creencias son relevantes y necesarios para el conocimiento del profesor durante el proceso de

modelización, su abordaje aparte de brindar una conceptualización de cada uno realiza como novedad una propuesta de sugerencias que puede implementar.

### **Categoría 3. Disposición**

El currículo menciona como una de las tareas más importantes del profesor, el saber estimular la *disposición* del estudiante al resolver un problema.

### ***Discusión del conocimiento didáctico sobre la modelización en el currículo costarricense***

Discutimos los resultados obtenidos acerca del conocimiento didáctico sobre la modelización matemática, al analizar la información presente en el currículo. Dividimos la discusión las categorías: (a) el estudiante como resolutor, (b) resolución de problemas como tarea escolar, (c) factores no cognitivos y (d) gestión de enseñanza.

### **Categoría 4. El estudiante como resolutor**

Al indagar qué conocimientos didácticos sobre la resolución de problemas de modelización que están presentes en el currículo, observamos en primer lugar, *características de estudiantes exitosos al resolver problemas de modelización*, el currículo no estipula ningún lineamiento. En segundo lugar, el papel de las *dificultades y errores* al resolver problemas y su relación como indicadores de la comprensión conceptual, debe ser ampliado con respecto a las etapas del proceso de modelización. El documento no alude a las dificultades y errores específicas de la modelización, sino que sus orientaciones son muy generales, lo que puede llevar al docente a no prestar la atención debida o a realizar interpretaciones incorrectas, pudiendo no atender correctamente la diversidad de los estudiantes en ambientes de modelización (Guerrero, 2016; Socas et al., 2016).

### **Categoría 5. Resolución de problemas como tarea escolar**

En el documento curricular, se considera que el seleccionar y utilizar adecuadamente un problema de modelización debe ser un conocimiento primordial del profesor (Guerrero-Ortiz, 2021; Villa-Ochoa, 2015). De igual manera, en el currículo se expresa que el problema debe ostentar características como contener un contexto real, incentivar los medios (estrategias, heurísticas, métodos), nivel educativo del estudiante, nivel de complejidad, conocimientos

previos, las condiciones específicas del grupo con el que se trabaja, así como el momento de la lección en que se quiere implementar el problema. En concordancia con los trabajos de Guerrero-Ortiz (2021) y Villa-Ochoa (2015), el currículo destaca que el seleccionar un problema de modelización adecuado y sumado a la acción de aula, puede lograr un trabajo efectivo para el aprendizaje de los estudiantes. También manifiesta la inclusión de *modelos y estrategias de resolución* de problemas que tiene gran similitud con los métodos propuestos por Pólya (1981) y Schoenfeld (1992). Sin embargo, en lo escrito no se hace referencia en forma específica a la modelización.

En relación con la *invención o planteo de problemas* hallamos un vacío teórico y conceptual, pues se menciona de forma débil o superficial en el currículo. Aunque brinda algunas indicaciones de este enfoque, no se muestra la relación y potencial al ser usado con la modelización, lo que va en línea con lo propuesto por Ayllón (2012), además de Galbraith y Stillman (2006), como también el trabajo de Hansen y Hana (2015). En especial, en la etapa de *validación*, lo escrito en el currículo muestra un alcance superficial, ocasionando que su relación con la invención de problemas también lo sea. A su vez, al no detallarse cómo se puede usar este proceso en la modelización, ni tampoco qué estrategias didácticas se pueden usar para su implementación.

### **Categoría 6. Factores no cognitivos**

Los factores cognitivos como las *emociones, actitudes y creencias*, en el currículo son relacionados con la interacción del profesor y el estudiante. Esto coincide con lo expresado los estudios de Borromeo Ferri (2018) y Frejd (2012), al detallar que el profesor es el encargado de promover los factores cognitivos en forma positiva en sus clases y a la vez, atacarlos cuando aparezcan en forma negativa en el aula.

### **Categoría 7. Gestión de enseñanza**

En referencia a la *gestión de enseñanza*, volvemos a encontrar que mucho de lo estipulado por el currículo es muy general. Por ejemplo, no hay evidencias explícitas de *enfoques de enseñanza* propiamente en la modelización, sino que solo se alude a conocimientos sobre la *gestión del discurso*. Específicamente, sobre acciones del profesor durante los momentos de organización de la lección. Estos momentos coinciden con lo propuesto al trabajar un problema en una actividad

provocadora de modelos (MEAs), momentos de la clase como introducción, presentación y discusión, reflexión y conclusión o cierre.

Asimismo, en la *gestión de atascos*, el currículo propone que el profesor sea un guía al ayudar a sus estudiantes cuando no haya avance en su trabajo, con indicaciones necesarias y en el momento adecuado, además ajustadas a las características del estudiante (Borromeo Ferri, 2018). Además, en el documento curricular promueve la *gestión de la evaluación*, al hacer referencia de que la evaluación debe realizarse en todas las etapas del proceso y no solo al final de este como un producto acabado, como es propuesta en la teoría de Borromeo Ferri (2018). También, otro aspecto expuesto en el currículo es que el profesor debe saber proponer estrategias de evaluación congruentes con el nivel de complejidad de los problemas, concordando de igual forma con lo escrito por Borromeo Ferri (2018).

En cuanto a la *gestión de recursos*, el currículo es claro en que el profesor debe saber usar la tecnología en ambientes de modelización, con la finalidad de ahorrar de tiempo y esfuerzo en la generación de las soluciones, destinándolos más bien a la formación de herramientas mentales como la criticidad y justificación válida de los conceptos matemáticos, como se propone en como investigaciones como las de Plymouth (2002), Son y Lew (2006) y además de Porras y Arroyo (2019). Sin embargo, en el caso del uso de la historia es promovida como recurso de uso general, por ejemplo, al proponer al utilizar problemas recreativos sobre momentos históricos, con los cuales se disfrute de la matemática. Pero no se hace mención sobre su uso en la modelización como lo plantea el trabajo de Sala (2016) y la investigación de Sala et al. (2018).

Dado que, en el currículo de Costa Rica, la modelización es entendida como la resolución de problemas con contextos de la vida real (MEP, 2012). Los resultados del análisis, tanto del estudio del aprendizaje de la modelización y como del currículo han brindado indicios de aspectos de mejora. Esto se ha usado para adaptar las componentes del conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019) para el caso de la modelización matemática. Lo que ha permitido obtener unas componentes más centradas y específicas sobre este proceso.

## 2.2 DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL ESTUDIO 4

En este apartado discutimos los resultados obtenidos al identificar qué componentes del conocimiento sobre modelización matemática ponen en juego los maestros de primaria al enseñar la modelización caracterizar el conocimiento de los maestros de primaria en ejercicio sobre el proceso de modelización matemática. Dicha discusión la presentamos dos partes, en primer lugar, el conocimiento sobre la modelización matemática y en segundo lugar su conocimiento didáctico.

### ***Discusión del conocimiento sobre la modelización matemática***

Presentamos la discusión referente al conocimiento sobre la modelización matemática obtenido en las entrevistas de los profesores. Dicha discusión la realizamos de forma específica, según las categorías del conocimiento profesor sobre la modelización: (a) noción del problema de modelización, (b) resolución de un problema de modelización matemática y (c) disposición.

#### **Categoría 1. Noción del problema de modelización**

##### **(a) Nociones básicas de modelización**

Describimos las nociones básicas sobre la modelización que manifiestan un grupo de profesores en ejercicio de educación primaria. Específicamente, en cuanto a las nociones obtenidas a cerca del término *modelo* las respuestas encontradas muestran indicios de que ninguna fue relacionada en forma directa con la matemática.

Con respecto a la *noción modelo matemático* —fórmula, estructura, procedimiento para resolver problemas y estrategias para enseñar matemática— todas se encuentran directamente vinculadas con la matemática. Estos hallazgos coinciden con algunos de los significados de modelización obtenidos en los resultados de Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2021), específicamente cuando se usa exclusivamente como medio de representación o cuando únicamente es asociada a alguna de las fases del ciclo de modelización. No obstante, no son algunas de las nociones para la modelización matemática, pues no concuerdan con la conceptualización de modelo matemático propuesta en Erbas et al. (2014) y no se visualiza la conjugación de los tres elementos que proponen en Montejo-Gámez et al. (2021). Nos referimos al sistema real a modelar, su matematización y las representaciones utilizadas para expresar ambos.

Asimismo, en la *noción sobre la modelización* —transformación de situaciones de la realidad y viceversa, un nuevo proceso de enseñanza, un proceso de aplicación de la matemática y un proceso para resolver— los hallazgos coinciden con algunos de los significados de modelización obtenidos en los resultados de Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2021). Solamente uno de los maestros propone una noción del significado del proceso de modelización cercano al de Erbas et al. (2014), es decir, la modelización para transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos y en forma inversa, utilizando la abstracción y generalización. A la vez, solo esta respuesta muestra indicios de la modelización como *contenido sí mismo* (Julie y Mudaly, 2007) o como la modelización como *medio para enseñar matemática* (Erbas et al., 2014). Las otras nociones de los participantes sobre la modelización no coinciden con la noción de modelización propuesta por Lesh y Doerr (2003), Erbas et al. (2014) o Kaiser y Sriraman (2006).

#### (b) Problema de modelización

Poseer un *contexto real para el estudiante* fue la característica destacada por todos los profesores, es decir un problema de modelización debe distinguirse de otros problemas, por ser significativo y de la vida real del estudiante como lo proponen Borromeo Ferri y Lesh (2013) o Sevinc (2022). También algunos profesores destacaron que el problema de modelización es aquel que posee un *contexto real de la vida cotidiana*, coincidiendo con Maaß (2007a) al plantear el uso de preguntas de la vida real del mundo extramatemático. Además, para ciertos profesores es relevante que el problema de modelización posea un *contexto real relacionado con alguna disciplina*, resaltando la importancia de integrar las matemáticas con otras áreas de conocimiento (Blomhøj y Kjeldsen, 2006; Masanja, 2002; Michelsen, 2006). Sumado a esto, a través del *contexto real* debe despertar *el interés* de los estudiantes por la resolución del problema, lo que coincide con los resultados de Turner et al. (2021).

Otra característica hace referencia al formato del problema —redacción comprensible, vocabulario adecuado para el lector, como la extensión del texto y más concreto para el nivel de primaria— lo que concuerda con las características propuestas por Borromeo Ferri y Lesh (2013) y Borromeo Ferri (2018) y que ofrecen un rico potencial para trabajar con estudiantes de distintos niveles de razonamiento. Asimismo, obtuvimos escasos indicios de que un problema de modelización debe desafiar el pensamiento matemático de los estudiantes, o sea debe ser un verdadero problema para el resolutor (Maaß, 2007a; Sevinc, 2022). Por último, encontramos

indicios de que un problema de modelización debe cumplir con principio de construcción de modelo matemático es propuesto por Lesh y Doerr (2003), a la vez en Sevinc (2022).

## **(C) CONSIDERACIÓN DEL RESOLUTOR**

El papel que juega el resolutor en la consideración de una tarea de modelización se relacionó con aspectos del *proceso de enseñanza y aprendizaje en forma general* y no propiamente en la modelización. Particularmente, observamos *tensiones* de los profesores en la consideración del resolutor, al manifestar por un lado que el resolutor es el actor más importante. Por otro lado, más bien se enfatiza en que es el docente (Boggino, 2005; Ernest, 1989, 2018), lo que demuestra indicios de enfoques que no son concordantes con la modelización. Por tanto, los profesores entrevistados no reconocen que el resolutor tiene una función en el etiquetado de las tareas como problemas de modelización, lo que podría afectar el planteamiento de tareas y su desarrollo efectivo (Borromeo Ferri, 2018).

## **(D) TIPOS DE TAREAS EXISTENTES DE MODELIZACIÓN**

En el conocimiento de distintos tipos de problemas de modelización de los profesores, hallamos alusiones a que un problema de modelización es un ejercicio matemático o tarea rutinaria, lo que coincide con los resultados de los estudios Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022) y Villa-Ochoa (2015). No obstante, en otras respuestas obtuvimos escasos indicios de similitudes con las MEAs, como el *uso del contexto real del estudiante* relacionado con el principio de significado personal propuesto por Lesh et al. (2003) y las características —poseer un contexto realista y ser un problema auténtico— de un problema de modelización de Maaß (2007a).

### **Categoría 2. Resolución de un problema de modelización matemática**

#### **(a) Ciclos de modelización y sus características**

Aquí los profesores no manifestaron elementos relativos al conocimientos sobre el ciclo de modelización, cuáles eran sus etapas o en qué consistían cada una de ellas. Solo encontramos indicios de una estructura mecánica para resolver el problema —planteo, operación y respuesta. Sobre el ciclo de modelización, encontramos 4 rutas distintas de modelización que marcaban el orden de las etapas al resolver un problema. Donde 6 de los profesores coincidieron con la ruta propuesta por Lesh y Doerr (2003), el resto de los profesores propusieron una ruta distinta. Con

respecto, al comportamiento de las etapas, todos los profesores consideraron que la construcción del pensamiento de los estudiantes debía realizarse linealmente, y no en forma cíclica, lo que concuerda con los resultados hallados en el estudio de Shahbari y Tabach (2016) y la trayectoria lineal de solución de los problemas escolares típicos mencionados por English (2005).

#### (b) Estrategias

Al brindar tres problemas de modelización, los profesores manifestaron estrategias de resolución relacionadas con los tres tipos de estilos de pensamiento propuestos en la teoría de Borromeo Ferri (2018), en relación con los sistemas de representación presentes en los procedimientos matemáticos usados. En las estrategias de estilo de pensamiento analítico vislumbraron el uso de representaciones simbólicas-numéricas. Con respecto, al estilo de pensamiento visual, encontramos las estrategias de resolución que hicieron alusión a representaciones visuales o pictóricas. Por último, sobre las estrategias del estilo de pensamiento integrado, obtuvimos indicios sobre aspectos de la realidad de un problema con conceptos matemáticos, complementando sus explicaciones con sistemas de representación simbólico-numérico y representación pictórica. Lo que mostró un equilibrio entre la realidad y la matemática como se propone en la teoría de Borromeo Ferri (2018). Por tanto, los profesores estimaron necesario resolver los problemas de modelización con estrategias de resolución que utilizan sistemas de representación (verbal y numérico) más tradicionales (Guerrero y Ortiz, 2012; Smith, 2003), y no con el uso del sistema de representación más sofisticados como el algebraico como al formar una proporción. Esto coincide con las estrategias de resolución usadas por estudiantes donde se visualizan los mismos tipos de sistemas de representación (Guerrero y Ortiz, 2012) y el *primer estudio* de esta tesis sobre estrategias de resolución y representaciones en la modelización.

Al brindar tres estrategias de resolución de una tarea de modelización, los profesores mencionaron métodos de resolución relacionados con estilo de pensamiento analítico — *operaciones básicas, uso de correspondencia matemática*— y visual — *forma gráfica o dibujos*— que utilizan sistemas de representación más tradicionales, coincidiendo con Guerrero y Ortiz (2012) y además de Smith (2003). Hallamos que una de las diferencias de las estrategias de resolución es el uso de distintos procedimientos para resolver un problema de modelización, lo que va en línea con Borromeo Ferri y Lesh (2013) sobre que el estudiante puede crear y formular

otros caminos de solución de un problema. No obstante, los profesores mostraron dificultades para brindar una explicación adecuada sobre una cantidad decimal y las representaciones gráficas usadas por los estudiantes de las estrategias propuestas. Lo cual puede estar relacionado con una falta de conocimiento del contenido matemático involucrado en la tarea de modelización (Paolucci y Wessels, 2017; Sevinc y Galindo, 2022). A su vez, ambas limitaciones sintonizan con los resultados de estudios como Borromeo Ferri y Blum (2010).

Otra de las estrategias de resolución de un problema de modelización manifestada por los profesores son las que usan implícitamente *las etapas del ciclo de modelización* por parte del resolutor, lo cual podría ser un acercamiento a las rutas de modelización propuestas por Borromeo Ferri (2018). Por otro lado, hallamos que un grupo de profesores recomendaban el uso de estrategias generales orientadas más aspectos pedagógicos o propiamente de la matemática, no directamente relacionadas con la modelización o estrategias metodológicas para aplicar en ambientes de modelización (Jung, 2015), lo que muestra que dichos profesores poseían un conocimiento alejado de lo que idealmente esperamos con las estrategias de resolución de tareas de modelización según Borromeo Ferri (2018) y Rellensmann et al. (2017).

#### (c) Metacognición

Los profesores exhibieron respuestas alusivas a la metacognición al proponer procesos como revisar condiciones del problema, metacognición grupal, recordar experiencias de aprendizaje previas y realizar algunas de las fases del ciclo de modelización. Para ellos, la metacognición debe aplicarse en todas las etapas del ciclo de modelización (Greefrath y Vorhölter, 2016; Vorhölter et al., 2019). A pesar de esto, revelamos que dos profesores estimaron innecesario que el estudiante realice procesos metacognitivos, ya que es tarea del profesor dirigir el trabajo de los estudiantes y contestar todas las dudas durante la modelización (Blum y Borromeo Ferri, 2009). Mostrando que estos profesores exhibieron un pensamiento orientado hacia una enseñanza tradicional (Ernest, 1989, 2018).

#### (d) Factores no cognitivos

En concordancia con Blum (2015) y Cetinkaya et al. (2016), los profesores consideraron que los factores no cognitivos —emociones, actitudes y creencias— son muy importantes para el éxito de la resolución de un problema de modelización. Para ellos, esto se debe a que la influencia de estos factores tiende a variar en intensidad y en una dirección positiva o negativa

(Díaz et al., 2018). Lo que afecta directamente que el estudiante quiera o no resolver el problema de modelización, esto concuerda con lo expuesto en la teoría de la emoción en la resolución de problemas de Mandler (1989) y McLeod (1992) citada en Gómez-Chacón (2003) y los resultados de la investigación de Schukajlow y Achmetli (2017). También encontramos indicios de que la conexión con la realidad en el *uso del contexto real* despierta el interés de los estudiantes, al permitirles experimentar las matemáticas como algo significativo como es propuesto en investigaciones como Di Martino (2019) y Holenstein et al. (2022).

### **Categoría 3. Disposición**

#### **(a) Disposición al resolver un problema de modelización matemática**

Aquí encontramos dos grupos de profesores, el primer grupo que consideró que la motivación, al igual que la disposición juegan un rol muy relevante en la resolución de problema de modelización, pero brinda justificaciones con argumentos generales enfocados a la educación matemática. El segundo grupo de profesores mostró en sus respuestas que tanto la motivación como la disposición son importantes al resolver un problema, siendo las tareas que realice el profesor fundamentales para lograr este objetivo como es propuesto en Cetinkaya et al. (2016) y además de Gjesteland y Vos (2019). Destacamos que, en estas respuestas encontramos indicios de que los profesores no diferencian la motivación de la disposición, más bien pareciera que lo consideran como si fueran lo mismo, cuando existen diferencias (Kilpatrick, 1980). Sin embargo, solo en una de las respuestas menciona que el profesor puede plantear desafíos usando el *contexto real* de los estudiantes, que motiven a los estudiantes y provoquen interés por resolverlo y con eso se estimule la disposición coincidiendo con los resultados de investigaciones como Holenstein et al. (2022), también la de Kaiser y Schwarz (2006) y por último, Sevinc y Lesh (2022), aludiendo más bien a que la disposición puede provocarse cuando haya motivación.

### ***Discusión del conocimiento didáctico sobre la modelización matemática***

En apartado presentamos la discusión referente al conocimiento didáctico sobre la modelización matemática obtenido en las entrevistas de los profesores. Dicha discusión la realizamos según las categorías: (a) el estudiante como resolutor de tareas de modelización, (b)

problemas de modelización como tarea escolar, (c) factores no cognitivos y (d) gestión de enseñanza.

#### **Categoría 4. Conocimiento sobre el estudiante como resolutor de tareas de modelización**

##### (a) Características de resolutores tareas de modelización

Una de las características del resolutor al confeccionar las tareas, fue las *habilidades/capacidades* donde encontramos indicios de un conocimiento más específico hacia la modelización, al mencionar características de resolutores competentes según las etapas del ciclo de modelización —descripción, manipulación y validación— de acuerdo con lo establecido en los estudios de Blum y Kaiser (1997) y además de Maaß (2006). Sin embargo, destacamos que algunos profesores mostraron dificultades en esta parte, debido a que lo expresado fue más un conocimiento general enfocado hacia la resolución de problemas y propiamente hacia la modelización. Otra característica corresponde a *diversidad del aprendizaje*, pero de igual manera, este conocimiento no fue exclusivo de la modelización.

##### (b) Dificultades y errores de los estudiantes en procesos de modelización

Hallamos indicios de evidencias en las respuestas de los profesores, sobre dificultades de los estudiantes al trabajar la modelización que coinciden con la literatura consultada en este campo —comprensión lectora deficiente (Deniz y Kurt, 2022; Eraslan y Kant, 2015), conocimiento previo deficiente (Maaß, 2007b), uso de emociones y actitudes negativas (Díaz et al., 2018; Gómez-Chacón, 2003; McLeod, 1992), resolver sin reflexión o prestar atención a lo que se solicita (Crouch y Haines, 2007) y debilidades del aprendizaje (Socas et al., 2016). Siendo relevante este conocimiento pues puede entorpecer el proceso de resolver un problema de modelización y afectar al *proceso enseñanza-aprendizaje* (Abrate et al. 2006). Además, es necesario para la *toma de decisiones del profesor y la corrección* de dichas limitaciones, con el fin de *avanzar* en su aprendizaje (Escudero, 2007; Socas, 1998).

#### **Categoría 5. Problemas de modelización como tarea escolar**

##### (a) Selección de tareas de modelización

En las respuestas de los profesores obtuvimos indicios sobre criterios para la selección de tareas de modelización. En forma particular sobre el contexto real, aspectos de formato,

desarrollo del estudiante, estimular varias estrategias de resolución y adecuación del currículo. En el caso del *contexto real*, los profesores recalcaron que dicho contexto debe estar basado en las características particulares de los estudiantes, que sea interesante, comprensible y útil para el estudiante (Di Martino, 2019; Frejd, 2012). No obstante, al brindar a los profesores un ejemplo de una tarea de modelización, su conocimiento fue limitado pues tendieron a sugerir cambios, lo que nos hace pensar que consideraban que las tareas abiertas no son adecuadas para trabajar la modelización, contradiciendo lo propuesto en la teoría de Borromeo Ferri (2018). Además, con estos cambios los profesores no se sentían cómodos con este tipo de tareas y buscaban convertir la tarea propuesta en una de solución cerrada para tener el control de las respuestas que el estudiante pudiera generar, lo que es expresado en los resultados de estudios como Bassanezi (2002), Blum (2015), Borromeo Ferri (2018) y a la vez por Doerr y English (2006). Otro criterio hace referencia a *aspectos de formato*, como una característica necesaria para la selección de una tareas de modelización. Es decir, debe poseer las condiciones y pautas claras, una redacción comprensible y un *vocabulario* adecuado al nivel del estudiante y de su contexto real, siendo esto coherente con lo propuesto por Borromeo Ferri y Lesh (2013), además de Lesh et al. (2003).

El tercer criterio manifestado de selección de un problema tiene relación con aspectos sobre el desarrollo del estudiante, como el conocimiento previo y la edad escolar. Por ello, el problema debe ser adecuado para un grupo de edad en particular como es expresado por Borromeo Ferri y Lesh (2013) en su propuesta de características de selección de una tarea de modelización.

El cuarto criterio manifestado es estimular *varios caminos de solución para resolver* el problema, coincidiendo con el principio de generalización del modelo de Lesh et al. (2003) y las características de una tarea de modelización propuestas por Borromeo Ferri y Lesh (2013).

Por último, para los profesores un criterio de selección es la *adecuación del currículo*, donde los profesores manifiestan conocimientos variados que debe cumplir la tarea acorde con las directrices expresadas en el currículo y que a su vez concuerdan con la literatura. Por ejemplo, el problema debe ser concordante con el contenido matemático que debe enseñar el profesor (Sevinc, 2022). Además, debe ser cognitivamente exigente para los estudiantes con el fin de promover varias prácticas, como el razonamiento y la comunicación, en la misma línea de Maaß (2007).

### (b) Modelos sobre el proceso de modelización

Encontramos un grupo de profesores que manifestaron en sus respuestas elementos sobre las perspectivas teóricas de modelización. En concreto, a cerca de las etapas del ciclo de modelización para estimular y ayudar al aprendizaje de los estudiantes durante la resolución de un problema. Esto se vislumbró en sus justificaciones, al hacer alusión a dos rutas de modelización. En caso de la ruta 1: *Descripción, Predicción, Manipulación, Validación*; observamos que realizaban la etapa de la predicción antes de la manipulación, pues para ellos es necesario que el resolutor piense y establezca estrategias o caminos de solución viables antes de crear el modelo matemático, aclarando un poco la información presente en la etapa descripción. Sin embargo, según Lesh y Doerr (2003) esto no sería la etapa de *Predicción* sino parte de la *Descripción*. Ahora bien, si lo observamos desde otras perspectivas teóricas como la *modelización educativa* (Blum y Leiß, 2007) o la de *modelización cognitiva y afectiva* (Borromeo Ferri, 2006), lo explicado por los profesores es la transición de la representación mental de la situación (MRS) al modelo real. Donde se da una idealización y simplificación de la representación mental más consciente del individuo y tendría sentido realizarla antes de matematizar la información (Blum y Leiß, 2007).

En cuanto a la ruta 2: *Descripción, Manipulación, Predicción, Validación*, coincide con la ruta ideal que se debería realizar desde la perspectiva contextual al resolver un problema de modelización (Lesh y Doerr, 2003). Algunas de las respuestas de los profesores evidenciaron modificaciones hasta proponer la ruta 2, con lo cual consideramos que el conocimiento de los profesores se volvió más reflexivo conforme participaban en las entrevistas (Shahbari y Tabach, 2016). Destacamos que en ambas rutas los profesores brindaron importancia a la etapa de validación, al proponer actividades como el realizar un debate grupal de las soluciones de los estudiantes para lograr un consenso de cuál es la mejor solución y justificando a su vez esto, lo que encaja con lo propuesto en investigaciones como Borromeo Ferri (2018), el trabajo Lesh y Doerr (2003), además la de Gould (2013). Para ellos, enseñar a los estudiantes el ciclo de modelización brinda beneficios como: (a) ayudar a los estudiantes a ordenar sus pensamientos facilitando el proceso, (b) mejorar la comprensión del problema y (c) mejorar la relación social de los estudiantes (Borromeo Ferri, 2018). Por otra parte, un segundo grupo de profesores brindaron respuestas sobre métodos de enseñanza o evaluación de la modelización, lo que nos hace pensar que los profesores no manifestaron conocimiento sobre lo que preguntamos.

### (c) Invención de problemas de modelización

Algunas respuestas, no manifestaron conocimiento sobre la invención de problemas en la modelización, sino que hicieron referencia general a las tareas matemáticas. Sin embargo, otro grupo de respuestas sí mostró indicios del conocimiento sobre la invención de problemas al construir problemas —usando contextos de la vida cotidiana del estudiante— y la modificación de las condiciones para producir un nuevo de problema, lo que en la misma línea de la teoría propuesta por Ayllón (2012), Borromeo Ferri (2018) y la investigación de Galbraith y Stillman (2006). Sobre el uso de invención de problemas con estudiantes, los profesores mostraron que efectivamente han realizado este tipo de actividades. Sin embargo, en forma contraria a lo que propone la literatura,

algunos profesores manifestaron que el éxito del enfoque depende del nivel escolar del estudiante, por tanto, no recomiendan usar dicho enfoque de niveles inferiores de educación primaria, pues la consideran como competencia profesional no trivial y que necesita tiempo para poder llevarla a la práctica. Por otro lado, hallamos respuestas de los profesores referidas al uso de recursos o materiales al inventar sus problemas, que no era nuestro foco de interés.

### **Categoría 6. Factores no cognitivos**

Al plantear una lista de creencias sobre la modelización, las respuestas de los profesores reconocían aspectos de los factores cognitivos productivos para la modelización, como que no existe una única forma de resolver el problema de modelización, que no es cierto que un problema de modelización se resuelve en poco tiempo, entonces no se puede resolver, o que en un problema de modelización no es necesario revisar los procesos matemáticos, ni la solución final. También que es necesario integrar los conceptos matemáticos con su aplicación en la vida cotidiana, o que no es cierto que lo más importante al resolver un problema de modelización es el modelo matemático y el encontrar una solución de este, o al enseñar la modelización puedo usar cualquier problema matemático de los libros de texto. Además, es adecuado para la enseñanza de la modelización el mostrar que la matemática es útil en situaciones de la vida real, también aquí es importante el manejo de las emociones del estudiante como la ansiedad y frustración, a la vez es relevante que el maestro forme actitudes en el estudiante como la tolerancia, la perseverancia, la responsabilidad, entre otros. Dichas afirmaciones, encajan con lo propuesto en investigaciones como Borromeo Ferri (2018), Blum (2015), Frejd (2012) y Shahbari (2018). Sin embargo, para algunas afirmaciones esto no fue así, también obtuvimos afirmaciones de los factores cognitivos

improductivas para la enseñanza de la modelización, como el considerar que es cierto que la modelización matemática es el uso de materiales concretos y manipulativos en la enseñanza de las matemáticas o que al considerar que los problemas de modelización deben ser complicados y se usan bastantes conocimientos no matemáticos. Dichas afirmaciones demuestran indicios de conocimiento de los profesores, que estaría afectando negativamente la enseñanza de la modelización según lo propuesto por estudios como Cetinkaya et al. (2016).

Sumado a lo anterior, para los profesores las creencias tanto del profesor como de los estudiantes son importantes pues pueden afectar el aprendizaje (Kaiser, 2006). A pesar de esto, sus justificaciones fueron muy generales, orientadas a la pedagogía o a la resolución de problemas, y no directamente a la modelización, lo que nos hace pensar que el conocimiento del profesor es débil para la enseñanza de la modelización, coincidiendo con los resultados de Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri (2022). Además, las creencias de los profesores expuestas a través de las respuestas pueden estar incidiendo en la enseñanza de la modelización o que del todo no se dé en sus aulas como es expuesto lo escrito por Kaiser (2006) y Ärleback (2009).

## **Categoría 7. Gestión de enseñanza**

### **(a) Enfoques de enseñanza de la modelización**

Aquí encontramos dos grupos de respuestas. El primer grupo de respuestas manifestaron un conocimiento general sobre los enfoques de enseñanza de la matemática, todos ellos distintos. El segundo grupo, mostró indicios de conocimiento sobre un enfoque de la enseñanza por etapas como la *introducción, observación, manipulación, comparación y análisis*, las cuales se asemejan a las etapas propuestas en el ciclo de modelización de Lesh y Doerr (2003). Además, este último enfoque se acerca al enfoque holístico para la enseñanza de la modelización propuesto por Blomhøj y Jensen (2007) y además de Borromeo Ferri (2018).

### **(b) Gestión del discurso**

Hallamos indicios de este tipo conocimiento desde dos estilos de enseñanza: (a) tradicional y (b) más activo, asemejándose a los estilos de enseñanza sobre la modelización, directivo y operativo-estratégico de Leiß (2007). Para algunos profesores, el usar un estilo de enseñanza tradicional es viable al trabajar la modelización, lo que coincide con los resultados de Blum y Borromeo Ferri (2009). Esto es observado en las respuestas, sobre acciones necesarias para la conducción de la clase, como: el uso adecuado de una tarea de modelización, la forma de

distribuir el tiempo, la organización de los estudiantes, papel del profesor, la socialización de los resultados y por último, el proceso de comunicación y argumentación. Lo que podría estar ocasionando una enseñanza de la modelización no eficaz para trabajar dicho proceso en el aula y en consecuencia, afectando directamente al aprendizaje del estudiante, concordando con la teoría expuesta por Ernest (1989; 2018) y los resultados de Guerrero-Ortiz y Reyes-Rodríguez (2021).

De igual manera, obtuvimos indicios de un enfoque de enseñanza más activo o un estilo de enseñanza operativo-estratégico (Leiß, 2007). Los resultados de un grupo de profesores vislumbran acciones del profesor que incentivan a la participación activa del estudiante, como al utilizar adecuadamente un problema de modelización. En cuanto a la distribución del tiempo, observamos que algunos profesores mencionan la resolución de problemas como una etapa necesaria en las clases de modelización y a la cual se le debe asignar su debido tiempo. Otro indicio fue la organización de los estudiantes al trabajar en una forma grupal —de 2 a 3 estudiantes— donde el trabajo en equipo es esencial para el desarrollo de las tareas de modelización (Centikaya et al., 2016; Borromeo Ferri, 2018). También destacamos que el debatir o socializar los resultados, como parte acciones aula donde se involucra más al estudiante en su aprendizaje, siendo así el protagonista en su comunicación y argumentación (English, 2010; Shahbani, 2018). Por tanto, según los profesores participantes, el papel del maestro es de *mediador* o *facilitador* pues propicia una enseñanza más orientada al trabajo activo e independiente del estudiante (Leiß, 2007). Permitiendo construir en los estudiantes una estructura cognitiva poderosa más que solo una simple socialización entre pares. A la vez, puede significar un cambio en la forma tradicional de afrontar problemas matemáticos donde predomina el proceso individual del individuo (Schoenfeld, 1992).

### (c) Gestión de atascos

Para los profesores, las ayudas que puede brindar un profesor para superar un atasco durante la resolución de un problema modelización tiene que ver con la forma de organización de los estudiantes —en forma grupal, para que se ayuden mutuamente— y el brindar pistas o pautas —ejemplos o guías— coincidiendo con Borromeo Ferri (2018) sobre la teoría de intervención de Zech (1998). Por otro lado, también los profesores mencionaron *ayudas generales* que se utilizan en general en clases de matemática —el profesor brinde atención individualizada o un *compañero tutor*— y no propiamente en la modelización. Para los profesores saber cuándo es el

momento en el que debe intervenir tiene ver con el reconocer *actitudes negativas* del estudiantes, como la frustración o inseguridad (Díaz et al., 2018; Gómez-Chacón, 2003). También cuando el estudiante no avanza, a pesar de un lapso de tiempo prudencial transcurrido (Zech, 1998).

#### (c) Gestión de evaluación

Tanto para la evaluación formativa como la sumativa en la modelización, las respuestas mostraron dos tipos instrumentos: *prueba escrita* —en la evaluación formativa es un diagnóstico del conocimiento del estudiante y en la evaluación sumativa, es un examen escrito — y *la rúbrica analítica*— en la evaluación formativa mide aspectos más cualitativos y en la evaluación sumativa, mide el desempeño en niveles (avanzado, intermedio e inicial). Ambos tipos de instrumentos van en la línea de evaluar el producto realizado por el estudiante, no el proceso realizado por este. Lo que según Borromeo Ferri (2018) no permite comprender los procesos de pensamiento o el origen de los resultados propuestos por los estudiantes, donde se puedan revelar falencias o fortalezas conceptuales. Encontramos que los criterios de evaluación, se refieren *aspectos cuantitativos* —como procedimientos matemáticos— y *aspectos cualitativos* —como el uso de las fases del ciclo de modelización, actitudes y disposición, además de otras formas de resolver un problema, entre otros. Concordando con Borromeo Ferri (2018) al establecer criterios de evaluación en cuanto a las etapas del ciclo de modelización y las expectativas que los estudiantes deben cumplir en la solución de un problema de modelización. Por otra parte, encontramos respuestas sobre actividades de evaluación, al no mencionar directamente el instrumento y las descartamos.

#### (d) Gestión de recursos

Los profesores mostraron conocimiento sobre materiales o recursos que el maestro puede usar en la modelización, como los *materiales no estructurados*, es decir materiales cotidianos presentes en la casa o clase, material de reciclaje, entre otros. Este tipo de material coincide con Muñoz y Patiño (2022), a la vez de Jiménez (2022) al ser propuesto este tipo de material para trabajar la modelización matemática en sus clases, por sus alcances y su facilidad de acceso. Sin embargo, también encontramos conocimientos del profesor sobre recursos que se proponían en forma general para cualquier clase de matemática y no propiamente para la modelización. En particular, *materiales estructurados* como bloques multibase, libros de texto, tecnología, entre otros.

## 10. CONCLUSIONES

---

En este último capítulo mostramos las conclusiones de esta investigación. Iniciamos su exposición atendiendo a la consecución de los objetivos propuestos inicialmente en el planteamiento del problema y describimos simultáneamente sus principales aportaciones. Reflexionamos y brindamos algunas conclusiones relativas a cada uno de los estudios realizados. Finalmente, presentamos las limitaciones de este trabajo y recogemos las líneas abiertas que constituyen perspectivas de continuación de esta investigación.

## 1. RECAPITULACIÓN

La modelización matemática es relevante para comprender mejor el mundo, sirve de apoyo en el aprendizaje y ayuda al desarrollo de competencias y actitudes apropiadas hacia la matemática (Blum y Borromeo Ferri, 2009). Para lograr lo anterior, el papel del profesor es trascendental si se quiere una enseñanza de calidad. No obstante, diversas investigaciones relevan problemáticas que afectan la profesionalización sobre la modelización de los docentes (e.g., Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022). Iniciamos esta investigación partiendo del supuesto de que no hay una determinación clara del conocimiento profesional que deben tener los maestros de educación primaria sobre la modelización. Por ello, consideramos que este trabajo contribuye, tanto por sus aportes teóricos como sus implicaciones para la formación continua de los profesores. Para lograr lo anterior, nos planteamos dos objetivos generales de investigación:

OG1. Caracterizar las estrategias de resolución, representaciones y errores al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria.

OG2. Profundizar en el conocimiento profesional de los maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática.

El primer objetivo general fue concretizado por medio de dos objetivos específicos OE1.1 y OE1.2. Partimos de dos estudios centrados en la resolución de tareas de modelización por estudiantes (*estudio 1 y 2*). Las producciones de dichos estudiantes fueron sometidas a un análisis de contenido de las respuestas de los estudiantes y cuyos resultados los presentamos en el capítulo 5. Dada la importancia de aspectos —estrategias de resolución, representaciones y errores— afines con la resolución de tareas de modelización y debido a la limitada investigación centrada en el tema, decidimos trabajar con estudiantes en dichos estudios, pues necesitábamos el fundamento teórico para estudiar posteriormente el conocimiento del profesor relacionado con estos aspectos.

El segundo objetivo general lo hemos llevado a cabo por medio de tres objetivos específicos OE2.1, OE2.2 y OE2.3. Por tanto, realizamos el *tercer estudio* donde detectamos conocimientos presentes en el currículo de Costa Rica, que sirvió para el refinamiento de categorías de conocimiento profesional orientado hacia la modelización. Además, en el *estudio 4* identificamos

y caracterizamos detalladamente el conocimiento que manifiestan los profesores participantes, especificando debilidades y fortalezas con el fin de mejorar la formación de profesores y contribuir a una enseñanza eficaz de la modelización.

## **2. CONCLUSIONES DEL PRIMER OBJETIVO GENERAL**

Sobre la base de identificar qué aspectos específicos deben formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas en ambientes de modelización (Lester, 2013; Wess et al., 2021), el primer objetivo general surgió de la primera pregunta de investigación, concerniente a la resolución de tareas de modelización por estudiantes que han finalizado recientemente educación primaria. Particularmente, los objetivos específicos OE1.1 y OE1.2 fueron levantados para:

OE1.1 Identificar y describir las estrategias de resolución y representaciones que realizan los estudiantes según su estilo de pensamiento al resolver una tarea de modelización matemática.

OE1.2 Identificar y describir los errores y representaciones que realizan los estudiantes según su estilo de pensamiento al resolver una tarea de modelización matemática.

Para lograr la consecución de ambos objetivos específicos realizamos dos estudios empíricos, por ello presentamos en primer lugar, las conclusiones del *estudio 1* sobre las estrategias de resolución y representaciones. En segundo lugar, las conclusiones del *estudio 2* basados en los errores y representaciones en los procesos de modelización.

### **2.1 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO 1**

Para lograr la consecución de los objetivos específicos OE1.1 y OE1.2, efectuamos un primer estudio sobre las estrategias de resolución y representaciones, a través de un análisis de contenido de las respuestas de los estudiantes a dos tareas de modelización matemática. Un aporte de esta investigación radica en la necesidad de comprender la influencia de los estilos de pensamiento de los estudiantes al trabajar la modelización. En este sentido, los resultados que muestran una falta de uso de distintos sistemas de representación podría deberse a la formación recibida hasta el momento de la investigación. Concretamente, esta pudo estar focalizada en el uso específico de representaciones simbólico-numéricas y representaciones de lenguaje natural, incidiendo directamente en el tipo de estilo de pensamiento analítico al resolver la tarea de

modelización. Además, son los sistemas de representación que en la educación escolar tradicional suelen considerarse como *correctos* y más comunes (Smith, 2003).

Tras los hallazgos obtenidos consideramos que es crucial generar oportunidades de aprendizaje que incidan en la diversidad en el uso de estrategias y representaciones en ambientes de modelización. Para ello es necesario incentivar el uso de estos elementos según un estilo de pensamiento integrado, apostando por el empleo flexible de ellos, lo que podría propiciar un equilibrio entre la realidad y las matemáticas (Borromeo Ferri, 2018). Además, el usar una diversidad de sistemas de representación en la enseñanza podría ayudar a fomentar el uso de un pensamiento más reflexivo y analítico incidiendo directamente en las estrategias y las representaciones involucradas al resolver tareas de modelización.

## 2.2 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO 2

Realizamos un *segundo estudio* para el objetivo específico OE1.2, donde identificamos los errores y representaciones en los procesos de modelización. La modelización es entendida como un elemento esencial de la contextualización activa en el aprendizaje matemático y los estudiantes participantes deberían haber sido formados en ambientes de modelización. No obstante, los errores encontrados podrían indicar un panorama que no coincide con la formación que debieron haber recibido, por ello son elementos de reflexión, avance y retroalimentación para la labor docente.

A pesar de que los errores dependen de la tarea y los estudiantes que la resuelven, las coincidencias detectadas con otros trabajos (Fernández y Brey, 2012; Guerrero, 2016; Isik y Kar, 2012; Ruano et al., 2008; Socas et al., 2016), muestran la necesidad de prestar especial atención al trabajar los errores, pues cuando estos se produzcan en las representaciones y resolución de operaciones aritméticas, el profesor podrá abordarlos de una manera provechosa para el aprendizaje de los estudiantes.

Uno de los aportes de esta investigación es que los grupos participantes omitieron una o varias etapas del ciclo de modelización. En particular, la omisión de la etapa predicción hace pensar que los estudiantes han estado inmersos a una enseñanza de estilo tradicional, lo que no va en línea de cómo se debería de trabajar la modelización según las recomendaciones teóricas expuestas por Borromeo Ferri (2018). Por ello, consideramos necesario hacer más énfasis en la enseñanza de las etapas del ciclo de la modelización, reflexionando en el proceso seguido, la

razonabilidad de la solución y su validación. Al mismo tiempo, incentivando la búsqueda de estrategias de enseñanza adecuadas que ayuden a solventar las deficiencias presentes al resolver tareas de modelización, como las detectadas en este estudio.

### **3. CONCLUSIONES DEL SEGUNDO OBJETIVO GENERAL**

El segundo objetivo general surgió de la pregunta referida a qué conocimientos profesionales sobre modelización matemática manifiestan los maestros de primaria en ejercicio. Por ello, los objetivos específicos tratan sobre:

OE2.1 Establecer componentes de conocimiento del profesor referentes al proceso de modelización.

OE2.2 Identificar qué componentes del conocimiento sobre modelización matemática ponen en juego los maestros de primaria al enseñar la modelización.

OE2.3 Caracterizar el conocimiento de los maestros de primaria en ejercicio sobre el proceso de modelización matemática.

Para la consecución de dichos objetivos, realizamos dos estudios. En primer lugar, exponemos las conclusiones del *estudio 3* al delimitar el conocimiento del profesor en aspectos relativos a la modelización presentes en el currículo y en la literatura. En segundo lugar, exhibimos las conclusiones *del estudio 4* sobre el conocimiento que manifiestan los maestros de primaria en ejercicio sobre la modelización.

#### **3.1 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO 3**

Para la consecución del objetivo específico OE2.1, realizamos en primer lugar una adaptación de las componentes del modelo del conocimiento del profesor para la resolución de problemas de Piñeiro et al. (2019). En segundo lugar, usamos estas componentes para analizar el documento curricular del currículo de Costa Rica, pues este documento posee directrices que determinan parte del conocimiento que debe tener el profesor, lo que permitió refinar en la perspectiva de la modelización. Este *tercer estudio* permitió abordar las limitaciones presentadas en las perspectivas teóricas de conocimiento del profesor que existen en la educación matemática, en especial sobre el conocimiento específico de la modelización (Blum, 2015; Wess et al., 2021). A través de recomendaciones de Lesh y Doerr (2003), además de Borromeo Ferri (2018) indagamos en una propuesta de categorías basada en los constructos teóricos de competencia de

la modelización y relacionada con la resolución de problemas, en particular con la propuesta de Piñeiro et al. (2019).

Destacamos que a pesar de que en algunas partes del currículo, se alude a la perspectiva de modelización contextual propuesta por Lesh y Doerr (2003), en ninguna parte del documento se menciona esto en forma explícita, por tanto la perspectiva sobre la modelización que sigue no es clara. Además, a pesar de que el currículo incluye una variedad de elementos que son exigidos como conocimientos necesarios para la enseñanza de la modelización e implementación del currículo, algunos deben ser ampliados y profundizados como la invención de problemas y su relación con la modelización. También proponemos abordar más claramente el papel de las dificultades y errores de la modelización y su relación como indicadores de comprensión conceptual, además ampliar cómo pueden ser trabajados estos durante las fases del ciclo de modelización, con la finalidad de enriquecer el aprendizaje del estudiante. En particular, al aplicar la fase de validación por ser un proceso no direccional y flexible.

Esta investigación siguió la idea de explicitar la preocupación de algunos investigadores sobre la especificidad de los procesos o prácticas matemáticas como parte del conocimiento del profesor (Foster et al., 2014). Al igual como lo hizo Piñeiro (2019) al estudiar dicha especificidad sobre la resolución de problemas, en la modelización era necesario ponerlo visible (Blum, 2015; Wess et al., 2021). Por tanto, las componentes propuestas sobre conocimiento sobre la modelización han permitido delimitar los aspectos necesarios para su enseñanza, que son ineludibles tanto para los profesores en ejercicio como los que están formándose. El aprendizaje eficaz de las actuales y futuras generaciones de estudiantes depende de la calidad y desarrollo del conocimiento del profesor, donde la modelización no es la excepción (e.g. Guerrero-Ortiz y Borromeo Ferri, 2022). Por tanto, nuestra investigación constituye un aporte al manifestar una problemática que merece ser atendida con más atención por la comunidad de investigadores y educadores en educación matemática.

### **3.2 CONCLUSIONES DEL ESTUDIO 4**

Los objetivos específicos OE2.2 y OE2.3, los concretizamos a través de un análisis de contenido de la información suministrada por medio de las entrevistas a profesores de educación primaria en ejercicio.

## ***Conclusiones del conocimiento sobre la modelización matemática***

Los profesores en ejercicio de este estudio han demostrado un conocimiento limitado sobre los problemas de modelización, su proceso de resolución y la disposición que se debe tener. En cuanto los problemas de modelización, las nociones de modelo matemático y modelización no coinciden completamente con lo reportado en la literatura. La cual señala que hay ciertas condiciones que se deben cumplir, en especial cuando hablamos sobre el contexto real y la estructura del problema en ambientes de modelización. A la vez, es preocupante la consideración del problema de modelización como un ejercicio matemático o tarea rutinaria y también, como el papel del resolutor es dejado de lado. Sumado, a que el conocimiento de los profesores sobre las estrategias de resolución de problemas de modelización es limitado al uso de sistemas de representación que son considerados *adecuados* y más habituales en un estilo de enseñanza tradicional (Smith, 2003). Siendo así que los profesores participantes al momento del estudio no contaban con una formación adecuada para realizar el proceso de modelización en el aula y lo cual se ha agrava, si el profesor no está en constante actualización.

Con respecto al proceso de resolución de un problema de modelización, es importante señalar que los maestros de este estudio manifiestan un conocimiento bastante amplio de estrategias y su relación con las etapas del ciclo de modelización, metacognición y factores cognitivos. No obstante, el conocimiento manifestado acerca de las etapas del ciclo de modelización y su comportamiento, es limitado al ser permeado por un estilo de enseñanza tradicional. Esto es recurrente en el conocimiento sobre los sistemas de representación expuestos en las estrategias de resolución de los problemas de modelización, también al considerar el uso del proceso de metacognición como innecesario por parte de algunos profesores y la disposición de los estudiantes al resolver un problema de modelización. Por tanto, el conocimiento del profesor no era el ideal, lo que podría afectar el planteamiento de tareas y su resolución, además de la práctica docente. Siendo así, que es requerido que estos profesores enseñen la modelización, pero no poseen el conocimiento, ni la formación necesaria para esto, además la que posee no es exclusiva en educación matemática. Nuestro aporte con este estudio radica en vislumbrar la necesidad de proveer espacios de formación continua a los maestros en ejercicio donde puedan actualizar y mejorar su conocimiento. Además, invitamos a la comunidad científica a desarrollar más investigación en esta área, con la finalidad de proveer iniciativas que contribuyan a mejorar el panorama encontrado en esta investigación, en aras de lograr un verdadero proceso de

modelización y su desarrollo efectivo. Lo cual puede repercutir directamente en la formación de estudiantes y futuros profesionales que se incorporen a la sociedad.

Concluimos que el conocimiento sobre la modelización es insuficiente para su práctica docente y no se alinea con lo que se espera que los maestros conozcan. En particular, es necesario que los profesores no solo conozcan las características de los problemas de modelización, sino que también desarrollen criterios que les permitan valorar hasta qué punto una tarea matemática es un problema de modelización para los estudiantes. También, aunque los profesores poseen conocimientos de estrategias de resolución de problemas, este es superficial y limitado a realizar estructuras mecánicas como el planteo, operación y respuesta. Por ello, conocen la estrategia, pero no han reflexionado lo suficiente sobre las acciones que se realizan en ella y como orientarla y mejorarla para ser usada en la modelización. En este sentido, las debilidades detectadas pueden servir para elaborar propuestas de experiencias de formación continua como cursos de desarrollo profesional, que contemplen el uso de actividades donde la exploración y la reflexión sea lo medular, para ampliar y mejorar su conocimiento sobre los problemas de modelización y su resolución. Además, los cambios curriculares quedan sin efecto, sin los profesores no se apropian de dicho conocimiento.

Los hallazgos expuestos en los párrafos anteriores sugieren que si bien los profesores poseen un conocimiento que fue formado en forma específica, sus dificultades parecen relacionarse con la forma en que fue recibida dicha formación, pues se muestra limitada y desconectada con la modelización. Aunque algunos profesores participantes sí habían recibido cursos de formación continua sobre modelización matemática u otros aspectos relacionados, al parecer no tuvieron los efectos deseados, pues lo anterior se sigue manteniendo. El conocimiento del profesor sobre modelización es insuficiente para enfrentar los cambios vertiginosos educativos actuales, en particular en la modelización. Sumado a un proceso de desactualización después de su egreso de la carrera, lo que agrava más el asunto (Alpízar-Vargas y Alfaro-Arce, 2020). Por tanto, es importante y necesario proveer de experiencias de formación adicional a los profesores en ejercicio, donde se dé el acercamiento a la teoría de modelización, se promueva su reflexión y enseñanza como elementos esenciales para expandir su conocimiento. Específicamente, fomentando una caracterización del problema de modelización más vinculada al resolutor, las características entre una tarea de modelización y además, de las características del ciclo de modelización. Asimismo, es ineludible que los maestros conozcan el proceso de resolución, sus

características y estrategias, pero este conocimiento debe asumirse desde una posición flexible y cíclica del proceso de modelización. Además, de su relación con los factores no cognitivos. Dado que el conocimiento del profesor se enriquece a partir de las experiencias vividas en su formación (Thompson, 1992), como miembros de comunidades de aprendizaje y a través actividades instruccionales (Kaiser, 2006).

### ***Conclusiones del conocimiento didáctico sobre la modelización matemática***

Los profesores poseen conocimientos didácticos, pero no han sido formalmente orientados hacia la modelización. Un aspecto que este estudio puso de manifiesto es la desconexión entre los conocimientos de los profesores con la modelización. Si bien, consideran al resolutor para etiquetar las tareas como problemas, solo algunos profesores lo hacen pensando en aspectos que tienen relación con la modelización. Sin embargo, la mayoría de los participantes, no reconocen la importancia del resolutor al etiquetar una tarea como un problema de modelización, lo que se refleja en una falta de criterios o que estos sean más pedagógicos, lo que podría afectar el planteamiento de tareas y su desarrollo efectivo.

Por otro lado, destacamos que los profesores poseían una gran cantidad de ideas reportadas en la literatura sobre las dificultades y errores de los estudiantes en procesos de modelización. Sobre los problemas de modelización como tarea escolar, encontramos conocimientos a cerca de varios criterios para seleccionar un problema. También obtuvimos evidencias de conocimiento del profesor sobre las perspectivas teóricas de modelización y además de la invención de problemas, pero este es limitado. Esto es reiterado con el conocimiento obtenido sobre la categoría de factores no cognitivos y con la de gestión de enseñanza. Lo que puede explicarse por las experiencias que los profesores en ejercicio han tenido en su escolaridad y que probablemente han moldeado sus creencias. Donde pareciera que estas se han limitado a percibir a la modelización como la resolución de problemas de contexto real, sin reflexionar sobre condiciones o características que debe poseer dicho contexto real para que un problema sea de modelización y el papel del resolutor en él.

Algunas de estas ideas de corte tradicional (Ernest, 1989, 2018) expuestas por los profesores, deben ser moldeadas o confrontadas con nuevos aspectos que renueven la formación recibida, que permitan modificar sus sistemas de creencias. Además, se reafirme la importancia de la exploración y la reflexión en la formación docente sobre la modelización. En particular, la

formación continua que deberían recibir los docentes debe comprometerse en poner atención a cómo la formación teórica se relaciona con la enseñanza de la modelización. Concretamente, creemos que los maestros deberían adquirir un conocimiento que permita articular el *cómo* dan sentido a la enseñanza de la modelización y lo que significa su papel como profesor.

#### **4. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN**

Entre las limitaciones de esta investigación podemos señalar:

Una de las limitaciones fue la cantidad de tareas de modelización que se aplicaron. Consideramos que, para profundizar en más aspectos sobre los elementos presentes en la resolución de tareas de modelización es necesario aplicar más tareas y que sean de otra tipología como las tareas abiertas que propone Borromeo Ferri (2018).

Otra limitación es la técnica de recolección de los datos y los momentos de su recogida, donde no se realizó observación de clases y la resolución de problemas de modelización por parte los profesores. Tampoco se analizaron los documentos de planificación de aula o de evaluación. Por ello, los resultados estuvieron sujetos a la información recogida con las técnicas utilizadas, pero explorar otros aspectos como los anteriores, podría proporcionar más información rica y amplia para comprender el fenómeno de la investigación.

Aunque analizar una única normativa curricular permitió establecer un acercamiento del conocimiento necesario para enseñar la modelización matemática. Consideramos que el haber utilizado un único documento curricular, es una limitación específica del contexto donde se desarrolló la investigación.

Otra limitación del estudio es la especificidad del contexto donde se desarrolla la investigación. Tanto los estudiantes como los profesores costarricenses poseen múltiples elementos que los caracterizan. Aunque buscamos una comprensión lo más general posible del fenómeno, los resultados se limitaron a las características que los participantes poseían en el momento del estudio. Intentamos contrarrestar esta limitación dando detalles específicos del contexto de investigación para aportar a su transferibilidad y abstrayendo conclusiones que fuesen válidas para otros sistemas educativos. Sin embargo, cualquier generalización o extensión a otro contexto debe realizarse con cautela y a grupos de sujetos con características similares.

## **5. LÍNEAS ABIERTAS DE LA INVESTIGACIÓN**

Tomando en cuenta los resultados y su discusión, además de las conclusiones y limitaciones aportadas en este estudio, se derivan una sucesión de posibles perspectivas que pueden convertirse en líneas de investigación futuras. Organizamos dichas posibilidades en cuatro aristas.

### **Continuidad sobre elementos presentes al resolver tareas de modelización**

Una primera perspectiva de investigación que nos parece atrayente efectuar, es construir y aplicar tareas de modelización para estudiar otros aspectos involucrados su resolución. Concretamente, no referimos tanto a modificaciones a aspectos como la cantidad de soluciones y el tipo de estudiante como de niveles de los estudiantes. Asimismo, sería interesante usar contextos realistas contruidos por medio de recomendaciones de los mismos profesores, con la finalidad de contribuir con recursos para la enseñanza de la modelización (Paolucci y Wessels, 2017), en especial en Costa Rica.

Asimismo, es necesario realizar más investigación sobre aspectos presentes en la resolución de tareas de modelización, como por ejemplo al trabajar ciclos de entendimiento iterativos asociados a los conceptos y representaciones utilizadas al abordar la situación problema (Aviña et al., 2019).

### **Continuidad del refinamiento del sistema de categorías que explore el conocimiento profesional sobre modelización**

Continuar indagando sobre el conocimiento de la modelización en distintos ambientes escolares —educación a nivel de preescolar, primaria, secundaria y universidad. Así, se generaría un refinamiento del sistema de componentes del conocimiento del profesor propuesto en esta investigación, que ayude a su completitud.

En relación con la información proporcionada por las entrevistas, consideramos que puede complementarse con otros elementos como el análisis de las planificaciones y observaciones de clases. Siendo una línea interesante de abordar el conocimiento del profesor al implementar la modelización desde perspectivas que no se abordaron en este estudio: la planificación de la enseñanza, su implementación en el aula, el desempeño y aprendizaje de los estudiantes o el

currículo evaluado entre otros. Esto generaría un mayor detalle que permitiría especificar las categorías del conocimiento aportadas y enriquecerían los resultados sobre la modelización obtenidos en esta investigación.

También es atractivo explorar la relación existente entre el sistema de categorías y otro modelo de conocimiento, por ejemplo, con el modelo del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK) que posee un subdominio relacionado con prácticas matemáticas como la modelización.

### **Continuidad para la exploración del conocimiento teórico sobre la modelización y su conocimiento didáctico**

Un estudio interesante de realizar es el desarrollo del conocimiento sobre modelización de profesores en ejercicio, las ideas de Borromeo Ferri y Blum (2010). Esto podría ayudar a entender sobre cómo se relacionan y cómo se ven estos conocimientos tanto en las producciones realizadas por los profesores como en la práctica en las clases (Sevinc y Lesh, 2022).

Otra línea de continuidad es explorar el conocimiento de estudiantes en formación tanto para educación primaria como secundaria con respecto a la modelización matemática. Un estudio con participantes de estas características aportaría al entendimiento sobre la formación inicial de los estudiantes para profesor con respecto a la modelización. Además de proveer información valiosa sobre los aspectos que podrían ser mejorados en los programas de formación.

### **Continuidad para el desarrollo de instrumentos que indaguen el conocimiento del profesor sobre la modelización**

Sobre los instrumentos de las entrevistas, se establecieron las preguntas con el fin de identificar el conocimiento del profesor sobre modelización, tomando aspectos teóricos, del currículo de Costa Rica y de la práctica docente. No obstante, creemos necesario continuar su desarrollo incluyendo otros aspectos, por ejemplo, preguntas sobre los ciclos de entendimiento iterativos asociados a los sistemas de representación usados al abordar problemas de modelización (Aviña et al., 2019; Orozco-Rodríguez y Vargas-Alejo, 2021). Por tanto, los instrumentos creados para este estudio deben considerarse como una herramienta que permitió un acercamiento a la exploración de conocimiento del profesor, pero no en forma exhaustiva.

## REFERENCIAS

---

- Agre, G. P. (1982). The concept of problem. *Educational Studies*, 13(2), 121-142. [https://doi.org/10.1207/s15326993es1302\\_1](https://doi.org/10.1207/s15326993es1302_1)
- Abrate, R., Brate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María.
- Alfaro, C., Alfaro, H., Chacón, D. y González, A. (2015). *El razonamiento lógico como medio para fortalecer la habilidad de argumentación en estudiantes de educación secundaria*. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Costa Rica]. Repositorio Institucional de la Universidad de Costa Rica. <http://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr:8080/jspui/handle/123456789/5796>
- Alpízar-Vargas, M. y Alfaro-Arce, A. L. (2020). Percepción de un grupo de docentes de educación primaria acerca de la preparación recibida durante su formación universitaria en cuanto al tema de las *Matemáticas*. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 20(1), 1-31. <https://doi.org/10.15517/aie.v20i1.39978>
- Alsina, Á. y Salgado, M. (2021). Understanding early mathematical modelling: First steps in the process of translation between real-world contexts and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 1719-1742. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10232-8>
- Andrews, P. y Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(4), 476-488. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.002>
- Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73. <https://doi.org/10.30827/pna.v8i2.6117>
- Ärleböck, J. B. (2009). Towards understanding teachers' beliefs and affects about mathematical modelling. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. 2046-2055). INRP.
- Ärleböck, J. B. y Doerr, H. M. (2020). Moving beyond descriptive models: Research issues for design and implementation. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 5-20. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.307>
- Aviña, M. J., Vargas, V., Alvarado, A. y Cristóbal, C. (2019). Ciclos de entendimiento de estudiantes universitarios al resolver una actividad de proporcionalidad. *CPU-e Revista de Investigación Educativa*, 29, 58-86.

- Ayllón, M. F. (2012). *Invencción-Resolución de problemas por alumnos de Educación Primaria* [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada-España]. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/27771>
- Aymerich, À. y Albarracín, L. (2022). Mathematical modeling in statistical activities: Key episodes for model generation. *Uniciencia*, 36(1), 1-16. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.16>
- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Ballester, L. (2004). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. (2da ed.). Universitat de les Illes Balears, Servei de Publicacions i Intercanvi Científic.
- Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido* (2a ed.). Madrid, España: Akal.
- Barquero, B. (2020). Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 1-113.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* (3era ed). Editora Contexto.
- Bassanezi, R. D. y Biemburgut, M. S. (1997). Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. *Números*, 32, 13-25. <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/32/Articulo02.pdf>
- Baumert, J. y Kunter, M. (2013). The COACTIV model of teachers' professional competence. En M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss y M. Neubrand (Eds.), *Cognitive activation in the mathematics classroom and professional competence of teachers. Results from the COACTIV project* (pp. 25-48). Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4614-5149-5>
- Biemburgut, M. S. y Hein, N. (2002). Modelaje y etnomatemáticas: puntos incommunes. *Números*, 52, 27-39.
- Biemburgut, M. y Hein, N. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en las clases matemáticas. *Acta del 5to Festival Internacional de Matemática (FIMAT)* (pp. 1-25). <https://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-2-Hein.pdf>
- Blömeke, S., Jentsch, A., Ross, N., Kaiser, G. y König, J. (2022). Opening up the black box: Teacher competence, instructional quality, and students' learning progress. *Learning and Instruction*, 79, 101600. <https://doi.org/10.1016/J.LEARNINSTRUC.2022.101600>
- Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? En W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp. 45-56). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Blomhøj, M. y Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work - experiences from an in-service course for upper secondary teachers. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 163-177.

<https://doi.org/10.1007/BF02655887>

- Blum W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. En *Mathematische Semesterberichte*, 32, 195-232.
- Blum, W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds), *Trends in Teaching and Learning Mathematical Modelling* (pp. 15-30). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_3](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3)
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education - Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73-96). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3>
- Blum, W. y Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learned? *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Kaiser, G. (1997). *Vergleichende empirische untersuchungen zu mathematischen anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen lernenden*. DFG
- Blum, W. y Leiß, D. (2006). "Filling Up" -The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education (CERME 4)* (Vol. 4, pp. 1623-1633). FUNDEMI IQS.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "Sugarloaf" and the DISUM project. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan, (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Horwood. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.W. Henn y Niss, M. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series*. Springer. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1\\_18](https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_18)
- Boggino, N. (2005). *El constructivismo entra en el aula*. Homosapiens.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/BF02655883>
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling from a cognitive perspective: Individual modelling routes of pupils. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling. education, engineering and economics* (pp. 260-270). Horwood Publishing.
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematikdidaktik*, 31(1), 99-118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>

- Borromeo Ferri, R. (2014). Mathematical modeling-The teachers' responsibility. En A. Sanfratello y B. Dickman (Eds.), *Proceedings of conference on mathematical modeling at Teachers College of Columbia University* (pp. 26-31). Columbia University Libraries.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>
- Borromeo Ferri, R. (2021). Mandatory mathematical modelling in school! - What do we want the teachers to know? En F. Leung, G. Stillman, G. Kaiser y K. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west* (pp. 103-117). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_12).
- Borromeo Ferri, R. y Blum, W. (2009). Insight into teachers' unconscious behaviour in modelling contexts. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modelling students' modelling competencies* (pp. 423-432). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1\\_36](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_36)
- Borromeo Ferri, R. y Blum, W. (2010). Mathematical modelling in teacher education - Experiences from a modelling seminar. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. 2046-2055). INRP.
- Borromeo Ferri, R. y Lesh, R. (2013). Should interpretation systems be considered to be models if they only function implicitly? En G. Stillman et al. (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 57-66). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5\\_4](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_4)
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Scholz, R. Sträber y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Kluwer Academic Publishers.
- Brown, M., Bossé, M. J. y Chandler, K. (2016). Student Errors in Dynamic Mathematical Environments, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 17 (1), 1-27.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *Educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Horsori.
- Cetinkaya, B., Kertil, M., Erbaş, A. K., Korkmaz, H., Alacaci, C. y Çakiroğlu, E. (2016). Pre-service teachers' developing conceptions about the nature and pedagogy of mathematical modeling in the context of a mathematical modeling course. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(4), 287-314. <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2016.1219932>

- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *Lumat*, 3(1), 19-36. <http://www.lumat.fi/index.php/lumat-old/article/view/38>
- Chavarría, G. (2014). Dificultades en el aprendizaje de problemas que se modelan con ecuaciones lineales: El caso de estudiantes de octavo nivel de un colegio de Heredia. *Uniciencia*, 28(2), 15-44. <https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/6009>
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires: La notion de modélisation. *Petit X*, 19(19), 43-72.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8a ed.). Routledge.
- Crouch, R. y Haines, C. (2007). Exemplar Models: Expert-Novice Student Behaviours. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (pp. 65-78). Horwood Publishing. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.89>.
- Czocher, J. A. (2017). Mathematical modeling cycles as a task design heuristic. *The Mathematics Enthusiast*, 14 (1), 129-140. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1391>
- D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. Editora Ática.
- Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., y Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(4), 1-13. <https://doi.org/10.35362/rie3842646>
- Deniz, Ş. y Kurt, G. (2022). Investigation of mathematical modeling processes of middle school students in model eliciting activities (MEAs): A STEM approach. *Participatory Educational Research (PER)*, 9(2), 150-177. <http://dx.doi.org/10.17275/per.22.34.9.2>
- Díaz, V., Belmar, H. y Poblete, A. (2018). Manifestación emocional y modelación de una función Matemática. *Bolema*, 32(62), 1198-1218. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a22>
- Dikko, M. (2016). Establishing Construct Validity and Reliability: Pilot Testing of a Qualitative Interview for Research in Takaful (Islamic Insurance). *The Qualitative Report*, 21(3), 521-528. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2016.2243>
- Di Martino (2019). The Complex Relationship Between Mathematical Modeling and Attitude Towards Mathematics. En S. A. Chamberlin y B. Sriraman (eds.), *Affect in Mathematical Modeling, Advances in Mathematics Education* (pp. 29-51). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_3)

- Doerr, H. M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 62(1), 3-24. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-4437-9>
- Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modeling? En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 69-78). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_5)
- Doerr, H. M. y English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34 (2), 110-136. <https://doi.org/10.2307/30034902>
- Doerr, H. M. y English, L. D. (2006). Middle grade teachers' learning through students' engagement with modeling tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 5-32. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-9004-x>
- Doerr, H. M. y Lesh, R. (2011). Models and modelling perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty first century. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14* (pp. 247-268). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_26](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_26)
- Edo, S. I., Indra, R. I. y Hartono, Y. (2013). Investigating Secondary School Students' Difficulties in Modeling Problems PISA-Model Level 5 And 6. *Journal on Mathematics Education*, 4(1), 41-58. <https://doi.org/10.22342/jme.4.1.561.41-58>
- English, L. D. (2002). Development of 10-year-olds' mathematical modelling. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (pp. 329-336). University of East Anglia.
- English, L. D. (2005). Mathematical modelling with young learners. En S. J. Lamon, W. A. Parker y S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: A way of life* (pp. 3-17). Ellis Horwood.
- English, L. D. (2006). Mathematical modelling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9013-1>
- English, L. D. (2007). Interdisciplinary modelling in the primary mathematics curriculum. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 275-284). MERGA.
- English, L. (2010). Mathematical modelling in the primary school. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (pp. 207-214). Mathematics Education Research Group of Australasia.

- English, L. y Sriraman, B. (2010). Problem Solving for the 21st Century. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 263-290). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_27)
- Eraslan, A. y Kant, S. (2015). Modeling processes of 4th-year middle-school students and the difficulties encountered. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 15(3), 809-824. <https://doi.org/10.12738/estp.2015.3.2556>
- Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakiroğlu, E., Alacaci, C. y Baş, S. (2014). Mathematical modeling in mathematics education: Basic concepts and approaches. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 14 (4), 1621-1627. <https://doi.org/10.12738/estp.2014.4.2039>
- Ernest, P. (1989). The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: a model. *Journal of Education for Teaching: International research and pedagogy*, 15(1), 13-33.
- Ernest, P. (2018). The Philosophy of Mathematics Education: An Overview. En G. Kaiser (Ed.), *The proceedings of the 13th international congress on mathematical education - The Philosophy of Mathematics Education Today* (pp. 13-35). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3>
- Escudero, R. (2007). Uso de los errores matemáticos como dispositivo didáctico para generar aprendizaje de la racionalización de radicales de tercer orden. *Zona Próxima*, 8(1), 12-25. <https://doi.org/10.14482/zp.08.510.98>
- Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 147-164). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Fernández, A. y Brey, R. (2012). Errores en el aprendizaje de las matemáticas financieras. *Enseñanza de las ciencias*, 30(2), 73-92. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n2.20>
- Florensa, I., García, F. J. y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 21-37. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315>
- Fraenkel, J. R., Wallen, N. E. y Hyun, H. H. (2011). *How to design and evaluate research in education*. McGraw-Hill.
- Frejd, P. (2012). Teachers' conceptions of mathematical modelling at Swedish Upper Secondary school. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(5), 17-40.
- Galbraith, P. (2012). Models of modelling: genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(5), 3-16.

- Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38 (2), 143-162. <https://doi.org/10.1007/BF02655886>
- Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi problems. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 265-275). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1>
- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I. y Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75-94. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267>
- Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, *Educación matemática*, 6 (3), 37-51. <https://doi.org/10.24844/EM0603.03>
- Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 25, 99-123. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/especial-25-anos-marzo-2014/>
- Gjesteland, T. y Vos, P. (2019). Affect and Mathematical Modeling Assessment: A Case Study on Engineering Students' Experience of Challenge and Flow During a Compulsory Mathematical Modeling Task. En S. A. Chamberlin y B. Sriraman (eds.), *Affect in Mathematical Modeling, Advances in Mathematics Education* (pp. 29-51). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_3)
- Gómez-Chacón, I. (2003). *Matemática Emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático*. Editorial Narcea, S. A.
- Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Erlbaum.
- Gould, H. (2013). *Teachers' Conceptions of Mathematical Modeling* [Tesis de Doctorado, Universidad de Columbia-Estados Unidos]. Repositorio Institucional de la Universidad de Columbia. <https://academiccommons.columbia.edu/doi/10.7916/D87D32BS>
- Gravemeijer, K. (2002). Preamble: From models to modeling. En K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers y L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2\\_2](https://doi.org/10.1007/978-94-017-3194-2_2)
- Greefrath, G. (2020). Mathematical modelling competence. Selected current research developments. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 38-51. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.303>

- Greefrath, G., Hertleif, C. y Siller, H. (2018). Mathematical modelling with digital tools-a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM—Mathematics Education*, 50(1-2), 233-244. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6>
- Greefrath, G., Siller, H. S., Klock, H. y Wess, R. (2022). Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical modelling. *Educational Studies in Mathematics*, 109, 383-407. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10038-z>
- Greefrath, G. y Vorhölter, K. (2016). Modelling cycle. En G. Kaiser (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries. ICTMA 13* (pp. 1-42). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-45004-9_1)
- Grønmo, L. S., Lindquist, M. y Arora, A. (2014). *TIMSS advanced 2015 mathematics framework*. En I. V. S. Mullis y M. O. Martin (Eds.), *TIMSS advanced 2015 assessment frameworks* (pp. 9-16). TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and IEA.
- Guerrero, F. (2016). Errores matemáticos en la resolución de problemas de modelización matemática. Caso: Estudiantes del primer año de educación media. *Revista ciencias de la educación*, 26 (47). 93-113.
- Guerrero-Ortiz, C. (2021). Pre-service mathematics teachers' technological pedagogical content knowledge: The case of modelling. En F. Leung, G. Stillman, G. Kaiser y K. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west* (pp. 141-151). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6>
- Guerrero-Ortiz, C. y Borromeo Ferri, R. (2022). Pre-service teachers' challenges in implementing mathematical modelling: Insights into reality. *PNA*, 16(4), 309-341. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i4.21329>
- Guerrero-Ortiz, C. y Reyes-Rodríguez, A. (2021). Matices que dan forma a las concepciones sobre la modelación de futuros profesores. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 16, 48-61. <https://doi.org/10.54343/reiec.v16i2.311>
- Guerrero, F. y Ortiz, J. (2012). Modelización matemática en Educación Media. Un estudio de competencias en un grupo de estudiantes. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 81, 27-40.
- Haines, C. P. y Crouch, R. (2005). Getting to grips with real world contexts: Developing research in mathematical modelling. En Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the 4 Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 1655-1666). FUNDEMI IQS.
- Hansen, R. y Hana, G. M. (2015). Problem posing from a modelling perspective. En F.M. Singer, N. F. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (pp. 35-46). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_2)

- Hernández-Martínez, P. y Vos, P. (2018). “Why do I have to learn this?” A case study on students’ experiences of the relevance of mathematical modelling activities. *ZDM—Mathematics Education*, 50(1-2), 245-257. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0904-2>
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta ed). McGrall Hill.
- Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). MacMillan.
- Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers’ mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406. <https://doi.org/10.3102/00028312042002371>
- Holenstein, M., Bruckmaier, G. and Grob, A. (2022), How do self-efficacy and self-concept impact mathematical achievement? The case of mathematical modelling. *Br J Educ Psychol*, 92: e12443. <https://doi.org/10.1111/bjep.12443>
- Huincahue Arcos, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las ciencias*, 36(1), 99-115. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277>
- Isik, C. Y Kar, T. (2012). The Analysis of the problems posed by the pre-service teachers about equations. *Australian Journal of Teacher Education*, 37(9). <http://doi.org/10.14221/ajte.2012v37n9.1>
- Julie, C. y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, M. Niss y H.W. Henn (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14<sup>th</sup> ICMI study* (pp. 503-510). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1\\_58](https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_58)
- Jung, H. (2015). Strategies to Support Students’ Mathematical Modeling. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 21(1), 42-48. <https://doi.org/10.5951/mathteachmidscho.21.1.0042>
- Jiménez, A. M. (2022). No comas más mentiras: Modelación de un estudio sobre el consumo de azúcar añadida en la lonchera. En E. Serna (Ed.), *Situaciones de modelación matemática para el aula. Aportes para diferentes niveles formativos* (pp. 28-38). Editorial Instituto Antioqueño de Investigación.
- Kilpatrick, J. (1980). What is a problem? *Problem Solving*, 4(2), 1-5.
- Kaiser, G. (2006). Mathematical modelling at schools - How to promote modelling competencies. En C.P. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*. Horwood Publishing.

- Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 110-119). Horwood Publishing.
- Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Analyses: Mathematical modelling and applications: empirical and theoretical perspectives. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 1-209
- Kaiser, G., Borba, M.C., Schukajlow, S. y Stilman, G. A. (2018). Empirical research on the teaching and learning of mathematical modelling. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 50(1-2), 1-354.
- Kaiser, G. y Brand, S. (2015). Modelling competencies: Past development and further perspectives. En G. A. Stillman, W. Blum y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences* (pp. 129-149). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_10)
- Kaiser, G. y Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as bridge between school and university. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 196-208. <https://doi.org/10.1007/BF02655889>
- Kaiser, G., Schwarz, B. y Tiedemann, S. (2013). Future teachers' professional knowledge on modeling. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA 13* (pp. 433-444). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8\\_37](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_37)
- Kaput, J. (1991). Notations and Representations as Mediators of Construct Live Processes. En E. V. Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Kluwer A. P.
- Kaiser, G. (2006). The mathematical beliefs of teachers about applications and modelling - results of an empirical study. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (pp. 393-400). Praga.
- Kilpatrick, J. (1980). What is a problem? *Problem Solving*, 4(2), 1-5.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Ediciones Paidós Ibérica
- Kuntze, S., Siller, H.-S. y Vogl, C. (2013). Teachers' self-perceptions of their pedagogical content knowledge related to modelling - an empirical study with Austrian teachers. En G. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 317-326). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5\\_26](https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_26)
- Leavy, A. y Hourigan, M. (2021). Data Modelling and Informal Inferential Reasoning: Instances of Early Mathematical Modelling. En J. M. Suh, M. H. Wickstrom y L. D. English (Eds.),

*Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (pp. 235-266). Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6>

- Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2022). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*. Primero online. <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3>
- Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Origins and evaluation of model-based reasoning in mathematics and science. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 59-70). Lawrence Erlbaum Association.
- Leiß, D. (2007). *Hilf mir, es selbst zu tun. Lehrerinterventionen beim mathematischen Modellieren*. Franzbecker.
- Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. y Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Lawrence Erlbaum Association.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 203-204). Lawrence Erlbaum Association.
- Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1-2), 245-278. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1267>
- Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 96-112. <https://doi.org/10.1007/BF02655884>
- Lingefjärd, T. y Meier, S. (2010). Teachers as Managers of the Modelling Process. *Mathematics Education Research Journal*, 22(2), 92-107. <https://doi.org/10.1007/BF03217568>
- López, R., Molina, M. y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA*, 11(2), 75-96. <https://doi.org/10.30827/pna.v11i2.6075>
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Maaß, K. (2007a). Modelling in class: What do we want the students to learn? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics* (pp. 65-78). Horwood Publishing.
- Maaß, K. (2007b). Modelling tasks for low achieving students - First results of an empirical study. En D. Pitta-Pantazi y C. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)* (pp. 2120-2129). University of Cyprus.

- Maaß, K. y Gurlitt, J. (2010). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 6)* (pp. 2056-2065). INRP.
- Maaß, K. y Gurlitt, J. (2011). LEMA - Professional Development of Teachers in Relation to Mathematical Modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 629-640). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_60](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_60)
- Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. En D. B. McLeod y V. M. Adams (Eds.) *Affect and mathematical problem solving. A new perspective* (pp. 3-19). Springer.
- Masanja, V. (2002). Mathematics and other disciplines: The impact of modern mathematics in other disciplines. En I. Vaklis y J. Willey (Eds.), *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)* (pp. 5-13). <https://eric.ed.gov/?id=ED472050>
- Mason, J. (2016). When is a problem...? “When” is actually the problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 263-285). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_16)
- Mayer, R. E. y Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. En A. Alexander y P. H. Winne (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 287-303). Routledge.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in the mathematics education (Ed.). En D. A. Grows (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). MacMillan.
- Michelsen, C. (2006). Functions: a modelling tool in mathematics and science. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 269-280. <https://doi.org/10.1007/BF02652810>
- Ministerio de Educación Pública. (MEP). (2012). *Programas de estudio matemáticas: I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. Autor. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>
- Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Bases curriculares Educación Básica*. Autor. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2021). A tool for the analysis and characterization of school mathematical models. *Mathematics*, 9(13), 1569. <https://doi.org/10.3390/math9131569>

- Morgan, C. y Kynigos, C. (2014). Digital artefacts as representations: Forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 357-379. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9523-1>
- Moreno, A., Marín, M. y Ramírez-Uclés, R. (2021). Errores de profesores de matemáticas en formación inicial al resolver una tarea de modelización. *PNA*, 15(2), 109-136. <https://doi.org/10.30827/pna.v15i2.20746>
- Morse, J. M. (2003). Principles of mixed method and multimethod research design. En A. Tashakkori y C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social & behavioral research* (1a ed., pp. 189-208). SAGE
- Mousoulides, N., Pittalis, M. y Christou, C. (2006). Improving mathematical knowledge through modeling in elementary schools. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (Vol. 4, pp. 201-208). Atelier Guimaec.
- Movshovitz-Hadar, N., Inbar, S. y Zaslavky, O. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*. National Council of Teachers of Mathematics, 18(1), 3-14. <http://doi.org/10.2307/749532>
- Muñoz, L.M. y Patiño, W. D. (2022). Una casa para la mascota: Acercamiento al proceso de modelación en el aula. En E. Serna (Ed.), *Situaciones de modelación matemática para el aula. Aportes para diferentes niveles formativos* (pp. 28-38). Editorial Instituto Antioqueño de Investigación.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.
- Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P.L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICM Study* (pp. 3-32). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1\\_1](https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_1)
- Orey, D.C. y Rosa, M. (2018). Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 50, 173-185. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0930-8>
- Orozco-Rodríguez, C. y Vargas-Alejo, V. (2021). Ciclos de entendimiento de conceitos Associados ao desenho de experimentos exibidos ao realizar uma APM. *Bolema*, 35(70), 1138-1159. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a27>
- Paolucci, C. y Wessels, H. (2017). An examination of preservice teachers' capacity to create mathematical modelling problems for children. *Journal of Teacher Education*, 68(3) 330-344. <https://doi.org/10.1177/0022487117697636>
- Piñeiro, J. L. (2019). *Conocimiento profesional de maestros en formación inicial sobre resolución de problemas en matemáticas*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada]

- España]. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/57450>
- Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA*, 13(2), 104-129. <https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7876>
- Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2021). Conocimiento sobre la resolución de problemas de matemáticas manifestado por estudiantes para profesor. *Bolema*, 35(71), 1416-1437. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a09>
- Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2022). La investigación sobre el profesor de primaria y la enseñanza de la resolución de problemas. En L. Medina, C. Pérez y C. Suárez (Eds.), *Experiencias en contenidos curriculares docentes* (pp. 343-356). Tirant lo Blanch.
- Plymouth, J. B. (2002). Developing mathematical modelling skills: The role of CAS. *Revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 212-220. <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm025a5.pdf>
- Pollak, H. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2, 393-404. <https://doi.org/10.1007/BF00303471>
- Pólya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas* (2a ed.). Trillas.
- Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (Vol. 1, pp. 195-210). Portugal.
- Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.
- Porras, K. (2013). *Modelación matemática: Recurso de mediación pedagógica para el aprendizaje geométrico en el tema de semejanza, en octavo año de secundaria*. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Nacional de Costa Rica]. Repositorio Institucional de la Universidad Nacional de Costa Rica. <https://agd.una.ac.cr/share/s/28dJC03qTsmJvO-DcCZG-Q>
- Porras, K. y Arroyo, J. (2019). Uso de la tecnología en actividades de modelización matemática. *Acta del congreso del 10th CIEMAC* (pp. 84-102). [https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/11\\_memoria\\_0.pdf](https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/11_memoria_0.pdf)
- Porras, K. y Castro-Rodríguez, E. (2021). Errores manifestados por estudiantes de secundaria al realizar tareas de modelización matemática. *Revista Acta Scientiae*, 23(2), 29-57. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6193>

- Porras, K. y Fonseca, J. (2015). Aplicación de actividades de modelización matemática en la educación secundaria costarricense. *Uniciencia*, 29(1), 42-57. <https://doi.org/10.15359/ru.29-1.3>
- Rabionet, S. E. (2011). How i learned to design and conduct semi-structured interviews: An ongoing and continuous journey. *The Qualitative Report*, 16 (2), 563-566. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2011.1070>
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.
- Rellensmann, J., Schukajlow, S. y Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educ Stud Math*, 95, 53-78. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1>
- Rey, M. (2016). *Propuesta didáctica para la formación del profesorado: el caso de la derivada como herramienta de modelización matemática*. [Tesis de Maestría, Instituto Politécnico Nacional de México] <https://acortar.link/xNVkXC>
- Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.). *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Una empresa docente.
- Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 179-193). Editorial Universidad de Granada.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14. <https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172>
- Rodríguez, S. (2015). *Traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal: Un estudio con alumnado que inicia su formación algebraica en secundaria*. [Tesis de Doctoral, Universidad de Granada-España]. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/41014>
- Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa* (2a ed.). Ediciones ALJIBE.
- Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19 (1), 99-124. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1914>
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Granada-España]. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/35199>

- Roorda, G., Vos, P., y Goedhart, M. J. (2015). An actor-oriented transfer perspective on high school students' development of the use of procedures to solve problems on rate of change. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(4), 863-889.
- Rosa, M. y Orey, D. C. (2010). Alho e sal: Etnomatemática com modelagem! *Perspectivas da Educação Matemática*, 3(5), 149-162. <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/2778>
- Rosa, M. y Orey, D. C. (2018). Un enfoque etnomatemático de la modelación a través de la Etnomodelación. *Anales*, 1(376), 19-34. <https://doi.org/10.29166/anales.v1i376.1761>
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge. The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the knowledge quartet*. SAGE. <https://dx.doi.org/10.4135/9781446279571>
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74. <https://doi.org/10.30827/pna.v2i2.6201>
- Şahin, N. y Eraslan, A. (2016). İlkokul Öğrencilerinin Modelleme Süreçleri: Suç Problemi. *Eğitim ve Bilim*. 41(183), 47-67.
- Sala, G. (2016). *Competència d'indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Barcelona-España]. Repositorio Digital de la Universidad de Barcelona. <https://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/100800>
- Sala, G., Barquero, B. y Font, V. (2018). Modelización e indagación en la propuesta de un REI codisciplinar de matemáticas e historia. *Preactas del 6º Congreso de la TAD* (pp. 311-325). Université Grenoble Alpes.
- Sandín, M. P. (2003). El estudio de casos. En J. M. Cejudo (Ed.), *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones* (pp. 174-176). McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.
- Schaap, S., Vos, P. y Goedhart, M. (2011). Students overcoming blockages while building a mathematical model: Exploring a framework. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 137-146). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_15](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_15)
- Schmidt, B. (2011). Modelling in the classroom: Obstacles from the teacher's perspective. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning*

of mathematical modelling: ICTMA 14 (pp. 641-651). Springer.  
[https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_61](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_61)

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (2012). Problematizing the didactic triangle. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 44(5), 587-599. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0395-0>

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (1a ed., Vol. 2, pp. 321-354). Sense.

Schukajlow, S. y Achmetli, K. (2017). Multiple solutions for real-world problems, and students' enjoyment and boredom. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the 10th European Congress of Mathematics Education (CERME 10)* (pp. 1178-1185). DCU Institute of Education and ERME.

Sevinc, S. (2022). Knowledge-in-action for crafting mathematics problems in realistic contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Publicación en línea. <https://doi.org/10.1007/s10857-022-09541-8>

Sevinc, S. y Galindo, E. (2022). Noticing Student Mathematical Thinking: Self-Contemplation of a Pre-Service Teacher. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 10(2), 154-169. <https://doi.org/10.30935/scimath/11489>

Sevinc, S. y Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 50, 301-314. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9>

Sevinc, S. y Lesh, R. (2022). Preservice mathematics teachers' conceptions of mathematically rich and contextually realistic problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25 (6), 667-695. <https://doi.org/10.1007/s10857-021-09512-5>

Shahbari, J. A. (2018). Mathematics teachers' conceptions about modelling activities and its reflection on their beliefs about mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(5), 721-742, <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1404650>

Shahbari, J. A. y Tabach. M. (2016). Developing modelling lenses among practicing teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(5), 717-732. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1106015>

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.2307/1175860>

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28. <https://flm-journal.org/Articles/2A5D152778141F58C1966ED8673C15.pdf>
- Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271-292. <https://doi.org/10.1023/A:1011976904850>
- Smith, S. P. (2003). Representation in school mathematics: Children's representations of problems. En J. Kilpatrick (Ed.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 263-274). NCTM.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Ed.). *Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 15-38). Horsori.
- Socas, M. (1998). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Ed.), *Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 15-38). Horsori.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). SEIEM. [http://funes.uniandes.edu.co/1247/1/Socas2008Dificultades\\_SEIEM\\_19.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1247/1/Socas2008Dificultades_SEIEM_19.pdf)
- Socas, M., Ruano, M. R. y Hernández, J. (2016). Análisis Didáctico del proceso matemático de Modelización en alumnos de Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 21-41. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.146>
- Son, H. y Lew. H. (2006). Discovering a rule and its mathematical justification in modeling activities using spreadsheet. En J. Novothá, H. Moraová, M. Krátká, M. y N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (pp. 137-144). Praga.
- English, L. D. (2002). Development of 10-year-olds' mathematical modelling. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (pp. 329-336). University of East Anglia.
- Sriraman, B., Kaiser, G. y Blomhøj, M. (2006). Modelling perspectives from around the world. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 1-311.
- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Investigacion-con-estudios-de-caso.pdf>

- Stender, P. (2018). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 50 (1-2), 315-326. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0901-5>
- Stillman, G. y Galbraith, P. (2011). Evolution of applications and modelling in a senior secondary curriculum. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14* (pp. 689-700). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_66](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_66)
- Tan, L. S. y Ang, K. C. (2016). A school-based professional development programme for teachers of mathematical modelling in Singapore. *J Math Teacher Educ*, 19, 399-432. <https://doi.org/10.1007/s10857-015-9305-z>
- Tjoe, H., y de la Torre, J. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 1-7.
- Turner, E. E., Roth, A., Aguirre, J. M., Foote, M. Q., Chappelle, C., Bennett, A., Granillo, M. y Ponnuru, N. (2021). Upcycling plastic bags to make jump ropes: Elementary students leverage experiences and knowledge as they engage in a relevant, community-oriented mathematical modeling task. En J. M. Suh, M. H. Wickstrom y L. D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners* (pp. 235-266). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6>
- Turner, F. y Rowland, T. (2011). The Knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. En K. Ruthven y T. Rowland (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (Vol. 50, pp. 195-212). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8\\_12](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_12)
- Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K., y Verschaffel, L. (2008). Pupils' reasoning on proportionality: solving versus classifying missing-value word problems. En J. Novothá, H. Moraová, M. Krátká, M. y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of 32nd PME and 30th PME-NA* (Vol. 4, pp. 305-312). PME-NA.
- Vargas, V., Reyes, A. y Cristóbal, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática*, 28(2), 59-83. <https://doi.org/10.24844/em2802.03>
- Vargas, V., Escalante, C. C. y Carmona, G. (2018). Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación Matemática*, 30(1), 213-236. <https://doi.org/10.24844/EM3001.08>
- Verschaffel, L. (2002). Taking the modelling perspective seriously at the elementary school level: Promises and pitfalls. En A. Cockburn y E. Nardi (Eds), *Proceedings of the 26th International PME Conference* (pp. 64-80). University of East Anglia.

- Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 8(16), 133-148. <http://dx.doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe>
- Villa-Ochoa, J. A., Sánchez-Cardona, J. y Rendón-Mesa, P.A. (2021). Formative Assessment of pre-service teachers' knowledge on mathematical modeling. *Mathematics*, 9, 851. <https://doi.org/10.3390/math9080851>
- Villarreal, M., Esteley, C. B. y Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modelling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 50 (1), 327-341. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0925-5>
- Vorhölter, K., Krüger, A. y Wendt, L. (2019). Metacognition in Mathematical Modeling - An Overview. En S. A. Chamberlin y B. Sriraman (eds.), *Affect in Mathematical Modeling, Advances in Mathematics Education* (pp. 29-51). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_3)
- Wess, R., Klock, H., Siller, H-S. y Greefrath, G. (2021). Measuring professional competence for the teaching of mathematical modelling. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west. international perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 249-260). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_21)
- Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M. y Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, 11(2), 555-584. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1317>
- Yu, S. Y. y Chang, C. K. (2011). What did Taiwan mathematics teachers think of model-eliciting activities and modelling teaching? En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA 14* (pp. 147-156). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2\\_16](https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_16)
- Zech, F. (1998). *Grundkurs mathematikdidaktik. Theoretische und praktische anleitungen für das lehren und lernen von mathematic*. Beltz.

# ANEXOS

## 1. TAREA DE MODELIZACIÓN 1

### Cocinando con mi Mamá<sup>2</sup>

A la mamá de Carlos le encanta cocinar para su familia. Un día decidió hacer pan casero. La receta específica que necesita 3 tazas de harina y una taza de leche, además de otros ingredientes para preparar 20 panecillos. Como su familia se deleita mucho con el pan casero, ella decide usar toda la harina con la que cuenta y cuando la mide descubre que tiene 16,5 tazas de harina. Ahora, el problema para ella es determinar la cantidad de leche y el resto de los ingredientes de manera exacta para cumplir con la receta. Como sabe que a Carlos le gusta realizar cálculos matemáticos, le pide ayuda para determinar las cantidades exactas que necesita.



Así, ¿cuántas tazas de leche debería usar? Además, ¿cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la cantidad de ingredientes que usó? Redacte un informe donde se describe el método de solución utilizado y sus conclusiones para cada una de las preguntas anteriores. Además, contesta la siguiente pregunta, ¿en qué otras situaciones similares se podría aplicar el razonamiento a este problema?

## 2. TAREA DE MODELIZACIÓN 2

### Calculando mi mesada

¡Hola! Soy Mario, necesito tu ayuda con un problema acerca de mi mesada. Cuando mi hermana Mariela tenía 13 años, recibía una mesada de ₡2000 pero eso fue hace diez años. Ahora yo tengo 13 años. Mis padres me dan ₡2000 a la semana también. Creo que deberían de aumentar mi mesada teniendo en cuenta que las cosas cuestan más en la actualidad. En Costa Rica con ₡2000 ya no se puede comprar lo mismo que compraba mi hermana hace diez años.

Para probar mi hipótesis he recogido los precios de hace 10 años de algunos artículos. De igual forma, recolecté los precios de los artículos similares en la actualidad.

¡Esto es lo que necesito de ti!

Usa la información de los precios actuales y de hace 10 años para determinar ¿cuál debe ser el monto actual de mi mesada?. Justifica tu respuesta con razones lógicas pues mis padres no aceptarán argumentos emocionales o ilógicos.

Además explica el método de solución del problema para que tus compañeros en situaciones similares lo puedan utilizar para determinar cuáles deben ser sus entradas en la actualidad.



Figura 1. Precios de Salvajes hace 10 años



Figura 2. Precios de Salvajes en el 2012



Figura 3. Precio de PlayStation hace 10 años



Figura 4. Precio de PlayStation actualmente



Figura 5. Combo Papa Johns hace 10 años



Figura 6. Combo Papa Johns en el 2012

<sup>2</sup> Ambas tareas se encuentran en: Porras, K. (2013). *Modelación matemática: Recurso de mediación pedagógica para el aprendizaje geométrico en el tema de semejanza, en octavo año de secundaria*. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Nacional de Costa Rica]. <https://agd.una.ac.cr/share/s/28dJC03qTsmJvO-DcCZG-Q>

### 3. GUÍA DE ENTREVISTA 1



Universidad de Granada  
Departamento de Didáctica de la Matemática

#### GUÍA PARA ENTREVISTA1 DE MAESTROS

##### Introducción

Saludos **Nombre del participante** esta entrevista tiene como propósito principal recolectar información relevante acerca del **conocimiento sobre la resolución de problemas de modelización matemática que poseen los maestros de primaria en ejercicio**. Este instrumento ha sido diseñado en el marco de una investigación doctoral de la Universidad de Granada en España.

Para cumplir con la ética de una investigación, nos comprometemos a que toda la información será usada sólo para fines investigativos. Asimismo, todos los datos serán tratados con total confidencialidad, **GARANTIZANDO EL ANONIMATO** de los participantes. Por ello, necesitamos su autorización para grabar toda la información que nos suministre.

La entrevista está conformada por dos partes. En la primera parte, se le realizará una serie de preguntas de información general y en la segunda parte, se le realizarán preguntas específicas del tema de investigación.

Finalmente, expresamos nuestro agradecimiento por su tiempo, participación y sinceridad en sus respuestas. Si tiene alguna pregunta o comentario, por favor escribir al correo [krenpoli@gmail.com](mailto:krenpoli@gmail.com) o al número telefónico 8848-6054.

##### PARTE I. Información General

1. Nombre: \_\_\_\_\_
2. Correo electrónico: \_\_\_\_\_
3. Sexo: Masculino: \_\_\_\_\_ Femenino: \_\_\_\_\_
4. Edad (en años cumplidos): \_\_\_\_\_
5. Grupo profesional (según el Servicio Civil):  
( ) ASP. ( ) PT1 ( ) PT2 ( ) PT3 ( ) PT4 ( ) PT5 ( ) PT6
6. Marque con una X el intervalo de años de experiencia que posee como maestro:  
a. 5 años o menos \_\_\_\_\_ b. entre 5 y 10 años \_\_\_\_\_ c. 10 años o más \_\_\_\_\_
7. Marque con una X el nivel o niveles en el/los que imparte lecciones actualmente:  
a. Primer grado \_\_\_\_\_ b. Segundo grado \_\_\_\_\_ c. Tercer grado \_\_\_\_\_  
d. Cuarto grado \_\_\_\_\_ e. Quinto grado \_\_\_\_\_ f. Sexto grado \_\_\_\_\_

8. ¿Tiene alguna formación adicional? \_\_\_\_\_
9. ¿Ha recibido alguna capacitación recientemente sobre modelización matemática, resolución de problemas, contextualización activa o del programa de estudio de matemática?
- (    ) Sí            (    ) No

## **PARTE 2. Información del estudio de investigación**

**A continuación, se le presentan una serie de preguntas que deberá contestar tomando en cuenta su experiencia como maestro:**

### **Categoría 1. Noción del problema de modelización**

#### **(a) Subcategoría: Nociones básicas de modelización**

1. ¿Qué es para usted un modelo?
2. ¿Qué entiendes por modelo matemático?
3. ¿Qué diferencias cree que existen entre un modelo y un modelo matemático?
4. ¿Qué es para usted la modelización matemática?
5. ¿Cuál considera usted que es el objetivo principal de la modelización matemática?

#### **(b) Subcategoría: Problema de modelización**

6. ¿Qué características tiene un problema de modelización? Justifique su respuesta.
  7. ¿Qué aspectos diferencian un problema de modelización con respecto a cualquier problema?
  8. ¿Cualquier problema con contexto real es un problema de modelización?
  9. ¿Qué dificultad para el resolutor debería tener un problema de modelización?
- Según la respuesta profundizar más en ella.
10. ¿Qué rol juega el contexto real en un problema de modelización? Justifique su respuesta.

#### **(c) Subcategoría: Consideración del resolutor**

11. ¿Qué papel juega el resolutor en que una actividad / tarea matemática se convierta en un problema de modelización?

#### **(d) Subcategoría: Tipos de tareas existentes de modelización**

12. ¿Conoce distintos tipos de problemas<sup>3</sup> de modelización matemática? ¿Cuáles son? ¿En qué consisten? Justifique su respuesta.

**Para contestar la pregunta 12 se brinda al participante tres tarjetas, cada una con un tipo de problema de modelización (Apéndice 1).**

13. ¿Qué opinión tiene con respecto a los problemas mostrados en las fichas anteriores?

### **Categoría 2. Resolución de un problema de modelización matemática**

#### **(a) Subcategoría: Ciclos de modelización y sus características**

14. Con respecto al ciclo de modelización, ¿conoce las etapas que se utilizan al resolver un problema de modelización?

---

<sup>3</sup> Se refiere a los problemas presentes en los distintos tipos de actividades o tareas de modelización matemática propuestas por Lesh y Doerr (2003) es decir, las MEAs, MXAs y MAAs.

**Respuesta negativa:** No se amplía la respuesta, se continúa con la siguiente pregunta.

**Respuesta positiva:** Ampliar la respuesta y realizar la pregunta adicional ¿Qué conoces sobre las etapas del proceso de modelización?

**Para contestar la pregunta 14, se brinda cuatro tarjetas cada una con una etapa del proceso de modelización para que el participante arme el ciclo (Apéndice 2).**

15. ¿En qué orden seguirías las etapas de las tarjetas al resolver un problema de modelización? Explique su respuesta.

**(b) Subcategoría: Estrategias**

16. ¿Qué estrategias<sup>4</sup> se utilizan cuando se resuelve un problema de modelización?

**Para contestar de la pregunta 16 a la 18, se brinda al participante tres tarjetas cada una con una estrategia para resolver un problema de modelización (Apéndice 3).**

17. ¿Podrías explicar la estrategia que se observa en las respuestas de la ficha?

18. ¿Qué características tiene cada una de las estrategias usadas?

19. ¿Qué diferencias observas entre las estrategias usadas en las respuestas?

**(c) Subcategoría: Metacognición**

20. ¿Qué procesos metacognitivos<sup>5</sup> pueden intervenir al resolver un problema de modelización? Amplie su respuesta.

**(d) Subcategoría: Factores no cognitivos**

21. ¿Qué rol juega las emociones, actitudes y creencias al resolver un problema de modelización? Explique su respuesta.

**Categoría 3: Disposición al resolver un problema de modelización matemática**

22. ¿Se debe estar motivado para resolver un problema de modelización? Justifique su respuesta.

23. ¿Se debe tener disposición para resolver un problema de modelización? Explique su respuesta.

24. ¿Qué rol juega la motivación y la disposición en la resolución de problemas de modelización? Amplie su respuesta.

---

<sup>4</sup> Según Schoenfeld (1985) citado por Piñeiro et al. (2019) se entiende como estrategias a dos tipos de toma de decisiones, las estrategias que incluyen la definición de objetivos y la decisión de adoptar un curso de acción y las tácticas que están orientadas a implementar decisiones estratégicas.

<sup>5</sup> Un proceso metacognitivo es donde el resolutor se autorregula, monitorea y controla los heurísticos y los conocimientos, permitiendo que pueda tomar decisiones acertadas sobre lo que se hace.

## Apéndice 1

### Tipos de problemas de modelización

Considere la información correspondiente a una secuencia de problemas matemática presentes en distintos tipos de actividades de modelización:

#### 1. Problema en actividad provocadora de modelos (MEAs):

- El objetivo es provocar la construcción del modelo matemático.
- Se trabaja en momentos de la lección como introducción, presentación y discusión, reflexión y conclusión o cierre.

#### Ejemplo

La mamá de Carlos le encanta cocinar para su familia. Un día decidió hacer un pan casero, la receta específica que necesita 3 tazas de harina y una taza de leche, además de otros ingredientes, para preparar 20 panecillos. Como su familia se deleita mucho del pan casero, ella decide usar toda la harina con que cuenta y cuando la mide, descubre que tiene 16,5 tazas de harina. Ahora, el problema para ella es determinar la cantidad de leche y del resto de los ingredientes, de manera exacta, para cumplir con la receta. Como sabe que de Carlos le gusta realizar cálculos matemáticos, le pide ayuda para determinar las cantidades exactas que necesita.



Así ¿Cuántas tazas de leche le dije que debería usar? Además ¿Cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la cantidad de ingredientes que usó?

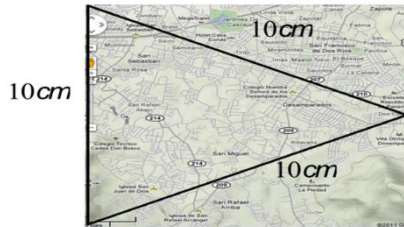
Redacte un informe donde se describa el método de solución utilizado y sus conclusiones para cada una de las preguntas anteriores. Y conteste la siguiente pregunta ¿En cuáles otras situaciones similares se podría aplicar el razonamiento de este problema?

#### 2. Problema en actividad de exploración (MXAs):

- Tiene como objetivo profundizar la estructura del modelo matemático obtenido y su comprensión.
- Se usan distintas formas de representación.
- Utiliza herramientas tales como software, gráficos, diagramas, animaciones, entre otros.

#### Ejemplo

Para el tema de formación de relieve de Costa Rica, la profesora de Estudios Sociales asignó a cada uno de sus estudiantes un sector del país para exponer. A Andy, estudiante octavo año le correspondió el sector de Desamparados, el cual se muestra a continuación:



Andy debe agrandar este sector 5 veces más que el original para mostrárselo a sus compañeros en la exposición. ¿Qué proceso matemático debería realizar Andy para cumplir con la tarea propuesta por su profesora de Estudios Sociales?

Además ¿Cuánto medirá cada lado del nuevo mapa? Y si lo amplifica 10 veces ¿Cuál será la medida del nuevo lado? Y si lo amplifica 100 veces ¿Cuánto medirá el nuevo lado? ¿Qué características poseen todas las figuras involucradas en los procesos anteriores?

Por otra parte, Andy debe hacer otro ejemplar del mapa para pegarlo en su trabajo escrito que sea la mitad del original. ¿Cuánto medirá cada lado de este nuevo mapa? ¿Cuál es su razón de semejanza?

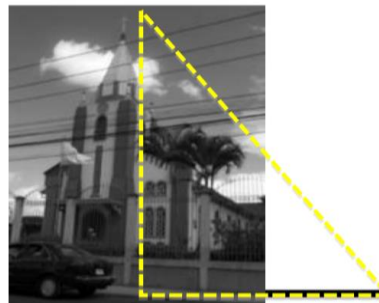
Asimismo, redacte un informe donde se describa el método de solución utilizado y sus conclusiones para cada una de las preguntas anteriores. Y conteste la siguiente pregunta ¿En cuáles otras situaciones similares se podría aplicar el razonamiento de este problema?

#### 3. Problema en actividad de adaptación (MAAs):

- Involucra a los estudiantes en la aplicación de su modelo matemático a nuevas situaciones.
- Se usa la discusión de estructuras conceptuales similares
- Se obtienen nuevas adaptaciones del modelo matemático.

#### Ejemplo

A las 10 de la mañana, la iglesia del barrio proyecta una sombra de 14 m. A la misma hora, un arbusto cercano, de 1,75 m de altura, proyecta una sombra de 2 m. ¿Cuál es la altura de la iglesia?



## Apéndice 2

### Ciclo de etapas del proceso de modelización

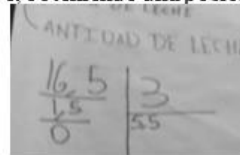
#### Descripción

- El estudiante identifica, selecciona y ordena la información relevante del problema.



#### Manipulación

- Realiza un procedimiento matemático como una operación, una fórmula, un gráfico, una tabla o un dibujo, entre otros.
- Lo resuelve, obteniendo una posible solución.



#### Validación

- Se realiza una evaluación o juicio de la utilidad de las soluciones con respecto a las condiciones de problema.



#### Predicción

- Se realizan interpretaciones de los resultados de la etapa anterior, tomado en cuenta para esto los datos que proporciona la situación problema.



## Apéndice 3

### Ejemplos de estrategias

Considere el siguiente problema:

La mamá de Carlos le encanta cocinar para su familia. Un día decidió hacer un pan casero, la receta específica que necesita 3 tazas de harina y una taza de leche, además de otros ingredientes, para preparar 20 panecillos. Como su familia se deleita mucho del pan casero, ella decide usar toda la harina con que cuenta y cuando la mide, descubre que tiene 16,5 tazas de harina. Ahora, el problema para ella es determinar la cantidad de leche y del resto de los ingredientes, de manera exacta, para cumplir con la receta. Como sabe que de Carlos le gusta realizar cálculos matemáticos, le pide ayuda para determinar las cantidades exactas que necesita.



Así ¿Cuántas tazas de leche le dije que debería usar? Además ¿Cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la cantidad de ingredientes que usó?

Redacte un informe donde se describa el método de solución utilizado y sus conclusiones para cada una de las preguntas anteriores. Y conteste la siguiente pregunta ¿En cuáles otras situaciones similares se podría aplicar el razonamiento de este problema?

Operación

$$16.5 \div 3 = 5.5$$

16.5

$$5 \times 20 = 100$$

leche, tazas de  
panecillos

Estrategia 1

|           |                |
|-----------|----------------|
| 1 Taza    | 20 panecillo   |
| 2 Tazas   | 40 panecillos. |
| 3 Tazas   | 60 panecillos  |
| 4 Tazas   | 80 panecillos  |
| 5 Tazas   | 100 panecillos |
| 5.5 Tazas | 110 panecillos |

Estrategia 2

|                                                                |       |       |       |       |       |
|----------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| leche                                                          | leche | leche | leche | leche | leche |
| 000                                                            | 000   | 000   | 000   | 000   | 00    |
| HARINA                                                         |       |       |       |       |       |
| Se necesitan 5 tazas y media de leche por 16.5 tazas de harina |       |       |       |       |       |

Estrategia 3

## 4. GUÍA DE ENTREVISTA 2



Universidad de Granada  
Departamento de Didáctica de la Matemática

### GUÍA DE ENTREVISTA 2 PARA MAESTROS

**Introducción.** Se brinda al participante información sobre la investigación, manejo de la información y otros detalles, que también fueron planteados en la guía de entrevista 1. La entrevista consta de 32 preguntas agrupadas en categorías y subcategorías de acuerdo al conocimiento sobre la resolución de problemas de modelización matemática que poseen los maestros de primaria en ejercicio.

#### **Información del estudio de investigación**

**A continuación, se le presentan una serie de preguntas que deberá contestar tomando en cuenta su experiencia como maestro:**

### **Categoría 1. Conocimiento sobre el estudiante como resolutor de tareas de modelización**

#### **(a) Subcategoría: Características de resolutores de tareas de modelización**

1. ¿Qué características del resolutor debe considerar un profesor al seleccionar o diseñar un problema de modelización?

**Para contestar la pregunta 2, se brinda al participante una tarjeta con una lista de características de un estudiante competente al resolver problemas de modelización (Apéndice 4)**

2. Tomando en cuenta las características de la tarjeta ¿consideraría estas características de estudiantes en sus lecciones para enseñar la modelización? Explique su respuesta.

**Respuesta negativa:** ¿Por qué no consideraría las características del resolutor de problemas de modelización? Justifique su respuesta.

**Respuesta positiva:** ¿Cómo consideraría esas características?

#### **(b) Subcategoría: Dificultades y errores de los estudiantes en procesos de modelización**

3. Al trabajar la modelización ¿Cuáles pueden ser algunas dificultades y errores que puede tener un estudiante cuando resuelva un problema?

**Para contestar la pregunta 4 y 5, se brinda al participante una tarjeta con una lista de errores y dificultades de los estudiantes al resolver problemas de modelización (Apéndice 5).**

4. Al trabajar la modelización, ¿considera relevante conocer y comprender las limitaciones de los estudiantes para la toma de decisiones en el aula?

5. ¿Qué papel juega el conocer y comprender las limitaciones en la toma de decisiones en el aula al enseñar la modelización?

## **Categoría 2. Problemas de modelización como tarea escolar**

### **(a) Subcategoría: Selección de tareas de modelización**

6. ¿Qué aspectos son necesarios que posea un problema de modelización en su enunciado?

7. ¿Cuáles criterios de selección usaría para seleccionar un problema de modelización? ¿De dónde los obtienen? ¿Por qué cree que son buenos criterios? Explique sus respuestas.

**Para contestar las preguntas 8 y 9, se brinda al participante una tarjeta con una lista de características para construir o seleccionar un problema de modelización matemática (Apéndice 6).**

8. ¿Cuál es su opinión al respecto a las características que aparecen en la tarjeta? Justifique su respuesta.

9. ¿Considera que estas características son necesarias al diseñar y/o seleccionar un problema de modelización? Explique su respuesta.

**Para contestar la pregunta 10, se brinda al participante una tarjeta con el problema “Fiesta de la clase” de Borromeo Ferri (2008) (Apéndice 7).**

10. ¿Considera que el problema “La fiesta de la clase” se puede utilizar en el aula de matemática en la que se quiera trabajar la modelización matemática? Justifique su respuesta.

**Respuesta negativa:** ¿Por qué? ¿Qué modificaciones les realizaría?

**Respuesta positiva:** ¿Qué cambios realizaría para poder implementarlo en su aula? Justifique su respuesta.

### **(b) Subcategoría: Modelos teóricos de modelización matemática**

11. ¿Conoce algún modelo teórico de modelización matemática? ¿Si es así en qué consiste? Justifique su respuesta.

**Para contestar las preguntas 12 y 13, se brinda al participante cuatro tarjetas, cada una presenta una de las etapas del ciclo de modelización matemática de Lesh y Doerr (2003). El participante debe organizar las etapas según el orden correcto del ciclo. Posteriormente se brinda una pequeña explicación de qué consiste las etapas de cada ciclo de modelización (Apéndice 8).**

12. ¿Es necesario y relevante el realizar cada una de las etapas presentadas en el proceso de modelización? ¿Porqué? Amplíe su respuesta.

13. Con respecto a las etapas expuestas en las tarjetas ¿Las utilizaría para trabajar la modelización? ¿Por qué? Explique su respuesta.

**(c) Subcategoría: Invención de problemas de la modelización matemática**

14. ¿Has inventado, creado o modificado una actividad de modelización?

**Respuesta negativa:** ¿Por qué?

**Respuesta positiva:** Describe cómo has hecho este proceso y qué has utilizado.

15. Al enseñar la modelización matemática ¿ha pedido a los estudiantes que inventen, creen o adapten problemas como parte de sus actividades de enseñanza? Explique su respuesta.

**Respuesta negativa:** ¿Por qué?

**Respuesta positiva:** Describe cómo has hecho este proceso y qué has utilizado.

### **Categoría3. Factores no cognitivos**

**Para contestar la pregunta 16, se brinda al participante una tarjeta con una lista de factores no cognitivos en la modelización (Apéndice 9).**

16. ¿Cuál es su opinión al respecto a las afirmaciones que aparecen en la tarjeta? Justifique su respuesta.

17. ¿Qué papel juegan las concepciones y las creencias del maestro en el aprendizaje de los estudiantes al resolver problemas de modelización?

18. ¿Qué papel juegan las concepciones y las creencias de los estudiantes en su aprendizaje al resolver problemas de modelización?

### **Categoría 4. Gestión de la enseñanza de la resolución de problemas de modelización**

**(a) Subcategoría: Enfoques de enseñanza de la modelización**

19. ¿Conoce algún enfoque o método para fomentar las acciones de enseñanza en una clase de modelización? Explique su respuesta.

**(b) Subcategoría: Gestión del discurso**

20. ¿Considera que el utilizar adecuadamente un problema de modelización es una labor fundamental del profesor? Explique su respuesta.

21. ¿Cómo debería el maestro distribuir el tiempo en una clase de modelización?

22. ¿Cómo se debería organizar a los estudiantes al trabajar un problema de modelización en el aula?

23. ¿Cuál debe ser el papel del maestro al trabajar un problema de modelización en el aula?

24. En una clase de modelización matemática ¿Qué acciones de participación activa debe fomentar el maestro para socializar los resultados?

25. ¿Cuál sería el rol de la comunicación y la argumentación en una clase de modelización?

26. ¿Cuáles actividades metacognitivas<sup>6</sup> debería realizar el maestro en una clase de modelización matemática?

---

<sup>6</sup> Un proceso metacognitivo es donde el resolutor se autorregula, monitorea y controla los heurísticos y los conocimientos, permitiendo que pueda tomar decisiones acertadas sobre lo que se hace.

**(c) Subcategoría: Gestión de los atascos**

27. ¿Qué ayuda(s) se le puede brindar al estudiante para que avance en la resolución de un problema de modelización?

28. ¿Cuándo y cómo el maestro debe intervenir para ayudar al estudiante cuando este atascado en la resolución de un problema de modelización?

**(d) Subcategoría: Gestión de la evaluación**

Aclarar que se refiere en cuanto a evaluación académica.

29. ¿Cuáles tipos de instrumentos de evaluación formativa puede utilizar el maestro para medir el conocimiento de sus estudiantes al trabajar la modelización matemática en el aula? Amplíe su respuesta.

30. ¿Cuáles tipos de instrumentos de evaluación sumativa puede utilizar el maestro para medir el conocimiento de modelización en sus estudiantes? Amplíe su respuesta.

31. ¿Qué criterios utilizaría para evaluar las competencias de modelización de un estudiante?

**(d) Subcategoría: Gestión de los recursos**

Recursos se refiere a materiales (tanto manipulativos como intangibles), se excluye el tiempo.

32. ¿Qué materiales o recursos puede usar el maestro al trabajar la modelización matemática?

**Apéndice 4**

**Lista de características de un estudiante competente al resolver problemas de modelización**

**Comprende el problema real y establece un modelo basado en la realidad significa:** Es decir hace suposiciones sobre el problema y simplifica la situación, reconoce las cantidades que influyen en la situación, nombra e identifica variables clave, construye relaciones entre las variables, busca información disponible y diferencia entre información relevante e irrelevante.

**Construye un modelo matemático a partir del modelo real significa:** matematiza cantidades relevantes y sus relaciones, simplifica las cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario, elige notaciones matemáticas apropiadas y representa situaciones gráficamente.

**Resuelve cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático:** utiliza estrategias heurísticas como la división del problema en partes, estableciendo relaciones con problemas similares o análogos, reformulando el problema, viendo el problema en una forma diferente, variando las cantidades o los datos disponibles, entre otros. También utiliza el conocimiento matemático para resolver el problema.

**Interpreta resultados matemáticos en una situación real:** interpreta resultados matemáticos en el contexto extramatemático, generaliza las soluciones que se desarrollaron para una situación especial, demuestra soluciones a un problema utilizando un lenguaje matemático apropiado y / o comunica las soluciones.

**Valida la solución significa:** revisa críticamente y reflexiona sobre las soluciones encontradas; para revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelización si las soluciones no se ajustan a la situación, reflexiona sobre otras formas de resolver el problema o si las soluciones pueden ser desarrolladas de manera diferente, discute en general las limitaciones del modelo.

### **Apéndice 5**

#### **Lista de errores y dificultades de los estudiantes al resolver problemas de modelización**

1. El estudiante no comprende las partes esenciales del problema, es decir realiza una lectura superficial del problema, dejando de lado detalles relevantes o tomando en cuenta información no importante del problema.
2. Al crear y construir un modelo, es decir al realizar suposiciones erróneas los estudiantes crean modelos inapropiados para el contexto, lo que manifiesta una inconsistencia entre el mundo real y el modelo matemático.
3. Al utilizar conceptos y procedimientos matemáticos inapropiados para resolver el problema, es decir al utilizar las propiedades matemáticas incorrectamente o realizar errores de cálculo.
4. El estudiante no evalúa la razonabilidad de una solución matemática en el contexto de un problema del mundo real, es decir no realiza una validación y reflexión que permitan conectar el mundo matemático con el mundo real.

### **Apéndice 6**

#### **Lista de características para construir o seleccionar un problema de modelización**

1. El contexto del problema debe estar basado en el entorno familiar, físico, social, cultural y científico del estudiante.
2. Debe generar la necesidad de construir y modificar un modelo matemático.
3. Debe tener condiciones necesarias para que el estudiante pueda decidir sobre la utilidad y le permitan avanzar con sus primeras suposiciones.
4. Debe tener pautas claras para plasmar sus pensamientos matemáticos en forma explícita.
5. Al resolver un problema, la solución de este puede servir para motivar la resolución de otros problemas con contextos similares y que se pueden resolver de la misma manera.
6. El estudiante puede crear y formular otros caminos de solución para resolver el problema.

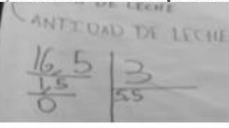
### **Apéndice 7**

#### **Problema “La fiesta de la clase”**

Pronto tu clase quiere hacer una fiesta en la escuela. Los miembros de la clase decidieron que los padres no deberían estar muy involucrados con la organización y por eso es su trabajo. En la alcancía de la clase hay unos \$50. ¿Es eso suficiente para una buena fiesta? ¿Cuánto dinero tienes que cobrar a cada persona de tu clase?

## Apéndice 8

### Ciclo de etapas del proceso de modelización

|                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Descripción</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>El estudiante identifica, selecciona y ordena la información relevante del problema.</li> </ul>                            | <p><b>Manipulación</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Realiza un procedimiento matemático como una operación, una fórmula, un gráfico, una tabla o un dibujo, entre otros.</li> <li>Lo resuelve, obteniendo una posible solución.</li> </ul>  |
| <p><b>Validación</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Se realiza una evaluación o juicio de la utilidad de las soluciones con respecto a las condiciones de problema.</li> </ul>  | <p><b>Predicción</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Se realizan interpretaciones de los resultados de la etapa anterior, tomado en cuenta para esto los datos que proporciona la situación problema.</li> </ul>                               |

## Apéndice 9

### Lista de factores no cognitivos en la modelización

1. La modelización matemática es el uso de materiales concretos y manipulativos en la enseñanza de las matemáticas.
2. Solo existe una única forma de resolver el problema de modelización.
3. Un problema de modelización se resuelve en poco tiempo, sino no se puede resolver.
4. En un problema de modelización no es necesario revisar los procesos matemáticos, ni la solución final.
5. Solo existe una única forma de resolver un problema de modelización.
6. Un problema de modelización se debe resolver en forma individual.
7. El maestro debe contestar todas las preguntas del estudiante o formular preguntas directas que lo guíen a la solución del problema de modelización.
8. No es necesario integrar los conceptos matemáticos con su aplicación en la vida cotidiana.
9. La matemática es útil en situaciones de la vida real.
10. Lo más importante al resolver un problema de modelización es el modelo matemático y el encontrar una solución de este.
11. Al enseñar la modelización puedo usar cualquier problema matemático de los libros de texto.
12. Los problemas de modelización deben ser complicados y que se usen bastantes conocimientos no matemáticos.
13. Al enseñar bajo el enfoque de modelización matemática es importante el manejo de las emociones del estudiante como la ansiedad y frustración.
14. En la enseñanza de la modelización matemática es relevante que el maestro forme actitudes en el estudiante como la tolerancia, la perseverancia, la responsabilidad, entre otros.