Guía de estudio de Mecánica en la Ingeniería

Manuel Chiachío Ruano

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Asignatura: Mecánica en la Ingeniería

Titulación: Grado en Ingeniería Civil

Manuel Chiachío Ruano

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica

E.T.S de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Universidad de Granada

Índice

Índice de figuras

Prólogo

Esta guía de estudio de Mecánica en la Ingeniería, es un recurso especialmente diseñado para acompañar vuestro aprendizaje en la fascinante disciplina de la Mecánica. Antes que nada, debo dejar claro que esta guía no pretende reemplazar ningún libro de texto recomendado de la asignatura, sino más bien servir como un complemento para facilitar su comprensión y aplicación de los conceptos fundamentales.

Este texto nace de mi profundo compromiso con vuestro éxito académico y profesional. Por ello está destinado exclusivamente y cariñosamente a mis estudiantes de la asignatura, siendo un recurso complementario para vosotros, pero también un material de apoyo a la docencia para mí como profesor. A lo largo de los años, he podido disfrutar de la docencia en el curso de Mecánica en la Ingeniería en las diferentes configuraciones que ha tenido la asignatura en los distintos planes de estudios, y he sido testigo de la dedicación y esfuerzo que exige al alumno. La Mecánica es una de las piedras angulares de la ingeniería, y particularmente de la ingeniería civil, y su comprensión es esencial para vuestro futuro como ingenieros. Estas páginas muestran una recapitulación concisa de los conceptos clave de la materia desde una perspectiva que os ayudará a abordar los problemas de manera más clara y efectiva.

Es importante destacar que esta guía no es un sustituto del esfuerzo y la dedicación personal. Para aprovechar al máximo este recurso, os insto a seguir asistiendo a las clases, participar activamente y hacer vuestro propio trabajo de estudio personal. La práctica y el estudio constante es la clave para dominar la Mecánica, y esta guía está aquí para facilitar ese proceso.

En esta nueva edición, he tenido a bien publicarla en abierto para cualquier usuario interesado, con el objetivo de hacer el trabajo extensible a otros alumnos y profesores, y además recibir retroalimentación de los mismos, lo que irá enriqueciendo el texto a lo largo de los años.

Os animo a aprovechar al máximo esta guía y a utilizarla como una herramienta para vuestro estudio personal. Os deseo a todos mucho éxito en vuestros estudios y futuras carreras como ingenieros.

Manuel Chiachío Ruano

1. Operaciones, campos vectoriales y funciones vectoriales

En Mecánica, y sobre todo, en Mecánica Clásica, las operaciones vectoriales son básicas en la resolución de cualquier problema.

1.1. Operaciones vectoriales

- **Producto escalar**: $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta$. También: $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

- **Producto vectorial**: $|\ \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|\ = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \sin\theta$. Vectorialmente:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{1}$$

- **Producto mixto**: $\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}|| \cos\theta|$. También:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{2}$$

- **Doble producto vectorial**: $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\vec{\mathbf{c}}$

- **Momento de un vector deslizante $\vec{\mathbf{v}}$ respecto a A**: $\vec{\mathbf{M}}_A = \vec{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{v}}$, donde P es un punto cualquiera de la recta de acción de $\vec{\mathbf{v}}$.

- **Cambio de momento de un vector deslizante $\vec{\mathbf{v}}$**:
  $\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A + \vec{\mathbf{BA}} \times \vec{\mathbf{v}}$, donde A y B son puntos del espacio.

1.2. Sistemas de vectores deslizantes

Un vector deslizante es aquel que puede sustituirse por cualquiera de sus equipolentes situados sobre su recta de acción.

- **Resultante (Primer invariante del sistema):** Es un vector libre de valor $\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} = \vec{\mathbf{v}}_i$, donde $\vec{\mathbf{v}}_i$ son los N vectores deslizantes que conforman el sistema.

- **Momento del sistema respecto a un punto A :** Es un vector fijo en A de valor $\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{N} = \vec{\mathbf{M}}_{A_i}$, donde $\vec{\mathbf{M}}_{A_i}$ son los momentos respecto a A de los N vectores deslizantes $\vec{\mathbf{v}}_i$ del sistema.

- **Campo de momentos del sistema de vectores deslizantes**:
  $\vec{\mathbf{M}}_B = \vec{\mathbf{M}}_A + \vec{\mathbf{BA}} \times \vec{\mathbf{R}}$, donde A y B son puntos del espacio, y $\vec{\mathbf{R}}$ la resultante (primer invariante) de los N vectores deslizantes.

- **Momento áxico del sistema respecto a un eje $\vec{\mathbf{e}}$**: Se trata de la proyección del momento $\vec{\mathbf{M}}_A$ sobre un eje $\vec{\mathbf{e}}$, tal que $\vec{\mathbf{M}}_A \cdot \vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{M}}_B \cdot \vec{\mathbf{e}}$, donde A y B son puntos cualesquiera del eje cuya dirección viene dada por $\vec{\mathbf{e}}$.

- **Segundo invariante del sistema:** Es un escalar de valor $\tau = \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_A = \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{M}}_B = \text{cte}$, donde A y B son puntos cualesquiera del espacio.

- **Momento mínimo del sistema:** Aquel que comparte la misma dirección de la resultante. Esto es: $\vec{\mathbf{M}}_{min} \parallel \vec{\mathbf{R}}$.

- **Eje central del sistema**: Lugar geométrico de los puntos que poseen momento del sistema mínimo. Es una recta paralela a la resultante $\vec{\mathbf{R}} = [R_x, R_y, R_z]$. Su ecuación puede escribirse así: $\frac{x-x_E}{R_x} = \frac{y-y_E}{R_y} = \frac{z-z_E}{R_z}$, donde $E = (x_E, y_E, z_E)$ es un punto del eje central. Si no se conoce, puede tomarse el dado por el radio vector $\vec{OE} = \frac{\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{M}}_0}{\vec{\mathbf{R}}}$, donde $\vec{\mathbf{M}}_0$ es el momento del sistema respecto al origen O.

1.3. Funciones vectoriales

Una función vectorial es una sucesión de vectores en función de una sucesión de escalares. Matemáticamente: $\vec{a}(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, esto es, es una correspondencia entre el escalar $u \in \mathbb{R}$ y el propio vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$.

- **Indicatriz vectorial**: Es la curva que resulta de unir los extremos de los vectores de la función vectorial $\vec{a}(u)$, llevados al origen.

- **Diferencial de la función vectorial**: Es el vector incremental infinitésimo $d\vec{a}$, que permite pasar de un vector cualquiera $\vec{a}$ al siguiente de la sucesión $\vec{a} + d\vec{a}$. El vector $d\vec{a}$ es tangente a la indicatriz.

- **Derivada de la función vectorial**: Es el vector incremental infinitésimo que mide la variación relativa del vector $\vec{a}$ respecto del escalar u, esto es: $\frac{d\vec{a}}{du}$. El vector derivada $\frac{d\vec{a}}{du}$ tiene la dirección de $d\vec{a}$.

- **Reglas derivación de una función vectorial**.

  1. $\frac{d(\vec{a}_1+\vec{a}_2)}{du} = \frac{d\vec{a}_1}{du} + \frac{d\vec{a}_2}{du}$
  2. $\frac{d}{du}(n\vec{a}) = n\frac{d\vec{a}}{du}$
  3. $\frac{d(\vec{a_1}\cdot\vec{a_2})}{du} = \frac{d\vec{a}_1}{du}\cdot\vec{a_2} + \vec{a_1}\cdot\frac{d\vec{a}_2}{du}$
  4. $\frac{d(\vec{a_1}\times\vec{a_2})}{du} = \frac{d\vec{a}_1}{du}\times\vec{a_2} + \vec{a_1}\times\frac{d\vec{a}_2}{du}$

- **Derivada de una función vectorial de módulo constante**: Si $\vec{a}$ es tal que $|\vec{a}| = \text{cte}$, entonces $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = \text{cte}$. Si derivamos el anterior producto escalar queda como sigue:

  $$\frac{d\vec{a}}{du}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{du} = 0$$

  lo que implica que

  $$\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{du} = 0 \implies \vec{a}\perp\frac{d\vec{a}}{du}$$

  O sea, el vector derivada resulta ser perpendicular al original. Esta propiedad es importante para demostrar el origen cinemático de las rotaciones de sistemas de partículas y sólidos, donde se demuestra que la variación temporal de los versores (unitarios) de una base móvil solidarios con el sistema equivale a una rotación de la base.

- **Derivada de los versores de una base móvil** $[\vec{\mathbf{e}}_1(u), \vec{\mathbf{e}}_2(u), \vec{\mathbf{e}}_3(u)]$. Tomando como punto de partida la propiedad anterior, se obtiene lo siguiente:

  1. $\frac{d\vec{\mathbf{e}}_1}{du} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{e}}_1$

  2. $\frac{d\vec{\mathbf{e}}_2}{du} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{e}}_2$

  3. $\frac{d\vec{\mathbf{e}}_3}{du} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{e}}_3$

  donde $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es el vector de rotación instantánea de la base.

Regla de Boure

Permite obtener la derivada de la función vectorial $\vec{a}(u)$, expresada según una base móvil $[\vec{\mathbf{e}}_1(u), \vec{\mathbf{e}}_2(u), \vec{\mathbf{e}}_3(u)]$, respecto a una base fija. Se obtiene mediante la expresión:

$$\frac{d\vec{a}}{du} = \frac{d\vec{a}}{du}|_m + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{a}$$

donde $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es el vector de rotación instantánea de la base.

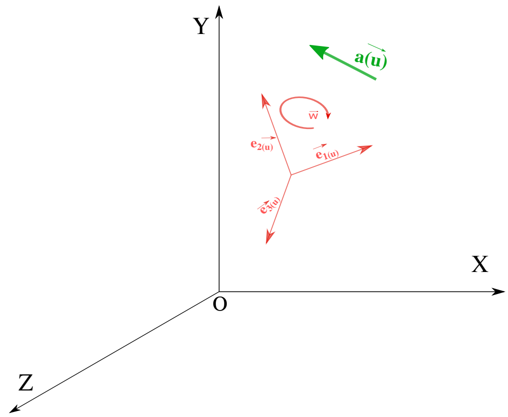

Figura 1: Ilustración de la Regla de Boure: Función vectorial $\vec{a}(u)$ en función de un sistema de referencia móvil (en rojo) que depende del escalar u.

- **Triedo de Frenet** $[\vec{\mathbf{e}}_t(u), \vec{\mathbf{e}}_n(u), \vec{\mathbf{e}}_b(u)]$: Es una base móvil de vectores ortonormales cuya variación es solidaria a una curva parametrizada por el escalar u. Cada versor es una función escalar de u.

Fórmulas de Frenet

Permite obtener la derivada de los vectores de la base de Frenet con respecto al parámetro de la curva. Su fundamentación está basada en la derivada de funciones vectoriales de módulo constante, vistas anteriormente.

- 1. Primera fórmula de Frenet

$$\frac{d\vec{\mathbf{e}}_t}{du} = \frac{\vec{\mathbf{e}}_n}{\rho}$$

  2. Primera fórmula de Frenet

$$\frac{d\vec{\mathbf{e}}_b}{du} = \frac{-\vec{\mathbf{e}}_n}{\delta}$$

  3. Tercera fórmula de Frenet

$$\frac{d\vec{\mathbf{e}}_n}{du} = \frac{\vec{\mathbf{e}}_b}{\delta} - \frac{\vec{\mathbf{e}}_t}{\rho}$$

donde ρ es el radio de curvatura a flexión de la curva y δ es el radio de curvatura a torsión.

1.4. Ejemplo ilustrativo sobre Regla de Boure

Se considera una barra que gira con una velocidad angular constante $\vec{\omega} = 1$ [rad/s], y una manivela que desliza sobre la barra hacia el centro de la misma (punto O). En un instante en concreto, su posición viene dada por el vector $\vec{\mathbf{r}}(t) = (10 - t)\vec{\mathbf{e}}_1$, donde $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\}$ (en rojo) son versores de una base móvil que solidarios con la barra. Obtener el vector derivada absoluta del vector $\vec{\mathbf{r}}(t)$ respecto al sistema de referencia fijo OXY de la figura.

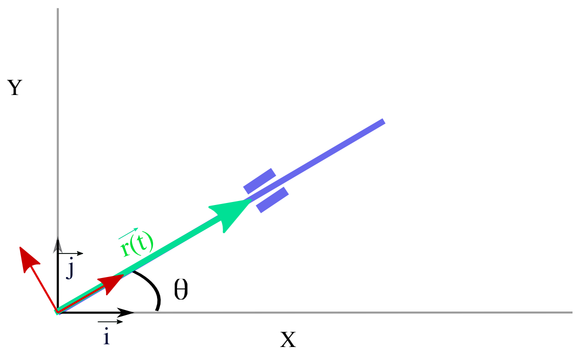

Figura 2: Ilustración de la Regla de Boure: Manivela que desliza por una barra que rota con una velocidad angular dada.

Solución

Se aplica la regla de Boure por lo que $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}|_m + \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}$. Calculamos los sumandos de la expresión anterior a continuación.

- $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}|_m = -1\vec{\mathbf{e}}_1$. Lo expresamos según los versores de la base móvil, y posteriormente lo pasamos a los versores de la base fija.
- $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$. Se obtiene realizando el producto vectorial $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix}$, donde $r_x = (10-t)\cos\theta$ y $r_y = (10-t)\sin\theta$. El resultado del producto vectorial es $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}} = (10-t)[-\sin\theta\vec{\mathbf{i}} + \cos\theta\vec{\mathbf{j}}]$.

A continuación se suman ambos términos, pero teniendo en cuenta que deben de estar expresados en el mismo sistema de referencia, concretamente en el OXY (fijo), por lo que expresamos el vector $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{du}|_m = -1\vec{\mathbf{e}}_1$ según OXY. Para ello, se observa que $\vec{\mathbf{e}}_1 = [\cos\theta\vec{\mathbf{i}} + \sin\theta\vec{\mathbf{j}}]$, por lo que $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}|_m$ expresado según OXY es igual a $-1[\cos\theta\vec{\mathbf{i}} + \sin\theta\vec{\mathbf{j}}]$.

Sumando ambos términos y reordenando según componente $\vec{\mathbf{i}}$ y $\vec{\mathbf{j}}$ se obtiene el resultado final de la aplicación de la regla de Boure:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} &= -1[\cos\theta\vec{\mathbf{i}} + \sin\theta\vec{\mathbf{j}}] + (10-t)[-\sin\theta\vec{\mathbf{i}} + \cos\theta\vec{\mathbf{j}}] \\ &= \Big[-\Big((10-t)\sin\theta + \cos\theta\Big)\vec{\mathbf{i}} + \Big((10-t)\cos\theta - \sin\theta\Big)\vec{\mathbf{j}}\Big] \end{aligned} \tag{3}$$

En la expresión anterior, $\theta = 1t$ puesto que la velocidad angular es $\vec{\boldsymbol{\omega}} = 1$ (se asume que parte del resposo), por lo que al sustituir $\theta = 1t$ en la ecuación anterior se obtiene una expresión paramétrica en el tiempo t.

2. Geometría de masas

2.1. Centro de gravedad, centro de masas y centroide

- **Centro de gravedad**: Es el centro de un sistema de vectores paralelos deslizantes correspondientes al peso de cada partícula de un sistema material.

1. **Sitema discreto**:

$$\vec{\mathbf{r}}_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{r}}_i p_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i}$$

donde p_i es el valor del peso de la i-ésima partícula y $\sum_{i=1}^{N} p_i = P$, siendo P el peso total del sistema de partículas. El vector $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la partícula i.

2. **Sistema continuo**:

$$\vec{\mathbf{r}}_G = \frac{\int_{\mathcal{V}} \vec{\mathbf{r}} dp}{\int_{\mathcal{V}} dp}$$

donde $\int_{\mathcal{V}} dp = P$, es el peso total del sistema. El vector $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de cada elemento diferencial de peso dp.

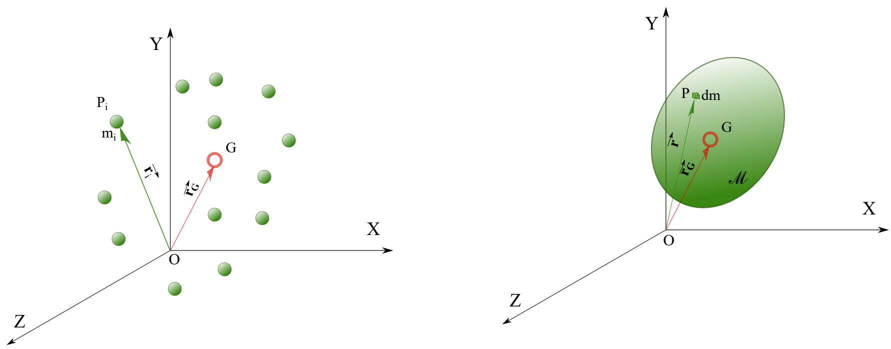

Figura 3: Sistema de partículas másicas. Izquierda: Sistema discreto de N partículas. Derecha: Sistema continuo de partículas.

- **Centro de masas**: Es el centro de un sistema de vectores paralelos deslizantes cuyo módulo coincide con la masa de cada partícula de un sistema material. Coincide con el centro de gravedad cuando la gravedad g es constante.

  1. **Sitema discreto**:
  $$\vec{\mathbf{r}}_M = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{r}}_i m_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$
  donde $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$, siendo M la masa total del sistema de partículas. El vector $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la partícula i.

  2. **Sistema continuo**:
  $$\vec{\mathbf{r}}_M = \frac{\int_{\mathcal{M}} \vec{\mathbf{r}} dm}{\int_{\mathcal{M}} dm}$$

donde $\int_{\mathcal{M}} dm = M$, la masa total del sistema. El vector $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición del elemento diferencial de masa dm.

- **Centroide**: A partir del centro de masas, si la densidad material es constante (en sistemas continuos), se obtiene el Centroide. Su posición se calcula mediante la expresión:

$$\vec{\mathbf{r}}_C = \frac{\int_{\mathcal{V}} \vec{\mathbf{r}} dV}{\int_{\mathcal{V}} dV}$$

donde $\int_{\mathcal{V}} dV = V$, es el volumen del cuerpo material. El vector $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición del elemento diferencial de volumen dV. Si la pieza es plana (2D), reemplazamos dV y V por dS y S en la expresión anterior.

2.2. Teoremas de Pappus Guldin

Primer teorema de Pappus-Guldin

Permite obtener la superficie de un cuerpo de revolución conocida la longitud de la curva de revolución y la posición de su centroide. Se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$S = 2\pi y_C L$$

donde y_C es la altura del centroide de la curva de revolución respecto del eje de revolución y L es la longitud la citada curva de revolución.

Segundo teorema de Pappus-Guldin

Permite obtener el volumen de un cuerpo de revolución conocida la sección transversal del área de revolución y la posición de su centroide. Se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$V = 2\pi y_C S$$

donde y_C es la altura del centroide del área de revolución respecto del eje de revolución y S es la longitud la citada superficie de revolución.

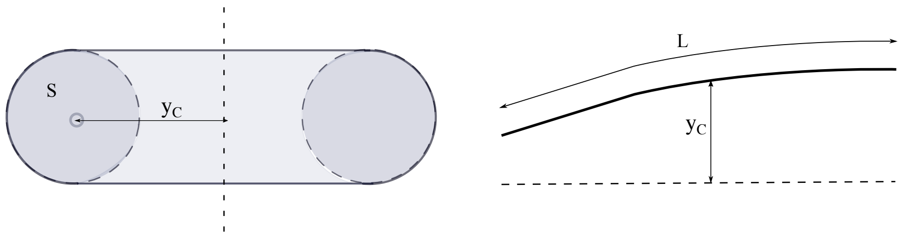

Figura 4: Figuras de revolución cuyos respectivos volumen y área se obtienen mediante los Teoremas de Pappus Guldin. Izquierda: Volumen de revolución (toro). Derecha: Superficie de revolución.

2.3. Momentos de inercia

- **Concepto de momento de inercia**: Es una magnitud física escalar y positiva que mide cómo se distribuye una masa respecto a un elemento geométrico de referencia: punto, recta o plano.

    1. Momento de inercia de una masa puntual respecto a un punto P: $I_P = m\ell^2$, donde ℓ es la distancia de la masa al punto P.
    2. Momento de inercia de una masa puntual respecto a un eje e: $I_e = m\ell^2$, donde ℓ es la distancia de la masa al eje.
    3. Momento de inercia de una masa puntual respecto a un plano π: $I_\pi = m\ell^2$, donde ℓ es la distancia de la masa al plano π.

- **Momento de inercia de un sistema material discreto**: Es la suma de los momentos de inercia de cada una de las partículas del sistema respecto a un elemento geométrico de referencia: punto, recta o plano.

1. Momento de inercia de un sistema de partículas respecto a un punto P: $I_P = \sum_i^N m_i \ell_i^2$, donde ℓ_i es la distancia de la masa m_i al punto P.
2. Momento de inercia de un sistema de partículas respecto a un eje e: $I_e = \sum_i^N m_i \ell_i^2$, donde ℓ_i es la distancia de la masa m_i al eje.
3. Momento de inercia de un sistema de partículas respecto a un plano π: $I_\pi = \sum_i^N m_i \ell_i^2$, donde ℓ_i es la distancia de la masa m_i al plano π.

- **Momento de inercia de un sistema material continuo**: Es la integral de los momentos de inercia de cada una de los diferenciales de masa del sistema respecto a un elemento geométrico de referencia: punto, recta o plano.

  1. Momento de inercia de un sistema continuo respecto a un punto P: $I_P = \int_{\mathcal{M}} \ell^2 dm$, donde ℓ es la distancia de cada diferencial de masa dm al punto P.
  2. Momento de inercia de sistema continuo respecto a un eje e: $I_e = \int_{\mathcal{M}} \ell^2 dm$, donde ℓ es la distancia de cada diferencial de masa dm al eje.

3. Momento de inercia de sistema continuo respecto a un plano π: $I_\pi = \int_{\mathcal{M}} \ell^2 dm$, donde ℓ es la distancia de cada diferencial de masa dm al plano π.

- **Momentos de inercia referidos a un sistema de referencia (SR) cartesiano**: Por evitar duplicidad en el texto, se asume un sistema material continuo, aunque también es aplicable (de forma análoga) a sistemas discretos.

  1. **Respecto a los planos cartesianos** xy, xz, yz:

     $I_{xy} = \int_{\mathcal{M}} z^2 dm$

     $I_{xz} = \int_{\mathcal{M}} y^2 dm$

     $I_{yz} = \int_{\mathcal{M}} x^2 dm$

  2. **Respecto a los ejes cartesianos** x, y, z:

     $I_x = \int_{\mathcal{M}} (y^2 + z^2) dm$

     $I_y = \int_{\mathcal{M}} (x^2 + z^2) dm$

     $I_z = \int_{\mathcal{M}} (x^2 + y^2) dm$

  3. **Respecto al origen de coordenadas** O: $I_O = \int_{\mathcal{M}} (x^2 + y^2 + z^2) dm$

  4. **Relaciones entre momentos de inercia según un SR cartesiano**:

     $I_x = I_{xz} + I_{xy}$; $I_y = I_{yz} + I_{yx}$; $I_z = I_{zy} + I_{zx}$.

$I_o = I_{xz} + I_{xy} + I_{yz}$.

$I_o = \frac{1}{2}\,(I_x + I_y + I_z)$.

$I_o = I_{xz} + I_y$; $I_o = I_{yz} + I_x$; $I_o = I_{xy} + I_z$.

5. **Caso particular de cuerpos planos**: En el caso de cuerpos planos bidimensionales, se hablará de área S en lugar de masa M, y todas las relaciones anteriores serían válidas con la simplificación de que los momentos de inercia que incluyan la coordenada z serán nulos. Es decir, los planos coordenados xz e yz pasarían a ser los ejes x e y, respectivamente. Por tanto en 2D ya no se habla de momentos de inercia respecto a planos, sólo respecto a ejes o puntos.

- **Producto de inercia. Concepto**: Es un escalar (positivo o negativo) que mide cómo se distribuye la masa de un cuerpo respecto a dos planos de referencia π_1 y π_2. Matemáticamente se expresa: $P_{\pi_1\pi_2} = m\ell_{\pi_1}\ell_{\pi_2}$, donde ℓ_{π_1} y ℓ_{π_2} son las distancias de la masa a los planos π_1 y π_2, respectivamente.

- **Producto de inercia de un sistema material discreto**: Es la suma de los productos de inercia de cada una de las partículas respecto a los planos π_1 y π_2. Matemáticamente: $P_{\pi_1\pi_2} = \sum_i^N m_i\ell_{i\pi_1}\ell_{i\pi_2}$, donde $\ell_{i\pi_1}$ y $\ell_{i\pi_2}$ son las distancias de la masa m_i a los planos π_1 y π_2, respectivamente.

- **Producto de inercia de un sistema material continuo**: Es la integral de los productos de inercia de cada una de los diferenciales de masa respecto a los planos π_1 y π_2. Matemáticamente: $P_{\pi_1\pi_2} = \int_{\mathcal{M}} \ell_{\pi_1}\ell_{\pi_2} dm$, donde ℓ_{π_1} y ℓ_{π_2} son las distancias del diferencial de masa dm a los planos π_1 y π_2, respectivamente.

- **Productos de inercia referidos a un sistema de referencia (SR) cartesiano**: Por evitar duplicidad en el texto, se asume un sistema material continuo, aunque también es aplicable (de forma análoga) a sistemas discretos.

    1. $P_{xy} = \int_{\mathcal{M}} xydm$
    2. $P_{yz} = \int_{\mathcal{M}} yzdm$
    3. $P_{xz} = \int_{\mathcal{M}} xzdm$

- **Productos de inercia de sistemas materiales planos**: Al igual que con el producto de inercia, si el sistema es plano o se puede tratar en 2D dejaremos de hablar de diferencial de masa dm para hablar de diferencial de área dS. Lo anterior implica también que la densidad superficial de la pieza plana se considera unitaria. Por otro lado el producto de inercia en 2D deja de ser respecto a dos planos y pasa a ser respecto a dos ejes.

- **Radio de giro**: Es la distancia a la que habría que colocar la totalidad de la masa de un sistema material concentrada en un punto P para que genere el mismo momento de inercia (respecto a un punto, eje o plano) que el propio cuerpo de masa distribuida M. Matemáticamente se obtiene mediante la expresión: $i = \sqrt{\frac{I}{M}}$, donde I es el momento de inercia del sistema material respecto del punto, eje o plano que se considere.

- **Tensor de inercia I**: Es la matriz que contiene los momentos y productos de inercia de un cuerpo respecto a un determinado SR cartesiano. Matemáticamente:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & I_y & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & I_z \end{bmatrix}$$

2.4. Teoremas de Steiner

Permiten relacionar el momento de inercia de un sistema material respecto a un punto, recta o plano, con su equivalente respecto a un punto, recta o plano que pasan por el centro de gravedad del sistema (primer, segundo y tercer teorema de Steiner, respectivamente). También permiten relacionar el producto de inercia de un sistema respecto a dos planos con su equivalente respecto a dos planos que pasan por el centro de gravedad (cuarto teorema de Steiner).

Primer teorema de Steiner

Relaciona el momento de inercia de un sistema material respecto a un punto P cualquiera con el momento de inercia respecto al punto que pasa por el centro de gravedad G del sistema. Se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$I_P = I_G + M\ell_{PG}^2$$

donde I_G es el momento de inercia del cuerpo respecto al centro de gravead, y ℓ_{PG} la distancia entre los puntos P y G.

Segundo teorema de Steiner

Relaciona el momento de inercia de un sistema material respecto a un eje e cualquiera con el momento de inercia respecto al eje paralelo a e que pasa por el centro de gravedad G del sistema. Se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$I_e = I_{eG} + M\ell_{eG}^2$$

donde I_{eG} es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje paralelo a e que pasa por el centro de gravead, y ℓ_{eG} la distancia entre el eje e y su paralelo que pasa por G.

Tercer teorema de Steiner

Relaciona el momento de inercia de un sistema material respecto a un plano π cualquiera con el momento de inercia respecto al plano paralelo a π que pasa por el centro de gravedad G del sistema. Se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$I_\pi = I_{\pi G} + M\ell_{\pi G}^2$$

donde $I_{\pi G}$ es el momento de inercia del cuerpo respecto al plano paralelo a π que pasa por el centro de gravead, y $\ell_{\pi G}$ la distancia entre el plano π y su paralelo que pasa por G.

Cuarto teorema de Steiner

Relaciona el producto de inercia de un sistema material respecto de dos planos cualesquiera π_1 y π_2 con el producto de inercia del mismo sistema respecto de dos planos paralelos que pasan por el centro de gravedad G. Se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$P_{\pi_1\pi_2} = P_{\pi_{1G}\pi_{2G}} + M\ell_{\pi_{1G}}\ell_{\pi_{2G}}$$

donde $P_{\pi_{1G}\pi_{2G}}$ es el producto de inercia respecto de los planos paralelos que pasan por el centro de gravedad G, y $\ell_{\pi_{1G}}$ y $\ell_{\pi_{2G}}$ son las distancias de los planos π_1 y π_2 a sus respectivos paralelos que pasan por G.

Los anteriores teoremas son también de aplicación a figuras planas (2D) tan solo con reemplazar el área de la pieza S por M en las anteriores expresiones.

3. Cinemática

Es el estudio de movimiento de la partícula, sistemas de partículas y sólidos, sin atender a las causas que lo generan.

3.1. Cinemática de la partícula

- **Relaciones cinemáticas básicas**

  1. Vector de posición: $\vec{\mathbf{r}}(t)$
  2. Vector de velocidad: $\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt}$. También: $\vec{\mathbf{v}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}$
  3. Vector de aceleración: $\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}(t)}{dt^2}$. También: $\vec{\mathbf{a}} = \dot{\vec{\mathbf{v}}} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}$.

- **Variables cinemáticas expresadas según un SR cartesiano**:

  1. Vector de posición: $\vec{\mathbf{r}}(t) = x(t)\vec{\mathbf{i}} + y(t)\vec{\mathbf{j}} + z(t)\vec{\mathbf{k}}$
  2. Vector de velocidad: $\vec{\mathbf{v}} = \dot{x}(t)\vec{\mathbf{i}} + \dot{y}(t)\vec{\mathbf{j}} + \dot{z}(t)\vec{\mathbf{k}}$
  3. Vector de aceleración: $\vec{\mathbf{a}} = \ddot{x}(t)\vec{\mathbf{i}} + \ddot{y}(t)\vec{\mathbf{j}} + \ddot{z}(t)\vec{\mathbf{k}}$.

- **Variables cinemáticas expresadas en componenetes intrínsecas (según sus componentes en el Triedro de Frenet)**:

  1. Vector posición: La propia del Triedro de Frenet, que puede ser establecida mediante la parametrización de la trayectoria.
  2. Vector de velocidad: $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\mathbf{e}}_t$, donde v es el módulo de la velocidad.

3. Vector de aceleración: $\vec{\mathbf{a}} = \frac{dv}{dt}\vec{\mathbf{e}}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{\mathbf{e}}_n$, donde ρ es el radio de curvatura instantánea del movimiento.

- **Variables cinemáticas expresadas en componenetes radiales y transversales $[\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta]$:**

  1. Vector posición: $\vec{\mathbf{r}} = r\vec{\mathbf{e}}_r$, donde r es el módulo del radio vector de la partícula en movimiento.
  2. Vector de velocidad: $\vec{\mathbf{v}} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{e}}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{e}}_\theta$.
  3. Vector de aceleración: $\vec{\mathbf{a}} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{\mathbf{e}}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{\mathbf{e}}_\theta$.

  Observe que de las anteriores expresiones se puede obtener eficientemente las ecuaciones cinemáticas del movimiento circular, caracterizado por que el módulo r del vector de posición es constante ($\implies \frac{dr}{dt} = 0$) e igual al radio $r = R$.

- **Variables cinemáticas expresadas en coordenadas cilíndricas** $[\vec{\mathbf{e}}_r, \vec{\mathbf{e}}_\theta, \vec{\mathbf{k}}]$:

  1. Vector posición: $\vec{\mathbf{r}} = r\vec{\mathbf{e}}_r + z\vec{\mathbf{k}}$, donde r es el módulo de la proyección del radiovector de la partícula en movimiento sobre el plano horizontal xy.
  2. Vector de velocidad: $\vec{\mathbf{v}} = \frac{dr}{dt}\vec{\mathbf{e}}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z}\vec{\mathbf{k}}$.
  3. Vector de aceleración: $\vec{\mathbf{a}} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{\mathbf{e}}_r + \left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z}\vec{\mathbf{k}}$.

- **Variables cinemáticas expresadas en coordenadas esféricas** $[\vec{\mathbf{u}}_r, \vec{\mathbf{u}}_\theta, \vec{\mathbf{u}}_\varphi]$:

  1. Vector posición: $\vec{\mathbf{r}} = r\vec{\mathbf{u}}_r$, donde r es el módulo del radio vector de la partícula en movimiento.
  2. Vector de velocidad: $\vec{\mathbf{v}} = \dot{r}\vec{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\vec{\mathbf{u}}_\theta + r\dot{\varphi}\cos\theta\vec{\mathbf{u}}_\varphi$.
  3. Vector de aceleración:

$$\vec{\mathbf{a}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2\right)\vec{\mathbf{u}}_r +$$
$$\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + r\ddot{\theta}\right)\vec{\mathbf{u}}_\theta +$$
$$\left(2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\cos\theta\right)\vec{\mathbf{u}}_\varphi$$

3.2. Cinemática de los sistemas de partículas

Se considera un sistema de N partículas materiales cuyo movimiento se describe según un sistema de referencia como el mostrado en la Figura 5.

- **Posición, velocidad y aceleración del centro de masas de un sistema de partículas**

  1. Vector de posición: $\vec{\mathbf{r}}_G = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{r}}_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$
  2. Vector de velocidad: $\vec{\mathbf{v}}_G = \frac{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{r}}_i m_i\right)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{v}}_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$
  3. Vector de aceleración: $\vec{\mathbf{a}}_G = \frac{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{v}}_i m_i\right)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{a}}_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$.

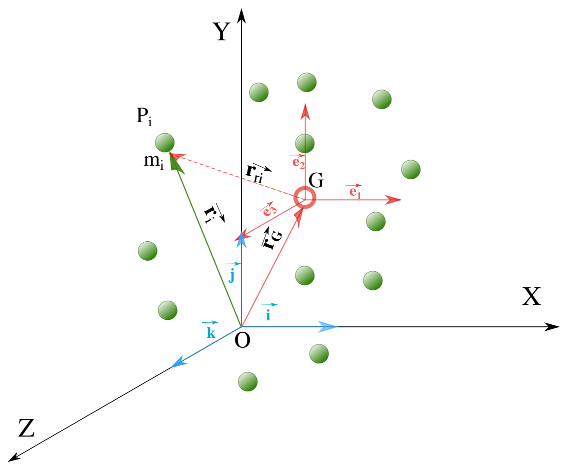

Figura 5: Cinemática de un sistema de partículas: posición de G, sistema de referencia móvil en G.

3.3. Cinemática del sólido rígido

Está caracterizada por el hecho de que las distancias entre dos puntos cualesquiera del sólido son constantes, por ser sólido rígido.

- **Campo de velocidades del sólido rígido**: Sea un punto B cualquiera del sólido y otro punto A en el que situamos un sistema de referencia solidario al sólido. Se tiene que: $\vec{\mathbf{v}}_B = \vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\mathbf{BA}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}$, donde $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es la velocidad instantánea de rotación del sólido.

- **Invariante escalar**: Sea un punto B cualquiera del sólido cuya velocidad es $\vec{\mathbf{v}}_B$. El producto escalar $\tau = \vec{\mathbf{v}}_B \cdot \vec{\boldsymbol{\omega}} = \text{cte}$ se conoce como el invariante escalar del sistema cinemático.

- **Invariante vectorial**: Coincide con el vector velocidad instantánea de rotación $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

- **Velocidad mínima**: Es el vector $\frac{\tau}{\omega^2}\vec{\boldsymbol{\omega}}$, donde τ es el invariante escalar, definido anteriormente y ω es el módulo del vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

- **Velocidad áxica respecto a un eje $\vec{\mathbf{e}}$**: Es la proyección de la velocidad de cualquier punto de un eje $\vec{\mathbf{e}}$ que une dos puntos A y B, sobre el propio eje. Se caracteriza por la siguiente propiedad: $\vec{\mathbf{v}}_A \cdot \vec{\mathbf{e}} = \vec{\mathbf{v}}_B \cdot \vec{\mathbf{e}} = \text{cte}$, donde A y B son puntos del eje $\vec{\mathbf{e}}$.

- **Eje instantáneo de rotación (EIR)**: Eje paralelo al vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, con respecto al cual ocurre la rotación instantánea del sólido. Si B un punto del EIR cuya velocidad $\vec{\mathbf{v}}_B$ es conocida, entonces el EIR cumple la siguiente expresión:

$$\frac{v_{Bx}}{\omega_x} = \frac{v_{By}}{\omega_y} = \frac{v_{Bz}}{\omega_z}$$

- **Campo de aceleraciones**: Sea un punto B cualquiera del sólido y otro punto A en el que situamos un sistema de referencia solidario al sólido. Se tiene que:

$$\vec{\mathbf{a}}_B = \vec{\mathbf{a}}_A + \vec{\mathbf{BA}} \times \vec{\boldsymbol{\alpha}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\mathbf{BA}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}})$$

donde $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ es la aceleración angular ($\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}$).

- **Velocidad de arrastre y relativa**: Sea un sistema de referencia fijo y otro móvil anclado al sólido en un punto A cualquiera del sólido. Considérese un punto P externo al sólido (véase Figura 6). La velocidad de P puede obtenerse como:

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \underbrace{\frac{d}{dt}\vec{\mathbf{r}}_{PA}|_m}_{v.rel} + \underbrace{\vec{\mathbf{v}}_A + \vec{\mathbf{PA}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}}}_{v.arrastre}$$

  donde $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ es el vector de posición de P respecto a A en la base móvil (o sea, $\vec{\mathbf{AP}}$).

- **Aceleración de arrastre, relativa y coriolis**: Sea un sistema de referencia fijo y otro móvil anclado al sólido en un punto A cualquiera del sólido (véase Figura 6). Considérese un punto P externo al sólido. La aceleración de P puede obtenerse como:

$$\vec{\mathbf{a}}_P = \underbrace{\vec{\mathbf{a}}_A + \vec{\mathbf{PA}} \times \vec{\boldsymbol{\alpha}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\mathbf{PA}} \times \vec{\boldsymbol{\omega}})}_{a.arrastre} + \underbrace{\frac{d^2}{dt^2}\vec{\mathbf{r}}_{PA}|_m}_{a.relativa} + \underbrace{2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d}{dt}\vec{\mathbf{r}}_{PA}|_m}_{a.coriolis}$$

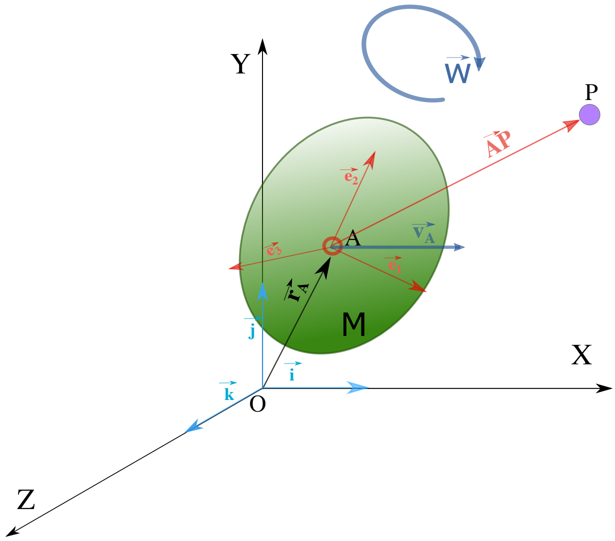

Figura 6: Movimiento de arrastre y relativo de un punto P respecto a un sólido en movimiento. Obsérvese que el sistema de referencia móvil (en rojo) se mueve solidario al sólido.

3.4. Ejemplo ilustrativo sobre velocidad y aceleración relativas, y acel. Coriolis

Se considera una barra que gira con una velocidad angular constante $\vec{\boldsymbol{\omega}} = 1$ [rad/s], y una manivela que desliza sobre la barra hacia el centro de la misma (punto O). En un instante en concreto, su posición viene dada por el vector $\vec{\mathbf{r}}(t) = (10 - t)\vec{\mathbf{e}}_1$, donde $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\}$ (en rojo) son versores de una base móvil que solidarios con la barra. Se pide: obtener la velocidad relativa, aceleración relativa y aceleración de Coriolis de la manivela. Expresar la solución según el sistema de referencia fijo OXY y según el sistema de referencia móvil (ambos).

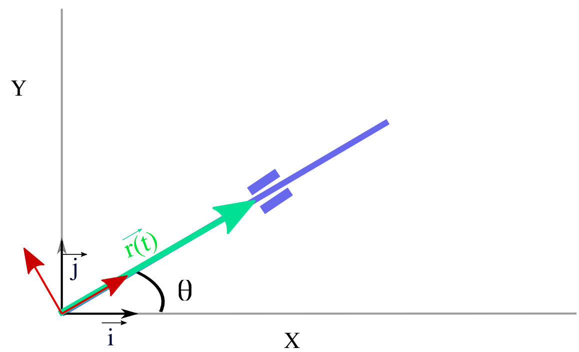

Figura 7: Manivela que desliza por una barra que rota con una velocidad angular dada.

Solución

Se usa la ecuación de la velocidad de arrastre y relativa de un sólido respecto a otro. En este caso, la manivela se mueve relativamente respecto a la barra, que a su vez se mueve describiendo un giro respecto a su extremo izquierdo.

La velocidad relativa será:

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}|_m = -1\vec{\mathbf{e}}_1$$

Lo expresamos según los versores de la base móvil, y posteriormente lo pasamos a los versores de la base fija. Para ello, se observa que $\vec{\mathbf{e}}_1 = [\cos\theta\vec{\mathbf{i}} + \sin\theta\vec{\mathbf{j}}]$, por lo que $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}|_m$ expresado según OXY es igual a $-1[\cos\theta\vec{\mathbf{i}} + \sin\theta\vec{\mathbf{j}}]$.

Por otro lado, la aceleración relativa es la derivada de la velocidad relativa en la base móvil, esto es:

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}|_m = \vec{0}$$

Por último, la aceleración de Coriolis es:

$$2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}|_m$$

donde $\vec{\boldsymbol{\omega}} = [0\vec{\mathbf{e}}_1 + 0\vec{\mathbf{e}}_2 + 1\vec{\mathbf{e}}_3]$, siendo $\vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{k}}$, y $= \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}|_m = -1\vec{\mathbf{e}}_1$, según hemos obtenido anteriormente. Se hace el producto vectorial:

$$a_{cor.} = 2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}|_m = 2\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{e}}_1 & \vec{\mathbf{e}}_2 & \vec{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{\mathbf{e}}_2$$

Expresamos a continuación la aceleración de Coriolis según el otro sistema (el fijo), teniendo en cuenta que $\vec{\mathbf{e}}_2 = [-\sin\theta\vec{\mathbf{i}} + \cos\theta\vec{\mathbf{j}}]$, por lo que quedaría como $a_{cor.} = -2[-\sin\theta\vec{\mathbf{i}} + \cos\theta\vec{\mathbf{j}}]$

4. Estática: Equilibrio estático e hilos

La Estática es la parte de la Mecánica que se ocupa de estudiar el equilibrio estático (o inmóvil) de los cuerpos.

4.1. Fuerzas estáticas, enlaces y grados de libertad

- **Resultante de fuerzas sobre una partícula material**: Sea una partícula de masa m que ocupa una posición dada por el punto P, y sometida a uns sistema de fuerzas formado por los vectores $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{F}}_N$. El efecto de todas las fuerzas es el mismo que el de la resultante

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_N$$

- **Momento resultante sobre una partícula material**: Es el momento resultante del sistema de fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_i, i = 1, \ldots, N$ aplicadas en la partícula material. El momento respecto de un punto A del sistema de fuerzas es:

$$\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{A_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{AP}} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{R}}$$

  donde P es el punto donde se ubica la partícula, y el punto de aplicación de las fuerzas.

- **Resultante de fuerzas sobre un sistema de partículas mate-**

riales: Se considera un sistema de N partículas materiales sometidas a fuerzas externas $\vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$ y fuerzas internas $\vec{\mathbf{F}}_{i_{int}}$, $i = 1, \ldots, N$. El efecto de todas las fuerzas es el mismo que el de la resultante

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{i_{int}}}_{=0} + \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$$

- **Momento resultante de un sistema de fuerzas actuando sobre un sistema de partículas materiales**: Es el momento resultante del sistema de fuerzas externas. Esto es:

$$\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{A_i} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}\vec{\mathbf{P}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$$

donde P_i es el punto cada partícula material, que coincide con el punto de aplicación de cada vector $\vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$.

- **Resultante de fuerzas sobre un sólido rígido**: Las fuerzas aplicacadas sobre uno o varios puntos del sólido rígido se consideran vectores deslizantes. El efecto de todas las fuerzas es el mismo que el de la resultante

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{i_{int}}}_{=0} + \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$$

- **Momento resultante de un sistema de fuerzas actuando sobre un sólido rígido**: El momento total es el momento resultante del sistema de fuerzas exteriores. Esto es:

$$\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{A_i} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}\vec{\mathbf{P}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$$

donde P_i es un punto cualquiera de la recta de acción de cada vector $\vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$.

- **Resto de conceptos básicos**:

  Grado de libertad: Conjunto de datos/parámetros geométricos independientes necesarios para definir la posición del sistema.

  Enlace: Limitación geométrica (restricción) al movimiento libre del sistema.

  Fuerzas de enlace: Son las fuerzas que materializan las restricciones al movimiento o la reducción de grados de libertad del sistema debido a los enlaces.

  Diagrama de cuerpo libre: Esquema mecánico que resulta de aislar el sistema eliminando los enlaces y sustituyéndolos por las fuerzas de enlace. Responde al *Principio de liberación*.

  Fuerza de rozamiento: Es una fuerza de contacto que se opone al movimiento relativo entre dos cuerpos que están en contacto. Tipos de rozamiento según el tipo de movimiento relativo entre los sólidos: deslizamiento, rodadura, pivotamiento. El valor de esta acción es proporcional a la fuerza normal $\vec{\mathbf{N}}$ de contacto entre los cuerpos.

a) Rozamiento: $\vec{\mathbf{F}}_{roz} = \mu_r \vec{\mathbf{N}}$, donde μ_r es el coeficiente de fricción (adimensional).

b) Pivotamiento: $\vec{\mathbf{M}}_{piv} = \mu_{piv} \vec{\mathbf{N}}$, donde μ_{piv} es el coeficiente de rozamiento al pivotamiento (unidades de longitud). $\vec{\mathbf{M}}_{piv}$ es el momento o par de pivotamiento.

c) Rodadura: $\vec{\mathbf{F}}_{rod} = \mu_{rod} \vec{\mathbf{N}}$, donde μ_{rod} es el coeficiente de rozamiento a la rodadura (adimensional).

Los coeficientes de rozamiento μ_r, μ_{piv} y μ_{rod} presentan valores diferentes (mayores) cuando son estáticos, esto es, cuando los sólidos en contacto aún no han iniciado el movimiento relativo. Cuando el rozamiento ocurre bajo movimiento relativo entre los sólidos, se denominan *coeficientes de rozamiento dinámicos*.

Ecuaciones de equilibrio estático

Dado un sistema material sometido a una serie de fuerzas exteriores $\vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$ e interiores $\vec{\mathbf{F}}_{i_{int}}$, $i = 1, \ldots, N$, el equilibrio estático se cumple cuando:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{A_i} = \vec{0}$$

donde A es un punto cualquiera del espacio.

- **Ecuaciones de equilibrio estático de un sistema tridimensional expresadas según un S.R. cartesiano**: Surgen seis ecuaciones, tres de equilibrio de fuerzas en direcciones x, y, z y tres para los momementos en direcciones x, y, z.

  1. $\sum_{i=1}^{N} F_{x_i} = 0$
  2. $\sum_{i=1}^{N} F_{y_i} = 0$
  3. $\sum_{i=1}^{N} F_{z_i} = 0$
  4. $\sum_{i=1}^{N} M_{Ax_i} = 0$
  5. $\sum_{i=1}^{N} M_{Ay_i} = 0$
  6. $\sum_{i=1}^{N} M_{Az_i} = 0$

Se observa que hay 6 ecuaciones para 6 incógnitas que corresponden con los grados de libertad de un sólido rígido en el espacio.

- **Ecuaciones de equilibrio estático de un sistema plano expresadas según un S.R. cartesiano**: Surgen 3 ecuaciones, dos de equilibrio de fuerzas en direcciones x, y y una para el momemento, cuya dirección es z, fuera del plano.

  1. $\sum_{i=1}^{N} F_{x_i} = 0$
  2. $\sum_{i=1}^{N} F_{y_i} = 0$
  3. $\sum_{i=1}^{N} M_{Az_i} = 0$

  Se observa que hay 3 ecuaciones para 3 incógnitas que corresponden con los grados de libertad de un sólido rígido plano.

4.2. Hilos inextensibles

Los cables o hilos inextensibles son enlaces de los sistemas mecánicos caracterizados por fuerzas de tensión en la dirección del cable.

- **Equilibrio de un hilo sometido a un conjunto de fuerzas discretas**: El equilibrio del cable se consigue aplicando las ecuaciones de equilibrio estático en el cable. Debido al *Principio de liberación*, cualquier tramo del cable debe de estar en equilibrio estático, lo que significa que la tensión del cable debe estar en equilibrio de fuerzas y momentos con el resto de fuerzas externas. Aspectos del equilibrio estático de cables:

1. **Longitud L tras la deformación**: Al ser inextensible, la configuración deformada tras aplicar la carga debe de ser igual a la longitud original L. Esto es:

   $$L = \frac{b_1}{\cos\alpha_1} + \frac{b_2}{\cos\alpha_2} + \ldots + \frac{b_k}{\cos\alpha_k}$$

   donde $b_1, b_2, \ldots, b_k$ son las longitudes de los k tramos de cable en tensión y $\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_k$ los cosenos de sus respectivos ángulos con respecto a la horizontal.

2. **Misma altura desde un extremo u otro**: Considérese un cable de cuatro tramos como ejemplo. Esta condición implica que $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, donde $a_1, \ldots, a_4$ son las alturas de los nodos de cada tramo respecto a una referencia vertical común.

- **Equilibrio de un hilo sometido a un conjunto de fuerzas continuas**: Se rige mediante las ecuaciones diferenciales vectoriales siguientes:

$$d\vec{\mathbf{T}} + \vec{\mathbf{F}}ds = 0$$

$$d\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{T}} = 0$$

donde $d\vec{\mathbf{r}}$ es el diferencial de vector de posición de la curva del hilo, cuya dirección coincide con la tangente del hilo en el punto considerado. La segunda ecuación implica que $\vec{\mathbf{T}}$ y $d\vec{\mathbf{r}}$ son siempre paralelos, lo cual implica a su vez que $\vec{\mathbf{T}}$ es tangente al hilo.

- **Ecuaciones cartesianas de equilibrio de un hilo sometido a un conjunto de fuerzas continuas**: Son tres, que resultan de expresar la primera de las ecucaciones del punto anterior en las direcciones x, y y z.

  1. $F_x ds + d\underbrace{\left(T\dfrac{dx}{ds}\right)}_{T_x=T\frac{dx}{ds}} = 0$
  2. $F_y ds + d\underbrace{\left(T\dfrac{dy}{ds}\right)}_{T_y=T\frac{dy}{ds}} = 0$
  3. $F_z ds + d\underbrace{\left(T\dfrac{dz}{ds}\right)}_{T_z=T\frac{dz}{ds}} = 0$

  Observe que en las ecuaciones anteriores $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ son los cosenos directores de la tensión $\vec{\mathbf{T}}$ con respecto a los ejes cartesianos x, y, z. En otras palabras, nótese que $ds\cos\alpha_x = dx$, $ds\cos\alpha_y = dy$, y $ds\cos\alpha_z = dz$, de modo que se ve claramente que $T_x = Tcos\alpha_x, T_y = Tcos\alpha_y$, y $T_z = Tcos\alpha_z$.

- **Ecuación intrínseca de equilibrio de un hilo sometido a un conjunto de fuerzas continuas**: Es una ecuación vectorial que se obtiene teniendo en cuenta que la tensión lleva la dirección del versor tangencial (del Triedro de Frenet) $\vec{\mathbf{T}} = T\vec{\mathbf{e}}_t$, donde T es el módulo de la tensión. La ecuación resultante queda como sigue:

$$\frac{dT}{ds}\vec{\mathbf{e}}_t + \frac{T}{\rho}\vec{\mathbf{e}}_n + \vec{\mathbf{F}} = \vec{0}$$

  Descomponiendo la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en componentes intrínsecas $\vec{\mathbf{F}} = F_t\vec{\mathbf{e}}_t + F_n\vec{\mathbf{e}}_n + F_b\vec{\mathbf{e}}_b$, la ecuación de equilibrio anterior se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\left(\frac{dT}{ds} + F_t\right)\vec{\mathbf{e}}_t + \left(\frac{T}{\rho} + F_n\right)\vec{\mathbf{e}}_n + F_b\vec{\mathbf{e}}_b = 0$$

  Obsérvese que para que haya equilibrio, la componente $F_b\vec{\mathbf{e}}_b = 0$, esto es, la fuerza F está contenida en el plano osculador.

- **Ecuaciones de equilibrio de un hilo sometido a un conjunto de fuerzas verticales continuas de valor** $P(x)$: El hilo está en equilibrio si cumple las ecuaciones cartesianas de equilibrio en el plano xy.

  1. **Caso particular: la catenaria**. La catenaria es la curva que adopta un cable en equilibrio sometido a un conjunto de fuerzas

verticales $P(x)$ constantes de valor $P(x) = P_0$ por unidad de longitud de cable. Esto es, la fuerza distribuida $F_y = P_0$, en [N/m]. Las ecuaciones de equilibrio quedarían como sigue:

$$
\begin{aligned}
d\left(T\frac{dx}{ds}\right) &= 0 \\
-P_0 ds + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

A partir de la segunda ecuación (equilibrio vertical) puede obtenerse la ecuación geométrica del hilo en equilibrio:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P_0}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Para integrar la ecuación anterior se hace $\frac{dy}{dx} = y'$ y se reescribe la anterior ecuación diferencial de la siguiente forma

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{P_0}{T_0}dx$$

que se puede integrar mediante separación de variables. El resultado es:

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

donde $c = \frac{T_0}{P_0}$.

Propiedades:

a) Geometría: La geometría resultante es la siguiente $y(x) = c \cosh \frac{x}{c}$, donde c representa es la distancia a la que se encuentra el mínimo de la función desde el eje X.

b) Tensión: La tensión en cualquier punto de la catenaria se obtiene mediante cualquiera de las siguientes fórmulas $T = P_0 y$ o $T = T_0 \cosh \frac{x}{c}$.

c) Radio de curvatura a flexión: $\frac{y^2}{c}$

d) Longitud de arco desde el punto más bajo ($s = 0$): $s = c \sinh \frac{x}{c} = c\frac{dy}{dx}$

2. **Caso particular: la parábola**. La parábola es la curva que adopta un cable en equilibrio sometido a un conjunto de fuerzas verticales $P(x)$ constantes de valor $P(x) = P_0$ por unidad de longitud horizontal o por unidad de abcisa. Esto es, la fuerza distribuida $F_y = \frac{P_0 dx}{ds}$, en [N/m]. O sea, $P_0 dx$ sería el valor que integra la carga vertical en un dx, y luego se reparte por unidad de longitud ds, para que quede en [N/m]. Las ecuaciones de equilibrio son las siguientes:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$
$$\underbrace{-P(x)}_{P_0}dx + d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

A partir de la primera de las ecuaciones anteriores se obtiene que $T\frac{dx}{ds} = \text{cte} = T_0 \implies T_0 = T\cos\theta$, donde $\cos\theta = \frac{dx}{ds}$.

A partir de la segunda ecuación (equilibrio vertical) puede obteberse la ecuación geométrica del hilo en equilibrio:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(x)}{T_0}$$

Propiedades:

a) Geometría: La geometría resultante es la siguiente $y(x) = \frac{1}{2c}x^2$, donde $c = \frac{T_0}{P_0}$. En este caso, el mínimo se coloca en el origen de coordenadas.

b) Tensión: La tensión en cualquier punto de la parábola se obtiene mediante la fórmula $T^2 = T_0^2 + P_0^2x^2$.

c) Longitud de arco desde el punto más bajo ($s = 0$): $s = x\left(1 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{c}\right)^2\right) + \ldots$. Se adoptan los primeros términos del desarrollo en serie.

5. Dinámica

La dinámica es la parte de la Mecánica que se ocupa del estudio del movimiento de las partículas, sistemas de partículas y sólidos, junto a las causas que lo generan.

5.1. Magnitudes cinéticas

- **Momento lineal o cantidad de movimiento**: Es una magnitud vectorial de dirección y sentido igual al vector velocidad, que mide la conjunción de la masa y la velocidad de un sistema material.

  Momento lineal de una partícula: $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$

  Momento lineal de un sistema discreto de partículas materiales: $\vec{\mathbf{p}} = \sum_i^N m_i\vec{\mathbf{v}}_i = M\vec{\mathbf{v}}_G$. Es equivalente a la que tendría una sola partícula que contuviese toda la masa del sistema y posicionada en el centro de masas del sistema.

  Momento lineal de un sistema continuo: $\vec{\mathbf{p}} = \int_M \vec{\mathbf{v}}dm = M\vec{\mathbf{v}}_G$. Es equivalente a la que tendría una sola partícula que contuviese toda la masa del sistema y posicionada en el centro de masas del sistema.

  Momento lineal de un sólido rígido: $\vec{\mathbf{p}} = \int_M \left(\vec{\mathbf{v}}_o + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}\right) dm$, donde $\vec{\mathbf{v}}_0$ es la velocidad del sistema de referencia $OXYZ$ (solidario con el sólido rígido) y $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de un punto cualquiera del sólido referido al sistema de referencia $OXYZ$. Puesto que el momento lineal de un sistema continuo es $\vec{\mathbf{p}} = M\vec{\mathbf{v}}_G$, donde $\vec{\mathbf{v}}_G = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_G$, por tanto, en un sólido rígido $\vec{\mathbf{p}} = M\left(\vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_G\right)$, donde $\vec{\mathbf{r}}_G$ es la posición del centro de gravedad referida al centro del sistema OXYZ. Si el punto O es fijo, entonces la expresión anterior se reduce a $\vec{\mathbf{p}} = M(\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_G)$ (cantidad de movimiento de un sólido rígido que pivota respecto a O).

- **Momento angular o cinético**: Respecto a un punto A cualquiera, es el momento del vector cantidad de movimiento respecto a ese punto.

  Momento angular de una partícula: $\vec{\mathbf{H}}_A = \vec{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{p}}$. Mide la tendencia de la partícula a no seguir en su movimiento la dirección de la visual que une A con el punto P.

  Momento angular de un sistema discreto de partículas materiales:

$$\vec{\mathbf{H}}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{H}}_{A_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{AP}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i$$

  Es un vector fijo en A que resulta de sumar los momentos cinéticos respecto a A de todas la partículas del sistema, donde P_i es el punto de aplicación del vector $\vec{\mathbf{p}}_i$.

Momento angular de un sistema continuo:

$$\vec{\mathbf{H}}_A = \int_M \vec{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{v}} dm$$

Es la integral de los momentos cinéticos diferenciales respecto a A , donde P es el punto de aplicación del vector $\vec{\mathbf{p}}$ en cada dm.

Momento angular de un sólido rígido respecto a un punto fijo A del sólido (mov. de rotación):

$$\vec{\mathbf{H}}_A = \int_M \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}})\, dm = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_x \\ \omega_x \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_A]\, \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

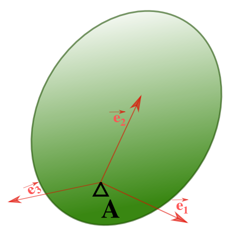

Figura 8: Sólido en movimiento de pivotamiento respecto de un punto A. El sistema de referencia en A está ligado al sólido.

donde el vector $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de cada partícula respecto al sistema de referencia solidario al sólido, y ubicado en A. El vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es el vector de rotación instantánea del sólido y $[\mathbf{I}_A]$

es el tensor de inercia del sólido respecto del sistema de referencia solidario al sólido centrado en A.

Momento angular de un sólido rígido libre respecto a su centro de gravedad:

$$\vec{\mathbf{H}}_G = \int_M \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}})\, dm = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_x \\ \omega_x \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_G]\, \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

donde el vector $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de cada partícula respecto a un sistema de referencia solidario al sólido ubicado en G y de ejes invariantes. El vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es el vector de rotación instantánea del sólido y $[\mathbf{I}_G]$ es el tensor de inercia del sólido respecto del sistema de referencia solidario al sólido centrado en G.

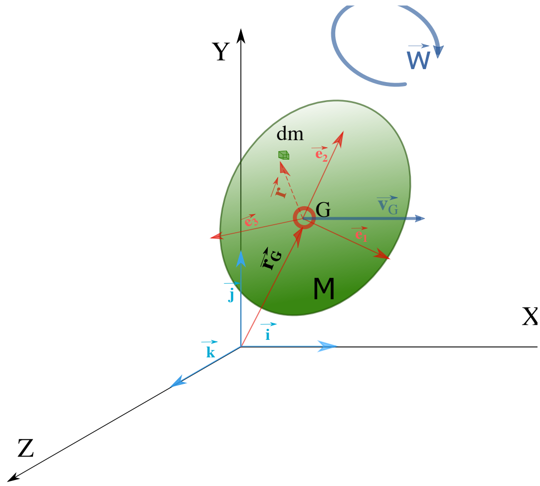

Figura 9: Sólido rígido en movimiento libre e indicación de sistema de referencia móvil centrado en G y solidario con el sólido.

Momento angular de un sólido rígido libre respecto a un punto cualquiera A:

$$\vec{\mathbf{H}}_A = \int_M \vec{\mathbf{r}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}})\, dm + \vec{\mathbf{r}}_G \times M \vec{\mathbf{v}}_G$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de cada partícula respecto al punto G, y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es la velocidad instantánea de rotación del sólido rígido. $\vec{\mathbf{r}}_G$ es la posición del centro de gravedad respecto del punto A. El primer término es el momento angular (relativo a G)

del movimiento de las partículas del sólido rígido respecto a G, esto es, del movimiento de rotación del sólido. Por otro lado, el segundo término corresponde con el momento cinético (respecto a A, ya que el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_G$ se ha descrito respecto a A) del movimiento del centro de masas, descrito por la velocidad de su centro de masas $\vec{\mathbf{v}}_G$.

- **Resto de consideraciones del Momento cinético**

Los elementos del tensor de inercia $[\mathbf{I}_A]$ son magnitudes constantes, ya que el sistema cartesiano está centrado en A es solidario con el sólido;

Nótese que el vector $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ de la base móvil m coincide con el del sólido indeformable;

Si el sistema de referencia cartesiano centrado en A y solidario con el sólido coincidiera con el triedro principal de inercia del sólido, entonces el tensor $[\mathbf{I}_A]$ se convierte en una matriz diagonal, por lo que

$$\vec{\mathbf{H}}_A = I_x\omega_x + I_y\omega_y + I_z\omega_z$$

Si el sólido rígido rota con respecto a un eje $\vec{\mathbf{e}}$, se puede entender como un caso particular de momento cinético respecto a un punto fijo, en el que el eje $\vec{\mathbf{e}}$ pase por A. Si además, por conveniencia se hace coincidir $\vec{\mathbf{e}}$ con algún eje cartesiano, por ejemplo el z, entonces:

$$\vec{\mathbf{H}}_A = (-I_{xz} - I_{yz} + I_z)\,\omega_z\vec{\mathbf{k}}$$

$\vec{\mathbf{H}}_A = \vec{\mathbf{H}}_z$, puesto que la rotación del sólido plano respecto a A ocurre respecto a un eje que tiene la dirección $\vec{\mathbf{k}}$ y lo atraviesa en A.

Si además el sólido rígido es plano y, por conveniencia, se hace coincidir con el plano xy, entonces la expresión del momento cinético se reduce a:

$$\vec{\mathbf{H}}_A = I_z\omega_z\vec{\mathbf{k}} \tag{4}$$

donde, al igual que el caso anterior, $\vec{\mathbf{H}}_A = \vec{\mathbf{H}}_z$, puesto que la rotación del sólido plano respecto a A ocurre respecto a un eje que tiene la dirección $\vec{\mathbf{k}}$ y lo atraviesa en A.

Segundo Teorema de König

Indica que el momento cinético o angular del sistema respecto a su centro de masas G es igual al momento cinético relativo, definido a partir de las velocidades relativas respecto a un sistema de referencia centrado en G y de direcciones invariables.

- **Energía cinética**: Es una magnitud escalar, siempre positiva o nula, que mide la energía de los sistemas materiales en movimiento.

Energía cinética de una partícula material $T = \frac{1}{2}mv^2$, donde v es el módulo del vector velocidad.

Energía cinética de un sistema discreto de partículas materiales: Es la suma de la energía cinética de cada partícula del sistema.

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

En virtud del *Primer Teorema de Köning* (más abajo) la anterior expresión se puede reescribir como sigue:

$$T = \frac{1}{2} M \vec{\mathbf{v}}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{r_i}^2$$

donde v_{r_i} es el módulo de la velocidad relativa de la partícula i respecto al centro de gravedad G.

Energía cinética de un sistema continuo: Es la integral de la energía cinética de cada elemento diferencial del sistema.

$$T = \int_M \frac{1}{2} v^2 dm$$

En virtud del *Primer Teorema de Köning* (más abajo) la anterior expresión se puede reescribir como sigue:

$$T = \frac{1}{2} M \vec{\mathbf{v}}_G^2 + \frac{1}{2} \int_M v_r^2 dm$$

donde v_r es el módulo de la velocidad relativa de cada elemento diferencial respecto al centro de gravedad G.

Energía cinética de un sólido rígido (expresión general):

$$T = \int_M \frac{1}{2} v^2 dm$$

Al ser un sólido rígido, la velocidad v puede venir dada de la ecuación del campo de velocidades $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$, donde $\vec{\mathbf{r}}$ es un vector de posición respecto a un sistema de referencia ubicado en un punto O cualquiera del espacio.

Energía cinética de un sólido rígido en rotación: Se asume que el sólido rota o pivota respecto a un punto O en el cual se centra el sistemas de referencia solidario al sólido.

$$T = \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \int_M (\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{v}})\, dm = \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{\mathbf{H}}_0$$

Teniendo en cuenta la expresión del momento cinético del sólido rígido con un punto fijo, dada más arriba, la expresión anterior se puede reescribir como sigue:

$$T = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}^T \left[\mathbf{I}_O\right] \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

Energía cinética de un sólido rígido libre usando un SR en G: Se considera un sólido rígido que describe un movimiento general, y un sistema de referencia subido en G.La energía total es suma de término de traslación y rotación en torno a G.

$$T = \frac{1}{2}M\vec{\mathbf{v}}_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{\omega}}^T \left[\mathbf{I}_G\right] \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

- **Resto de consideraciones de la energía cinética del sólido rígido**

Si el sistema de referencia cartesiano centrado en O y solidario con el sólido coincidiera con el triedro principal de inercia del sólido, entonces el tensor $[\mathbf{I}_O]$ se convierte en una matriz diagonal, por lo que la energía cinética de rotación se puede expresar como:

$$T = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right)$$

Si el sólido rígido rota con respecto a un eje $\vec{\mathbf{e}}$, se puede entender como un caso particular de energía cinética de rotación respecto a un punto fijo, en el que el eje $\vec{\mathbf{e}}$ pase por O. Si además, por conveniencia se hace coincidir $\vec{\mathbf{e}}$ con algún eje cartesiano, por ejemplo el z, entonces:

$$T = \frac{1}{2} \left(-I_{xz} - I_{yz} + I_z \right) \omega_z^2$$

puesto que la rotación del sólido plano respecto a O ocurre respecto a un eje que tiene la dirección $\vec{\mathbf{k}}$ y lo atraviesa en O;

Si además el sólido rígido es plano y, por conveniencia, se hace coincidir con el plano xy, entonces la expresión de la energía cinética de rotación se reduce a:

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega_z^2$$

Primer Teorema de König

Indica que la energía cinética de un sistema de partículas es la suma de la energia cinética del movimiento general de traslación de las partículas (que coincide con $\vec{\mathbf{v}}_G$) más la energía cinética del movimiento relativo de las mismas respecto a G.

5.2. Sistema dinámico

- **Resultante de fuerzas**

Partícula material: $\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i$

Sistema de partículas materiales: Se considera un sistema de N partículas materiales sometidas a fuerzas externas $\vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$ y fuerzas internas $\vec{\mathbf{F}}_{i_{int}}$, $i = 1, \ldots, N$. El efecto de todas las fuerzas es el mismo que el de la resultante $\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{i_{int}}}_{=0} + \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$.

Resultante de fuerzas sobre un sólido rígido: Las fuerzas aplicacadas sobre uno o varios puntos del sólido rígido se consideran vectores deslizantes. El efecto de todas las fuerzas es el mismo que el de la resultante $\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{\mathbf{F}}_{i_{int}}}_{=0} + \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$.

- **Momento respecto a un punto A**

Partícula material: Es el momento resultante del sistema de fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_i, i = 1, \ldots, N$ aplicadas en la partícula material. El momento respecto de un punto A del sistema de fuerzas es: $\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{A_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{AP}} \times \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{AP}} \times \vec{\mathbf{R}}$, donde P es el punto donde se ubica la partícula, y el punto de aplicación de las fuerzas.

Sistema de partículas materiales: Es el momento resultante del sistema de fuerzas externas. Esto es: $\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{A_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{AP}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$, donde P_i es el punto cada partícula material, que coincide con el punto de aplicación de cada vector $\vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$.

Sólido rígido: El momento total es el momento resultante del sistema de fuerzas exteriores. Esto es: $\sum_{i=1}^{N}\vec{\mathbf{M}}_{A_i} = \sum_{i=1}^{N}\vec{\mathbf{AP}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$, donde P_i es un punto cualquiera de la recta de acción de cada vector $\vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$.

- **Trabajo**: Es una magnitud escalar de definición diferencial.

Partícula material: $dW = d\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$

Sistema de partículas materiales:

$$dW = \sum_{i=1}^{N} dW_i = \sum_{i=1}^{N} d\vec{\mathbf{F}}_i \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} d\vec{\mathbf{F}}_{ext_i} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i}_{dW_{ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} d\vec{\mathbf{F}}_{int_i} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i}_{dW_{int}}$$

Sólido rígido: Coincide con el trabajo de las fuerzas exteriores, ya que las interiores no ejercen trabajo en el sólido rígido.

$$dW = \sum_{i=1}^{N} dW_i = \sum_{i=1}^{N} d\vec{\mathbf{F}}_i \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} d\vec{\mathbf{F}}_{ext_i} \cdot d\vec{\mathbf{r}}_i}_{dW_{ext}}$$

5.3. Leyes de la Dinámica

Teorema del Momento lineal o Cantidad de movimiento

La razón de cambio del momento lineal o cantidad de movimiento de un sistema corresponde con la **resultante de fuerzas del sistema dinámico**. Esto es:

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{R}}$$

Del teorema así enunciado se deriva el principio de conservación.

Principio de Conservación

Si la resultante de fuerzas actuantes en un sistema es nulo, por tanto el momento lineal o cantidad de movimiento se conserva.

Teorema del Momento Angular o Cinético

La razón de cambio del momento cinético o angular de un sistema de partículas corresponde con el **momento del sistema dinámico**. Si el punto A es fijo, el momento del sistema dinámico se reduce al momento resultante de las fuerzas externas actuantes sobre el sistema. Esto es:

$$\frac{d\vec{\mathbf{H}}_A}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_A$$

Del teorema así enunciado se deriva el principio de conservación.

Principio de Conservación

Si el momento respecto de un punto fijo A de las fuerzas externas actuantes en un sistema es nulo, por tanto el momento cinético o angular se conserva.

Teorema de la Energía

El trabajo que ejerce el sistema dinámico sobre el sistema es la **variación de su energía cinética**. Esto es:

$$dW = dT$$

Del teorema así enunciado se deriva el principio de conservación.

Principio de Conservación

Si el trabajo que ejercen las fuerzas fuerzas actuantes en un sistema es nulo, por tanto la energía cinética total se conserva. Si además, las fuerzas son conservativas, entonces el balance de energía cinética y potencial se mantiene constante.

- **Resto de consideraciones sobre las leyes fundamentales**

1. Si el punto A no es un punto fijo, el Teorema del Momento Angular o Cinético hay que expresarlo así: $\frac{d\vec{\mathbf{H}}_A}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_A + \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{v}}_A$, donde $\vec{\mathbf{v}}_A$ es la velocidad del punto A.

2. Si el punto A no es un punto fijo pero coincide con el centro de gravedad G, entonces el Teorema del Momento Angular o Cinético queda como sigue: $\frac{d\vec{\mathbf{H}}_G}{dt} = \vec{\mathbf{M}}_G$

3. La variación temporal total de $\vec{\mathbf{H}}_O$ desde un sistema de referencia absoluto centrado en un punto A (esto es, no solidario con el sólido) ha de plantearse mediante la Regla de Boure:

$$\dot{\vec{\mathbf{H}}}_A = \frac{d\vec{\mathbf{H}}_A}{dt}|_m + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{H}}_A = [\mathbf{I}_A]\,\vec{\boldsymbol{\alpha}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{H}}_A$$

donde $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ es el vector aceleración angular del sólido.

5.4. Equilibrio dinámico

Ecuaciones de equilibrio dinámico

Dado un sistema material sometido a una serie de fuerzas exteriores $\vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}}$ e interiores $\vec{\mathbf{F}}_{i_{int}}$, $i = 1, \ldots, N$, el equilibrio dinámico se cumple cuando:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{i_{ext}} = M\vec{\mathbf{a}}_G$$

$$\vec{\mathbf{M}}_A = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{M}}_{A_i} = [\mathbf{I}_A]\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}$$

donde A es un punto cualquiera donde se centra un sistema de referencia solidario con el sólido, o directamente el centro de gravedad G.

Las anteriores ecuaciones conforman un sistema de seis ecuaciones en el espacio: tres para el equilibrio de fuerzas según los ejes x, y, z, y tres para los momentos respecto del punto A según los ejes x, y, z. En sistemas planos, las ecuaciones anteriores se traducen en tres: dos ecuaciones para el equilibrio de fuerzas en el plano y una de equilibrio de momentos respecto del punto A.

6. Vibraciones mecánicas

Las vibraciones mecánicas son un tipo de movimiento oscilatorio que resulta del equilibrio dinámico de un cuerpo másico sujeto a una serie fuerzas de restitución conservativas (generalmente elásticas y gravitatorias) y de disipación no conservativas (generalmente procedentes del rozamiento o amortiguación). Su estudio se podría englobar bajo la Dinámica, aunque se saca como tema separado por su importancia en la asignatura.

6.1. Vibraciones de un grado de libertad

Para el desarrollo matemático siguiente se considera que el movimiento vibratorio ocurre en el eje x.

- **Ecuación general de equilibrio dinámico**:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t)$$

  donde c es el coeficiente de amortigüamiento, k es la constante elástica, y $P(t)$ es la fuerza externa aplicada sobre la masa m.

- **Vibraciones libres amortigüadas**: Responden al caso particular del caso anterior donde $P(t) = 0$, por tanto la ecuación de equilibrio queda como sigue:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

La ecuación del movimiento vibratorio resultante se expresa mediante la siguiente ecuación

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda t)$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio anterior, quedaría:

$$\left(m\lambda^2 + c\lambda + k\right) C_1 \exp(\lambda t) = 0$$

que se cumple de forma general cuando

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

cuya solución para λ es:

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

o alternativamente:

$$\lambda = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ es la frecuencia angular en [rad/s], T_0 es el periodo natural en [s], ζ es la tasa de amortigüamiento, que puede obtenerse como: $\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$, o $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$.

1. **Vibraciones sobreamortigüadas** ($\zeta > 1$): En ese caso, las dos raíces características $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$ son reales, y además negativas. La ecuación del movimiento queda como sigue:

$$x(t) = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$

donde C_1 y C_2 son constantes que se obtienen mediante las condiciones de contorno (posición y velocidad incial del movimiento).

2. **Vibraciones subamortigüadas** ($\zeta < 1$): Las raíces de la ecuación característica son complejas y conjugadas $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm i\,\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$, donde ω_d, la parte compleja de la raíz, es la frecuencia angular amortigüada. La ecuación del movimiento queda como sigue:

$$x(t) = \exp(-\zeta\omega_0 t) A \sin(\omega_d t + \varphi)$$

donde A es la amplitud de la oscilación a tiempo inicial y φ es el desfase o posición angular a tiempo incial. Ambos parámetros se obtienen mediante las condiciones de contorno (posición y velocidad incial del movimiento).

3. **Vibraciones con amortigüamiento crítico** ($\zeta = 1$): Es el caso límite entre el sobreamortigüamiento y el subamortigüamiento.

Las raíces $\lambda_{1,2}$ además de ser reales y negativas, son iguales de valor $\lambda_{1,2} = \omega_0$ (raíz doble). La ecuación del movimiento queda como sigue:

$$x(t) = C_1 \exp\left(-\omega_0 t\right) + C_2 t \exp\left(-\omega_0 t\right)$$

donde C_1 y C_2 son constantes que se obtienen mediante las condiciones de contorno (posición y velocidad inicial del movimiento).

- **Vibraciones libres no amortigüadas**:

En este caso $c = 0$ y por tanto $\zeta = 0$, por lo que la ecuación de equilibrio queda como sigue

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Las raíces $\lambda_{1,2}$ de la ecuación anterior son complejas de valor $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. La ecuación del movimiento vibratorio resultante se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$x(t) = A \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

donde A es la amplitud de la oscilación y φ es el desfase o posición angular a tiempo incial. Ambos parámetros se obtienen mediante las condiciones de contorno (posición y velocidad incial del movimiento).

- **Vibraciones forzadas no amortigüadas mediante fuerza armónica** ($P(t) = P\sin(\omega t)$): Responde a la ecuación de equilibrio siguiente

$$m\ddot{x} + kx = P\sin(\omega t)$$

La ecuación del movimiento consta de una parte homogenea (solución transitoria) y una solución particular (parte estacionaria), cuya expresión es

$$x(t) = \underbrace{A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)}_{sol.transitoria} + \underbrace{C_1\sin(\omega t)}_{sol.estacionaria} \tag{5}$$

Los dos primeros términos forman parte de la solución transitoria que dependen de la frecuencia natural. La solución estacionaria depende de la frecuencia de excitación. La amplitud C_1 de la oscilación forzada se obtiene como:

$$C_1 = \frac{\frac{P}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Se denomina *factor de amplificación dinámica* a la razón $DAF = \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$.

- **Vibraciones forzadas amortigüadas mediante fuerza armónica** ($P(t) = P\sin(\omega t)$):

La ecuación del movimiento consta de una parte homogenea (solución transitoria) y una solución particular (parte estacionaria). Nos centramos en la parte estacionaria, cuya solución es

$$x(t) = B \sin(\omega t + \varphi) \tag{6}$$

donde $\varphi = -\frac{c\omega}{k - m\omega^2}$. La amplitud B se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$B = \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

Se denomina *factor de amplificación dinámica* a la razón $DAF = \frac{B}{B_{est}}$, donde $B_{est} = \frac{P}{k}$.

6.2. Vibraciones de múltiples grados de libertad

- **Vibraciones no amortigüadas**: Responde a la ecuación matricial de equilibrio dinámico siguiente

$$[\mathbf{M}]\ddot{\vec{\mathbf{x}}} + [\mathbf{K}]\vec{\mathbf{x}} = [\vec{\mathbf{F}}]$$

- **Vibraciones amortigüadas**: Responde a la ecuación matricial de equilibrio dinámico siguiente

$$[\mathbf{M}]\ddot{\vec{\mathbf{x}}} + [\mathbf{D}]\dot{\vec{\mathbf{x}}} + [\mathbf{K}]\vec{\mathbf{x}} = [\vec{\mathbf{F}}]$$

- **Análisis modal**: Es un método que permite la obtención de la solución de las ecuaciones matriciales anteriores de forma desacoplada, como sigue:

  1. **Vibraciones no amortigüadas**:

     $$[\mathbf{M}_D]\ddot{\vec{\mathbf{q}}} + [\mathbf{K}_D]\vec{\mathbf{q}} = [\mathbf{C}]^T[\vec{\mathbf{F}}]$$

     donde $[\mathbf{M}_D]$ y $[\mathbf{K}_D]$ son las matrices de masa y rigidez expresadas tras el cambio de base modal (diagonales) que se obtienen de la siguiente forma:

     $$[\mathbf{M}_D] = [\mathbf{C}]^T[\mathbf{M}][\mathbf{C}]$$
     $$[\mathbf{K}_D] = [\mathbf{C}]^T[\mathbf{K}][\mathbf{C}]$$

     La matriz $[\mathbf{C}]$ es la matriz de cambio de base modal, o matriz de paso, y se obtiene adjutando por columnas los vectores propios (normalizados) del sistema, dado a continuación.

  2. **Vibraciones amortigüadas**:

     $$[\mathbf{M}_D]\ddot{\vec{\mathbf{q}}} + [\mathbf{D}]\dot{\vec{\mathbf{q}}} + [\mathbf{K}_D]\vec{\mathbf{q}} = [\mathbf{C}]^T[\vec{\mathbf{F}}]$$

     donde $[\mathbf{M}_D]$ y $[\mathbf{K}_D]$ son las matrices de masa y rigidez expresadas tras el cambio de base modal. La matriz $[\mathbf{D}]$ requiere el establecimiento de un modelo de amortigüamiento (como el de Rayleigh o Caughey) para la obtención de la solución modal, ya que no es posible encontrar una matriz de paso [**C**] que diagonalize a las tres matrices a la vez ([**K**],[**M**], y [**D**]).

- **Obtención de valores propios (frecuencias modales propias)**: Se obtienen como solución al siguiente determinante

$$|-\omega^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]| = 0$$

- **Obtención de vectores propios (modos de vibración)**: Son las formas modales de vibración, y corresponden a cada uno de los valores propios (frecuencias modales). Se obtienen de mediante la siguiente ecuación

$$\left(-\omega_n^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]\right)\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n = 0$$

donde $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_n$ es el n-ésimo vector propio (modo de vibración) asociado al n-ésimo valor propio ω_n, obtenido mediante la ecuación previa.

7. Mecánica analítica

La Mecánica analítica es un parte de la Mecánica basada en descripciones energéticas de la configuración de equilibrio estático o dinámico de un sistema.

- **Principio de D'Alembert**:

$$\sum_{k=1}^{K}\left(\vec{\mathbf{F}}_{k_{ext}} - m\vec{\mathbf{a}}_k\right)\cdot\delta\vec{\mathbf{r}}_k = 0$$

donde

$$\vec{\mathbf{a}}_k = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}_k$$

$$\delta\vec{\mathbf{r}}_k = \delta\vec{\mathbf{r}}_k = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}_k}{\partial q_j}\delta q_j$$

El vector $\vec{\mathbf{r}}_k$ es el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{k_{ext}}$, respecto a un sistema de referencia $oxyz$ fijo. q_j es el j-ésima coordenada generalizada, donde $j = 1, \ldots, GDL$.

En caso de equilibrio estático, $\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_k = 0$, por lo que la ecuación queda como sigue:

$$\sum_{k=1}^{K}\left(\vec{\mathbf{F}}_{k_{ext}}\right)\cdot\delta\vec{\mathbf{r}}_k = 0$$

En esta formulación, se considera la presencia de enlaces ideales.

- **Ecuaciones de Lagrange (Sistemas conservativos)**: Su resolución se basa en la función Lagrangiana $L = T - V$, donde T es la energía cinética del sistema y $V = \sum_k^K V_k$ la energía potencial, teniendo en cuenta que $\vec{\mathbf{F}}_{k_{ext}} = -\bigtriangledown \vec{V}_k$.

  La ecuación Lagrangiana queda como sigue:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

- **Ecuaciones de Lagrange (Sistemas no conservativos)**: Su resolución se basa en la función Lagrangiana $L = T - V$, donde T es la energía cinética del sistema y $V = \sum_k^K V_k$ la energía potencial, definida en el punto anterior.

  La ecuación Lagrangiana queda como sigue:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$$

  donde $Q_j = \sum_{k=1}^K \vec{\mathbf{F}}_{k_{ext}} \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}_k}{\partial q_j}$ es la j-ésima fuerza generalizada, $j = 1, \ldots, GDL$.