Manual para el Estudiante

Edición Febrero 2003

Proyecto *Edumat-Maestros*
Director: Juan D. Godino
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

RAZONAMIENTO ALGEBRAICO Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Juan D. Godino
Vicenç Font

RAZONAMIENTO ALGEBRAICO Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS

Juan D. Godino

Vicenç Font

RAZONAMIENTO ALGEBRAICO PARA
MAESTROS

Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
18071 Granada

ISBN: 84-932510-7-0
Depósito Legal: Gr-619-2003

Impresión: ReproDigital. C/ Baza, 6. La
Mediana
Polígono Juncaril. Albolote. 18220-Granada.

Distribución en Internet:
http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-
maestros/

Publicación realizada en el marco
del Proyecto de Investigación y
Desarrollo del Ministerio de Ciencia
y Tecnología, BSO2002-02452.

Índice

A: Contextualización Profesional

ANÁLISIS DE PROBLEMAS SOBRE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN PRIMARIA

Consigna:

A continuación incluimos algunos enunciados de problemas y ejercicios que han sido tomados de libros de texto de primaria. Para cada uno de ellos:

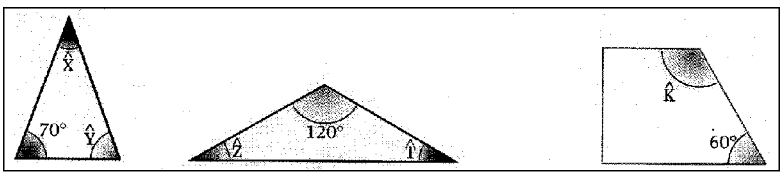
1) Resuelve los problemas propuestos.
2) Indica los conceptos y procedimientos matemáticos que se ponen en juego en la solución.
3) Identifica diferencias y semejanzas entre los distintos problemas.
4) Enuncia otros dos problemas del mismo tipo cambiando las variables de la tarea, de manera que uno te parezca más fácil de resolver y otro más difícil que el dado.
5) ¿Piensas que los enunciados son suficientemente precisos y comprensibles para los alumnos de primaria? Propón un enunciado alternativo para aquellos ejercicios que no te parezcan suficientemente claros para los alumnos.

Enunciados[1]

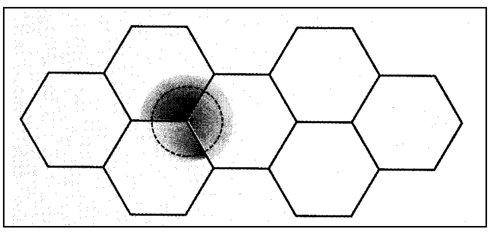
1. Una caja mágica duplica el número de monedas que metas en ella, pero después que se usa cada vez se deben pagar 4 monedas. Juan probó e introdujo sus monedas en la caja y, efectivamente se duplicaron. Pagó 4 monedas y volvió a intentarlo. De nuevo se duplicaron, pero al pagar las 4 monedas se quedó sin dinero. ¿Cuántas monedas tenía Juan al principio?

2. Dos de los ángulos de un triángulo miden A = 64º 30' y B = 37º 30'. ¿Cuál es el valor del tercer ángulo, C?

3. Calcula la medida de los ángulos que se desconocen en estos polígonos

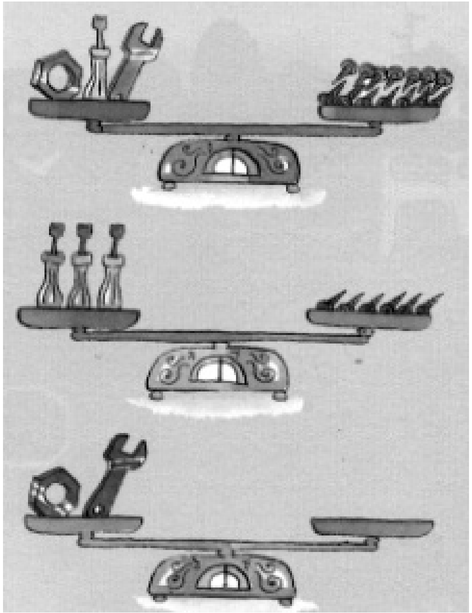
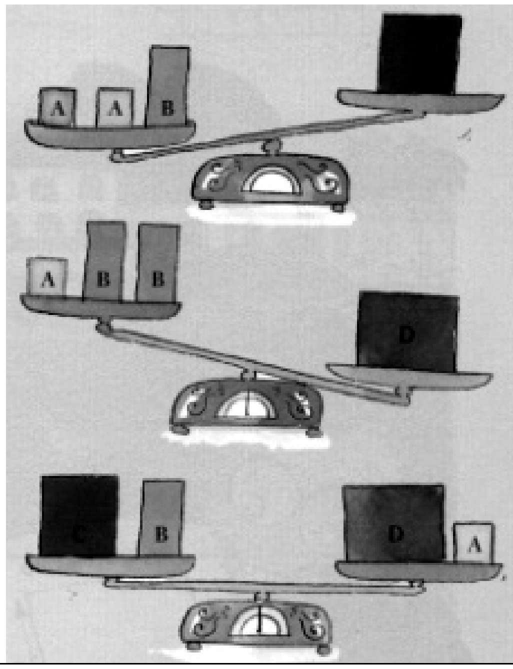


4. Observa el mosaico y calcula, sin usar el transportador, la medida del ángulo del hexágono regular.



[1] Ferrero y cols (1999). *Matemáticas 6º*. Madrid: Anaya.

5.

¿Cuántos tornillos hay que poner en la tercera balanza para que quede equilibrada	¿Hacia qué lado se inclinará la tercera balanza?
	

6. Dibuja un cuadrado y un rectángulo que tengan igual perímetro y distinta área.

7. Dibuja un triángulo rectángulo que tenga 4 cm de base y 2'5 cm de altura. Mide y calcula su área y su perímetro.

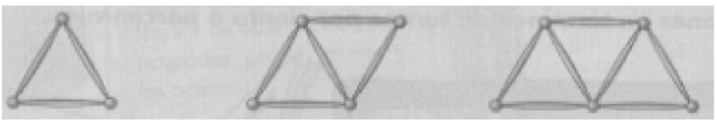
8. La rueda de la bici de Maite mide 60 cm de diámetro. ¿Qué longitud avanza la bici por cada vuelta que da la rueda?

9. Copia y completa la tabla en tu cuaderno

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cuadrado	1	4	9									
Cubo	1	8										

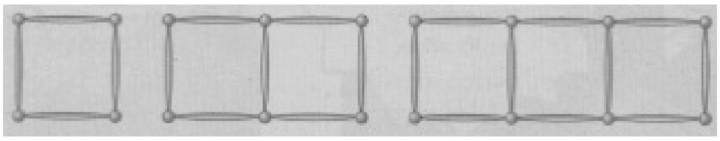
10. Copia las tablas y complétalas en cada caso

a)



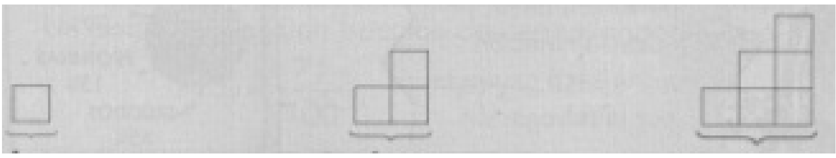
Nº de triángulos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de palillos										
Nº de bolas										

b)



Nº de cuadrados	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de palillos										
Nº de bolas										

c)



1 columna 2 columnas 3 columnas

Nº de columnas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cuadrados										

11. Realiza estas sumas y compara los resultados:

24.386 + 6.035 6.0345 + 24.386

24.386 + 6.035 + 715 6.035 + 715 + 24386

12. Calcula el término que falta.

... - 4.624 = 7.500 2.700 - ... = 925 .... - 4.686 = 5.000

6.000 - ... = 5.690 ... - 175 = 8.060 3.815 - ... = 2.018

1.500 - 925 = ... 5.000 - 4.200 = 10.000 - 5.275 = ...

B: Conocimientos Matemáticos

1. ¿ÁLGEBRA EN EDUCACIÓN PRIMARIA?

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) se propone el *Álgebra* como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad, con la particularidad de que este bloque se debe desarrollar, no sólo en los niveles de enseñanza secundaria, sino incluso desde Preescolar.

Ciertamente no se trata de impartir un "curso de álgebra" a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el bachillerato (grados K-12). En el "álgebra escolar" se incluye el estudio de los patrones (numéricos, geométricos y de cualquier otro tipo), las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

El concepto de función es una de las principales ideas de las matemáticas. Por ello se considera que es necesario, y posible, iniciar su utilización y estudio en el tercer ciclo de primaria, formando parte de la nueva visión del razonamiento algebraico, en lugar de retrasarla a los niveles de secundaria. Pero el estudio de las funciones deberá centrarse en indagar relaciones en contextos significativos para los alumnos y usando diversos métodos de representación para analizar dichas relaciones. Se debe descartar el énfasis en notaciones, terminologías como rango y dominio, y graficaciones sin ningún propósito.

El razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central.

En consecuencia, los maestros en formación tienen que construir esta visión del papel central de las ideas algebraicas en la actividad matemática, y sobre cómo desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles. Esto nos ha llevado a tenerlo en cuenta en la formación de los maestros y a reflexionar sobre las razones de esta elección, así como sobre la orientación y justificación de dicho *Estándar* del NCTM.

Como hemos visto en los problemas incluidos en la sección A de Contextualización Profesional, en los libros de texto usados en primaria se proponen actividades que podemos calificar de algebraicas (uso de símbolos para designar objetos, ecuaciones, fórmulas y patrones). Incluso encontramos elementos teóricos que suponen el inicio de una reflexión sobre la estructura algebraica de los conjuntos y operaciones con números. Tal es el caso de los enunciados generales de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones aritméticas y su aplicación en la solución de problemas.

Ejemplo

Presentamos a continuación algunas propiedades[2] algebraicas presentadas en los libros de texto, donde podemos también notar el uso de símbolos:

Las propiedades de la suma

Propiedad conmutativa El orden de los sumandos no altera la suma	Propiedad asociativa Para sumar tres números, sumamos dos cualesquiera de ellos y el resultado se suma con el tercero.

Relaciones entre los términos de la resta

Para comprobar si una resta está bien hecha se suma el sustraendo con la diferencia y el resultado debe ser el minuendo	M - S = D S + D = M M - D = S
En una resta, la diferencia no varía cuando se suma o se resta un mismo número al minuendo y al sustraendo	

Propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación

Propiedad conmutativa En una multiplicación, el orden de los factores no altera el resultado	**Propiedad asociativa** Para multiplicar tres números, se multiplican primero dos de ellos y el resultado por el tercero

Propiedad distributiva

El producto de una suma por un número es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número	El producto de una diferencia por un número es igual a la diferencia de los productos de cada término por ese número

La división inexacta. Prueba de la división

Una división es inexacta cuando su resto es distinto de cero.

$$\mathbf{r} \neq 0$$

Para saber si una división está bien hecha, multiplicamos el divisor por el cociente y le sumamos el resto. El resultado debe ser el dividendo.

$$\mathbf{D = d \times c + r}$$

Otro factor a tener en cuenta es que la introducción de la informática en primaria conlleva que, en determinadas actividades, los alumnos comienzan a utilizar un lenguaje que podemos calificar de casi "algébrico".

Ejemplo

Si proponemos en 6º de primaria la construcción de la siguiente hoja de cálculo con EXCEL para resolver un problema por tanteo, los alumnos pueden utilizar expresiones que contienen números, operaciones y símbolos:

Actividad: Queremos resolver el siguiente problema por tanteo:

Las edades de tres hermanos, Juan, Alberto y Ana suman 72 años. Sabemos que Juan, el mayor, tiene el triple de edad que Ana, la más pequeña, y que la edad de Alberto es el doble que la de Ana. ¿Cuáles son las edades de los tres hermanos?

Para ello confeccionaremos una hoja de cálculo con el programa EXCEL a partir de las siguientes instrucciones:

[2] Ferrero y cols (1999*). Matemáticas 5.*Madrid: Anaya.

- Escribe el título y los nombres de los hermanos tal como se ven en la figura.
- Introduce en la celda A6 "Suma actual", en la A8 "Suma de edades correcta" y en la celda D8 el número 72.
- Introduce en la celda B4 un valor cualquiera, por ejemplo 9.
- Introduce en la celda C4 la fórmula =2*B4.
- Introduce en la celda D4 la fórmula = B4*3.
- Introduce en la celda D6 la fórmula = B4+C4+D4

	A	B	C	D
1	Problema de las edades			
2				
3		Ana	Alberto	Juan
4		9	18	27
5				
6	Suma actual			54
7				
8	Suma de las edades correcta			72

- Varia el valor de la celda B4 para que la "Suma actual" sea 72.

¿Cuáles son las edades de los tres hermanos?

Algunas características del razonamiento algebraico que son sencillas de adquirir por los niños, y por tanto deben conocer los maestros en formación, son:

1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.
4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

Con relación a la segunda característica, hay que destacar que entre los símbolos que usamos para expresar las generalizaciones de patrones y relaciones sobresalen los que permiten representar variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones. Con relación a la tercera característica, hay que destacar que las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían o cambian, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula.

Respecto a la cuarta característica, hay que destacar que todas las representaciones de una función dada son simplemente maneras diferentes de expresar la misma idea. Aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La fórmula conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres.

2. EL ÁLGEBRA COMO INSTRUMENTO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Una visión tradicional y limitada del álgebra escolar (que se ha denominado "aritmética generalizada") es considerarla simplemente como una manipulación de letras que representan números no especificados: En esta visión los objetos que se ponen en juego en la aritmética y la "aritmética generalizada" son los mismos: números, operaciones sobre números y relaciones entre los números; las diferencias entre ambas partes de las matemáticas son diferencias en cuanto a la generalidad de las afirmaciones que se hacen:

- La aritmética trata con números específicos expresados mediante los numerales habituales,

  $20; \quad -7; \quad 14/5; \quad 4{,}75; \quad \sqrt{3}$

  o mediante expresiones numéricas en las que los números se combinan con los símbolos de las operaciones aritméticas:

  $45 \cdot 12, \qquad \dfrac{73+5{,}4}{3}, \qquad (13 - 7{,}4)^3$

- El álgebra trata con números no especificados (incógnitas, variables) representados por letras, como x, y, t, v, o bien expresiones con variables:

  $3x - 5, \quad x^2 - x + 5, \quad (x+5)(x-7), \quad 3uv + 4v + u + v + 1,$

Este "tipo de álgebra" está presente desde los primeros niveles educativos, como hemos visto en los ejemplos tomados de los libros de primaria. Siempre que se necesite expresar una generalización, el simbolismo y las operaciones algebraicas resultan de gran utilidad.

Es necesario, sin embargo, que los profesores tengan una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. La generalización se aplica a todas las situaciones que se puedan modelizar en términos matemáticos, por lo que el lenguaje algebraico está presente en mayor o menor grado como herramienta de trabajo en todas las ramas de las matemáticas.

Ejemplo

En el estudio de los números enteros hemos descrito algunas características del álgebra que complementan las que describimos en esta sección. Así, una expresión como $(13 - 7 \cdot 4)^3$, aunque sólo contiene números, requiere la aplicación de reglas de uso de los paréntesis y prioridad de las operaciones, que es propia del razonamiento algebraico

Algunas características del álgebra que son fáciles de apreciar son:

- El uso de símbolos, habitualmente letras, que designan elementos variables o genéricos de conjuntos de números, u otras clases de objetos matemáticos.
- La expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones.

Pero estas características del álgebra son sólo su parte superficial. La parte esencial lo constituye la actividad que se hace con estos instrumentos:

- Las variables, ecuaciones, funciones, y las operaciones que se pueden realizar con estos medios, son instrumentos de modelización matemática de problemas procedentes de la propia matemática (aritméticos, geométricos), o problemas aplicados de toda índole (de la vida cotidiana, financieros, físicos, etc.). Cuando estos problemas se expresan en el lenguaje algebraico producimos un nuevo sistema en el que se puede explorar la estructura del problema modelizado y obtener su solución. La modelización algebraica de los problemas proporciona nuevas capacidades para analizar las soluciones, generalizarlas y justificar el alcance de las mismas. Permite además reducir los tipos de problemas y unificar las técnicas de solución.

Esta visión ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos, puesto que la modelización algebraica es una cuestión de grado. Aunque el cálculo literal, basado en las propiedades estructurales de los conjuntos numéricos se suele iniciar en secundaria, los procesos de simbolización, expresión de relaciones, identificación de patrones, son propios de los primeros niveles de algebrización, y como hemos visto se pueden, y deben, iniciar desde la educación primaria.

La identificación y designación de las variables que caracterizan el sistema a modelizar es el primer paso de la modelización matemática, que vendrá seguido del establecimiento de relaciones entre dichas variables. A continuación viene el trabajo con el modelo, la manipulación formal de las expresiones simbólicas que muestra las propiedades del sistema modelizado y permite obtener nuevos conocimientos sobre el mismo. Finalmente se realizará la interpretación y aplicación del trabajo realizado con el modelo algebraico.

3. DIFERENTES CLASES DE SIGNOS

Para representar una situación podemos utilizar diferentes tipos de signos. Por ejemplo, podemos utilizar gestos, dibujos o iconos que se parezcan a los objetos o a la situación que queremos representar, o bien palabras o símbolos convencionales que no tengan ningún parecido con el objeto representado. Una primera clasificación[3] de los signos es la siguiente: 1) *Icono***,** se trata de un signo que tiene relación física con el objeto que representa, 2) *Índice***,** se trata de un signo que permite dirigir la atención sobre un objeto (por ejemplo una señal de prohibido girar a la derecha) y 3) *Símbolo***,** se trata de un signo cuya relación con el objeto se determina por una convención. No es

[3] Hay muchas investigaciones realizadas sobre los sistemas de signos que se utilizan en matemáticas. Estas investigaciones han matizado y desarrollado la clasificación anterior. Entre dichas investigaciones hay que destacar las que señalan la necesidad de introducir en la didáctica de las matemáticas el concepto de *función semiótica* que tienen su origen en los trabajos de semiótica de U. Eco. El uso de la noción de función semiótica en didáctica de las matemáticas puede verse en Godino (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22 (2/3).

fácil siempre ponerse de acuerdo cuándo un signo en matemáticas se corresponde con alguno de estos tres grupos, por lo que muchos autores prefieren hablar de representaciones o sistemas de signos en general. Nosotros, en los párrafos que siguen utilizaremos de manera indistinta “signo” o “símbolo” y hablaremos de “icono” sólo cuando la relación física con el objeto representado sea muy evidente.

La importancia de considerar el papel que juegan los diferentes tipos de representación en la comprensión de las matemáticas ha sido puesta de manifiesto por diferentes investigadores. Por ejemplo, según Bruner hay que considerar tres tipos de representaciones:

1) La representación enactiva: este tipo de representación permite representar eventos mediante una respuesta motriz adecuada. Como ejemplo de representación enactiva tenemo*s* el caso del niño que cuando deja caer un sonajero imita el movimiento del sonajero con la mano, indicando así que recuerda el objeto con relación a la acción que se realiza sobre el mismo.

2) La representación icónica: este tipo de representación permite representar una situación por medio de dibujos, figuras o iconos que tengan algún tipo de parecido con aquello que se representa.

3) La representación simbólica: este tipo de representación va ligada a la competencia lingüística y permite representar las situaciones mediante símbolos.

Bruner propuso que los conceptos se enseñasen siguiendo estas tres fases: "(..)Por tanto, la clave para la enseñanza parecía ser el presentar los conceptos de forma que respondiesen de manera directa a los modos hipotéticos de representación. La forma en que los seres humanos se representaban mentalmente los actos, los objetos y las ideas, se podía traducir a formas de presentar los conceptos en el aula. Y, aunque algunos estudiantes podían estar <<preparados>> para una representación puramente simbólica, parecía prudente, no obstante, presentar también por lo menos el modo icónico, de forma que los estudiantes dispusiesen de imágenes de reserva si les fallaban las manipulaciones simbólicas(..)"[4]

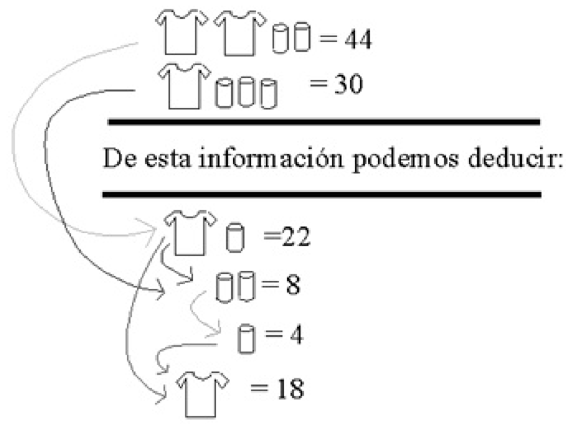
Independientemente de que las ideas de Bruner sean o no las más indicadas para enseñar los contenidos matemáticos, es evidente que el tipo de representación que utilicemos no es algo neutral o indiferente. Optar por un tipo de representación u otra tiene sus ventajas y sus inconvenientes. En el capítulo 1 de la monografía sobre *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para maestros* ya comentamos que el lenguaje matemático tiene una doble función: 1) *representacional*: nos permite designar objetos y 2) *instrumental*: es una herramienta para hacer el trabajo matemático. Hay que ser muy conscientes de que el valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos, iconos, gráficas, etc.

Veamos un ejemplo para ilustrar los diferentes tipos de sistemas de signos que podemos utilizar para realizar el mismo trabajo matemático.

Ejemplo

> El precio de dos camisetas y de dos latas de refresco es de 44 euros. El precio de una camiseta y tres latas es de 30 euros. ¿Cuál es el precio de una camiseta y el de una lata de refresco?

[4] Resnick, L. B. y Ford, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós-MEC. (p. 141).



Con esta representación se quiere representar el siguiente razonamiento:

Si dos camisetas y dos latas valen 44 euros, una camiseta y una lata valen la mitad: 22 euros. Si una camiseta y tres latas valen 30 euros, y una camiseta y una lata valen 22 euros, dos latas valen 8 euros, una sola lata vale la mitad (4 euros) y, por tanto, la camiseta vale 18 euros (22-4).

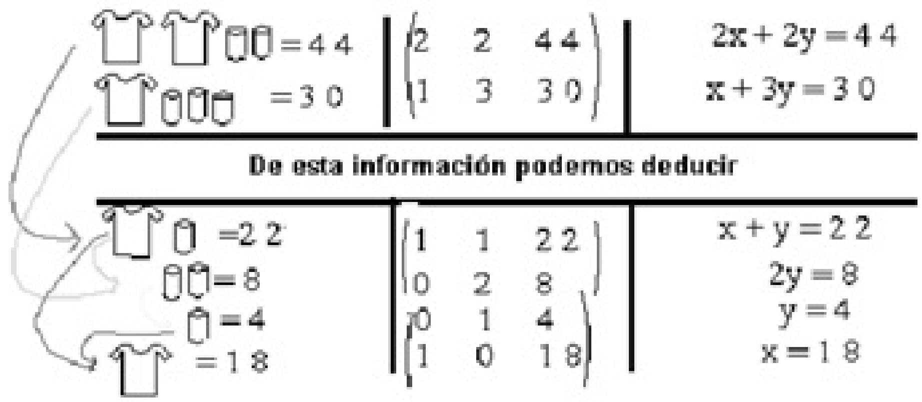
Con este tipo de representación hemos podido hallar el precio de la camiseta y el de las latas sin usar las ecuaciones. Ahora bien, este tipo de representación es uno de los muchos que podemos utilizar para resolver este problema.

1. A continuación tienes el proceso de resolución del problema anterior utilizando tres tipos de representaciones diferentes.

a) Asocia cada representación con uno de los siguientes niveles educativos: 2º ciclo de la ESO, Bachillerato y ciclo superior de primaria

b) Indica cuál utiliza iconos y cuál utiliza sólo símbolos. Especifica los iconos y los símbolos utilizados en cada caso.

c) ¿Qué inconvenientes y qué ventajas encuentras en el uso de representaciones icónicas?



La utilización de representaciones icónicas permite introducir en la educación primaria un tipo de razonamiento que se puede calificar de algebraico, pre-algebraico o casi-algebraico, y que no sería posible realizar en el caso de haber optado por una representación completamente simbólica como, por ejemplo, las ecuaciones.

2. a) Resuelve la actividad siguiente.

b) ¿Crees que esta actividad es adecuada para el último ciclo de primaria?

c) ¿En el apartado de Contextualización Profesional hay algún ejercicio parecido a éste?

d) Si en lugar de latas de espárragos fuesen latas de judías, ¿cuál habría sido el resultado?

e) Si las barras hubiesen sido de plomo en lugar de hierro, ¿cuál habría sido el resultado?

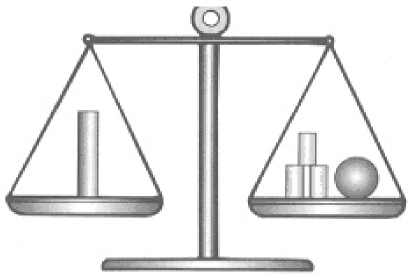
d) Intenta resolver esta actividad utilizando sólo ecuaciones.

e) ¿Qué inconvenientes y que ventajas encuentras en el uso de representaciones icónicas en este caso?

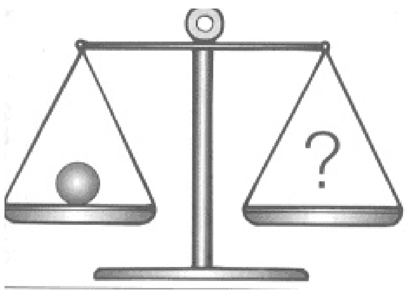
Actividad: Las figuras siguientes representan dos platos de una balanza en equilibrio. En el de la izquierda hay latas de espárragos y en el de la derecha hay barras de hierro.

a) 7 latas de espárragos tienen la misma masa que........ ....barras de hierro.

b) ...... barras de hierro tienen la misma masa que una bola de hierro y .... latas de espárrago.



c) Una bola de hierro tiene la misma masa que.......................



4. LOS SÍMBOLOS COMO REPRESENTACIONES DE OBJETOS Y LOS SÍMBOLOS COMO OBJETOS

En la educación primaria los alumnos manipulan expresiones con letras, operaciones y números. Por ejemplo, para buscar el perímetro de un rectángulo, el área de un triángulo, la longitud de una circunferencia, etc. tienen que utilizar las expresiones siguientes:

$$P = 2a+2b, \quad A = \frac{a \cdot b}{2}, \; L = 2\pi r$$

En la secundaria el uso de las expresiones algebraicas (expresiones con letras, operaciones y números) aumenta considerablemente y los alumnos pasan a utilizar, entre otras, identidades notables (por ejemplo el cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$), ecuaciones (por ejemplo, $3x+2=5$) y polinomios (por ejemplo, $2x^3 + 3x + 7$).

El camino que va desde la manipulación, por ejemplo, de fórmulas geométricas para hallar longitudes y áreas en el último ciclo de primaria hasta el cálculo, por ejemplo, de la suma y el producto de polinomios en el segundo ciclo de la ESO, es un camino largo, complejo y lleno de dificultades. En este camino conviene distinguir dos etapas.

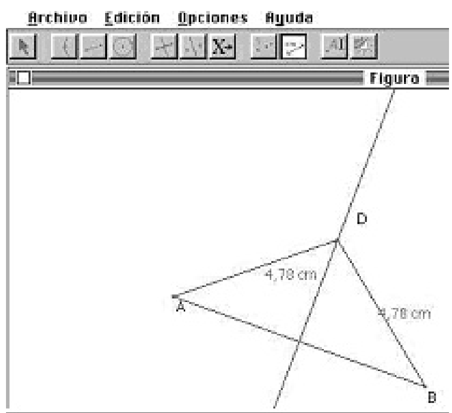
1) En la primera los símbolos substituyen a números, segmentos u otros objetos y su función es representarlos. En esta etapa los símbolos representan objetos, acciones sobre objetos o relaciones entre objetos, pero ellos mismos no se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones. Los valores que pueden tener los símbolos son los que permiten los objetos y la situación que representan.

2) En una segunda etapa los valores que pueden tener los símbolos son los que se quiera considerar y no están condicionados por la situación que inicialmente representaban. Ahora los símbolos se consideran objetos sobre los cuales se pueden realizar acciones e incluso se puede prescindir de los objetos, relaciones y situaciones que representan.

Veamos un ejemplo que puede servir para ilustrar estas dos etapas.

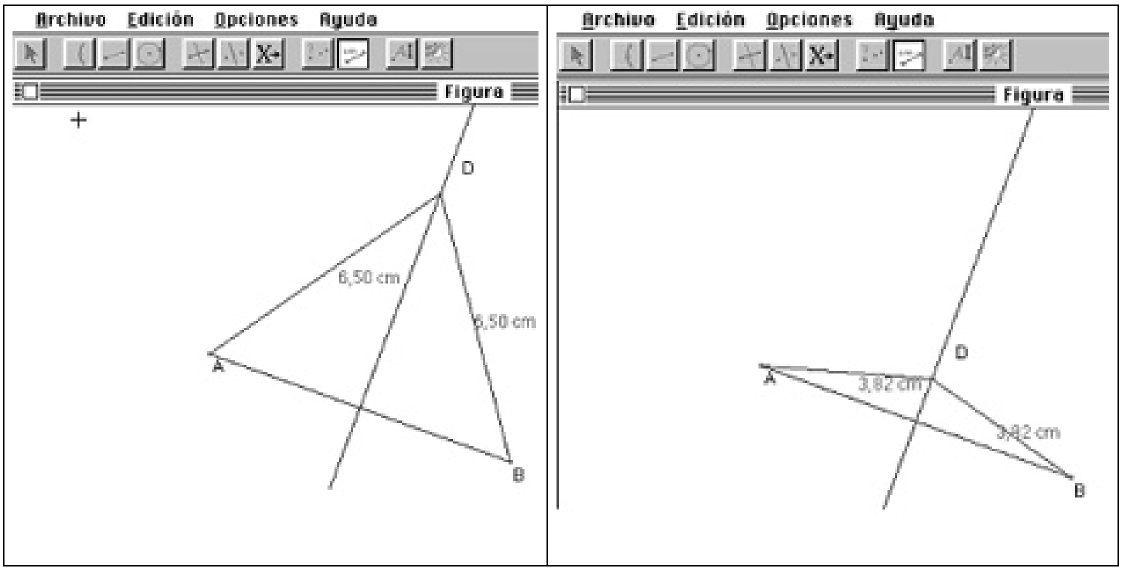
Ejemplo

En 6º de primaria los alumnos ya han trabajado en clase los siguientes contenidos: recta, segmento, punto medio de un segmento, recta perpendicular por un punto, etc. Supongamos que saben que la mediatriz es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento y queremos que los alumnos entiendan la mediatriz como la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento. Para conseguirlo se les puede proponer realizar la siguiente construcción con el programa Cabri:



.

Una vez realizada con el ordenador la construcción anterior, el punto D se puede convertir en un objeto variable, es decir, en un objeto particular dinámico. Basta situar el puntero del ratón en el punto D y moverlo. El invariante que obtiene el alumno al mover el punto D es que este punto siempre cumple la condición de estar a igual distancia de los extremos A y B del segmento. Por lo tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento es la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos.



Este resultado se puede simbolizar de la siguiente manera: los puntos de la mediatriz cumplen la siguiente condición: distancia AD = distancia DB y si representamos por y la distancia AD y por x la distancia DB los alumnos pueden llegar a simbolizar la condición anterior de la siguiente manera: y = x

Para un alumno de primaria que, después de realizar la construcción anterior, llega a esta conclusión, la y es el símbolo que representa la distancia del punto a un extremo del segmento y la x es el símbolo que representa la distancia al otro extremo. Los símbolos están en lugar de los segmentos y los valores de estos símbolos son las longitudes de los diferentes segmentos que se forman al mover el punto D, por lo cual no tienen ningún sentido considerar que los valores de x e y sean negativos.

Las consideraciones anteriores corresponden a la primera etapa, pero si prescindimos de la situación que hemos representado anteriormente podemos considerar que x e y pueden tomar valores cualesquiera (siempre que sean iguales), incluso valores negativos. Esta ampliación del rango de valores de los símbolos permite utilizarlos para representar otras situaciones además de la que hemos considerado inicialmente.

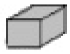
Esta ampliación del rango de valores de los símbolos nos permite considerar nuevos objetos: la variable x, la variable y, y la función que relaciona estas dos variables $y = x$. Sobre estos objetos podemos realizar acciones como por ejemplo $y\text{-}x = 0$ o $\frac{y}{x} = 1$ que aún pueden tener algún significado en la situación inicial o bien acciones que ya no tienen ningún significado en la situación inicial, como por ejemplo considerar $y = x+x$.

3. Considera la siguiente secuencia de actividades

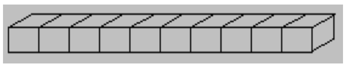
a) ¿Crees que las características de esta secuencia de actividades se corresponden con las que hemos atribuido a la primera etapa?

b) ¿Qué problemas tendríamos si quisiéramos introducir la expresión x^4?

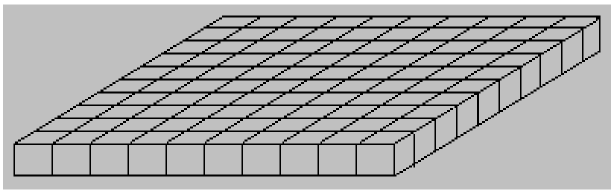
1) Tenemos un cubo pequeño que mide 1 cm de lado. Su volumen es ....cm^3.



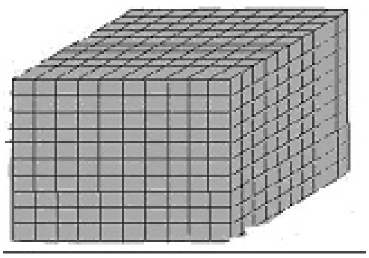
Con 10 cubos pequeños juntos tenemos una barra. Su volumen es ...cm^3.



Si juntamos 10 barras tenemos una placa. Su volumen es ...cm^3.



Si apilamos 10 placas obtenemos un bloque (cubo grande). Su volumen es ....cm^3.



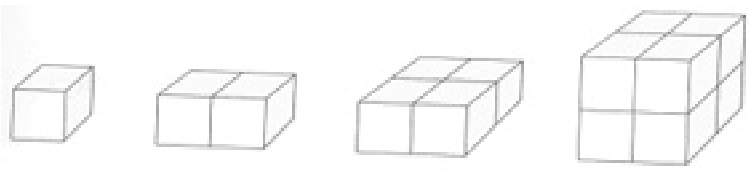
2). ¿Cuál es el volumen de todas estas piezas juntas: 2 bloques, 1 placa, 6 barras y 4 cubos pequeños. Completa la respuesta:

$$\text{Volumen} = 2\cdot 10^3\ cm^3 + 1\cdot ...\ cm^3 + ...\cdot ...\ cm^3 + ... = ...\ cm^3$$

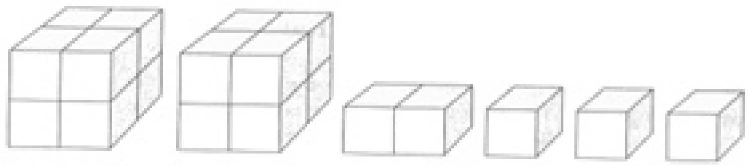
3). ¿Qué volumen ocupan un bloque, tres placas, dos barras y tres cubos pequeños?

4). Dibuja cubos, barras, placas y bloques de tal forma que todos juntos ocupen un volumen de 3206 cm^3.

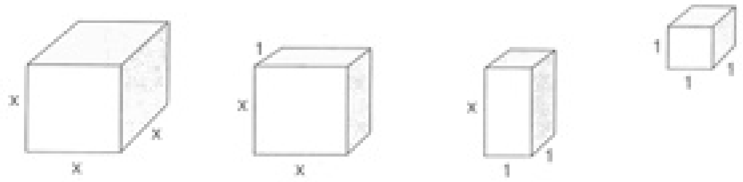
5). a) Si la barra sólo estuviese formada por dos cubos pequeños, la placa por dos barras y el cubo por dos placas, ¿cuál sería el volumen de una barra? ¿Y el de una placa?¿Y el del bloque?



b) Con este tipo de piezas, ¿qué volumen ocupan tres cubos pequeños, una barra y dos bloques?



6. Si la barra estuviese formada por x cubos pequeños, la placa por x barras y el cubo grande por x placas, ¿cuál sería el volumen de la barra? ¿Y el volumen de la placa? ¿Y el volumen del cubo?



a) Con este tipo de piezas, ¿qué volumen ocupan tres cubos pequeños, una barra y dos bloques?

b) Dibuja el volumen $(3x^3 + 2x^2 + 4x + 7)$ cm^3

Los diferentes psicólogos que han considerado los procesos de simbolización, abstracción y generalización coinciden en que el primer nivel que hemos descrito anteriormente puede ser apropiado para muchos de los alumnos de primaria. Con relación al segundo nivel las opiniones no son coincidentes, aunque la opinión mayoritaria es que no es adecuada para los alumnos de primaria. Entre estas últimas opiniones destaca la de Piaget que considera que las características del segundo nivel descritas anteriormente corresponden a la etapa de las operaciones formales (a partir de los 12 años aproximadamente).

5. LAS VARIABLES Y SUS USOS

Una *variable* es un símbolo (habitualmente una letra) que puede ponerse en lugar de cualquier elemento de un conjunto, sean números u otros objetos.

Las variables son uno de los instrumentos más poderosos para expresar las regularidades que se encuentran en matemáticas. El principal interés del uso de letras (variables) en matemáticas es que permiten expresar relaciones generales entre los objetos de una manera eficaz.

Ejemplo

Analicemos las frases:

a) Para cualquier par de números naturales a y b, siempre se verifica que, $a + b = b + a$.

b) 2+3 = 3+2.

La segunda es diferente de la primera, ya que la segunda sólo sirve para estos dos números, mientras que la primera sirve para cualquier par de números. De la segunda igualdad se puede llegar a pensar que es propia sólo de los números 2 y 3. Incluso aunque se afirmara que esa segunda igualdad es cierta para muchos ejemplos de pares de números, tampoco se estaría haciendo la misma afirmación que en la primera igualdad.

Una manera alternativa de enunciar esa propiedad de los números es mediante una frase del tipo, "La suma de dos números naturales es independiente del orden de los términos de esta suma". Esta segunda alternativa presenta ventajas e inconvenientes con respecto a la primera. Uno de los inconvenientes es que resulta más larga que la primera.

Encontramos cuatro usos principales de las variables en matemáticas:

- *Las variables como incógnitas*: Cuando se usan para representar números (u otros objetos) uno de cuyos valores posibles hace verdadera una expresión. La *incógnita* interviene como un objeto matemático desconocido que se manipula como si fuera conocido.

  Ejemplos:

  Cuando en los primeros cursos se escribe, por ejemplo, 9+ __ = 15

  Cuando en cursos más avanzados se proponen ejercicios del tipo: ¿Cuánto vale x para que sea cierta la igualdad $4x + 2 = 3x + 5$?

- *Las variables como indeterminadas* o expresión de patrones generales. Es el caso cuando la variable se usa en enunciados que son ciertos para todos los números (o elementos del conjunto que se trate).

  Ejemplos:

  Para todos los números reales se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$

  El área del cualquier rectángulo es $A = b \cdot a$ (a = base y b = altura).

- *Las variables para expresar cantidades que varían conjuntamente*. La relación de dependencia entre variables ocurre cuando el cambio en una variable determina el cambio en la otra.

  Ejemplos:

  En la expresión $y = 5x + 6$, cuando cambia x también lo hace y.

  En la fórmula $C = 2pr$, cuando cambia el radio r también cambia la longitud de la circunferencia C.

- *Las variables como constantes o parámetros.* Es el caso de la letra a en la fórmula de la función de proporcionalidad $y = ax$. En un primer momento se ha de considerar que la letra a no varia y que sólo lo hacen de manera conjunta la x y la y. De esta manera se obtiene una función de proporcionalidad concreta. En este primer momento no hay diferencia entre tener $y = ax$ o $y = 2x$. En un segundo momento se ha de considerar que a puede variar y tomar cualquier valor, con lo que obtenemos la familia de todas las funciones de proporcionalidad

  Ejemplo:

  "a es una constante entera y x una incógnita tal que, $ax = x+1$. ¿Qué puede valer x?"

  Aquí se considera que la letra representa un número fijado como dato en el problema, pudiendo ser cualquier número entero, pero cuyo valor no se fija en el problema dado. Esta manera de trabajar confiere al problema un carácter mucho más general. La letra a interviene aquí como un *parámetro*: objeto matemático conocido (número, conjunto, función, figura, etc.) que se manipula como si fuera desconocido y además puede tomar cualquier valor.

6. DIFERENTES TIPOS DE IGUALDADES EN MATEMÁTICAS

El signo "=" (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo[5].

Ejemplo

> Cuando escribimos 2+3=1+4 queremos decir que 2+3 y 1+4 son dos formas diferentes de escribir el mismo número 5.

Según la naturaleza de los elementos que intervienen en una igualdad numérica se obtienen diferentes tipos de igualdades:

- Si en la igualdad aparecen variables y la igualdad es verdadera para cualquier valor que tomen las variables, se dice que se trata de una *identidad*: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.

  Las identidades notables son utilizadas de manera intuitiva por los niños desde una edad muy temprana. Por ejemplo, los alumnos de educación infantil mejoran mucho su capacidad de cálculo mental cuando descubren la propiedad conmutativa $a+b=b+a$. Ante la pregunta, ¿cuántos son 2+9?. La capacidad de utilizar que 2+9 es igual a 9+2 permite hallar más fácilmente la respuesta correcta, ya que es mucho más fácil contar dos a partir del nueve, que no contar nueve a partir del dos.

- Si la igualdad es verdadera sólo para ciertos valores de las variables se dice que se trata de una *ecuación*: $a+3=7$.

  Muchos de los problemas que han de resolver los alumnos de primaria consisten en hallar un número desconocido que cumpla ciertas condiciones. La formulación de esta pregunta suele ser en forma de enunciado, pero también se utiliza un lenguaje simbólico del tipo: 7 +   = 20.

- La igualdad se usa también para expresar la relación de dependencia entre dos o más variables, hablándose en este caso de una *fórmula*: $e = 1/2gt^2$.

Los alumnos de primaria se encuentran que, en muchos casos, la relación entre dos magnitudes viene dada mediante una fórmula. Por ejemplo, el área de un cuadrado se puede calcular a partir de la fórmula: Área = l^2 , donde l es la longitud del lado del cuadrado. A partir de esta fórmula el alumno puede calcular el área de cualquier cuadrado conociendo la longitud del lado. Para ello ha de interpretar la fórmula de la manera siguiente:

  - Ha de saber lo que se considera dato en la fórmula (en este caso la longitud del lado del cuadrado).
  - Tiene que entender cómo se combinan los datos entre ellos (en este caso el dato inicial se multiplica por sí mismo).

Con esta interpretación de la fórmula, el alumno que sabe que el lado del cuadrado mide 4 cm puede realizar los cálculos indicados en la fórmula (multiplicar 4 cm por 4 cm) y, por último, determinar que el resultado (16 cm^2) es el área del cuadrado.

[5] Maurin, C. y Johsua, A. (1993). Les structures numériques à l'école primaire. Paris: Ellipses. (p. 90).

7. ECUACIONES E INECUACIONES DE UNA INCÓGNITA

A continuación se recuerdan brevemente los contenidos sobre ecuaciones e inecuaciones con una incógnita que ya se conocen de la secundaria. Seguidamente se propone un nuevo punto de vista sobre estos dos objetos matemáticos.

7.1. Las ecuaciones e inecuaciones en secundaria

En la secundaria se suelen definir las *ecuaciones de primer grado con una incógnita* como una igualdad en la que hay un número desconocido, normalmente representado por la letra x, llamada incógnita, que no está elevado al cuadrado, ni al cubo, etc. Por ejemplo: $2x+6 = 8$. Una expresión del tipo $2x^2+6 = 8$ no es una ecuación de primer grado con una incógnita porque la incógnita está elevada al cuadrado, mientras que una expresión del tipo $2x+6+y = 8$ tampoco lo es porque hay dos incógnitas: la x y la y.

En la ecuación $2x + 6 = 8$ la igualdad es verdadera para un determinado valor de la incógnita: $x = 1$

$$2\,(1) + 6 = 8$$

A este valor se le llama *solución* de la ecuación. Si substituimos la x por un número que no es solución, no se cumple la igualdad. Por ejemplo, si substituimos x por 2, tenemos:

$$2\,(2) + 6 \neq 8$$

La solución de la ecuación $2x+6 = 8$ es $x = 1$ y la solución de la ecuación $x+3 = 4$ también es $x = 1$. En este caso se dice que las ecuaciones $2x+6 = 8$ y $x+3 = 4$ son *equivalentes*. Las ecuaciones equivalentes son aquellas que tienen las mismas soluciones.

Hay transformaciones que permiten obtener ecuaciones equivalentes:

- La ecuación inicial y la que resulta de sumar o restar el mismo número en los dos miembros de la igualdad son equivalentes.
- La ecuación inicial y la que resulta de multiplicar o dividir por el mismo número (diferente de cero) los dos miembros de la igualdad son equivalentes.

Resolver una ecuación con una incógnita consiste en hallar la solución. Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se hacen las transformaciones que sean necesarias hasta llegar a una ecuación equivalente del tipo $ax = b$. Para conseguirlo, se trasponen todos los términos que tienen incógnita a un lado de la igualdad y todos los que no la tienen al otro; después se efectúan las operaciones indicadas hasta llegar a una ecuación del tipo $ax = b$, que se resuelve despejando la incógnita.

Ejemplo:

Ecuación inicial: $4x - 13 + 2x = 3x - 4$

Trasponemos, con el signo cambiado, los términos que tienen x a un lado y los que no tienen al otro: $4x + 2x - 3x = -4 + 13$

Efectuamos las operaciones indicadas: $3x = 9$

Despejamos a incógnita: $x = 9/3$

La solución es: $x = 3$

Generalmente, una ecuación de primer grado con una incógnita tiene una única solución, pero hay excepciones. Por ejemplo, $5x - 4 = 5x$ es una ecuación sin solución, porque es imposible que, restando cuatro a un número, obtengamos este mismo número.

Por otra parte hay ecuaciones como, por ejemplo, $5x + 7 - 3 = 5x + 4$ que tienen infinitas soluciones porque la igualdad se cumple para cualquier valor de la incógnita. Si en el primer miembro substituimos 7 - 3 por 4, la ecuación anterior se convierte en: $5x + 4 = 5x + 4$. Esta igualdad se verifica para cualquier valor de x porque en realidad lo que afirma esta igualdad es que un número $(5x + 4)$ es igual a él mismo y esto se cumple siempre.

4 ¿Cuál de las afirmaciones siguientes es cierta?
a) $x = 1$ es solución de la ecuación $5x - 3 = 3x + 1$
b) $x = 2$ es solución de la ecuación $5x - 3 = 3x + 1$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $5x - 25 = x - 9$ b) $4x - 2 + 3x = 40$ c) $5x + 6 = 2x + 12$ d) $-7 - 6x - 1 = -4x + 10 - x$
e) $2x - 6 - 8x + 12 = 5 - 4x + 17 - 2 + x$ f) $x + 3(x + 2) = 5(x + 3) - 5$
g) $3(8 - 2x) + 5 = 17 - 2(1 - x)$ h) $\frac{5x - 50}{2} = 17 - x$ i) $\frac{5x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{x}{6} = 37$

Hay muchas situaciones en las que en lugar del signo = (igual) se han de utilizar los siguientes signos: ≥ (mayor o igual), > (mayor), ≤ (menor o igual) y < (menor).

Ejemplo

Un vendedor de artículos de limpieza cobra 600 euros cada mes y un 5% del total de las ventas mensuales. ¿Qué volumen de ventas ha de tener para ganar más de 1.100 euros?

En general, la resolución de un problema relacionado con una igualdad nos lleva a una ecuación. En cambio, si el enunciado está relacionado con una desigualdad tendremos una *inecuación*.

Cuando a los dos miembros de una desigualdad, por ejemplo: $-3 < 4$ le sumamos un mismo número positivo, por ejemplo el 5: $-3 + 5 < 4 + 5$ obtenemos otra desigualdad del mismo sentido: $2 < 9$. Esta propiedad también se cumple si el número que sumamos es negativo, por ejemplo si sumamos el -2: $-3 - 2 < 4 - 2$, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido: $-5 < 2$

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una desigualdad por el mismo número (diferente de cero) y éste es positivo, obtenemos otra desigualdad del mismo sentido (la desigualdad se conserva). Si es negativo, obtenemos otra desigualdad de sentido contrario (la desigualdad cambia de sentido).

Consideremos la desigualdad: $-3 < 4$. A los dos miembros de esta desigualdad los multiplicamos por un mismo número positivo, por ejemplo el 2: $-3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$. Obtenemos otra desigualdad del mismo sentido: $-6 < 8$. Si los dividimos por -2, por ejemplo, obtenemos $-1,5$ en el primer miembro y -2 en el segundo. En este caso $-1,5 > -2$.

La resolución de inecuaciones funciona como la resolución de ecuaciones excepto cuando hemos de multiplicar o dividir por un número negativo. En estos casos hemos de cambiar el sentido de la desigualdad.

Ejemplo

Queremos resolver la inecuación: $7x-15 < 5x-19$

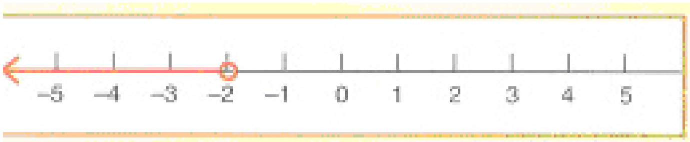
Trasponemos, como en el caso de una ecuación los términos con x a un lado de la desigualdad y los números a la otra: $7x - 5x < -19 + 15$

Operando los términos de cada lado de la desigualdad: $2x < -4$

Despejamos la incógnita dividiendo por 2 los dos términos de la inecuación (la desigualdad no cambia de sentido): $x < -4/2$

Y, por tanto: $x < -2$.

Las soluciones de esta inecuación son todos los números menores que –2, que podemos representar sobre la recta numérica de la manera siguiente:



6. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente sus soluciones:
a) $2x - 14 > 4$ b) $-2x + 8 < 10$ c) $2(x - 3) > 5$

d) $3 - 2x \quad 17$ e) $\dfrac{5x-50}{2} \geq 17 - x$

En la enseñanza secundaria también se estudian ecuaciones de segundo grado. Son aquellas en las que la incógnita está elevada al cuadrado. Por ejemplo, $x^2 + 3x - 10 = 0$. Una ecuación de segundo grado sólo pueda tener dos soluciones, una solución o ninguna.

7.2. Proposiciones y funciones proposicionales

Una *proposición* es un enunciado declarativo del que se puede afirmar que es verdadero o falso. En la vida diaria y en matemáticas tratamos con proposiciones constantemente.

Ejemplos

a) La capital de España es Sevilla

b) $4 \cdot 8 = 32$

c) $3x + 1 = 10$

En el ejemplo anterior, los dos primeros enunciados son proposiciones. El primero de ellos es falso, el segundo es verdadero. El tercer enunciado no es una proposición, ya que no se puede afirmar que sea verdadero o falso. Se podría, sin embargo, convertir en una proposición si sustituimos la letra x por un número particular:

Ejemplos

$3 \cdot 3 + 1 = 10$, es una proposición verdadera;

$3 \cdot (-2) + 1 = 10$, es una proposición falsa.

Algunas definiciones

- Llamamos *variable* a la letra x en el enunciado c) y *función proposicional* (o sentencia abierta) a la proposición completa.

- Cada uno de los valores que puede tomar la variable x para hacer verdadera la proposición c) es una *solución* de dicha sentencia abierta.
- *Conjunto de sustitución* de la función proposicional es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar la variable en ella.
- *Conjunto de validez* (o *conjunto solución*) de una función proposicional son aquellos valores del conjunto de sustitución para los que es verdadera.
- *Resolver* dicha función proposicional es encontrar su conjunto solución.
- Cuando la sentencia incluye el signo = se llama *ecuación*, y si incluye alguno de los símbolos, $\neq$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, se llama *inecuación*.

Ejemplo

La función proposicional $x^2 = 9$ es una ecuación y tiene solución en R (números reales). Su conjunto solución es $\{+3, -3\}$

La letra x usada en el ejemplo es la variable de la función proposicional correspondiente (sentencia abierta), cuya solución se expresa como un conjunto.

En el contexto escolar habitual, y con un punto de vista más restringido, se suele considerar la letra x de las ecuaciones e inecuaciones como incógnitas, esto es, como valores particulares desconocidos. En este punto de vista, la búsqueda de las soluciones de, por ejemplo, $x^2 = 9$, consiste en encontrar números desconocidos que sustituidos en la ecuación cumplan la igualdad.

Dos funciones proposicionales son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo

$4x - 12 = 16$, y $4x = 4$ tienen las mismas soluciones. La segunda ecuación se ha obtenido a partir de la primera aplicándole una transformación consistente en restar 12 a ambos miembros de la ecuación.

Las inecuaciones son un tipo especial de sentencias abiertas, de manera que la definición de equivalencia dada anteriormente es también aplicable: Dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución

7 ¿Tienen soluciones en R las siguientes funciones proposicionales? $2x + 7 = 3$; $x < 5$? ¿Cuáles son sus conjuntos solución? ¿Son ecuaciones o inecuaciones?

8. ¿Tiene soluciones reales (conjunto de sustitución R) la función proposicional, $x^2 = -1$? ¿Es una ecuación o inecuación?

8. RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES

Una técnica potente para modelizar y resolver algebraicamente los problemas verbales es el uso de letras para expresar cantidades desconocidas variables que pueden tomar un conjunto de valores posibles dentro de ciertos intervalos (funciones proposicionales con un determinado conjunto de validez). Uno de los objetivos más importantes de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente desde el comienzo de la enseñanza secundaria, es dominar dicha técnica.

Aunque la modelización algebraica no es algorítmica (no existe una máquina que resuelva automáticamente los problemas verbales), sin embargo, se pueden dar los siguientes consejos o heurísticas que pueden ayudar en dicho proceso:

1. Determinar lo que se pide hallar en el enunciado e introducir una variable para representar la cantidad desconocida. Algunas palabras claves como, qué, cuántos, y encontrar, señalan la cantidad desconocida.
2. Buscar relaciones matemáticas entre las cantidades conocidas y desconocidas. Algunas palabras proporcionan claves lingüísticas de posibles igualdades y operaciones.
3. Escribir las relaciones mediante expresiones algebraicas.
4. Tratar de escribir alguna cantidad de dos maneras distintas, lo que producirá una ecuación.
5. Resolver la ecuación o inecuación usando las técnicas formales disponibles.
6. Traducir la solución matemática encontrada al lenguaje original del problema.
7. Evaluar la solución ¿Has encontrado lo que se pedía? ¿Tiene sentido la respuesta? Por ejemplo, si el problema era encontrar el área de un rectángulo, la respuesta -4 sería absurdo.

Ejemplo:

Pedro vive a 180 km de su lugar de trabajo. Prevé salir de casa a las 9 horas y conducir a la velocidad de 50 km/hora. ¿A qué hora llegará al trabajo?

Solución:

1. Sea t = el tiempo que tiene que conducir (expresado en horas)
2. Distancia (km) = velocidad (km/h) . tiempo (horas)
3. Por una parte, distancia = $50 \cdot t$; y por otra, distancia = 180 km.
4. $50t = 180$ (modelo algebraico del problema)

$t = 180/50 = 3,6$

5. Pedro tiene que conducir 3,6 horas. Como sale a las 9 horas y conduce durante 3,6 horas, esto es, 3 horas y 36 minutos, llegará al trabajo a las 12h 36 m.

Este problema verbal muestra una característica importante de la modelización matemática. El problema real se ha simplificado para que se pueda aplicar la función que caracteriza el movimiento uniforme de una partícula: $e = vt$ (espacio es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo). También vemos las posibilidades de generalización que proporciona la modelización algebraica: la velocidad y la distancia a recorrer son datos del problema que intervienen como "parámetros" que pueden tomar otros valores. Ahora bien, sean los que sean los valores de estos parámetros, el tiempo se calcula de igual modo.

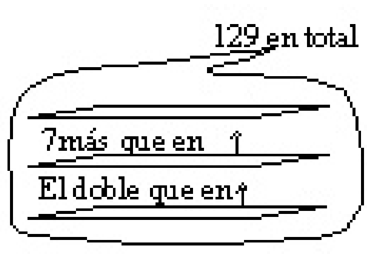
En algunos problemas puede ser muy útil hacer un dibujo o esquema de la situación.

Ejemplo,

Si tenemos que resolver el siguiente problema:

En 3 estantes de una librería hay 129 manuscritos. En el segundo hay 7 más que en el primero. En el tercero hay el doble que en el segundo.¿Cuántos manuscritos hay en cada estante?

Un dibujo como el siguiente nos puede ayudar en la resolución del problema:



9. Resuelve el problema del ejemplo anterior.

10. La temperatura de la tierra a unos pocos metros de la superficie permanece constante a unos 20ºC tanto en invierno como en verano. A medida que profundizamos la temperatura se incrementa de manera constante unos 10ºC por kilómetro. ¿A qué profundidad debe perforar una compañía geotérmica para alcanzar un punto cuya temperatura sea de 55ºC?

11. Un comerciante tiene dos tipos de vino que cuestan 72 céntimos y 40 céntimos un cuarto, respectivamente. ¿Qué cantidad debe tomar de cada tipo para obtener 50 cuartos de una mezcla de ambos vinos cuyo valor sea de 60 céntimos el cuarto?

12. En un concurso de televisión se quieren repartir en premios una cantidad inferior a 300 €. Los participantes van sumando puntos y por cada punto se obtiene una determinada cantidad de euros. Hay dos participantes y el segundo ha obtenido 20 puntos más que el primero. ¿Cuántos euros se pueden dar por cada punto conseguido?

9. ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Primero recordaremos brevemente algunos contenidos sobre ecuaciones con dos incógnitas que ya conoces de la secundaria. A continuación les aplicaremos el punto de vista de las funciones proposicionales.

9.1. Las ecuaciones con dos incógnitas en secundaria

Hasta este momento hemos considerado situaciones en las que se necesita utilizar una sola incógnita.¿Cómo podemos resolver situaciones en las que intervienen más de una incógnita?

13. Una empresa fabrica carteras y maletines con el mismo tipo de piel. Para fabricar una cartera utiliza 1 m^2 de piel y 3 m^2 para un maletín. En total dispone de 27 m^2 de piel. Utilizando toda la piel disponible contesta:
a) ¿Es posible producir 9 carteras y 6 maletines?
b) ¿Es posible producir 12 carteras y 5 maletines?
b) Busca otras posibilidades de producción.

La situación anterior admite varias respuestas. Por ejemplo, 9 carteras y 6 maletines o bien 12 carteras y 5 maletines, etc. La mejor manera de resolver esta actividad es planteando una ecuación:

x = n.º de carteras

y = n.º de maletines

$x + 3y = 27$

Esta última expresión es una *ecuación de primer grado con dos incógnitas*. En la secundaria se suele definir este tipo de ecuación como una igualdad en la que hay dos números desconocidos, normalmente representados por las letras x e y, que se llaman incógnitas, que no están elevadas al cuadrado, ni al cubo, etc.

Ejemplos:

- $6x+ 4y -156 = 0$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.
- $2x^2+6y = 8$, no lo es debido a que una incógnita está elevada al cuadrado.
- $2x+6 + y =8 - z$ tampoco lo es porque hay tres incógnitas: la x, la y y la z.

Observa que en la ecuación $x + 3y = 27$, la igualdad es verdadera para infinitos pares de valores. Por ejemplo, para $x = 9$ y $y = 6$ se cumple la igualdad:

$$9 + 3\cdot 6 = 27$$

para $x=12$ y $y = 5$ también se cumple:

$$12 + 3\cdot 5 = 27$$

para $x = 0$ y $y = 9$ también se cumple:

$$0 +3\cdot 9 = 27$$

y así sucesivamente.

Cada par de valores, uno para la x y otro para la y, que cumplen la igualdad se llama solución de la ecuación. Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Ahora bien, puede ser que en el contexto del problema que ha originado la ecuación algunas de estas infinitas soluciones no tenga sentido. Por ejemplo, $x = 2,4$ y $y = 8,1$ es solución de la ecuación $x + 3y = 27$ pero no tiene sentido producir 2,4 carteras y 8,1 maletines

Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Tal como hemos visto para las ecuaciones de primer grado con una incógnita, los siguientes procedimientos permiten hallar ecuaciones equivalentes a otra dada previamente:

1) Sumar o restar a los dos miembros de una ecuación el mismo número.

2) Multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número (diferente de cero).

14. Determina si son equivalentes el siguiente par de ecuaciones:

$5x - 3 = 3y + 1$ $\qquad 10x - 6 = 6y + 2$

Volvamos a considerar el ejemplo de las carteras y los maletines. La disponibilidad de piel no es el único elemento a tener en cuenta para producir carteras y maletines. Hay otros elementos que también son muy importantes, como por ejemplo el número de horas de trabajador que son necesarias.

15. Una empresa fabrica carteras y maletines con el mismo tipo de piel. Para fabricar una cartera utilizan 1 m^2 de piel y 3 m^2 para un maletín. Para fabricar una cartera necesitan dos horas de trabajador y 1 hora para fabricar un maletín. Sabiendo que la empresa dispone de 27 m^2 de piel y de un equipo humano capaz de trabajar 34 horas, completa la tabla siguiente hasta hallar una producción que agote tanto la disponibilidad de piel como la de mano de obra:

(Sugerencia: utilita el método de ensayo y error).

carteras	maletines	m^2 de piel	n.º horas
7	6	25	20
11	5	....	....
....	....	....	....
....	....	27	34

Si bien por el método de ensayo y error es posible hallar la solución de esta actividad, la mejor manera de resolverla es plantear dos ecuaciones:

x = n.º de carteras

y = n.º de maletines

$$x + 3y = 27$$

$$2x + y = 34$$

Dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas consideradas conjuntamente forman un *sistema* y se suelen representar con una llave. En el caso del sistema anterior: $\begin{cases} x+3y=27 \\ 2x+y=34 \end{cases}$. La llave también se puede poner a la derecha. $\left.\begin{matrix} x+3y=27 \\ 2x+y=34 \end{matrix}\right\}$

Dado un sistema, como por ejemplo, $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{cases}$ tenemos que la primera ecuación $2x + 3y = 7$ tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, para $x = 2$ y $y = 1$ se cumple la igualdad: $2·2 + 3·1 = 7$. Otras soluciones son: $x = -1$ y $y = 3$, $x = -2,5$ y $y = 4$, etc. De estas infinitas soluciones, la solución $x = 2$ y $y = 1$ también lo es de la segunda ecuación $x - 5y = -3$, porque $2 - 5·1 = -3$. Mientras que las otras no lo son:

$x = -1$ y $y = 3$ no es solución porque $-1- 5·3 \neq -3$

$x = -2,5$ y $y = 4$ no es solución porque $-2,5 - 5·4 \neq -3$

De hecho, sólo la solución $x = 2$ y $y = 1$ es solución a la vez de las dos ecuaciones de este sistema.

16. Construye un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tenga como solución $x = -4$ y $y = 0$.

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo

Los siguientes sistemas son equivalentes puesto que $x = 2$ y $y = 1$ es la solución de los dos sistemas:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+6y=14 \\ x-5y=-3 \end{cases}$$

Las dos ecuaciones inferiores son iguales, mientras que si multiplicamos la ecuación superior $2x + 3y = 7$ por 2, obtenemos la ecuación $4x + 6y = 14$.

Resolver un sistema es hallar su solución. En la secundaria se explican tres métodos de resolución: igualación, substitución y reducción.

Ejemplo

Resolución por igualación del sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{array}\right\}$

1) Despejamos x en las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x=\dfrac{7-3y}{2} \\ x=-3+5y \end{array}\right\}$$

(También se puede despejar la y)

2) Igualamos las expresiones de la incógnita despejada, obteniendo una ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=7 \\ x-5y=-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x=\dfrac{7-3y}{2} \\ x=-3+5y \end{array}\right\} -3+5y=\frac{7-3y}{2}$$

3) Resolvemos la ecuación anterior; la solución de esta ecuación nos dará el valor de una de las incógnitas:

$-3+5y=\dfrac{7-3y}{2}$; $-6 + 10y = 7 - 3y$; $10y + 3y = 7+6$; $13y = 13$; $y = 1$

(Hemos resuelto una ecuación de primer grado en la que la incógnita es y)

4) Substituimos y por 1 en la ecuación $x = -3 + 5y$:

$$x = -3 + 5(1) \quad x = 2$$

Hemos obtenido el valor de la x. La solución del sistema es $x = 2$ y $y = 1$. Por último, conviene comprobar que el par ordenado de números que hemos obtenido efectivamente son la solución del sistema:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$2 - 5 \cdot 1 = -3$$

17. Resuelve cada sistema por un método diferente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=9 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 2x+y=19 \\ 2x-y=9 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 6x+4y=7 \\ -4x+4y=-3 \end{array}\right\}$$

Generalmente, un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, tiene una única solución, pero hay excepciones. Por ejemplo, $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -2x+2y=8 \end{array}\right\}$ es un sistema sin solución, porque si -2x + 2y vale -2, es imposible que, a la vez, -2x + 2y sea 8. Por tanto, no es posible hallar una solución común a las dos ecuaciones.

Si resolvemos este sistema por reducción obtenemos la expresión 0 = 10, y como 0 no es igual a 10, el sistema no tiene solución:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -2x+2y=8 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -2x+2y=8 \end{array}\right\} \\ \hline 0=10 \end{array}$$

Cuando se llega a una expresión del tipo 0 = b (con b diferente de cero) el sistema no tiene solución.

Por otra parte, hay sistemas como, por ejemplo, $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -4x+4y=-4 \end{array}\right\}$ que tienen infinitas soluciones. Basta observar que las dos ecuaciones son prácticamente la misma: la segunda es equivalente a la primera ya que resulta de multiplicar la primera por dos. En este caso, las infinitas soluciones de la primera, también lo son de la segunda.

Si resolvemos este sistema por reducción, obtenemos la expresión 0 = 0.

$$\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -4x+4y=-4 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 8x-8y=8 \\ 8x-8y=8 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 8x-8y=8 \\ 8x-8y=8 \end{array}\right\} \\ \hline 0=0 \end{array}$$

Cuando se llega a una expresión del tipo 0 = 0, el sistema tiene infinitas soluciones.

La resolución grafica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas explica claramente porque sólo son posibles estas tres posibilidades:

Ejemplo

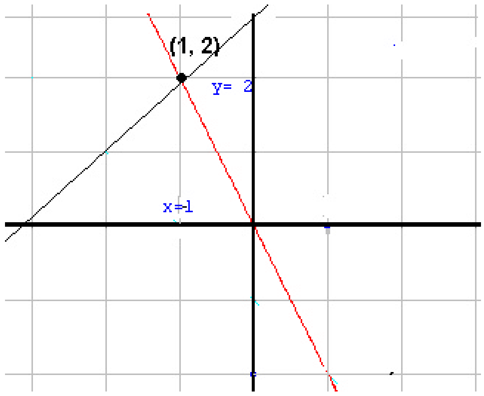
Resolución gráfica del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 2x-2y=-2 \end{array}\right\}$$

Despejamos la y en las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 2x-2y=-6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} y=-2x \\ -2y=-2x-6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=-2x \\ y=x+3 \end{array}\right\}$$

Las dos ecuaciones del último sistema son las ecuaciones explícitas de dos rectas. Si damos valores a la x y obtenemos los correspondientes valores de la y en cada ecuación del sistema, para cada ecuación obtendremos un conjunto de puntos (x,y), que representados en un sistema de ejes de coordenadas, dan lugar a una recta. Si consideramos los valores x = 0 y x = 1, obtenemos para la primera ecuación, los puntos (0,0) y (1,-2), con los cuales tenemos suficiente para representar la recta y para la segunda ecuación, los puntos (0,3) y (1,4).

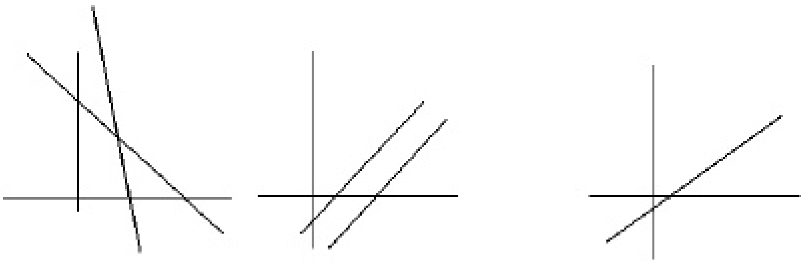


Como se puede observar las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (-1,2). Este punto es de la primera recta y, por tanto, sus coordenadas cumplen la primera ecuación del sistema, pero, al ser también de la segunda recta, también cumple la segunda ecuación del sistema. Por tanto, ¿qué información nos da este punto? Pues que la solución del sistema es x = -1, y = 2 lo cual se comprueba si en las ecuaciones del sistema substituimos x por 1 y y por -2

18. Aplica este procedimiento de resolución a un sistema que no tiene ninguna solución y a un sistema que tiene infinitas soluciones, ¿Qué observas?:

a) $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -2x+2y=8 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=-2 \\ -4x+4y=-4 \end{array}\right\}$

La interpretación gráfica de la solución de una ecuación del sistema como puntos de una recta y la interpretación gráfica de la solución de un sistema como los puntos en común de las rectas nos permite ver que sólo existen tres posibilidades: 1) que las rectas se corten, 2) sean paralelas o 3) sean la misma. Atendiendo a esta clasificación, un sistema sólo puede ser compatible determinado (una única solución), incompatible (ninguna solución) o bien compatible indeterminado (infinitas soluciones).



De la misma manera que ya hemos utilizado las ecuaciones de primer grado para resolver problemas, también se utilizan los sistemas para resolver determinados tipos de problemas. La estrategia a seguir es casi la misma que la utilizada para resolver problemas en los que había que plantear una ecuación de primer grado con una incógnita

Ejemplo:

Un tipo de mesa tiene 6 patas y otro tiene 8. En una tienda tienen en total 28 de estas mesas. Sabiendo que en total hay 188 patas. ¿Cuántas mesas de cada tipo hay en la tienda?

1) Incógnitas

Llamaremos x = n.º de mesas del primer tipo y y = n.º de mesas del segundo tipo.

2) Planteamiento del sistema

En total hay 28 ------------> $x + y = 28$

El primer tipo de mesa tiene 6 patas y el segundo 8 ---------------> $6x + 8y = 188$

3) Resolución del sistema $\left.\begin{array}{r} x+y= \;\; 28 \\ 6x+8y= \;\; 188 \end{array}\right\}$ por el método de reducción:

$$\left.\begin{array}{r} x+y= \;\; 28 \\ 6x+8y= \;\; 188 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 6x+6y= \;\; 168 \\ 6x+8y= \;\; 188 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} 6x+6y= \;\; 168 \\ 6x+8y= \;\; 188 \end{array}\right\} \\ \hline 2y=20 \end{array}$$

$$2y = 20$$

$$y = 10$$

Substituimos en la primera ecuación y por 10:

$x + y = 28 \quad x + 10 = 28 \quad x = 28 - 10 \quad x = 18$

La solución es 18 mesas del primer tipo y 10 del segundo.

Finalmente, se comprueba que el par de números hallados son la solución del sistema:

$$18 + 10 = 28$$

$$6 \cdot 18 + 8 \cdot 10 = 188$$

19. Una persona tiene 20 billetes de 10 y 20 euros que suman en total 340 €. ¿Cuántos billetes tiene de cada clase?

20. En una reunión hay 25 chicas más que chicos. Diez parejas se van y quedan el doble de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas había en la reunión?

21. Un grupo de amigos decide comprar la merienda. Ana va a un quiosco donde compra 2 bocadillos pequeños de jamón y 1 refresco por 1,80 € y no se fija en el precio de cada cosa. Alberto también va a comprar al quiosco 3 bocadillos y 2 refrescos del mismo tipo y precio que los que compró Ana, paga 3,10 € y tampoco se fija en los precios.
a) ¿Cuál es el precio de un bocadillo? ¿Y de un refresco?
b) Más tarde, Miguel va a comprar 6 bocadillos pequeños de jamón y 3 refrescos del mismo tipo y paga 4,20 €. ¿Compró en el mismo quiosco?

También podemos considerar sistemas en los que alguna o las dos ecuaciones sean de grado superior a uno, la incógnita esté en el denominador, etc..

9.2. El punto de vista de las funciones proposicionales

Supongamos que designamos con la letra D el conjunto de los días de la semana.

D = {Lunes, Martes, Miércoles, Jueves, Viernes, Sábado, Domingo}.

- El enunciado "Martes sigue inmediatamente a Lunes" es una proposición, porque podemos afirmar que es verdadera.

- En cambio el enunciado, "Martes es posterior a *X*" es una función proposicional de una variable: mientras no demos un valor particular a la variable *X* no podemos afirmar si es verdadero o falso.
- También podemos construir enunciados con dos variables: "El día *X* es posterior al día *Y*". Asignando valores a *X* e *Y* obtenemos proposiciones. En la tabla adjunta se representa la función proposicional de dos variables *"El día X es posterior al día Y"*

Domingo	*						
Sábado							*
Viernes						*	
Jueves					*		
Miércoles				*			
Martes			*				
Lunes		*					
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

Otros ejemplos de sentencia abierta o función proposicional de dos variables son los siguientes:

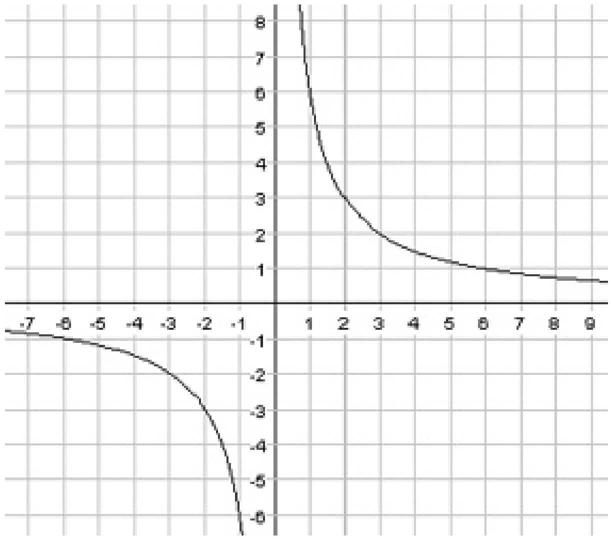
- El conjunto de pares de números naturales cuya suma es 8, $x + y = 8$ es un ejemplo de *ecuación* de dos variables. Su conjunto de validez o solución está formado por los pares ordenados, {(1,7), (7,1), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)}.
- La función proposicional, $x + y < 4$, es un ejemplo de *inecuación* de dos variables. Si tomamos como conjunto de sustitución *N* (número naturales), tiene como conjunto de validez los pares de números {(1,1), (1,2),(2,1)}.

Las funciones proposicionales de dos variables numéricas suelen tener como conjunto de sustitución el producto cartesiano de *RxR* (plano real). Los pares posibles de números reales que podrían satisfacer la función son, por tanto, infinitos, es decir, también será infinito el conjunto solución.

Ejemplo:

> Supongamos que, en la función proposicional (o simplemente, función) de dos variables, $x \cdot y = 6$, *x* e *y* toman sus valores en *R*. Podemos generar tantos pares de números que son soluciones de esa ecuación como deseemos, simplemente eligiendo cualquier valor (no cero) para *x* y después determinando el valor de *y*, que se obtiene dividiendo 6 por el valor asignado a *x*, ya que $x \cdot y = 6$ es equivalente a $y = 6/x$

La manera habitual de expresar el conjunto de pares que satisfacen una función proposicional de dos variables es mediante una representación en el sistema de coordenadas cartesianas, como se indica en la figura para la función $x \cdot y = 6$.



Cuando dos ecuaciones con dos variables se consideran conjuntamente, unidas mediante la conjunción *y*, forman un *sistema de dos ecuaciones de dos variables*. Ambas constituyen una función proposicional (sentencia abierta) compuesta. Con frecuencia la conjunción y se sustituye por una llave.

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases}$$

quiere decir, $3x - 2y = 9$ y $4x + 2y = -6$

10. LAS FUNCIONES Y SUS REPRESENTACIONES

10.1. El concepto de función

Hay muchas situaciones en las que dos variables están relacionadas. Esta relación es una función cuando para cada valor de la variable independiente le corresponde un solo valor de la variable dependiente. Esta relación se puede expresar en forma de enunciado, gráfica, tabla y fórmula.

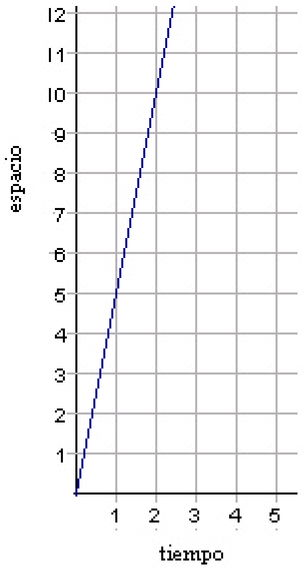
Ejemplo

Si un móvil se desplaza a velocidad constante, el espacio que recorre en un tiempo dado se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo. Decimos que el espacio depende o es función del tiempo.

Si indicamos con las variables e y t el espacio y el tiempo, respectivamente, de un móvil que se mueve a velocidad constante, por ejemplo de 5m/s, la dependencia del espacio con respecto al tiempo se expresa simbólicamente con la fórmula, $e = 5t$. La relación de dependencia entre las variables espacio y tiempo se puede expresar mediante una fórmula algebraica, como hemos hecho, $e = 5t$, o bien, para una serie finita de valores, en forma de tabla:

Tiempo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Espacio	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75

También se puede expresar mediante una gráfica cartesiana, como la que reproducimos a continuación.



22. En una entidad bancaria hay una tabla que muestra las equivalencias entre el euro y el dolar:

Dólares	9	18	24	36
Euros	10	20	30	40

a) Cuando se ha confeccionado esta tabla se ha cometido un error. ¿Cuál?

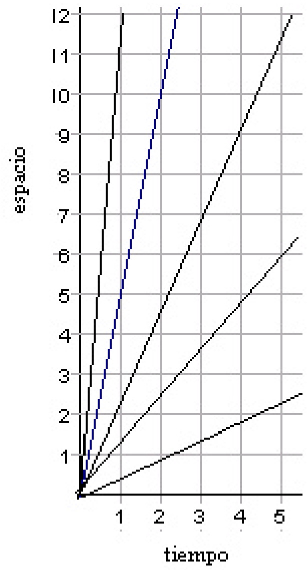
d) Dibuja la gráfica de esta relación a partir de la tabla anterior.

c) Halla una fórmula que permita saber el n.º de dólares conociendo el n.º de euros.

10.2. Modelos de funciones

Funciones de proporcionalidad directa

En la expresión de la relación entre espacio y tiempo recorrido por un móvil en el caso de movimiento uniforme, la velocidad se supone constante en cada caso particular, pero puede ser distinta de un caso a otro. La velocidad interviene en la fórmula $e = vt$ como un *parámetro*. Dando valores distintos a este parámetro obtenemos una familia de funciones, que se expresan gráficamente mediante rectas concurrentes en el origen de coordenadas y con pendientes diferentes.



Otras relaciones de dependencia entre cantidades de magnitudes físicas que se expresan con fórmulas similares son, por ejemplo,

- La relación entre la velocidad y el tiempo para una aceleración constante: $v=at$.
- La relación entre la altura y la sombra de un edificio.
- La ley de Ohm, que nos dice que la diferencia de potencia V aplicada a un conductor de resistencia constante R es proporcional a la intensidad de corriente eléctrica I que circula por él: $V = RI$.
- La ley de Hook: Si colgamos un muelle por un extremo y le aplicamos un peso p en el otro extremo, le produciremos un alargamiento Dl que viene dado por la fórmula: $Dl = kp$, donde k es una constante característica del material y de las dimensiones y forma del muelle.

Todas estas fórmulas tienen la misma estructura y permiten, fijado un valor para el parámetro*,* calcular el valor y (*variable dependiente*) conocido el valor x (*variable independiente*). Se trata de la *función de proporcionalidad directa* $y = ax$. Este tipo de función tiene una extraordinaria importancia ya que permite modelizar una gran variedad de situaciones en todos los campos de aplicación de las matemáticas.

En una función de proporcionalidad directa los valores que toman las variables x, e y son en general números reales, que corresponden a las medidas de magnitudes que intervienen en las diversas situaciones. Si duplicamos, triplicamos, dividimos por dos, etc. la cantidad representada por x, la cantidad representada por y también se duplica, triplica, divide por dos, etc. Por otra parte, como una función de proporcionalidad directa se puede expresar por una fórmula del tipo $y=ax$, el cociente y/x es constante e igual al parámetro a de la fórmula.

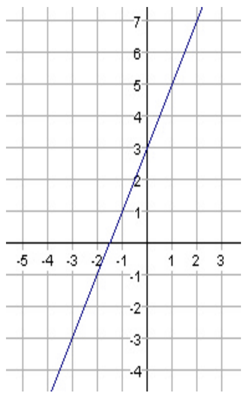
Las relaciones de dependencia entre dos o más variables también pueden venir expresadas por fórmulas que no se corresponden con el modelo de la función de proporcionalidad directa. En la secundaria, además de las funciones de proporcionalidad directa se estudian otros modelos de funciones. Los principales son:

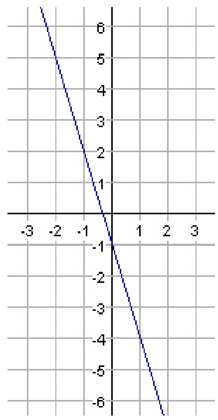
Funciones afines

Tienen por fórmula $f(x) = ax+b$

Las gráficas que las representan son rectas que no pasan por el origen de coordenadas, siempre que b?0. El parámetro a de la fórmula determina la inclinación de la recta. Si su signo es positivo la función es creciente y si es negativo la función es decreciente. El coeficiente b determina la segunda coordenada del punto de corte de la gráfica con el eje de ordenadas

Por ejemplo, $f(x) = 2x + 3$ y $f(x) = -3x - 1$ son funciones de este tipo.





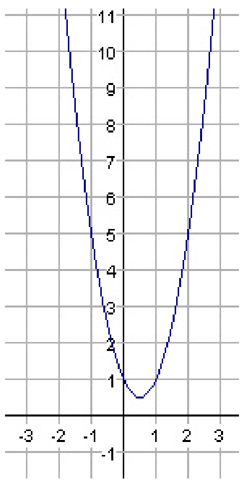
Funciones cuadráticas

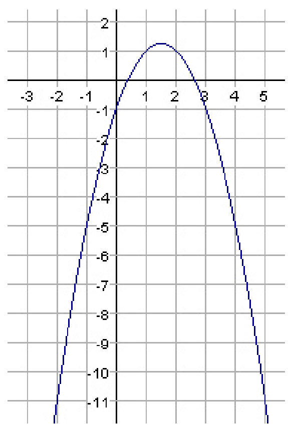
Tienen por fórmula $f(x) = ax^2+bx+c$

Las gráficas que las representan son parábolas.

El valor del parámetro a determina la amplitud de la parábola. Si es positivo la abertura de la parábola es hacia arriba y si es negativo hacia abajo. El coeficiente c determina la segunda coordenada del punto de corte de la parábola con el eje de ordenadas

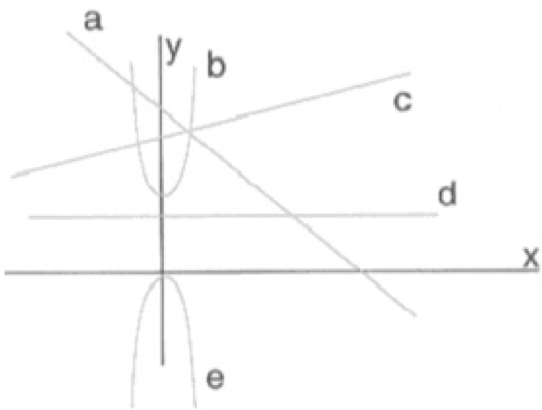
Por ejemplo, $f(x) = 2x^2-2x+1$ y $f(x) = -x^2+ 3x-1$ son funciones de este tipo.





23. Asocia cada fórmula con la gráfica correspondiente:

a) $f(x) = -x + 7$ b) $f(x) = 3$ c) $f(x) = -2x^2$ d) $f(x) = 2x^2 + 4$ e) $f(x) = 0{,}5x + 7$



24. Asocia a cada enunciado un modelo de función:

a) La relación entre el lado y el perímetro de un cuadrado

b) La relación entre el lado y el área de un cuadrado

c) La relación entre las ventas y el sueldo de un vendedor de libros que está compuesto de una parte fija y de un porcentaje sobre ventas

Otros modelos

Además de estos dos modelos de funciones se estudian las funcions de proporcionalidad inversa que tienen por gráfica una curva llamada hipérbola. Estas funciones aparecen en las situaciones de proporcionalidad inversa, y presentan una fórmula del tipo $f(x) = a/x$.

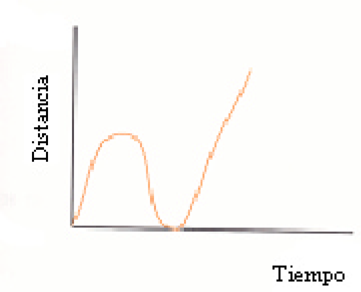
Otro tipo de funciones estudiadas son las que describen diversos fenómenos de la vida real en los cuales el crecimiento o decrecimiento se hace de manera progresiva. Las hallamos en la descripción de la evolución de poblaciones, en la desintegración radioactiva, en el estudio de la presión atmosférica, en el cálculo del interés compuesto, etc. Son las funciones exponenciales y su fórmula es del tipo $f(x) = a^x$.

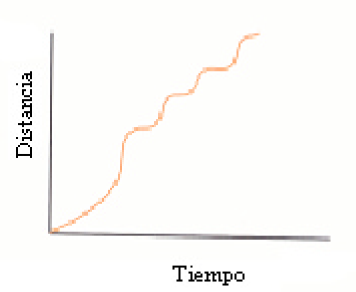
Otro tipo de funciones estudiadas son aquellas que describen fenómenos que se repiten a intervalos regulares: las mareas, el número de horas de luz en una determinada latitud, los latidos del corazón, etc. También, hay otros fenómenos que se repiten periódicamente y han de ser estudiados en un laboratorio: las oscilaciones del péndulo, las vibraciones del sonido, las revoluciones del movimiento de un motor, etc. La gráfica de estas funciones, llamadas funciones periódicas, se va repitiendo de manera regular.

25. Luisa y Antonio explican su ida al trabajo:

- Luisa: he venido en moto, pero a medio camino me he dado cuenta de que me había dejado unos documentos y he vuelto a buscarlos. Después he tenido que correr mucho para no llegar tarde al trabajo.
- Antonio: Mi padre me ha llevado en coche. Al principio el tránsito era fluido, pero después nos hemos topado con un montón de semáforos en rojo.

¿Cuál de estas gráficas corresponde a cada uno?





26. Dibuja una gráfica que represente la relación entre el tiempo y la cantidad de agua de un depósito, siguiendo las siguientes especificaciones:

El depósito se va llenando de manera regular hasta que llega a un cierto nivel. En este momento se vacía rápidamente y vuelve a comenzar el llenado. El tiempo que tarda en llenarse es de 10 minutos, y para vaciarse es de 30 segundos. La capacidad máxima del depósito es de 30 litros.

27. Queremos vallar con alambre un jardín de forma cuadrada[6].

a) ¿Cuánto alambre es necesario si el lado del jardín mide 12 m? ¿Y si mide 7 m, o 33,5 m?
b) Construye una tabla con los datos anteriores y añade otros.
c) Sitúa en una gráfica los datos de la tabla. ¿Cómo quedan los puntos?
d) Si hemos utilizado 108 m de alambre, ¿qué dimensiones tenía el jardín? Explica cómo se hallan los metros de alambre necesarios si se conoce la longitud del lado del jardín.
e) Escribe una fórmula que nos dé los metros de alambre (que llamamos y) necesarios para vallar un jardín de *x* metros de lado.

28. Un grupo de amigos quiere comprar un balón que cuesta 35 euros.

a) ¿Cuánto pagarán si son 10 chicos? ¿Y si son 25?
b) Construye una tabla con los datos anteriores, que nos dé lo que debe pagar cada uno según el número de chicos, y añade otros pares de valores.
c) Sitúa en una gráfica los datos de la tabla.
d) ¿Qué propiedad cumplen los pares de valores de la tabla?
e) Si el número de chicos es x, y lo que paga cada uno es y, escribe una fórmula que exprese esta situación.

29. Un globo sonda lleva incorporado un termómetro para medir la temperatura a distintas alturas. Si llamamos x a la altura del globo en metros, respecto al nivel del mar, e y a la temperatura en dicha altura, la siguiente fórmula nos permite conocer la temperatura para una altura determinada.

$$y = -\frac{1}{200}x + 10$$

[6] Azcárate y Deulofeu (1991, p.85-86)

a) ¿Qué temperatura marcará el termómetro al nivel del mar, a 200 m y a 1 km?

b) ¿A cuántos metros de altura la temperatura es de 0ºC? ¿Cada cuántos metros la temperatura disminuye 1ºC?

c) Construye una tabla con los datos anteriores que nos dé la temperatura para cada altura. Sitúa los valores de la tabla en una gráfica cartesiana?

30. El coste de una ventana cuadrada depende de su tamaño. El precio del cristal es de 5 euros por dm^2, y el marco 10 euros por dm.

a) ¿Cuánto costará una ventana de 7 dm de lado, de 1 m y de 1,5 m?

b) Construye una tabla, con los datos anteriores y otros que elijas, que dé el coste según la longitud del lado de la ventana.

c) Sitúa los valores de la tabla anterior en una gráfica cartesiana.

d) Llamando x a la longitud del lado de la ventana e y al coste de la misma, escribe una fórmula que dé el coste conocida la longitud del lado.

11. TALLER MATEMÁTICO

1. Resuelve las siguientes ecuaciones identificando las transformaciones de equivalencia que se usan:

a) $3(6 - x) = 2^4$ b) $x + 3(x + 2) = 5(x + 3) - 5$ c) $3(x - 2) - 4(x + 5) = 10(x + 4)$

d) $\frac{x}{2} + \frac{3+x}{7} = -\frac{x}{14}$ e) $\frac{5}{3} \cdot \left(3 - \frac{x}{2}\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{9}{2} - x\right)$

2. Queremos repartir cromos a un grupo de niños. No podemos dar 6 cromos a cada uno porque faltarían 8. Si les damos 5, nos sobran 20. ¿Cuántos cromos tenemos para repartir? ¿Cuántos niños hay?

3. Un trabajador gana 6,40 euros por hora de trabajo ordinaria, mientras que las horas extraordinarias que trabaje por encima de 40 horas semanales las cobra a la mitad de las horas ordinarias. ¿Cuántas horas extraordinarias debe trabajar para ganar 352 euros a la semana?

4. En el último año el salario bruto de Carlos se redujo un 35% por impuestos, seguros, etc. Este año ha recibido un 6% de incremento en el salario bruto, pero las deducciones han subido al 37%. ¿En qué porcentaje se ha incrementado su salario neto?

5. Resuelve las siguientes inecuaciones, representa sobre la recta numérica el conjunto solución e identifica las transformaciones de equivalencia que se aplican:

a) $5(6x + 3) \leq 3$ b) $x(3 + x) > x^2 + 5x - 12$ c) $(x + 2)^2 < x^2 + 2^2$

6. Una escuela de primaria tiene dos ofertas para su servicio de copistería. La empresa "Copy" le alquila una fotocopiadora por 150 € al mes y 0,01 € por cada fotocopia. En cambio, la empresa "La mejor fotocopia" le alquila una fotocopiadora por 110 € al mes y 0,02 € por cada fotocopia.

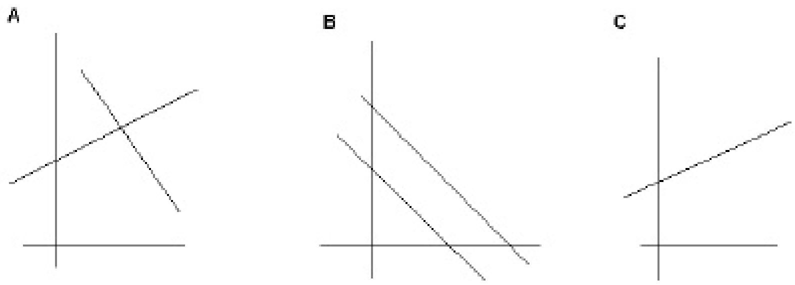
a) ¿A partir de cuantas fotocopias le interesa contratar los servicios de "Copy" a esta escuela?
b) ¿Para qué cantidad de fotocopias es indiferente cuál sea la empresa que gestiona el servicio?

7. La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. Cuando se invierten de orden las cifras, el número obtenido es igual al original menos 27. ¿Cuál es el número original?

8. Un grifo llena un depósito en 90 minutos, mientras que otro lo hace en 135 minutos. ¿Cuánto tardan los dos juntos?

9. a) Del sistema $\left.\begin{array}{r} 4x+y=-3 \\ 8x+ky=-6 \end{array}\right\}$ sabemos que es compatible indeterminado, ¿cuál es el valor de k?
b) Del sistema $\left.\begin{array}{r} 4x+y=-3 \\ 8x+2y=-2k \end{array}\right\}$ sabemos que es incompatible, ¿Qué puedes decir del valor de k?

10. Relaciona las siguientes afirmaciones con la gráfica correspondiente:
a) Sistema compatible determinado
b) Sistema incompatible
c) Ninguna solución
d) Sistema compatible indeterminado
e) Una única solución
f) Infinitas soluciones



11. Dada la tabla del peso y el precio correspondiente a un tipo de queso del Pirineo.

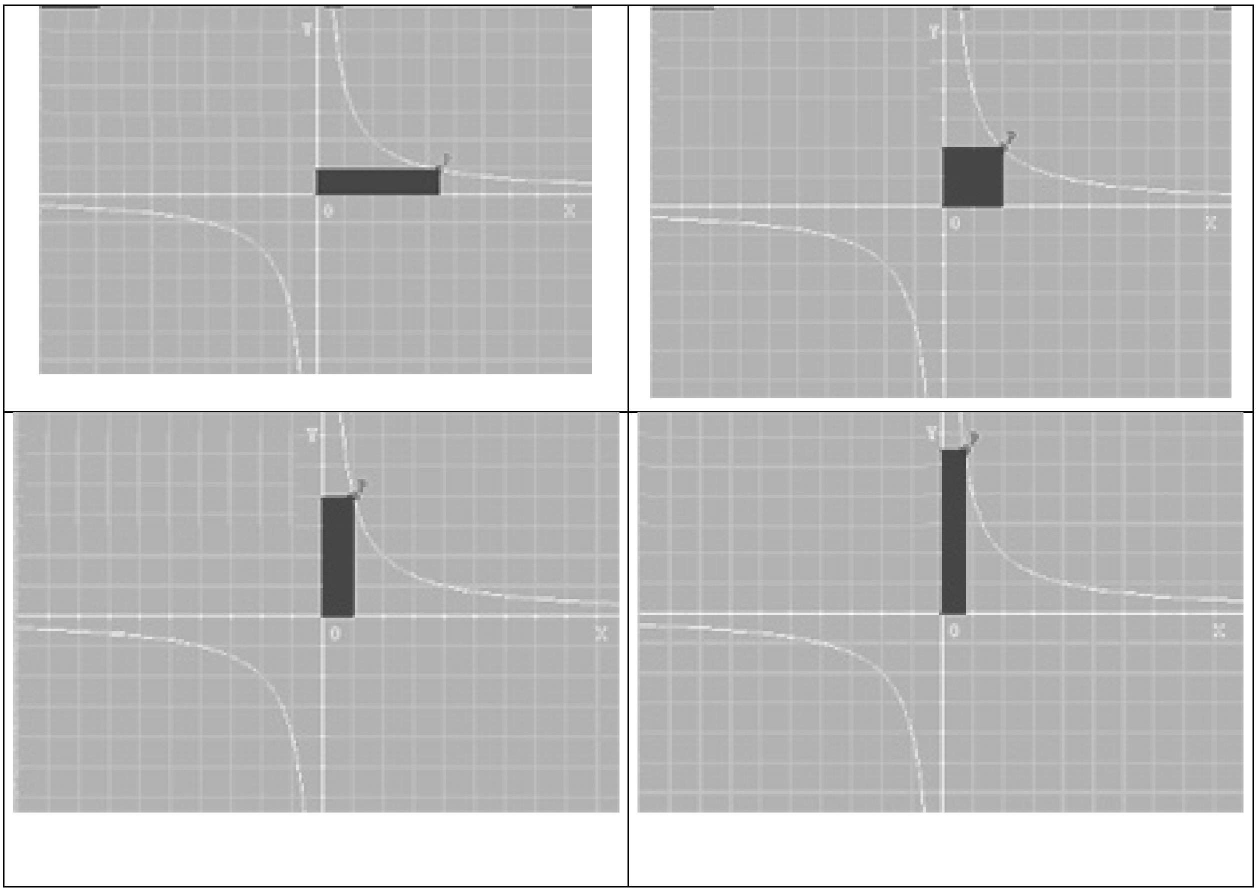
peso (gramos)	100 g	250 g	400 g	500 g	750 g	1000 g
precio (euros)	0,9 €	2,25 €	3,6 €	4,5 €	6,75 €	9 €

a) Divide cada peso por su precio. ¿Qué resultado has obtenido?¿Qué significa?
b) Halla la fórmula que permite, conociendo el peso, calcular el precio.
c) Dibuja la gráfica de esta función. ¿A que modelo corresponde?

12. Considera rectángulos cuya área es de 36 unidades cuadradas. El ancho a de los rectángulos varía con relación al largo b según la fórmula $a = 36/b$. Haz una tabla que muestre los valores de los anchos para todos los valores posibles del largo que sean

números enteros menores o iguales a 36. Representa gráficamente la relación entre las dimensiones de dichos rectángulos. ¿Qué forma se espera tendrá la gráfica?

13. A continuación tienes la gráfica de la función de proporcionalidad inversa $f(x) = k/x$. Los puntos de esta gráfica determinan rectángulos. ¿Qué puedes decir de todos los rectángulos determinados por los puntos de la gráfica?



14. Un material radioactivo tiene la propiedad de que cada año tiene una masa igual a la mitad de la que tenía el año anterior. Inicialmente, se dispone de 1 gramo de este material.

a) ¿Cuántos gramos de este material tendremos al año siguiente?¿Y al finalizar el segundo año? ¿Y a cabo de tres años? ¿Y al cabo de 5 años?

b) Confecciona una tabla ordenada que relacione los años transcurridos y la masa del material en gramos.

c) ¿Qué masa había un año antes de comenzar la observación? ¿Y dos años antes?

d) Completa la tabla del apartado b) con los valores correspondientes a dos años anteriores al comienzo de la observación (considera estos años como negativos).

e) Representa gráficamente esta relación entre el tiempo y la masa.

f) Halla la fórmula que permite calcular los gramos de material radioactivo a partir del tiempo transcurrido.

15. Una cartulina tiene un grosor de aproximadamente 1 mm.

a) ¿Cuál es el grosor después de 6 pliegues?

b) ¿Cuántos pliegues son necesarios para que el grosor supere la distancia Tierra-Luna (385.000 km, aproximadamente)

16. Un estudiante de física deja caer una bola por una rampa y observa lo siguiente:

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5
Distancia recorrida (cm)	0	3,2	12,8	28,8	51,2	80

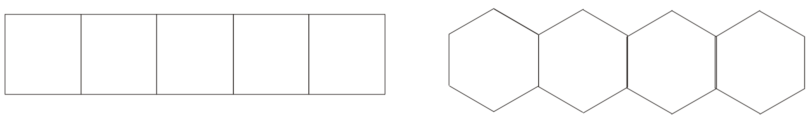
a) ¿Qué distancia recorrerá la bola en 10 segundos?

b) Para estimar la distancia que recorrerá la bola después de un tiempo t resulta útil ajustar una función cuadrática $g(t) = at^2 + bt + c$ calculando los valores de a, b y c de tal manera que la función $g(t)$ pase por tres de los puntos medidos. Resuelve el problema, planteando un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.

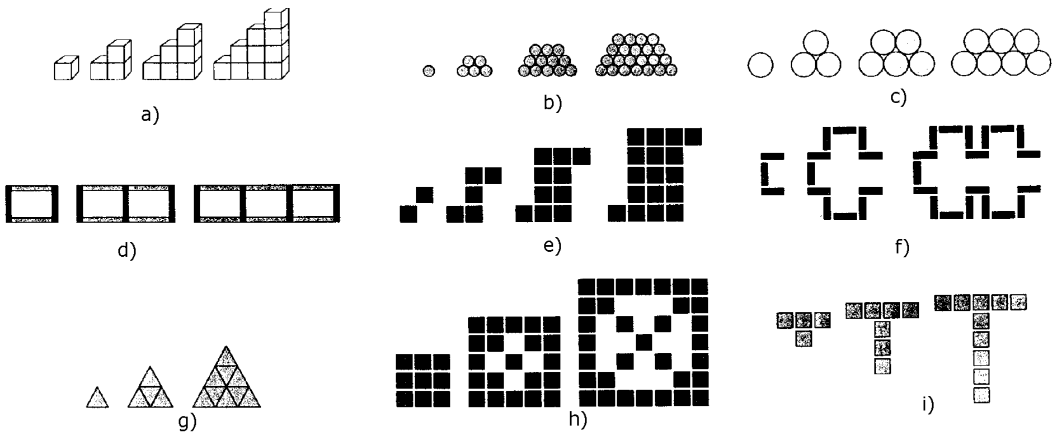
17. Cuál es el perímetro de un friso formado por n teselas de formas:

a) cuadrangulares

b) hexágonos regulares.



18. Para los patrones de crecimiento de la figura adjunta encontrar una función que permita calcular el número de elementos para el término n de la sucesión.



19. Al disponer puntos en el plano en forma triangular y contar el número total de éstos en cada uno de los triángulos, obtenemos los llamados "Números triangulares" 1, 3, 6, 10,...

*	*	*	*
	**	**	**
		***	***
			****

a) Llamaremos T_n al número triangular cuya base está formada por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para T_n ?
b) Los números cuadrados son:

*	* *	* * *
	* *	* * *
		* * *

c) Llamaremos C_n al número cuadrado cuyo lado está formado por n puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para C_n ?
d) ¿Hay alguna relación entre los números triangulares y los cuadrados?¿Cuál?

C: Conocimientos Didácticos

1. ORIENTACIONES CURRICULARES

En los documentos curriculares españoles (Diseño Curricular Base y Decreto de Primaria del MEC) no se hace mención a contenidos que puedan sugerir nociones o actividades propias del inicio del razonamiento pre-algebraico. Esta situación contrasta con las propuestas contenidas en los Principios y Estándares 2000 del NCTM.

En las tablas 1 y 2 incluimos las expectativas formuladas por los Principios y Estándares 2000 sobre el bloque de Álgebra para los grados K-2 y para los grados 3-5. Como se observará no se trata que los estudiantes de estos niveles realicen manipulaciones de símbolos algebraicos, que con frecuencia es a lo que se reduce el aprendizaje del álgebra en secundaria.

Tabla 1:

Estándares de contenido	*En los grados K-2 todos los alumnos deberán,*
Comprender patrones, relaciones, y funciones	- clasificar y ordenar objetos por tamaño, número y otras propiedades; - reconocer, describir, y continuar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o patrones numéricos simples, y pasar de una representación a otra.
Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos	- Ejemplificar principios y propiedades generales de las operaciones, tales como la conmutatividad, usando números específicos. - usar representaciones concretas, gráficas y verbales para mejorar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	- modelizar situaciones que impliquen la adición y sustracción de números naturales, usando objetos, dibujos, y símbolos.
Analizar el cambio en diversos contextos	- describir cambios cuantitativos, tales como el mayor crecimiento de un alumno; - describir cambios cuantitativos, tales como que un alumno crece dos centímetros en un año.

Estándares de contenido	*En los grados 3-5 todos los alumnos deberán,*
Comprender patrones, relaciones, y funciones	- describir, continuar y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos; -representar y analizar patrones y funciones, usando palabras, tablas y gráficos.
Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos	- identificar propiedades tales como la commutativa, asociativa, distributiva y usarlas para calcular con números naturales, - representar la idea de variable como una cantidad desconocida usando una letra o un símbolo;

	- expresar relaciones matemáticas usando ecuaciones.
Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas	- modelizar situaciones problemas con objetos y usar representaciones tales como gráficos, tablas, y ecuaciones para extraer conclusiones.
Analizar el cambio en diversos contextos	- investigar cómo el cambio en una variable se relaciona con el cambio en otra; - identificar y describir situaciones con tasas de variación constante o variable y comparalas.

2. DESARROLLO COGNITIVO Y PROGRESIÓN EN EL APRENDIZAJE. CONFLICTOS EN EL APRENDIZAJE

El tipo de experiencias que tienen los niños con la aritmética es importante para la comprensión progresiva del álgebra, ya que las primeras experiencias con el razonamiento algebraico se corresponden con la "aritmética generalizada".

El concepto matemático que hace posible esa generalización es el de *variable*. El uso de variables, tales como x e y en el enunciado $y = 5x + 12$, no es más que una generalización de una relación aritmética. Expresa la relación numérica general que un número es 5 veces otro número más 12. El uso de variables es un indicador clave de que la actividad matemática pasa de ser aritmética a algebraica. La enseñanza de la aritmética queda incompleta y deficiente si no se le imprime una orientación hacia la generalización.

2.1. Estadios en la comprensión de las variables

En la sección 4 (parte B) hemos distinguido dos etapas con relación al uso de los símbolos matemáticos. Esta primera clasificación se ha matizado y desarrollado en diferentes investigaciones[7] que han determinado que los alumnos progresan en su comprensión del uso de letras y el dominio de las variables según ciertos estadios o niveles.

Estadio 1: Letra evaluada

El niño asigna un valor numérico a las letras desde el principio. Si se pregunta al niño, "Si $5 + 2x = 13$, ¿cuánto vale x?", dirá que 4, sin que seguramente haga ninguna manipulación escrita, le bastará un simple cálculo mental. Un ejercicio tal como $11 - y = 6$ se resuelve simplemente recordando la tabla de sumar, $6 + 5 = 11$.

Estadio 2: Letra ignorada

El niño ignora la presencia de la letra, o no le da ningún significado. Si se le pregunta el valor de $a + b + 2$ cuando se sabe que $a+b$ es igual a 27, el niño puede responder 29 sin pensar en ningún momento sobre la a, la b o la suma $a+b$.

Estadio 3: Letra usada como objeto

La letra es considerada como un objeto concreto. La frase matemática $3m + 7m$ y la frase "tres manzanas y siete manzanas" se consideran como equivalentes. La letra m se ve como la abreviatura del nombre de un objeto particular. Esto ocurre especialmente en problemas donde se involucran objetos concretos como lápices, mesas, etc., y es

[7] Kuchemann, D. E. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), Children's understanding of mathematics: 11-16 (pp. 102-119). London: John Murray.

esencial distinguir entre los objetos y las cantidades de los mismos.

Estadio 4: Letra usada como incógnita específica

Los niños consideran las letras como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente. "¿Cuál es el resultado de añadir 4 a $3n$?" La respuesta esperada, $4+3n$, requiere considerar n como incógnita genuina, pero los niños en este estadio pueden dar como solución $3n$ y 4, $7n$, o 7, en las que los elementos que intervienen son combinados sin tener en cuenta la presencia de la letra.

Estadio 5: Letra usada como un número generalizado

Una letra se ve como representando varios valores diferentes en lugar de uno solo. Si se pregunta a los niños que listen todos los valores de A cuando $A + B = 10$ podemos encontrar que ofrecen uno o varios números que cumplen la condición, pero no reconocen la necesidad de listar todos los valores.

Estadio 6: Letra usada como variable

La letra se ve como representando un rango de valores no especificados. Si se pregunta, ¿qué es mayor $3n$ o $n+3$? La letra n tiene que representar en cada caso un conjunto de valores no especificados y usarse como herramienta para hacer la comparación sistemática entre tales conjuntos. Si los niños prueban con un solo número, por ejemplo 4, o con tres o cuatro números particulares, decimos que están considerando la letra como número generalizado (estadio 5). Pero si consideran la relación en términos de todos los números, aunque pueden usar algunos ejemplos específicos para ayudarse en la decisión, entonces decimos que están en el estadio 6 y tratan la letra como variable.

2.2. Comprensión de las ecuaciones y del signo igual

Las dificultades que tienen los alumnos en el uso de las variables en el contexto de la resolución de las ecuaciones provienen de las interpretaciones que hacen de la igualdad. La característica fundamental de una variable - que puede tomar valores diferentes pertenecientes a un cierto dominio de sustitución - difiere de la orientación que se desarrolla con las experiencias iniciales en la resolución de ecuaciones. Para resolver una ecuación los niños manipulan u operan con las variables como si fueran números. Con frecuencia esto se hace antes que logren un nivel apropiado de uso de las letras que les permita comprender lo que están haciendo con las variables.

Diversos estudios muestran que las interpretaciones que hacen los niños del signo = y de las ecuaciones pueden diferir de las que pretendemos en la enseñanza. Por ejemplo, los alumnos piensan que el uso principal del signo igual es separar el problema de la respuesta; la igualdad, $2 + 3 = 5$, se interpreta como "2 más 3 da como resultado 5", no como la equivalencia entre las expresiones "2+3" y "5". Los alumnos piensan que cambiando la letra en una ecuación puede cambiar la solución; podemos encontrar que los alumnos dan soluciones diferentes a estas dos ecuaciones: $7X + 3 = 28$, y $7B + 3 = 38$; algunos alumnos pueden argumentar que X es mayor porque está más al final del alfabeto que B.

La mayor parte de los profesores y los libros de texto proponen a los alumnos la realización de ejercicios consistentes en encontrar un número que operado con otro dé un cierto resultado, por ejemplo, $3 + \_\_ = 5$. El espacio en blanco (o la caja que suele escribirse) se presenta como un único valor desconocido, y no como una variable, lo que convertiría la expresión en una función proposicional en la que la variable puede tomar muchos valores diferentes, obteniendo en cada caso una proposición. El profesor puede aprovechar este tipo de situaciones para ampliar el significado del signo = y el uso de las variables. Una ecuación, como cualquier otra función proposicional puede ser verdadera o falsa, según el valor que se asigne a la variable correspondiente; además es posible asignar a la variable, no un único valor, sino múltiples. Esto ayudará a los alumnos a superar su idea de que el signo = es una indicación de realizar un cálculo.

2.3. Algunas dificultades de aprendizaje

La experiencia de los profesores y los resultados de diversas investigaciones muestran que el álgebra resulta un tema difícil.

En el apartado 2.1 hemos descrito cinco estadios o tipos de usos de las letras que en cierto modo son previos al dominio de las letras como variables, y que indican dificultades en su plena comprensión. Otras dificultades están relacionados con el uso de las notaciones.

El uso de notaciones, tanto en aritmética como en álgebra, se basa con frecuencia en convenios ambiguos, lo que puede explicar las dificultades en el aprendizaje. Se usan expresiones similares que tienen significados muy diferentes en aritmética y en álgebra. Por ejemplo, 27 y $2x$. El 2 de 27 indica el lugar de las decenas y, por tanto, representa 20. Sin embargo, $2x$ significa que el 2 multiplica a la x. El signo de multiplicar con frecuencia se omite, y cuando se pone puede confundirse con la letra equis (x).

Puede ocurrir que el alumno no entienda correctamente ninguna de las dos expresiones: 27 puede ser interpretado sin tener en cuenta las reglas del sistema de numeración posicional, y visto como el nombre de una cierta cantidad de unidades; $2x$ es otra yuxtaposición de signos, una "palabra" que significa dos equis, y no como una multiplicación. Las cosas se pueden complicar incluso más cuando escribimos, $27x$, ya que hay que tener en cuenta el convenio multiplicativo que relaciona 27 con x, y el convenio posicional que relaciona el 2 y 7. En el contexto algebraico escribimos ab para indicar el producto $a \cdot b$, pero en aritmética $3 \cdot 5 \neq 35$. De igual modo, $ab = ba$, pero $35 \neq 53$; $4 + 0{,}75 = 4{,}75$, pero $2x + y \neq 2xy$.

Una de las repercusiones de un estudio poco significatico de las ecuaciones en secundaria es la generación de errores en el cálculo con fracciones a alumnos que antes no los tenían. Este tipo de error se manifiesta en muchos de los estudiantes para maestro, los cuales eliminan denominadores en situaciones en las que no se debe hacer. Muchos alumnos que resuelven ecuaciones correctamente, pero sólo tienen un conocimiento instrumental que les permite resolverlas sin saber porqué se resuelven de esta manera y no de otra, consideran que en una ecuación "los denominadores se van". A pesar de esta falta de comprensión estos alumnos pueden resolver la mayoría de ecuaciones correctamente, lo cual reafirma su convicción de que "los denominadores se van". Es frecuente que estos alumnos ante un cálculo con fracciones del tipo:

$$1/2 - 2/3 + 4/5 =$$

haga lo siguiente:

$$15/30 - 20/30 + 24/30 = 19$$

y si se le pregunta el motivo por el cual ha eliminado los denominadores conteste: "los denominadores se van". Este fenómeno se puede observar incluso en alumnos que antes de empezar a estudiar las ecuaciones no cometían este tipo de error al efectuar operaciones con fracciones

3. SITUACIONES Y RECURSOS

En esta sección incluimos una colección de tipos de situaciones utilizables en primaria para el desarrollo del razonamiento pre-algebraico clasificadas en cuatro categorías:

- Comprensión de patrones, relaciones y funciones.
- Representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos.
- Uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Análisis del cambio en contextos diversos.

3.1. Comprensión de patrones, relaciones y funciones

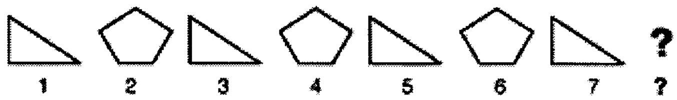
Un contexto adecuado para iniciar a los alumnos desde preescolar en el razonamiento algebraico y funcional es proporcionarles secuencias de figuras u objetos que siguen un cierto orden o regularidad (seriaciones, cenefas, etc.).

La actividad consiste en identificar el modelo o patrón que sigue la secuencia, describirla introduciendo símbolos y hacer predicciones sobre el tipo de objeto o figura que ocupará un lugar dado de la secuencia.

Los alumnos pueden trabajar bien individualmente o en grupos extendiendo patrones construidos con materiales simples como botones, bloques lógicos, cubos encajables, palillos, formas geométricas, etc. El núcleo o unidad de un patrón de repetición es la cadena más corta de elementos que se repiten.

Situaciones

1.Emparejamiento de números con una secuencia de figuras



- ¿Cuál es la segunda figura?; Para continuar el mismo patrón, ¿qué figura vendrá a continuación? ¿Qué observas en los números que están debajo de los triángulos? ¿Qué figura corresponderá al número 14?

2. Coste de cantidades de un artículo

Número de globos	1	2	3	4	5	6	7
Coste de los globos en cents.	20	40	60	80	?	?	?

- ¿Cuánto costarán 7 globos?

3. Patrones en tablas numéricas

- Si cuentas de 3 en 3 en una tabla-100, comenzando en 24, y marcas los números que vas obteniendo. ¿qué número marcarás después de 3 saltos? ¿Y si comienzas en el 45?

- Si comienzas a contar en el 6 de 3 en 3, ¿marcarías el número 87?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

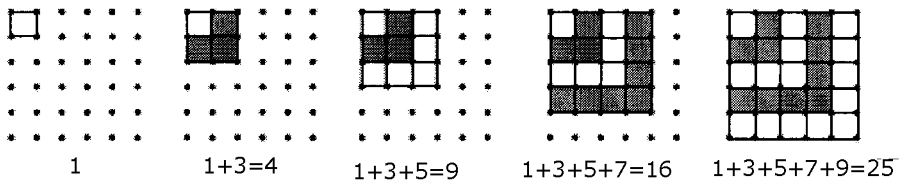
- En la tabla-100, tomamos un cuadrado formado por cuatro números, por ejemplo,

4	5
14	15

Observamos que 4 + 15 = 5 + 14. ¿Es válida esta propiedad para todos los cuadrados 2 x 2 de la tabla. Enunciarla y justificarla.

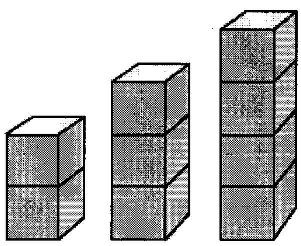
- ¿Es cierta esta propiedad para las tablas de sumar y de multiplicar?

4. Crecimiento de cuadrados



- Describe el patrón que se muestra en la figura mediante lenguaje matemático. ¿Qué ocurrirá si la serie se continúa? ¿Cómo se puede expresar el tamaño del cuadrado final si la serie se continúa *n* veces?

5. Área total de las torres



- ¿Cuál es el área total de cada torre de cubos (incluyendo la base)? ¿Cuál es el área total de una torre con 5 cubos? ¿Cómo cambia el área a medida que la torre se hace más alta? ¿Cuántos cubos habrá en la torre si el área es 242 unidades cuadradas?

6. ¿Qué compañía telefónica es preferible?

Telefónica ofrece un servicio de móviles con un coste fijo de 20 euros al mes más 0.10 euros por minuto de llamada. *Amena* no carga cuota fija mensual pero carga 0.45 euros por minuto. Ambas compañías facturan exactamente el tiempo usado en segundos, sin redondear al minuto más próximo. ¿Qué compañía es preferible según el tiempo previsto de llamadas mensuales?

(Se sugiere preparar una tabla y un gráfico)

Ejercicio de análisis didáctico

1. Identificar las variables didácticas de las situaciones descritas y los valores críticos de las mismas (aquellos que inducen cambios significativos en los conocimientos requeridos para su resolución). ¿Qué técnicas de solución pueden aplicar los alumnos?

3.2. Representación y análisis de situaciones matemáticas y estructuras usando símbolos algebraicos

Una manera razonable de hacer que los alumnos comiencen a usar variables como incógnitas y a resolver ecuaciones es a partir de las situaciones siguientes:

Situaciones

7. Leer el enunciado de un problema verbal, pero omitir la pregunta. La tarea consiste en escribir una ecuación que signifique lo mismo.

Por ejemplo, "Hay 3 cajas llenas de lápices y 5 lápices más. En total hay 41 lápices se puede escribir en la forma: ($3 \cdot \_\_ + 5 = 41$).

La actividad se puede invertir dando una ecuación con una incógnita y pedir a los alumnos que inventen una historia que se ajuste a la ecuación.

8. Pedir a los alumnos que hagan la siguiente secuencia de operaciones

- Escribe un número
- Súmale el número que le sigue
- Suma 9 al resultado anterior
- Divide por 2
- Resta el primer número

Mostrar que siempre se puede "adivinar" el resultado final. Pedir que expliquen el resultado usando una variable para el número inicial.

9. Escribir un número entre 1 y 9, multiplicarlo por 5, sumarle 3, multiplicarlo por 2, sumarle otro número entre 1 y 9, restar 6. Preguntar a los alumnos qué se obtiene y por qué.

10. Escribir un número, multiplicarlo por 6, sumar 12, dividir por 2 el resultado anterior, restar 6, dividir por 3. Preguntar a los alumnos qué se obtiene y por qué.

11. El profesor escribe en la pizarra las siguientes instrucciones:

1) Escribe un número cualquiera en un folio
2) Suma ocho a ese número
3) Duplica la suma obtenida
4) Réstale 6
5) Divide por dos
6) Resta al resultado anterior el número elegido en el paso 1)

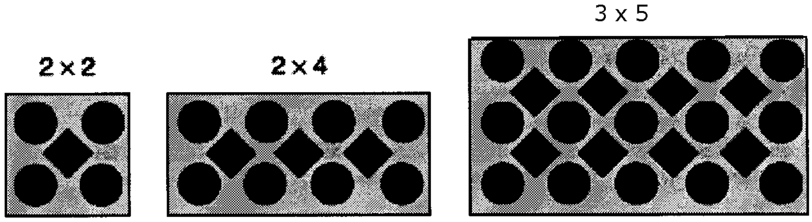
El profesor dice que es capaz de adivinar el resultado final para cualquier número que se escriba en el paso 1). Efectivamente, los alumnos practican el juego y el profesor siempre acierta.

¿Cuál es el resultado que se obtiene después de hacer los pasos 1) a 6)? ¿Cómo lo has descubierto?

12. Escribe tres números consecutivos, eleva al cuadrado el número de en medio, y resta del cuadrado el producto de los otros dos números. Compara el resultado que se obtiene para distintas ternas de números consecutivos. ¿Se obtiene siempre el mismo resultado para cualquier terna de números consecutivos? Justifica esta propiedad usando un razonamiento algebraico.

13. La caja de bombones y caramelos

Una compañía empaqueta cajas de bombones intercalando un caramelo por cada cuatro bombones, según se muestra en la figura. Los círculos representan los bombones y los cuadrados los caramelos. Las dimensiones de la caja se indican mediante el número de columnas y de filas de bombones que hay en cada caja. Desarrolla un método para encontrar el número de caramelos en cualquier caja si se conocen sus dimensiones. Explica y justifica el método usando palabras, diagramas o expresiones con letras.



Ejercicio de análisis didáctico

2. Identificar las variables didácticas de las situaciones descritas y los valores críticos de las mismas (aquellos que inducen cambios significativos en los conocimientos requeridos para su resolución). ¿Qué técnicas de solución pueden aplicar los alumnos?

3.3. Uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas

La igualdad como equivalencia

En la expresión $4A + 5 = A - B$, el signo igual significa que el valor numérico de la expresión de la izquierda es el mismo que el de la derecha (en el contexto de la medida de cantidades, que ambos miembros expresan la misma cantidad). Para comprender las expresiones algebraicas de esta manera los alumnos deben interpretar las expresiones aritméticas tales como 4 + 5 o 5·98 como valores numéricos, no como operaciones pendientes de realizar. Los alumnos interpretan el signo = como un operador, como si fuera la tecla = de una calculadora, lo que dificulta pensar en 5 + 2 como una manera alternativa de escribir 7. Las siguientes actividades pueden facilitar la comprensión de la igualdad como equivalencia:

Situaciones

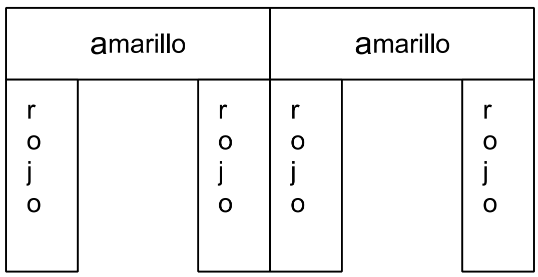
14. Encuentra diferentes maneras de expresar un número particular, por ejemplo 10. Dar algunos ejemplos: 5 + 5 , o 14 -4. Sugiere el uso de dos o más operaciones diferentes. "¿Cuántas maneras diferentes existen de expresar el 8 usando números menores que 10 y tres operaciones?"

15. El modelo de la balanza.

Si en una balanza de dos platillos ponemos objetos cuyos pesos tengan como medidas numéricas los resultados de las operaciones aritméticas: $(3 \cdot 4) + 2$ y $2 \cdot 7$, respectivamente, la balanza quedaría en equilibrio. En cambio, $(3 \cdot 9) + 5 < 6 \cdot 8$, la balanza se inclinará al lado en que se ponga el peso cuya medida sea $(3 \cdot 9) + 5$. ¿Para qué valores de __ y Δ estará la balanza en equilibrio si en un platillo ponemos pesos cuyas medidas responden a la expresión, $3 \cdot \_\_ + \Delta$ y en el otro a la expresión $2 \cdot \Delta - 4$?

16. Puente con dos apoyos[8]

Queremos construir la maqueta de un acueducto con barras de madera de 5 cm para las vigas y de 2 cm para los soportes, según se muestra en el dibujo, para el caso de dos arcadas.



1) Completa la tabla siguiente

	3 arcos	4 arcos	5 arcos	15 arcos	21 arcos
¿Cuántas barras amarillas necesitamos?					
¿Cuántas barras rojas necesitamos?					
¿Qué longitud tendrá el acueducto?					

2) Si se conoce el número de arcos, ¿qué regla podemos aplicar para calcular a) el número de barras, y b) la longitud del acueducto?.

3) ¿Cuál es el número total de barras que se necesitan para construir un acueducto con 100 arcos? ¿Cuál es la longitud del acueducto? Explica la respuesta.

Ejercicio de análisis didáctico

3. Identificar las variables didácticas de las situaciones descritas y los valores críticos de las mismas (aquellos que inducen cambios significativos en los conocimientos requeridos para su resolución). ¿Qué técnicas de solución pueden aplicar los alumnos?

3.4. Análisis del cambio en contextos diversos

Siempre que los alumnos preparan tablas con los valores correspondientes a cantidades de dos magnitudes relacionadas ponen en juego la idea de variación conjunta: un valor cambia con relación a otro. Se trata de ejemplos de funciones, reglas que determinan la manera en que dos variables se relacionan.

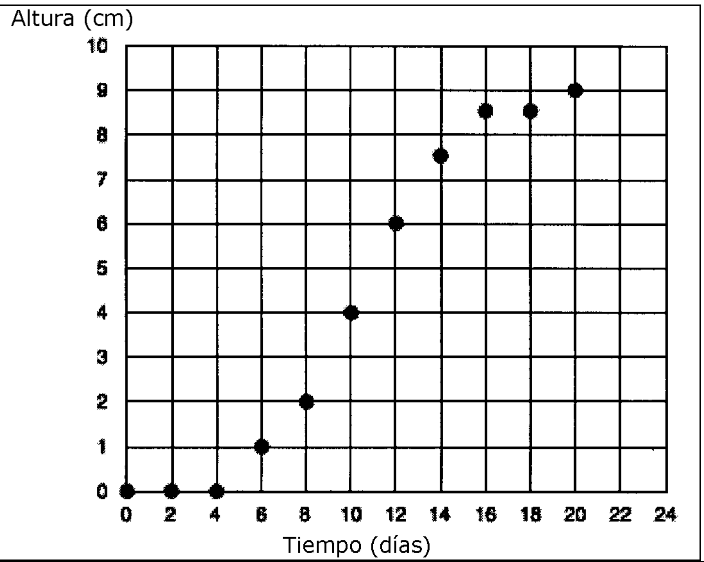
Incluso en preescolar los niños pueden preparar gráficas o tablas mostrando, por ejemplo, el número de manos para distintos números de niños. Para 2 niños 4 manos, 3 niños 6 manos, etc. En el ciclo superior los alumnos pueden relacionar el número de artículos comprados y el coste de los mismos. En las actividades de medición se pueden hacer tablas y gráficos que relacionan las medidas de las longitudes de los bordes de objetos circulares con los diámetros, o el volumen o el área y la base del cilindro.

Situaciones

17. Crecimiento de una planta

En la tabla adjunta se muestra la altura de una planta (en cm) a medida que se incrementan los días desde que se plantó. ¿Cómo ha sido el crecimiento de la planta?

Días	Altura	Cambio
0	0	
2	0	0
4	0	0
6	1	1
8	2	1
10	4	2
12	6	2
14	7.5	1.5
16	8.5	1
18	8.5	0
20	9	0.5



Ejercicio de análisis didáctico

4. Identificar las variables didácticas de las situaciones descritas y los valores críticos de las mismas (aquellos que inducen cambios significativos en los conocimientos requeridos para su resolución). ¿Qué técnicas de solución pueden aplicar los alumnos?

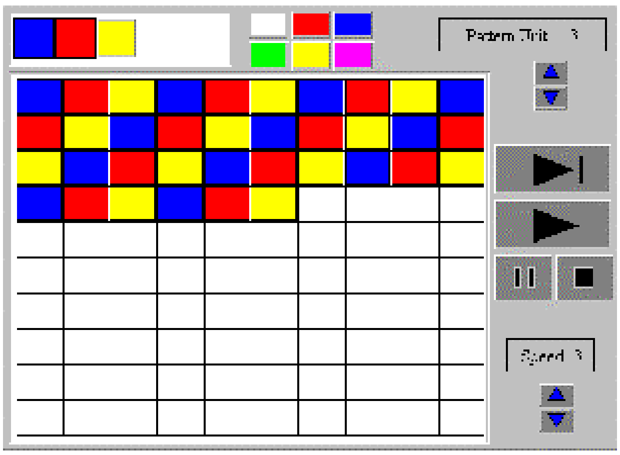
4. RECURSOS EN INTERNET

Creación, descripción y análisis de patrones para reconocer relaciones y hacer predicciones.

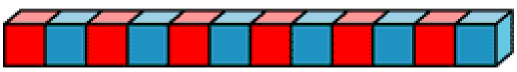
Este recurso interactivo, disponible en el siguiente sitio web de los Estándares 2000 del NCTM,

http://standards.nctm.org/document/eexamples/chap4/4.1/index.htm#applet

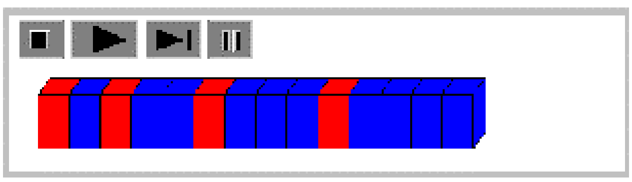
permite al profesor de primaria proponer la construcción de patrones en forma de frisos y recubrimientos del plano mediante secuencias de teselas cuadradas de distintos colores.



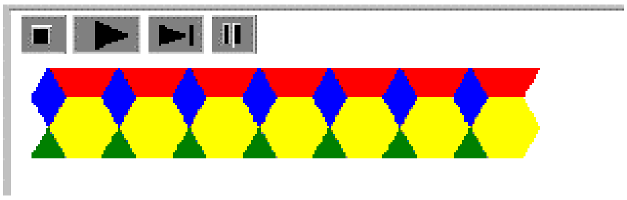
El objetivo es que los alumnos analicen relaciones y hagan predicciones. Este micro-programa interactivo tiene tres partes. En la primera, "Construcción de patrones", el usuario puede generar recubrimientos de una cuadrícula 10x10 con teselas rectangulares formadas por cuadrados de hasta cinco colores diferentes, pudiendo combinar los colores a voluntad. Se trata de prever la secuencia que se va formando y comprobarla. En la segunda parte, "descripción de patrones", se presentan secuencias de cubos encajables con el fin de que los alumnos describan la regla que sigue la secuencia.



Se pueden proponer también patrones crecientes.



En la tercera parte, "Ampliación de la comprensión de patrones", propone analizar patrones formados por teselas unitarias construidas a partir de otras piezas más simples. Se comienza a relacionar dos patrones mediante una relación funcional.

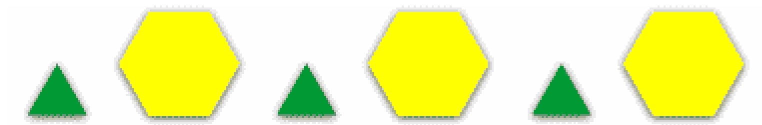


Se pueden plantear tres tipos de cuestiones:

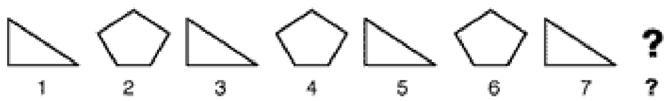
- ¿Cuántos cuadrados hay en tu patrón unidad?
- ¿Cuántas veces puedes repetir el patrón unidad en una fila?
- ¿Cabe exactamente el patrón en una fila?
- ¿Qué ocurre si añadimos (o quitamos) al patrón una unidad más?

La actividad permite a los alumnos explorar la divisibilidad de 10 por 2, 3, 4 y 5. El micro-programa interactivo proporciona un entorno que facilita la construcción de patrones repetitivos y reflexionar sobre la idea de una unidad que se repite.

El trabajo con patrones construidos mediante secuencias de figuras geométricas también se puede hacer con material manipulativo, usando piezas de forma poligonales como se muestra en la figura:



La idea de función se puede poner en juego asociando a las secuencias de figuras la serie de números naturales:



Se pueden plantear cuestiones que inducen a los alumnos a buscar relaciones: ¿Qué figura sigue después del 2? Si queremos continuar la serie, ¿qué figura irá después? ¿Puedes prever la figura que irá con el 12?

Ejercicios de análisis didáctico

5. Da un ejemplo de cada uno de los tres usos diferentes de variables. Para cada uso, describe al menos una actividad que promueva la comprensión por los estudiantes de dicho uso.

6. Describe cómo se puede desarrollar el concepto de función mediante el uso de patrones de crecimiento, situaciones del mundo real, y experimentos. Indica cómo se pueden utilizar diversas representaciones en cada método.

5. TALLER DE DIDÁCTICA

5.1. Entrevistas a niños

Diseña una situación en la que los alumnos tengan que encontrar primero invariantes y después simbolizarlos. Prepara y realiza entrevistas a una muestra de alumnos de distintas edades para comprobar la progresión en el aprendizaje del uso de letras en tareas matemáticas.

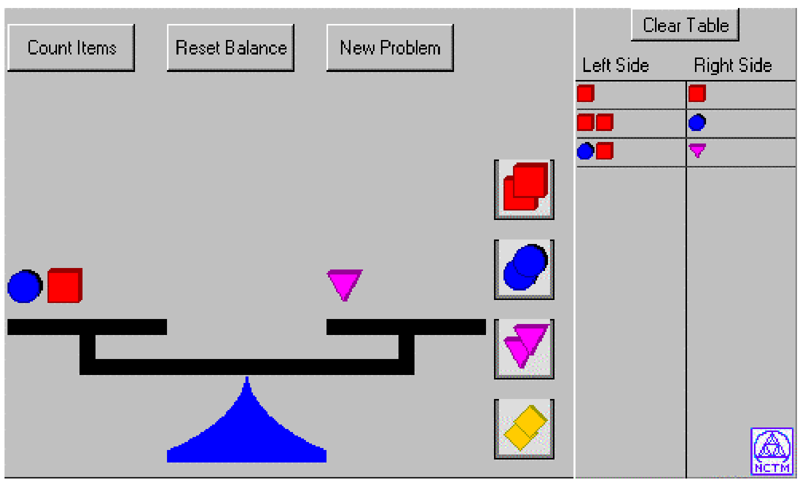
5.2. Análisis de textos escolares y recursos

1. Analiza el tratamiento de los patrones en un libro de texto de uno de los ciclos de primaria. ¿Consideras que las actividades incluidas estimulan el desarrollo del pensamiento algebraico? ¿Cómo? En caso negativo, ¿cómo se podrían modificar las actividades para dicho fin?

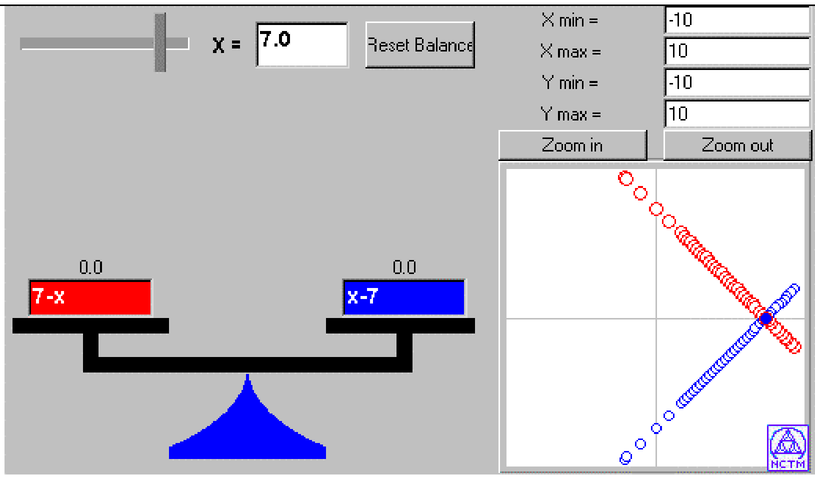
2. En Internet hemos encontrado un micro-programa interactivo que se propone como recurso para el aprendizaje del significado de la igualdad como equivalencia, basado en el equilibrio de la balanza de platillos. Uno de los módulos simula la colocación de figuras con distintas formas y colores que pueden colocarse en ambos platillos (ver figura a continuación). En la pantalla que reproducimos, se ve que dos figuras rojas puestas en el lado izquierdo se equilibran con una triangular en el derecho; un círculo azul y un cuadrado rojo se equilibran con un triángulo rosa.

Como sabemos la balanza es un dispositivo que se usa para medir cantidades de peso, por lo que aquí se hace un uso atípico de este dispositivo. Estudia los posibles conflictos cognitivos que puede inducir el uso de este recurso y la forma de resolverlos.

Balanza con formas



3. Otro módulo del micro-programa anterior disponible en Internet utiliza el modelo de la balanza como recurso didáctico para introducir la noción de variable y la igualdad, entendida como equivalencia de dos expresiones algebraicas con una variable evaluada para distintos valores de dicha variable.



Balanza con expresiones algebraicas

En este caso los "pesos" que se colocan en cada platillo son, o números reales, o dos expresiones algebraicas que son evaluadas para valores de x dentro de un cierto intervalo. En la figura se indica que $7 - x = x - 7$, para $x = 7$. Simultáneamente el micro-programa muestra la gráfica cartesiana de las rectas de ecuación $y = 7 - x$; $y = x - 7$. Ambas rectas se cortan en el eje de abscisas para $x = 7$.

- ¿Qué interpretación hay que atribuir a los números y expresiones que se ponen en cada platillo para que tenga sentido el uso de la balanza?
- ¿Piensas que este recurso puede ser usado como herramienta de exploración personal del alumno? ¿Qué tipo de explicaciones consideras necesarias por parte del profesor para que el alumno entienda el funcionamiento del dispositivo?
- ¿Qué conocimientos matemáticos se ponen en juego?

Bibliografía

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis.
Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
Ruiz, F. (2001). Números y formas. En, E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (p. 449-476). Madrid: Síntesis.
Socas, M.M., Camacho, M., Palarea, M. y Fernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.