UNIVERSIDAD DE GRANADA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

Tesis Doctoral

INFLUENCIA DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN LA COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES Y RESOLUCIÓN DE TAREAS PROBABILÍSTICAS

Luis Armando Hernández Solís

Directora: Dra. María Magdalena Gea Serrano

GRANADA, 2024

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Luis Armando Hernández Solis
ISBN: 978-84-1195-331-3
URI: https://hdl.handle.net/10481/92531

UNIVERSIDAD DE GRANADA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

INFLUENCIA DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN LA COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES Y RESOLUCIÓN DE TAREAS PROBABILÍSTICAS

Memoria de TESIS DOCTORAL, realizada bajo la dirección de la Doctora María Magdalena Gea Serrano en el equipo de investigación Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística, que presenta D. Luis Armando Hernández Solís para optar al grado de Doctor en el Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación.

Fdo. Luis Armando Hernández Solís

Vº Bº de la Directora:

Fdo. María Magdalena Gea Serrano

Trabajo realizado en el marco del Proyecto PID2019-105601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033 y Proyecto PID2022-139748NB-100 financiado por MCIN/AEI/ 10.13039/501100011033/ y por FEDER Una manera de hacer Europa, dentro del grupo de investigación FQM126 *Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística* (Junta de Andalucía).

El doctorando LUIS ARMANDO HERNÁNDEZ SOLÍS y la directora de la tesis MARÍA MAGDALENA GEA SERRANO, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de la directora de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

En Granada, a 12 de Febrero de 2024

Directora de la Tesis | Doctorando

FDO.: MARÍA MAGDALENA GEA SERRANO | **FDO.: LUIS ARMANDO HERNÁNDEZ SOLÍS**

AGRADECIMIENTO

Primero que todo, las gracias infinitas a Dios, por darme la vida, la salud y la oportunidad de poder cumplir este sueño.

Notablemente, quiero agradecer a mis directoras de tesis, a la doctora Carmen Batanero Bernabeu y a la doctora María Magdalena Gea Serrano, por haber confiado en mis capacidades para lograr de buena forma este trabajo. Gracias por haber compartido conmigo su conocimiento y su amplia experiencia, por guiarme y alentarme en todo momento. Gracias por toda la construcción intelectual y científica que brindaron a esta investigación; esto significó un gran esfuerzo, compromiso y dedicación durante todo este proceso. Las llevaré siempre en mi corazón.

También quiero agradecer a la doctora Rocío Álvarez Arroyo por su contribución intelectual a este trabajo y por todo el apoyo que me ha brindado desde el momento que la conocí.

De igual forma, un agradecimiento especial al doctor Juan Díaz Godino, por estar siempre dispuesto a colaborar con su conocimiento y experiencia.

Además quiero agradecer:

- Al Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. A todo el equipo de trabajo. A su director Ángel Ruiz Zúñiga, por ser mi mentor y mi amigo, e impulsarme siempre a crecer profesionalmente. A Edwin Chaves Esquivel, por compartir su conocimiento en Didáctica de la Estadística y Probabilidad y sembrar en mí este interés.
- Al Programa de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica por todo el apoyo que me han brindado.
- A las instituciones educativas españolas y costarricenses que fueron parte de este estudio, por su apoyo a la investigación educativa, mostrando un gran compromiso con el mejoramiento de la Educación Matemática. Gracias a las personas docentes y estudiantes por toda la cooperación en este proceso.

De todo corazón, quiero dedicar esta tesis:

A mi esposa Ivette, a mis hijos Marcelo y Luciana por tener tanta paciencia en todo este tiempo, por ser mi mayor motivación e inspiración cada día al despertar, por apoyar mis sueños de forma incondicional.

A mis padres Fernando y Carmen, por enseñarme con su ejemplo, el valor del esfuerzo y la perseverancia.

A toda mi familia, por siempre estar a mi lado y alentarme a seguir adelante en cada momento.

RESUMEN

Actualmente, los currículos de matemáticas conceden mayor importancia a la enseñanza de la probabilidad en la Educación Primaria y Secundaria, debido a la necesidad del razonamiento probabilístico para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, así como para el estudio futuro de la inferencia estadística. Ante esta situación, la literatura de investigación en Educación Matemática advierte que la intuición en probabilidad, y más concretamente la capacidad en comparación de probabilidades, progresa por etapas. Además, dichas etapas pudieran tener relación con aquellas correspondientes al desarrollo del razonamiento proporcional, aunque no sean etapas equivalentes. No obstante, hay escasas investigaciones sobre el nivel de razonamiento probabilístico y proporcional con estudiantes en España, y ninguna en Costa Rica, una vez que los estudiantes han recibido formación en probabilidad.

Esta tesis doctoral, realizada como compendio de publicaciones, describe dos estudios de evaluación del razonamiento probabilístico con estudiantado de Educación Primaria y Educación Secundaria, analizando su relación con el razonamiento proporcional.

Como principales fundamentos teóricos, nos basamos en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), el currículo de España y Costa Rica sobre contenidos en probabilidad y proporcionalidad, así como en los principales antecedentes sobre evaluación del razonamiento probabilístico de niños y adolescentes, con especial atención a la comparación de probabilidades y sobre evaluación de niveles de razonamiento proporcional.

El primero de los estudios empíricos tiene un carácter exploratorio y se realizó únicamente con estudiantes costarricenses de 6º curso de Educación Primaria que tenían instrucción en probabilidad. A partir de un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas de los estudiantes a un cuestionario, adaptado de la literatura de investigación, se describen las estrategias empleadas y conflictos semióticos detectados. Aproximadamente, la mitad de la muestra presenta un desempeño adecuado en torno a la comparación de probabilidades, típico de la etapa de desarrollo de los participantes, según la literatura de investigación; aunque se muestra mayor dificultad en la construcción de espacios muestrales cuando se pide identificar los sucesos seguro e imposible; asimismo, se evidenciaron dificultades en una tarea sobre juego equitativo, donde se debía equiparar la ganancia de dos jugadores, de acuerdo a su probabilidad de ganar. Se encuentran pocas diferencias entre los resultados obtenidos con los de investigaciones previas, con estudiantes de igual edad que no recibieron enseñanza en el tema.

En el segundo estudio se empleó una muestra de mayor tamaño con estudiantes de España y Costa Rica, de varios cursos escolares, donde se analiza la relación entre el nivel de razonamiento proporcional y probabilístico en estudiantes del último año de Educación Primaria (6º curso de Educación General Básica) y estudiantes de Educación Secundaria (edades entre 13 y 16 años). Para ello, se construye un cuestionario con un método válido y fiable, que permite evaluar en los estudiantes simultáneamente los dos

tipos de razonamiento. En la parte probabilística se evalúa la comparación de probabilidades utilizando dos contextos diferenciados, urnas y ruletas, de diferentes niveles de razonamiento proporcional utilizados y que también se consideran en las tareas de comparación de razones. Además, se incluyen ítems sobre juego equitativo, construcción del espacio muestral e ítems para la detección de posibles sesgos en la comparación de probabilidades en ruletas. Se analizan los resultados en las diferentes tareas de razonamiento proporcional, y la relación con el resto de las competencias evaluadas. Para una parte de las variables, se comparan los resultados con los de estudiantes españoles de edades equivalentes, mientras que en el resto se trabaja únicamente con el estudiantado costarricense.

En general, se observa que la edad en que se alcanza un determinado nivel de razonamiento es mayor que la supuesta por Noelting (1980a, 1980b); sin embargo, también se encuentra un bajo porcentaje de creencias de tipo subjetivo en la resolución de tareas probabilísticas planteadas en el cuestionario. Asimismo, se encontraron correlaciones estadísticamente significativas (aunque de intensidad pequeña) entre el nivel de razonamiento proporcional en que se sitúa un estudiante y sus resultados en el nivel de razonamiento probabilístico mostrado en las distintas tareas propuestas.

Consideramos que tanto el diseño del cuestionario de evaluación como los resultados obtenidos en nuestra investigación y descritos en esta Memoria, aportan nuevo conocimiento referente al razonamiento proporcional, probabilístico y su relación, que ayudará a docentes, formadores de profesorado e investigadores en el diseño y evaluación de planes formativos y nuevas líneas de investigación en el tema.

ABSTRACT

Currently, mathematics curricula attach greater importance to probability teaching in primary and secondary education due to the need for probabilistic reasoning in decision-making dealing with situations of uncertainty and for the future study of statistical inference. Given this situation, the research literature in mathematics education notes that intuition in probability, and more specifically the ability to compare probabilities, progresses in stages. Moreover, these stages may be related to those corresponding to the development of proportional reasoning, although they are not equivalent. However, there is little research on the level of probabilistic and proportional reasoning among students in Spain, and none in Costa Rica once they have received training in probability.

This doctoral thesis, carried out as a compendium of publications, describes two studies on the evaluation of probabilistic reasoning with students in primary and secondary education, analysing its relationship with proportional reasoning.

As the main theoretical foundation, we rely on the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (EOS), the Spanish and Costa Rican curricula on probability and proportionality contents, and the main precedents on the assessment of probabilistic reasoning in children and adolescents, with special attention to the comparison of probabilities and the assessment of proportional reasoning levels.

The first empirical study was of an exploratory nature and was conducted only with Costa Rican students in the sixth grade of primary education who received instruction in probability. Based on a quantitative and qualitative analysis of the students' answers to a questionnaire adapted from the research literature, the strategies employed, and the semiotic conflicts detected are described. Approximately half of the sample presents an adequate performance in the comparison of probabilities, typical of the developmental stage of the participants, according to the research literature; however, greater difficulty is shown in the construction of sample spaces when asked to identify certain and impossible events; likewise, difficulties were evidenced in a task on fair play, where the winnings of two players had to be equated according to their probability of winning. Few differences were found between the results obtained and those of previous research, with students of the same age who had not been taught the subject.

In the second study, a larger sample of students from Spain and Costa Rica, from different school years, was used to analyse the relationship between the level of proportional and probabilistic reasoning in students in the last year of primary education (6th year of General Basic Education) and those in secondary education (ages 13 to 16). For this purpose, a questionnaire is constructed using a valid and reliable method that allows us simultaneously to evaluate both types of students' reasoning. In the probabilistic part, the comparison of probabilities is assessed using two different contexts, ballot boxes and roulette wheels, with different levels of proportional reasoning used, which are also considered in the ratio comparison tasks. In addition, items on fair play, sample space construction, and the detection of possible biases in the

comparison of probabilities in roulette wheels are included. The results of the different proportional reasoning tasks and their relationship with the rest of the skills assessed are analysed. For some of the variables, the results are compared with those of Spanish students of equivalent ages, whereas for the rest, we work only with Costa Rican students.

In general, it is observed that the age at which a certain level of reasoning is reached is higher than that assumed by Noelting (1980a, 1980b); however, a low percentage of subjective beliefs is also found in the resolution of probabilistic tasks posed in the questionnaire. Likewise, statistically significant correlations were found (although of small intensity) between the level of proportional reasoning in which a student was placed and his or her results in the level of probabilistic reasoning shown in the different tasks proposed.

We consider that both the design of the evaluation questionnaire and the results obtained in our research and described in this report provide new knowledge regarding proportional and probabilistic reasoning and their relationship, which will help teachers, teacher trainers, and researchers in the design and evaluation of training plans and new lines of research on the subject.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En esta tesis doctoral se completa la investigación iniciada en el curso académico 2019/2020 que finalizó con la presentación de mi Trabajo Final de Máster. El interés por el tema se originó por mi experiencia como colaborador en el Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, en el que trabajé, tanto en la elaboración de los Programas de Estudio de Matemática oficiales, como en el diseño de materiales didácticos y en la capacitación de docentes en ejercicio. Esta experiencia me hizo constatar de la escasez de investigación relacionada con la comprensión de la probabilidad por estudiantes costarricenses y de la necesidad de contribuir a evaluar sus posibles conocimientos y dificultades en el tema. Esta carencia pudo deberse, a que en currículos anteriores, los contenidos en probabilidad eran mínimos en Educación Primaria y ausentes en Educación Secundaria, lo cual les restaba valor. Con la fuerte relevancia que el currículo actual de Matemática le da al área de Estadística y Probabilidad, surge la necesidad imperiosa de estudios que apoyen su implementación.

Posteriormente, al incorporarme como colaborador en el Proyecto de Investigación PID2019-105601GB-I00/AEI/10.13039/501100011033, *Razonamiento proporcional y algebraico en la formación de profesores para enseñar estadística,* me interesé por relacionar estos conocimientos con el razonamiento proporcional de los estudiantes, campo en que la investigación existente era muy escasa (Batanero y Álvarez-Arroyo, 2023).

Los fundamentos del estudio son las investigaciones previas, así como el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019). Se utiliza una metodología mixta, que combina el análisis de contenido (Andreu, 2011; Zapico, 2007) de las respuestas abiertas de los estudiantes a los dos cuestionarios utilizados, con el estudio estadístico de diversas puntuaciones que miden el desempeño de los estudiantes y estudios de correlación.

La tesis se presenta como compendio de publicaciones, que se incluyen a lo largo de la Memoria y se han organizado en los siguientes capítulos:

En el **Capítulo 1** se describe y justifica la importancia de la problemática abordada. También se resumen los principales elementos utilizados del marco teórico y se realiza un análisis curricular de los contenidos de probabilidad y proporcionalidad en las orientaciones costarricense y española. Se finaliza presentando los objetivos e hipótesis del trabajo, así como su organización.

En el **Capítulo 2** se realiza una síntesis de los principales antecedentes del estudio, tanto en lo referido al razonamiento probabilístico como al proporcional. Asimismo, parte del contenido ha sido publicado en dos artículos de síntesis de la investigación previa, el primero de ellos describiendo cómo se inicia el razonamiento probabilístico en las primeras edades. El segundo describe la investigación sobre la comparación de probabilidades, que es una de las competencias evaluadas en los estudios empíricos que forman parte de la tesis. Las publicaciones de las que se deduce este capítulo son las siguientes:

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A. y Gea, M.M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico. *PNA, 15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Hernández-Solís, L. A., Gea, M.M., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Research on children's reasoning in comparing probabilities. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 39*(1), 1-24. https://www.seio.es/beio/research-on-childrens-reasoning-in-comparing-probabilities/

En el **Capítulo 3** se resume el primero de los estudios empíricos de evaluación realizados con una muestra de estudiantes costarricenses de 6º curso de Educación General Básica. Para llevar a cabo el estudio, se elaboró un cuestionario con ítems de respuesta abierta, partiendo de los utilizados en estudios previos, como los de Cañizares (1997) y Green (1982), a los que se añadieron dos preguntas nuevas de construcción de espacios muestrales. Se analizó la forma en que los niños comparan probabilidades, sus construcciones del espacio muestral asociado a un experimento y su comprensión del juego equitativo, así como los sesgos de razonamiento que presentan en estas tareas. Estos resultados se publicaron en los siguientes artículos:

Hernández-Solís, L. A. (2023). Sesgos en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 23*(2), 1-16. https://doi.org/10.18845/rdmei.v23i2.6368

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. y Gea, M.M. (2021). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños costarricenses. *Innoeduca, 23*(34), 228-243. http://dx.doi.org/10.22458/ie.v23i34.3429

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M.M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con niños costarricenses de Educación Primaria. *Uniciencia, 35*(2), 1-19. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: Un estudio exploratorio con niños de educación primaria. *Educación Matemática, 33*(1). http://dx.doi.org/10.24844/EM3301.07

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M.M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes de educación primaria. *Educaçao e Realidade, 46*(3). https://doi.org/10.1590/2175-6236105401

Una conclusión del primer estudio de evaluación fue la necesidad de mejorar el instrumento de evaluación y adaptarlo para considerar el nivel de razonamiento proporcional del estudiante. Con esta finalidad, en el **Capítulo 4** se describe la construcción de un nuevo cuestionario orientado a medir el constructo "razonamiento probabilístico y su relación con el razonamiento proporcional". Su elaboración ha tenido en cuenta las normas psicométricas habituales (Martínez-Arias, 1995) y los criterios de AERA, APA y NCME (2014). Su construcción comienza definiendo el contenido del instrumento, a partir del cual se elabora un banco de ítems de opción múltiple, con una justificación de la respuesta y algunos solo de respuesta abierta. El banco de ítems se somete a juicio de 10 expertos investigadores en Educación Estadística, a los que se proporciona tres posibles versiones de cada ítem. Mediante una escala Likert, los expertos evaluarían cada ítem, luego se realizaría el análisis de los resultados obtenidos de la evaluación para seleccionar los que conformarían el cuestionario definitivo. También se pasó el cuestionario a una muestra piloto para asegurar la comprensión, por parte de los estudiantes, y estimar el tiempo necesario para completarlo. Al final del capítulo, se informa de algunas propiedades psicométricas del cuestionario.

En el **Capítulo 5** se presenta el segundo estudio de evaluación, realizado con el citado cuestionario. Se utiliza una muestra de 292 estudiantes costarricenses de los cursos 6º a 9º de Educación General Básica y 10º de Educación diversificada, y en una parte del estudio se añaden otros 412 estudiantes españoles de cursos equivalentes (6º de Educación Primaria y los cuatro primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria). Los resultados del estudio han dado origen a los siguientes trabajos:

Batanero, C. y Hernández-Solís, L. A. (2023). Razonamiento proporcional en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles. *Uniciencia, 37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M.M. (2023). Analysing Costarican and Spanish students´ proportional reasoning and comparison of probabilities. *Statistics Education Research Journal, 22*(3), 1-23. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Gea, M. M., Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Relating students' proportional reasoning level and their understanding of fair games. *Journal on Mathematics Education, 14*(4), 663-682. https://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp663-682

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M.M. (2023). Costarican students' proportional reasoning and performance in comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* *9*(12), 1-14. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M.M. (en prensa). Razonamiento proporcional y construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos por estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística*.

El **Capítulo 6** está dedicado a la discusión de las principales conclusiones obtenidas respecto a los objetivos e hipótesis iniciales del trabajo, la exposición de las principales conclusiones, y la discusión de las limitaciones observadas y futuras líneas de investigación.

Finalmente, se incluyen el conjunto de referencias utilizadas y algunos anexos que complementan la Memoria.

CAPÍTULO 1: EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se describe el problema de investigación, justificando la relevancia que tienen tanto la cultura probabilística (Borovcnik, 2016; Gal, 2005) como el razonamiento probabilístico (Batanero, 2006) en la formación del ciudadano, que se enfrenta a menudo con situaciones aleatorias, tanto en su día a día como a lo largo de su trabajo profesional.

Esta investigación se ha llevado a cabo bajo la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994; Godino et al., 2007; 2019). Por ello, en este capítulo se establecen las herramientas y andamiaje de este marco teórico, que nos permitirán explorar los significados personales que los estudiantes de las muestras empleadas en la investigación asignan a las nociones de probabilidad.

Además, siendo conscientes de la importancia que ha adquirido a nivel mundial el conocimiento sobre probabilidad, se puntualizan algunos elementos del currículo costarricense y español, pues la recogida de datos de estudiantes se lleva a cabo en estos dos contextos educativos. Asimismo, completa este análisis una descripción de las últimas tendencias y paradigmas en educación probabilística a nivel internacional.

Por último, se plantea el problema, objetivos e hipótesis de investigación, así como una breve descripción de la organización de la investigación y las principales características metodológicas de cada uno de sus componentes.

Resaltamos que en el caso de Costa Rica, la investigación se lleva a cabo en un contexto de implementación curricular, con carencias de estudios nacionales en didáctica de la probabilidad a este nivel escolar.

1.2. EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO Y SU IMPORTANCIA

En las últimas décadas, y como consecuencia del desarrollo de la inferencia estadística y el incremento de experimentos aleatorizados en distintas investigaciones, el estudio de la probabilidad ha adquirido relevancia en distintas áreas profesionales y científicas.

En primer lugar, los conocimientos probabilísticos no sólo se han considerado fundamentales para comprender y desarrollar el razonamiento inferencial, sino que los conocimientos elementales de probabilidad son hoy día un requisito básico para el ciudadano, debido a las múltiples situaciones aleatorias a las que debe enfrentarse en su vida; y a la vez, juegan un papel transcendente en el estudio posterior de la estadística (Batanero, 2006; Batanero et al., 2016; Gal, 2005). Asimismo, no cabe duda de que tiene una participación importante en el desarrollo del pensamiento científico, donde muchos de sus procesos se describen mediante leyes aleatorias (Bryant y Nunes, 2012).

Una característica a señalar es que, además de ser una parte importante de la matemática que se puede relacionar con otras áreas (como la aritmética, álgebra y funciones, cálculo, geometría y medida), la probabilidad es una herramienta necesaria para la toma de decisiones en condiciones aleatorias (Batanero, 2005; Batanero et al., 2005; Borovcnik, 2016). Pino y Estrella (2012) señalan que su estudio tiene un alto valor educativo, pues muestra las limitaciones de argumentos puramente deductivos. Todo esto hace que en muchas investigaciones se apunte a que los conocimientos probabilísticos deben formar parte de los objetivos de alfabetización matemática para los ciudadanos actuales (Jones et al., 2007; Nilsson y Li, 2015), incluso desde la educación infantil (Alsina, 2017; Vásquez y Alsina, 2019).

Numerosos estudios, entre otros Fischbein (1975) y Fischbein y Gazit (1984), resaltaron el papel de la enseñanza para educar las intuiciones en probabilidad, que con frecuencia se desarrollan inadecuadamente sin una instrucción específica, y que son necesarias para tomar decisiones correctas en la vida cotidiana y profesional (Borovcnik, 2015; Resnik, 2017). Con frecuencia, es posible medir la incertidumbre de un cierto fenómeno por medio de la probabilidad, la cual representa un instrumento para expresar, cuantificar y modelizar dicha incertidumbre (Pratt y Kazak, 2018). Consecuentemente, una finalidad principal de la enseñanza de la probabilidad es proporcionar al sujeto cierta experiencia y conocimiento respecto a situaciones aleatorias que le permita manejarse en un mundo donde estos fenómenos están presentes en las actividades más variadas (Jones et al., 2007).

Esto ha repercutido en los currículos de matemáticas de varios países en donde se introducen contenidos de probabilidad desde edades tempranas (e. g. Australia: Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2013; España: Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP, 2022b; 2022c o Estados Unidos de América: National Council of Teachers of Mathematics, 1989; 2000). Costa Rica no ha sido la excepción y en 2012 se aprobaron nuevos Programas de Estudio de Matemática para la educación preuniversitaria (MEP, 2012), dándole gran relevancia al área de *Estadística y Probabilidad*, cuyos conocimientos y expectativas de aprendizaje se organizan de manera integrada, desde el primer año de educación primaria hasta el último de educación secundaria. En la Sección 1.4 se analiza con detalle las orientaciones curriculares sobre el tema.

1.3. MARCO TEÓRICO

Al iniciar un trabajo de investigación es importante seleccionar un marco teórico que sirva de fundamento, tanto para la formulación de los objetivos por alcanzar e hipótesis sobre lo que se espera encontrar, como para describir con rigor y precisión los resultados. Teniendo en cuenta estas consideraciones, se ha elegido un marco teórico desarrollado dentro del equipo de investigación en que se elabora la tesis y que cuenta con gran tradición en España y otros países. También, se ha considerado que este marco teórico es la base del proyecto de investigación en el que se inscribe la presente tesis doctoral.

En esta sección vamos a presentar las nociones teóricas que utilizaremos para describir el problema e interpretar los resultados de nuestra investigación. Consideramos idóneo basarnos en el Enfoque Ontosemiótico (en adelante: EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994, Godino et al., 2007; 2019), pues nos permitirá interpretar el razonamiento probabilístico de los estudiantes, según las estrategias y conflictos mostrados en sus respuestas; es decir, del análisis de los significados personales de objetos matemáticos involucrados en situaciones-problema planteadas en los ítems de un cuestionario.

Dicho marco teórico ha propuesto diferentes herramientas de investigación que permiten analizar tanto el currículo y libros de texto, como el aprendizaje del estudiante y su conocimiento, la enseñanza de un tema e incluso el conocimiento y formación de los profesores.

La concepción que se propone de la Matemática es la de una actividad de resolución de problemas, a la vez que un lenguaje y un sistema conceptual organizado. El EOS parte de una formulación ontológica de los objetos matemáticos, cuya noción primitiva es la de *situación-problema*, y a partir de esta se definen los conceptos teóricos de *práctica*, *objeto* y *significado* (*personal* e *institucional*) del objeto (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019). Una *situación-problema* se considera desde un punto de vista muy general y puede iniciarse mediante una necesidad del mundo real o bien, dentro de la misma Matemática.

De este marco teórico se utilizarán únicamente algunos de sus elementos. En nuestro caso, el constructo *significado institucional de un objeto* permitirá definir el contenido de los instrumentos de evaluación, mientras que el *significado personal de un objeto* nos permitirá describir la globalidad de las respuestas de los sujetos. Asimismo, coincidimos con Godino (2018) en que la noción de *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos, en su interpretación epistémica (institucional) y cognitiva (personal), es una herramienta teórica potente para la interpretación de la información recolectada, como se describe en las siguientes secciones.

1.3.1. Significado de un objeto matemático

En el EOS el significado de los objetos matemáticos se origina de las prácticas llevadas a cabo por una persona o institución al resolver problemas relacionados con dichos objetos. Una *práctica* es "…toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y

Batanero, 1994, p. 334). Será *significativa* (o con sentido) para la persona, si esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo propuesto.

Para explorar el razonamiento probabilístico de los niños se pretende analizar sus prácticas matemáticas al resolver diversos problemas. Para el EOS, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) más que una práctica particular ante un problema concreto, por lo que se hablará del *sistema de prácticas* asociadas a un campo (C) de problemas. En este caso, se analizará el sistema de prácticas asociadas al campo de problemas en probabilidad de: comparar probabilidades simples, establecer el espacio muestral y equiparar en un juego la ganancia esperada considerando la esperanza matemática.

Asimismo, en este marco teórico se hace la distinción entre las prácticas personales y las prácticas institucionales. Godino y Batanero (1994) establecen que las prácticas institucionales, a diferencia de las personales, están normadas por los sujetos de una *institución* (I), grupo que realiza prácticas sociales tomando en cuenta los instrumentos, reglas y modos de funcionamiento de un mismo campo (C) de problemas.

Godino y Batanero (1994) diferencian entre los *sistemas de prácticas institucionales* y los *sistemas de prácticas personales* asociados a un campo (C) de problemas; en que los primeros están constituidos por las prácticas significativas prototípicas para resolver el campo de problemas (C) compartidas en el seno de la institución (I), denótese como $P_I(C)$, y los segundos por las prácticas que una persona realiza en su intento de resolver el campo de problemas (C), denótese $P_p(C)$. Por ejemplo, siendo C el campo de problemas relacionado con la comparación de probabilidades en un experimento aleatorio simple, existe un sistema de prácticas institucionales $P_I(C)$ y un sistema de prácticas personales $P_p(C)$ asociadas a C. La intersección entre $P_p(C)$ y $P_I(C)$ es lo que se denomina *práctica correcta* del sujeto, según la institución.

Godino y Batanero (1994) definen un *objeto institucional* (O_I) como un emergente del sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo (C) de problemas y los elementos de este sistema son los indicadores empíricos del objeto (O_I). Así, el sistema de prácticas institucionales asociado al objeto O_I se define como el *significado institucional* del objeto: $S(O_I)$. De igual modo, el sistema de prácticas personales asociadas a un campo (C) de problemas constituye el *significado personal* del objeto: $S(O_p)$.

Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Godino et al. (2007) describen diferentes tipos de objetos matemáticos o entidades primarias que se pueden observar en un texto matemático y que emergen de los sistemas de prácticas asociadas a un campo de problemas:

- *Situaciones-problemas:* aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas que conllevan actividad matemática. Por ejemplo, la cuantificación de la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio.
- *Elementos lingüísticos:* expresiones, notaciones o gráficos empleados para enunciar o resolver *situaciones-problemas* y permiten su operacionalización. En el caso de la probabilidad, pueden aparecer representaciones tabulares y gráficas, lenguaje cotidiano ("suerte", "posibilidad") o matemático (esperanza matemática, distribución de probabilidad) y símbolos algebraicos.
- *Conceptos - definiciones*: enunciados que identifican y caracterizan a objetos matemáticos mediante sus definiciones o descripciones. Algunos ejemplos de conceptos implicados en la probabilidad son los de equiprobabilidad, espacio muestral o evento seguro, entre otros.
- *Proposiciones - propiedades:* enunciados que involucran relaciones o propiedades de los conceptos. Por ejemplo, que la probabilidad de un suceso es un valor entre 0 y 1.
- *Procedimientos:* algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, que se pueden aplicar en la resolución de la situación-problema, como enumerar o contar los casos favorables de un suceso y casos posibles del experimento aleatorio.
- *Argumentos:* enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos. Un tipo sería realizar una simulación de un experimento aleatorio para analizar la convergencia de la frecuencia relativa de un suceso a su probabilidad teórica.

1.3.2. Evaluación del conocimiento

Cañizares (1997) señala que la diferenciación entre el objeto (emergente inobservable de un sistema de prácticas) y el significado del mismo (sistema observable de prácticas), muestra la problemática de evaluar los conocimientos de los estudiantes; ya que estos tendrían un carácter inobservable; sin embargo, estos podrían inferirse de las prácticas evidenciadas durante la resolución de situaciones-problemas; por lo que estas prácticas serían los indicadores empíricos utilizables para la evaluación de dicho conocimiento.

La dualidad que establece el EOS en cuanto al significado de un objeto matemático (institucional y personal) permite abordar la evaluación de los conocimientos de los estudiantes (inobservables) a través de sus prácticas al resolver problemas (observables), las cuales se pueden considerar indicadores empíricos de dichos conocimientos o de sus conflictos semióticos.

La intersección entre $S(O_I)$ y $S(O_p)$ sería lo que la persona "conoce" o "comprende" del objeto (O_I), desde el punto de vista de I; y el subconjunto de $S(O_p)$ que no esté en esa intersección representa el conjunto de *conflictos semióticos*, es decir, los significados que no concuerdan con los considerados como correctos desde el punto de vista institucional. Hay que señalar que la comprensión alcanzada por un sujeto en un momento dado no puede considerarse como una variable dicotómica (todo o nada), sino que podría haber alcances conceptuales parciales del objeto matemático.

En esta premisa se fundamenta este estudio, de modo que, por ejemplo, para analizar el significado personal sobre el juego equitativo de cada sujeto de la muestra, se interpretará el conjunto de prácticas observables mostradas durante la resolución de las situaciones-problemas propuestas en un cuestionario.

1.3.3. Tipos de significado

La interpretación semiótica de las prácticas conlleva a clasificar los significados institucionales y significados personales mediante una tipología básica. Godino et al. (2022) analizan las diferentes teorías de significado en educación matemática, justificando el uso de este término en el EOS. En Godino (2003) se clasifican los tipos de significados institucionales en *implementado*, *evaluado*, *pretendido* y *referencial*; y los significados personales en *global, declarado* y *logrado.* En este trabajo, se partirá del significado *institucional pretendido*, para evaluar el *significado personal declarado*. Esto se resume en la siguiente Figura 1.3.1.

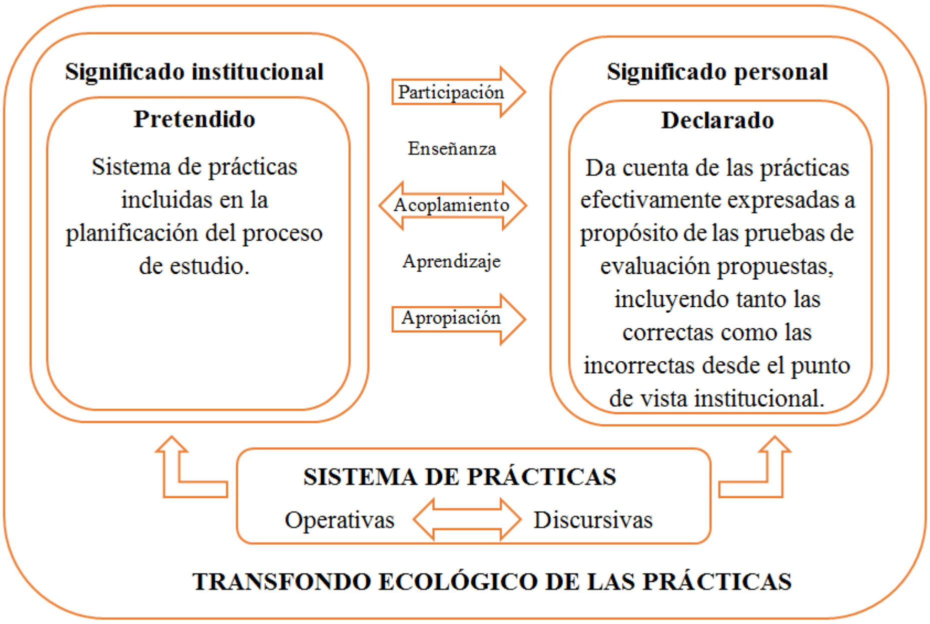


Figura 1.3.1. Significado institucional (pretendido) y personal (declarado) de un objeto matemático (Adaptación propia de Godino et al., 2007, p.6)

En este caso, se analizará el campo de situaciones-problemas en probabilidad donde se deba cuantificar y comparar probabilidades simples, establecer el espacio muestral y decidir si un juego es equitativo como, por ejemplo, el siguiente ítem utilizado por Cañizares (1997), tomado de la investigación de Fischbein y Gazit (1984):

> Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en una caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan a sacar al mismo tiempo una bola de su caja (con los ojos cerrados) y el ganador es el niño que saque una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente bolas de igual color, devuelven las bolas a sus cajas y el juego continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre lo que dice Eduardo?

Para analizar la “red de objetos personales” construida por cada sujeto de la muestra, se interpretará el conjunto de prácticas observables mostradas durante la resolución del problema propuesto. Por ejemplo, sea P_{p1} la práctica de un estudiante, donde indica que el juego es justo porque ambos tienen el doble de posibilidades de sacar una bola negra que de una blanca. Un segundo estudiante podría indicar que, aunque existe el triple de bolas blancas en la caja de Luis que en la de Eduardo, también existe el triple de bolas negras en la caja de Luis que en la de Eduardo, luego el juego es justo (P_{p2}). Otro estudiante podría indicar (P_{p3}) que Eduardo tiene razón al afirmar que no es juego justo, porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la de Eduardo.

Así, ante la situación de comparar probabilidades de dos experimentos simples con espacios muestrales discretos, existe un significado institucional pretendido que sería el *significado laplaciano de probabilidad* (según el ítem indicado anteriormente) y el significado personal varía de acuerdo a las prácticas de quienes resuelven dicha situación. Siguiendo el ejemplo: $S(O_I) \cong S(O_{p1}) \cong S(O_{p2})$, luego entonces $S(O_{p1})$ y $S(O_{p2})$ se consideran acertadas o correctas de acuerdo con I. Pero $S(O_I) \neq S(O_{p3})$, por lo que se identifica en $S(O_{p3})$ un conflicto semiótico del sujeto al comparar probabilidades que se caracteriza por una comparación absoluta (aditiva) de los casos favorables sin considerar la proporción de bolas blancas y el total de bolas en cada caja.

1.3.4. Niveles de objetos y procesos en la práctica matemática

En el EOS se establecen dos niveles en el uso de los objetos en la actividad matemática. El primero refiere a los tipos de objetos (personales e institucionales) que se pueden observar y el segundo nivel tipifica las distintas maneras de manejar dichos objetos.

Primer nivel: Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Al realizar o evaluar una práctica matemática asociada a una situación-problema, es necesario interpretar los lenguajes (verbales, tabulares, gráficos y simbólicos) que representan la parte perceptible de una serie de constructos matemáticos (conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos) que intervienen en su elaboración. Godino et al. (2007) resumen esta tipología de objetos matemáticos primarios y señalan que se relacionan entre sí formando configuraciones, redes de objetos que intervienen o emergen de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales).

Segundo nivel: Atributos contextuales. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002): personal – institucional, ostensivo – no ostensivo, expresión – contenido, extensivo – intensivo, unitario – sistémico. Estas facetas se presentan agrupadas en parejas, pues se complementan de manera dual y dialéctica, dando lugar a los siguientes procesos: personalización – institucionalización; materialización – idealización/abstracción; expresión/representación – significación; particularización – generalización; análisis/descomposición – síntesis/reificación. Godino et al. (2007) señalan que tanto las dualidades como las configuraciones de objetos se pueden analizar, lo que fundamenta el estudio que se pretende hacer en este trabajo, a partir de las prácticas personales asociadas al campo de situaciones-problema de probabilidad al cuantificar y comparar probabilidades simples, establecer el espacio muestral y equiparar ganancias esperadas en un juego.

1.4. LA PROBABILIDAD Y PROPORCIONALIDAD EN LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA

Como se indicó en la Sección 1.2, la importancia del conocimiento sobre probabilidad para todos los ciudadanos ha llevado a muchos países a incluirla en sus currículos y cada vez darle más relevancia en la enseñanza obligatoria o básica.

En Costa Rica, los programas escolares de Matemática aprobados en 2012 concedieron un mayor relieve a los contenidos probabilísticos, respecto a los anteriores currículos nacionales, donde no se incluían en la Educación Secundaria y eran mínimos en Educación Primaria en comparación con otros contenidos matemáticos. El aumento de tópicos de probabilidad en el currículo escolar de Matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) tiene como propósito "…formar en el pensamiento aleatorio y en el desarrollo de capacidades para abordar el azar, lo impredecible, la incertidumbre, características que participan en el conocimiento y en la vida de múltiples maneras" (p.55). Se justifica este énfasis señalando: "El lugar relevante que se da a esta área obedece al papel que juega la información y el manejo del azar en la sociedad moderna" (p. 55).

Por otro lado, en España la enseñanza de la estadística en la educación obligatoria ha estado presente en los últimos 30 años, dándole cada vez mayor importancia al estudio de la probabilidad. Igualmente se actualiza esta importancia en los nuevos programas curriculares (MEFP, 2022b, 2022c). Se precisa el currículo básico de la Educación Primaria y el de la Educación Secundaria Obligatoria (respectivamente), y se establece para todos estos niveles educativos el bloque de saberes en sentido estocástico, develando un gran interés por el desarrollo de habilidades y competencia en estadística en el estudiantado español.

1.4.1. Currículo de Costa Rica

El currículo costarricense de Matemáticas para la Educación Primaria y

Secundaria (MEP, 2012) está organizado por medio de los cuatro ciclos del sistema educativo de este país. Los primeros dos ciclos corresponden a la Educación Primaria y los siguientes a Educación Secundaria. La base que organiza los planes de estudio de Matemáticas en cada ciclo y año lectivo son los conocimientos matemáticos y las habilidades en torno a ellos que se espera sean desarrollados. Se plantean cinco áreas en Matemáticas: *Números*, *Medidas*, *Geometría*, *Relaciones y Álgebra* y *Estadística y Probabilidad*. Los conocimientos y expectativas de aprendizaje se organizan en el plan de estudios de manera integrada, desde el primero al último año.

El área de *Estadística y Probabilidad* incluye dos grandes temas: por un lado, la identificación, organización y presentación de la información, que se asocia a la estadística descriptiva, y por el otro, la probabilidad, que refiere al estudio de la incertidumbre y el azar. Como puede apreciarse en la Figura 1.4.1, el área de *Estadística y Probabilidad* está presente a lo largo de todos los ciclos en diferente proporción, según ciclo educativo, manteniéndose aproximadamente constante en Educación Primaria, equiparando a *Geometría*, *Medidas* y *Relaciones y Álgebra*; y en Educación Secundaria siendo una cuarta parte del Currículo, aproximadamente, equiparado con el área de *Geometría*.

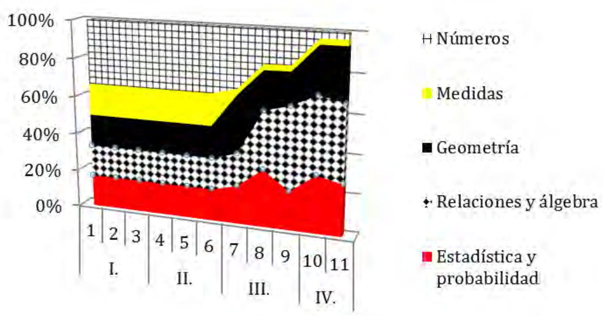


Figura 1.4.1. Representatividad de las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos en Costa Rica. (MEP, 2012, p. 49)

1.4.1.1. *Contenidos asociados al razonamiento probabilístico*

Para el Primer ciclo (Ver Tabla 1.4.1), uno de los propósitos en probabilidad es que los niños (6 a 8 años) logren identificar las situaciones donde interviene el azar como aquellas en que no se puede predecir de antemano su resultado y puedan distinguir estas de las situaciones deterministas o seguras.

Tabla 1.4.1. Conocimientos y habilidades generales asociadas a probabilidad de Primer Ciclo de la Educación Primaria costarricense (MEP, 2012)

Habilidades generales		
• Identificar situaciones aleatorias y seguras dentro de la cotidianidad y eventos asociados con ellas. • Clasificar eventos aleatorios en más o menos probables para situaciones o experimentos particulares. • Identificar eventos de acuerdo con los resultados simples que están vinculados con ellos.		
Contenidos		
Primer año	Segundo año	Tercer año
Situaciones: aleatorias y seguras.	Situaciones o experimentos. Eventos: seguro, probable, imposible, más y menos probable.	Situaciones o experimentos. Resultados simples de un experimento aleatorio. Eventos: seguro, probable, imposible, más-igual- menos probable.

Se proponen como indicaciones curriculares que no solo se realicen juegos con monedas, dados, ruletas y otros dispositivos, sino que también se incluyan situaciones cotidianas que estén vinculadas a la incertidumbre, que acerquen al niño a estas experiencias y sus decisiones. En relación con el manejo de situaciones aleatorias y la probabilidad de resultados o eventos, para este ciclo únicamente se desea generar nociones intuitivas; no se estudia la cuantificación numérica de las probabilidades, únicamente se habla de eventos más o menos probables en relación a estas nociones.

Para Segundo ciclo (Ver Tabla 1.4.2) se sugiere el análisis de las probabilidades no solo de juegos de azar, sino también de problemas del contexto estudiantil. En relación a los conceptos vinculados al azar, se aprovecha la intuición desarrollada en el Primer ciclo para profundizar en conceptos relacionados con eventos y sus representaciones. Para el último año de Segundo ciclo (11 años) se introduce el cálculo de probabilidades en función de juegos aleatorios y problemas sencillos, según la Ley de Laplace.

Tabla 1.4.2. Conocimientos y habilidades generales asociadas a probabilidad en Segundo Ciclo de la Educación Primaria costarricense (MEP, 2012)

Habilidades generales		
• Identificar eventos más probables, menos probables o igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento. • Determinar probabilidades elementales vinculadas con eventos particulares. • Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias.		
Contenidos		
Cuarto año	Quinto año	Sexto año
Situaciones o eventos aleatorios Eventos: • Resultados a favor de un evento. • Representación de eventos. • Eventos más- igual-menos probables.	Eventos: • Resultados a favor de un evento. • Eventos seguros, probables o imposibles. • Eventos más-igual-menos probables.	Definición clásica o laplaciana de probabilidad. Propiedades de las probabilidades: • La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 inclusive. • La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.

En el Tercer ciclo (Ver Tabla 1.4.3) se lleva a cabo una transición entre la Educación Primaria y la Educación Secundaria (12 a 14 años), por lo que en octavo año se realiza un proceso de nivelación y precisión de conceptos probabilísticos estudiados en el ciclo anterior, incrementando del nivel de dificultad de los problemas planteados, al igual que se hace en séptimo año con los contenidos estadísticos. Para noveno año se introduce la definición frecuencial de probabilidad y su relación con la ley de los grandes números.

Tabla 1.4.3. Conocimientos y habilidades generales asociadas a probabilidad en Tercer Ciclo de la Educación Primaria costarricense (MEP, 2012)

<table>
<tr><th colspan="2">Habilidades generales</th></tr>
<tr><td colspan="2">• Identificar eventos provenientes de situaciones aleatorias particulares y determinar probabilidades asociadas a ellos.
• Utilizar la definición laplaciana de probabilidad para deducir las propiedades de las probabilidades vinculadas con el tipo de evento: seguro, probable e imposible.
• Utilizar la definición frecuencial o empírica de probabilidad para resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios.
• Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en condición de incertidumbre.
• Valorar la importancia de la Historia en el desarrollo de la Estadística y la Probabilidad.
• Utilizar técnicas de análisis estadístico o probabilístico para la resolución de problemas en contexto.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Contenidos</th></tr>
<tr><th>Octavo año</th><th>Noveno año</th></tr>
<tr><td>El azar
• Aleatoriedad, Determinismo.
Espacio muestral
• Espacio muestral, puntos muestrales y su representación.
Eventos
• Resultados favorables a un evento.
• Eventos simples y compuestos.
• Evento seguro, evento probable, evento imposible.
Probabilidad
• Eventos más probables, menos probables e igualmente probables.
• Definición clásica (o laplaciana).
• Reglas básicas de probabilidad.
• La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1.
• La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.</td><td>Muestras Aleatorias
Probabilidad frecuencial
• Estimación de probabilidad: empleo de la frecuencia relativa (concepto frecuencial o empírico).
• Introducción a la ley de los grandes números.</td></tr>
</table>

Nota: En séptimo año no aparecen contenidos de probabilidad, para dar mayor espacio al refuerzo de contenidos estadísticos estudiados en Educación Primaria.

En las Tablas 1.4.1, 1.4.2 y 1.4.3, se puede apreciar el tratamiento progresivo en complejidad creciente de las nociones básicas de probabilidad, desde el primer año de Educación Primaria (6 años) hasta el noveno año de Educación Secundaria (14 años), lo que constituye la Educación General Básica en Costa Rica. También se observa, que para el Segundo ciclo se da un salto cualitativo en la enseñanza de la probabilidad, pues de una idea intuitiva se llega a calcular probabilidades como la proporción de resultados favorables entre el total de resultados posibles (Ley de Laplace). Para el final del Tercer ciclo se realiza un vínculo entre los contenidos estadísticos y los probabilísticos introduciendo la definición frecuencial de probabilidad. En el Anexo 1 se presenta un análisis detallado de la idoneidad epistémica de la propuesta curricular costarricense para la Educación General Básica, con el que inferir indicadores del tema a partir de las directrices curriculares en esta etapa educativa (MEP, 2012).

El Ciclo Diversificado costarricense se compone de dos cursos en la modalidad académica y tres cursos en la modalidad técnica profesional, donde la única diferencia es la distribución de los contenidos. En la modalidad académica aparecen contenidos probabilísticos únicamente en el primer curso de este ciclo (décimo año) y en la modalidad técnica profesional, estos mismos contenidos se desarrollan en el tercer curso (duodécimo año). En estos años se formalizan los contenidos desarrollados en la Educación General Básica, precisando matemáticamente las propiedades y axiomas básicos de la probabilidad en situaciones concretas, buscando favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. En este nivel se busca que el estudiante pueda describir relaciones entre dos o más eventos de acuerdo con sus puntos muestrales, utilizando para ello las operaciones con conjuntos (unión, intersección y complemento) e interpretar el significado dentro de una situación o experimento aleatorio. También, que pueda reconocer eventos mutuamente excluyentes en situaciones aleatorias particulares y deducir mediante situaciones concretas las reglas básicas (axiomas) de las probabilidades y las propiedades relacionadas con la probabilidad de la unión y del complemento.

1.4.1.2. *Contenidos asociados al razonamiento proporcional*

Al terminar el Primer ciclo (8-9 años), cada estudiante ha desarrollado la habilidad de comparar y operar con números naturales cuyos totales son menores que 100 000. Cuarto año del Segundo ciclo (9-10 años) se inicia con el estudio de fracciones, específicamente de fracciones propias, como parte de la unidad o parte de una colección de objetos. En este año se comparan las fracciones propias utilizando los símbolos “<”, “>” o “=” y se resuelven problemas que involucren fracciones propias. Además de la representación fraccionaria, se emplea la representación decimal hasta la milésima. Para Quinto año se amplía el tema con la incorporación del estudio de fracciones impropias, como la suma de un número natural y una fracción propia. Se estudian sus distintas representaciones (notación mixta, decimal y gráfica), se identifican fracciones homogéneas y heterogéneas, se comparan utilizando los símbolos "<", ">" o "=" y se analiza el resultado de multiplicar y dividir por números mayores o menores que uno. Además, se resuelven problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y división de números naturales y con decimales. En el último curso de Segundo ciclo (Sexto año) de la Educación Primaria (11-12 años) se identifican fracciones equivalentes, se simplifican y amplifican fracciones y se identifica el inverso multiplicativo de un número natural y/o fraccionario. Asimismo, se resuelven problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de fracciones y números con decimales. En este mismo año, en el área de *Relaciones y Álgebra* se analiza la proporción entre cantidades numéricas y se resuelven problemas aplicando porcentajes y regla de tres y aplicando proporcionalidad directa.

En Educación Secundaria, específicamente en el Tercer ciclo, se termina de afianzar el razonamiento proporcional. Para Séptimo año, en el área de *Relaciones y Álgebra*, se identifican relaciones de proporcionalidad inversa en diversos contextos reales y se analizan relaciones de proporcionalidad directa e inversa de forma verbal, tabular, gráfica y algebraica. Luego, en Octavo año, se amplía el estudio de fracciones con la incorporación del concepto de número racional, y el área de *Relaciones y álgebra*, se resuelven ecuaciones algebraicas fraccionarias que se reducen a ecuaciones del primer grado con una incógnita. Asimismo, en este mismo año, el área de *Geometría,* se estudia los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos; así como el Teorema de Tales, los cuales emplean para la resolución de problemas en diversos contextos; estos temas involucran el razonamiento proporcional para su comprensión y uso.

En los siguientes cursos, tanto de Tercer ciclo como de Ciclo Diversificado, en sus dos modalidades, no aparecen de forma explícita nuevos contenidos asociados al razonamiento proporcional.

1.4.2. Currículo de España

El currículo español cursado por los estudiantes de la muestra (MECD, 2014) está integrado por: a) los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa; b) las competencias, o capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, para lograr la realización adecuada de actividades y la resolución eficaz de problemas complejos; c) los contenidos, o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de competencias; d) la metodología didáctica, que comprende tanto la descripción de las prácticas docentes como la organización del trabajo de los docentes; e) los estándares y resultados de aprendizaje evaluables; y f) los criterios de evaluación del grado de adquisición de las competencias y del logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa. En la Educación Primaria se

> "…busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito" (MECD, 2014, p.19386).

Los objetivos generales del área van encaminados a desarrollar las competencias matemáticas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana. Los contenidos se organizan en cinco grandes bloques, que se articulan entre sí atendiendo a una configuración cíclica de la enseñanza del área: a) Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, b) Números, c) Medida, d) Geometría y e) Estadística y Probabilidad.

En la ESO, la asignatura de Matemáticas busca esencialmente continuar con el desarrollo de la competencia matemática, entendida como la "…habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas…" (MECD, 2014, p. 389). En los primeros dos cursos de la ESO se cursa la asignatura de *Matemáticas*, como parte de las materias generales del bloque de asignaturas troncales. Para Tercer curso, como materia de opción en el bloque de asignaturas troncales, deberán cursar *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* o *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas*. En Cuarto curso de la ESO se vuelve a escoger entre la opción académica, como iniciación al Bachillerato, o la opción de enseñanzas aplicadas, como iniciación a la Formación Profesional; esto hace que si se elige una opción en 3ºESO se deba cursar la misma opcionalidad en 4ºESO. Para todos estos cursos, los contenidos se organizan en cinco grandes bloques: a) Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, b) Números y

Álgebra, c) Medida, d) Geometría y Funciones, y e) Estadística y Probabilidad.

1.4.2.1. *Contenidos asociados al razonamiento probabilístico*

En la Tabla 1.4.4 se presentan los contenidos básicos para la Educación Primaria (MECD, 2014) referentes al Bloque de Estadística y Probabilidad de la asignatura de Matemáticas.

Tabla 1.4.4 Contenidos y Estándares de aprendizaje evaluables de probabilidad en la Educación Primaria española (MECD, 2014, p. 19393)

Contenidos	Estándares de aprendizaje evaluables
• Carácter aleatorio de algunas experiencias. • Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso.	• Identifica situaciones de carácter aleatorio. • Realiza conjeturas y estimaciones sobre algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería…). • Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos propios de estadística y probabilidad, utilizando estrategias heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando, y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización. • Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisando las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprobando e interpretando las soluciones en el contexto, proponiendo otras formas de resolverlo.

Con estos, se busca que el niño realice estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado. Además, pueda observar y constatar que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable dicha repetición. Todo esto, enmarcado en situaciones y problemas de la vida cotidiana acordes al nivel educativo, y utilizando el lenguaje habitual relacionadas con la probabilidad.

En la Tabla 1.4.5 se presentan los contenidos básicos para el primer y segundo curso de la ESO, (MECD, 2014) del Bloque de Estadística y Probabilidad de la asignatura de *Matemáticas*. En estos dos cursos se pretende que el estudiante diferencie los fenómenos deterministas de los aleatorios, y realice predicciones acerca del comportamiento de un fenómeno aleatorio a partir de las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces la experiencia aleatoria o el cálculo de su probabilidad. Se introduce la noción de probabilidad mediante el concepto de frecuencia relativa, como medida de incertidumbre asociada a los fenómenos aleatorios, siendo o no posible la experimentación.

Tabla 1.4.5 Contenidos y Estándares de aprendizaje evaluables asociadas a probabilidad en 1ºESO y 2ºESO (MECD, 2014, p. 413)

Contenidos	Estándares de aprendizaje evaluables
• Fenómenos deterministas y aleatorios. • Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. • Frecuencia relativa de un suceso y su aproximación a la probabilidad mediante la simulación o experimentación. • Sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. • Espacio muestral en experimentos sencillos. Tablas y diagramas de árbol sencillos. • Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace en experimentos sencillos.	• Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas. • Realiza predicciones sobre un fenómeno aleatorio a partir del cálculo exacto de su probabilidad o la aproximación de la misma mediante la experimentación. • Describe experimentos aleatorios sencillos y enumera todos los resultados posibles, apoyándose en tablas, recuentos o diagramas en árbol sencillos. • Distingue entre sucesos elementales equiprobables y no equiprobables. • Calcula la probabilidad de sucesos asociados a experimentos sencillos mediante la regla de Laplace, y la expresa en forma de fracción y como porcentaje.

Como se indicó antes, en el tercer y cuarto curso de la ESO se debe elegir entre *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas* y *Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas*. En el caso del tercer curso, solo aparecen contenidos probabilísticos en el bloque de Estadística y Probabilidad en la modalidad académica. Como se aprecia en la Tabla 1.4.6, para este curso se busca que el estudiantado logre estimar la posibilidad de que ocurra un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, calculando su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, la regla de Laplace o los diagramas de árbol, identificando los elementos asociados al experimento.

Tabla 1.4.6 Contenidos y Estándares de aprendizaje evaluables asociadas a probabilidad en 3ºESO de modalidad académica (MECD, 2014, p. 394; 403)

Contenidos	Estándares de aprendizaje evaluables
• Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. • Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Diagramas de árbol sencillos. Permutaciones, factorial de un número. • Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.	• Identifica los experimentos aleatorios y los distingue de los deterministas. • Utiliza el vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. • Asigna probabilidades a sucesos en experimentos aleatorios sencillos cuyos resultados son equiprobables, mediante la regla de Laplace, enumerando los sucesos elementales, tablas o árboles u otras estrategias personales. • Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.

Para el cuarto curso de la ESO, tanto para la modalidad académica como para la aplicada, aparecen contenidos probabilísticos en el Bloque de Estadística y

Probabilidad. En la Tabla 1.4.7 se muestran los contenidos y los estándares correspondientes para estas dos modalidades.

Tabla 1.4.7 Contenidos y Estándares de aprendizaje evaluables asociadas a probabilidad en 4º curso (modalidades académica y aplicada) de la ESO (MECD, 2014, p. 798; 407)

Contenidos	Estándares de aprendizaje evaluables
Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas	
• Introducción a la combinatoria: combinaciones, variaciones y permutaciones. • Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y otras técnicas de recuento. • Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Experiencias aleatorias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para la asignación de probabilidades. • Probabilidad condicionada. • Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar y la estadística.	• Aplica en problemas contextualizados los conceptos de variación, permutación y combinación. • Identifica y describe situaciones y fenómenos de carácter aleatorio, utilizando la terminología adecuada para describir sucesos. • Aplica técnicas de cálculo de probabilidades en la resolución de diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana. • Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. • Utiliza un vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. • Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno. • Aplica la regla de Laplace y utiliza estrategias sencillas de recuento y técnicas combinatorias. • Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos utilizando, especialmente, los diagramas de árbol o las tablas de contingencia. • Resuelve problemas sencillos asociados a la probabilidad condicionada. • Analiza matemáticamente algún juego de azar sencillo, comprendiendo sus reglas y calculando las probabilidades adecuadas. • Utiliza un vocabulario adecuado para describir, cuantificar y analizar situaciones relacionadas con el azar.
Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas	
• Azar y probabilidad. Frecuencia de un suceso aleatorio. • Cálculo de probabilidades mediante la Regla de Laplace. • Probabilidad simple y compuesta. Sucesos dependientes e independientes. Diagrama en árbol.	• Utiliza un vocabulario adecuado para describir situaciones relacionadas con el azar y la estadística. • Formula y comprueba conjeturas sobre los resultados de experimentos aleatorios y simulaciones. • Calcula la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace y utiliza, especialmente, diagramas de árbol o tablas de contingencia para el recuento de casos. • Calcula la probabilidad de sucesos compuestos sencillos en los que intervengan dos experiencias aleatorias simultáneas o consecutivas.

En la opcionalidad académica, se busca que el estudiante logre resolver diferentes situaciones y problemas de la vida cotidiana aplicando los conceptos del cálculo de probabilidades y técnicas de recuento adecuadas. Por otro lado, en la opción de matemáticas aplicadas solo se busca que el estudiantado utilice el vocabulario adecuado para la descripción de situaciones relacionadas con el azar y la estadística, analizando e interpretando informaciones que aparecen en los medios de comunicación.

Además, en ambas modalidades, se pretende que el estudiantado pueda lograr la capacidad de calcular probabilidades simples o compuestas aplicando la regla de Laplace, los diagramas de árbol, las tablas de contingencia u otras técnicas combinatorias.

1.4.2.2. ***Contenidos asociados al razonamiento proporcional***

En Educación Primaria se estudian diferentes tipos de números para interpretar e intercambiar información en situaciones de la vida cotidiana, entre ellos, las fracciones junto a su lectura, escritura, relaciones de orden y operaciones básicas (sumas, restas y producto de una fracción por un número). Se introduce el concepto de fracción como relación entre las partes y el todo, para luego precisar y diferenciar entre las fracciones propias y fracciones impropias y sus respectivas representaciones gráficas; también se introduce el concepto de fracciones equivalentes. Además, se inicia con el uso de porcentajes simples para interpretar e intercambiar información, y para resolver problemas en contextos de la vida cotidiana utilizando la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa (ley del doble, triple, mitad).

En 1ºESO y 2ºESO se siguen utilizando diferentes tipos de números, entre ellos, los fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Se emplean distintas estrategias de cálculo (mental, escrita o con calculadora) para simplificar operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes; por ejemplo, cálculos como: aumentos y disminuciones porcentuales, razones y proporciones, magnitudes directa e inversamente proporcionales, constante de proporcionalidad, y repartos directa e inversamente proporcionales. También, se resuelven problemas donde se deban obtener elementos desconocidos a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real, donde interviene la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales.

Para el tercer curso de la ESO, en ambas modalidades (académicas y aplicadas) se utilizan las propiedades de los números racionales y decimales y sus operaciones para resolver problemas de la vida cotidiana; se emplea, además, el cálculo aproximado y redondeo, considerando las cifras significativas y el error absoluto y relativo. También, se busca que el estudiante pueda obtener una ley o fórmula para el término general de una sucesión sencilla de números enteros o fraccionarios.

En el cuarto curso de la ESO, en ambas modalidades (académicas y aplicadas), se aplican porcentajes a la resolución de problemas cotidianos y financieros y se valora el empleo de medios tecnológicos cuando la complejidad de los datos lo requiera. Sin embargo, en la modalidad de matemáticas aplicadas se da un mayor énfasis al estudio de la proporcionalidad directa e inversa; donde se resuelven problemas de la vida cotidiana en los que intervienen magnitudes directa e inversamente proporcionales, como por ejemplo, situaciones asociadas al área de Economía, aumentos y disminuciones porcentuales, porcentajes sucesivos, interés simple y compuesto.

1.4.3. Perspectiva internacional

Pino y Estrella (2012) realizan una síntesis referente a la incorporación de la estadística y probabilidad en los currículos de diferentes países como USA, UK, Taiwán y Corea, Italia, España; señalando a Nueva Zelanda como líder mundial en la inclusión de la estadística en el currículo escolar, y a Singapur como uno de los países donde se incluye como uno de los principales componentes en todos los niveles. En países como China, la inclusión de contenidos de probabilidad se retrasó respecto a los planes de estudio europeos y estadounidenses, y no ha sido hasta el 2001 en los Estándares del Currículo de Matemáticas para la Educación Obligatoria que se incluyó como una rama de contenido en el currículo obligatorio (Gong y He, 2017).

Estas corrientes curriculares han influenciado también al *Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes* (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD, 2016); y este a su vez, ha influido en la toma de decisiones en política educativa no solo de los países participantes sino también en los que tienen la intención de hacerlo en algún momento. Es así que, con el propósito de medir el nivel de habilidades necesarias que han adquirido los estudiantes para participar plenamente en la sociedad actual, la OECD seleccionó, en su marco teórico *PISA 2015: Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy* (OECD, 2016), un conjunto de categorías de contenido que reflejaran la variedad de fenómenos matemáticos y tomaran en cuenta las principales áreas de los currículos escolares; una de ellas es “incertidumbre y datos”, relacionada con la estadística y probabilidad. Esta categoría enfatiza la interpretación y presentación de los datos y específicamente, en el área de probabilidad, se plantea la necesidad de extraer conclusiones en situaciones donde está presente la incertidumbre y son fundamentales los conocimientos sobre el azar, así como situaciones donde sea necesario describir, modelar e interpretar una determinada clase de fenómenos relativos a la incertidumbre y realizar inferencias a partir de información representada de diferentes formas: tablas, gráficos y símbolos, entre otros.

Por otro lado, para tener una panorámica global e internacional en torno al tratamiento otorgado a nivel curricular a los contenidos de probabilidad, se realiza una síntesis a partir de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (*Principles and Standard for School Mathematics*, PSSM) del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) en Estados Unidos (NCTM, 2000). Aunque somos conscientes que existen los Estándares Comunes para las Matemáticas (*Common Core State Standards for Mathematics*) en el país (Common Core State Standards Initiative, CCSSI, 2010), solo nos referiremos al primero, por tratarse de un documento de referencia de gran influencia no solo en los currículos estatales de Estados Unidos, sino a nivel iberoamericano.

Se incluyó la probabilidad desde las primeras edades en el área temática *Datos y Azar*, desde 1989, en el Currículo y Estándar de Evaluación para la Matemática Escolar (NCTM, 1989). Como novedad, en el año 2000 se presentan los PSSM organizando el área de *Datos y Azar* por grandes ideas estadísticas mediante procesos estadísticos y no mediante contenidos, como ocurrió en 1989 (NCTM, 2000), desde Preescolar (Pre K-2) hasta el duodécimo grado (último curso de bachillerato) con objeto de:

> • Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos.
> • Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad. (NCTM, 2000, p. 51)

La primera expectativa de aprendizaje refiere al desarrollo del razonamiento inferencial, muy ligado al análisis de datos; y la segunda, al manejo específico de los elementos básicos de probabilidad, que está más relacionada al tema de investigación.

Los contenidos centrados en la comprensión y aplicación de contenidos básicos de probabilidad para la etapa Pre K-2 (3 a 7 años) se inician de forma intuitiva con la discusión de eventos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos. Ya para los niveles 3 al 5 (8 a 10 años), no solo se describen estos eventos, sino también se clasifican en seguros, igualmente probables e improbables; comprendiendo que la medida de la probabilidad de un suceso puede representarse por un número comprendido entre 0 y 1. Asimismo, se busca que los estudiantes puedan predecir la probabilidad de resultados de experimentos sencillos y someter a prueba sus predicciones. Para los niveles 6 al 8 (11 a 13 años), se busca un tratamiento más formal de los conceptos estudiados y se incorpora nueva terminología para describir sucesos complementarios y mutuamente excluyentes. Se utiliza la proporcionalidad asociada a la comprensión básica de la probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones; y se cuantifica la probabilidad de eventos compuestos sencillos, empleando diferentes estrategias como listas organizadas, diagramas de árbol y modelos de área.

1.5. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL TRABAJO

El propósito del trabajo es analizar el razonamiento probabilístico y su relación con el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional de estudiantes costarricenses y españoles, al finalizar la educación primaria y a lo largo de la secundaria. El estudio de la probabilidad se incluye actualmente en estos niveles educativos en los dos países, aunque se cuenta con escasas investigaciones con estudiantes en España y ninguna en Costa Rica, sobre el nivel de razonamiento probabilístico alcanzado una vez que han tenido educación en probabilidad.

En el caso de Costa Rica, esta carencia de investigación en el tema pudo deberse a que en currículos anteriores al 2012 no aparecían contenidos de probabilidad en Educación Secundaria, mientras que en Educación Primaria los contenidos eran mínimos en comparación con otras áreas en matemáticas. Con la aprobación en 2012 de nuevos programas de estudio de Matemáticas para la Educación Primaria y Secundaria costarricense (MEP, 2012), el área de Estadística y Probabilidad adquirió un mayor relieve respecto a los anteriores currículos nacionales, con una orientación más cercana a la naturaleza de la disciplina.

Por otro lado, en España, aunque existen estudios asociados al tema, estos se llevaron a cabo con estudiantes que no habían recibido instrucción previa en probabilidad y sin llegar a comparar los resultados y estrategias de los estudiantes con los obtenidos en problemas de proporcionalidad de nivel de razonamiento equivalente; tampoco han estudiado otras variables que se quieren contemplar en este trabajo.

Lo anterior hace, que se genere un fuerte interés por estudiar el nivel de razonamiento probabilístico alcanzado en estudiantes costarricenses y españoles que han recibido instrucción en contenidos probabilísticos.

A continuación, se plantean los objetivos de investigación para este trabajo:

O1. Realizar una síntesis de los principales trabajos de investigación anteriores al realizado en esta tesis, que permita situar los resultados obtenidos, dentro de una panorámica más amplia, en el campo de la Educación Estadística.

Para cumplir este objetivo, se realizará una búsqueda sistemática y análisis de diversas investigaciones relacionadas con la emergencia y progresión en etapas del razonamiento probabilístico de niños y adolescentes, incluyendo la comparación de probabilidades, juego equitativo y construcción del espacio muestral. Se complementa esta síntesis, que ha sido publicada en varios artículos con la de algunas investigaciones sobre razonamiento proporcional que también servirán de base.

O2. Evaluar el razonamiento probabilístico en estudiantes de último año de la Educación Primaria costarricense, a partir de la resolución de distintos problemas probabilísticos propuestos en un cuestionario.

El objetivo refiere al estudio 1 de esta investigación, el cual es de carácter exploratorio y pretende ser una primera aproximación que describa el razonamiento probabilístico en problemas elementales utilizados en investigaciones previas con estudiantes sin instrucción en el tema. En síntesis, con este objetivo se pretende explorar los significados personales que los estudiantes de esta etapa de desarrollo asignan a las nociones de probabilidad, así como identificar el porcentaje que muestran algunos sesgos que han sido estudiados por diferentes autores. Para esto, se diseña un cuestionario y se pasa a una muestra moderada de estudiantes costarricenses del sexto curso de Educación Primaria. Se analizan las respuestas obtenidas en este, donde se plantean situaciones de toma de decisiones, tales como elección de urnas y ruletas con distinta composición, así como ítems donde se pide la construcción de espacios muestrales compatibles con la descripción de un suceso específico. Aunque para estos ítems no es necesario el cálculo de probabilidades, la mayoría de ellos requieren que el estudiante realice estimaciones y active el razonamiento proporcional.

Asimismo, este primer estudio tiene como propósito brindar información relevante para precisar el estudio 2. Los siguientes objetivos refieren al estudio 2:

O3. Estudiar la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas en estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

Para lograr este objetivo se construirá un cuestionario que incluya los niveles de razonamiento proporcional de Noelting, desde IA hasta IIIB, tanto en tareas de razonamiento proporcional como de comparación de probabilidades (contextos de urnas y ruletas), y así poder relacionar los resultados de los estudiantes en estos dos tipos de tareas. También, se añaden al cuestionario algunas tareas asociadas a la comprensión del juego equitativo y la construcción de espacios muestrales, con el propósito de analizar si el nivel de logro en la resolución de estas tiene alguna correlación con el nivel de razonamiento proporcional evidenciado. Además, se incluirán algunos ítems que evalúen sesgos comunes, descritos en las investigaciones previas, para observar si hay variación en la respuesta al resto de tareas de los estudiantes con o sin sesgos.

O4. Comparar los resultados obtenidos con investigaciones previas a la nuestra.

Se compararán los resultados obtenidos en el cuestionario con los alcanzados en estudios como el de Green (1982) y el de Cañizares (1997), para estudiantes de la misma edad, y se analizarán los resultados a la luz de los niveles de desarrollo proporcional de Noelting (1980a, 1980b). Con este objetivo también se busca evaluar si existen diferencias entre los resultados con estudiantes que hayan recibido instrucción en contenidos probabilísticos y los que no hayan recibido enseñanza en estos temas.

Hipótesis generales

A partir de los resultados de las investigaciones previas y el estudio exploratorio realizado en la primera etapa de este trabajo, presentamos a continuación las hipótesis de investigación. Se entienden como conjeturas, ya que no se plantea el contraste estadístico de las mismas.

H1. Se espera encontrar una correlación moderada entre los índices de dificultad de las tareas de comparación de probabilidades en urnas y los de las tareas de comparación de razones, con el mismo nivel en la clasificación de Noelting

(1980a, 1980b).

No obstante, la expectativa es que las primeras sean más difíciles que las segundas; basándonos en estudios en el campo de la Psicología como el de Pérez Echeverría et al. (1986). Para ello, en el cuestionario utilizado en el estudio 2 se incluirán tareas de comparación de razones y comparación de probabilidades en urnas de diferentes niveles de dificultad según Noelting (1980a, 1980b). Se determinará la proporción de respuestas correctas, estrategias correctas e incorrectas utilizadas y nivel de razonamiento por cada curso y país.

H2. Se espera encontrar menor dificultad en los problemas planteados en contextos de ruletas (continuo, que favorece la relación parte-todo) que de urnas (discreto, que favorece la relación parte-parte).

Investigaciones como las de Maury (1984) revelan que algunos niños modifican sus estrategias en la comparación de probabilidades en función del contexto, discreto o continuo. En estos problemas, que podrían ser equivalentes desde el punto de vista probabilístico o de razonamiento proporcional, se presentan distintos resultados. También nos basamos en algunos resultados de nuestro primer estudio exploratorio. Trataremos de comprobarla incluyendo ítems de comparación de probabilidades en ruletas de diferente nivel de razonamiento proporcional en el segundo cuestionario.

H3. Se espera encontrar una relación entre el nivel de razonamiento proporcional alcanzado y el éxito en la construcción de espacios muestrales (que implica el razonamiento combinatorio) y tareas asociadas al juego equitativo, al determinar las esperanzas de ganancia de todos los jugadores cuando las probabilidades de estos no son iguales (que supone la proporcionalidad inversa).

Nos apoyamos en que el razonamiento combinatorio y proporcional son esquemas que corresponden a la etapa de las operaciones formales. Para comprobarla, en el cuestionario utilizado en el estudio 2 se incluirán este tipo de tareas junto con las anteriormente citadas.

H4. Se encontrarán sesgos de razonamiento probabilístico que afectarán las *estrategias y resultados de los estudiantes en los problemas.*

Tenemos presente que los niños traen consigo intuiciones o ideas que asumen como verdaderas y que pueden incidir en sus respuestas; por lo que pensamos que se podrían evidenciar algunos sesgos y creencias subjetivas antes documentadas en estudios previos (e. g. Cañizares, 1997; Konold, 1989; Lecoutre,1992). También, nos basamos en algunos resultados de nuestro primer estudio exploratorio. En concreto, analizaremos el sesgo de distribución, que consiste en asignar diferente probabilidad en contexto de ruletas, según los casos favorables y desfavorables se encuentren adosados o alternados (Cañizares, 1997).

H5. Se prevén mejores resultados en nuestro estudio de evaluación que los obtenidos por Cañizares (1997) y Green (1982) con estudiantes de la misma edad.

Puesto que los niños de la muestra han recibido instrucción en probabilidad y los de la muestra de Green (1982) y de Cañizares (1997) no tuvieron preparación formal en este tema, consideramos posible que haya diferencias en los resultados que se obtengan en los ítems del cuestionario que fueron tomados de dichos estudios. La influencia de la instrucción en las intuiciones primarias de los niños ya ha sido documentada en diferentes estudios (e. g. Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein, Pampu y Minzat, 1967).

H6. Finalmente, se supone una mejora, con el curso, del razonamiento en todas las tareas propuestas en el cuestionario.

Esta hipótesis se sustenta en la teoría de Piaget e Inhelder (1951) y Noelting (1980a, 1980b). Para evaluarla, compararemos todos los resultados en los diferentes cursos participantes, puesto que cada curso va asociado a una edad determinada del estudiante.

1.6. ORGANIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación consta de un componente teórico y otro empírico. El componente teórico se expone en los Capítulos 1 y 2, y consiste en una síntesis de elementos curriculares y teóricos que nos han permitido formular los objetivos e hipótesis. Además, servirán para organizar el análisis de los datos y valorar sus resultados.

Dicho componente teórico incluye el análisis curricular sobre la enseñanza de la probabilidad en Costa Rica y España recibida por los estudiantes de la muestra, y su situación en una perspectiva internacional. La síntesis de los elementos teóricos del enfoque ontosemiótico que apoyan el trabajo y el resumen de las principales investigaciones previas sobre razonamiento probabilístico de niños y adolescentes, así como de algunos trabajos sobre el desarrollo del razonamiento proporcional, se incluyen respectivamente en los Capítulos 1 y 2 de esta memoria.

La parte empírica de la investigación se organiza en dos etapas, la primera que consiste en un estudio exploratorio del razonamiento probabilístico de una muestra moderada (55 estudiantes costarricenses) con un cuestionario de 14 tareas abiertas; y la segunda etapa que consistirá en la construcción de un cuestionario que evalúe conjuntamente el nivel alcanzado en la comparación de probabilidades y comparación de razones, además de otras variables que se tomarán en cuenta.

En el primer estudio se seleccionaron sólo estudiantes costarricenses, puesto que para ese momento, era complicado pasar el cuestionario en España por motivos de pandemia, a diferencia que en Costa Rica, el avance del Covid-19 se demoró un poco más en llegar. Asimismo, esta elección surge a raíz de una falta de resultados científicos asociados al razonamiento probabilístico con estudiantes costarricenses, lo cual generaba la necesidad de tener un punto de partida.

Se seleccionaron niños y niñas de sexto año de Educación Primaria (edades entre 11 y 12 años) debido a dos razones: la primera, porque con este curso se concluye la Educación Primaria, etapa en la que se establece "Determinar probabilidades elementales vinculadas con eventos particulares. Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias" (MEP, 2012, p. 247); y segundo, porque este grupo de estudiantes habría trabajado los dos años anteriores con el currículo actual (MEP, 2012) de Matemáticas (hasta el 2015 se implementó de forma completa en todos los niveles educativos).

Para el segundo estudio se analiza el razonamiento probabilístico de estudiantes al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la secundaria, es decir, estudiantes de 11 a 16 años, que son las edades del estudio de Green (1982). Como hemos indicado, los estudiantes que componen la muestra para este estudio han recibido instrucción en probabilidad en los cursos anteriores o en el que se realiza la evaluación, al contrario que en los estudios previos antes citados. Además, se analizará la relación del nivel de razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades, comprensión del juego equitativo y construcción del espacio muestral, lo que es una aportación original. También, se pretende llevar a cabo una comparación con los resultados obtenidos por estudiantes españoles y estudiantes costarricenses en algunas de las variables.

Esta segunda etapa de la investigación requerirá la construcción de un nuevo cuestionario que evalúe conjuntamente el nivel alcanzado en la comparación de probabilidades y comparación de razones. Se piensa utilizar seis niveles crecientes de dificultad en la escala de Noelting (1980) y tres tipos de tarea: comparación de probabilidades en urnas, comparación de probabilidades en ruletas y comparación de razones. Además, se pretenden añadir algunos problemas que evalúen la existencia de sesgos de razonamiento, la comprensión del juego equitativo y la construcción de espacios muestrales. En total se piensa utilizar técnicas de diseño experimental para construir dos cuestionarios paralelos con 13-14 tareas de respuesta abierta cada uno, que se administrarán en forma aleatorizada en cada uno de los grupos de estudiantes participantes. Ello asegurará la posibilidad de analizar conjuntamente todas las variables.

Puesto que se quiere analizar si la dificultad disminuye con la edad y formación y en el primer estudio algunas tareas resultaron difíciles para los estudiantes de la muestra, se decide que para esta segunda etapa se contará con una muestra amplia de estudiantes para poder contrastar los resultados:

1. Estudiantes de 6º curso de Primaria y 1º a 4º de ESO en España (11-16 años).
2. Estudiantes de 6º curso de Primer ciclo, 3º ciclo completo de Educación General Básica y 1º curso de Ciclo Diversificado en Costa Rica (11-16 años).

Esto permitirá comparar nuestros resultados con los de Green (11-16 años) y con casi todos los cursos de Cañizares (10-14 años). De cada uno de estos grupos se esperaba tomar entre 50-60 estudiantes, llegando finalmente a una muestra de 704 estudiantes. Parte de los objetivos e hipótesis se estudian sólo con los estudiantes costarricenses, para finalizar el trabajo en un tiempo y con una longitud razonable. Pensamos que es suficiente, dada la cantidad de publicaciones desarrolladas.

Cada uno de los estudios citados tiene sus propios objetivos específicos, hipótesis, metodología y conclusiones, los cuales se detallarán en los capítulos correspondientes de esta memoria (Capítulos 3 y 5), así como en las publicaciones realizadas a partir de estos.

CAPÍTULO 2: ANTECEDENTES DEL TRABAJO

El contenido de este capítulo está publicado en los siguientes trabajos:

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A. y Gea, M.M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico. *PNA, 15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Hernández-Solís, L. A., Gea, M.M., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Research on children's reasoning in comparing probabilities. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 39*(1), 1-24. https://www.seio.es/beio/research-on-childrens-reasoning-in-comparing-probabilities/

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta un resumen de los principales resultados de investigación asociados al tema de estudio en este trabajo. Ya en los años 50 las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) mostraron que los niños, desde muy pequeños, pueden comparar probabilidades en situaciones que no requieren del razonamiento proporcional, aunque tienen mayor dificultad cuando se precisa este razonamiento. Sus investigaciones ocasionaron un gran interés por comprender, tanto el razonamiento proporcional, como el razonamiento probabilístico de los niños, pero la investigación sobre el tema fue principalmente desarrollada por psicólogos, Sólo el refuerzo del estudio de la probabilidad en las escuelas, recientemente ha interesado en esta problemática a los investigadores en Didáctica de la Matemática.

Esta síntesis se basa en una serie de trabajos llevados a cabo por diferentes autores, específicamente los de Batanero et al. (2016), Borovcnik y Bentz (1991), Jones y Thornton (2005), Jones et al. (2007) y Shaughnessy (1992), así como otros artículos citados en este capítulo. Asimismo, se han analizado las principales investigaciones citadas en estos documentos y otras no incluidas en ellos, en las que se propone a niños actividades relacionadas con la probabilidad.

Esta revisión se organiza en varios apartados, tomando como base los dos artículos elaborados en el tema. Se comienza con una exposición de los marcos teóricos de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), que son los autores que más influencia posterior han tenido.

La segunda parte describe la emergencia del razonamiento probabilístico hasta los 7 años de edad y recoge el trabajo publicado en la revista *PNA* (Batanero et al., 2021).

La tercera continúa con la investigación sobre razonamiento probabilístico de estudiantes a partir de esta edad, con particular énfasis en la comparación de probabilidades (Hernández-Solís et al., 2023). En este tipo de problemas, que aparece con frecuencia en los textos de los últimos años de Educación Primaria, no se suele pedir al niño el valor numérico de la probabilidad de un suceso; en lugar de ello, se le requiere elegir en cual de dos experimentos o situaciones la probabilidad de un suceso dado es mayor, lo que es más sencillo.

Además, se incluye un resumen de la investigación sobre el desarrollo del razonamiento proporcional y otros temas tratados en la parte empírica de la tesis.

2.2. INVESTIGACIÓN EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO DE NIÑOS Y ADOLESCENTES

Jones y Thornton (2005) realizan una síntesis de los estudios realizados hasta esa fecha sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, en donde establecen tres periodos. La primera fase o *Periodo Piagetiano*, está caracterizada por las investigaciones de Piaget e Inhelder, quienes trataron de proporcionar evidencia que apoyara la teoría epistemológica de Piaget sobre la estructura de las operaciones mentales y las etapas del desarrollo.

Una segunda fase, denominada *Periodo Post-Piagetiano*, inspirada por las investigaciones de Piaget (e. g. Davies, 1965; Falk et al., 1980; Goldberg, 1966; Hoemann y Ross, 1975; Yost, et al., 1962) fue muy prolífica en estudios del razonamiento probabilístico de niños, prestando un gran interés en el desarrollo de las concepciones y conceptos erróneos sobre la probabilidad. Este periodo también marcó el comienzo de los estudios que investigaban la influencia de la enseñanza en el razonamiento probabilístico de los niños (e.g., Fischbein, 1975; Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein, et al., 1967).

La tercera fase (últimas tres décadas) denominada *contemporánea*, es consecuencia de reformas curriculares a nivel mundial en matemáticas escolares, que han ampliado el alcance de las matemáticas que se espera que los niños aprendan.

A continuación, se realiza una síntesis de los resultados de las primeras dos fases identificadas por Jones y Thornton (2005), que son los más relevantes para el presente trabajo. Más adelante, se describen los trabajos de Green (1982), realizados con 2930 estudiantes ingleses entre 11 y 16 años, y de Cañizares (1997), que compara el cuestionario de Green (1982) y el de Fischbein y Gazit (1984) en una muestra de 320 niños españoles de entre 10 y 14 años y pasa un cuestionario propio con algunas de las preguntas de los anteriores a otros 143 alumnos de la misma edad.

2.3. INVESTIGACIONES DE PIAGET E INHELDER Y DE FISCHBEIN

Las ideas asociadas a la probabilidad son bastante abstractas para los niños, ya que no están tan ligadas a su experiencia directa, como los conceptos geométricos o numéricos (Batanero, 2013). Aunque el azar rodea al niño desde que nace, los fenómenos aleatorios no pueden ser manipulados por el niño para obtener un resultado concreto ni son reversibles. Por el contrario, una operación aritmética, como sumar $a+b$

y obtener *c,* puede ser manipulada; si a *c* se le quita *b* siempre se obtiene *a* y no importa lo que se está sumando, ya sean manzanas, juguetes o cualquier otra cosa.

Pero el niño no puede controlar un dado, por ejemplo, para obtener el número que desee y cuando vuelve a lanzar el dado, el resultado puede repetirse o no. Piaget e Inhelder (1951) indican que esta falta de reversibilidad de los experimentos aleatorios, que sí tienen los fenómenos deterministas (operaciones aritméticas, medida o descomposición de figuras geométricas), puede influir en el desarrollo más tardío de las nociones de probabilidad en los niños.

A continuación, se describen las teorías de Piaget y Fischbein sobre el razonamiento probabilístico del niño.

2.3.1. Supuestos generales de la teoría de Piaget

Jean Piaget, quien influyó profundamente en la forma de concebir el progreso mental del individuo, planteaba que los niños construyen activamente el conocimiento a través de la interacción con el ambiente. Su investigación se centró no tanto en "qué conocen" los niños, sino en "cómo piensan" al enfrentarse a un problema y brindó criterios e indicadores para determinar en qué nivel de desarrollo intelectual se encuentra el niño según su edad, respecto a la comprensión formal de los conceptos matemáticos. Analizó no solo el desarrollo del razonamiento en probabilidad, sino de muchos otros conceptos en ciencias y matemáticas.

Piaget (1975) describe el proceso de aprendizaje del niño por medio de dos conceptos: la *acción* y la *asimilación-acomodación*. Cuando un individuo afronta un problema matemático, lo intenta resolver (acción) mediante los conocimientos que posee, usando esquemas conceptuales existentes que le permiten anticiparse y emplear estrategias y representaciones que conoce. Pero al enfrentarse a nuevas situaciones, el individuo pasa por estados transitorios de equilibrio y desequilibrio, en los que reflexiona sobre los contenidos que conoce, que se muestran insuficientes, por lo que reconoce la conveniencia de modificar sus esquemas mentales. El sujeto realiza un proceso de asimilar y acomodar (reconstruir o expandir) los nuevos conocimientos. Estos procesos, según Piaget, están estrechamente armonizados y explican los cambios del conocimiento a lo largo de la vida.

Piaget defendió *que* el conocimiento evoluciona en etapas, en cada una de las cuales hay un progreso y los sujetos que están en una misma fase tienen un modo de razonamiento similar (Piaget, 1975). La edad en que se alcanza cada etapa es aproximada, puede variar de un niño a otro, pero las etapas siempre se suceden en el mismo orden. Un concepto central de esta teoría es la idea de operación. Las operaciones lógicas y formales constituyen sistemas de acciones interrelacionadas de forma rigurosa y siempre reversible, siendo la reversibilidad lo que hace posible la deducción (Cañizares, 1997). Se distinguen cuatro etapas (Batanero, 2013):

Período sensorio motor (0-2 años). Se caracteriza por el movimiento y las sensaciones y describe el razonamiento de los bebés. El bebé comienza a manipular objetos; percibe y experimenta propiedades (color, tamaño, forma, textura, sabor, olor).

Período preoperacional (2-7 años). En este periodo no se conciben las operaciones reversibles. Está caracterizado por la necesidad de manipular objetos reales para lograr el aprendizaje de un cierto concepto, pues el niño se apoya en sus experiencias empíricas para comprender los conceptos. Se comienza a comprender la organización del espacio, situando y desplazando los objetos (comprendiendo conceptos como dentro/fuera, encima/debajo, delante/detrás, arriba/abajo). También descubre y compara propiedades físicas de los objetos que manipula: longitud, distancia, cantidad. Comienza a contar cantidades pequeñas de objetos y a comprender el concepto de cardinal; contrasta cantidades de magnitudes por comparación y estima, a partir de una cantidad, la longitud, volumen y peso. Es capaz de ordenar sucesos en el tiempo (saber lo que ocurrió antes y lo que vendrá después). Trabaja con una sola cantidad y resuelve problemas de cambio sencillo (operaciones aditivas).

Período de las operaciones concretas (7-11 años). Aparece la comprensión de operaciones reversibles (aritméticas) pero sólo sobre lo material o que el niño pueda observar. Comienza la adquisición de principios de conservación de cantidad, peso y volumen. El niño compara y cuantifica magnitudes y formas en geometría; llega a comprender el sistema de numeración decimal y representa datos sencillos gráficamente. Agrupa los objetos en función de propiedades aditivas o multiplicativas; ordena elementos en función de una cualidad que varía (por peso, por color). Comprende conceptos espaciales, como el espacio que ocupan los objetos y su desplazamiento, propiedades (topológicas, proyectivas, euclidianas, métricas,…) y operaciones temporales y cinéticas: como el orden de sucesión de los objetos en el espacio. Los objetos materiales son un referente importante y todavía tiene dificultad para concebir una operación en forma abstracta (Batanero, 2013).

Período de operaciones formales (12-15 años). Es, según los autores, el último paso del desarrollo intelectual, y de adquisición de las habilidades cognitivas y sociales. Se pueden manipular relaciones entre representaciones simbólicas, se formulan hipótesis y se establecen conclusiones. Se comprende el significado de abstracciones, sin referirse a objetos particulares, por ejemplo, el número dos (sin concretarlo en algún tipo de objetos). Piaget e Inhelder (1997/1967), en el Capítulo V denominado "El preadolescente y las operaciones proposicionales", indican que en esta etapa aparecen una serie de nuevos esquemas operatorios, entre ellos, la comprensión de la probabilidad.

La comprensión de las operaciones sobre lo posible o potencial permiten el pensamiento hipotético-deductivo. El azar se descubre gradualmente y se comprende la idea de probabilidad. Los autores concluyen que: "sólo en el estadio que comienza alrededor de los once-doce años se comprenden las probabilidades, la combinatoria y nociones, tales como las de fluctuación o correlación y proporción" (p. 144). En este periodo los niños logran asimilar lo aleatorio, comprendiendo que: "si los casos individuales permanecen imprevisibles, los conjuntos dan lugar a una previsibilidad: la noción de probabilidad se construye entonces poco a poco, en tanto que es relación entre los casos favorables y los casos posibles" (p. 115).

También los autores determinan el carácter tardío de la comprensión de la Ley de los grandes números, concluyendo que "… los adolescentes no aceptan prever una convergencia de las distribuciones sino hasta cierto límite" (Piaget e Inhelder, 1997/1967, p. 144).

2.3.2. La caracterización de las intuiciones por Fischbein

Como una crítica a las etapas establecidas por Piaget e Inhelder surgen los trabajos de Fischbein, quien se interesa por el conocimiento intuitivo y no sólo formal de los niños. Además, investiga el efecto que la enseñanza tiene sobre la comprensión de la probabilidad. A continuación, se analizan las características que Fischbein concede a las intuiciones y seguidamente sus principales aportaciones en el terreno de la probabilidad.

El término intuición ha sido controvertido y su significado ha estado generalmente asociado al sentido común o a nociones primitivas desligadas de la razón. El diccionario de la *Real Academia de la Lengua Española* lo define como "facultad de comprender las cosas instantáneamente, sin necesidad de razonamiento". En particular, Fischbein (1987) la considera parte de la conducta inteligente, que interviene en las acciones prácticas y en el razonamiento. Define el conocimiento intuitivo como: "una clase de conocimiento que no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos rigurosos y, que, a pesar de ello, se tiende a aceptar como cierto y evidente" (Fischbein, 1987, p. 26).

Lo considera un tipo de cognición y lo diferencia de la percepción en que va más allá de los hechos e identifica las siguientes características: auto evidencia, certeza intrínseca, perseverancia, coercitividad, categoría teórica, capacidad extrapolatoria, globalidad y carácter implícito. Fischbein (1975; 1987) considera la intuición como parte de la conducta inteligente, que interviene en las acciones prácticas y en el razonamiento. Define el conocimiento intuitivo como una clase de conocimiento no está basado en la evidencia empírica o en argumentos lógicos y que se tiende a aceptar como cierto y evidente (Fischbein, 1975, p. 26). Le concede las siguientes características:

- *Certeza intrínseca:* Las intuiciones se aceptan como ciertas por el sujeto. Por ejemplo, si en una caja se tienen diez bolas blancas y se realiza el experimento de sacar una bola al azar, el sujeto no dudará en indicar que la bola será blanca (suceso seguro).
- *Auto evidencia:* Son auto-explicables. El sujeto no necesita una justificación de su intuición, sino que la acepta porque ha funcionado bien en su experiencia y porque no contradice su conocimiento anterior.
- *Perseverancia:* Las intuiciones son muy resistentes al cambio y pueden estar presentes a lo largo de toda nuestra vida. Un ejemplo de intuición incorrecta es la *falacia del jugador*, en que se supone que si en un juego de azar aparece una racha larga de un mismo resultado (por ejemplo, cara al lanzar una moneda) es más probable que en la siguiente partida se obtenga el suceso contrario.
- *Coercitividad:* Llevan a la acción, a veces con consecuencias indeseadas. En el ejemplo de la falacia del jugador, se han descrito casos de jugadores que, a pesar de una racha de perdidas, continúan jugando al suceso que piensan tiene más probabilidad y pierden una gran cantidad de dinero.
- *Categoría teórica*: Una intuición es, para el que la posee, una teoría, por lo que reconoce su generalidad, es decir, se capta la universalidad de un principio o relación, a través de un caso particular. Por ejemplo, en la afirmación "al lanzar una

moneda al aire cada cara tiene la misma posibilidad de salir", la regularidad de la moneda hace pensar en una equiprobabilidad, y se intuye es la universalidad de la propiedad a cualquier moneda.

- *Capacidad extrapolatoria:* Una intuición excede la información disponible. Un ejemplo es el salto intuitivo en el razonamiento cuando se trata con procesos infinitos, por ejemplo la *Ley de los grandes números*. La forma dinámica del infinito no presenta dificultad aparente para el sujeto, que está naturalmente capacitado para concebir la continuación infinita de la repetición del experimento aleatorio. Este infinito "dinámico" se concibe, directamente, debido al carácter extrapolable de la intuición.
- *Globalidad:* La intuición es global y sintética y por tanto opuesta al pensamiento analítico, que descompone un razonamiento en partes. Por ello ofrece una visión unitaria de una cierta situación.
- *Carácter implícito:* Algunas veces el sujeto no es consciente de las intuiciones; ya que las reacciones intuitivas son parte de la estructura superficial de la cognición, y surgen de lo profundo de los mecanismos y procesos mentales.

Fischbein (1987) diferencia entre intuiciones primarias y secundarias. Las *intuiciones primarias* se adquieren directamente con la experiencia, sin necesidad de instrucción sistemática; por el contrario, las *intuiciones secundarias* se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela. Batanero (2013) señala que una intuición secundaria no se reduce a una simple fórmula aceptada o utilizada automáticamente, sino que se transforma en convicción; no se forma a partir de la lectura o de una explicación teórica, sino de una información que el alumno utiliza en sus propias acciones y predicciones a lo largo de su vida. Por ejemplo, una intuición primaria correcta sería la equiprobabilidad de las caras en una moneda, y la intuición secundaria errónea sería que al lanzar una moneda una serie de veces y haber obtenido siempre escudo, se piense que en el próximo lanzamiento sería más probable que saliera corona.

Fischbein (1975) sostiene que la distinción entre fenómenos impredecibles y situaciones deducibles y controlables no es automática, y tampoco se interioriza completamente al nivel de las operaciones formales. Al contrario, Fischbein encontró que los adolescentes tienden a buscar dependencias causales que reduzcan la incertidumbre en situaciones aleatorias. Así lo señalan Fischbein et al. (1967), quienes consideran que la escuela orienta al niño a una interpretación deductiva de los fenómenos, enseñándole a buscar relaciones de tipo causal.

Cañizares (1997) evidenció en su estudio un gran número de intuiciones correctas, como la impredecibilidad en los experimentos aleatorios, comparación de probabilidades en casos sencillos y probabilidades geométricas. Sin embargo, también encontró que el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos y la interpretación de diagramas en árbol resultaron excesivamente difíciles para los estudiantes de su muestra.

2.3.3. Diferencia de conclusiones en las investigaciones de Piaget y Fischbein sobre probabilidad

Fischbein (1975) realizó una contribución importante en el estudio del razonamiento probabilístico del niño, apoyado en su teoría sobre las intuiciones. Investiga en niños de diferentes edades la intuición del azar, su capacidad de estimar probabilidades y el razonamiento combinatorio, así como el efecto de la instrucción sobre cada uno de estos apartados, obteniendo en algunos casos conclusiones diferentes a las de Piaget e Inhelder (1951). Estas diferencias se resumen en la Tabla 2.3.1.

Tabla 2.3.1. Principales diferencias entre las teorías de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975) sobre el razonamiento probabilístico de los niños

Piaget e Inhelder (1951)	Fischbein (1975)
Se concibe la comprensión del azar como complementaria de la relación causa-efecto.	El azar es una intuición primaria consistente en la distinción entre fenómeno aleatorio y determinista.
El niño antes de los 7 años no comprende la naturaleza irreversible de los fenómenos aleatorios y esto le impide apreciar el azar.	La intuición del azar está presente en la conducta diaria del niño, antes de los 7 años.
La idea de azar y la probabilidad, no pueden ser totalmente comprendidas hasta que se desarrolla el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales (a partir de 11-12 años).	La diferenciación entre el azar y lo deducible no se alcanza de forma automática y completa a nivel de operaciones formales, aunque se cuente con los esquemas necesarios para ello.
El niño es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de eventos aleatorios, puesto que aún no poseen la habilidad de distinguir entre el azar y lo deducible, y tampoco han desarrollado el concepto de proporción y los procedimientos combinatorios.	Las carencias en el conocimiento de la proporcionalidad y la combinatoria no impiden al niño hacer juicios probabilísticos, aunque éstos sean inducidos por sus percepciones. El hecho de que utilicen estimaciones intuitivas evidencia que tienen una noción del concepto de probabilidad.
Durante la etapa de las operaciones formales, el niño adquiere la capacidad de usar procedimientos que le permiten hacer recuentos de todas las permutaciones posibles, variaciones y combinaciones de un conjunto dado de elementos.	Aunque los sujetos en la etapa de operaciones formales disponen de la madurez para adquirir competencia para resolver problemas combinatorios, no garantiza que la utilicen en la resolución de tareas probabilísticas.

Al considerar la comprensión del azar como complementaria a la de la relación de causa y efecto y dependiendo de la capacidad combinatoria, Piaget e Inhelder (1951) concluyen que esta comprensión no es posible hasta la etapa de las operaciones formales. Fischbein (1975), por el contrario, afirma que se puede distinguir el fenómeno aleatorio del determinista hacia los 7 años, pues se concibe el azar como equivalente a impredecibilidad y se genera en un individuo antes de una enseñanza formal del tema. También sostiene que la distinción entre fenómenos impredecibles y situaciones deducibles y controlables no es automática, y tampoco se interioriza completamente al nivel de las operaciones formales en todos los individuos. Al contrario, Fischbein et al. (1967) encontraron ejemplos de adolescentes que tienden a buscar dependencias causales que reduzcan la incertidumbre en situaciones aleatorias.

Piaget e Inhelder (1975) consideraron que el niño de preescolar es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, puesto que no ha adquirido razonamiento proporcional. Sin embargo, Fischbein (1975) indica que el niño de esta edad puede hacer juicios probabilísticos en tareas sencillas que no requieran el uso de fracciones. Esta capacidad va mejorando con la edad y el logro de los adolescentes estimando posibilidades a favor y en contra de un resultado es superior al de los niños pequeños. Fischbein añade que los niños de 9 a 10 años son capaces de resolver problemas sencillos con ayuda de la instrucción.

Finalmente, respecto al razonamiento combinatorio, Piaget e Inhelder indican que los niños de preescolar solo pueden enumerar algunas combinaciones o variaciones usando ensayo y error y repitiendo elementos, en casos muy sencillos. Fischbein defiende que es posible enseñar técnicas de enumeración al niño con ayuda de la instrucción y el recurso del diagrama en árbol. Mientras que Piaget e Inhelder (1951) suponen que el razonamiento combinatorio se desarrolla espontáneamente en la adolescencia, Fischbein (1975) indica que para ello es necesaria la instrucción.

2.4. EL INICIO DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO

Aunque la probabilidad ha estado ausente en el currículo español de la educación infantil y primer ciclo de la educación primaria, se encuentran actualmente investigaciones que sugieren iniciar lo antes posible al niño en el lenguaje probabilístico y las experiencias con juegos y experimentos aleatorios sencillos (Alsina, 2012; Alsina y Vásquez, 2016; Beltrán-Pellicer, 2017).

También algunas orientaciones curriculares sugieren adelantar en lo posible las experiencias de los niños con el azar. Así, los estándares del NCTM (2000) propusieron iniciar la discusión sobre sucesos probables e improbables relacionados con experiencias y juegos del niño en la etapa Pre-K-2 (3-7 años), iniciando ideas sobre probabilidad en los cursos de 1º a 3º (6-8 años), según los siguientes contenidos:

- Describir sucesos probables o improbables y discutir su verosimilitud, utilizando palabras como seguro, imposible o igual probabilidad.
- Evaluar la mayor o menor posibilidad de resultados en experimentos sencillos y comprobar las predicciones.
- Comprender que la medida de la probabilidad de un suceso se puede representar como un número entre 0 y 1.

Sugerencias similares se encuentran en el currículo australiano para niños de 6 y 7 años (ACARA, 2014), que recomiendan pedir al niño identificar resultados de situaciones de azar cotidianas y emparejarlas con frases como "no sucederá", "podría ocurrir" y "sucederá". En España, aunque en el currículo de Educación Infantil (MEFP, 2022a) no aparece específicamente la probabilidad, aparecen contenidos que se pueden desarrollar en contexto de juegos de azar: cuantificación y comparación no numérica de colecciones, utilización de la serie numérica para contar, observación y toma de conciencia del valor funcional de los números y de su utilidad en la vida cotidiana. En particular, en el Primer ciclo de esta etapa (0 a 3 años) se inicia la "Experimentación en el entorno. Curiosidad, pensamiento científico, razonamiento lógico y creatividad." (MEFP, 2022a, p. 14584) mediante el "Modelo de control de variables. Estrategias y técnicas de investigación: ensayo-error, observación, comprobación y realización de preguntas" (MEFP, 2022a, p. 14584); mientras que en Segundo ciclo (3 a 5 años) se añaden como estrategias y técnicas de investigación la "experimentación, formulación y comprobación de hipótesis, realización de preguntas, manejo y búsqueda en distintas fuentes de información" (MEFP, 2022a, p. 14586). Todo ello lleva a la pregunta de si un niño puede comprender e intuir algunas ideas de probabilidad en sus primeros años.

El objetivo de esta parte del capítulo es realizar una síntesis de la investigación que analiza el razonamiento de los niños hasta los 7 años cuando se enfrentan a juegos y problemas básicos de probabilidad. La síntesis se apoya en algunos trabajos previos, como los de Batanero (2013), Bryant y Nunes (2012), Langrall y Mooney (2005) y

Jones et al. (2007).

Las investigaciones más influyentes sobre razonamiento probabilístico de niños de diferentes edades fueron desarrolladas por Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), cuyos resultados despertaron gran interés tanto en psicólogos como en educadores. Estos trabajos fueron seguidos por estudios posteriores sobre diferenciación de azar y determinismo por los niños, distribución de resultados en experimentos repetidos, adquisición del lenguaje probabilístico, estimación y comparación de probabilidad, y enumeración de casos posibles. Se resumen a continuación los centrados en los niños pequeños, y en las ideas elementales de probabilidad que podrían trabajarse en la educación infantil y cursos iniciales de la educación primaria. Esta sección se ha publicado en el siguiente trabajo:

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L., y Gea, M.M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico. *PNA*, *15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

2.4.1. Introducción

Aunque el azar rodea al niño desde que nace, quizá resulte una noción más compleja que otras ideas matemáticas, pues los fenómenos aleatorios no pueden ser manipulados por el niño como sí pueden serlo, por ejemplo, las situaciones que involucran conceptos aritméticos. Por ejemplo, si se lanza cuatro veces un dado y se obtiene los valores 1, 3, 3, 6, al repetir el experimento no es usual que se mantenga esta secuencia de resultados. Pero el niño no puede obtener al lanzar un dado un número dado; aunque puede experimentar que si a 2 caramelos le agrega 1 se obtendrá 3 y el mismo resultado obtiene sumando manzanas o cualquier otro objeto. Además, la operación es reversible, pues si a los 3 objetos le quita 1 siempre obtiene 2 objetos.

Como la reversibilidad no se da en los experimentos aleatorios, Piaget e Inhelder (1951) justificaron que las nociones de probabilidad se desarrollan más tarde en los niños que las aritméticas o geométricas. Piaget e Inhelder (1951) suponen que hasta la etapa de operaciones formales (12-15 años) el niño no logra comprender la probabilidad, porque asumen una concepción clásica de la misma (proporción entre casos favorables y posibles) y ello implica la necesidad de un razonamiento proporcional y combinatorio que no se logra completamente hasta el período de las operaciones formales.

Fischbein (1975), sin embargo, resalta que estos autores no tomaron en cuenta las ideas intuitivas ni el efecto de la instrucción en los niños. Para Fischbein, la intuición es una parte importante de la conducta inteligente del individuo, que tiene certeza intrínseca y auto evidencia, son resistentes al cambio y a veces son inconscientes. El autor diferencia entre intuiciones primarias, que se adquieren directamente con la experiencia, e intuiciones secundarias, que se forman como consecuencia de la educación, principalmente en la escuela. Defiende la existencia de intuiciones sobre el azar y la probabilidad en niños muy pequeños, que deben ser educadas pues, de lo contrario, pueden convertirse en intuiciones incorrectas y difíciles de cambiar.

2.4.2. Distinción entre azar y determinismo

Para poder trabajar ideas de probabilidad con los niños es necesario, en primer lugar, asegurar que perciben el azar o aleatoriedad y la diferencia entre sucesos aleatorios y deterministas. Metz (1998) indica que no sólo la idea de probabilidad interviene en la toma de decisión bajo incertidumbre, sino que también lo hace la aleatoriedad, pues sin su comprensión, las interpretaciones de la variabilidad y los patrones en fenómenos a nuestro alrededor nos llevarían con frecuencia a atribuciones causales espurias. Los niños están rodeados de aleatoriedad en su vida (meteorología, enfermedades, etc.) y sus juegos (sorteos, juegos con dados, ruletas, etc.), pero ¿cuándo llegan a comprender intuitivamente la idea de azar?

Piaget e Inhelder (1951) concibieron la comprensión del azar como complementaria a la relación de causa-efecto y a su vez dependiente de la capacidad combinatoria. Por ello, concluyeron que esta no se alcanza hasta la adolescencia, pues para comprender el azar es necesario tomar consciencia de la existencia de distintas posibilidades y ser capaz de enumerarlas para asimilar la impredecibilidad de cada caso aislado. Fischbein (1975) rechaza esta conclusión e indica que la idea de azar aparece antes de los 7 años, ya que los niños de Educación Infantil diferencian azar y determinismo en juegos o experimentos con dos sucesos equiprobables, aunque no se trate de una comprensión profunda, sino de una intuición, y fallen cuando la situación a evaluar requiere razonamiento combinatorio.

Una característica de los fenómenos aleatorios es la impredecibilidad del resultado de un experimento aislado (aunque se puede predecir la distribución de resultados en una serie grande de experimentos independientes). En contraste con los supuestos de Piaget e Inhelder (1951), para quien la comprensión de la indeterminación e impredecibilidad emerge hacia los 7 años, Fischbein (1975) y otros investigadores muestran que existen unas primeras ideas sobre estos conceptos en edades más tempranas.

Así, para analizar si los niños diferencian los resultados aleatorios y deterministas, Kuzmak y Gelman (1986) proponen dos experimentos a niños de 3 a 8 años con dos dispositivos (Figura 2.4.1). Un dispositivo es semejante a un bombo de lotería donde mezclan 10 bolas rojas, 10 azules y 10 amarillas, que gira hasta que cae una bola por el orificio. Como el niño no puede saber qué bola caerá, es una situación aleatoria. El segundo dispositivo es un tubo de plástico transparente relleno de bolas (7 rojas, 7 azules y 7 amarillas) ordenadas al azar y que van saliendo por un orificio. Como el niño puede ver el orden de las canicas en el tubo y, por tanto, el color de la siguiente bola que va a ser extraída es un dispositivo determinista. En un primer experimento los investigadores extraen bolas sucesivamente de los dispositivos, preguntando previamente a los niños si pueden predecir el resultado de la siguiente extracción y que expliquen su respuesta. En el segundo experimento se utilizan los mismos dispositivos, pero sin llevar a cabo la extracción de canicas.

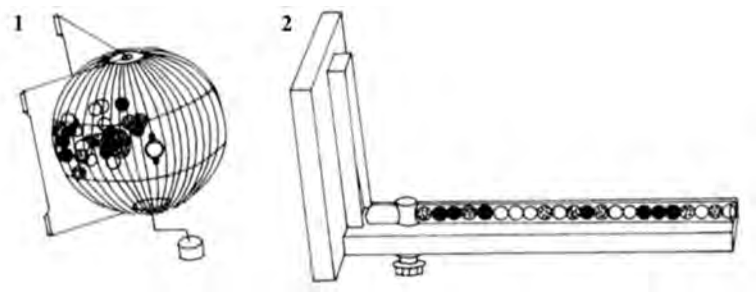


Figura 2.4.1. Dispositivos experimentales de Kuzmak y Gelman (1986, p. 561).

En el primer experimento (48 niños, 12 en cada intervalo de edad: 3 a 4, 4 a 5, 5 a 6 y 7 a 8), los niños desde los 4 años responden correctamente, diferenciando el dispositivo determinista y el aleatorio, y a partir de los 5 años explican por qué no se puede predecir en el dispositivo 1 el color de la bola, utilizando frases poco formales como "hay una mezcla de bolas" o "las bolas se mueven y no se puede ver el color que caerá". En el segundo experimento (24 niños diferentes a los del experimento 1) 7 de los 12 niños de 5 años y 10 de los 12 de 7 años diferencian el dispositivo aleatorio del determinista y muchos dan explicaciones adecuadas de la imposibilidad de predecir el resultado del aleatorio. Puesto que en este segundo experimento los niños no tienen experiencia de los resultados, los autores concluyen que se basan en las características físicas de los dispositivos utilizados para razonar sus respuestas.

Fay y Klahr (1996) describen otros experimentos donde preguntan a los niños de qué colección de objetos se extrae uno dado, mostrando dos colecciones: una determinista, formada únicamente por objetos de un tipo, y otra aleatoria formada por dos tipos de objetos. Sus resultados indican que niños de 4 y 5 años puede identificar correctamente la selección de cada colección como determinista o aleatoria en la mayor parte de las pruebas que se les hace. También indican que es más sencillo para los niños identificar las situaciones deterministas que las aleatorias, lo que también ocurre (en situaciones más complejas) en los adultos.

En resumen, hacia los 3-4 años los niños comienzan a diferenciar situaciones deterministas y aleatorias simples y hacia los 5 años desarrollan explicaciones sobre la imposibilidad de predecir los resultados de las segundas, mostrando cierta comprensión intuitiva de la incertidumbre de los fenómenos aleatorios y la imprevisibilidad de sus resultados.

2.4.3. Distribución de resultados en experimentos aleatorios repetidos

Para analizar la comprensión del azar en los niños, Piaget e Inhelder (1951) idearon un experimento utilizando una bandeja con compartimentos en cada uno de sus extremos. En uno de estos extremos sitúan bolas de dos colores (por ejemplo, 4 azules y 4 amarillas) de modo que las del mismo color están contiguas (Figura 2.4.2). Al mover la bandeja para que las bolas vayan hacia el otro extremo se produce una mezcla de colores y si se repite varias veces el movimiento, la disposición de bolas en los compartimentos, según color, es impredecible. Antes de mover la bandeja, se pide a los niños predecir la colocación de las bolas después del movimiento.

Los niños del periodo preoperacional piensan que las bolas volverán a su posición inicial después de varios movimientos, o que todas las bolas azules se colocarán en la posición inicial de las bolas amarillas y viceversa, respuesta que es interpretada por Piaget e Inhelder como falta de comprensión del azar. Hacia los 7 años se comienza a aceptar que algunas bolas se mezclarán con las del color contrario; por lo que los investigadores concluyen que antes de esta edad sólo se comprende una causalidad determinista.

Figura 2.4.2. Experimento de la bandeja adaptado de Piaget e Inhelder (1951).

En otro experimento, preguntaban a los niños cómo pensaban que caerían los primeros copos de nieve sobre el embaldosado de una terraza. Para ello dieron a los niños piedrecitas y un tablero cuadriculado (a modo de copos y embaldosado, respectivamente), pidiendo que representaran con ellos la forma en la que pensaban que caerían esos copos sobre las baldosas al empezar a nevar. Los niños pequeños colocaban exactamente una piedrecita en el centro de cada cuadrado (Figura 2.4.3a), lo que Piaget e Inhelder (1951) interpretan como ausencia completa de la percepción del azar. Hacia los 7 años los niños comienzan a admitir cierta irregularidad en la distribución, pues siguen colocando una piedra en cada cuadrado, pero no siempre en el centro (Figura 2.4.3b). Según los autores, sólo en la etapa de operaciones formales se comprenderá que pueden quedar cuadros vacíos, mientras que en otros caen dos o tres copos de nieve.

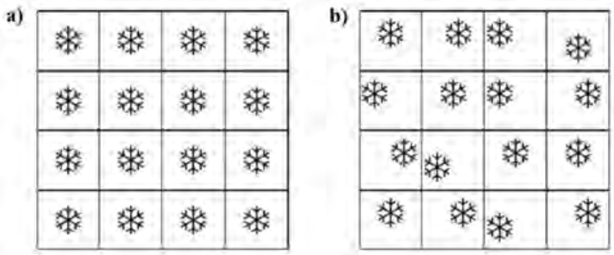


Figura 2.4.3. Experimento del embaldosado adaptado de Piaget e Inhelder (1951).

Con estos experimentos, Piaget e Inhelder concluyen que hacia los 7 años se adquiere cierta capacidad de diferenciar azar y determinismo, aunque de forma incompleta, pues el niño está muy ligado todavía a lo concreto. Pero, en realidad, sus ensayos estudian la distribución de un conjunto de resultados en un experimento aleatorio repetido, que es una situación mucho más compleja. En realidad, sus experiencias indican que en torno a los 7 años se comienza a percibir la irregularidad local de dichos resultados, pero no se llega todavía a percibir la distribución global de los mismos. Conclusiones similares fueron obtenidas por Nikiforidou y Pange (2010) en un experimento en que presentaron a 200 niños de 4 a 6 años una tarea en la que tenían que situar al azar un pequeño número de marcas en una cuadrícula de 5x5, notando una preferencia por una colocación ordenada (y no aleatoria) de las marcas en la mayoría de los niños.

Una aproximación diferente es la de Paparistodemou et al. (2008), quienes experimentan con 23 niños de entre 5,5 y 8 años, con un vídeo juego diseñado por los autores (Figura 2.4.4). En el juego aparece un *niño espacial* situado sobre una línea amarilla, quien sube o baja verticalmente en función del resultado de la "máquina de lotería". En esta máquina, una bolita blanca se va moviendo continuamente en direcciones aleatorias y cada vez que colisiona con una bola roja/azul se suma 1 punto en la casilla correspondiente, de modo que los niños pueden observar cada resultado aislado y la suma de resultados (posición final del niño espacial).

La tarea consiste en que el niño coloque bolas rojas y azules (en número, tamaño y posición espacial que quiera) dentro de la máquina de lotería para que ésta sea *justa*, es decir, que no dé ventaja ni al color rojo ni al azul para conseguir que el niño espacial se quede lo más cerca posible de la posición inicial después de una serie de movimientos. Los autores concluyen que, incluso los niños de 5 años comprenden la idea de equitatividad (que un color no obtenga más puntos que el otro).

Figura 2.4.4. Vídeo juego utilizado por Paparistodemou et al. (2008, p. 8).

Los niños actúan de dos formas bastante diferentes para conseguir la equitatividad en el juego:

1. Para generar un juego justo, configuran las bolas en la máquina de manera simétrica para asegurar que la bolita blanca alterne colisiones entre bolas rojas y azules. Para ello, construyen la máquina con el mismo número de bolas de cada color y equidistantes de la bolita central (22 de los 23 niños).

2. Asegurando la imparcialidad del juego, mezclan todo lo posible los colores de las bolas en la máquina para hacer que las colisiones en el juego no se puedan controlar ni estén sesgadas (11 de los 23 niños).

En resumen, aunque las primeras investigaciones indicaron que hasta los 7 años no se adquiere la capacidad de imaginar la distribución de un conjunto de resultados aleatorios, el trabajo de Paparistodemou et al. (2008) muestra una cierta intuición de esta distribución y la idea de equitatividad desde los 5 años.

2.4.4. Adquisición del lenguaje probabilístico

El lenguaje probabilístico está unido al desarrollo conceptual, lo que ha llevado a diferentes autores a interesarse por el significado que los niños asignan a las palabras que utilizamos para referirnos al azar o graduar las probabilidades. Así, Vásquez y Alsina (2017) organizan un proceso instruccional de inicio a la probabilidad con 20 niños de 7 y 8 años a cargo de un profesor con experiencia docente y formación en el tema. Los autores analizan los términos y expresiones orales y escritas de los niños a lo largo de la sesión. Sus resultados muestran escasa comprensión del vocabulario asociado al azar y la probabilidad, pues los niños utilizan con frecuencia vocabulario impreciso o incorrecto. Uno de los conceptos que presenta mayor dificultad es el de imposible*,* que los niños utilizan para referirse a sucesos o situaciones con escasas posibilidades de ocurrir y si llegan a ocurrir, lo atribuyen a la buena o mala suerte. Igualmente, el término seguro se asocia a veces a sucesos de alta probabilidad. No obstante, al preguntar por la posibilidad de extraer un pañuelo de un color determinado de un bolso con pañuelos de varios colores, HodnikČadež y Škrbec (2011) encuentran que el 53% de una muestra de niños eslovenos de 4 y 5 años y entre el 70% y 80% de otro número similar de niños de 6 a 8 años dieron una interpretación correcta a estos términos, aunque el término imposible fue el más difícil, pues solo un 10% de los niños de Educación Infantil lo interpreta correctamente.

Respecto al lenguaje numérico y simbólico, mediante un proceso gradual de trabajo con varias situaciones, Vásquez y Alsina (2019) observan un primer acercamiento a la cuantificación de los grados de posibilidad, que busca aceptar que un suceso imposible tendrá una probabilidad de ocurrencia de 0% y otro seguro tendrá probabilidad de ocurrencia de 100%.

Una experiencia relacionada es la de Kazak y Leavy (2018), que proporcionan a 16 niños de 7-8 años una escala de probabilidad cualitativa (Figura 2.4.5) para medir su creencia en la verosimilitud de ciertos sucesos. Se proporciona a los niños por parejas bolsas con gominolas verdes y rosas en diferente proporción, preguntándoles cuál sería la posibilidad de obtener una gominola verde, y también si es seguro o imposible obtener un color dado. Se les pide marcar en la escala (Figura 2.4.5) lo que esperan que ocurra, situando lo seguro en el extremo derecho y lo imposible en el izquierdo, siendo el centro el caso de equiprobabilidad. También simulan con material manipulativo y el software *Tinkerplot* la extracción de las gominolas.

Figura 2.4.5. Escala cualitativa de probabilidad (Kazak y Leavy, 2018, p. 42).

Los niños utilizaron palabras relacionadas con el azar, como *suerte*, o *podría ocurrir*. Para comparar la posibilidad de extraer una gominola verde de bolsas con diferente proporción de verdes y rojas, los niños usaron frases como "un poco más de suerte" para describir la mayor posibilidad de obtener este color. Los niños mostraron cierta comprensión de la idea de seguro e imposible; por ejemplo, en una bolsa con 2 gominolas verdes y 8 rojas indicaron que no es imposible obtener la gominola verde, porque había 2 verdes en la bolsa. Fue también evidente su comprensión de la idea de igual probabilidad, aunque tuvieron dificultad para expresarla con palabras, pero sí supieron hacerlo en la escala de probabilidad.

En resumen, hacia los 4-5 años los niños comienzan a expresar verbalmente sus intuiciones y hacia los 7-8 años cualitativamente su predicción sobre la posibilidad de ocurrencia de un suceso y utilizar términos para graduar esta posibilidad, aunque tienen dificultad con la idea de imposible y seguro, que va desapareciendo con la edad (Shtulman y Carey, 2007).

2.4.5. Comparación y estimación de probabilidades

Una vez que el niño diferencia los sucesos aleatorios y expresa su probabilidad de manera verbal y cualitativamente, surge la pregunta de si es capaz de estimar la probabilidad de un suceso o al menos decidir cuál es más probable entre dos sucesos.

Piaget e Inhelder (1951) consideraron que el niño de Educación Infantil es incapaz de estimar correctamente las posibilidades a favor y en contra de los sucesos aleatorios, puesto que no ha adquirido razonamiento proporcional. Sin embargo, Fischbein (1975) indica que el niño de esta edad puede hacer juicios probabilísticos en tareas sencillas que no requieran el uso de fracciones, y esta capacidad va mejorando con la edad.

Para analizar el razonamiento de los niños en la comparación de probabilidades, Piaget e Inhelder (1951) utilizaron fichas de color blanco, algunas con una cruz en su reverso. Dividieron las fichas en dos grupos con composiciones distintas (a,b), donde "a" representaría el número de fichas con cruz en una de sus caras (casos favorables) y "b" el número de fichas sin cruz (casos desfavorables). La tarea propuesta a los niños era decidir en cuál de dos agrupaciones (cuya composición se mostraba inicialmente a los niños) sería más fácil obtener una cruz al tomar una de las fichas con los ojos cerrados.

Se propuso a los niños tareas de diferente dificultad teniendo en cuenta la composición (a_1,b_1) y (a_2,b_2) de los dos grupos de fichas. El período preoperacional se caracteriza porque sólo se opera con una de las variables en cada agrupación a comparar. Piaget e Inhelder (1951) dividen este período en dos etapas. En la primera (hasta los 3 años y medio), los niños dan una respuesta aleatoria al problema, y a pesar de carecer de capacidad de comparación lógico-aritmética, pueden dar la respuesta correcta en composiciones donde al menos una de las agrupaciones presenta imposibilidad o certeza como (0,b_1) y (0,b_2); (0,b_1) y (a_2,0); (0,b_1) y (a_2,b_2); o bien (a_1,0) y (a_2,0). Además, el niño sólo considera los casos favorables, sin tomar en cuenta el total de casos posibles.

En la segunda etapa (hasta los 6 años y medio) se resuelven situaciones de comparación de probabilidades que dependen de una sola variable (consideran sólo dos de los cuatro datos implicados), pero sus valoraciones siguen siendo intuitivas. De forma progresiva desarrollan la comprensión de que el número de casos favorables está asociado con la probabilidad. Algunas veces razonan a partir del término constante en las dos colecciones, por ejemplo (2,3) y (1,3), y no consideran el término variable.

El período de las operaciones concretas se caracteriza por el uso de los cuatro términos, en forma aditiva, sin tener en cuenta las proporciones. También se divide en dos etapas. En la primera (7 y 8 años), los conceptos de fracción y proporción aún no están presentes, pero el niño es capaz de comprender las primeras operaciones lógico-aritméticas y esto le ayuda a tener un mayor éxito en problemas de una variable. Logra realizar comparaciones aditivas, pero falla en los problemas que requieren comparar dos cocientes. En la segunda etapa, que comienza hacia los 10 años, el niño realiza comparaciones aditivas entre los casos favorables y desfavorables, y aunque estas estrategias no son válidas en problemas más complejos, resuelve problemas sencillos de proporcionalidad de forma empírica.

Estas conclusiones fueron analizadas por otros autores con niños pequeños. Así, Yost et al. (1962) se interesaron por la existencia de razonamiento probabilístico en los niños de Educación Infantil, cambiando ligeramente el método experimental de Piaget basado en respuestas verbales, que pueden ser difíciles a esta edad. Los autores dieron a los niños urnas transparentes con fichas de dos colores en diferente proporción, preguntando cuál de las dos urnas elige para jugar a un juego donde se gana al sacar con los ojos cerrados una ficha de un determinado color (Figura 2.4.6).

El autor sugiere que la tarea planteada de esta manera (comparar dos urnas con dos colores en cada una) es más sencilla que la propuesta por Piaget e Inhelder (una sola urna y dos tipos de fichas) porque el niño no necesita verbalizar, sino sólo elegir una de las urnas. Utilizan composiciones simples y van aumentando progresivamente la dificultad. Como resultado de la investigación los autores sugieren que, a partir de los 4 años, los niños tienen intuiciones sobre la probabilidad y pueden elegir la urna que da más probabilidad si la composición es sencilla, y esta intuición mejora con la edad.

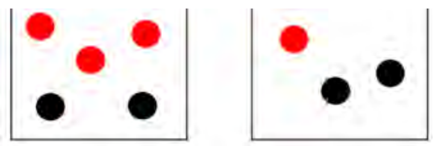


Figura 2.4.6. Comparación de probabilidades en urnas.

Goldberg (1966) repite la investigación anterior con 32 niños desde 3 años y 10 meses hasta 5 años y 1 mes e indica que el éxito en la tarea depende mucho de las condiciones. Hay una gran influencia del color favorito, que debe ser controlado en la tarea, y que los niños tienen más dificultad cuando el número de casos favorables en las dos urnas es igual y el número de casos desfavorables es diferente, que en el caso contrario. También muestran que se producen más errores cuando el número de bolas de cada color es más parecido o, lo que es lo mismo, tienen más éxito cuanto más diferente es este número.

Davies (1965) repite el estudio de Yost et al. (1962) con 112 niños de 3 a 9 años, confirmando que hay un progreso en el razonamiento con la edad. Utilizando situaciones en las que el niño recibía una recompensa por la extracción de una bola de determinado color, se observó la preferencia sistemática por las urnas en que la proporción del color pedido era mayor. Concluye que los niños tienen la capacidad de comparar probabilidades en casos sencillos, incluso antes de que el niño sea capaz de dar una explicación verbal a sus elecciones. Además, observa que el niño usa predominantemente la información percibida de forma directa para estimar las posibilidades de ocurrencia. Mientras los niños de 3 años responden correctamente, sólo a la mitad de los experimentos no verbales (basta elegir una urna sin explicar por qué), a los 5 años resuelven el 81% de estos experimentos y el 31% también aquellos verbales en los que tienen que explicar su decisión. A los 7 años resuelven todos los experimentos no verbales y el 75% de los verbales.

Hoemann y Ross (1982) trataron de estudiar si el niño de 4 a 10 años puede realizar juicios probabilísticos o se basa sólo en sus percepciones. Para ello utilizan ruletas con sectores de dos colores diferentes y distinta amplitud, dividiendo la muestra en dos grupos. Al primero se le preguntó sobre cuál de dos ruletas dadas daría mayor posibilidad de obtener un determinado color y cuál tenía mayor cantidad del color dado, sin observar diferencias entre los dos grupos. Los autores concluyen que no era necesaria una comparación de proporciones o probabilidades para resolverlas, bastando con la estimación del área coloreada. En un segundo experimento con un sólo disco y en el que se preguntaba en qué color creía que se pararía la aguja, los autores observaron más errores en la tarea probabilística, concluyendo que entre 4 y 8 años el niño no tiene un razonamiento probabilístico, aunque éste mejora con la edad.

Otros experimentos con dos urnas y bolas de colores les sugirieron que la tarea de urnas sirve para diferenciar los razonamientos de tipo probabilístico y proporcional y que es preferible la tarea que emplea dos urnas que la que utiliza una sola. Ello es debido a que cuando se usan dos conjuntos de fichas, el alumno se limita a elegir de qué conjunto prefiere hacer la extracción para obtener el resultado ganador. En las tareas de una sola urna, es el resultado en sí, lo que debe ser predicho. Además, la combinación de elementos en una unidad impide al niño pensar simultáneamente en el todo y las partes de los dos subconjuntos incluidos.

Por otro lado, Falk et al. (1980) realizan una investigación con niños de 4 a 11 años a los que piden comparar probabilidades en contextos de bolas en urnas, ruletas y peonzas, siempre con dos únicos colores en las bolas, sectores de las ruletas y lados de las peonzas. Además, dividen los problemas en tres tipos, según las razones de casos favorables y posibles implicadas, en la forma siguiente: a) la proporción de casos favorables respecto a los posibles es mayor que 1/2 en un dispositivo y menor en el otro; b) una proporción es igual a 1/2 y la otra diferente; c) las dos proporciones son o mayores o menores que 1/2. Sus resultados muestran que a partir de los 6 años los niños manifiestan un razonamiento de tipo probabilístico, eligiendo sistemáticamente el dispositivo con mayor probabilidad. El error más frecuente en los niños más pequeños es elegir el conjunto con mayor número de casos favorables. Los autores concluyen que la capacidad de calcular proporciones, por sí sola, no implica necesariamente la comprensión de la probabilidad, sino que el niño debe aceptar que en la situación planteada tiene influencia el azar para luego aplicar los cálculos de proporciones; es decir, el azar y la proporción son dos nociones necesarias para comprender el significado de probabilidad.

Falk et al. (2012) tratan de comprobar los resultados anteriores con tres experimentos. En el tercero, con 160 niños de 4 a 11 años, utilizan los problemas de comparación de probabilidades en urnas, analizando las estrategias de los niños. Clasifican las estrategias en una dimensión (si sólo comparan un tipo de elementos en cada urna) o dos dimensiones (si comparan los dos tipos de elementos). De los niños de 4 y 5 años, el 78% usan estrategias de una dimensión, eligiendo la urna con más casos favorables (59%) o menos desfavorables (19%), y el resto estrategias de dos dimensiones. Hacia los 7 años hay un cambio, ya que los niños comienzan a usar más frecuentemente estrategias de dos dimensiones, pero a veces combinan los elementos en forma aditiva. Se detectan diferentes estrategias en niños de la misma edad e incluso en el mismo niño. La explicación de los niños indica el uso de un sistema perceptivo e intuitivo, pues se deciden por el color dominante sin que a veces cuenten los casos favorables.

Nikiforidou (2019) realiza una investigación con 480 niños de entre 4 y 6 años para analizar el efecto del tipo de material utilizado (manipulativo o virtual) y la repetición de la tarea sobre la comparación de probabilidades. Se dieron a los niños tarjetas con dibujos de animales (ratones, tortugas y patos) y se les pidió contarlos y describirlos. Los autores presentaron tres tareas diferentes, variando el número total de animales en las tarjetas (4 o 6) y la relación entre el número de animales de cada tipo (3:1, 5:1 y 4:1:1). En cada tarea, después de poner varias tarjetas boca abajo y mezclarlas, se les pidió sacar una, prediciendo con anterioridad qué animal sería más probable. Más del 70% de los niños respondieron correctamente, siendo más sencillas las tareas con solo dos tipos de animales (espacio muestral más simple). Sus resultados fueron mejores al trabajar con material manipulativo, aunque la repetición de la tarea no mejoró sustancialmente los resultados. Nikiforidou et al. (2013) obtienen la misma conclusión en un trabajo de 90 niños de la idéntica edad, utilizando un contexto de ruletas.

Otras investigaciones apoyan ideas sobre probabilidad en niños aún más pequeños. Así, Denison y Xu (2014) realizan cuatro experimentos con piruletas de dos colores diferentes (por ejemplo, rosa y negro), cada uno con 24 bebés entre 10 y 13 meses. Para realizar sus experimentos, en primer lugar, los investigadores hacen ensayos para confirmar el color preferido por el bebé. Seguidamente, utilizan dos botes transparentes y hacen variar el número de piruletas de los dos colores. Así, en el experimento 1 meten el mismo número de piruletas del color preferido, variando el número de piruletas del otro color (por ejemplo, meten 12 piruletas rosas en cada bote, pero en el primero con 4 negras y en el segundo con 36, de modo que la proporción rosas/negras es 3/1 en el primer bote y 1/3 en el segundo). Luego, un investigador saca una piruleta de cada bote y la coloca en una taza, de tal manera que solo se ve el palo (no el color), y pide al bebé que elija una de las dos tazas. El 75% de los niños participantes buscan en la caja correspondiente a la taza con mayor proporción de piruletas de su color preferido. Los investigadores interpretan esta conducta como un indicio de razonamiento probabilístico y proporcional de estos bebés, que no se guían sólo por el número de piruletas del color preferido, sino por la proporción entre el total de piruletas. Los autores concluyen que la sensibilidad a la probabilidad y la capacidad de realizar inferencias probabilísticas están en el repertorio de los niños preverbales.

Sin embargo, Girotto et al. (2016) ponen en duda que los descubrimientos de Denison y Xu (2014) indiquen que a partir de los 10-13 meses se puedan realizar decisiones correctas en tareas probabilísticas simples. Para poner a prueba su hipótesis realizan diferentes experimentos con niños de 3 a 5 años. En el primero, presentan a los niños conjuntos de fichas de dos colores (por ejemplo, roja y negra), variando la composición de los conjuntos. Se extraía una ficha de cada conjunto y se ponía en una taza opaca un poco separada de los niños, que no podían ver el contenido, y se pedía a los niños elegir una taza que hiciese más probable obtener la ficha de color rojo. Los autores encuentran que los niños de 3 y 4 años fallan en estas tareas, aunque entendieron la lógica del experimento, ya que en los casos en que uno de los conjuntos de fichas corresponde al suceso seguro (todas las fichas rojas) y el otro el suceso imposible (todas las fichas negras), todos los niños eligieron la taza con la ficha roja (correcta); sin embargo, cuando la composición de los conjuntos contiene casos favorables y desfavorables, sólo los niños de 5 años toman decisiones correctas. Los niños menores prefieren el conjunto con más casos favorables, aunque con menor probabilidad.

Para explicar la diferencia con el estudio de Denison y Xu (2014), los autores indican que el fallo puede no deberse a la falta de capacidad de percibir el azar, sino por no lograr concebir la naturaleza aleatoria de los resultados sobre los que tienen que hacer una elección. Los niños pudieron creer que estos resultados fueron debidos a la acción del experimentador. Aunque los bebés estaban en la misma condición que los niños del estudio, se piensa que los bebés pueden no percibir intenciones de engañar en las acciones de los demás. Por otro lado, en tareas de comparación de probabilidades en urnas con composición proporcional, pero pocos casos favorables y posibles, HodnikČadež y Škrbec (2011) obtienen éxito en el 49,9% de los niños de 4-5 años, cifra que crece hasta alcanzar el 73,2% en niños de 7-8 años.

Kafoussi (2004) realiza un proceso de enseñanza con 15 niños de 5 años en contexto lúdico, utilizando material manipulativo, así como historias y marionetas. Presentada cada tarea, los niños hacen predicciones, se comprueban a través de la experimentación y se compara con las predicciones, discutiendo las posibles diferencias con los niños. Se centra tanto en la probabilidad de un suceso simple como en la comparación de probabilidades e incluso en la probabilidad condicional. Por ejemplo, para la probabilidad simple pide predecir el color más fácil de salir en una caja con bolas de colores o en una ruleta con áreas de varios colores; para comparar probabilidades emplea dos urnas con fichas de colores; y respecto a la probabilidad condicional, la autora pide a los niños adivinar qué color de globo saldrá de una caja donde ha metido 2 amarillos, 2 azules y 2 verdes, una vez que han sacado previamente uno de los globos y visto su color.

Antes del experimento de enseñanza las entrevistas muestran que muchos niños predicen sistemáticamente el color que más les gusta, sin tener en cuenta la experiencia y en todos los casos es difícil para los que dan una respuesta correcta explicar sus razones. A veces están influenciados por aspectos subjetivos, como la posición de las fichas en las urnas. También les resultan más sencillos los contextos con trompos o ruletas que con urnas y fichas. Al finalizar el experimento, 13 niños dan argumentos cuantitativos para justificar sus respuestas en probabilidad simple y comparación de probabilidades, y todos dan una respuesta correcta en la tarea de probabilidad condicionada. Es decir, aceptan que un suceso está influenciando por los resultados de un experimento previo en un muestreo sin reemplazamiento. Sus resultados indican que los niños de 5 años pueden progresar considerablemente en su razonamiento probabilístico cuando se les involucra en tareas probabilísticas simples, superando sus interpretaciones subjetivas y desarrollando un pensamiento cuantitativo incipiente.

De este conjunto de referencias se deduce que incluso bebés podrían aceptar la naturaleza aleatoria de algunos experimentos o juegos y elegir entre dos situaciones la que tiene más casos favorables o, si es evidente, la mayor proporción de casos favorables. A partir de los 3 años comienzan a comparar probabilidades, pero prefieren sistemáticamente el conjunto con más casos favorables. Sus estrategias van mejorando con la edad, y hacia los 6-7 años son capaces de usar los casos favorables y desfavorables cuando las proporciones a comparar son sencillas.

2.4.6. Enumeración de posibilidades y razonamiento combinatorio

Una de las competencias requeridas para comprender la probabilidad es ser capaz de imaginar todas las posibilidades en un experimento, relacionada con el razonamiento combinatorio. Piaget e Inhelder (1951) indican que los niños de Educación Infantil solo pueden enumerar algunas combinaciones o variaciones usando ensayo y error y repitiendo elementos en casos muy sencillos. Para ello proponen a los niños formar todos los pares diferentes a partir de fichas de dos o más colores (variaciones), formar todas las mezclas posibles de líquidos de dos o más colores (combinaciones) y ordenar de todos los modos posibles conjuntos pequeños de elementos (permutaciones). Fishbein (1975) defiende que es posible enseñar técnicas de enumeración al niño con ayuda de la instrucción y el recurso del diagrama en árbol, aunque en sus experimentos los niños tienen 8-10 años de edad.

English (1991) realiza un estudio con 50 niños de 4,5 a 9,8 años, después de familiarizarlos con material manipulativo. Se pide formar todas las posibles combinaciones de pares de prendas de muñecas (por ejemplo, pantalones y camisetas) según color de las prendas, comenzando con dos colores diferentes para cada prenda y subiendo a 3 colores de cada una; y según número de botones de las prendas (de 1 a 5 botones) todas con igual color. Para ello, los niños disponen de un número suficiente de muñecas y más prendas de las necesarias, de modo que sea posible observar si los niños repiten o no la misma combinación de elementos.

Los niños comienzan seleccionando al azar las prendas para vestir las muñecas, sin ninguna sistematicidad. Seguidamente, aparece un procedimiento de tanteo, donde se selecciona al azar, pero se comprueba si una pareja dada ya estaba formada, en cuyo caso se descarta. Más adelante se realiza un procedimiento cíclico donde, formada una pareja, se intercambia el color de las prendas (por ejemplo, si se tiene camiseta azul y pantalón rojo, se busca una camiseta roja con pantalón azul). Poco a poco las estrategias adquieren mayor sistematicidad hasta mantener un término constante (como la camiseta roja) que van combinando con el resto de elementos (todos los pantalones), para luego fijar otro término (la camiseta azul) y hacer lo mismo con el resto hasta formar todas las posibles parejas. La autora indica que los niños de 4 a 6 años utilizan siempre una misma estrategia, preferentemente el tanteo o selección al azar, aunque se les plantee una tarea diferente. Pero hacia los 7 años, se selecciona la estrategia en función de la tarea planteada y pueden resolver el problema mediante una estrategia sistemática con un número pequeño de elementos.

En su experimento, Kafoussi (2004) plantea cinco tareas sobre espacio muestral donde pide a los niños describir todos los posibles resultados de una situación aleatoria como, por ejemplo: “¿qué puede pasar si se lanza un dado de diferentes colores?” Inicialmente los niños son capaces de listar todas las posibilidades en experimentos simples (como lanzar el dado), pero no en experimentos compuestos (sacar dos bolas a la vez de una urna). Después de la enseñanza, 8 de los 15 niños son capaces también de enumerar todos los resultados en el experimento compuesto, aunque de forma no sistemática.

En resumen, la capacidad combinatoria tarda más en desarrollarse que las descritas en los apartados anteriores, principalmente, por su relación con el razonamiento multiplicativo, como indica Zapata-Cardona (2018). Aunque los niños pequeños pueden comenzar a realizar enumeraciones usando tanteo para resolver problemas muy simples, hacia los 6 años, mediante la instrucción, es cuando hay una mejora notable en las estrategias combinatorias de los niños (Zapata-Cardona, 2018).

2.4.7. Conclusiones

Aunque las investigaciones de Piaget e Inhelder (1951) sobre razonamiento probabilístico concluyeron que este no se desarrolla hasta la adolescencia, más recientemente se han descrito ideas sobre el lenguaje y conceptos de probabilidad en niños más pequeños. Como sugieren Kuzmak y Gelman (1986):

> Si bien algunos aspectos de la comprensión de los fenómenos aleatorios pueden estar presentes a una edad temprana, incluso los adultos carecen de comprensión de ciertos aspectos […] Por tanto, la secuencia de desarrollo que da como resultado una comprensión madura de los fenómenos aleatorios es larga, comienza en los años preescolares y se extiende hasta la edad adulta (p. 566).

Las investigaciones reseñadas indican que niños de 3-4 años comienzan a diferenciar situaciones deterministas y aleatorias y a los 5 años comienzan a comprender la imprevisibilidad de los resultados aleatorios. Aunque pueden mostrar ciertas ideas de equitatividad en esta misma edad, hasta los 7 años no logran describir todo el conjunto de posibilidades del espacio muestral y tienen dificultad para concebir una distribución aleatoria en un plano (Nikiforidou y Pange, 2010; Piaget e Inhelder, 1951). Esto se debe a que la capacidad combinatoria tiene un desarrollo posterior que comienza sobre los 6-7 años, donde los niños únicamente logran realizar enumeraciones con un número pequeño de objetos, y siempre mediante ensayo y error.

Entre los 4-5 años los niños empiezan a usar el lenguaje de probabilidad, que se va refinando progresivamente, y a partir de los 7-8 años logran expresar la mayor o menor probabilidad de un resultado, aunque tienen dificultad con los términos ‘imposible’ y ‘seguro’.

La capacidad de comparar la probabilidad de un mismo suceso en dos experimentos sencillos comienza con niños muy pequeños y pueden elegir el que tiene más casos favorables, sistemáticamente, desde los 3 años. Poco a poco el niño constata el papel de los casos desfavorables en la probabilidad y a los 6-7 años puede comparar probabilidades si no se requiere razonamiento proporcional.

Estas habilidades de los niños indican que es posible introducir algunas nociones de probabilidad desde muy corta edad. En la siguiente sección se presenta una parte del trabajo publicado sobre comparación de probabilidades siguiente:

Hernández-Solís, L. A., Gea, M.M., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Research on children's reasoning in comparing probabilities. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 39*(1), 1-24. https://www.seio.es/beio/research-on-childrens-reasoning-in-comparing-probabilities/

2.5. RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DE NIÑOS Y ADOLESCENTES

2.5.1. Introducción

El razonamiento proporcional es uno de los temas que ha recibido mayor atención en el currículo escolar en matemáticas, debido a sus conexiones con la geometría, álgebra y estadística. Behr et al. (1983) indican su interés práctico para resolver problemas de la vida real, su importancia psicológica al constituir uno de los componentes del desarrollo del pensamiento formal y su relevancia por constituir la base del razonamiento algebraico elemental. Además, muchos problemas de comprensión de las matemáticas esconden dificultades de razonamiento proporcional.

Por este motivo ha recibido un gran interés desde el punto de vista de la investigación didáctica, como se recoge en trabajos de síntesis tales como Behr et al. (1992), Ben-Chaim et al. (2012), Burgos y Godino (2019), Kieren (2020), Lamon (2007), Obando et al. (2014), Singer y Resnick (1992), Tourniaire y Pulos (1985) o Van Dooren et al. (2018). Este interés se explica porque el desarrollo del razonamiento proporcional ocurre en la transición de las operaciones concretas a las operaciones formales, cuando no solo se estructuran los conceptos sino las representaciones de los mismos (Lamon, 2007; Post et al., 1988). Behr et al. (1983) se refieren al fenómeno como *horizontal décalage,* por el cual, aunque un sujeto adquiera una estructura cognitiva dada, no siempre puede resolver todas las que corresponden a la misma tarea (y puede tardar varios años en hacerlo); lo que suele ocurrir con el razonamiento proporcional.

Sin embargo, no se cuenta con investigaciones realizadas en Costa Rica ni estudios comparados de resultados en estudiantes españoles. Para completar esta carencia, uno de los objetivos de este trabajo fue realizar un estudio comparado del razonamiento en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles de 11 a 16 años de edad. Ello permitirá a los profesores conocer mejor el razonamiento de estos estudiantes, para diseñar tareas en temas como probabilidad, estadística o magnitudes que requieran este razonamiento.

Son muchos los componentes de este razonamiento y abundantes las investigaciones sobre resolución de problemas relacionados. El principal interés en este resumen es la relación con el razonamiento probabilístico y, más específicamente, con los problemas de comparación de probabilidades.

2.5.2. El razonamiento proporcional y sus componentes

En primer lugar, se tratará de describir el razonamiento proporcional, que se puede entender como el tipo de razonamiento que permite establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y extenderlas a otro par de cantidades. Más concretamente:

> El razonamiento proporcional sustenta afirmaciones hechas sobre las relaciones estructurales entre cuatro cantidades (a, b, c, d) en un contexto que simultáneamente involucre la covariación de cantidades y la invariancia de razones o productos; podría consistir en la habilidad de identificar una relación multiplicativa entre dos cantidades y extenderla otro par de cantidades. (Lamon, 2007, p. 637).

En esta sección se realizará un análisis muy elemental, restringiéndose a los significados intuitivo y aritmético del razonamiento proporcional. El primero se caracteriza por el uso de argumentos de tipo cualitativo para resolver problemas comparación de proporciones. El segundo se caracteriza por la aplicación de procedimientos aritméticos para la resolución de los problemas. Para un estudio más detallado de los diferentes significados de la proporcionalidad y los niveles de algebrización implicados en los mismos, se puede consultar el trabajo de Burgos y Godino (2020).

Tradicionalmente, se han diferenciado cinco interpretaciones del número racional: operador, medida, razón, parte-todo y cociente (Lamon (2007, p. 635); de modo que la comprensión completa del número racional implica la de todas estas interpretaciones.

La *relación parte-todo* se produce al dividir en partes iguales un todo; su comprensión depende de la habilidad de dividir un conjunto (continuo o discreto) en partes iguales (Behr et al., 1983). En esta interpretación el símbolo a/b representa la relación entre dos cantidades: la parte de una determinada unidad, que es considerada como el todo. Es la interpretación que se suele introducir en la escuela, desde edades muy tempranas, muchas veces utilizando objetos geométricos para representar el todo, lo que requiere la comprensión del concepto de área. También se usa la recta numérica, sobre todo para representar fracciones mayores que la unidad (Tourniaire y Pulos, 1985).

El número racional a/b representa una *medida* cuando se comparan cantidades de una misma magnitud; se cuantifica dicha relación mediante una cantidad considerada unidad de medida, que actúa como referente en la comparación.

La *fracción como cociente* aparece al dividir un número natural por otro; es decir, para representar una cantidad de otra. Así, el símbolo a/b puede referirse a la operación de división. Permite introducir la clase de equivalencia de fracciones que representan el mismo número racional; esta formalidad no se utiliza hasta niveles más avanzados de estudio, puesto que relaciona los números racionales con estructuras algebraicas (Behr et al., 1983).

En la *razón* no se dispone de unidad de referencia, sino que se dividen dos cantidades entre sí (por ejemplo, en probabilidad, la razón de casos favorables y desfavorables). Una razón es la cuantificación de una relación multiplicativa calculada al dividir o multiplicar dos magnitudes (Ben Chaim et al., 2012). Introduce la idea de magnitud relativa, por tanto, es mejor pensar en ella como un índice comparativo que como un número (Behr et al., 1983). Permite expresar nuevas magnitudes, como la velocidad o aceleración, entre otras, que se denominan magnitudes intensivas (por contraste a las magnitudes extensivas, que no se definen mediante una razón).

De dicho concepto se deriva el de *proporción*, como la igualdad de dos razones, y su uso es muy potente para resolver problemas de comparación de magnitudes, como los propuestos por Noelting (1980a; 1980b). Los problemas proporcionales involucran situaciones de relaciones multiplicativas que forman dos razones iguales. Cuando a/b=c/d se dice que hay una relación de proporcionalidad directa entre las dos partes de la razón. En este caso, los cambios cuantitativos son uniformes; es decir, si se multiplica (o divide) una razón por un número, la otra también queda multiplicada (o dividida) por dicho número. En cambio, cuando $a \times b = c \times d$ hay una relación de proporcionalidad inversa entre las dos partes (Ben Chaim et al., 2012). En la proporcionalidad inversa, el cambio en una razón implica un cambio de la otra, pero en operación inversa; es decir, si se multiplica (o divide) una razón por un número, la otra queda dividida (o multiplicada) por el mismo número.

El número racional como *operador* se usa como función, por ejemplo, al calcular un porcentaje (Behr et al., 1992) y lleva implícitos diferentes modos de razonamiento proporcional:

- El razonamiento *up and down* implica una manera de razonar para resolver problemas cuando la unidad está implícita.
- La generación de unidades de referencia (*unitizing*) a partir de la relación multiplicativa entre las cantidades, que se utilizaría para comparar o contar otras razones.
- El *pensamiento relacional* que analiza la relación entre el número de partes de un todo y el tamaño de cada parte.
- La *idea de covariación,* pues dos cantidades están relacionadas y cambian conjuntamente de una cierta manera.

2.5.3. Algunas tareas típicas de evaluación del razonamiento proporcional

Tourniaire y Pulos (1985) realizan una síntesis de la investigación sobre razonamiento proporcional hasta esa fecha y dividen las tareas en dos tipos: comparación o valor faltante. En la tarea de valor faltante se da a los sujetos tres valores a, b y c donde se debe encontrar el valor x tal que $a/b = c/x$. En los problemas de comparación se dan cuatro valores, a, b, c y d y se trata de determinar si forman o no una proporción. Generalmente se pide, también, explicar el razonamiento seguido en los dos tipos de problemas. Por otro lado, también se puede distinguir entre tareas que piden al sujeto explicar cómo se alcanza la respuesta y las que no lo piden; estas últimas, pueden dar la idea de que el sujeto tiene razonamiento proporcional cuando no lo alcanza, pues a veces se puede obtener las soluciones a los problemas mediante razonamientos aditivos.

Tourniaire y Pulos (1985) analizan la dificultad de los problemas proporcionales en una serie de investigaciones previas en función de las variables y la forma de presentar la tarea. Clasifican estas tareas en tareas físicas (como predecir el tamaño de una sombra (Inhelder y Piaget, 1955), problemas de razones (como el problema de Mr. Tall y Mr. Short en Karplus et al., 1983) y problemas de mezclas (como el problema de la naranjada, usado por Noelting, 1980a, 1980b y Pérez Echeverría et al*.,* 1986). Estos dos últimos tipos suelen darse en forma de problemas verbales, con o sin una ilustración añadida. En los problemas de mezcla, los elementos de la razón forman un objeto nuevo (por ejemplo, limonada en la mezcla de limón y agua), lo que no ocurre en los problemas de razones.

En las tareas físicas, es necesario algún principio físico, además de conocer la proporción. Por ejemplo, en la tarea de proyección de sombras utilizada por Inhelder y Piaget (1958) se pide al niño que dibuje la forma que tomará la sombra de un objeto colocado con diferentes inclinaciones entre una lámpara y una pantalla vertical. Estas tareas se han criticado pues el estudiante puede fallar si no conoce el principio físico, aunque domine la proporcionalidad.

En los problemas de razones se comparan las proporciones de objetos diferentes, por ejemplo, kilómetros por hora y pueden tener diferentes unidades de medida. Un ejemplo de tareas de razones es el problema de Mr. Tall y Mr. Short. Un posible enunciado es como sigue:

Se ha medido la altura de Mr. Short con botones y su altura es de 4 botones (se da un dibujo de Mr. Short). La altura de Mr. Tall es 6 botones.

1. Mide ahora la altura de Mr. Short usando clips. Su altura es --- clips.
2. ¿Cuánto medirá Mr. Tall?
3. ¿Cómo lo sabes?

En los problemas de mezcla, la unidad de medida es la misma, como el problema de la naranjada. Puesto que en el problema de comparar probabilidades la unidad de medida es la misma y no es necesario conocer ningún principio físico, este trabajo se centra, en particular, en los problemas de mezcla. Karplus et al. (1983) sugieren que resultan más difíciles que los anteriores, por tener que comparar dentro de un continuo. Un posible enunciado es el siguiente:

Mi madre ha preparado dos jarras de limonada. En la jarra A ha mezclado dos vasos de agua y un vaso de zumo de limón. En la jarra B ha mezclado tres vasos de agua y uno de zumo de limón. ¿En cuál de las dos jarras el sabor a limón es más intenso?

Tourniaire y Pulos (1985) analizan las variables que afectan a la dificultad de los problemas de proporcionalidad, que se dividen en dos tipos:

- Variables de la tarea: a) si la razón es un número entero, el problema será más sencillo; b) el orden donde se sitúa la incógnita en los problemas de razón respecto a los otros tres términos; c) tamaño de los números a comparar; la presencia de razones diferentes en la comparación; d) por otro lado, los problemas de mezcla son más difíciles que otros problemas de proporcionalidad; e) además, si el contenido es discreto es más sencillo que si es continuo.
- Variables del sujeto: se ha encontrado que influye la edad de los niños y género, así como la capacidad del mismo y su desarrollo formal.

2.5.4. La comparación de razones

La investigación sobre comparación de razones se desarrolló en relación con las réplicas a los experimentos de Piaget sobre probabilidad, ya que una comparación de probabilidades implica una comparación de razones. La pregunta de interés fue si se podía reducir la comparación de probabilidades a comparación de razones (Pérez Echeverría et al.,1986). Una preocupación de las investigaciones sobre el razonamiento probabilístico de los niños ha sido analizar si existe alguna diferencia con el razonamiento proporcional o, por el contrario, una vez adquirido éste, los niños automáticamente pueden resolver con éxito los problemas de comparación de probabilidades. Por otro lado, también ha habido un interés en determinar el modo en que los niños resuelven estos problemas y los factores que afectan la dificultad de las tareas.

Diversos autores organizan experimentos en los que tratan de superar algunas críticas a los trabajos de Piaget, por ejemplo, el centrarse sólo en respuestas verbales o no tener en cuenta las preferencias de los niños. Se utilizaron contextos como bolas en urnas, donde se observó que algunos niños tienen respuestas correctas sólo comparando los casos favorables (dependiendo del problema).

Así, Hoeman y Ross (1971) usaron ruletas coloreadas preguntando en cual de dos la superficie de un color era mayor, y posteriormente, cuál daba más probabilidad de obtener un cierto color, obteniendo resultados similares en las dos tareas, por lo cual concluyeron que se puede resolver problemas de probabilidad sin un razonamiento proporcional completo.

2.5.4.1. *Estrategias de resolución*

Se pueden comparar dos tipos de razones, internas (o escalares) y externas (o funcionales). Las primeras comparan cantidades de la misma naturaleza (niños por niñas) y las segundas de diferente naturaleza (por ejemplo, km por hora). Varios estudios han identificado las siguientes estrategias utilizadas en la comparación de proporciones (Tourniaire y Pulos, 1985):

- *Estrategias correctas:* a) estrategias multiplicativas, donde los términos de una razón se relacionan multiplicativamente con los de la otra a la cual se extienden. Generalmente, la relación se construye entre el numerador y denominador de cada razón o entre los numeradores y denominadores de las dos razones. Otros métodos denominados *building up* por Hart (1981) consisten en establecer una relación dentro de una razón y extenderla a la segunda por adición. Permiten resolver algunos problemas sencillos.

- *Estrategias incorrectas:* Un error frecuente es usar solo una parte de los datos, por ejemplo, comparar solo los numeradores de las fracciones. Una segunda estrategia errónea es realizar comparaciones aditivas, restando los elementos de cada fracción. En otros casos se usa una unidad arbitraria de comparación.

Por su parte, Corral (2014) describe las siguientes estrategias en situaciones de proporcionalidad al comparar probabilidades:

- *Estrategias correctas*: Hallar el porcentaje de casos favorables en cada urna; comparar la probabilidad en las dos urnas; comparar las razones de casos favorables al total en las dos urnas, pasando al mismo denominador; comparar la razón de casos favorables y desfavorables en cada urna.
- *Estrategias incorrectas*: Confundir la probabilidad con la proporción de casos favorables respecto a los casos desfavorables; comparar la diferencia entre casos favorables y desfavorables.

Por otro lado, se ha observado que aunque un estudiante sea capaz de usar una estrategia multiplicativa en un problema complejo, suele volver a utilizar estrategias más simples (comparar solo algunos términos) cuando no es capaz de resolver un problema. Corral (2014) indica que los siguientes conocimientos son necesarios para llegar a una estrategia correcta multiplicativa:

- Distinguir entre cantidad y proporción.
- Saber expresar una proporción como fracción.
- Comprender la idea de fracciones equivalentes y saber simplificar fracciones.
- Saber reducir fracciones a común denominador y comprender que cuando se comparan fracciones resultantes es como si se compararan las primeras.
- Saber dividir fracciones irreducibles.

2.5.4.2. *Desarrollo evolutivo*

Varios autores trataron de definir etapas de desarrollo del razonamiento proporcional. La mayor parte de las investigaciones indican que antes de acceder a la cuantificación de la relación proporcional hay una etapa cualitativa, donde se concibe un conjunto de elementos, del que se «aísla» un subconjunto que se relaciona con el conjunto total (Corral, 2014). Entre estos trabajos encontramos los de Inhelder y Piaget (1958) y Piaget et al. (1968), que sugieren que las primeras estrategias de comparación de fracciones son aditivas pues los niños creen que la equivalencia implica la igualdad de diferencia entre los términos. Seguidamente, aparece un periodo pre-proporcional, donde se usan comparaciones aditivas sin suponer que las diferencias deban ser constantes, sino piensan que las diferencias cambian en función del tamaño de los números. Piaget indica que la proporcionalidad supone la coordinación de funciones, pero la proporcionalidad implica la coordinación de operaciones. La principal diferencia entre funciones y operaciones es que las primeras no son reversibles.

Sigue un periodo de proporciones lógicas, donde se comprende la relación ente los cuatro términos de una proporción, y así $a/b = c/d$ implica que al aumentar a, se debe disminuir d. El razonamiento proporcional se desarrolla desde una estrategia compensatoria global, usualmente aditiva, a una estrategia proporcional organizada sin generalizar a todos los casos hasta finalmente llegar a una regla.

En resumen, el periodo hasta alcanzar las estrategias multiplicativas es lento y complejo, por lo que los profesores deben comprender que no se alcanza en un solo curso. Comparar razones es un método avanzado y la capacidad de escoger estrategias más sencillas que den soluciones correctas no se alcanza hasta adquirido el razonamiento proporcional.

2.5.5. Investigaciones de Noelting

Un trabajo que ha tenido una influencia especial en la investigación posterior sobre probabilidad es el de Noelting (1980a, 1980b), aunque el autor estaba simplemente interesado en el razonamiento proporcional. Asociado al campo de la probabilidad, Piaget e Inhelder (1951) estudiaron el concepto de razón y proporción, estableciendo tres estadios en el desarrollo de su razonamiento en problemas de comparación de probabilidades.

Adoptando las ideas de Piaget, surge el trabajo de Noelting (1980a, 1980b), el cual no solo amplía las categorías de problemas de comparación de razones consideradas por Piaget e Inhelder (1951), sino que también agrega más niveles para las etapas establecidas por Piaget e Inhelder. Más concretamente, el autor busca extender las etapas descritas por Piaget para la comparación de probabilidades (que involucra un problema de comparación de razones) al caso general.

En su trabajo planteó un problema que consiste en la mezcla de cantidades de dos componentes: agua y zumo de naranja. Diseñó una prueba con 23 ítems a los que posteriormente agregó otros dos y que resultaron de algunos experimentos previos. Cada ítem consistió en la comparación del sabor relativo a naranja de dos mezclas, compuestas por zumo de naranja y agua. Cada mezcla se expresó como un par ordenado (a_1,b_1) y (a_2,b_2), donde el primer término corresponde al número de vasos de zumo de naranja (a) y el segundo al número de vasos de agua (b). A partir de la comparación de las dos mezclas se representan los dos tipos de elementos implicados en las fracciones a comparar y se describen las estrategias de los niños a diferentes edades.

Esta prueba se aplicó a una muestra de 321 sujetos, de 6 a 16 años de edad, tomando un grupo matemáticamente avanzado por nivel de escuelas primarias y secundarias del mismo nivel socioeconómico en la ciudad de Quebec. La prueba se aplicó en forma grupal e individual. En el procedimiento grupal, cada estudiante está en su escritorio con un lápiz y una hoja de respuestas. El investigador coloca dos recipientes con las letras A y B y al lado, vasitos de zumo de naranja y de agua. Luego de preguntar si todos los niños están de acuerdo, les pide completen el ítem correspondiente en la hoja de respuestas; así sucesivamente hasta completar la prueba. El procedimiento individual fue el mismo, pero solo se aplicó a 18 niños por edad entre 4 y 9 años.

A partir de las respuestas a los problemas involucrados y las estrategias utilizadas para resolverlos se asignaron niveles operativos a cada etapa, siguiendo la cronología de desarrollo de Piaget. Noelting establece que las estrategias que implicaban comparaciones entre términos eran de nivel *Preoperacional* o *Intuitivo*. Las estrategias que implicaban la multiplicación o división conjunta de términos y la obtención de clases de equivalencia se consideraron propias de las *Operaciones concretas*, mientras que las estrategias en las que las comparaciones se realizan después de reconstruir mentalmente equivalencias anteriores se asignaron al periodo de *Operaciones formales*. Posteriormente, mediante una prueba con verdadero jugo de naranja, se encontró una etapa *Simbólica*, donde aún no se construyen colecciones y números, y solo se comparan elementos.

Noelting no solo encontró constante el orden de las etapas sucesivas, sino que obtuvo una justificación para el paso de una etapa a la otra, pues en cada una solo ciertos problemas son significativos y conducen a un cambio en el esquema aplicado para resolverlos. En la Tabla 2.5.1 se resumen algunas de las características del estudio de Noelting (1980a, 1980b), de acuerdo a la edad y niveles en problemas de comparación de fracciones.

Tabla 2.5.1. Etapas y niveles de problemas de comparación de fracciones según Noelting (1980a, 1980b)

Etapas/Niveles	Edad aproximada (en años)*	Ejemplo (a_1, b_1) vs (a_2, b_2)	Características
Simbólica	2,0	(3,0) vs (0,3)	Se pueden resolver problemas que solo requieren diferenciar los elementos.
Intuitivo inferior (IA)	3,6	(1,4) vs (2,4)	Se comparan los primeros términos “a” de las razones, sin considerar los segundos términos “b”.
Intuitivo medio (IB)	6,4	(1,5) vs (1,3)	Cuando los primeros términos son iguales, se comparan los segundos términos “b” de las razones, comprendiendo que “b” es el recíproco de “a”.
Intuitivo superior (IC)	7,0	(1,5) vs (5,1)	Se construye la razón como un todo, considerando sus relaciones internas. En la comparación de fracciones, se observa que la relación de desigualdad es inversa en cada fracción.
Operacional concreto inferior (IIA)	8,1	(2,2) vs (3,3)	Se compara el valor de una fracción (a/b) con la otra, a partir de una operación multiplicativa aplicada a ambas fracciones. Con ello se introduce la idea de equivalencia entre las fracciones para el caso de la unidad.
Operacional concreto superior (IIB)	10,5	(2,1) vs (4,2)	Se establece la clase de equivalencia de fracciones a cualquier razón diferente de la unidad.
Operacional formal inferior (IIIA)	12,2	(2,1) vs (4,3)	Cuando dos de los cuatro términos a comparar son múltiplos se establecen relaciones de su cociente con los otros dos términos. Por ejemplo, como 4 es el doble que 2 y 3 es más del doble que 1, entonces (2,1) > (4,3).
Operacional formal Superior (IIIB)	15,1	(2,3) vs (3,7)	Se logra comparar cualquier tipo de fracción.

*50% de los sujetos

Noelting encontró que el paso del nivel IC al IIA implica la diferenciación y combinación no solo de la razón entre los términos dentro de una misma fracción (por ejemplo: a_1 y b_1) sino también de la razón entre los términos de una fracción y los de otra (por ejemplo: a_1 y a_2). Para comparar razones dentro de cada fracción se utilizan los dos cocientes (a_1:b_1 y a_2:b_2); para comparar razones que correspondan a dos fracciones se utilizan los términos de una fracción dividiendo por los de otra (a_1:a_2 y b_1:b_2). Para tener en cuenta esta distinción, define dos estrategias generales en cada etapa: estrategias “entre”, cuando se comparan los términos de una fracción con los de otra y estrategias “intro” si se comparan los términos de cada fracción para establecer una razón y luego esta razón se compara con la razón correspondiente a la fracción restante.

En la Tabla 2.5.2 se resumen las principales estrategias empleadas en la resolución de problemas de comparación de fracciones, según los niveles de razonamiento proporcional establecidos por Noelting (1980a, 1980b).

Tabla 2.5.2. Estrategias de resolución de problemas en cada etapa según Noelting (1980a, 1980b)

Etapas/Niveles	Ejemplo (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)	Estrategias "Entre"	Estrategias "Intro"
Simbólico	(3,0) vs (0,3)	Comparación cualitativa de elementos	
IA. Intuitivo inferior	(2,4) vs (1,4)	Si $a_1 > a_2 \rightarrow (a_1,b_1)>(a_2,b_2)$.	
IB. Intuitivo medio	(1,5) vs (1,3)	Si $a_1=a_2$ y $b_1 > b_2 \rightarrow (a_1,b_1)<(a_2,b_2)$.	
IC. Intuitivo superior	(1,5) vs (5,1)		Si $a_1< a_2$ y $b_1>b_2 \rightarrow (a_1,b_1)<(a_2,b_2)$
IIA. Operacional concreto inferior	(2,2) va (3,3)	Si $a_1=b_1$ y $a_2=b_2 \rightarrow (a_1,b_1)=(a_2,b_2)$	Si $a_1/b_1=a_2/b_2=1/1 \rightarrow (a_1,b_1)=(a_2,b_2)$
IIB. Operacional concreto superior	(2,1) vs (4,2)	Si $m/n(a_1,b_1)=(a_2,b_2) \rightarrow (a_1, b_1)=(a_2,b_2)$.	Si $a_1/b_1=a_2/b_2 \rightarrow (a_1,b_1)=(a_2,b_2)$.
IIIA. Operacional formal inferior	(2,1) vs (4,3)	Si $mb_1=b_2$, y $ma_1>a_2 \rightarrow (a_1,b_1)>(a_2,b_2)$	Si $a_1/b_1 = 2$ y $a_2/b_2=1+1/ b_2 \rightarrow (a_1,b_1)>(a_2,b_2)$ Si $a_1/b_1 = 2$ y $a_2/b_2=1+c/b_2$ con $c<b_2 \rightarrow (a_1,b_1)>(a_2,b_2)$ Si $a_1/b_1=1+1/b_1$ y $a_2/b_2=1+1/ b_2$ con $b_2> b_1 \rightarrow (a_1,b_1)>(a_2,b_2)$
IIIB. Operacional formal superior	(2,3) vs (3,7)	$a_1+b_1=g$ $a_2+b_2=h$ Si $(ga_2,gh) < (ha_1,hg) \rightarrow (a_1,b_1)>(a_2,b_2)$	$100(a_1 \div b_1)= x\%$ $100(a_2 \div b_2)= y\%$ Si $x\%>y\% \rightarrow (a_1,b_1)>(a_2,b_2)$

El autor indica que estas etapas corresponden a nuevos razonamientos que involucran nuevas estrategias puestas en práctica por los sujetos para la resolución de problemas más complejos. Señala que hay dos periodos en el desarrollo del razonamiento proporcional: el primero caracterizado por estrategias que se basan en comparar en valor absoluto términos, como en los niveles IA, IB e IC, y el segundo donde las estrategias conducen a la construcción de un par ordenado (etapa IIA) o pares ordenados (niveles IIA, IIB, IIIA y IIIB). Por otro lado, el autor sugiere que la estructura de un problema de comparación de proporciones incluye cuatro relaciones, dos razones "entre" (primeros o segundos términos) y dos razones "intro" (primer y segundo términos de cada razón), lo que permite determinar la estructura común de los ítems de cada etapa.

Además, tanto por la estructura del ítem como de la estrategia de resolución, se puede determinar que los niveles están integrados entre sí (cada nivel es una forma particular del siguiente). Así, las características de las estrategias en cada nivel son las siguientes:

- *Nivel 0: Simbólico*, está formado por problemas que se pueden resolver simplemente diferenciando los dos elementos en cada conjunto a comparar.
- *Nivel IA: Intuitivo inferior*, la estrategia que se aplica es la comparación de los primeros términos (a_1 y a_2) sin tener en cuenta los segundos (b_1 y b_2).
- *Nivel IB: Intuitivo medio*, con estructura $\{a_1= a_2; b_1> b_2\}$, por ejemplo, (1,5) vs (1,3). Primero se comparan los primeros términos y al encontrarlos iguales ($a_1=a_2$), se comparan los segundos términos (b_1 y b_2), que se perciben como recíprocos de los primeros. Así, la estrategia del nivel IA se incluye en la del IB.
- *Nivel IC: Intuitivo superior*, con estructura $\{a_1<a_2; b_1>b_2\}$; por ejemplo, (1,5) vs (5,1), donde es necesario utilizar relaciones "intro" para llegar a una conclusión correcta. Se constituye la razón y se comparan las dos relaciones internas que se perciben como complementarias. El sujeto primeramente utiliza relaciones "entre", pero no le dan la solución, aunque esto indica que los niveles anteriores están incluidos en este.
- *Nivel IIA: Operacional concreta inferior*, con estructura $\{a_1=b_1; a_2=b_2\}$, por ejemplo, (2,2) vs (3,3), que se caracteriza por la clase de equivalencia de la unidad. En el nivel IIA se integra la relación interna entre los términos de la fracción, las cuatro relaciones entre términos deben tenerse en cuenta y surge la necesidad de emplear la multiplicación. Por lo tanto, las comparaciones a partir del nivel IIA no se pueden hacer solo entre los términos, sino que se ha de operar con ellos. Aunque la estrategia del nivel IC se incluye en la del estadio IIA, esta última parece ser el cierre de un período y el comienzo de uno nuevo.
- *Nivel IIB: Operacional concreta superior*, con estructura $\{a_1/b_1=a_2/b_2\}$, por ejemplo, (2,1) vs (4,2) o clase de equivalencia de la fracción, en general. Siendo el cociente (1, 1) un caso especial del cociente general (k, k), la estrategia del nivel IIA se incluye en la del IIB. La diferencia al pasar del IIA al IIB es la independencia del primer y segundo término dentro de la clase de equivalencia.
- *Nivel IIIA: Operacional formal inferior*, con estructura $\{mb_1=b_2,\ ma_1>a_2\}$, por ejemplo, (2,1) vs (4,3). Aquí surge un salto hacia una estrategia completamente nueva para resolver el problema, que implica, por primera vez, la combinación de dos sistemas operativos: multiplicación y suma. El sujeto primero procede a construir, a través de la multiplicación, una razón equivalente basada en la relación múltiple encontrada, luego compara las dos razones con los mismos primeros

términos a través de una operación aditiva. Siguiendo esto, la estrategia del nivel IIB podría ser un caso particular de la del nivel IIIA (a un nivel primitivo).

- *Nivel IIIB: Operacional formal superior*, donde se comparan fracciones cualesquiera, por ejemplo, ya para el nivel IIIB, en la estructura no se encuentra una relación múltiple entre términos; por lo tanto, la estrategia implica un doble proceso de "co-multiplicación", generando clases de equivalencia a partir de cada razón, con una comparación *aditiva* adicional de los primeros términos siguientes. Aquí se establece el algoritmo de suma de razones y fracciones como etapa final del período. Como la estructura del nivel IIIA todavía posee una relación múltiple entre términos, IIIA es un caso especial de la estructura del nivel IIIB y, por lo tanto, se incluye en esta estructura general final del razonamiento de proporciones.

Por último, Noelting (1980a, 1980b) concluye que los cambios en el desarrollo del razonamiento proporcional son de dos tipos: (i) cambios cualitativos o estructurales entre etapas, correspondientes al inicio de nuevas estrategias, y que requieren una "comprensión" previa de los nuevos datos a través de la reestructuración de la estrategia anterior, y (ii) cambios cuantitativos dentro de una etapa, lo que lleva a una mayor consolidación de una estrategia a medida que se "ejercita" o se aplica a cantidades variables de datos.

2.5.6. Otros antecedentes

Son muchos los trabajos de evaluación de diferentes componentes del razonamiento proporcional de los estudiantes. Estos trabajos utilizan diferentes tareas y edades; por ejemplo, la comparación de fracciones (Gómez y Dartnel, 2019) por 502 niños de 6º a 8º de EGB en Chile. Los autores señalan el sesgo del número natural, consistente en considerar mayor la fracción con números mayores (ver también González-Forte et al., 2022).

Algunos autores indican que los niños pueden razonar proporcionalmente antes del periodo de operaciones formales (He et al., 2018). Así, Vanluydt et al. (2022a) proponen, a 315 niños de 5 a 8 años, problemas proporcionales de reparto equitativo, observando un inicio de este razonamiento en los niños de 8 años. También indica que algunos niños tienen una preferencia por relaciones aditivas y otros por multiplicativas, mientras otros son inconsistentes. Los que muestran preferencia por uno de estos tipos de relaciones tienen más éxito en problemas elementales de razonamiento proporcional (Vanluydt et al., 2022b).

Boyer y Levine (2015) utilizaron problemas de mezcla similares a los de este estudio con niños de 8 y 10 años que tuvieron mucha dificultad porque las unidades utilizadas (vasos de zumo y de agua) son discretas, y mostraron tendencia a comparar las cantidades aditivamente y no proporcionalmente. He et al. (2018) también emplean problemas de mezclas con 30 niños de 5 y 6 años, representando las mezclas mediante rectángulos coloreados de la misma base y diferente altura. Concluyeron que algunos de los niños eran capaces de reconocer la proporcionalidad cuando las fracciones a comparar eran equivalentes.

Otros trabajos sobre razonamiento proporcional con cuestionarios más generales, no centrados en los problemas de comparación de fracciones, son los de Butto et al. (2021) con 109 estudiantes de 4º y 5º grados de primaria y 1º grado de secundaria; y el de Fernández y Llinares (2011) con 755 estudiantes con problemas aditivos y proporcionales, estos últimos con cantidades discretas o continuas.

El estudio más relacionado con este trabajo es el de Pérez Echeverría et al. (1986), quienes propusieron 10 problemas de comparación de proporciones, similares a los que utilizamos en este trabajo, a 20 estudiantes de 12 años y 20 estudiantes de 17-18 años, que clasificaron en cuatro niveles de dificultad, de acuerdo a la estrategia de resolución necesaria:

- *Nivel 1:* Problemas donde el numerador o denominador de cada razón es igual y se puede resolver sin formar las razones.
- *Nivel 2:* Hay proporcionalidad entre los numeradores y denominadores de cada razón o entre los dos numeradores y los dos denominadores, es decir, se trabaja con fracciones equivalentes. Se resuelven estableciendo una correspondencia entre dos términos del problema y comparándola con los otros dos términos.
- *Nivel 3:* Problemas que presentan proporcionalidad sólo entre los numeradores o entre los denominadores de las razones. También se resuelven por correspondencia.
- *Nivel 4:* No existe relación alguna de proporcionalidad entre los cuatro miembros. Requieren comparación de fracciones.

Sólo el 12% de los sujetos de su muestra usaron la comparación multiplicativa en las tareas. Además, sujetos que habían usado una estrategia proporcional para resolver problemas de nivel 2 o 3 volvían a las estrategias aditivas o de comparación de cantidades absolutas para resolver los de nivel 4. También hubo mayor uso de estrategias de correspondencia en los estudiantes de más edad (50%).

Los trabajos realizados con niños españoles han utilizado únicamente muestras pequeñas y no todas las edades en que se supone que se lleva a cabo el desarrollo evolutivo del concepto y muchos han utilizado cuestionarios centrados en tareas diferentes a la comparación de razones. Para complementar estos trabajos, analizamos el razonamiento proporcional en este tipo de tareas de niños españoles desde los 11 a los 16 años y los comparamos con otros niños costarricenses de la misma edad.

2.6. DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO SOBRE COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES

En esta sección se presenta una síntesis de los principales resultados de investigaciones sobre la capacidad de los niños para comparar probabilidades. Se concretan algunos resultados de investigaciones que se describieron en la Sección 2.4.5, con el interés de determinar lo que son capaces de realizar los estudiantes en sus diferentes etapas de desarrollo y los factores que influyen en dichas etapas, que serán fundamento para la parte empírica del presente estudio. Se inicia describiendo las etapas de desarrollo determinadas por Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975), por tratarse de investigaciones que influenciaron estudios posteriores sobre el tema (Jones y Thornton, 2005), y se continua puntualizando estudios sobre la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades, estrategias más destacadas, así como otros temas tratados en la parte empírica de la tesis.

2.6.1. Etapas de desarrollo en la comparación de probabilidades según Piaget e Inhelder

El razonamiento de los niños en la comparación de probabilidades se analiza por Piaget e Inhelder (1951) mediante la experimentación con fichas de color blanco, algunas con una cruz en su reverso. En la Sección 2.3.1 se describen los supuestos generales de la teoría de Piaget, que se aplican en este contexto particular y permiten a los autores organizar las etapas de desarrollo en tres niveles (preoperacional, operaciones concretas y abstractas), algunos subdivididos en varias subetapas.

Sus experiencias consistieron en dividir las fichas en dos grupos con composiciones distintas; sea la notación (a, b), donde "a" representaría el número de fichas con una cruz en una de sus caras (casos favorables) y el segundo número "b" el número de fichas sin cruz (casos desfavorables). Se pedía a los niños decidir en cuál de las dos agrupaciones (cuya composición se mostraba inicialmente) sería más fácil obtener una cruz al tomar una de las fichas con los ojos cerrados.

Se propuso a los niños tareas de diferente dificultad, teniendo en cuenta la composición (a_1,b_1) y (a_2,b_2) de los dos grupos de fichas que debían comparar:

- *Doble imposibilidad:* cuando ninguno de los dos grupos tiene cruces, $a_1= a_2=0$.
- *Doble certeza:* todas las fichas tienen cruces, $b_1= b_2=0$.
- *Certeza-imposibilidad:* cuando $a_1=b_2=0$ o cuando $b_1=a_2=0$. Es decir, en un grupo es seguro obtener una cruz y en el otro imposible.
- *Posibilidad-certeza* o *Posibilidad-imposibilidad:* cuando en uno de los casos es seguro obtener la cruz o imposible que el resultado sea cruz.
- *Composiciones idénticas en las dos urnas:* $a_1=a_2$ y $b_1=b_2$. Por tanto, se trata de equiprobabilidad.
- *Proporcionalidad de las composiciones:* $a_1= k \cdot a_2$ y $b_1= k \cdot b_2$, con $k \in N$. Sigue habiendo equiprobabilidad, pero es menos evidente y requiere un inicio de razonamiento proporcional por parte de los niños.
- *Desigualdad de casos favorables e igualdad de posibles:* $a_1 \neq a_2$ y $a_1+b_1 = a_2+b_2$.
- *Igualdad de casos favorables y desigualdad de posibles:* $a_1=a_2$ y $b_1 \neq b_2$.
- *Desigualdad, tanto de casos favorables como de posibles:* $a_1 \neq a_2$ y $b_1 \neq b_2$.

Las conclusiones obtenidas se describen a continuación, organizadas según las etapas I (Pre-operacional), II (operaciones concretas) y III (operaciones abstractas), que los autores dividen en varias subetapas.

El estadio I se caracteriza porque solo se opera con una de las variables en cada agrupación a comparar. Piaget e Inhelder (1951) concluyeron que en el estadio IA los niños dan una respuesta aleatoria al problema. Sin embargo, a pesar de la ausencia de capacidad de comparación lógico-aritmética, pueden encontrar la respuesta correcta en composiciones como (0,2) y (0,3); (0,3) y (2,0); (0,3) y (1,3); o bien (3,0) y (2,0), donde al menos una de las agrupaciones presenta imposibilidad o certeza. Además, el niño solo considera los casos favorables, sin tomar en cuenta el total de casos posibles.

En el estadio IB se resuelven situaciones de comparación de probabilidades que dependen de una sola variable (consideran solo dos de los cuatro datos implicados), pero sus valoraciones siguen siendo intuitivas. De forma progresiva, desarrollan la comprensión de que el número de casos favorables está asociado con la probabilidad. Algunas veces, el sujeto razona a partir del término constante en las dos colecciones, por ejemplo (2,3) y (1,3) y no considera el variable, lo que le conduce a errores sistemáticos.

La etapa II se caracteriza por el uso de los cuatro términos, pero en forma aditiva, sin tener en cuenta las proporciones. En el estadio IIA los conceptos de fracción y proporción aún no están presentes. Sin embargo, el niño es capaz de comprender las primeras operaciones lógico-aritméticas, y esto le ayuda a tener un mayor éxito en problemas de una variable, realizando comparaciones aditivas, pero falla en los problemas que requieren comparar dos cocientes. Ya en el estadio IIB, el niño resuelve problemas sencillos de proporcionalidad de forma empírica (comparaciones aditivas entre los casos favorables y desfavorables, es decir, elige el grupo con mayor diferencia entre casos favorables y desfavorables), aunque estas estrategias no son válidas en problemas más complejos.

Finalmente, Piaget e Inhelder (1951) establecen que hasta alcanzar el tercer estadio de operaciones formales (III) el niño no construye las nociones probabilísticas fundamentales, y logra incluir las partes en el todo. Esto le permite cuantificar probabilidades mediante un conjunto de relaciones multiplicativas (cálculo de fracciones o correspondencia de número de casos favorables y desfavorables en los dos grupos).

2.6.2. Etapas de desarrollo según Fischbein

Por otro lado, Fischbein (1975) también propuso un nuevo modelo de etapas de desarrollo de razonamiento probabilístico que tiene en cuenta la intuición del azar, la comparación de probabilidades, operaciones combinatorias y el efecto de la instrucción y que se resume en la Tabla 2.6.1, adaptada de una similar presentada en Jones y Thornton (2005, p.73).

Tabla 2.6.1. Características del razonamiento probabilístico según Fischbein (1975) en diferentes etapas de desarrollo

Etapa de desarrollo	Intuición del azar	Comparación de posibilidades	Operaciones combinatorias	Efecto de la instrucción
I. Preescolar (hasta 7 años)	Algún sentido de la imprevisibilidad. Adapta las predicciones en respuesta a la frecuencia de resultados.	A veces basa la comparación en la estimación de posibilidades.	Comienza a enumerar con materiales concretos.	La instrucción tiene un efecto mínimo
II. Operaciones concretas (7 a 12)	El azar se convierte en una estructura conceptual organizada. Forma creencias erróneas.	Hace comparaciones intuitivas de probabilidades en situaciones elementales.	Establece procedimientos simples de enumeración a través de ensayo y error.	Es sensible a la instrucción en estrategias de comparación. Razonamiento proporcional incompleto.
III. Operaciones formales (a partir de 12)	El desarrollo de un razonamiento más abstracto conduce a un concepto más completo de probabilidad. Aún puede buscar dependencias causales. Sensible al refuerzo en la predicción.	La comparación de probabilidades se vuelve más sofisticada.	Los procedimientos sistemáticos aún no están completamente desarrollados.	Receptivo a la instrucción que conduce a la construcción de probabilidades.

Las principales diferencias con el modelo de Piaget e Inhelder (1951) es que Fischbein considera el efecto de la instrucción a partir de los 7-8 años, pues Piaget suponía que el niño de estas edades no tenía capacidad para concebir el azar y la probabilidad. Fischbein, por el contrario, realizó experimentos de enseñanza con materiales concretos y mostró que esta posibilidad existe y el niño es capaz de aprender con una instrucción sistemática.

En varios experimentos, Fischbein continúa sus estudios sobre la intuición probabilística. Fischbein et al. (1967) utilizan representaciones gráficas de canales por los cuales se deja caer una bola, preguntando a los niños en cual de varios posibles puntos de salida habrá mayor posibilidad de que caiga la bola. Encuentran peores resultados en los niños de 10-12 años que en los de menor edad, pues buscan explicaciones de tipo mecánico y principios físicos para asignar probabilidades.

2.6.3. Investigaciones posteriores

Otros autores continuaron las investigaciones de Piaget e Inhelder para analizar el desarrollo del niño y determinar la forma en que el concepto de probabilidad se adquiere progresivamente de acuerdo a su avance cognitivo.

Yost et al. (1962) se interesaron por analizar el razonamiento probabilístico en los niños de preescolar, cambiando ligeramente el método experimental de Piaget, pues les dieron urnas transparentes con fichas de dos colores en diferente composición. Sugieren que a partir de los 4 años los niños tienen intuiciones sobre la probabilidad y esta intuición mejora con la edad. Goldberg (1966) repite la investigación anterior y muestra que los niños tienen más dificultad cuando el número de casos favorables en las dos urnas es igual y el número de casos desfavorables es diferente, que en el caso contrario. Davies (1965) repite el estudio de Yost et al. (1962) con niños de 3 a 9 años, confirmando que hay un progreso en el razonamiento con la edad.

Uno de los principales estudios fue el de Green (1982), quien pasó un cuestionario a una gran muestra (más de 3000 niños ingleses entre 11 y 16 años) donde replica en versión papel y lápiz algunos experimentos de Piaget. Su finalidad fue determinar la etapa de desarrollo en la teoría de Piaget e Inhelder (que el autor denomina nivel de razonamiento probabilístico) de los sujetos de su muestra. Los contextos son variados, tanto comparación de probabilidades en urnas o ruletas, como estimación de la probabilidad en experimentos compuestos o decidir si un juego es o no equitativo. Encuentra un mayor nivel medio en los niños, frente a las niñas, y correlación entre el nivel de razonamiento probabilístico con una medida de la aptitud en matemáticas. También observó que son pocos los estudiantes del último curso de su muestra (15-16 años) que logran en nivel III, de operaciones formales, descrito por Piaget e Inhelder (1951).

La investigación de Green fue replicada por Cañizares (1997) con 320 niños españoles de 10 a 14 años. Obtuvo, en general, mejores resultados que este autor, ya que los niños españoles de 13 y 14 años se sitúan, en promedio, a un nivel cercano al II, mientras que en la investigación de Green, apenas superan el primer nivel descrito por Piaget e Inhelder a esta edad. Sin embargo, por ser la muestra mucho más pequeña que la de los niños ingleses no quiso hacer generalizaciones.

Los dos autores notan una mejora con la edad, tanto en el nivel de razonamiento, como en la mayor parte de las intuiciones de los alumnos; sin embargo, encuentran algunas dificultades. Entre las intuiciones correctas de los niños, Cañizares (1997) destaca la impredecibilidad en los experimentos aleatorios, la capacidad de comparación de probabilidades en casos sencillos, y resolución de algunos problemas de probabilidad condicional. Sin embargo, también encontró que el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos y la interpretación de diagramas en árbol resultaron excesivamente difíciles para los estudiantes de la muestra. Además, Cañizares sugiere que el nivel de razonamiento probabilístico no explica todas las posibles respuestas y estrategias de los estudiantes en los problemas de probabilidad.

Una investigación reciente es la de Gong y He (2017) con 906 estudiantes chinos de 6 a 14 años de edad. Los autores aplicaron un cuestionario con tareas relacionadas con la aleatoriedad, distribución de probabilidad, comparación cualitativa de la probabilidad, y su representación numérica, con especial atención en las fracciones. Los autores proponen un modelo con cinco etapas de desarrollo del razonamiento probabilístico de los niños. En la etapa I (6 a 7 años) los estudiantes comprenden ideas básicas de la noción de aleatoriedad y adquieren conocimientos preliminares sobre la distribución y comparación cualitativa de probabilidades, así como en las representaciones numéricas de la probabilidad. En la etapa II (8 a 9 años) se adquieren rápidamente conceptos de probabilidad (aleatoriedad, distribución y comparación cualitativa de probabilidades) y su representación numérica, aunque de manera preliminar mediante fracción. En la etapa III (alrededor de los 10 años) los estudiantes dominan la aleatoriedad, comprenden la distribución y la comparación cualitativa de probabilidades, e incluso las representan mediante fracciones; mientras que en la etapa IV (11-12 años) dominan también la comparación cualitativa de probabilidades, pero no hay mayor avance en la compresión de la distribución de probabilidad y manejo de fracciones. Por último, en la fase final (13-14 años) los estudiantes no mejoran su razonamiento probabilístico e incluso algunos pueden experimentar un retroceso. Los autores no encontraron una diferencia significativa en el nivel cognitivo entre los estudiantes de 13-14 y los de 10-11 años, en lo que respecta a las tareas propuestas. Por tanto, el razonamiento probabilístico estuvo aproximadamente en el mismo nivel.

2.6.4. Razonamiento proporcional y comparación de probabilidades

Una preocupación de las investigaciones sobre el razonamiento probabilístico de los niños ha sido analizar si existe alguna diferencia con el razonamiento proporcional o, por el contrario, una vez adquirido éste, los niños automáticamente pueden resolver con éxito los problemas de comparación de probabilidades. Por otro lado, también ha interesado determinar el modo en que los niños resuelven estos problemas y los factores que afectan la dificultad de las tareas. Entre estas investigaciones encontramos las de Hoeman y Ross (1975) y Falk et al. (1980) citadas en las secciones previas.

Estos resultados fueron posteriormente corroborados en otras investigaciones como las de Karplus et al. (1983a, 1983b), quienes describen dos tipos básicos de estrategias en la comparación de fracciones: aditivas (comparar la diferencia de numeradores o denominadores o bien la diferencia entre numerador y denominador de cada fracción) y proporcionales, donde se comparan algunas de las razones involucradas en el problema.

Fischbein y Gazit (1984), interesados por el razonamiento probabilístico, realizaron un experimento de enseñanza con 285 estudiantes de 10 a 13 años de edad, para introducir los conceptos de suceso seguro, posible e imposible, posibilidades, probabilidad y frecuencia relativa, recuento de resultados y cálculo de probabilidades. También tuvieron un grupo control de 305 estudiantes. Por medio de cuestionarios, se trató de evaluar el efecto de la instrucción sobre los juicios de probabilidad de los niños, indicando que, en general, las preguntas fueron muy difíciles para los niños de 10-11 años, pero asequibles para el resto, en particular, para los que tuvieron instrucción.

Sin embargo, la instrucción no tuvo influencia en el razonamiento proporcional de los participantes, encontrando, incluso, un efecto negativo. Los autores concluyeron que el razonamiento proporcional y probabilístico corresponden a esquemas mentales distintos, aunque puedan compartir el mismo origen, a un nivel intuitivo muy básico. Cañizares (1997) añade que, aunque el cálculo de probabilidades pueda necesitar en algunas tareas un cálculo de proporciones, la comprensión del concepto de probabilidad no implica la comprensión formal de la proporcionalidad.

Singer y Resnick (1992) examinan las representaciones que usan una muestra de niños que todavía no han alcanzado el razonamiento proporcional en tareas de comparación de razones y probabilidades. Sugieren que en estos problemas intervienen tres datos: la cantidad total y las dos partes en que se divide. Estas cantidades pueden visualizarse mediante una relación parte-todo o mediante una relación parte-parte. Los autores observan que el tipo de representación elegida depende del contexto del problema. Cuando se comparan dos cantidades semejantes (que se miden de la misma forma) y forman parte de un conjunto común, se moviliza el esquema parte-parte (por ejemplo, en los problemas de urnas con dos tipos de bolas). En el caso de la ruleta se visualiza usualmente una relación parte- todo.

Estos autores llevan a cabo una investigación con 15 estudiantes de 12 a 14 años a los que proponen un cuestionario con 15 problemas de comparación de urnas, sin dibujarlas y tienen en cuenta si se les da toda la información o solo una parte (por ejemplo, el total y el número de bolas negras). También consideran los siguientes tipos de cantidades:

- El total de bolas en las dos urnas es el mismo, cambiando el número de favorables.
- Igual número de casos favorables o igual número de casos desfavorables.
- Todas las cantidades son diferentes y la urna más probable es la que tiene más casos favorables.
- Todas las cantidades son diferentes y la urna más probable es la que tiene más casos desfavorables.

Singer y Resnick (1992) comprueban que los problemas con el mismo número total de bolas son más sencillos y encontraron las siguientes estrategias: comparar el número total de bolas; comparar las favorables; comparar las desfavorables; comparaciones aditivas y compensación (coger la urna con más casos favorables y menos desfavorables). Clasifican a los estudiantes en tres tipos:

- *No relacionales:* eligen siempre la urna con más casos favorables, sin tener en cuenta el resto de datos.
- *Semi relacionales:* se basan siempre en un tipo de bolas (favorables o desfavorables), pero depende de cuál les da más información.
- *Relacionales:* utilizan todos los datos.

Por su parte, Pérez Echeverría et al. (1986) diseñaron dos pruebas que fueron aplicadas a 20 estudiantes de 8º de Educación General Básica (12 años) y 20 de 3º de Bachillerato Unificado Polivalente (17-18 años), todos ellos escolarizados en centros estatales de Madrid. Adaptaron la prueba de Noelting (1980a; 1980b) y las tareas de comparación de probabilidades diseñadas por Piaget e Inhelder (1951), y encontraron cuatro niveles de dificultad para problemas en probabilidad (Tabla 2.6.2), de acuerdo a la estrategia de resolución necesaria, como se describe a continuación:

- *Nivel 1:* Problemas donde la cantidad de casos favorables o la cantidad de casos desfavorables es la misma y se puede resolver comparando valores absolutos sin formar las razones. Es decir, se pueden resolver los problemas comparando cantidades absolutas (número de casos favorables o posibles para los problemas de probabilidad). Distinguen tres casos dependiendo de si los numeradores en cada fracción son iguales; si son iguales solo los numeradores o solo los denominadores.

- *Nivel 2:* Problemas donde existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de ambas agrupaciones o entre casos favorables y desfavorables de cada agrupación (relación de equivalencia); es decir, se trabaja con fracciones equivalentes. Estos problemas se resuelven estableciendo una correspondencia entre dos términos del problema y luego se compara la relación entre los otros dos términos con esta correspondencia. Diferencian dos tipos: a) en el primero se ve claramente la proporcionalidad porque los numeradores y denominadores de las fracciones son múltiples; b) en el segundo caso, además, son también múltiplos los numeradores y denominadores da cada fracción.
- *Nivel 3:* Problemas que presentan proporcionalidad sólo entre los casos favorables de ambas agrupaciones o sólo entre los casos desfavorables, o bien entre casos favorables y desfavorables de una sola agrupación (no hay relación de equivalencia). Los de nivel 2 y 3 requieren establecer una razón de correspondencia entre dos miembros de las fracciones, comparando los otros con esta razón. Esta estrategia da la solución correcta en los problemas de nivel 2 y una solución aproximada en los de nivel 3.
- *Nivel 4:* Problemas donde no existe relación alguna de proporcionalidad entre los cuatro miembros. Los de nivel 4 requieren comparación de fracciones.

Tabla 2.6.2. Niveles de dificultad de las tareas propuestas por Pérez Echeverría (1986).

Nivel dificultad	Proporción	Criterio dificultad	Estrategia
1	2/2 vs 5/5	Equivalencia unidad	Correspondencia 1
1	2/5 vs 3/5	Cuantificación magnitudes	Aditiva
1	1/3 vs 1/4	Cuantificación magnitudes	Aditiva
2	2/4 vs 3/6	Equivalencia intro	Correspondencia 2
2	3/4 vs 6/8	Equivalencia entre	Correspondencia 2
3	7/9 vs 2/3	Rel. denominadores	Correspondencia 3
3	2/7 vs 1/5	Rel. numeradores	Correspondencia 3
3	3/7 vs 4/8	Rel. intra	Correspondencia 3
4	7/5 vs 5/3	No relación	Proporción
4	8/5 vs 7/4	No relación	Proporción

Cañizares y Batanero (1997) trataron de comprobar si hay coincidencia entre el nivel de razonamiento proporcional y el éxito en tareas probabilísticas de un nivel proporcional dado. Para ello propusieron una serie de tareas de comparación de probabilidades en urnas a una muestra de 134 niños españoles de 10 a 14 años, variando las fracciones implicadas y teniendo en cuenta diferentes etapas de desarrollo según Noelting (1980a; 1980b). En algunos de los ítems incluyeron como distractores sesgos comunes en los niños, por ejemplo, que, si juegan dos niños el mismo juego, el de mayor edad o el primero que juega tiene mayor probabilidad de ganar. Aunque encontraron relación entre los dos tipos de razonamiento, encontraron mayor dificultad en los ítems que incluían estos distractores y una tendencia a enfocarse en los casos favorables.

2.6.5. Estrategias de comparación de probabilidades

En todas las investigaciones resumidas en los apartados anteriores se ha tratado de describir las estrategias de los niños para comparar probabilidades a distintas edades, algunas de las cuales se pueden relacionar con las utilizadas en la comparación de fracciones.

Piaget e Inhelder (1951) asumieron que los niños primero tratan de comparar los casos posibles, es decir, el número total de posibilidades en cada situación a comparar y, a igualdad de casos posibles, centran su atención en la comparación de los casos favorables. Sin embargo, Cañizares y Batanero (1997) observaron que los niños de su estudio prefirieron comparar los casos favorables y no los posibles. La explicación que dan las autoras es que las tareas propuestas por Piaget e Inhelder (un solo conjunto de fichas marcadas o no en su revés) favorecen la percepción del niño del conjunto de fichas empleadas como un todo, y no como la unión de dos partes (casos favorables y desfavorables), que fue más claro en las tareas propuestas por las autoras (dos urnas, cada una con fichas de dos colores).

De acuerdo a Piaget e Inhelder (1951), las estrategias de una sola variable, es decir, aquellas en que los niños sólo usan los casos favorables o desfavorables, son representativas de la etapa preoperacional. Estas estrategias pueden generar tanto respuestas correctas como repuestas incorrectas; por ejemplo, si los dos conjuntos a comparar tienen igual número de casos favorables, la comparación de estos da una respuesta correcta, pero si el número de casos desfavorables es diferente, puede dar un resultado incorrecto.

En el caso de las estrategias de dos variables, los niños usan los cuatro datos del problema (casos favorables y desfavorables en cada una de dos colecciones) y se distinguen tres tipos: el primero consiste en comparar los cuatro datos con operaciones aditivas, por ejemplo, restando los casos favorables y desfavorables en cada grupo y es característica del período de operaciones concretas. En la segunda y tercera estrategias se realizan comparaciones multiplicativas y se alcanzan hasta la etapa de operaciones formales, aunque la segunda, que consiste en establecer una razón sencilla (como 1/3) para comparar con la razón de casos favorables y desfavorables en cada conjunto, puede utilizarse en los casos de composiciones proporcionales, durante la etapa anterior.

Pérez Echeverría et al. (1986) obtuvieron cuatro tipos de estrategias utilizadas por los sujetos, donde las estrategias *a* y *b* permiten resolver tareas del nivel de razonamiento 1 en su clasificación, la *c* es válida para tareas de los niveles 2 y 3, y la *d* para tareas propias a la etapa de operaciones formales (nivel 4):

a. *Comparar valores absolutos.* Utilizada para resolver los problemas de nivel 1.
b. *Comparación aditiva de las dos agrupaciones.* Se busca la solución comparando los miembros de cada agrupación por medio de sumas y restas. Pueden resolver los problemas de nivel 1.
c. *Estrategia de correspondencia.* Consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una agrupación, por ejemplo, que hay doble de casos favorables que desfavorables y compararlo con la otra (si la relación es menor o mayor que el doble). Pueden resolver los problemas de nivel 2 y a veces algunos de nivel 3.
d. *Comparación multiplicativa entre los datos de cada agrupación* (casos favorables y desfavorables en cada grupo). Pueden resolver todos los problemas.

Los autores indican que sólo el 12% de los sujetos usaban la comparación multiplicativa en las tareas de proporción y menos del 10% en las de probabilidad, realizando en vez de esto comparaciones aditivas. Por otro lado, sujetos que habían usado una estrategia proporcional para resolver problemas de nivel 2 o 3, volvían a las estrategias aditivas o de comparación de cantidades absolutas para resolver los problemas de nivel 4. También sugieren que los problemas proporcionales son más sencillos que los probabilísticos (Pérez Echeverría et al., 1986).

Corral (2014) plantea a 30 estudiantes de 8º de EGB (13-14 años) 11 tareas de probabilidad, según el nivel de desarrollo progresivo de Noelting (1980a, 1980b), dividiendo los estadios IIB hasta IIIB en actuación formal, el estadio IIIA en actuación preformal y los estadios IIA y IIB en actuación no formal. Eligieron 20 sujetos que no habían llegado a la actuación formal y los dividieron en dos grupos, control y experimental.

El grupo experimental fue entrenado en tareas proporcionales que no tenían componente probabilístico y la sesión de aprendizaje consistió en la resolución de cinco versiones de dificultad creciente del problema de la limonada (comparación de proporciones), donde se representaban físicamente los datos con un dibujo. Se les enseña a los sujetos a formalizar la proporción mediante el cociente de casos favorables (vasos de zumo de limón) y casos posibles (número total de vasos). Se les animó a usar las técnicas del máximo común divisor y mínimo común múltiplo para reducir las fracciones a común denominador y simplificarlas. Se les insistió en la incorrección de las estrategias aditivas.

Tres semanas después se les administró a todos un post test con problemas de diferentes niveles en el contexto de probabilidad. Mientras en el grupo control no hubo progreso, el 70% de los sujetos del grupo experimental mejoró en su razonamiento, aunque todavía no hubo variación en el 30%. El aprendizaje fue mayor cuando se partía de un nivel intermedio IIB o IIIA.

Green (1982) utiliza diversas tareas de comparación de probabilidades en su cuestionario de intuiciones probabilísticas, variando el nivel de razonamiento proporcional requerido para resolver cada una de las tareas y pide a los niños justificar la respuesta. Utiliza dos contextos: comparación de probabilidades en dos urnas con bolas de dos colores diferentes y ruletas numeradas con diferente número de sectores de igual amplitud o con sectores de diferente amplitud. En el análisis de los argumentos que utilizan los niños, este investigador identifica las estrategias que aparecen en la Tabla 2.6.3.

Tabla 2.6.3. Estrategias de comparación de probabilidades, según contexto (Green, 1982)

Urnas	Ruletas
Escoger la bolsa con mayor número de casos posibles.	Comparar el área cubierta por los casos favorables.
Escoger la bolsa con mayor número de casos favorables.	Comprar el número de sectores que corresponden a los casos favorables.
Escoger la bolsa con mayor diferencia entre casos favorables y desfavorables.	Comparar las razones entre número de sectores favorables y desfavorables.
Escoger la bolsa con mayor proporción entre casos favorables y desfavorables.	Posición o velocidad de la aguja.
	Orden de los sectores en la ruleta.
	Distancia entre sectores favorables.

En los problemas de comparación de ruletas introdujo algunos sesgos, como diferente orden de colocación de los sectores favorables en las mismas, o que una ruleta con mayor número de sectores favorables tuviese menor área correspondiente al caso favorable. De este modo, en el contexto de ruletas aparecieron mayor número de estrategias incorrectas, como considerar la distancia entre sectores favorables o su orden de colocación y la posición inicial de la aguja. Green observó igualmente que la mayoría de los estudiantes del último curso (16 años) no consiguen el nivel de operaciones formales en lo que se refiere a la probabilidad.

Maury (1984) investigó las estrategias utilizadas por 80 estudiantes de 5º curso de educación secundaria (15-16 años) en problemas de comparación de probabilidades, utilizando también dos tipos de contextos: sacos con bolas de dos colores (azules y rojas) y ruletas divididas en sectores iguales, coloreados en rojo y azul. Basándose en las investigaciones de Piaget e Inhelder, la autora establece tres tipos de tareas para estos contextos:

- *Tareas de comparación de una sola variable:* El número de casos favorables es el mismo en ambos sacos, y difiere sólo el número de casos posibles.
- *Proporcionalidad:* La razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles es la misma en ambos sacos.
- *Comparación de dos variables:* Hay un número diferente de casos favorables y posibles en ambos sacos (sin que haya proporcionalidad o igualdad de casos desfavorables).

Asimismo, clasificó las respuestas obtenidas considerando la pertinencia de los argumentos. Entre los argumentos pertinentes están: comparación de áreas (solo para contexto ruletas); comparación entre proporciones de casos favorables y casos posibles (regla de Laplace); y comparación entre proporciones de casos favorables y casos desfavorables. La autora indica que la regla de Laplace es más utilizada en contextos de ruletas porque favorece la relación *parte-todo*, a diferencia del contexto "sacos con bolas" donde es más intuitivo las relaciones *parte-parte*.

Por otra parte, la autora encontró como argumentos no pertinentes: la distribución de sectores (solo para contexto ruletas); la comparación de la diferencia entre casos favorables y desfavorables, o al revés; y la comparación de casos favorables sin tener en cuenta los desfavorables o los posibles. La autora señala que, en el caso de los argumentos no pertinentes, el contexto sí influye, siendo la distribución de sectores el más frecuente en el contexto de ruletas, y la comparación de la diferencia entre casos favorables y desfavorables en el contexto de "sacos con bolas".

Cañizares (1997) repitió en su estudio los mismos ítems utilizados por Green

(1982) y analizó los argumentos proporcionados por los niños para justificar sus respuestas identificando sus estrategias. Las estrategias observadas para el contexto de ruletas coinciden con las de Green, mientras que propuso una clasificación diferente para las estrategias empleadas en el contexto de urnas que se muestra en la Tabla 2.6.4.

Tabla 2.6.4. Estrategias de comparación de probabilidades, según Cañizares (1997)

De una sola variable	De dos variables	Otras estrategias
Comparación del número de casos posibles: Aunque podría, circunstancialmente, generar respuestas correctas, carece de base lógica y está originada por la imposibilidad de los niños de comparar el conjunto total con un subconjunto. *Comparación del número de casos favorables:* Genera respuestas correctas cuando hay igualdad de casos posibles. *Comparación del número de casos desfavorables:* Genera respuestas correctas cuando hay igualdad de casos favorables.	*Estrategias aditivas:* Se consideran los casos favorables, los desfavorables y los posibles, simultáneamente, pero se realiza la comparación mediante alguna operación aditiva. *Estrategia de correspondencia:* Se establece un criterio de proporcionalidad en una urna para aplicarlo a la otra. *Estrategias multiplicativas:* Se relaciona el número de casos favorables con el número de casos posibles, es decir, la parte con el todo, o las fracciones formadas por los números de casos favorables y desfavorables para después compararlas, aplicando la regla de Laplace.	Negarse a tomar una decisión sobre las urnas, manifestando que es imposible saber cuál es el suceso que ocurrirá ("outcome approach", Konold, 1989). Aspectos físicos como la disposición de las bolas en la imagen. Suponer que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza ("sesgo de la equiprobabilidad", Lecoutre, 1992).

2.6.6. Probabilidad y lenguaje

Green (1982) encontró una pobre habilidad verbal de los niños para describir correctamente situaciones probabilísticas. Específicamente, no desarrollan espontáneamente significados comunes para términos que indican distintos grados de probabilidad. Cañizares (1997) evidenció, que la mayoría de los alumnos comprenden y usan correctamente el lenguaje probabilístico, incluyendo términos como “probable”, “posible” y “seguro”; sin embargo, los términos “improbable” e “imposible” son los que resultaron más difíciles a los niños.

Hernández-Salmerón et al. (2017) analizaron el lenguaje sobre el azar de 89 estudiantes de 1º y 2º curso de educación secundaria en España (13-14 años), pidiéndoles escribir sinónimos de las palabras “imposible”, “posible”, “igual posibilidad”, “poca posibilidad”, “seguro”, “muy posible”. El porcentaje de estudiantes que no dio ningún sinónimo correcto para imposible fue de 48,2% en 1º curso y de 33% en 2º y 60,6% para seguro.

Groth et al. (2020) analizaron el lenguaje en probabilidad de 10 niños de 11 y 12 años, pidiéndoles situar algunas frases en una escalera de probabilidad, donde el “imposible” se situaba en el nivel más bajo y el “seguro” en el más alto. Los estudiantes tuvieron mayor dificultad para la expresión “cierto” que la de “imposible” y el lenguaje cualitativo no siempre precedió a la competencia cuantitativa de cálculo de probabilidades.

2.6.7. Influencia del contexto, sesgos y creencias previas

Tal como se muestra en el estudio de Maury (1984), el contexto influye fuertemente en los argumentos de los alumnos, lo que pone de manifiesto que problemas equivalentes desde el punto de vista probabilístico, no lo son necesariamente en el plano cognitivo. Por esta razón, la autora establece que el proponer a los alumnos problemas presentados en uno y otro contexto, podría favorecer la superación de conflictos cognitivos. En problemas de similar nivel de dificultad, Cañizares (1997) encontró que la mayoría de los alumnos entrevistados modificaron las estrategias utilizadas en el cuestionario cuando se cambiaba el contexto (urnas con bolas por ruletas con sectores coloreados). Por ejemplo, algunos niños sugirieron que la disposición física de los sectores (por ejemplo, el hecho de estar separados o contiguos) podría modificar las probabilidades de los sucesos; aspectos que no aplican en el contexto de urnas.

2.6.7.1. *Sesgos de razonamiento y creencias previas*

El razonamiento probabilístico de los niños no se reduce al razonamiento proporcional, aunque se requiere de este segundo para poder resolver muchos de los problemas, como se ha observado en la descripción previa realizada. Sin embargo, en las estrategias descritas por Cañizares (1997) se observa que algunos niños poseen intuiciones incorrectas que asumen como verdaderas y que pueden generar errores sistemáticos. Así, por ejemplo, algunos niños mostraron ideas subjetivas relativas al azar, que les llevaron a indicar que no pueden elegir una de las urnas que se les pide comparar. Su argumento es que es imposible saber cuál es el suceso que ocurrirá. Esta es una respuesta típica del enfoque en el resultado o "outcome approach", descrito por Konold (1989). Pues, aunque el resultado particular de un experimento aleatorio es impredecible, sí es posible prever la distribución de una serie de resultados del experimento. Pero el niño interpreta una pregunta probabilística ¿cuál suceso tiene más probabilidad? en forma determinista ¿cuál suceso ocurrirá?

Cañizares (1997) también encontró algunos niños que suponen que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza, es decir, generalizan indebidamente la regla de Laplace. Sería un ejemplo del denominado “sesgo de equiprobabilidad”, identificado por Lecoutre (1992). Un experimento puede ser aleatorio y constar de sucesos no equiprobables; Cañizares atribuye la confusión a que en su experiencia los niños suelen jugar juegos de azar como cartas, loterías o dados en que todos los sucesos son equiprobables.

Otros sesgos o creencias infundadas, citadas por la autora, son la incapacidad para reconocer la independencia de los resultados en una serie de experimentos repetidos (pensar que después de una racha de un mismo resultado, el resultado contrario tiene mayor probabilidad). Esta creencia errónea es conocida como la “falacia del jugador”, donde se cree erróneamente que los sucesos pasados afectan a los futuros. Fischbein (1975) estudió esta creencia y la denominó efecto de “recencia negativa”, debido a que sucede cuando la persona considera más probable el suceso contrario al que ya ha ocurrido. Cañizares (1997) encontró que la tercera parte de los niños de su muestra mantuvo este sesgo en sus argumentos.

Otro sesgo muy frecuente es la “heurística de representatividad” (Kahneman et al., 1982), que consiste en juzgar la representatividad de una muestra sólo por su parecido a la población que representa. Cañizares (1997) encontró gran incidencia de este sesgo en las decisiones de los alumnos, que los lleva a sesgos relacionados con la intuición de independencia de sucesos. Otros sesgos o creencias infundadas citadas por la autora son la incapacidad para reconocer la independencia en contextos de loterías y la búsqueda de explicaciones causales, como el color favorito o la edad de un niño que afecten la probabilidad de los sucesos; también, los argumentos asociados a consideraciones físicas como la disposición de las bolas en la imagen.

Algunos estudios como los de Fischbein y Gazit (1984) exploraron factores que podían afectar los juicios probabilísticos en niños y adolescentes, por ejemplo la influencia de supersticiones como “empezar con el pie derecho”, donde para conocer la opinión de los niños plantearon en un ítem la relación entre “entrar a clase cada día poniendo primero el pie derecho” y el “aumento de la posibilidad de obtener buena nota”, y así poder conocer si los niños buscaban justificaciones asociadas a creencias populares. Cañizares (1997) señala que solo un pequeño porcentaje de alumnos manifestaron creencias de este tipo, y que este tipo de creencias disminuía con la edad y el rendimiento matemático. También señala argumentos asociados a consideraciones físicas, como la disposición de las bolas en la imagen.

2.6.8. Comprensión del juego equitativo

A pesar de su importancia, son todavía escasas las investigaciones sobre las intuiciones que los estudiantes tienen sobre la idea de juego equitativo, comparado con estudios de otras nociones probabilísticas básicas. Algunas de ellas estudian sus estrategias para decidir si un juego es o no equitativo (Watson y Collis, 1994), intuiciones sobre la esperanza matemática (Schlottmann y Anderson, 1994), y la influencia de las experiencias extraescolares en el desarrollo de la idea de equitatividad y su relación con la de probabilidad (Lidster et al*.,* 1996).

Más asociado a este estudio se encuentra la investigación realizada por Cañizares et al. (1999), quienes analizaron la comprensión de los niños entre 10 y 14 años de la idea de juego equitativo, relacionándolo con las creencias de los niños en el terreno de la probabilidad y su influencia en la asignación de probabilidades. Los autores indican que algunos estudiantes muestran sesgos como: a) introducir factores externos, tales como "hacer trampas" en sus argumentos; b) igualar las ganancias en juegos donde los participantes no tienen las mismas probabilidades; c) exigir que haya un alto número de partidas para que el juego sea equitativo, ignorando así la independencia de los ensayos; y d) considerar que todos los juegos aleatorios, si no se hace trampas, son equitativos.

Por otro lado, algunas investigaciones referentes al conocimiento profesional del profesor sobre las nociones de probabilidad (e. g. Azcárate, 1995; Mohamed y Ortiz, 2012; Ortiz et al*.,* 2012) han encontrado, en docentes y profesores en formación, dificultades para identificar los juegos equitativos, pues los participantes basan sus argumentos en la equiprobabilidad de los resultados, reglas aritméticas o argumentación combinatoria incorrecta.

2.7. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

El conjunto de investigaciones analizadas, que se describen en este capítulo, advierten que la intuición en probabilidad y más concretamente la capacidad de comparar probabilidades progresa por etapas. Estas etapas tienen una fuerte relación con las correspondientes al desarrollo del razonamiento proporcional pero no son equivalentes. Por ello, los niños pequeños pueden comparar probabilidades en problemas de una variable, es decir, cuando o bien el número de casos favorables o de desfavorables son iguales. En este sentido las investigaciones apoyan que la enseñanza de la probabilidad se comience lo antes posible, para poder desarrollar la intuición del niño, pues según Fischbein (1975) la maduración con la edad por sí sola no es suficiente para este desarrollo. En consecuencia, el docente debe proponer situaciones probabilísticas en su aula para introducir una forma de pensar diferente a otras ramas de las matemáticas y ayudar, así, a superar las intuiciones erróneas primitivas sobre la aleatoriedad. Más aún, porque es posible relacionar este tema con juegos y con situaciones en la vida diaria del niño (Nikiforidou, 2018).

Es verdad que los niños de la mayoría de los estudios analizados, como el de Cañizares (1997), Green (1982) o Piaget e Inhelder (1951), no habían estudiado probabilidad, porque no se incluía este tema en el currículo de la Educación Primaria. Pero, en todo caso, Cañizares (1997) observó una dificultad generalizada en los problemas de comparación de probabilidades, señalando que los alumnos no aplicaban espontáneamente la regla de Laplace para comparar probabilidades, ni siquiera aquellos alumnos que, de acuerdo con lo estudiado en cursos anteriores, debieran tener facilidad en la comparación de las fracciones. Por lo general, los estudiantes asignaban mayor probabilidad basándose sólo en los casos favorables.

En consecuencia, el estudio de fracciones por sí sólo no logrará que el niño progrese hacia la etapa más avanzada de su razonamiento probabilístico. Por ello, el maestro debe aprovechar la ocasión que le proporciona el currículo para introducir situaciones probabilísticas en la clase de matemática. Sólo la enseñanza de la probabilidad introduce una forma de pensar diferente a otras ramas de las matemáticas y contribuye a superar las intuiciones erróneas primitivas sobre la aleatoriedad (Borovcnik, 2011); más aún, cuando no sólo es posible relacionar estas situaciones con mucho de los juegos de los niños. También se pueden encontrar numerosas aplicaciones de la probabilidad en la vida cotidiana, lo que permite mostrar al niño el valor y la utilidad de la matemática (Batanero, 2020).

Por otro lado, como se muestra en varios de los estudios, el contexto influye fuertemente en las estrategias y problemas equivalentes desde el punto de vista probabilístico, no lo son necesariamente en el plano cognitivo. Por esta razón, es necesario que en la enseñanza se proponga a los niños problemas presentados en diferentes contextos como indican Cañizares (1997) y Maury (1984).

Metz (1998) resalta la importancia de comprender la aleatoriedad y la necesidad de desarrollar en los niños cinco intuiciones necesarias para la comprensión de la probabilidad:

- *Aceptación de la incertidumbre o indeterminación del resultado*. Una forma rudimentaria de esta comprensión es la distinción entre sucesos predecibles que se dan con certeza y sucesos impredecibles, que puede darse sobre los 4-5 años (Fay y Klahr, 1996; Kuzmak y Gelman, 1986).
- *Percepción de la magnitud relativa en la incertidumbre*, por ejemplo, la distinción entre sucesos raros y frecuentes. Según Metz (1998) los niños de Educación Infantil logran esta distinción, que progresa en los primeros años de la escuela primaria cuando adquieren progresivamente habilidad para cuantificar diferentes clases de elementos y contar los elementos de cada clase (por ejemplo, casos favorables y desfavorables), así como comparar su tamaño en conjuntos pequeños.
- *Comprender la relación parte-todo*, para visualizar los casos favorables como una parte de todos los casos posibles. Metz (1998) indica que ya con 5 años los niños tienen esta intuición, que se va desarrollando a lo largo de la educación primaria.
- *Estimar la mayor o menor verosimilitud de un suceso*. Como se ha visto a lo largo del capítulo, algunas investigaciones indican que el niño puede comparar probabilidades sin necesidad de requerir razonamiento proporcional, por lo que es relevante que el docente lo tome en cuenta para la planificación educativa.
- *Predecir la distribución esperada de los resultados del experimento aleatorio*. Las investigaciones analizadas no muestran esta capacidad en los niños hasta los 7 años (Piaget e Inhelder, 1951), aunque sí se percibe cierta intuición al respecto desde los 5 años (Paparistodemou et al., 2008).

Sobre la forma de trabajar con el tema, las siguientes orientaciones didácticas para primaria de Batanero y Godino (2004) son válidas también para educación infantil:

1. "Proporcionar una amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas.
2. Estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de estos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad.
3. Organizar la recogida de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias en función de los resultados.
4. Resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por parejas.
5. Ayudar a apreciar el fenómeno de la convergencia mediante la acumulación de

> resultados de toda la clase y comparar la fiabilidad de pequeñas y grandes muestras" (Godino y Batanero, 2004, p. 755).

Alsina y Vásquez (2016), adicionalmente, presentan una propuesta de tareas para fomentar la alfabetización probabilística (Gal, 2005) en la educación infantil y primaria. Para la etapa de 3 a 6 años la principal finalidad, de acuerdo con los autores, es aprender el lenguaje probabilístico partiendo de situaciones cotidianas, animando a los niños a que realicen juicios de probabilidad sobre su futura ocurrencia. Puesto que el contexto influye fuertemente en las estrategias de los niños, los autores proponen trabajar con diferentes contextos, incluyendo situaciones de la vida del niño y juegos con diferentes dispositivos como fichas, monedas, dados o ruletas. Para los 6-8 años proponen la cuantificación de la posibilidad de los resultados. En este sentido, es importante resaltar que los niños pequeños trabajan mejor las actividades sobre azar con material tangible que con recursos virtuales (Nikiforidou, 2010, 2019). Otras propuestas complementarias y materiales didácticos para la educación infantil se presentan en Alsina (2017) y para niños a partir de 6 años en Godino et al. (1987).

CAPÍTULO 3: ESTUDIO INICIAL EXPLORATORIO DE EVALUACIÓN

El contenido de este capítulo está publicado en los trabajos siguientes:

Hernández-Solís, L. A. (2023). Sesgos en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 23*(2), 1-16. https://doi.org/10.18845/rdmei.v23i2.6368

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. *Uniciencia, 35*(2), 1-18. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: Un estudio exploratorio con niños de educación primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 181-207. http://dx.doi.org/10.24844/EM3301.07

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes de educación primaria. *Educaçao e Realidade, 46*(3). https://doi.org/10.1590/2175-6236105401

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021d). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños y niñas costarricenses. *Innoeduca, 23*(34), 228-243. http://dx.doi.org/10.22458/ie.v23i34.3429

3.1. INTRODUCCIÓN

Como se describe en el Capítulo 1, en Costa Rica se aprobaron nuevos programas escolares de Matemática en 2012, en donde se dio mayor relieve al área de *Estadística y Probabilidad*, respecto a los anteriores currículos nacionales. Específicamente, los anteriores planes de estudio incluían escasos contenidos de probabilidad en Educación Primaria, lo que incidía en la poca trascendencia que se les daba a estos temas, que, además, no continuaban en Educación Secundaria.

El lugar relevante que se da a esta área obedece al papel que juega la información y el manejo del azar en la sociedad moderna (MEP, 2012). Vásquez y Alsina (2017; 2019) sugieren que esta incorporación plantea un desafío, pues muchos profesores actuales de Educación Primaria no han recibido suficiente formación en probabilidad o sus actitudes hacia la enseñanza de la misma no son adecuadas (Estrada y Batanero, 2019; Estrada et al., 2018). En su trabajo indican que algunos necesitan mejor preparación en nociones básicas de probabilidad, tales como experimento aleatorio, espacio muestral, suceso probable o seguro. Esta carencia ha sido también evidenciada en Costa Rica (Alpízar et al., 2012; 2015).

Al incluir un nuevo contenido curricular, es importante asegurar que el estudiantado tenga las competencias necesarias para abordarlo con éxito, información que, generalmente, se puede adquirir de la investigación didáctica. Sin embargo, debido a la poca trascendencia que se dio a los contenidos de probabilidad en currículos anteriores a 2012, ha habido una carencia de investigaciones referentes a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en Costa Rica. Por otro lado, los estudios anteriores sobre el tema con niños de esta edad en otros países se realizaron cuando no habían recibido enseñanza en este tema (e.g. Cañizares, 1997; Green, 1982).

Esta investigación trata de aportar información original sobre los estudiantes costarricenses que han iniciado estudios de probabilidad, comparando los resultados con los obtenidos en investigaciones previas como las de Cañizares (1997) y Green (1982).

Más concretamente, este estudio se centró en estudiantes de 6º curso de Educación Primaria (11 y 12 años). La elección del nivel educativo apunta a dos razones: con este año se concluye la Educación Primaria; y segundo, este grupo de estudiantes había seguido los dos primeros cursos del segundo ciclo con el currículo actual de Matemática, ya que fue aprobado en 2012 y se aplicó de forma completa en todos los niveles educativos a partir del 2015. Es importante señalar que en el momento en que se desarrolló esta investigación, los participantes de la muestra apenas estaban iniciando el 6º curso, por lo que aún no habían estudiado los contenidos de probabilidad correspondientes a dicho año escolar.

Para llevar a cabo el estudio, que ha dado origen a una serie de publicaciones recogidas en este capítulo, se elaboró un cuestionario que fue aplicado a una muestra de niños costarricenses. Este instrumento se diseñó, partiendo de cuestionarios utilizados en estudios previos como los de Cañizares (1997) y Green (1982) y agregando dos preguntas nuevas.

A continuación, se describen los objetivos e hipótesis, así como la metodología del estudio; luego se exponen los resultados obtenidos que se clasifican en varios apartados, teniendo en cuenta la temática abordada en los diferentes ítems y los artículos publicados al respecto.

3.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO 1

De acuerdo con lo expuesto en la sección anterior y en el primer capítulo de esta tesis, el primer estudio de evaluación trata de responder al siguiente objetivo general:

O2. Evaluar el razonamiento probabilístico en estudiantes de último año de la Educación Primaria costarricense, a partir de la resolución de distintos problemas probabilísticos propuestos en un cuestionario.

Por medio de este objetivo se intentó comparar los resultados obtenidos en la muestra participante con los establecidos por Piaget e Inhelder (1951) para la etapa en que se esperaba estuviesen los niños (alcanzando las operaciones formales) y con otras investigaciones previas, en particular las de Cañizares (1997) y Green (1982). Asociadas a este objetivo general, se pueden deducir los siguientes objetivos específicos del estudio exploratorio:

O2.1. Analizar la forma en que los estudiantes de sexto año de Educación

Primaria costarricense resuelven problemas de comparación y cuantificación de probabilidades simples, establecimiento del espacio muestral y determinación del juego equitativo.

Para lograr este objetivo se construyó un cuestionario en que se incluyen problemas con estos contenidos y se pasó a una muestra de estudiantes, realizándose un análisis detallado que ha dado lugar a diversas publicaciones. Tanto la construcción del cuestionario como los resultados obtenidos se describen en este capítulo.

O2.2. Comparar los resultados obtenidos en el estudio con lo establecido por Piaget e Inhelder (1951) para la edad de los estudiantes y con resultados de otras investigaciones previas.

A partir de los resultados de las investigaciones previas que se han considerado para este trabajo, descritas en el Capítulo 2, se analizan las diferencias con los obtenidos en este estudio exploratorio, tanto en porcentajes de respuestas correctas, como en las estrategias empleadas. Específicamente, se estudian las diferencias con los trabajos de Cañizares (1997) y Green (1982) con niños de la misma edad.

A continuación, se presentan, de forma resumida, las hipótesis que se establecen para este primer estudio, entendidas como expectativas sobre los resultados que se obtengan, puesto que al tratarse de un estudio exploratorio no se pretende contrastar de modo estadístico o formal estas hipótesis.

H1. Se espera encontrar diferencias respecto a los resultados obtenidos con estudiantes de la misma edad en investigaciones previas.

Puesto que los niños de la muestra han recibido instrucción en probabilidad y los de la muestra de Cañizares (1997) y Green (1982) no tuvieron preparación formal en este tema, se considera posible que haya diferencias en los resultados que se obtengan en los ítems del cuestionario que fueron tomados de estos estudios. La base es la influencia de la instrucción en las intuiciones primarias de los niños, la cual ya ha sido documentada en diferentes estudios (e. g. Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein et al., 1967).

H2. Se suponen diferencias en los resultados obtenidos en problemas de contexto de urnas y de contexto de ruletas.

Investigaciones como las de Maury (1984) revelan que algunos niños modifican sus estrategias en la comparación de probabilidades en función del contexto, discreto o continuo. En problemas que, aunque podrían ser equivalentes desde el punto de vista probabilístico o de razonamiento proporcional, presentan distintos resultados.

H3. Se predicen argumentos o estrategias en la resolución de problemas que han podido ser influenciadas por creencias de tipo subjetivo.

Se tiene presente que los niños traen consigo intuiciones o ideas que asumen como verdaderas y que pueden incidir en sus respuestas; por lo que se piensa evidenciar algunos sesgos y creencias subjetivas antes documentadas en estudios previos (e. g. Cañizares, 1997; Konold, 1989; Lecoutre,1992).

H4. Se espera evidenciar en los ítems de construcción de espacios muestrales, mayores dificultades en los apartados donde se pide un evento imposible.

Investigaciones como la de Cañizares (1997) evidenciaron que los niños tenían mayor dificultad en comprender términos como improbable e imposible, confundiendo suceso imposible con suceso muy poco probable. Pensamos que esto mismo puede ocurrir en este estudio.

3.3. METODOLOGÍA

El enfoque de la investigación fue interpretativo, ya que se centra, principalmente, en comprender los fenómenos educativos (en este caso los razonamientos probabilísticos de los niños) a través del análisis de elementos cuantitativos y cualitativos reflejados en las respuestas a un cuestionario (Cerrón, 2019; Gil et al., 2017).

La investigación es de tipo exploratorio, pues la muestra es intencional y moderada en tamaño; y de acuerdo con Bisquerra (1989), es una investigación aplicada, ya que busca utilizar la teoría desarrollada por otras investigaciones como las de Cañizares (1997), Fischbein y Gazit (1984) y Green (1982) en el contexto costarricense, con la finalidad de proporcionar conocimiento que oriente la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad a este nivel.

3.3.1. Muestra y contexto educativo

La muestra estuvo compuesta por 55 niños (27 niñas y 28 niños) de 6º curso de Educación Primaria, 40 de 11 años y 15 de 12 años, de los cuales 29 realizaban sus estudios en una institución privada y 26 en una pública (estatal-gratuita). Dichas escuelas pertenecen a los distritos de Oriental y Dulce Nombre (respectivamente) de la provincia de Cartago, Costa Rica.

Las dos instituciones siguieron el programa de estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica - MEP (2012). Sin embargo, mientras en la escuela pública se imparten 8 lecciones semanales de Matemática, según lo que establece el MEP, en la escuela privada se imparten 5 lecciones semanales de Matemática y, en concreto, una de ellas es dedicada específicamente al área de Estadística y Probabilidad. No obstante, hay que considerar que el número anual de lecciones efectivas de una institución pública es menor que en una institución privada por diversos motivos.

Ambos grupos desarrollaron los contenidos a partir del mismo libro de texto y al momento de la aplicación del cuestionario, como se indicó anteriormente, los niños estaban comenzando el curso lectivo por lo que no habían estudiado contenidos de probabilidad correspondientes al 6º curso.

3.3.2. El cuestionario

Se diseñó un cuestionario (Anexo 2) a partir de las investigaciones de Fischbein y Gazit (1984) y Green (1982), que también utilizó Cañizares (1997). La finalidad fue doble: primero, utilizar ítems que ya hubieran sido validados, y segundo, realizar una comparación internacional del razonamiento probabilístico de los niños costarricenses con estudiantes de una etapa educativa similar en otros países.

El instrumento estuvo compuesto por 14 ítems, de los cuales el número 1 es una adaptación del propuesto por Fischbein y Gazit (1984), los ítems del 2 al 12 se tomaron de Green (1982) y fueron utilizados por Cañizares (1997). Los ítems 13 y 14 son de elaboración propia. Los ítems del 1 al 9 y el 14 refieren a contextos probabilísticos con dispositivos discretos, mientras que los ítems del 10 al 13 a contextos con dispositivos continuos. Los ítems 1, 2, 13 y 14 son de respuesta abierta, mientras que los ítems del 3 al 12 se dividen en dos partes: la parte “a” de respuesta cerrada (selección única de opciones) y la parte “b” de respuesta abierta (pide justificar la respuesta escogida en la parte “a”).

Los ítems 1 y 2 están asociados a la comprensión del juego equitativo en niños, documentada por Cañizares et al. (1999) y en ellos aparecen distractores de tipo subjetivo para detectar el establecimiento de falsas relaciones causales por parte de los estudiantes.

En el ítem 3, se pide comparar las probabilidades de los sucesos elementales en un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables, ya que extraer el nombre de una niña (16/29) es más probable que extraer el de un niño (13/29).

El ítem 4 solicita determinar el evento más probable en un intento, luego de extraer sin remplazo tres elementos de una urna.

Los ítems del 5 al 9 plantean experimentos de urnas con bolas negras (n) y blancas (b), y se pide seleccionar la caja donde el suceso “sacar una bola negra” sea más probable. Lo que varía en los distintos ítems es la composición de las urnas.

Los ítems del 10 al 12 refieren a la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos aleatorios diferentes con dispositivos continuos (ruletas y trompos).

Los ítems 13 y 14 son de elaboración propia y proponen la construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: seguros, posibles, equiprobables e imposibles. El ítem 13 presenta cuatro ruletas dividas cada una en 4 partes con igual área. En el ítem 14 (contexto de urnas) la única restricción es que el espacio muestral consta solo de bolas negras y blancas; por lo que el niño puede construir un espacio muestral con cualquier cantidad de bolas.

3.3.3. Metodología de análisis

A partir de un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas al cuestionario, se analizó el razonamiento probabilístico subyacente en las respuestas de los niños, para poder describir los significados personales que asignan a las nociones de probabilidad los estudiantes seleccionados.

Siguiendo a Cañizares y Batanero (1997, p.103): “La simple consideración de las respuestas correctas nos puede llevar a conclusiones engañosas sobre el razonamiento probabilístico de los estudiantes…”, por lo que se estudiaron los argumentos formulados por los niños, para identificar los concordantes con los significados institucionales y detectar posibles conflictos semióticos. Más concretamente, se realiza un análisis de contenido (Zapico, 2007) para averiguar la naturaleza de las respuestas, que según Krippendorff (2013) nos permite establecer categorías de análisis que emergen de modo objetivo como resultado del análisis sistemático realizado. Este análisis se complementa con información numérica, que se muestra mediante tablas para la variable cuantitativa grado de corrección.

Los ítems del cuestionario se agruparon en cinco categorías de acuerdo con el tipo de actividad: cálculo de probabilidades simples, comprensión del juego equitativo, comparación de probabilidades en dispositivos discretos, comparación de probabilidades en dispositivos continuos y construcción de espacio muestral. En los siguientes apartados se describen con detalle los resultados en cada uno de estos apartados, que han sido publicados en diversos trabajos.

3.4. CÁLCULO DE PROBABILIDADES SIMPLES

3.4.1. Introducción

Un primer grupo de tareas se centró en el cálculo de probabilidades simples. Este tipo de ítems fueron propuestos en sus cuestionarios tanto por Cañizares (1997), como por Green (1982). Parte del contenido de esta sección ha dado origen a la siguiente publicación:

> Hernández-Solís, L. A. (2023). Sesgos en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 23*(2), 1-16. https://doi.org/10.18845/rdmei.v23i2.6368

3.4.2. Problemas analizados

En el cuestionario (Anexo 2) se incluyeron dos ítems sobre cálculo de probabilidades simples, cada uno de ellos con dos apartados. A priori se pensó que serían los más asequibles a los estudiantes. Estos ítems son los siguientes:

> **Ítem 3a:** Una clase de sexto año de una escuela tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los estudiantes se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:
>
> (A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña
> (B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño
> (C) Es igual de probable que sea de un niño que de una niña
> (D) No lo sé
>
> **Ítem 3b:** ¿Por qué?

Ítem 4a: En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se revuelven. Se sacan tres bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores a la bolsa. ¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad
(B) El azul tiene mayor probabilidad
(C) El verde tiene mayor probabilidad
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad
(E) No lo sé

Ítem 4b: ¿Por qué?

En el ítem 3, se pide comparar las probabilidades de los sucesos elementales en un experimento aleatorio simple con dos resultados no equiprobables, ya que extraer el nombre de una niña (16/29) es más probable que extraer el de un niño (13/29). En este caso no hace falta razonamiento proporcional, pues la respuesta correcta se puede obtener a partir de una comparación absoluta de casos favorables. Para esto, el niño debe haber interiorizado la operación disyunción y tener claro que existe una complementariedad entre los dos eventos. La respuesta correcta es la opción (B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño.

El ítem 4 solicita determinar el evento más probable en un intento, luego de extraer sin remplazo tres elementos de una urna. Es decir, se pregunta por el evento más probable en el espacio muestral $E_2=\{r, r, a, a, a, v, v\}$, resultante de extraer tres elementos del espacio muestral $E_1=\{r, r, r, r, a, a, a, a, v, v\}$. En este caso, no hace falta razonamiento proporcional, basta con comparar el número de casos en cada evento del nuevo espacio muestral E_2. La respuesta correcta es la opción (B) El azul tiene mayor probabilidad. Aquí podría ocurrir que el niño asocie la mayor cantidad de bolas rojas en la primera extracción con una mayor (o menor) probabilidad en la segunda extracción; lo cual puede estar ligado a la falacia del jugador o efecto de recencia positiva (o recencia negativa) (Fischbein, 1975).

3.4.3. Resultados y discusión

En la Tabla 3.4.1 se muestran los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas para los ítems 3 y 4 del cuestionario y el porcentaje de tipo de argumentos (correctos, parcialmente correctos e incorrectos) según corrección de respuestas.

Estos ítems solo requieren de una simple comparación de cantidades absolutas para obtener respuestas correctas, sin necesidad de cuantificar probabilidades, ni razonar proporcionalmente. Aquí nos interesa establecer el razonamiento del estudiante, detectando argumentos incorrectos asociados al sesgo de equiprobabilidad, a la falacia del jugador o efecto de recencia (Fischbein, 1975).

Tabla 3.4.1. Porcentaje de respuestas y argumentos en el ítem 3 y el ítem 4

Tipo de respuesta	Argumento[1]									
	Correcto		Parcialmente correcto		Incorrecto		No argumenta		Total[2]	
	i3	i4	i3	i4	i3	i4	i3	i4	i3	i4
Correcta	82,9	78,6	17,1	17,9		3,6			63,6	50,9
Incorrecta	5,0		10,0		85,0	96,3		3,7	36,4	49,1

[1] Porcentaje respecto al total de la fila; [2] Porcentaje respecto al total de estudiantes

El ítem 3 tuvo un porcentaje un poco mayor de respuestas correctas (63,6%) con relación al ítem 4 (50,9%). Además, en las respuestas correctas de ambos ítems, casi la totalidad de los argumentos fueron correctos o parcialmente correctos; y donde hubo respuestas incorrectas, un alto porcentaje de los argumentos fueron incorrectos; lo que revela una alta consistencia entre las respuestas y los argumentos asociados a estas.

Respecto a los resultados en investigaciones anteriores con estudiantes de la misma edad, en ambos ítems los porcentajes de respuestas correctas en este estudio fueron superiores a los obtenidos en Green (1982) y similares a los de Cañizares (1997). Específicamente en el ítem 3, en el primer estudio de Cañizares (1997) se obtuvo 63,7%, un 62,2% en el estudio posterior (Cañizares, 1997) y en Green (1982) se obtuvo 38,0%. En el ítem 4, el porcentaje en el primer estudio de Cañizares (1997) fue 47,3%, en su estudio posterior fue 51,4% y en Green (1982) fue 40,0%.

En cuanto a los porcentajes de corrección, según tipo de institución educativa, no existen diferencias significativas, aunque son mayores en la escuela pública. En el ítem 3, el 65,4% de los estudiantes de la escuela pública obtuvo la respuesta correcta, frente a 62,1% de la escuela privada y en el ítem 4 un 53,8% y 48,3%, respectivamente.

Estrategias de resolución

En la Tabla 3.4.2 se clasifican las estrategias de los estudiantes para comparar las dos probabilidades pedidas en los enunciados de los diferentes ítems, tomando como base las categorías descritas en Cañizares (1997) y Cañizares y Batanero (1997) y se agregaron otras categorías que surgieron en las respuestas. Estas estrategias van a depender, por un lado, del enunciado del ítem, y por otro, del nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes.

Tabla 3.4.2. Porcentaje de estrategias en los ítems 3 y 4

Estrategia	Ítem 3	Ítem 4
1. Comparar casos favorables y desfavorables	65,5	50,9
2. Comparar porcentajes de casos favorables respecto a posibles	3,6	
3. Enfoque en el resultado "*outcome approach*"	7,3	7,3
4. Recencia positiva o negativa		10,9
5. Poca diferencia entre casos favorables	7,3	1,8
6. Sesgo de equiprobabilidad	12,7	14,5
7. No considera la primera extracción		9,1
8. Errores aritméticos	3,6	5,5

Nota: Se subrayan las respuestas correctas para cada ítem.

En ambos ítems, un alto porcentaje de los estudiantes optaron por la estrategia de comparar de forma absoluta los casos favorables y casos desfavorables, consideraron solo la relación parte-parte. Sin embargo, hubo algunas estrategias que también consideraron la relación parte-todo, como la que se muestra en E17, quien considera todos los datos que aparecen en el enunciado. Es decir, no solo compara los casos favorables y desfavorables, sino que también pone en relación el número de casos favorables con el de casos posibles (parte-todo) mediante una aproximación de porcentajes. Este tipo de estrategias, según Piaget e Inhelder (1951), son desarrolladas en el período de las operaciones formales; y aunque los porcentajes no son exactos, el razonamiento requiere del dominio del cálculo con fracciones.

E17: Porque, hay más niñas en la clase que niños, por lo tanto, aumenta la probabilidad de las niñas a un 60 o 65% (aprox) y el de los niños a 40 o 38% (aprox) (respuesta B, ítem 3).

Por otro lado, también se encontraron bastantes argumentos incorrectos asociados al sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) o al Outcome approach (Konold, 1989). Algunos de estos se ejemplifican a continuación:

E03: Porque una persona no puede adivinar si es un niño o una niña (respuesta C, ítem 3).

E10: Porque uno no sabe si le sale verde o azul, rojo, etc. Es solo suerte que salga cualquier color (respuesta D, ítem 4).

Específicamente en el ítem 4, algunos argumentos están asociados con la falacia del jugador o efecto de recencia positiva (Fischbein, 1975). El hecho de que en la primera extracción se sacaran tres bolas de la bolsa y dos fueran rojas, fue un distractor que incidió en la respuesta de los niños. En los siguientes argumentos se muestra que los niños no consideran como independientes las extracciones, sino creen que los sucesos pasados afectan a los futuros.

E23: Porque la vez anterior hubo más rojas que azules y no saco ninguna verde (respuesta A, ítem 4).

E48: Porque ha salido más veces el rojo que los demás y el azul y el verde ha salido menos veces (respuesta A, ítem 4).

Sesgos identificados en los argumentos de los estudiantes

En la resolución de los ítems citados se encontraron argumentos asociados a sesgos o creencias subjetivas, que han sido documentadas en estudios previos y han sido descritas en el marco teórico y antecedentes. En síntesis, en el ítem 3 se encontró 27,3% de respuestas con sesgos de razonamiento y en el ítem 4 se identificó un 34,5%. A continuación, se ejemplificarán los tipos de sesgos que se encontraron en estas respuestas a los ítems del cuestionario.

Sesgo de equiprobabilidad. Algunos estudiantes en su respuesta interpretaron incorrectamente la Regla de Laplace, asignando equiprobabilidad a eventos con distinta probabilidad, ya que suponen que todos los sucesos aleatorios son equiprobables por naturaleza sin considerar el espacio muestral, mostrando el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). En los ejemplos E6 y E7 ambos estudiantes seleccionaron el distractor que fue predestinado para evaluar este sesgo.

E6: Porque, aunque haya más niñas que niños hay la misma probabilidad de que salga un trozo de papel con el nombre de un niño que un trozo de papel con el nombre de una niña (respuesta C, ítem 3).

E7: Porque hay 2 verdes 3 azules y 2 rojas entonces puede salir cualquiera (respuesta D, ítem 4).

Poca diferencia entre casos favorables. Algunos estudiantes asociaron la equiprobabilidad al hecho de que la diferencia de casos favorables entre un evento y otro sea pequeña. Este tipo de razonamiento se ha encontrado en Cañizares (1997) y es una confusión similar a suponer los sucesos muy probables como seguros o los poco probables como imposibles (Hernández et al., 2021b). Generalmente, estos estudiantes eligen la opción (C) en el ítem 3 y la (D) en el ítem 4. Los siguientes son algunos ejemplos:

E8: Porque, la cantidad de niños y niñas no tienen mucha diferencia (respuesta C, ítem 3).

E9: Porque hay 2 verdes, 3 azules y 2 rojas entonces puede salir cualquiera. (respuesta D, ítem 4).

Debido a que los ítems no requieren razonamiento proporcional, sino una comparación de casos favorables, una indebida asociación intuitiva entre aleatoriedad y equiprobabilidad puede incidir en este tipo de argumentos. Cañizares (1997) encontró que en el ítem 4 solo 8,4% de los estudiantes de la muestra indicaban equiprobabilidad, debido a que la diferencia entre las cantidades de bolas es muy pequeña, y por tanto no influye significativamente en la comparación de probabilidades. En este estudio solo cuatro estudiantes presentaron este sesgo en el ítem 3 y sólo uno en el ítem 4; sin embargo, es necesario que el docente considere este aspecto a la hora de proponer tareas donde la cantidad de casos favorables entre eventos sea parecida.

Enfoque en el resultado. Algunos estudiantes no interpretan el problema de forma probabilística, sino determinista, pensando que se les pide predecir cuál será el resultado en un experimento aleatorio. Esta interpretación es incorrecta, ya que el hecho de que los sucesos aleatorios sean impredecibles hace que se piense que es imposible estimar una probabilidad para los mismos. Los siguientes son ejemplos de argumentos asociados al *enfoque en el resultado* (Konold, 1989), que solo se evidenciaron en los ítems:

E10: Porque una persona no puede adivinar si es un niño o una niña (respuesta C, ítem 3).
E11: Porque uno no sabe si le sale verde o azul, rojo, etc. Es solo suerte que salga cualquier color (respuesta D, ítem 4).

También se encontraron argumentos que combinan el sesgo de equiprobabilidad con el enfoque en el resultado, por ejemplo:

E12: Porque como están revueltos tienen igual probabilidad, porque también uno no sabe de qué lado va a sacar ni cual nombre (respuesta C, ítem 3).

Otro estudiante utilizó un argumento en donde existe cierta contradicción entre su intuición de lo imprevisible y su tendencia a la cuantificación de los datos presentados:

E13: Porque es al azar puede salir de un niño o de una niña, pero es más probable de las niñas porque son más (respuesta C, ítem 3).

Recencia positiva o negativa. A priori, se esperaba que en el ítem 4 se obtuviera algún porcentaje de argumentos en los que se asociara la mayor cantidad de bolas rojas en la primera extracción con una mayor (o menor) probabilidad en la segunda; lo cual puede estar ligado al efecto de recencia positiva o negativa (Fischbein, 1975). Cañizares (1997) señala que el informar sobre el resultado de varias extracciones previas sin reemplazo podría influir en las respuestas de los estudiantes, considerando el nuevo evento como dependiente de los anteriores.

Precisamente en este ítem, se identificaron seis argumentos asociados a este sesgo. Por ejemplo, el argumento E14 se asocia a la recencia positiva porque se opta por responder que es la bola roja por ser la que más ha salido, y el argumento E15 al efecto de recencia negativa, ya que tendría mayor probabilidad de salir la que aún no lo ha hecho (bola de color verde). En los siguientes argumentos se muestra que los niños no consideran como independientes las extracciones, sino creen que los sucesos pasados afectan a los futuros.

> E14: Porque ha salido más veces el rojo que los demás y el azul y el verde ha salido menos veces (respuesta A, ítem 4).
>
> E15: Porque no creo que vaya a salir otro porque es de color que no han sacado (respuesta C, ítem 4).

Consideraciones físicas. En el contexto de urnas, solo se dio un argumento asociado a consideraciones físicas (además de estar asociado al sesgo de equiprobabilidad y al enfoque en el resultado), el argumento E12, que hace referencia a la disposición física de los trozos de papel (con el nombre de estudiantes) en el sombrero.

> E12: Porque como están revueltos tienen igual probabilidad, porque también uno no sabe de qué lado va a sacar ni cual nombre (respuesta C, ítem 1).

3.4.4. Conclusiones

En general, en ambos ítems los porcentajes de respuestas correctas en este estudio fueron superiores o similares a los de estudios previos con los que se realizó la comparación. Se presume que estos resultados pudieron deberse a que este tipo de tareas (experimentos con una sola urna), especialmente el ítem 3, se aproximan más al tipo de problemas que pueden haber estudiado los niños en los cursos anteriores, de acuerdo a lo revisado en los libros de texto utilizados y a las entrevistas con sus docentes.

Asimismo, en este estudio se ha informado de la existencia de algunos sesgos de razonamiento en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de Educación Primaria. De este modo, se brinda conocimiento que puede incidir en la comprensión de los conceptos probabilísticos elementales que se habrían de desarrollar en este nivel educativo, según el currículo costarricense actual (MEP, 2012). La relevancia de este trabajo se justifica por la falta de investigaciones sobre la influencia de factores subjetivos en la resolución de tareas probabilísticas con estudiantes costarricenses.

A lo largo del trabajo se han analizado ejemplos de argumentos que pudieron ser influenciados por estos sesgos o creencias de tipo subjetivo, confirmando las expectativas que se plantearon a priori. Aunque, en un porcentaje pequeño, se evidencia el sesgo de equiprobabilidad, enfoque en el resultado y la disposición de las fichas; y específicamente en el ítem 4, algunos argumentos estuvieron asociados con el efecto de recencia (Fischbein, 1975). Un aspecto a señalar fue la respuesta al ítem 3 de cinco estudiantes, pues consideraron que había equiprobabilidad entre dos eventos por no tener una diferencia, para ellos significativa, entre los casos favorables.

3.5. SIGNIFICADOS PERSONALES DEL JUEGO EQUITATIVO

3.5.1. Introducción

En esta sección nos centramos en los juegos de azar, que han sido una práctica común en todas las civilizaciones y desde su origen estuvieron asociados a ideas intuitivas sobre la esperanza matemática y el juego equitativo. De hecho, el cálculo de probabilidades se origina por la necesidad del jugador de valorar de antemano sus posibles pérdidas o ganancias (Batanero et al., 2005). Este comienzo histórico de la teoría en probabilidad tiene un gran impacto en su didáctica, pues los juegos de azar son también uno de los principales contextos en donde los niños empiezan a tomar conciencia de la impredecibilidad de sus resultados y surge su interés por realizar estimaciones probabilísticas, incluso antes de la instrucción (Batanero et al., 2019; Peard, 1990).

El currículo costarricense plantea para la Educación Primaria el análisis de las probabilidades mediante juegos de azar y problemas del contexto estudiantil, y una expectativa de aprendizaje es identificar eventos igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento (MEP, 2012). Sin embargo, no se hace referencia explícitamente a situaciones asociadas a la idea de juego equitativo o donde se deba establecer la ganancia si uno de ellos tiene ventaja de acuerdo con la esperanza de ganar de cada jugador. Tampoco se dispone en Costa Rica de investigaciones que evalúen la comprensión de los estudiantes de Educación Primaria sobre este tema, aunque sí se han iniciado estudios de evaluación relacionados con otros contenidos de probabilidad (Hernández-Solís et al., 2021a).

Para contribuir a llenar este vacío, el objetivo de esta parte del estudio exploratorio es describir los significados personales que los estudiantes costarricenses de sexto año de Educación Primaria asignan al juego equitativo, e identificar algunos conflictos semióticos de estos estudiantes, comparando los resultados obtenidos con los establecidos en otras investigaciones previas. El contenido de este apartado se ha publicado en el siguiente artículo:

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M.M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021d). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños costarricenses. *Innoeduca, 23*(34), 228-243. http://dx.doi.org/10.22458/ie.v23i34.3429

3.5.2. Problemas analizados

A los estudiantes se les propusieron dos problemas asociados a la comprensión del juego equitativo, que en el cuestionario del estudio (Anexo 2) corresponden a los ítems 1 y 2 respectivamente. Cada estudiante los resolvió por escrito e individualmente, en presencia de su profesor y uno de los autores, los cuales se aseguraron de la correcta comprensión de los enunciados. Los problemas empleados fueron los siguientes:

Ítem 1: Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en una caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan a sacar al mismo tiempo una bola de su caja (con los ojos cerrados) y el ganador es el niño que saque una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente bolas de igual color, devuelven las bolas a sus cajas y el juego continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre lo que dice Eduardo?

Ítem 2: María y Esteban juegan a lanzar un dado.
María gana 1 confite si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de confites. ¿Cuántos confites debe ganar Esteban cuando sale el 1, para que el juego sea justo o equitativo?

El primer problema es una adaptación de otro propuesto por Fischbein y Gazit (1984), y el ítem 2 fue propuesto por Green (1982); ambos fueron empleados por Cañizares (1997). El ítem 1 se resuelve mediante la comparación de probabilidades simples de un mismo suceso en dos experimentos, con solo dos sucesos no equiprobables ("sacar una bola blanca" o "sacar una bola negra"). Debido a la composición de las urnas, se trata de un juego equitativo entre Eduardo y Luis, ya que ambos tienen una probabilidad de ganar igual a 1/3. Sin embargo, aparece un distractor que incita al estudiante a realizar una comparación absoluta de los casos favorables, siendo esta una estrategia errónea. La respuesta correcta es indicar que Eduardo no tiene razón y los dos niños tienen igual probabilidad de ganar.

Se esperan argumentos basados en estrategias multiplicativas (correspondencia o razonamiento proporcional), considerando que el significado personal varía de acuerdo con las prácticas de los estudiantes. Por ejemplo, sea P_1 la práctica de un estudiante que indica que el juego es justo porque ambos niños tienen el doble de posibilidades de sacar una bola negra que de una blanca. Otro estudiante podría indicar que, aunque la caja de Luis contiene el triple de bolas blancas que la de Eduardo, también existe el triple de bolas negras, luego el juego es justo (P_2). Un tercero podría indicar que Eduardo tiene razón al afirmar que no es juego justo, porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la de Eduardo (P_3). Así, el significado en las dos primeras prácticas sería correcto, desde el punto de vista institucional, mientras que la tercera evidencia un conflicto semiótico que se puede caracterizar por un razonamiento aditivo del sujeto al comparar probabilidades. En la Tabla 3.5.1 se presenta la configuración epistémica asociada a la situación-problema del ítem 1.

Tabla 3.5.1. Configuración epistémica asociada a la situación-problema del ítem 1

Tipos	Objetos matemáticos	Significado en la situación
Situación problema	Decidir si un juego es equitativo	Decidir si la ganancia esperada de los jugadores es la misma.
Lenguajes	Sacar / devolver	Reemplazamiento en una experiencia.
	Juego justo	Igual posibilidad de ganancia.
	Números enteros y comparativos	Numerales (10, 20, 30 y 60) y sus relaciones comparativas (más o menos que, etc.)
Conceptos	Experimento aleatorio	El color en la bola extraída no se sabe a priori.
	Espacio muestral	Idéntico en cada experimento aleatorio: $E = \{b, n\}$.
	Evento o suceso	El evento evaluado es sacar una bola blanca.
	Probabilidad	Definición clásica o Laplaciana: fracción con denominador el número de todos los casos posibles y con numerador el número de casos favorables al suceso de interés (Laplace, 1985/1814, p. 28).
	Proporcionalidad	Relación proporcional de bolas de cada color en las cajas de razón ½ (10b/20n y 30b/60n).
	Juego equitativo	Idéntica esperanza de ganancia de todos los jugadores.
Proposiciones	Equiprobabilidad	Si las razones de casos favorables y posibles de dos o más eventos son equivalentes, los eventos son equiprobables.
Procedimientos	Comparación proporcional	En ambas cajas, por cada bola blanca hay dos bolas negras.
	Correspondencia entre los elementos	Aunque Luis tiene el triple de bolas blancas que Eduardo, también tiene el triple de bolas negras.
	Cálculo de probabilidades	Cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.
	Equivalencia de ganancias	Igualar las esperanzas de ganancia de todos los jugadores, si las probabilidades de los jugadores no son iguales.
Argumento	Deductivo	Los eventos simples son equiprobables por tener las cajas composiciones proporcionales.

En el ítem 2 se pide encontrar el número de confites que deben recibir dos niños en un juego, de modo que se equipare la ganancia de los jugadores de acuerdo con la probabilidad que tienen de ganar. Para resolverlo, el estudiante tiene que darse cuenta de que las ganancias deben ser inversamente proporcionales a la probabilidad de ganar de cada jugador; es decir, como Esteban tiene una probabilidad de perder 5 veces mayor que María, si ella gana 1 confite, entonces Esteban debería obtener 5 confites para que el juego sea justo. La configuración epistémica del problema que se plantea en el ítem 2 se presenta en la Tabla 3.5.2.

Se llevó a cabo un análisis cuantitativo y cualitativo de las respuestas de los estudiantes a los dos problemas planteados y se analizaron sus argumentos para identificar aquellos concordantes con los significados institucionales y detectar posibles conflictos semióticos (Godino et al., 2007; 2019).

Tabla 3.5.2. Configuración epistémica asociada a la situación-problema del ítem 2

Tipos	Objetos matemáticos	Significado en la situación
Situación problema	Decidir el número de confites que debe ganar un jugador para que el juego sea equitativo	Igualar la esperanza matemática de los dos jugadores
Lenguajes	Lanzar un dado Juego "justo" Números enteros	Experimento aleatorio. Igual ganancia esperada. Numerales (1 a 6)
Conceptos	Experimento aleatorio Espacio muestral Evento o suceso Probabilidad Proporcionalidad inversa Juego equitativo	El número que saldrá en el dado no se conoce *a priori* Conjunto de resultados. $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ El evento evaluado es "sacar un 1". Definición clásica o Laplaciana: "fracción con denominador el número de todos los casos posibles y con numerador el número de casos favorables al suceso de interés" (Laplace, 1985/1814, p. 28). Debe haber proporcionalidad inversa entre la probabilidad y la ganancia de cada jugador Idéntica esperanza de ganancia de todos los jugadores.
Proposi-ciones	Equiprobabilidad	Todos los números del dado son equiprobables.
Procedi-mientos	Cálculo de probabilidades Equivalencia de ganancias	Cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. Igualar las esperanzas de ganancia de todos los jugadores, si las probabilidades de los jugadores no son iguales.
Argumento	Deductivo	Si un jugador tiene cinco veces más probabilidad, el otro debe tener cinco veces más ganancia en cada juego.

3.5.3. Resultados y discusión

Las respuestas a los problemas se clasificaron en primer lugar en correctas, si el estudiante indica en el primer problema que el juego es equitativo y si calcula correctamente la ganancia esperada en el segundo problema, e incorrecta si no llega a estas soluciones. En las soluciones correctas de ambos problemas se tienen en consideración los objetos matemáticos incluidos en las configuraciones epistémicas explicitadas en las Tablas 3.5.1 y 3.5.2. Los argumentos se clasificaron como correctos, parcialmente correctos e incorrectos y se muestran ejemplos de cada una de estas categorías.

Hay que resaltar que el ítem 2 tuvo mayor porcentaje de respuestas correctas que el ítem 1 (32,7% vs. 16,4%) y explicamos esta diferencia por una mayor dificultad en el problema planteado en el ítem 1, ya que el distractor “Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.” pudo haber inducido a los estudiantes a emplear estrategias aditivas para comparar las probabilidades.

Respecto a los resultados en investigaciones anteriores, con estudiantes de la misma edad (11-12 años), en ambos problemas los porcentajes de respuestas correctas en nuestro estudio fueron bastante inferiores. Con respecto al ítem 1, en Cañizares (1997) se obtuvo 63,8% de respuestas correctas en su primer estudio y 32,5% en el segundo, y en Fischbein y Gazit (1984) se obtuvo 50,4% de respuestas correctas en estudiantes que no tuvieron instrucción previa y 53,0% en estudiantes que sí la tuvieron. En el ítem 2, el porcentaje de respuestas correctas obtenido en el primer estudio de Cañizares (1997) fue 45,1%, en su segundo estudio el 56,8% y en Green (1982) fue del 46,0%; en definitiva, más de diez puntos porcentuales por encima de los resultados de nuestro trabajo.

Cabe destacar que en el ítem 1, los estudiantes de la escuela privada tuvieron un porcentaje de respuestas correctas del 24,1%, frente a un 7,7% en la escuela pública, aunque todavía es muy inferior en comparación a los estudios previos; mientras que en el ítem 2 no hubo diferencias significativas entre escuelas (34,5% privada vs. 30,7% pública).

Análisis de argumentos

Con la finalidad de identificar los conflictos semióticos y las creencias de tipo subjetivo que intervienen en la asignación de probabilidades y que pueden incidir en los significados personales sobre probabilidad y el concepto de juego justo, se llevó a cabo un estudio de los argumentos de los estudiantes. Estos argumentos se clasificaron en correctos, parcialmente correctos e incorrectos.

En relación con la solución del ítem 1 se consideraron correctos los argumentos asociados a estrategias de correspondencia para comparar las probabilidades de los dos jugadores, donde se establece un criterio de proporcionalidad en una fracción para aplicarlo a la otra. En estas estrategias el estudiante establece un criterio de proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de un jugador para compararlo con esa misma relación en el otro jugador. Este tipo de argumento se observa en los dos ejemplos siguientes:

E1: Yo creo que tienen exactamente las mismas probabilidades porque Eduardo tiene 10 (bolas blancas) lo que es la mitad de 20 (bolas negras) y Luis tiene 30 que es la mitad de 60; entonces Eduardo está incorrecto.

E2: Mi opinión sobre lo que dice Eduardo es que tiene un poco de razón porque en la caja de Luis sí hay más bolas blancas que en la suya, pero los dos niños tienen el doble de bolas negras que bolas blancas en cada una de sus cajas.

Esta estrategia para comparar fracciones fue descrita por Noelting (1980a; 1980b), quien la diferencia en dos tipos: en el primer tipo, que denominó "entre", se comparan los términos de una fracción con los de la otra; en el segundo tipo, que denominó estrategia "intro", se comparan numerador y denominador de una misma fracción para establecer una razón y luego esta razón se compara con la correspondiente en la segunda fracción. En los ejemplos analizados, E1 utiliza una estrategia "intro", donde se establece la razón (1:2) de la fracción correspondiente a Eduardo, para posteriormente compararla con la razón correspondiente a Luis. Por otro lado, aunque E2 primero realiza una comparación del número absoluto de casos favorables (inducido por el distractor antes mencionado), luego establece la razón de bolas negras respecto a las blancas (2:1) para responder correctamente a la pregunta.

Se consideran parcialmente correctos algunos argumentos que muestran conflictos semióticos, como se muestra en los siguientes ejemplos:

E3: No porque él tiene 60 negras y Eduardo 20 si multiplicamos por 3 las de Eduardo va a salir la misma cantidad de Luis.

E4: Eduardo tiene y no tiene razón; tiene razón porque Luis tiene 20 bolas más que Eduardo pero Luis tiene más bolas negras que blancas, entonces ambos tienen la misma probabilidad.

En el primer ejemplo, E3 se centra en la diferencia entre los casos desfavorables (3 frente a 1) y aunque implícitamente pareciera que considera los casos favorables, sin embargo, muestra un conflicto semiótico al no indicarlos en su argumento al comparar probabilidades, y otro también al realizar comparaciones aditivamente; por lo cual, el argumento no es completamente correcto. Por su parte, E4 muestra también el conflicto semiótico consistente en usar una estrategia aditiva, pues compara los casos favorables en los dos jugadores hallando su diferencia y no su razón (sólo indica que hay más casos favorables que desfavorables); sin embargo, lo consideramos parcialmente correcto porque sí indica que los dos jugadores tienen igual probabilidad.

Por otra parte, se consideraron argumentos incorrectos; los que giraron en torno a lo que planteaba el distractor, que indicaría un conflicto semiótico consistente en suponer que hay más probabilidad siempre que haya más casos favorables. En general, estos estudiantes compararon sólo el valor absoluto del número de casos favorables (por ejemplo, E5) o desfavorables (por ejemplo, E6). Este conflicto semiótico también fue encontrado en Cañizares et al. (1999), donde los estudiantes únicamente suponían que menos casos favorables indican menor probabilidad.

> E5: Sí hay más probabilidad de que Luis gane ya que tiene más bolas blancas que Eduardo.
>
> E6: En mi opinión Eduardo tiene más ventaja que desventaja, debido a que Luis tiene 40 bolas negras más que Eduardo y solo tiene 20 bolas blancas más.

Otros conflictos semióticos que afloraron en este ítem fueron suponer que el juego sería equitativo únicamente si se juega exactamente con el mismo número de bolas de cada color, o indicar que el juego no es equitativo porque un jugador tiene en total 90 bolas y el otro solo 30, es decir, porque no tienen el mismo número de casos posibles.

Se encontró mayor dificultad en los estudiantes al argumentar su respuesta al problema planteado en el ítem 2, donde no se hallaron argumentos completamente correctos, aunque cabe mencionar que una proporción importante de estudiantes identifica la mayor probabilidad de María para ganar. De este modo, se han considerado correctas las respuestas que indican que Esteban debe recibir 5 confites para que el juego sea justo, aunque no lo justifiquen o su justificación sea incorrecta, puesto que llegaron a equiparar la ganancia. Estos estudiantes muestran una intuición correcta sobre la idea de esperanza matemática (Schlottmann y Anderson, 1994), aunque presenten algún conflicto semiótico en sus argumentaciones; como, por ejemplo, se muestra en el argumento del estudiante E7, quien no asume la independencia en las partidas del juego.

> E7: Para que el juego sea justo Esteban debería ganar lo que María ganaría si tirara el dado 5 veces con su probabilidad (5 confites).

Se considera incorrecto el argumento en que claramente hay un error en la obtención de la probabilidad de ganar cada jugador, como el caso de E8.

> E8: Tiene que ganar 5 porque María tiene el 75% más de probabilidad de ganar.

Otros conflictos semióticos en el problema planteado en el ítem 2 fueron indicar que el juego sería equitativo si también Esteban ganase un confite al salir el 1, es decir, que los jugadores debieran jugar al mismo número; calcular incorrectamente el número de confites (por ejemplo, 2 o 6 o bien especificar que hay que darle más, sin especificar cuántos). En todos estos casos se observa dificultad con la proporcionalidad en los estudiantes.

En la Tabla 3.5.3 se presenta un resumen de los resultados del análisis de los argumentos en cada problema, mostrando también la proporción de respuestas en cada uno, según el grado de corrección. Se observa que el porcentaje de argumentos correctos cuando la respuesta fue correcta es el mismo en ambos problemas (22,2%), mientras que la relación de respuestas correctas con argumentos correctos o parcialmente correctos no es la misma y los resultados muestran la mayor dificultad de los estudiantes ante la argumentación en el ítem 2 (88,9% de argumentos correctos o parcialmente correctos en el ítem 1 y 61,0% en el ítem 2).

Cabe señalar que Cañizares (1997) obtuvo para este primer problema un 26,6% de argumentos pertinentes asociados con la estrategia de correspondencia, frente al 21,9% obtenido en nuestro estudio asociado a dicha estrategia, lo que revela la dificultad del problema. Consideramos que el distractor en el ítem 1 influye en los argumentos de los estudiantes y hace que el nivel de dificultad aumente; aunque sea considerada una tarea apropiada para la etapa de desarrollo del razonamiento proporcional en edad promedio de 10,5 años, según Noelting (1980a; 1980b), debido a la composición de las bolas en las cajas.

Por último, hay que destacar que, aunque los estudiantes habían recibido instrucción en el tema de probabilidades, no habían trabajado este tipo de tareas sobre juego equitativo. A pesar de ello, parte de los estudiantes resolvieron con éxito los problemas y dieron argumentos pertinentes, por lo que los resultados obtenidos serían producto de las intuiciones primarias que hubieran adquirido los estudiantes y no debido a la enseñanza recibida.

Tabla 3.5.3. Porcentaje de respuestas y argumentos en los problemas propuestos en el ítem 1 (i1) e ítem 2 (i2)

Tipo de respuesta	Argumento[1]									
	Correcto		Parcialmente correcto		Incorrecto		No argumenta		Total[2]	
	i1	i2	i1	i2	i1	i2	i1	i2	i1	i2
Correcta	22,2	22,2	66,7	38,8	11,1	16,7		22,2	16,4	32,7
Incorrecta	2,2		6,5	27,0	87,0	56,8	4,3	16,2	83,6	67,3

[1] Porcentaje respecto al total de la fila; [2] Porcentaje respecto al total de estudiantes.

3.5.4. Conclusiones

Aunque a priori se esperaba encontrar diferencias respecto a los resultados obtenidos con estudiantes de la misma edad en investigaciones previas (Cañizares, 1997; Fischbein y Gazit, 1984; Green, 1982), puesto que los estudiantes en la muestra utilizada sí habían recibido instrucción en probabilidad, estas expectativas no se cumplieron. Se presumía obtener mejores resultados en relación con dichos estudios, esperando una influencia positiva de la instrucción en las intuiciones de los estudiantes (Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein et al., 1967).

Respecto a los resultados en investigaciones anteriores con estudiantes de la misma edad, en ambos ítems, los porcentajes de respuestas correctas en nuestro estudio fueron inferiores. El ítem 1, en el primer estudio de Cañizares (1997) obtuvo 63,8% de respuestas correctas, en su segundo estudio el 32,5% (Cañizares, 1997) y en Fischbein y Gazit (1984) se obtuvo 50,4% en niños que no tuvieron instrucción previa y 53,0% en niños que sí la tuvieron, que es una gran diferencia pues se supera el doble del porcentaje de los resultados de este estudio. En el ítem 2, el porcentaje de respuestas correctas obtenido en el primer estudio de Cañizares (1997) fue 45,1%, en su segundo estudio el 56,8% (Cañizares, 1997) y en Green (1982) fue del 46,0%, más de diez puntos porcentuales por encima de los resultados de este estudio.

Cabe destacar que en el ítem 1, la escuela privada tuvo un porcentaje de respuestas correctas de 24,1% (7,7% en la escuela pública), todavía muy inferior a los estudios previos; mientras que en el ítem 2 no hubo diferencias significativas entre escuelas (34,5% privada vs 30,7% pública).

Una explicación a los resultados obtenidos es que, aunque los estudiantes de la muestra han estudiado algunos contenidos probabilísticos, las tareas matemáticas propuestas en este estudio no han sido habituales para ellos durante su instrucción.

Los estudiantes mostraron, en general, una adecuada comprensión de la noción de juego equitativo, aunque se presentaron algunos conflictos semióticos como considerar que para ser equitativo todos los jugadores han de jugar al mismo resultado o no tener en cuenta la independencia de ensayos sucesivos. Más difícil para ellos fue la comparación de probabilidades, mostrando de nuevo conflictos consistentes en considerar únicamente los casos favorables, únicamente los desfavorables o la diferencia entre ellos en dicho cálculo (estrategias aditivas).

Por otra parte, presentan grandes dificultades al justificar la equiparación de ganancia (ítem 2) según la esperanza de ganar de cada jugador, lo que es debido a una falta de desarrollo de razonamiento proporcional. Una parte de los estudiantes asignan igualdad de ganancias manifestando argumentos asociados al sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), resultados similares a los documentados en Cañizares et al. (1999).

3.6. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES EN URNAS

3.6.1. Introducción

En esta sección se analiza la información recogida en el estudio exploratorio sobre las estrategias que los niños aplican al comparar probabilidades en dos urnas y la dificultad que para este grupo etario tiene esta tarea en función del nivel de razonamiento proporcional requerido. Este estudio se centra en estudiantes de 6º curso de Educación Primaria (edades entre 11 y 12 años) al ser el curso donde finaliza esta etapa educativa, como se describió más detalladamente en la Sección 3.3.1. Un segundo objetivo es comparar los resultados obtenidos con los de la investigación previa sobre el tema. Los resultados han sido publicados en el siguiente artículo:

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M.M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. *Uniciencia, 35*(2), 1-19, https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9

3.6.2. Problemas analizados

En esta sección se analizan los ítems del 5 al 9 del cuestionario usado en el estudio exploratorio (Anexo 2). Son todos semejantes al siguiente, cambiando la composición de las urnas:

Ítem 5a: En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)

Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál caja elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad
(D) No lo sé

Ítem 5b: ¿Por qué?

El ítem 5 corresponde al nivel intuitivo inferior (IA) descrito por Noelting (1980a; 1980b), ya que en las dos urnas hay el mismo número de casos desfavorables y un número desigual de casos favorables. En el ítem 6 hay igualdad de casos favorables y desigualdad de casos desfavorables, por lo que corresponde al nivel intuitivo medio

(IB), según Noelting (1980a; 1980b). Por tanto, en estos dos ítems no es necesario usar los cuatro datos del enunciado, pues basta comparar o bien el número de casos favorables (ítem 5) o desfavorables (ítem 6). Estos dos ítems corresponden al primer nivel de dificultad descrito por Pérez Echeverría et al. (1986), puesto que no requieren razonamiento proporcional.

En los ítems 7 a 9 el número de casos favorables es múltiplo del de desfavorables. En el ítem 7 (nivel operacional concreto inferior IIA, según Noelting (1980a; 1980b), el número de casos favorables y desfavorables es el mismo en las dos urnas; en el ítem 9, nivel operacional concreto superior IIB, según Noelting (1980a; 1980b), en las dos urnas el cociente entre casos favorables y desfavorables es 3; y en el ítem 8, nivel operacional formal inferior IIIA, según Noelting (1980a; 1980b), este cociente es 3 en una urna y 2 en la otra. En estos tres últimos ítems es necesario usar los cuatro datos del enunciado y el razonamiento proporcional para establecer una razón en una de las urnas y comparar con la otra. Los ítems 7 y 9 son de nivel 2 en la clasificación de Pérez Echeverría et al. (1986), pues existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables en cada urna o entre casos favorables y desfavorables de las dos urnas. El ítem 8 es de nivel 3 en esta clasificación, pues hay una relación sencilla en la primera urna (3 casos favorables por cada desfavorable) que se puede comparar con la existente en la otra (dos a uno). Una diferencia en este estudio, en comparación con los ítems de Cañizares (1997) y Green (1982), es que se le dio al estudiante la representación gráfica de las urnas en los ítems 8 y 9, que no se dio en estos estudios previos.

En la Tabla 3.6.1 se resume la clasificación de los ítems de acuerdo con el nivel de razonamiento proporcional requerido para su resolución, según Noelting (1980a; 1980b), y su nivel de dificultad según Pérez Echeverría et al. (1986). En esta tabla se presenta también la composición de las dos urnas que se comparan (a_1,b_1) y (a_2,b_2), siendo *a* los casos favorables y *b* los casos desfavorables en los experimentos propuestos en los ítems. Esta tabla permitirá analizar las estrategias de los estudiantes, confrontándolas con lo que se espera en un problema de comparación de fracciones del mismo nivel de dificultad (Pérez Echeverría et al., 1986) en la categorización de Noelting (1980a; 1980b).

Tabla 3.6.1. Nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a; 1980b) y nivel de dificultad (Pérez Echeverría et al., 1986) requerido en los ítems

Etapa	Nivel de razonamiento proporcional	Ítem	Composición (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)	Nivel de dificultad
IA	Intuitiva inferior	5	(3,1) vs (2,1)	1
IB	Intuitiva media	6	(5,2) vs (5,3)	1
IIA	Operacional concreta inferior	7	(2,2) vs (4,4)	2
IIB	Operacional concreta superior	9	(3,1) vs (6,2)	2
IIIA	Operacional formal inferior	8	(12,4) vs (20,10)	3

3.6.3. Resultados y discusión

En la Tabla 3.6.2 se presentan los porcentajes de respuestas correctas obtenidas en los ítems del cuestionario; considera, además, los resultados obtenidos con estudiantes de la misma edad en investigaciones previas: Cañizares (1997) en España y Green (1982) en Reino Unido.

Los ítems 5 y 6 resultaron relativamente sencillos para los sujetos de este estudio, pues más de dos terceras partes realizó correctamente la tarea. Estos ítems son de nivel de dificultad 1, según Pérez Echeverria et al. (1986), y niveles IA y IB, respectivamente, según Noelting (1980a; 1980b), por lo que la mayor parte de la muestra ha alcanzado estos primeros niveles. Estos ítems pueden resolverse correctamente con solo comparar los casos favorables o desfavorables (estrategias de una variable).

Tabla 3.6.2. Porcentaje de respuestas correctas en los ítems de nuestro trabajo y los obtenidos por Cañizares (1997) y Green (1982) con estudiantes de 6º curso (11-12 años)

Ítem	Costa Rica (Presente estudio)	España (Cañizares, 1997)	Reino Unido (Green, 1982)
5	83,6	70,3	88,0
6	72,7	67,6	55,0
7	41,8	54,1	43,0
8	50,9	27,0	38,0
9	16,4	-	20,0

El ítem 8, correspondiente al nivel de razonamiento proporcional IIIA (Noelting, 1980a; 1980b) y nivel de dificultad 3, según Pérez Echeverría et al. (1986), tuvo una dificultad moderada (50,9 % lo resuelven correctamente), por lo que la mitad de estudiantes alcanzó este nivel. Los más difíciles fueron los ítems 7 y 9, ambos de nivel de dificultad 2, según Pérez Echeverría et al., 1986; en este último (nivel IIB en la clasificación de Noelting (1980a; 1980b)) solo el 16,4 % de estudiantes respondió correctamente.

Hay una inversión en la dificultad esperada en el ítem 9, que teóricamente debiera ser más sencillo que el ítem 8, según la categorización por niveles de Pérez

Echeverría et al. (1986) (Tabla 3.6.2), pero resulta más difícil al alumnado. Se puede pensar que para los niños ha sido más sencillo comparar la igualdad entre casos favorables (ítem 6) y desfavorables (ítem 5). La comparación de dos razones similares (3/1 y 6/2, ítem 9) se ha visto dificultada por el hecho de que el grupo ha tenido también en cuenta el número de casos favorables, que es mayor en la segunda urna. Al comparar con los estudios previos, el nivel de dificultad de cada ítem fue parecido, aunque un poco mejores los resultados del presente estudio en los ítems 5, 6 y 8, respecto a los obtenidos en Cañizares (1997) y mejores que los de Green (1982) en los ítems 6 y 8. En el ítem 7, los resultados fueron peores que los de Cañizares (1997) pero similares a los de Green (1982), el ítem 9 fue muy difícil también en la investigación previa.

Estrategias del estudiantado

A partir del análisis de los argumentos de estudiantes al justificar sus respuestas, se clasificaron las estrategias empleadas tomando como base la clasificación establecida por Cañizares y Batanero (1997). Estas estrategias fueron las siguientes:

A. Comparar los casos posibles de cada una de las dos urnas. Aunque podría, circunstancialmente, generar respuestas correctas, carece de base lógica y está originada por la imposibilidad de comparar el conjunto total con un subconjunto (parte-todo).

E38: Hay más fichas que en el E (respuesta B, ítem 7).

B. Comparar los casos favorables en cada una de las dos urnas, eligiendo la que tiene mayor número. Genera respuestas correctas cuando hay igualdad de casos desfavorables, como en el ítem 5.

E8: Porque hay mayoría de bolas negras en el A que en el B (respuesta A, ítem 5).

C. Comparar casos desfavorables en las dos urnas, eligiendo la que tiene menos casos desfavorables. Supone un avance respecto a la estrategia B, pues reconoce que el número de casos desfavorable empeora la probabilidad de ganar. Genera respuestas correctas cuando hay igualdad de casos favorables, como en el ítem 6.

E54: Porque hay una ficha blanca menos que la otra (respuesta A, ítem 6).

Aunque existe preferencia por las estrategias anteriores, que son estrategias de una variable, propias de la etapa preoperacional, se emplearon otras estrategias de dos variables.

D. Comparación aditiva de casos favorables y desfavorables. Consiste en comparar la diferencia entre casos favorables y desfavorables en las dos urnas. En el ejemplo que sigue, la diferencia sería cero.

> E16: Porque en las dos cajas hay una misma cantidad de blancas que de negras (respuesta C, ítem 7).

E. Estrategia de correspondencia. Se establece un criterio de proporcionalidad en una fracción para aplicarlo a la otra. Este tipo de razonamiento es propio de un nivel superior de desarrollo y, según Piaget e Inhelder (1951), se asocia al período de operaciones formales, aunque podría aparecer en el periodo de operaciones concretas en casos más sencillos de composición de bolas de urnas proporcional. Algunos ejemplos son:

> E7: La misma posibilidad porque si duplicamos la Ex2 sale el mismo resultado de F (respuesta C, ítem 7).
>
> E14: Porque la caja E tiene la misma cantidad de fichas negras que de fichas blancas y la caja F también (respuesta C, ítem 7).

En los anteriores ejemplos se aprecia que el estudiantado establece un criterio de proporcionalidad en una de las cajas para aplicarlo a la otra; esto resulta natural cuando aún no se cuenta con los conocimientos para el cálculo con fracciones. Según Noelting (1980a; 1980b), este tipo de estrategias está asociado a la etapa IIA, donde el estudiante relaciona internamente los términos de la fracción, diferenciando los conceptos de razón y cantidad. El autor hace la distinción de estrategias “entre” e “intro” para comparar dos fracciones (a_1/b_1 vs a_2/b_2), por lo que es importante identificar que E7 realiza una estrategia “entre”, al comparar los términos de una fracción con los de otra (a_1 con a_2 y b_1 con b_2), mientras que E14 emplea una estrategia “intro”, porque compara los términos dentro de una misma fracción para establecer una razón ($a_1/b_1 = 1/1$) y luego lo compara con la razón en la otra fracción ($a_2/b_2 = 1/1$).

F. Estrategias multiplicativas (comparar razones). Se relaciona el número de casos favorables con el número de casos posibles, es decir, la parte con el todo, o también fracciones formadas por el número de casos favorables y desfavorables para después compararlas aplicando la regla de Laplace. Pocos sujetos del grupo de estudio usan estrategias multiplicativas, que sin duda son las más elaboradas y requieren del dominio de cálculo con fracciones:

> E14: Porque la caja J tiene un tercio de fichas blancas que de fichas negras y la K también (respuesta A, ítem 5).

E17: Porque la caja H tiene la mitad de fichas blancas que de fichas negras y la G tiene 1 tercio de fichas blancas que de fichas negras (respuesta B, ítem 8).

Se puede apreciar que E14 establece la fracción 1/3 del número de bolas blancas (casos desfavorables) y negras (casos favorables) para compararla con la otra urna. E17, para el ítem 8, realiza una comparación de fracciones y se apoya en la representación gráfica expuesta en la Figura 3.6.1, donde agrupa los casos favorables y los desfavorables para establecer de forma más clara una comparación intro mediante una relación parte-parte.

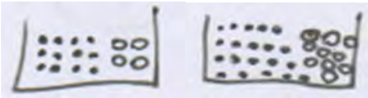


Figura 3.6.1. *Representación gráfica elaborada por E17 en el ítem 4*. Fuente propia de la investigación.

G. Sesgo de equiprobabilidad. Cuando se consideran todos los sucesos de un experimento aleatorio como equiprobables, conocido como sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992).

E27: Porque en ambas cajas hay la misma probabilidad de sacar una ficha blanca o una ficha negra (respuesta C, ítem 9).

E30: Puede salir cualquiera (respuesta C, en los ítems 5, 6 y 7).

H. Disposición de las fichas. Asimismo, hay un porcentaje notable de argumentos asociados a creencias que relacionan la disposición espacial de las fichas en la representación gráfica en el ítem con la probabilidad del evento; también identificadas en Cañizares y Batanero (1997). Esto se dio en todos los ítems por diferentes estudiantes:

E52: Tiene la ficha negra a los 8 lados (respuesta A, ítem 9).

E39: Porque también la negra está en la parte superior (respuesta B, ítem 7).

E48: Porque la bola negra está de primera y es mucho más posible que la negra salga (respuesta C, ítem 5).

I. Otras: Otros argumentos, por ejemplo, hacen referencia a la suerte o la forma en que se saca la ficha, como mostramos en el siguiente ejemplo:

E32: Pero también puede salirte la blanca, ya que todo depende de cómo la coja la mano (respuesta A, ítem 5).

En la Tabla 3.6.3 se resumen las estrategias en los diferentes ítems. En el ítem 5, poco más de tres cuartas partes realizaron justificaciones asociadas a estrategias pertinentes, siendo la estrategia B la más utilizada (72,7%) debido a la igualdad de casos desfavorables. En Cañizares y Batanero (1997), aproximadamente dos terceras partes de estudiantes de la misma edad obtuvieron argumentos pertinentes, también la comparación de casos favorables fue la más utilizada (48,6%), pero con mayor porcentaje en estrategias que consideran dos variables (10,8%).

En el ítem 6, el 60% de estudiantes empleó estrategias pertinentes, donde la C resultó la más utilizada (41,8%), lo que es natural por haber igual número de casos favorables. Cañizares y Batanero (1977) obtuvieron un porcentaje menor de argumentos pertinentes (54,0%), donde aproximadamente el 40% comparó el número de casos desfavorables, como en nuestro estudio.

Para el ítem 7 se obtuvo un 38,1% de argumentos pertinentes, un poco menor que el 48,6 % obtenido en Cañizares y Batanero (1997); y mientras nuestro estudiantado se centró en la estrategia D (32,7%), el de Cañizares y Batanero (1997) lo hizo en la E (43,2%), que requiere un mayor nivel de razonamiento proporcional.

Tabla 3.6.3. Porcentaje de estrategias empleadas en cada ítem (las estrategias correctas se han subrayado)

Estrategia	Ítem				
	5	6	7	8	9
A. Comparar casos posibles	3,6	1,8	20,0	12,7	10,9
B. Comparar casos favorables	<u>72,7</u>	21,8	12,7	23,6	32,7
C. Comparar casos desfavorables	5,5	<u>41,8</u>	5,5	10,9	12,7
D. Comparar casos favorables y desfavorables	<u>5,5</u>	<u>16,4</u>	<u>32,7</u>	29,1	23,6
E. Correspondencia	0,0	0,0	<u>1,8</u>	<u>3,6</u>	<u>7,3</u>
F. Multiplicativas (comparar razones)	<u>1,8</u>	<u>1,8</u>	<u>3,6</u>	<u>1,8</u>	<u>1,8</u>
G. Sesgo de equiprobabilidad	3,6	1,8	1,8	0,0	0,0
H. Disposición de fichas	1,8	10,9	7,3	10,9	7,3
I. Otras	5,5	3,6	10,9	7,3	3,6
No responde	0,0	0,0	3,6	0,0	0,0

En los ítems 8 y 9 no se alcanzó ni el 10% de estrategias correctas, se emplearon, principalmente, estrategias de una variable en la comparación de casos favorables y desfavorables, lo cual no es oportuno, debido a que el número de casos favorables o desfavorables no coincide. Esto mismo ocurrió con el ítem 8 en Cañizares y Batanero (1997), donde apenas se obtuvo un 2,7% de estrategias pertinentes en estudiantes de igual edad que en nuestro estudio. Hay que recordar que este ítem presenta un nivel de razonamiento proporcional superior, correspondiente a la etapa IIIA (Noelting, 1980a; 1980b). No se relaciona el ítem 9 con el estudio de Cañizares y Batanero (1997), pues utilizaron un ítem distinto para su estudio.

3.6.4. Conclusiones

Al analizar las respuestas de la muestra de estudiantes en la comparación de probabilidades en contexto de urnas, se obtuvieron resultados similares a los de otros estudios previos con menores de la misma edad, que fueron realizados en un periodo en que no se impartía ningún tipo de enseñanza de la probabilidad elemental en las escuelas. Es verdad que, en el momento de pasar el cuestionario, los niños todavía no habían estudiado la parte de probabilidad de 6º curso, pero sí la de los cursos anteriores. Aunque no habían estudiado la cuantificación de probabilidades usando la regla de Laplace, esto no es vinculante con el éxito en los ítems propuestos en el cuestionario, pues el uso de la herramienta no es necesario para establecer la comparación de probabilidades pedidas, como sucedió en investigaciones previas con estudiantes de igual edad. Por otro lado, el alumnado no estaba acostumbrado a comparar dos experimentos diferentes como demandan las tareas propuestas, pues habían trabajado sucesos de un mismo experimento. Por todo ello, sería importante ampliar el presente estudio e incluir otro grupo de 7º curso, para asegurar que hayan realizado tareas de comparación de probabilidades similares y, así, analizar el efecto de la instrucción.

No obstante, la conjetura que se planteó es que la mayor dificultad de algunos ítems es debida a que solo parte de la muestra han alcanzado el correspondiente nivel de razonamiento proporcional en la clasificación de Noelting (1980a; 1980b). En el 5º curso, se estudia fracciones propias e impropias, homogéneas y heterogéneas, y se realiza actividades de comparación de fracciones (MEP, 2012). Pero no se suele utilizar el contexto de probabilidad para completar su estudio de fracciones y realizar comparaciones.

Por lo tanto, se recomienda completar el trabajo en probabilidad en la Educación Primaria con problemas similares a los mostrados en los ítems del cuestionario, donde, primero, únicamente sea necesario el trabajo con una variable y el razonamiento proporcional requerido sea solo de los primeros niveles (ítems 5 y 6). Además, en el estudio de fracciones se pueden completar comparaciones de tipo parte-parte, ya que actualmente predominan las comparaciones parte-todo, y aplicar la proporcionalidad a situaciones problemas de comparación de probabilidades.

Aunque Piaget e Inhelder (1951) señalan que la población infantil trata de comparar en primer lugar los casos posibles (estrategia A), esta estrategia no apareció con frecuencia en el presente estudio. Se coincide con Cañizares y Batanero (1997) en que los problemas donde los casos favorables son explícitamente distinguibles de los desfavorables, el estudiantado primero compara los casos favorables (estrategia B) antes que los posibles, ya que existe una percepción inicial parte-parte. Esto queda evidenciado en todos los ítems de esta sección (excepto el 7), donde los porcentajes de estrategia B fueron superiores a los de estrategia A. Queda claramente reflejado en el ítem 5, donde casi las tres cuartas partes optan por la estrategia B, que solo genera respuestas correctas en este ítem.

3.7. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES EN CONTEXTOS GEOMÉTRICOS

3.7.1. Introducción

En esta sección se analizan los resultados obtenidos de las tareas de comparación de probabilidades en ruletas y trompos, es decir, en contexto geométrico. En este tipo de contexto, las estrategias y el éxito de los estudiantes pueden ser diferentes que en ítems en contextos de urnas, aunque sean equivalentes desde el punto de vista de razonamiento proporcional requerido para su resolución. Esto nos llevó a incluir este tipo de tareas en el cuestionario del estudio inicial exploratorio; en concreto, aplicando algunos ítems utilizados por Cañizares (1997) y Green (1982). A continuación, se presentan los ítems propuestos y los resultados, que se han publicado en el siguiente artículo:

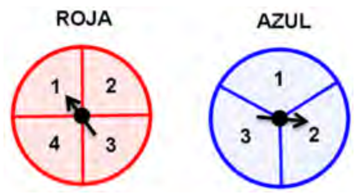
Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M.M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes de educación primaria. *Educaçao e Realidade, 46*(3). https://doi.org/10.1590/2175-6236105401

3.7.2. Problemas analizados

Sobre este contenido se incluyeron en el cuestionario tres ítems; todos ellos relacionados con la probabilidad en un contexto geométrico. Fueron tomados de la investigación de Cañizares (1997), quien los tradujo de otros similares de Green (1982), en los que se pide comparar probabilidades de un cierto suceso con dos ruletas o dos trompos y justificar la respuesta.

Las ruletas mostradas en el ítem 10 se dividen en partes iguales, con cuatro y tres números, respectivamente, que corresponden a áreas equiprobables. El número de casos favorables (obtener 1) es el mismo en las dos ruletas, mientras que el de desfavorables es menor en la ruleta azul (2) que en la roja (3), por lo que la probabilidad de obtener 1 es de 1/3 y 1/4, respectivamente. Los niños podrían comparar los casos desfavorables en las dos ruletas para dar la solución correcta, sin recurrir a fracciones, lo que sería una estrategia del nivel de razonamiento IIA, según Piaget e Inhelder (1951).

Ítem 10a: La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número (mira el dibujo):



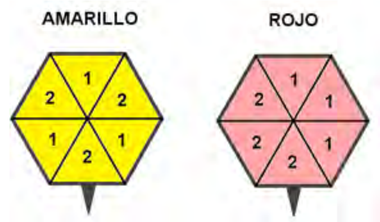
¿Con qué disco es más fácil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:

a. Es más fácil obtener 3 en el disco rojo.
b. Es más fácil obtener 3 en el disco azul.
c. Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3.
d. No lo sé.

Ítem 10b: ¿Por qué eliges esta respuesta?

En el ítem 11, se muestran dos trompos con la parte superior en forma de hexágono regular y dividida en seis triángulos iguales (misma área), tres de los cuales corresponde al número 1 (casos desfavorables) y otros tres al número 2 (casos favorables), en cada uno de los trompos. Por tanto, la probabilidad de obtener un 2 es la misma en ambos. El niño podría resolver la tarea estableciendo una correspondencia entre los casos favorables y desfavorables, que es típica del nivel de razonamiento IIB en la teoría de Piaget e Inhelder (1951). Por otro lado, el orden en que están situados los triángulos numerados con 1 y 2 en cada trompo es diferente: en el trompo amarillo se alternan los números, mientras que en el rojo son consecutivos. Esta colocación es un distractor que puede afectar al niño al comparar las probabilidades (Maury, 1984).

Ítem 11a: Dos trompos de seis lados están marcados con unos y doses, como se indica en el siguiente dibujo representativo:



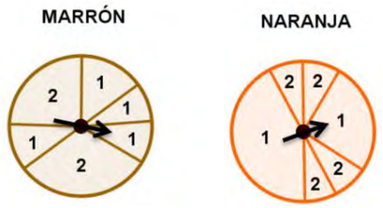
¿Qué trompo te da mejor oportunidad de obtener un 2 cuando se lanza? ¿O dan la misma posibilidad?

a. El amarillo es mejor para obtener un 2.
b. El rojo es mejor para obtener un 2.
c. Ambos trompos dan la misma posibilidad.
d. No lo sé.

Ítem 11b: ¿Por qué?

En el ítem 12 se presentan dos ruletas con 6 sectores de diferente amplitud. En la ruleta marrón hay cuatro de ellos numerados con el número 1 (casos favorables) y dos numerados con el número 2 (casos desfavorables). El número de casos favorables es mayor en la ruleta marrón que en la ruleta naranja (4 vs. 2), pero la amplitud y superficie ocupada por los casos favorables es mayor en esta última. Si los niños comparan la razón entre casos favorables y desfavorables elegirían la ruleta marrón, lo que sería respuesta incorrecta, pues la naranja tiene mayor superficie favorable al número 1.

Ítem 12a: Dos discos (ruletas), uno naranja y otro marrón, están marcados con números (mira el dibujo). Cada disco tiene una aguja que gira.



Si se quiere obtener un 1, ¿es uno de los discos mejor que el otro, o ambos dan la misma posibilidad?

a. El marrón es mejor para sacar un 1.
b. El naranja es mejor para sacar un 1.
c. Ambos discos dan la misma posibilidad.
d. No se puede decir.

Ítem 12b: ¿Por qué has elegido esta respuesta?

3.7.3. Resultados y discusión

En primer lugar, se analizó la corrección de la respuesta en cada uno de los tres ítems para comparar con los resultados obtenidos en las investigaciones previas.

En la Tabla 3.7.1 se presentan las elecciones de respuesta al ítem 10, donde la mayoría de niños elije la opción correcta, con un porcentaje (80%) algo más elevado que el obtenido en niños de igual edad por Green (1983), 71%, y Cañizares (1997), 79,1%. Por tanto, puede decirse que este ítem ha resultado muy sencillo para los niños, que muestran el nivel de razonamiento IIA, según la clasificación de Piaget e Inhelder (1951). Se atribuye un mejor resultado en el presente estudio, a la enseñanza recibida durante la Educación Primaria.

Tabla 3.7.1. Frecuencia y porcentaje de respuestas al ítem 10

Respuesta elegida	Frecuencia	Porcentaje
Es más fácil obtener 3 en el disco rojo	4	7,3
Es más fácil en el disco azul (correcta)	44	80,0
Los dos discos dan igual posibilidad	7	12,7

En la Tabla 3.7.2 se presentan los resultados del ítem 11, donde se obtiene mayor dificultad, aunque todavía el 50,9 % de los niños responde correctamente En este ítem los resultados son similares a los de Green (1982) (49%) y Cañizares (1997) (51,6%), con niños de igual edad, luego el sesgo introducido por la colocación de los casos favorables en el trompo no parece haberse superado con la enseñanza, además, según Piaget e Inhelder (1951), la comparación de probabilidades en sucesos equiprobables corresponde a un nivel de razonamiento superior (este ítem se ubica en el nivel IIB).

Tabla 3.7.2. Frecuencia y porcentaje de respuestas al ítem 11

Respuesta elegida	Frecuencia	Porcentaje
El amarillo es mejor	12	21,8
El rojo es mejor	14	25,5
Los dos son igualmente probables (correcta)	28	50,9
No sabe	1	1,8

En la Tabla 3.7.3 se presentan los resultados en el ítem 12, donde no se puede aplicar la regla de Laplace o las comparaciones de casos favorables o posibles, pues las áreas de cada parte en que se divide la ruleta son diferentes. Aun así, una gran parte de los niños consigue resolver correctamente el problema (63,6%), mientras que en la investigación de Green (1982) sólo lo logra el 43% de los niños de igual edad y el 46,2% en Cañizares (1997), lo que de nuevo podría explicarse por la enseñanza recibida, en el presente estudio.

Tabla 3.7.3. Frecuencia y porcentaje de respuestas al ítem 12

Respuesta elegida	Frecuencia	Porcentaje
El marrón es mejor	15	27,3
El naranja es mejor (correcta)	35	63,6
Los dos tienen la misma posibilidad	5	9,1

La Tabla 3.7.4 resume la corrección de las respuestas de los estudiantes en los ítems 10 a 12, y los resultados obtenidos en las investigaciones previas con niños de la misma edad. En el ítem 10 se obtuvo un porcentaje (80%) algo más elevado que el obtenido por Green (1982) y Cañizares (1997), 71% y 79,1%, respectivamente. En el ítem 11 se observa que los niños presentaron mayor dificultad, donde solo la mitad responde correctamente; resultados similares a los de Green (49%), y Cañizares (51,6%). Por último, en el ítem 12 una gran parte de los niños consigue resolver correctamente el problema (63,6%), mientras que en la investigación de Green (1982) sólo lo logra el 43% de los niños y el 46,2% en el estudio de Cañizares (1997).

Puede decirse que el ítem 10 ha resultado muy sencillo para los niños del estudio; a diferencia del ítem 11. Esto puede deberse a que el ítem 11 se ubica en un nivel de razonamiento (IIA) superior al del ítem 10 (IB), según la clasificación de Noelting (1980a y 1980b); además, en Green (1982) y Cañizares (1997) se asocia una mayor dificultad a la introducción del distractor (orden de colocación) y según Piaget e Inhelder (1951), la comparación de probabilidades en el caso de que sean sucesos equiprobables corresponde a un nivel de razonamiento superior.

Tabla 3.7.4. Porcentaje de respuestas correctas en los ítems 10 a 12 y comparación con los obtenidos en Cañizares (1997) y Green (1982) con estudiantes de 6º curso

Ítem	Costa Rica	España	Reino Unido
10	80,0	79,1	71,0
11	50,9	51,6	49,0
12	63,6	46,2	43,0

Por otro lado, resaltamos el buen rendimiento en el ítem 12, pues su dificultad es alta (Nivel 4, según Pérez Echeverría et al., 1986) al no poder aplicar la regla de

Laplace, ni comparar casos favorables o posibles, pues las áreas de cada sección de la ruleta son diferentes y requiere de un nivel de razonamiento proporcional mayor.

En la Tabla 3.7.5 se presentan los porcentajes de respuestas correctas, según tipo de escuela, y se aprecia un mejor rendimiento general en la escuela privada. Comparando estos resultados con los de Green (1983) y Cañizares (1997), hacemos distinción en los ítems 10 y 11, pues la escuela pública tiene resultados inferiores a aquellos y la privada se mantiene por encima y aumenta su diferencia. En el ítem 12, ambas escuelas se encuentran por encima de los porcentajes de investigaciones previas.

Tabla 3.7.5. Porcentaje de respuestas correctas en los ítems 10, 11 y 12, según tipo de escuela

Ítem	Escuela	
	Pública	Privada
10	65,4	93,1
11	34,6	65,5
12	57,7	69,0

Argumentos para justificar la comparación de probabilidades

Para comprender mejor las razones que llevan a los niños a elegir sus respuestas, se analizaron los argumentos aportados. Dichos argumentos fueron clasificados, mediante un análisis cualitativo, de acuerdo con las categorías descritas por Cañizares (1997) y Cañizares y Batanero (1997), que son las siguientes:

1. Comparación del número de casos favorables o posibles. Se corresponde, según Piaget e Inhelder (1951), con utilizar una de las variables de la tarea y es propia del nivel de desarrollo IIA. Se compara el número de porciones numeradas en las dos ruletas que son favorables al caso pedido o bien el número total de porciones de la ruleta. No usa o al menos no hace referencia a los casos desfavorables, explícitamente, y funciona en el ítem 11 (porque el número de casos desfavorables es el mismo y todas las porciones tienen igual área) y en el ítem 10 (porque las ruletas están dividas en partes iguales, con el mismo número de casos favorables aunque distinto de casos posibles); pero no en el ítem 12, pues no se tendría en cuenta la amplitud de cada sector de la ruleta. Algunos ejemplos son:

E1: Porque tiene menos números y el azul no tiene el cuatro (respuesta B, ítem 10).
E2: Porque en las dos hay tres doses (respuesta C, ítem 11).
E3: Tiene más unos (respuesta A, ítem 12).

2. Comparación explícita del número de casos desfavorables. Cuando explícitamente se cuentan los casos desfavorables y se comparan entre sí para justificar la respuesta, eligiendo la ruleta con menor número de casos desfavorables. También corresponde a una estrategia de una variable, pero más avanzada que comparar casos favorables o posibles, estrategia que da una solución correcta cuando el número de casos favorables es igual en ambas ruletas. Es más elaborada que la anterior porque se tiene en cuenta el complementario del suceso pedido, lo que supone comprender la idea de disyunción. Algunos ejemplos son:

E4: Porque en el disco azul tienes 2 oportunidades de perder y en el disco rojo tienes 3 (respuesta B, ítem 10).

E5: Porque en el azul no está el 4 (respuesta B, ítem 10).

3. Comparación explícita del número de casos favorables y desfavorables. Es una estrategia de dos variables, según Cañizares y Batanero (1997), donde se utilizan todos los datos del enunciado. Se comparan los casos favorables y desfavorables en forma aditiva, como muestra E6, o se realiza comparación multiplicativa como muestra E7. Piaget e Inhelder (1951) advierten que estas estrategias no permiten, en general, resolver cualquier problema (como sucede en el ítem 12, que lleva a error porque no se tiene en cuenta el área de cada sector), aunque pueden llevar a éxito dependiendo de los datos (como ocurre en el ítem 11).

E6: Porque en la naranja hay más 1 que 2 (respuesta B, ítem 12).

E7: Tienen 3 veces 2 y 3 veces 1 (respuesta C, ítem 11).

4. Comparación del área ocupada por el número pedido. Esta es una estrategia que sólo puede aplicarse en un contexto de probabilidad geométrica y puede utilizarse con éxito en todos los ítems propuestos. En este trabajo se asigna al ítem 12, donde la comparación de casos favorables o desfavorables no funciona y el estudiante debiera recurrir a comparar el área total cubierta (amplitud de las superficies), como por ejemplo:

E8: Porque el 1 tiene más espacio y es probable que salga el 1 (respuesta B, ítem 12).

E9: Porque el uno tiene el espacio más grande (respuesta B, ítem 12).

5. Compara áreas y número de casos desfavorables o favorables. Es una combinación de las dos estrategias anteriores, lo que supone mayor nivel de razonamiento, como por ejemplo:

E10: Yo elegí esa respuesta porque hay menos números y los espacios son más grandes (repuesta B, ítem 12).

E11; Porque hay menos números, por lo que el 3 tiene un espacio más grande (repuesta B, ítem 10).

6. Sesgo de equiprobabilidad. Algunos niños hacen referencia al azar (expresado también como suerte) para deducir que cualquier suceso es igualmente posible, sin tener en cuenta el área ocupada ni el número de casos favorables o posibles. Se muestra en estas respuestas (E12) un ejemplo del sesgo de equiprobabilidad, descrito por Lecoutre (1992), consistente en equiparar aleatoriedad y equiprobabilidad, que también apareció en Cañizares (1997).

E12: Solo hay diferencia de un número el 4 pero pueden tener una misma probabilidad (respuesta C, ítem 10.)

7. Consideraciones físicas. Se han encontrado puntualmente otros argumentos basados en la colocación de los números en el trompo, la fuerza que se da a la aguja o consideraciones similares. En los ejemplos E13 y E17 se utiliza la creencia subjetiva de que el orden de colocación de los números en la ruleta influye en la probabilidad, incluso cuando las áreas correspondientes a los casos favorables y posibles sean la misma (caso E13). Hay respuestas que revelan una preferencia por el posible resultado, según ubicación (en las esquinas, E14), una dependencia de la posición inicial de la aguja (E15) o incluso de la fuerza que se le imprime a la ruleta o trompo (E16, E18).

E13: El amarillo, porque está más distribuido (respuesta A, ítem 11).
E14: Porque seguramente cae en las esquinas (respuesta A, ítem 11).
E15: Porque en el disco azul la aguja apunta al dos, y el siguiente número será el tres, en cambio en el disco rojo apunta al uno y el siguiente será el dos (respuesta B, ítem 12).
E16: Porque en esto todo depende de la fuerza (respuesta C, ítem 10).
E17: Porque los dos están cerca del 1 (respuesta C, ítem 12)
E18: Si la giras con cuidado si va salir la 3 (respuesta A, ítem 10)

En la Tabla 3.7.6 se presentan los resultados referentes a los argumentos de los niños para cada ítem, siendo en los dos primeros ítems correctas las estrategias de comparación de casos favorables, desfavorables o posibles (el número de casos favorables es igual) junto a la comparación de áreas, que solo funciona en el tercer ítem. Las estrategias correctas se han subrayado.

Tabla 3.7.6. Frecuencia y porcentaje de estrategias en los ítems 10, 11 y 12

Estrategia	Ítem 10		Ítem 11		Ítem 12	
	n	%	n	%	n	%
1. Comparar casos favorables o posibles	27	49,1	7	12,7	13	23,6
2. Comparar casos desfavorables	5	9,1				
3. Comparar casos favorables y desfavorables			14	25,5	1	1,8
4. Comparar áreas	6	10,9			27	49,3
5. Áreas y casos favorables o desfavorables	5	9,1			4	7,3
6. Sesgo de equiprobabilidad	6	10,9	3	5,5	2	3,6
7. Consideraciones físicas	6	10,9	30	54,5	7	12,7
No sabe			1	1,8	1	1,8

En el ítem 10 predomina la comparación de los casos posibles, que enmascara la comparación de casos desfavorables al haber uno solo favorable. Así, implícitamente se utiliza la disyunción y se concibe el espacio muestral como unión de casos favorables y desfavorables. Es decir, si el niño indica que en una ruleta hay más posibilidad porque hay menos números, se refiere implícitamente al número de casos desfavorables. En la investigación de Green (1982) solo el 28% de los niños de la misma edad que los que participan en nuestro estudio usaron este argumento y el 30,8% en la de Cañizares (1997). Por tanto, los resultados en nuestra muestra superan los de dichos estudios.

En el ítem 11 son correctas tanto la comparación de casos posibles o favorables, como la de casos favorables y desfavorables, y entre los dos se acerca al 40%. En el caso de Green (1982), el 35% utiliza la comparación de casos favorables y posibles y la situación de los casos favorables y desfavorables, y en la investigación de Cañizares (1997), alrededor del 25%, por lo que, de nuevo nuestros resultados son mejores. Sin embargo, en nuestro estudio aparece un porcentaje muy alto de niños que utilizan consideraciones físicas irrelevantes (54,5%), mientras que en el trabajo de Cañizares (1997) supone solo el 21%, siendo en su caso la referencia a la suerte o equiprobabilidad algo mayor que en nuestro caso.

En el ítem 12 predomina la comparación de áreas, a veces combinada con comparación de casos favorables o desfavorables. Nuestra proporción de argumentos correctos es mayor que en Green (1982) y en Cañizares (1997) con niños de igual edad (41% y 41,8% respectivamente), mientras que la comparación de casos favorables y desfavorables (estrategia incorrecta) es menor que en estos autores.

De acuerdo con el tipo de escuela (Tabla 3.7.7), en general, los porcentajes fueron similares excepto en el ítem 11, donde el 41,4% de los estudiantes de la escuela privada optó por la estrategia 3, frente al 7,7% de los estudiantes de la escuela pública. Es importante señalarlo, ya que de acuerdo con Cañizares y Batanero (1997), esta estrategia es más avanzada al considerar dos variables. Este ítem, en general, fue más complejo para los niños de la escuela pública, donde menos del 27% tuvo argumentos correctos, y el argumento basado en consideraciones físicas tiene un índice del 65,4%.

Tabla 3.7.7. Porcentaje de estrategias en los ítems 10 a 12 por tipo de escuela

Estrategia	Ítem 10		Ítem 11		Ítem 12	
	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.
1. Comparar casos favorables o posibles	55,2	42,3	10,3	19,2	17,2	30,8
2. Comparar casos desfavorables	10,3	7,7				
3. Comparar casos favorables y desfavorables			41,4	7,7	3,4	
4. Comparar áreas	10,3	11,5			55,2	46,2
5. Áreas y casos favorables o desfavorables	10,3	7,7			6,9	3,8
6. Sesgo de equiprobabilidad	6,9	15,4		3,8	3,4	3,8
7. Consideraciones físicas	6,9	15,4	48,3	65,4	10,3	15,4
No sabe				3,8	3,4	

3.7.4. Conclusiones

El análisis de las respuestas en la comparación de probabilidades en contextos geométricos indica mejores resultados en nuestro estudio que los obtenidos con niños de la misma edad en investigaciones previas, que fueron realizadas en un periodo en que no se impartía ningún tipo de enseñanza de la probabilidad elemental en las escuelas. Estas diferencias se encuentran principalmente en el primer ítem, que se puede resolver mediante comparación de casos favorables y desfavorables, y en el tercero, cuya solución se fundamenta en la comparación de áreas. Se atribuye este mejor razonamiento a la enseñanza recibida por los niños actualmente, que confirma las teorías de Fischbein (1975) sobre la importancia de aprovechar la base intuitiva del niño con la probabilidad y proporcionarle instrucción al respecto, apoyadas en lo posible en material manipulativo.

Sin embargo, la enseñanza no parece haber influido en las respuestas al segundo ítem, pues se obtienen resultados similares a los trabajos de Green (1982) y Cañizares (1997), donde la disposición de los números en el trompo se ha tenido en cuenta como un elemento subjetivo y distractor en la comparación de probabilidades. En este sentido, se debe insistir en que los niños realicen experimentos con dispositivos físicos similares a los mostrados en los enunciados de los ítems para que poco a poco puedan corregir los sesgos de razonamiento inadecuados.

3.8. ACTIVIDADES DE CONSTRUCCIÓN DEL ESPACIO MUESTRAL

3.8.1. Introducción

En esta sección se analizan los resultados de los dos ítems en que se pide la construcción de espacios muestrales en contexto de ruletas y de urnas, ítems 13 y 14 del cuestionario, respectivamente, asociados a diferentes tipos de sucesos, lo que implica la comprensión del lenguaje probabilístico.

Puesto que los estudiantes de la muestra están recibiendo instrucción en probabilidad, es importante considerar el lenguaje que ellos utilizan, pues, en la Educación Primaria los conceptos matemáticos se introducen mostrando ejemplos, a partir del lenguaje propio de la edad y contexto. Poco a poco, se dota a estos ejemplos y a las definiciones informales, construidas por los estudiantes, de mayor abstracción (Schleppegrell, 2007). El lenguaje tiene también una gran importancia, tanto para la comunicación de ideas matemáticas como para la resolución de problemas, ya que los objetos matemáticos no son ostensivos y necesitan ser representados mediante diferente lenguaje (Godino et al., 2007). Por otro lado, Vygotsky (2012) considera que el lenguaje está unido al pensamiento y que su adquisición es una parte central en el aprendizaje, que es para el autor, un proceso social.

Hernández-Salmerón et al. (2017) resaltan la importancia de conocer el vocabulario que los estudiantes asocian a las situaciones aleatorias y a la probabilidad, ya que algunos términos que utilizamos en matemáticas no tienen el mismo significado en su uso coloquial fuera del aula. Entre los términos asociados a la probabilidad que tienen esta diferencia se sitúan los investigados en este trabajo, ya que cuando se usa en una frase la palabra seguro no siempre se quiere decir que el hecho descrito se producirá, mientras que en probabilidad el suceso seguro incluye todos los sucesos elementales del espacio muestral y, por tanto, ocurre siempre.

Igualmente, en algunas investigaciones que han analizado el lenguaje probabilístico en los libros de texto, por ejemplo, en Gómez et al., (2013) y Ortiz et al. (2016), se sugiere que el lenguaje verbal se usa para sugerir un significado específico de la probabilidad. Por ejemplo, los términos caso favorable o juego equitativo están ligados al significado clásico, mientras que frecuencia y repetición están asociados al frecuencial. También se reitera que hay palabras del lenguaje ordinario, entre ellas las usadas en nuestro trabajo, que no tienen un sentido equivalente en matemáticas.

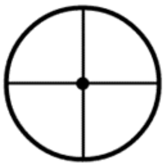
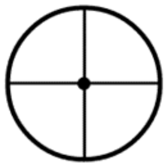
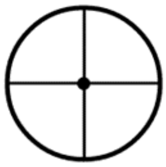
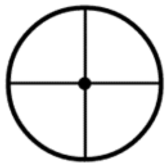
Seguidamente, se analizan los ítems relacionados con la construcción de espacios muestrales y sus resultados, que resumen los publicados en el siguiente trabajo:

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: Un estudio exploratorio con niños de educación primaria. *Educación Matemática*, *33*(1). 181-207. http://dx.doi.org/10.24844/EM3301.07

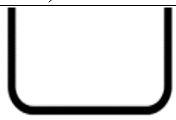
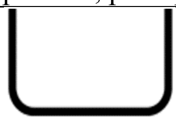
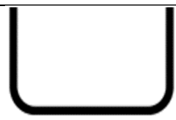
3.8.2. Problemas analizados

En este trabajo se analizan los dos ítems (13 y 14) que son de creación propia y tratan de la construcción de un espacio muestral y de los conceptos de suceso seguro, imposible, posible y equiprobable en un contexto de juego de azar.

Ítem 13: María y Esteban juegan con una ruleta. María gana un confite si la aguja que gira cae en el 1 y Esteban gana un confite si cae en el 2. Coloca en las siguientes ruletas los números que consideres oportunos para que se cumpla:

			
(A) María gana seguro	(B) Es posible que María gane	(C) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	(D) Es imposible que María gane

Ítem 14: María gana cuando saca ficha negra. Pinta en las siguientes urnas tantas fichas negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

			
(A) María gana seguro	(B) Es posible que María gane	(C) María tienen igual posibilidad de ganar que de perder	(D) Es imposible que María gane

Para resolver la tarea, el estudiante ha de pensar en un experimento aleatorio que se pueda realizar con el dispositivo dado (ruleta o urna) y donde el suceso pedido tenga la probabilidad expresada verbalmente. Para ello, debe imaginar un conjunto dicotómico de posibilidades divididas en dos subconjuntos (casos favorables y casos desfavorables).

Se utilizarán los contextos de ruletas, divididas en cuatro partes iguales y fichas de dos colores en urnas. Según Cañizares (1997), el contexto de la ruleta favorece las comparaciones de tipo parte-todo, mientras el contexto de fichas utilizado en el segundo ítem, donde se puede aplicar la regla de Laplace, favorece la comparación entre casos favorables y casos desfavorables (comparación parte-parte). Cada uno de los ítems presenta cuatro apartados; en el primero se pide generar un espacio muestral donde el suceso María gana sea seguro, en el segundo que sea posible, en el tercero que sea un suceso equiprobable a su contrario y el cuarto que sea un suceso imposible.

En el ítem 13 el juego se realiza utilizando la representación de una ruleta, donde, si los espacios de división fuesen de diferente amplitud, no se podría aplicar la regla de Laplace, sino la probabilidad geométrica, para calcular probabilidades, y esto excede lo establecido para este nivel educativo, por lo que se ha optado en dividir cada ruleta en cuatro sectores circulares con igual área. El estudiante puede crear un espacio muestral de hasta cuatro sucesos diferentes (cuatro números distintos), en cuyo caso todos los sucesos elementales serían equiprobables, e igualmente la probabilidad de ganar el juego de los niños imaginarios del enunciado. Pero si alguno de los números se repite (por ejemplo, construir una ruleta numerada 1, 1, 2, 3), se consigue un espacio muestral donde el suceso 1 tiene doble probabilidad que los restantes, y por tanto María doble probabilidad de ganar que Esteban. Para conseguir el suceso seguro se debe repetir cuatro veces el número 1 ("María gana seguro") y para lograr el imposible ("Es imposible que María gane"), se debe excluir el número 1 de todos los sectores. En resumen, la resolución de la tarea requiere la intuición o el conocimiento del experimento aleatorio, y suceso, sucesos posibles del experimento, suceso favorable (gana María) y desfavorable (no gana María), así como de la intuición de seguro, posible, equiprobable e imposible, según el apartado.

En el ítem 14 (contexto de urnas), la única restricción es que el espacio muestral consta de fichas negras y blancas, y María gana sacando la ficha negra. Por ello se puede construir un espacio muestral con cualquier número de fichas, aunque es de esperar que el estudiante piense en un número pequeño de ellas. De nuevo ha de pensar en el experimento aleatorio y sus posibles resultados, así como en los casos favorables, casos desfavorables y los sucesos del tipo dado en el apartado. Para lograr el suceso seguro, debe rellenar la urna sólo con fichas negras y para el imposible sólo con fichas blancas, en cualquier cantidad para los dos tipos de suceso. El suceso equiprobable constará del mismo número de fichas blancas y de fichas negras, y el posible cualquier composición con al menos una ficha de cada color.

3.8.3. Resultados y discusión

A continuación, se describen algunas posibles respuestas correctas e incorrectas para cada uno de los apartados de los ítems, presentando algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes que participaron en el estudio.

Espacio muestral que corresponde al suceso seguro. La respuesta al primer apartado de cada ítem sería correcta si se construye un espacio muestral formado sólo por casos favorables al suceso "gana María", lo que asegura que María gane el juego. En la Figura 3.8.1, presentamos dos ejemplos, uno para cada ítem. En el primero de ellos, se numera todos los sectores de la ruleta con el número uno y en el segundo se llena la urna con cuatro fichas negras. El primer ejemplo es la única posibilidad correcta para que el suceso “gana María” sea seguro en el primer ítem, mientras en el segundo caso, se podría haber utilizado cualquier cantidad de fichas negras.

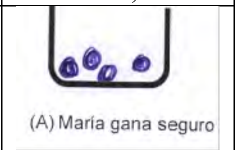
Correcto, ruletas	Correcto, urnas
	

Figura 3.8.1. Espacios muestrales correctos construidos para un suceso seguro

En los ejemplos incorrectos que se muestran en la Figura 3.8.2, se propone un espacio muestral con diferentes tipos de sucesos, incluyendo, en consecuencia, casos favorables y casos desfavorables al suceso “gana María”. Por tanto, no puede asegurarse que María ganará.

En el ejemplo incorrecto 1 presentado para el contexto de la ruleta, la probabilidad de ganar María sería ¼, igual que la de su compañero, quien también tiene un caso favorable entre cuatro y por tanto no es seguro que María gane el juego, sino que se ha construido el espacio muestral que corresponde a un suceso equiprobable (tanto María como Esteban tienen igual probabilidad de ganar). En el ejemplo incorrecto 2, el estudiante construye un espacio muestral para el suceso muy probable que María gane, ya que aparecen tres casos favorables de cuatro posibles, por lo que la probabilidad de que María gane es ¾. En el ejemplo incorrecto 3, se incluyen cinco casos favorables frente a dos desfavorables, y en el ejemplo 4, se presentan siete casos favorables y uno desfavorable.

Hay que señalar, que en los ejemplos incorrectos del 2 al 4 los estudiantes confunden muy probable con seguro, confusión que ya apareció en las investigaciones de Cañizares (1997), Green (1982) y Hernández-Salmerón et al. (2017). Una explicación alternativa para estos razonamientos es un sentido de justicia, unido a la intuición que se aproxima al concepto de suceso seguro, ya que se da a María una alta probabilidad de ganar; sin embargo, se dejan la posibilidad de que gane Esteban, pues quizás no sería natural para el niño dejarlo sin oportunidades de ganar, ya que participa en el juego.

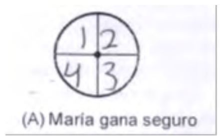
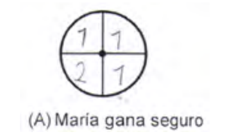
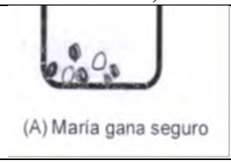
Incorrecto 1, ruletas	Incorrecto 2, ruletas	Incorrecto 3, urnas	Incorrecto 4, urnas
			

Figura 3.8.2. Espacios muestrales incorrectos construidos para un suceso seguro

Espacio muestral que corresponde a un suceso posible. En el segundo apartado de cada ítem se pide construir un espacio muestral en el que María tiene posibilidad, pero no seguridad, de ganar el juego. Por tanto, se admite una amplia variedad de soluciones correctas, pues excluido el caso de imposibilidad y el de seguridad, consideraríamos correctas todas las demás respuestas.

En esta tarea no se encontraron espacios muestrales incorrectos para el suceso posible, aunque hubo graduación en el sentido que algunos estudiantes produjeron espacios muestrales que proporcionaban sucesos muy poco probables, probables, equiprobables o muy probable, pero no seguros ni imposibles. Mostramos en la Figura 3.8.3 un par de ejemplos que corresponden a espacios muestrales correctos, ya que se incluyen tanto casos favorables como desfavorables. De hecho, son bastantes los que producen sucesos equiprobables, esto se ilustra con el ejemplo de urnas mostrado en la Figura 3.8.3. De nuevo, se conjetura que el sentido de justicia de los estudiantes los lleva a construir un espacio muestral en que los dos jugadores tengan la misma probabilidad de ganar.

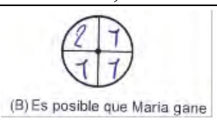
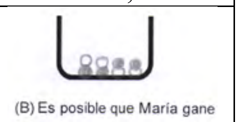
Correcto, ruletas	Correcto, urnas
	

Figura 3.8.3. Espacios muestrales construidos para un suceso posible

Espacio muestral que corresponde al suceso equiprobable. El tercer apartado requiere que los estudiantes construyan un espacio muestral en que María y Esteban tengan las mismas posibilidades de ganar. Los estudiantes parecen tener clara la idea de equiprobabilidad, pues construyen en general ejemplos correctos de espacios muestrales con el mismo número de casos favorables y casos desfavorables, como se observa en la Figura 3.8.4.

En lo ejemplos correctos 1, 2 y 4, los estudiantes usan dos casos favorables para cada jugador, con la diferencia de disposición entre ruletas en el 1 y 2, donde en el primero los casos favorables se alternan y en el segundo se encuentran consecutivos.

Aunque este aspecto pueda parecer no relevante, algunos estudiantes asocian mayor o menor probabilidad según la disposición u orden se los sectores en una ruleta o dispositivo continuo (Maury, 1984). En el ejemplo 3, se da una composición en donde el niño considera otros casos desfavorables además del 2 (con el que juega Esteban). En el ejemplo 5, de urnas, cabe destacar la cantidad de casos posibles (22) que presentó el niño en la construcción del espacio muestral, siendo la mitad de ellos favorables y la otra mitad desfavorables al suceso de ganar María.

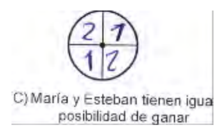
Correcto 1, ruletas	Correcto 2, ruletas	Correcto 3, ruletas	Correcto 4, urnas	Correcto 5, urnas
				

Figura 3.8.4. Espacios muestrales construidos para un suceso equiprobable

Se han encontrado también algunas respuestas incorrectas en este apartado. Por ejemplo, algunos estudiantes utilizan un número mayor de casos favorables, y por tanto mostrarían el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988), al considerar equiprobable cualquier resultado de un experimento aleatorio, independientemente del número de casos favorables y posibles. Se muestran ejemplos en la Figura 3.8.5, el primero de ellos presenta tres casos favorables y solo uno desfavorable, al igual que el segundo. Es posible que el estudiante sólo considere sucesos no elementales, sin tener en cuenta su probabilidad, es decir, sólo considere que es equiprobable si hay fichas blancas y negras, independientemente de la cantidad. Este resultado concuerda con lo expresado por Francisco y Maher (2005) y Nilsson (2007) quienes señalan que algunos estudiantes que pueden listar todos los sucesos de un espacio muestral tienen dificultad en clasificar los casos en favorables y en desfavorables.

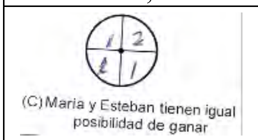
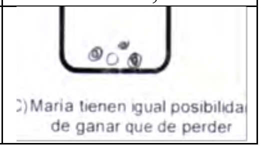
Incorrecto, ruletas	Incorrecto, urnas
	

Figura 3.8.5. Espacios muestrales incorrectos construidos para un suceso equiprobable

Espacio muestral que corresponde a un suceso imposible. Finalmente, la última tarea consiste en determinar un espacio muestral que haga imposible a María ganar el juego. Algunos ejemplos correctos, uno en contexto de ruletas y otro de urnas se presentan en la Figura 3.8.6; en los dos ejemplos mostrados el estudiante sólo incluye casos desfavorables.

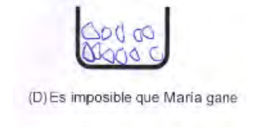
Correcto, ruletas	Correcto, urnas
	

Figura 3.8.6. Espacios muestrales construidos para un suceso imposible

Se presentan en la Figura 3.8.7 ejemplos incorrectos donde se evidencia una confusión entre muy poco probable e imposible, ya citada por Cañizares (1997), Green (1982) y Hernández-Salmerón et al. (2017). Es decir, al considerar el suceso imposible, los estudiantes incluyen algunos casos favorables; incluso en el ejemplo incorrecto 1 de ruletas, que se proponen más casos favorables que desfavorables. Se considera que estos estudiantes (una minoría) están atribuyendo a la palabra imposible el sentido de mala suerte, es decir, aunque se tenga bastante probabilidad, todavía se ve el hecho de ganar como algo muy difícil de que ocurra. Cañizares (1997) encontró este tipo de creencias en sus entrevistas a estudiantes sobre la idea de juego equitativo. Además, en el ejemplo incorrecto 4 se muestra como el estudiante confunde poco probable con imposible, ya que mantiene un caso favorable en el espacio muestral.

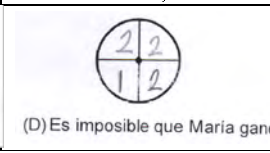
Incorrecto1, ruletas	Incorrecto 2, ruletas	Incorrecto 3, urnas	Incorrecto 4, urnas
			

Figura 3.8.7. Espacios muestrales construidos para un suceso imposible

A continuación, se analizan, en primer lugar, las frecuencias de respuestas correspondientes a espacios muestrales construidos en contexto de ruletas, seguidamente, en contexto de urna y, finalmente, se comparan los dos contextos. En cada apartado el análisis se realiza globalmente y comparando los resultados de las dos escuelas.

Espacios muestrales construidos en contexto de ruletas

Se encuentran diferentes tipos de respuesta en cada apartado del primer ítem. En general, las respuestas han sido variadas, puesto que, para cada tipo de suceso pedido, se han construido espacios muestrales asociados a sucesos seguros, posibles, equiprobables, etc. Esto indica una diversidad de intuiciones sobre las ideas de espacio muestral y los tipos de sucesos solicitados. En la Tabla 3.8.1 presentamos la frecuencia y porcentaje de estudiantes que construyen varios tipos de espacio muestral en función de lo pedido en cada apartado (seguro, posible, equiprobable e imposible). Se ha marcado en negrita las frecuencias y porcentajes que corresponden a las respuestas correctas.

Tabla 3.8.1. Frecuencia y porcentaje de estudiantes en la muestra global, según el espacio muestral construido en cada apartado del ítem 13 (contexto de ruletas).

Espacio muestral construido	Apartado del ítem y suceso pedido							
	1.Seguro		2. Posible		3. Equiprobable		4. Imposible	
	n	%	n	%	n	%	n	%
Suceso seguro	**19**	**34,5**					1	1,8
Suceso muy probable	23	41,8	**20**	**36,4**			10	18,2
Suceso equiprobable	6	11,0	**27**	**49,1**	**50**	**90,9**	9	16,4
Suceso poco probable	5	9,1	**6**	**10,9**	3	5,5	19	34,5
Suceso imposible							**14**	**25,5**
No construye	2	3,6	2	3,6	2	3,6	2	3,6

Son muy pocos los estudiantes que no completaron la tarea, lo cual indica el interés con que colaboraron a nuestro trabajo. Los mejores resultados se obtienen al construir un espacio muestral donde el suceso “gana María”, sea un suceso posible, correctamente respondida por todos los estudiantes que respondieron este apartado (96,4%). Esto indica una buena intuición de la idea de suceso posible, lo que se debe sin duda a que en este apartado se pueden admitir como correctas muchas respuestas (muy probable, equiprobable, poco probable). También se obtuvo buen rendimiento al construir el espacio muestral asociado al suceso equiprobable, cuya construcción fue correcta para una amplia mayoría.

Se observa la mayor dificultad en el suceso seguro, interpretado con alta frecuencia como muy probable, y también en el suceso imposible, considerado por una proporción importante como poco probable; en estos dos tipos de sucesos aparecen también otras interpretaciones en porcentajes importantes de estudiantes; en concreto, incluso se observa confusión entre suceso muy y poco probable.

En la Tabla 3.8.2 se comparan los resultados del ítem 13 separados por escuela, donde se repiten en cada grupo los resultados observados en la Tabla 3.8.1, salvo una pequeña variación en el número de no respuestas por escuela. Es decir, en el contexto de ruletas se aprecian pocas diferencias porcentuales en los espacios muestrales construidos de acuerdo con el suceso solicitado. Cabe señalar que los estudiantes de la escuela pública tuvieron todas las respuestas correctas en el suceso equiprobable “María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar”; y los estudiantes de la escuela privada tuvieron un rendimiento levemente mejor (31,0%) respecto a los de la escuela pública (19,2%) al responder correctamente el suceso imposible.

Tabla 3.8.2. Porcentaje de respuestas en cada apartado del ítem 13 (ruletas) por escuela.

Espacio muestral construido	Suceso seguro		Posible		Equiprobable		Imposible	
	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.
Suceso seguro	**34,5**	**34,6**						3,8
Suceso muy probable	41,4	42,3	**31,0**	**42,3**			10,3	26,9
Suceso equiprobable	6,9	15,4	**51,7**	**46,2**	**82,8**	**100,0**	13,8	19,2
Suceso poco probable	10,3	7,7	**10,3**	**11,5**	10,3		37,9	30,8
Suceso imposible							**31,0**	**19,2**
No construye	6,9		6,9		6,9		6,9	

Espacios muestrales construidos en contexto de urnas

En la Tabla 3.8.3 presentamos la frecuencia y porcentaje de estudiantes que construyen varios tipos de espacio muestral en el ítem 14, en el contexto de urnas, en función de lo pedido en cada apartado (seguro, posible, equiprobable e imposible). Se ha marcado en negrita las frecuencias y porcentajes que corresponden a las respuestas correctas.

Tabla 3.8.3. Frecuencia y porcentaje de estudiantes en la muestra global, según el espacio muestral construido en cada apartado del ítem 14 (contexto de urnas).

	Apartado del ítem y suceso pedido							
Espacio muestral construido	1.Seguro		2.Posible		3.Equiprobable		4.Imposible	
	n	%	n	%	n	%	n	%
Suceso seguro	**16**	**29,1**						
Suceso muy probable	19	34,6	**16**	**29,1**	2	3,6	6	10,9
Suceso equiprobable	1	1,8	**7**	**12,8**	**39**	**70,9**	2	3,6
Suceso posible							15	27,3
Suceso poco probable	17	30,9	**28**	**50,9**	13	23,7	17	30,9
Suceso imposible	1	1,8	**2**	**3,6**			**13**	**23,7**
No construye	1	1,8	2	3,6	1	1,8	2	3,6

Aquí también es importante resaltar el interés por parte de todos los estudiantes de la muestra para completar el cuestionario, ya que son muy pocas las no respuestas. Al igual que el ítem de contexto de ruletas, donde hubo mejores resultados fue al construir el espacio muestral correspondiente al suceso posible, correctamente respondido por toda la muestra que realizó el apartado (96,4%). También hubo buen rendimiento en el suceso equiprobable, donde 7 de cada 10 estudiantes respondieron correctamente. Al igual que en el ítem de contexto de ruletas, observamos la mayor dificultad en el suceso seguro, interpretado con alta frecuencia como muy o poco probable; y el suceso imposible, generalmente considerado como poco probable o posible; en estos dos tipos de sucesos aparecen también otras interpretaciones.

En la Tabla 3.8.4 se comparan los resultados por escuela, en el contexto de urnas, donde se aprecian pocas diferencias porcentuales en los espacios muestrales construidos de acuerdo con el suceso solicitado. Los estudiantes de la escuela privada tuvieron un rendimiento levemente mejor (27,6%) respecto a los de la escuela pública (19,2%) en responder correctamente el suceso imposible, y también, un rendimiento mayor, aproximadamente del 10% de respuestas correctas, en el de suceso equiprobable.

Tabla 3.8.4. Porcentaje de respuestas en cada apartado del ítem 14 (urnas) por escuela

	Tipo de suceso pedido							
Espacio muestral construido	Seguro		Posible		Equiprobable		Imposible	
	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.
Suceso seguro	**27,6**	**30,8**						
Suceso muy probable	27,6	42,3	**31,0**	**26,9**	6,9		6,9	15,4
Suceso equiprobable	0,0	3,8	**6,9**	**19,2**	**75,9**	**65,4**		7,7
Suceso posible	37,9	23,1	**55,2**	**46,2**	13,8	34,6	27,6	26,9
Suceso poco probable	3,4		**3,4**	**3,8**			31,0	30,8
Suceso imposible							**27,6**	**19,2**
No construye	3,4		3,4	3,8	3,4		6,9	3,7

Comparación de resultados por contexto

En la Tabla 3.8.5 se comparan las respuestas de los estudiantes en porcentajes de acuerdo con el contexto del ítem en cada uno de los apartados, señalando en negrita las respuestas correctas.

Tabla 3.8.5. Porcentaje espacios muestrales construidos según suceso pedido por contexto.

	Apartado del ítem y suceso pedido							
Espacio muestral	1.Seguro		2. Posible		3. Equiprobable		4.Imposible	
construido	Ruleta	Urna	Ruleta	Urna	Ruleta	Urna	Ruleta	Urna
Suceso seguro	**34,5**	**29,1**					1,8	
Suceso muy probable	41,8	34,6	**36,4**	**29,1**		3,6	18,2	10,9
Suceso equiprobable	11,0	1,8	**49,1**	**12,8**	**90,9**	**70,9**	16,4	3,6
Suceso posible								27,3
Suceso poco probable	9,1	30,9	**10,9**	**50,9**	5,5	23,7	34,5	30,9
Imposible		1,8		**3,6**			**25,0**	**23,7**
No construye	3,6	1,8	3,6	3,6	3,6	1,8	3,6	3,6

Globalmente, aunque en diferente grado, se aprecia una menor dificultad en la construcción de espacios muestrales en el contexto ruletas, siendo la mayor diferencia en el suceso equiprobable, donde un 20% más de los estudiantes lograron responder correctamente este apartado, seguidamente los sucesos seguro e imposible, donde hay una diferencia del 5,4% y 1,8% respectivamente, en las respuestas correctas. El suceso posible no presenta diferencias porcentuales; sin embargo, si hay mayor diversidad en las respuestas en el contexto urnas, debido a que es una tarea que presenta menos restricciones

En la Tabla 3.8.6, se presenta la distribución del número de apartados correctos en cada uno de los dos contextos, donde el máximo posible serían 4 respuestas correctas.

Tabla 3.8.6. Frecuencia y porcentaje de número de respuestas correctas en los dos contextos

Respuestas correctas	Ítem 13. Ruletas			Ítem 14. Urnas		
	n	%	Porcentaje acumulado	n	%	Porcentaje acumulado
0	3	5,5	5,5	2	3,6	3,6
1	26	47,2	52,7	23	41,8	45,4
2	10	18,2	70,9	16	29,1	74,5
3	9	16,4	87,3	9	16,4	90,9
4	7	12,7	100,0	5	9,1	100,0

Al comparar el número de respuestas correctas en cada ítem, se observa que siete estudiantes en el primer ítem y cinco en el segundo logran responder correctamente los cuatro apartados de cada ítem. Por otro lado, se dan porcentajes muy similares en cada contexto respecto al número de tareas resueltas correctamente. El porcentaje de estudiantes que contesta adecuadamente a dos preguntas o menos en ambos contextos ronda el 70%; sin embargo, hay que señalar que en el contexto urnas el 54,6% de los estudiantes respondieron 2 o más apartados correctamente, a diferencia del contexto de ruletas donde esto ocurrió en el 47,3% de los estudiantes.

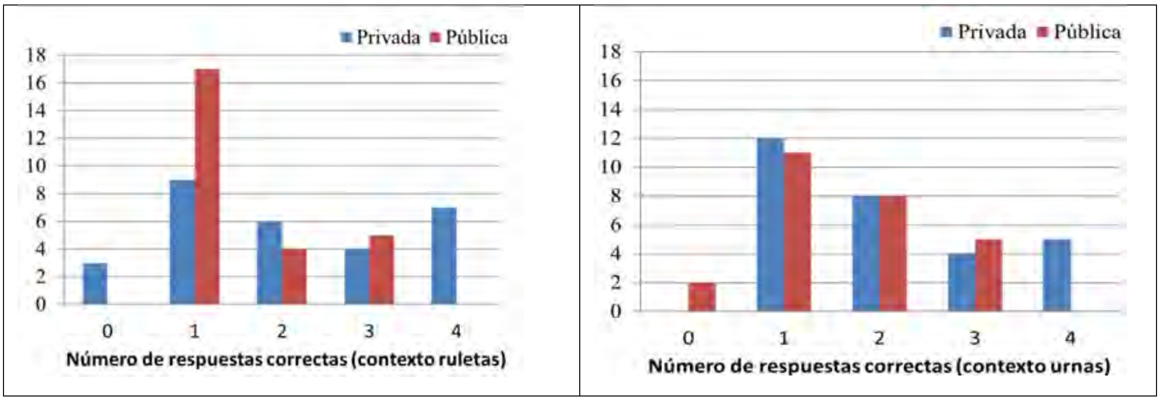


Figura 3.8.8. Distribución del número de respuestas correctas en cada contexto según tipo de escuela

En la Figura 3.8.8 se comparan el número de respuestas correctas en cada contexto, según tipo de escuela. En general, los estudiantes de la escuela privada tuvieron mejores rendimientos en ambos contextos respecto a los de la escuela pública. En el contexto de ruletas se observa que el 65,4% de los estudiantes de la escuela pública solo tuvieron un apartado correcto, a diferencia de los de la escuela privada donde el 58,6% tuvieron más de uno. Respecto al contexto de urnas, todos los estudiantes de la escuela privada al menos lograron un apartado correcto, a diferencia de los de escuela pública. Además, mientras ningún niño de la escuela pública obtuvo los cuatro apartados correctos en ninguno de los dos ítems, en la escuela privada 24,1% de los estudiantes lo logró en contexto de ruletas, y el 17,2% en el de urnas.

Relación entre comparación de probabilidades en ruletas y construcción del espacio muestral

A continuación se exponen estos resultados, que son parte de los publicados en:

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes de educación primaria. *Educaçao e Realidade, 46*(3). https://doi.org/10.1590/2175-6236105401

En la Tabla 3.8.7 se presenta la distribución conjunta del número de respuestas correctas en las tareas de comparación de probabilidades en contexto continuo (ítems 10 a 12) y construcción del espacio muestral en ruletas, según diferentes tipos de suceso (ítem 13). Todos los porcentajes se calculan respecto al total de la fila, excepto los porcentajes del total de niños que obtienen 0, 1, 2, 3 o 4 espacios muestrales correctos, que se calcula respecto al total de la muestra.

Tabla 3.8.7. Frecuencias y porcentajes del número de respuestas correctas en comparación de probabilidades en contexto continuo y construcción del espacio muestral en ruletas

N. comparación probabilidades correctas		N. de espacios muestrales correctos 0	1	2	3	4	Total	% total
0	Frecuencia			2			2	3,6
	% por fila			100,0				
1	Frecuencia		1	9	3	3	16	29,1
	% por fila		6,3	56,3	18,8	18,8		
2	Frecuencia	1	1	13	2	3	20	36,4
	% por fila	5,0	5,0	65,0	10,0	15,0		
3	Frecuencia	1		7	3	6	17	30,9
	% por fila	5,9		41,2	17,6	35,3		
Total	Frecuencia	2	2	31	8	12	55	100,0
	% del total	3,6	3,6	56,4	14,5	21,8	100,0	100,0

Únicamente, dos sujetos construyeron incorrectamente los cuatro espacios muestrales pedidos, siendo lo más frecuente obtener dos correctos (56,4%) seguido de cuatro correctos (21,8%) y tres correctos (14,5%); solo dos sujetos respondieron correctamente a una única construcción del espacio muestral solicitado. Por tanto, la construcción del espacio muestral fue una tarea compleja, pues poco más de un tercio de las respuestas tiene al menos tres espacios muestrales correctamente construidos. Se considera que ello es debido a la confusión general entre sucesos imposible y poco probable o entre sucesos seguro y muy probable. Por otro lado, solo dos sujetos fallan en todas las comparaciones de probabilidades, siendo lo más frecuente responder correctamente a dos de ellas (36,4%) o a las tres (30,9%).

Nótese, también, la relación entre el número de respuestas correctas en comparación de probabilidades y en la construcción del espacio muestral. Así, los dos sujetos que fallan todas las preguntas de comparación de probabilidades solo llegan a completar adecuadamente dos espacios muestrales; y el porcentaje de los que construyen bien los cuatro espacios muestrales crece hasta el 35,3% de los que resuelven correctamente todas las tareas de comparación de probabilidades.

3.8.4. Conclusiones

Como se indicó en la introducción, la habilidad general que se pretende lograr al final del ciclo educativo de Educación Primaria en Costa Rica es identificar distintos sucesos (más probables, menos probables o igualmente probables) de acuerdo con el número de resultados simples de cada uno de estos. Y, en las tareas propuestas, se debe construir un espacio muestral a partir de ciertas condiciones iniciales, lo que plantea un desafío para el estudiante al no ser una tarea usual.

Los resultados del estudio muestran una intuición razonable de la idea de espacio muestral en la muestra de estudiantes que ha participado, tanto en contexto de urnas como en contexto de ruletas. Estos han sido capaces, en su mayoría, de construir un espacio muestral adecuado cuando en el enunciado de las tareas se solicitó un suceso posible y un suceso equiprobable. Este hecho señala que los estudiantes ya han cimentado un paso importante para avanzar en el estudio de la probabilidad, según Bryant y Nunes (2012).

Se ha podido constatar, sin embargo, al igual que en las investigaciones de Cañizares (1997), Green (1983) y Hernández-Salmerón et al. (2017), que algunos estudiantes confunden el suceso seguro con el suceso muy probable, y el suceso imposible con el suceso muy poco probable. Pero, además, hemos encontrado otras intuiciones erróneas, como considerar equiprobable un suceso con más casos favorables que desfavorables (o viceversa), o considerar seguro un suceso poco probable. De acuerdo a las indicaciones de Fischbein (1975), hay que prestar atención a las intuiciones primarias sobre el significado de los tipos de sucesos que los estudiantes traen a la clase, pues las intuiciones incorrectas son muy difíciles de cambiar.

El lenguaje influye en el conocimiento informal de probabilidad de los estudiantes, con el que llegan a la escuela e interpretan las tareas de probabilidad que se les plantean (Amir y Williams, 1999). Molnar (2018) recuerda que las ambigüedades del lenguaje en probabilidad pueden llevar a la formación de intuiciones erróneas, y que el profesor debe estar atento al significado que los estudiantes dan a los términos probabilísticos.

Igualmente tendrá mucha importancia los generadores de sucesos aleatorios, tanto manipulativos (dados, ruletas, fichas en urnas, etc.) como los representados gráficamente que se hayan utilizado en las situaciones propuestas a los estudiantes, pues no todos tienen las mismas propiedades (Gandhi, 2018). Aunque aparentemente no ha habido diferencias notables en el número de niños que ha dado respuesta correcta para cada apartado en los dos contextos considerados, hemos notado que el número total de respuestas correctas es mayor en el contexto de ruletas, que al haberse dividido sólo en cuartos ha facilitado la comparación de probabilidades a los estudiantes. Recomendamos, por tanto, el uso de una variedad de tareas y dispositivos manipulativos en la enseñanza de la probabilidad a los estudiantes en este nivel educativo.

3.9. CONCLUSIONES GENERALES DEL ESTUDIO EXPLORATORIO DE EVALUACION

La relevancia de este estudio se justifica por la falta de investigaciones sobre razonamiento probabilístico con estudiantes costarricenses; donde, en general, se ha informado de los resultados obtenidos, de las estrategias empleadas y de la influencia de factores subjetivos que han incidido en las respuestas de los niños al resolver diferentes tareas probabilísticas.

De acuerdo a la exposición de los resultados del estudio exploratorio, llevado a cabo con estudiantes de 6º curso de Educación Primaria en Costa Rica, se finaliza el capítulo con la discusión de las conclusiones sobre los objetivos e hipótesis que se plantearon para dicho estudio.

3.9.1. Conclusiones sobre los objetivos

Se planteó, al comienzo del capítulo, el siguiente objetivo general:

O2. Evaluar el razonamiento probabilístico en estudiantes de último año de la Educación Primaria costarricense, a partir de la resolución de distintos problemas probabilísticos propuestos en un cuestionario.

Este objetivo se logró al construir un cuestionario, que se ha descrito a lo largo del capítulo, y analizar las respuestas de un grupo pequeño de estudiantes de 6º curso al mismo. Asociado a este objetivo general, se desglosaron los siguientes objetivos específicos del estudio exploratorio:

O2.1. Analizar la forma en que los estudiantes de sexto año de Educación Primaria costarricense resuelven problemas de comparación y cuantificación de probabilidades simples, establecimiento del espacio muestral y determinación del juego equitativo.

Se ha proporcionado un informe detallado de la resolución de problemas de probabilidad simple, juego equitativo, comparación de probabilidades en contextos de urnas y de ruletas y establecimiento del espacio muestral.

O2.2. Comparar los resultados obtenidos en el estudio con lo establecido por Piaget e Inhelder (1951) para la edad de los estudiantes y con resultados de otras investigaciones previas.

A partir de los resultados de las investigaciones previas que se han considerado para este trabajo, se analizaron las diferencias con los resultados obtenidos en la muestra de este estudio, tanto en porcentajes de respuestas correctas, como en las estrategias empleadas.

Una de las conclusiones obtenidas fue que muchos de los problemas propuestos fueron difíciles para los niños de la muestra, por lo que se decidió repetir el estudio ampliando el rango de edades, para investigar si las dificultades encontradas persistían en los estudiantes mayores.

También se observó la relación de la dificultad de algunas de las tareas con el nivel de razonamiento proporcional requerido en el ítem. Por lo cual, se decidió analizar en el Estudio 2, de forma más sistemática, esta relación, variando uniformemente el nivel de razonamiento proporcional requerido en los ítems de comparación de probabilidades y añadiendo ítems del mismo nivel de comparación de razones.

3.9.2. Conclusiones sobre las hipótesis

A continuación, se discuten las hipótesis del estudio exploratorio, donde se esperaba:

H1. Encontrar diferencias respecto a los resultados obtenidos con estudiantes de la misma edad en investigaciones previas.

Se presumía obtener mejores resultados en relación con dichos estudios, esperando una influencia positiva de la instrucción en las intuiciones de los estudiantes (Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein et al., 1967). Se encontraron algunas diferencias, aunque no tantas como se esperaba. Los resultados fueron superiores a los de investigaciones previas en los correspondientes a comparación de probabilidades simples (ítems 1 y 2). En estos ítems se encontró un predominio de la comparación únicamente de casos favorables o de casos desfavorables.

Las expectativas no se cumplieron en los ítems 3 y 4 (determinación del juego equitativo), puesto que los porcentajes de respuestas correctas en este estudio fueron inferiores a los obtenidos en Green (1982) y similares a los de Cañizares (1997). Una explicación fue que, aunque los estudiantes habían estudiado algo de probabilidad, las tareas propuestas no eran familiares para ellos. Los estudiantes tuvieron grandes dificultades al justificar la equiparación de ganancia (ítem 4) según la esperanza de ganar de cada jugador, lo que es debido a una falta de desarrollo de razonamiento proporcional, debido que había que emplear proporcionalidad inversa.

H2. Encontrar diferencias en los resultados obtenidos en problemas de contexto de urnas y de contexto de ruletas.

Investigaciones como las de Maury (1984) revelan que algunos niños modifican sus estrategias en la comparación de probabilidades en función del contexto, discreto o continuo; es decir, en problemas que aunque podrían ser equivalentes desde el punto de vista probabilístico o de razonamiento proporcional, presentan distintos resultados.

En la comparación de probabilidades en urnas se obtuvieron resultados similares a los de otros estudios previos con menores de la misma edad. No obstante, se conjetura que la dificultad de algunos ítems es debida a que solo parte de la muestra han alcanzado el correspondiente nivel de razonamiento proporcional en la clasificación de Noelting (1980a; 1980b).

Por el contrario, el análisis de las respuestas en la comparación de probabilidades en ruletas y trompos indica mejores resultados en el presente estudio que los obtenidos con niños de la misma edad en investigaciones previas. Además, en estos ítems apareció una estrategia nueva respecto a la comparación de probabilidades en urnas, consistente en la comparación de áreas cubiertas por la parte favorable y desfavorable.

H3. Encontrar ejemplos de argumentos o estrategias en la resolución de problemas que han podido ser influenciadas por creencias de tipo subjetivo.

Se esperaba, a priori, que en el ítem 4 se obtuviera un mayor porcentaje de argumentos asociados al efecto de recencia positiva o negativa (Fischbein, 1975), considerando las investigaciones previas; sin embargo, el porcentaje fue bajo. También, con poca frecuencia, se encontraron en los ítems ejemplos de razonamiento que están asociados al sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), enfoque en el resultado (Konold, 1989) y sesgo de distribución (Cañizares, 1997; Green, 1982; Maury, 1984).

Además, algunos estudiantes asignaron equiprobabilidad en el caso de que hubiera poca diferencia de casos favorables en la comparación de dos urnas. En otros pocos casos se alude a consideraciones físicas; por ejemplo, la disposición de las bolas en una urna para asignar las probabilidades, la fuerza o también la velocidad con que se hace girar una ruleta, la posición de la ajuga en las ruletas, etc. Se espera estudiar más sistemáticamente este tipo de sesgos en el segundo estudio de evaluación.

En la determinación del juego equitativo, específicamente en el ítem 1, se consideraron argumentos incorrectos los que giraron en torno a lo que planteaba el distractor, que indicaría un conflicto semiótico consistente en suponer que hay más probabilidad siempre que haya más casos favorables (Cañizares et al., 1999). Otros estudiantes suponen que el juego sería equitativo únicamente si se juega exactamente con el mismo número de bolas de cada color, o indicar que el juego no es equitativo porque los jugadores no tienen el mismo número de casos posibles.

H4. Evidenciar, en los ítems de construcción de espacios muestrales, mayores dificultades en los apartados donde se pide un evento imposible.

Investigaciones como la de Cañizares (1997) evidenciaron que los niños tenían mayor dificultad en comprender términos como improbable e imposible, confundiendo suceso imposible con suceso muy poco probable. Se presumía que esto mismo podría ocurrir en este estudio.

Los resultados del estudio muestran una intuición razonable de la idea de espacio muestral, en los estudiantes que participaron, tanto en contexto de urnas como en contexto de ruletas. Estos han sido capaces, en su mayoría, de construir un espacio muestral adecuado cuando en el enunciado de las tareas se solicitó un suceso posible y un suceso equiprobable. Por tanto, logran un paso importante para avanzar en el estudio de la probabilidad, según Bryant y Nunes (2012).

Sin embargo, aparecen las dificultades citadas en Cañizares (1997), Green (1983) y Hernández-Salmerón et al. (2017) consistentes en confundir seguro con muy probable y poco probable con imposible. Será, entonces, importante dedicar un tiempo a que los estudiantes refuercen este lenguaje y realizar tareas como las propuestas, en que ellos mismos deben explicitar el espacio muestral del experimento.

En resumen, las hipótesis planteadas se confirman en todo o en parte e indican la necesidad de investigar con más detalle cada uno de los puntos planteados, lo que se lleva a cabo en el Estudio 2 que se describe en los siguientes capítulos.

3.9.3. Implicaciones didácticas

Este estudio exploratorio ha informado, entre otras cosas, de la existencia de algunos sesgos de razonamiento en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de Educación Primaria. De este modo, se brinda información que puede servir como orientación didáctica para mejorar la comprensión de los conceptos probabilísticos elementales que se habrían de desarrollar en este nivel educativo, según el currículo costarricense actual (MEP, 2012).

Por lo tanto, se considera que este primer estudio es valioso, ya que brinda conocimiento sobre los significados personales de estudiantes costarricenses acerca de diferentes conceptos probabilísticos asociados a la diversas tareas propuestas en el cuestionario aplicado; lo cual siempre es útil al profesorado de cara a identificar diversos conflictos que se presentan en el estudio de los diferentes temas del currículo (MEP, 2012). A continuación, se realizan algunas indicaciones didácticas generales, que se generan a partir de los resultados obtenidos en este estudio y que se podrían implementar en las aulas costarricenses:

1. En cuanto a problemas de juego justo o equitativo, se recomienda incorporar en las clases costarricenses y en los libros de texto utilizados, tareas matemáticas donde se formule y trabaje la equitatividad de un juego, no solo en el caso donde todos los jugadores tiene la misma probabilidad de ganar y obtengan el mismo premio, sino también explorar situaciones donde las probabilidades de los jugadores sean diferentes y se deban equiparar los premios igualando las esperanzas de ganancia.
2. Respecto al desarrollo del lenguaje asociado a situaciones probabilísticas, los resultados obtenidos señalan la necesidad de prestar mayor cuidado al lenguaje de probabilidad que se utiliza en la clase, puesto que los estudiantes no sólo le asocian significados del cotidiano que no corresponden al matemático, sino también significados muy diferentes, tanto a lo cotidiano como a lo matemático. Se concluye que el lenguaje del azar es sencillo para el niño, pero a veces no se atiende el hecho de que detrás de cada término hay conceptos asociados cuya intuición primero y comprensión posterior requiere de tiempo y esfuerzo, si se quiere que el niño progrese adecuadamente en su estudio posterior de la probabilidad.

3. Asociado al punto anterior, de igual forma es importante dedicar un tiempo a que los estudiantes refuercen este lenguaje y realizar tareas, como las propuestas en este estudio, donde ellos mismos deban explicitar el espacio muestral de un experimento y algunos sucesos específicos. Nunes et al. (2014) indican que es posible apoyar la idea de espacio muestral a partir de los 10 años, cuando se comienzan a desarrollar los esquemas conceptuales de clasificación, conjunción y razón, que utilizan en otros temas matemáticos.
4. Se sugiere el uso de diferentes generadores de sucesos aleatorios, tanto manipulativos (dados, ruletas, fichas en urnas, etc.) como los representados gráficamente que se hayan utilizado en las situaciones propuestas a los estudiantes, pues no todos tienen las mismas propiedades (Gandhi, 2018). Se recomienda, por tanto, el uso de una variedad de tareas y dispositivos manipulativos en la enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria.
5. En general, aunque algunos de los problemas planteados en el cuestionario resultaron ser difíciles para los estudiantes, se recomienda enfrentar a los estudiantes a este tipo de situaciones, según el enfoque metodológico de resolución de problemas planteado por el currículo costarricense, donde se dice que: “la filosofía a seguir en el aula varía a favor de acentuar acciones cognitivas de mayor nivel” (MEP, 2012, p.32). Asimismo, estos problemas podrían ser empleados como punto de partida en la acción educativa para generar indagación y discusión entre los estudiantes.
6. Respecto al punto anterior, es importante que se trabaje gradualmente en estrategias de mayor nivel de razonamiento, lo cual se facilita trabajando con material manipulativo, donde puedan recrear la situación planteada, exponer sus creencias iniciales y, con ayuda del personal docente, corregirlas con la experiencia. De acuerdo con Pratt (2000), son muchos los materiales que están al alcance y que pueden servir de recursos para apoyar la construcción de intuiciones correctas sobre el azar. Esta recomendación sigue el principio de que el conocimiento es construido activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno (Piaget e Inhelder, 1951); de ahí surge la importancia de una enseñanza activa por parte de los niños, también en el campo de la probabilidad.
7. Se coincide con Borovcnik y Peard (1996) en que los conceptos probabilísticos y la intuición están fuertemente relacionados y esto quedó mostrado en los ejemplos de argumentos expuestos en este trabajo, lo que hace ver que una instrucción teórica en

contenidos probabilísticos y de resolución de ejercicios a lápiz y papel no es suficiente para confrontar estas ideas equivocadas que traen los niños y niñas. Muchos de estos sesgos o intuiciones incorrectas, pueden corregirse paulatinamente realizando simulaciones físicas o computacionales de los experimentos aleatorios que se plantean en los problemas.

Por otro lado, en diversas investigaciones se sugiere reforzar la formación del profesorado, tanto en probabilidad como en su didáctica, debido a las dificultades que se observan en este tema (Azcárate, 1995; Mohamed y Ortiz, 2012; Ortiz et al., 2016). Por lo que se considera que los argumentos incorrectos mostrados como ejemplos pueden servir a formadores de profesores para el diseño de procesos de capacitación docente y cursos de formación del profesorado; donde se reflexione colectivamente sobre las demandas cognitivas de las tareas planteadas a los estudiantes, de sus formas de razonamiento, posibles conflictos semióticos y sobre las creencias e intuiciones primarias que traen los niños y niñas, y de cómo estos elementos deben considerarse en la planificación educativa.

Lo anterior toma mucha relevancia en el contexto de implementación curricular costarricense, donde algunos profesores sienten inseguridad al enseñar la probabilidad a los estudiantes debido a una débil formación conceptual y didáctica en el tema (Alpízar et al., 2012; Alpízar et al., 2015). Ello puede llevarles a reducir u omitir su enseñanza, alegando razones como la falta de tiempo debido a lo apretado de los programas o su inseguridad para enseñarlo; por lo que se plantea la necesidad de una investigación más profunda que considere diferentes actores y variables a la luz de la mediación pedagógica que se realiza en el aula en torno al razonamiento probabilístico. Se considera que dicha formación podría tener en cuenta las componentes del conocimiento del profesor establecidas en el modelo CCDM (Godino et al., 2017), así como la teoría de idoneidad didáctica, lo cual podría también orientar la elaboración de propuestas didácticas de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad (Beltrán-Pellicer et al., 2018).

CAPÍTULO 4: CONSTRUCCIÓN DE UN INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN

4.1. INTRODUCCIÓN

Una vez finalizado el estudio inicial exploratorio descrito en el Capítulo 3, se consideró de interés profundizar en sus resultados con una muestra mayor de estudiantes de un rango más amplio de edades y utilizando un nuevo cuestionario que tomase en cuenta las principales variables consideradas y permitiera evaluar su mutua influencia. Más concretamente, se pretendía abordar el tercer objetivo general de la investigación que tuvo el siguiente enunciado:

O3. Estudiar la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas en estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

Para conseguir dicho objetivo, se procedió a construir un nuevo instrumento de evaluación que incluyera diversos tipos de tareas probabilísticas, además de otras de comparación de razones similares a las utilizadas por Noelting (1980a, 1980b). A la vez, se trató que en su elaboración se siguiesen las normas metodológicas recomendadas por la AERA, APA y NCME (2014), que representan el acuerdo profesional sobre los criterios para juzgar la calidad de las pruebas psicológicas y educativas.

Dicho instrumento se orienta a medir el "razonamiento probabilístico y su relación con el razonamiento proporcional", que es un constructo inobservable, por lo cual debe inferirse a partir de las respuestas de los estudiantes a los ítems planteados en un instrumento; estas respuestas serían los indicadores empíricos observables del constructo (Montero y León, 2012). La finalidad del estudio de evaluación fue aportar información más amplia que la lograda en el primer estudio, sobre las dificultades específicas que los estudiantes de 11 a 16 años presentan en la resolución de tareas probabilísticas sencillas, además de investigar su relación con el razonamiento proporcional. Esta información sería la base para una acción diagnóstica y correctiva del profesorado encargado de la enseñanza de la probabilidad y así ayudar a los estudiantes a superar dichas dificultades.

Se considera el cuestionario como un instrumento de medición ya que, por medio de las preguntas planteadas a los estudiantes de la muestra, se desea estimar sus conocimientos y capacidades, a los que no podemos acceder mediante observación (Martínez et al., 2014). La elaboración se inicia igualmente siendo conscientes de que hay diferentes aproximaciones a la medida de rasgos psicológicos, por lo que se aceptan las posibles limitaciones del procedimiento elegido (Martínez et al., 2014). Además, la presente investigación se sitúa en un dominio curricular (concretamente la educación matemática), por lo que se realizó un análisis sistemático del contenido que se deseaba evaluar, contemplado sus diferentes matices (Haladyna y Rodríguez, 2013).

En consecuencia, en la elaboración del cuestionario se seguirá un método riguroso, como se ha indicado, y siguiendo los pasos de Díaz (2007) en su construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Todo esto apoyado por el estudio previo de antecedentes (resumido en el Capítulo 2) y buscando cumplir con los requisitos de fiabilidad y validez del instrumento.

En lo que sigue se describen los objetivos perseguidos con el cuestionario y las fases que se han seguido en la construcción del mismo.

4.2. OBJETIVOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

La segunda parte de este trabajo empírico (Estudio 2, descrito en el Capítulo 5) se orientó a analizar el razonamiento probabilístico de estudiantes al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la secundaria, es decir, estudiantes de 11 a 16 años, que son las edades del estudio de Green (1982). Como hemos indicado, se decidió que los estudiantes que compondrían la muestra para este estudio habrían recibido instrucción en probabilidad en los cursos anteriores o en el que se realizase la evaluación, al contrario que en la mayoría de los estudios previos citados en el Capítulo 2. Las directrices curriculares que los estudiantes habían seguido son las que se han descrito en el Capítulo 1.

Además, con los resultados obtenidos se analizaría la relación del nivel de razonamiento proporcional con la competencia de los estudiantes para la comparación de probabilidades, su comprensión del juego equitativo y la construcción que realizan del espacio muestral, dadas ciertas condiciones, lo que sería una aportación original respecto a las investigaciones previas. Se eligieron estos tipos de problemas probabilísticos por haber sido utilizados en el Estudio 1, en el cual se concluyó la necesidad de profundizar en cada uno de estos tipos de tarea.

Sería también novedoso realizar esta evaluación en Costa Rica (donde no había estudios en el tema en el momento de comenzar la investigación) y llevar a cabo una comparación con los resultados obtenidos de estos estudiantes por estudiantes españoles utilizando el mismo cuestionario. Esta comparación se realizó finalmente tan solo para una parte del Estudio 2, para finalizar la Memoria de Tesis en un tiempo razonable.

Teniendo en cuenta los antecedentes (que se han resumido en el Capítulo 2) y los resultados obtenidos en el Estudio 1 de evaluación (Capítulo 3), en la construcción del nuevo cuestionario se plantearon los siguientes objetivos, que se deducen del objetivo 3 de esta tesis, discutido anteriormente.

O3.1. Estudiar si el nivel de razonamiento proporcional de una muestra de estudiantes de 11 a 16 años (de acuerdo al modelo de Noelting, 1980a, 1980b) requerido para tareas de comparación de razones se mantiene en tareas de comparación de probabilidades.

Es decir, interesa estudiar si los estudiantes que logran resolver problemas de razonamiento proporcional para un nivel dado, también obtienen éxito en los problemas de comparación de probabilidades del mismo nivel y viceversa. Ello es debido a la sugerencia de investigadores como Pérez Echeverría et al. (1986) donde indican que la comparación de probabilidades es más difícil que la comparación de razones. Pero dichos investigadores realizaron su trabajo en un momento en que el estudio de la probabilidad se retrasaba hasta los 14 años. Además, sus muestras no consideraron todos los rangos de edad que se pretenden en este estudio.

Para lograr este objetivo se trata de construir un cuestionario que incluya, para cada uno de los niveles de razonamiento proporcional de Noelting (1980a, 1980b), desde IA hasta IIIB, tareas de razonamiento proporcional y de comparación de probabilidades, y así poder relacionar los resultados de los estudiantes en estos dos tipos de tareas.

Por otro lado, se desea describir no solo los porcentajes de respuestas correctas a los ítems, sino las estrategias empleadas por los estudiantes y compararlas con las descritas por Cañizares (1997) y Green (1982). Ello condicionaría los ítems, en los que se pediría una justificación a los estudiantes.

O3.2. Estudiar la posible relación entre el nivel de razonamiento proporcional y los resultados en la resolución de otras tareas probabilísticas, en concreto, problemas de juego equitativo y tareas de construcción de espacios muestrales correspondientes a un suceso seguro, imposible y equiprobable.

Con esta finalidad se considerarán en el cuestionario algunas tareas de determinación de la apuesta para asegurar un juego equitativo y de construcción del espacio muestral que corresponde a cada uno de estos tipos de suceso: seguro, imposible y equiprobable. Se elegirían actividades similares a las empleadas con los niños de 6º curso de Educación Primaria en el Estudio 1. Para dichas tareas solo se utilizaría un ítem, para no alagar excesivamente el cuestionario. Los resultados obtenidos en las tareas indicadas se compararán con los obtenidos en las tareas sobre razonamiento proporcional; de manera precisa, se comparará el nivel máximo alcanzado (según Noelting, 1980a; 1980b) por el estudiante en razonamiento proporcional, con la dificultad de las tareas de construcción del espacio muestral y de juego equitativo,

O3.3. Comparar el nivel de razonamiento alcanzado en la comparación de probabilidades en problemas planteados en contextos de urnas y de ruletas.

Para lograr este objetivo, en el cuestionario se usarán problemas de comparación de probabilidades en los dos tipos de contextos (urnas y ruletas) y en cada uno de los niveles de Noelting (1980a; 1980b), comparando los resultados en cada pareja de ítems del mismo nivel de razonamiento proporcional. El interés se debe a que tanto Cañizares (1997) como Maury (1984) indicaron que el contexto de urnas favorece la comparación parte-parte, mientras el contexto de ruletas estimula la comparación parte-todo. Además, en las ruletas los estudiantes disponen de otra nueva estrategia correcta que es la comparación de áreas, por lo que se favorece la resolución de estos problemas.

O3.4. Estudiar la influencia de sesgos en razonamiento probabilístico en la resolución de las tareas de acuerdo al nivel alcanzado en la comparación de probabilidades.

Los niños traen consigo intuiciones o ideas que asumen como verdaderas y que pueden incidir en sus respuestas, respaldado por los resultados de investigaciones previas (e. g. Cañizares, 1997; Konold, 1989; Lecoutre, 1992) y el Estudio 1 de esta investigación (Hernández et al., 2022) se encontraron ejemplos de respuestas y argumentos utilizados en la resolución de problemas que han podido ser influenciados por sesgos o creencias de tipo subjetivo.

Se parte del hecho de que, aunque los estudiantes hayan tenido instrucción en contenidos probabilísticos, algunas veces sus respuestas pueden verse afectadas por sesgos y creencias que logran distorsionar la información y provocar errores sistemáticos en la resolución de problemas probabilísticos. Con la inclusión de algunos distractores en parte de los ítems del cuestionario se busca comprobar la extensión de estos sesgos en la nueva muestra, pues la del primer estudio era pequeña y los estudiantes muy jóvenes. Es decir, se incluirán algunos ítems que evalúan sesgos comunes descritos en las investigaciones previas, para analizar si hay variación en la respuesta al resto de tareas.

O3.5. Analizar el efecto del curso escolar y del entorno educativo (español o costarricense) en algunas tareas del cuestionario.

Para lograr este objetivo se utilizará una muestra amplia de estudiantes de diferentes edades y en los dos países y posteriormente se comparan los resultados obtenidos en los dos países por curso y preguntas del cuestionario. Específicamente, la diferencia por curso se estudiará para todas las tareas, mientras que la diferencia por entorno educativo, únicamente, se hará para la comparación de razones y para la comparación de probabilidades en contexto de urnas.

O3.6. Comparar los resultados conseguidos en el estudio de evaluación con los obtenidos por Cañizares (1997) y Green (1982) con estudiantes de la misma edad.

Se emplearán algunos ítems utilizados en estos estudios previos, y otros similares en formato y con nivel de razonamiento proporcional equivalente, con estudiantes entre 11 y 16 años. Esto permitirá comparar los resultados del presente estudio con los de otros autores que los utilizaron con estudiantes de edades similares, en particular Green (11-16 años) y Cañizares (10-14 años). Igualmente, dependiendo del ítem, se compararán los resultados con los de otros estudios previos analizados en los antecedentes que se describieron en el Capítulo 2.

4.3. VARIABLES CONSIDERADAS Y ESPECIFICACIÓN DEL CONTENIDO

El diseño del cuestionario se inició por la definición semántica del constructo a evaluar, que consiste en la especificación de una serie de comportamientos observables que se pueden poner en correspondencia con los componentes del contenido a evaluar (Díaz, 2007).

La definición semántica de la variable se ha apoyado en la revisión bibliográfica de antecedentes, descrita en el Capítulo 2, y que nos ha permitido conocer las principales dificultades de los estudiantes de las edades abordadas en las tareas seleccionadas. A partir de dicha revisión y síntesis bibliográfica se han determinado el tipo de tareas a incluir en el cuestionario y se han recopilado ejemplos de las mismas, de las cuales se seleccionarán las definitivas mediante juicio de expertos.

La definición semántica implica la especificación de las respuestas esperadas en cada ítem y el análisis de su correspondencia con el constructo que se trata de evaluar (Díaz, 2007). Para lograrlo, se lleva a cabo una descripción detallada de los contenidos que serán evaluados en cada uno de los tipos de ítems incluidos en el cuestionario, que se describe más adelante en el Capítulo 5, donde se exponen los resultados obtenidos en el cuestionario.

Además, se han elegido las variables independientes que se tendrán en cuenta para cumplir los objetivos formulados en la sección anterior. Todas las variables se describen a continuación.

4.3.1. Tipo de tarea

Una primera variable es el tipo de tarea, pues en el diseño del cuestionario se incluirán cuatro tipos de tareas diferenciadas, que se resumen a continuación, y se describen con mayor detalle en la Sección 4.4:

T1. *Tareas de comparación de probabilidades.* Se adaptarían las tareas de comparación de probabilidades utilizadas en el Estudio 1 y su propósito sería analizar si el nivel de razonamiento alcanzado en estos problemas es equivalente al nivel logrado de razonamiento proporcional.

En estas tareas se presenta un enunciado que plantea una situación de decisión en un ambiente de incertidumbre, donde el estudiante debe elegir una de dos urnas o elegir una de dos ruletas; es decir, seleccionar entre dos experimentos aleatorios en un determinado contexto. Se emplearán problemas que requieren diferente nivel de razonamiento proporcional de Noelting (1980a; 1980b) para cada uno de los dos contextos. Lo anterior permitirá comparar la dificultad relativa de la comparación de probabilidades en contextos de urnas y ruletas. La regla de conducta que corresponde al dominio de este contenido es el éxito en la resolución de los problemas propuestos y las estrategias empleadas por el estudiante (también correctas o incorrectas). Además de las estrategias correspondientes a la comparación de razones, es de esperar otros tipos de estrategias, ligadas al contexto (como la comparación de áreas en ruletas) o propias de la situación aleatoria.

T2. *Tareas de comparación de razones*. En ellas se pedirá determinar cuál de dos razones es mayor, utilizando un contexto de mezclas, y adaptando algunos de los problemas utilizados por Noelting (1980a; 1980b) en su investigación.

El contenido evaluado por dicha tarea sería el nivel de razonamiento proporcional del estudiante, que se puede determinar al comprobar hasta qué nivel de los definidos por Noelting el estudiante logra resolver correctamente en la tarea. La regla de conducta que se puede poner en correspondencia con el contenido es la corrección de la respuesta en la tarea, al mismo tiempo que las estrategias utilizadas en la comparación de las razones, que pueden ser correctas e incorrectas y de varios tipos.

T3. *Tareas de determinación de la ganancia en juegos equitativos*. Se adaptaría el ítem 2 utilizado en el Estudio 1 (Anexo 2). En este se pide encontrar el número de barras de chocolate (confites) que deben recibir dos niños en un juego, de modo que se equipare la ganancia de los jugadores según la probabilidad que tienen de ganar.

Aquí no sólo se evalúa la comprensión de los conceptos de juego equitativo y de esperanza matemática; sino que al ser necesario aplicar la proporcionalidad inversa entre la probabilidad y la ganancia de cada jugador, se quiere estudiar la posible relación entre el nivel de razonamiento proporcional y los resultados que se obtengan en esta tarea probabilística.

En nuestro primer estudio se obtuvieron bajos resultados en este ítem, solo 32,7% de respuestas correctas; inferior al conseguido por Cañizares (1997) en su primer estudio (45,1%) y en su segundo estudio (56,8%), y en el trabajo de Green (1982), el cual fue del 46,0%. Es por esto que se quiere estudiar, si a mayor nivel de razonamiento proporcional y mayor edad se obtienen mejores resultados y una madurez en la comprensión de juego equitativo, así como una mayor facilidad para igualar las esperanzas de ganancia de los jugadores, si las probabilidades de estos son distintas.

La regla de conducta que corresponde al dominio de este contenido es el éxito en determinar la cantidad de barras de chocolate que equiparían el juego y la justificación que establezca el estudiante para esta respuesta, que puede ser correcta o no.

T4. *Tareas de construcción de espacios muestrales*. Se adaptarán los ítems 13 (contexto de ruletas) y 14 (contexto de urnas) utilizados en el Estudio 1 (Anexo 2), donde se pide construir el espacio muestral compatible con la descripción de un suceso específico (seguro, equiprobable, posible e imposible).

Para este cuestionario no se solicitará construir el espacio muestral para el evento posible, sino solo para los eventos seguro, equiprobable e imposible. Esta decisión se toma porque en el Estudio 1 esta tarea resultó demasiado sencilla para los estudiantes de la muestra (6º año de Educación Primaria) y ahora se espera tomar datos de estudiantes de igual y mayor edad (estudiantes de secundaria). El contenido evaluado por dichas tareas sería la comprensión de conceptos como espacio muestral y los sucesos seguro, imposible y equiprobable, de acuerdo con el número de resultados simples de cada uno de estos. Se busca con estas tareas, establecer una posible relación entre el nivel de razonamiento proporcional y los resultados que se obtengan en estas; así como comparar los resultados obtenidos según tipo de contexto (urnas y ruletas). La regla de conducta que se puede poner en correspondencia con el contenido es el éxito o los errores de los estudiantes al construir un espacio muestral a partir de ciertas condiciones iniciales.

4.3.2. Nivel de razonamiento en la categorización de Noelting

En la Tabla 4.3.1 se reproduce una síntesis de los niveles de razonamiento en la comparación de razones propuestos por Noelting (1980a, 1980b), que ya se comentaron con detalle en el Capítulo 2 y que engloban desde la ausencia total de razonamiento proporcional hasta un razonamiento completo. Dichos niveles se tendrían en cuenta en la construcción del cuestionario de evaluación, tanto en los problemas de comparación de razones como en los de comparación de probabilidades.

Tabla 4.3.1. Niveles de comparación de razones según Noelting (1980a; 1980b)

Etapas	Edad (años, meses)	Ejemplo (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)	Características
Simbólica	2,0	(3,0) vs (0,3)	Sólo se diferencian los elementos.
Intuitiva inferior (IA)	3,6	(1,4) vs (2,4)	Se comparan los primeros términos *a* de las razones, sin considerar los segundos términos *b*.
Intuitiva media (IB)	6,4	(1,5) vs (1,3)	Cuando los primeros términos son iguales, se comparan los segundos términos *b* de las razones, comprendiendo que *b* es el recíproco de *a*.
Intuitiva superior (IC)	7,0	(1,5) vs (5,1)	Se construye la razón como un todo, considerando sus relaciones internas. En la comparación de razones, se observa que la relación de desigualdad es distinta en cada fracción.
Operacional concreta inferior (IIA)	8,1	(2,2) vs (3,3)	Se compara el valor de una fracción (a/b) con la otra, a partir de una operación multiplicativa aplicada a ambas razones. Con ello se introduce la idea de equivalencia entre las razones para el caso de la unidad.
Operacional concreta superior (IIB)	10,5	(2,1) vs (4,2)	Se establece la clase de equivalencia de razones a cualquier razón diferente de la unidad.
Operacional formal inferior (IIIA)	12,2	(2,1) vs (4,3)	Cuando dos de los cuatro términos a comparar son múltiplos se establecen relaciones de su cociente con los otros dos términos. En el ejemplo, si 4 es el doble que 2, 3 es más del doble que 1.
Operacional formal superior (IIIB)	15,1	(2,3) vs (1,2)	Se logra comparar cualquier tipo de fracción.

De los anteriores niveles se decidió utilizar los que se muestran en la Tabla 4.3.2, porque permiten describir de forma suficiente el razonamiento proporcional logrado por los estudiantes de 11 a 16 años, que son las edades para las cuales está previsto el cuestionario. Se descartó el nivel simbólico, pues es de esperar que todos los sujetos de la muestra hayan alcanzado alguno de los superiores al mismo. También se suprimió el nivel IC, ya que los niveles IA y IB permiten averiguar si los estudiantes consideran los casos favorables y desfavorables en los problemas de comparación de probabilidades. Además, de este modo se utilizan dos niveles para cada una de las etapas intuitiva, operacional y formal en la teoría de Piaget e Inhelder (1951).

Tabla 4.3.2. Niveles de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a, 1980b) que se consideran en el cuestionario y su equivalencia con el nivel de dificultad (Pérez Echeverría et al., 1986)

Etapa	Composición (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)	Nivel de dificultad
IA	(3,2) vs (4,2)	1
IB	(5,1) vs (5,3)	1
IIA	(2,2) vs (4,4)	2
IIB	(3,1) vs (6,2)	2
IIIA	(2,1) vs (6,2)	3
IIIB	(2,3) vs (1,2)	4

Como se observa en la Tabla 4.3.2, este conjunto de niveles permite considerar los propuestos en el trabajo de Pérez Echeverría et al. (1986) y determinar la proporción de estudiantes de la muestra que alcanza cada uno de estos niveles de dificultad en cada grupo de edad. Estos autores proponen cuatro niveles de dificultad, según las estrategias de resolución en tareas de comparación de razones y de comparación de probabilidades, cuya descripción de dichos niveles se resumen en la Tabla 4.3.3 y se describió con mayor detalle en el Capítulo 2.

Tabla 4.3.3. Niveles de dificultad en tareas de comparación de razones y de probabilidades, según estrategias de resolución (Pérez Echeverría et al., 1986)

Niveles de dificultad	Estrategias de resolución
1	a. Comparación de cantidades absolutas. b. Comparación aditiva entre razones. Se establecen correctamente las razones entre los elementos, pero se busca la solución comparando los miembros de estas razones por medio de sumas y restas.
2	c. Correspondencia o construcción propia. Consiste en establecer un criterio de proporcionalidad en una fracción y aplicarlo a la otra fracción.
3 4	d. Comparación multiplicativa entre los miembros de cada fracción.

Pérez Echeverría et al. (1986) concluyen que, en general, los problemas que tienen un contexto proporcional presentan menos dificultad que los que tienen un contexto probabilístico. Los autores conjeturan que si bien es cierto que el nivel de razonamiento proporcional posiblemente incide en el cálculo de probabilidades, también puede afectar el hecho de que las tareas presentadas en un contexto proporcional señalen un acontecimiento seguro, mientras que el resultado de un problema presentado en un contexto probabilístico indica un grado de incertidumbre; es decir, el aspecto de que en una tarea incide el azar y en la otra no, puede significar una mayor dificultad en su resolución.

4.3.3. Contexto

Esta variable se considera únicamente en los problemas de comparación de probabilidades y en las tareas de construcción de espacios muestrales. En ambos tipos de tareas se tendrían en cuenta dos tipos de contextos: uno discreto, empleando urnas que contienen fichas de igual tamaño de dos colores (negro y blanco) y otro continuo, empleando ruletas con sectores de igual área, coloreados ya sea de blanco o de color negro. Dichos contextos ya se emplearon en el Estudio 1 y, además, en investigaciones previas; por ejemplo, en Green (1982) se utilizaron diversas tareas de comparación de probabilidades en un test de intuiciones probabilísticas encontrando distintas estrategias según el tipo contexto.

De las investigaciones más relevantes en cuanto a la incidencia del contexto en la resolución de tareas probabilísticas está la de Maury (1984), quien mediante una prueba con tareas en dos modalidades (sacos con bolas de dos colores y ruletas divididas en sectores iguales de dos colores) encontró que, aunque la variable contexto no influye significativamente sobre los resultados, sí lo hace, claramente, sobre los argumentos (relevantes e irrelevantes) utilizados por estudiantes de quinto año de secundaria al resolver problemas de cuantificación de probabilidades. Asociado a esto, Pérez Echeverría (1990) y Singer y Resnick (1992) coinciden en que hay evidencia de que el contexto discreto favorece las comparaciones parte-parte, y que el contexto continuo favorece las comparaciones de tipo parte-todo.

Maury concluyó que tareas probabilísticamente equivalentes pero con diferente contexto, no son necesariamente equivalentes cognitivamente; esto sugiere que los alumnos tienen varios modelos probabilísticos espontáneos, cuya movilización depende, entre otras cosas, del contexto. Por lo que en este estudio se considera relevante tomar en cuenta al contexto como una de las variables a considerar, ya que al proponer a los estudiantes problemas que teóricamente podrían ser equivalentes, pero con contexto distinto, se podría explicar algunos sesgos de razonamiento y las distintas estrategias que podrían ser evidenciadas en las prácticas prototípicas realizadas por los estudiantes de la muestra.

Para guardar la equivalencia teórica de tareas según contexto, tanto en comparación de probabilidades como en construcción de espacios muestrales, las ruletas deben tener sectores de igual área; ya que si se cambian las urnas con fichas por ruletas con áreas desiguales, la regla de Laplace ya no sería pertinente y se requería una intuición primaria de la probabilidad de acuerdo con otros significados de la misma; por ejemplo, probabilidad de tipo frecuencial o probabilidad de tipo geométrica.

4.3.4. Sesgos de razonamiento

En el Estudio 1, en ítems de comparación de probabilidades en urnas, los cuales no incluían enunciados o dibujos que pudieran provocar algún sesgo, el porcentaje de argumentos inducidos por intuiciones incorrectas por ítem fue muy bajo, siendo los más frecuentes el sesgo de equiprobabilidad y la disposición de las fichas. Sin embargo, el porcentaje de sesgos fue mayor en actividades con dispositivos continuos; específicamente sobresale el ítem 11 (Anexo 2), con un alto porcentaje de argumentos relacionados a consideraciones físicas irrelevantes, en particular, el orden de colocación de los números (alternabilidad o no de sectores asociados a un mismo evento). Denominaremos dicha creencia *sesgo distribucional,* que fue identificado por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984). Se espera que en contexto de urnas aparezcan algún porcentaje pequeño de argumentos asociados a las intuiciones incorrectas, sin necesidad de incluir en los enunciados algún un distractor que pueda promover sesgos de razonamiento descritos en la investigación previa.

Aunque en Cañizares (1997) se utilizaron distractores que vinculan mayor probabilidad con aspectos irrelevantes como la edad, quien inicia el juego, el color preferido; se consideró que este tipo de distractores no inducirán al sesgo a estudiantes de la muestra, dada su edad y que en el Estudio 1, estos sesgos no aparecieron.

Sin embargo, para el estudio sí interesa conocer si se mantiene el porcentaje alto en el contexto de ruletas, en cuanto al sesgo distribucional. Para analizarlo, se presentarán ítems donde aparecerán dos ruletas, con sectores de color negro y blanco, y en una de ellas los colores estarán juntos y en la otra, alternados, para ver si este distractor incide en los argumentos de los estudiantes. Además de este distractor, también en algunos ítems se cambiará la posición de la ajuga giratoria en las dos ruletas, así como que aparezca en una ruleta apuntado el color negro y en la otra apuntando el color blanco.

4.4. CONSTRUCCIÓN DE UN BANCO DE ÍTEMS

Una vez fijadas las especificaciones del contenido, se procedió a elaborar un banco de ítems, a partir de los cuáles, mediante la ayuda de expertos se elegirían los que finalmente formarían el cuestionario.

4.4.1. Procedimiento de construcción

Siguiendo las recomendaciones de Martínez et al. (2014) se tuvo en cuenta el tiempo que se dispondría para administrar el cuestionario, así como los objetivos de la evaluación. Igualmente, siguiendo a Muñiz (2010) se hicieron las siguientes consideraciones:

- Se administraría el cuestionario de forma grupal, aunque cada estudiante lo completaría en forma escrita individualmente. Por tanto, el cuestionario debería tener instrucciones completas y sencillas de comprender por parte de los estudiantes. Esto se comprobaría en el estudio piloto, evaluando si todos las instrucciones y enunciados son comprensibles para un grupo de estudiantes de edad menor o igual a la mínima establecida para el estudio.
- Cada ítem se elegiría de modo que fuese consistente con el contenido que se deseaba evaluar con el mismo.
- La respuesta de cada ítem debería ser independiente de las anteriores, de modo que el fallo en uno de los ítems no aumentase la probabilidad de error en los anteriores o posteriores (Muñiz, 2010).
- Elegir un formato que, a la vez, permita la precisión en la evaluación, pero fuese ajustado a los estudiantes. Por ello se optó por utilizar algunos ítems de opción múltiple, con una única respuesta correcta, donde, además, se añadirían en los distractores, errores previsibles en los estudiantes, que brindaran información respecto a algún sesgo específico. En este tipo de ítem es sencillo asignar la puntuación a los sujetos y determinar patrones de respuestas, puesto que han sido usado en trabajos previos.
- Además, en estos ítems se añadió la justificación de las respuestas, para asegurarse que no se completaban al azar y evaluar de modo más completo las estrategias de resolución.
- Finalmente, para algunos ítems se eligió el formato de respuesta abierta; específicamente en los que se pide determinar la ganancia esperada en un juego equitativo y en los que se solicita la construcción del espacio muestral, en que se

deseaba dar más libertad de respuesta al estudiante.

Se comenzó fijando un ítem modelo, con tres variantes para cada uno de los tipos de ítems que se quería incluir en el cuestionario, que se adaptaron del Estudio 1 y, a su vez, habían sido utilizados en varias investigaciones previas. Dichos ítems se analizaron para ver si los contenidos evaluados concordaban con los pretendidos en el presente estudio. También se tuvieron en cuenta los razonamientos erróneos descritos en las mismas. El conjunto inicial de ítems se modificó progresivamente, mejorando la redacción en los ítems, teniendo en cuenta las siguientes recomendaciones (APA, AERA y NCME, 2014):

- Se destacaron, en cada ítem, claramente, la parte inicial, separándola de las posibles opciones de respuesta.
- Se cuidó la precisión y claridad del lenguaje empleado para que fuese asequible al estudiantado, considerando su edad y entorno educativo (español o costarricense).

Mediante diferentes modificaciones y un proceso iterativo, se fijaron los modelos de ítem que se describen en la siguiente Sección 4.4.2. Las variantes de cada ítem tenían como objetivo que sirviesen de base al juicio de expertos, para que ayudase a fijar, finalmente, un ítem de cada tipo.

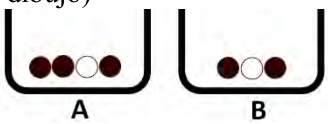
4.4.2. Tipos de ítem

A continuación, se analizan cada uno de los tipos de ítems previstos en el cuestionario, que corresponden a los tipos de tarea descritos en la Sección 4.3.1.

Ítem tipo 1. Comparación de probabilidades en urnas

Para analizar la competencia y estrategias de comparación de probabilidades en urnas se utilizarían ítems similares a los empleados en el primer estudio, conservando el formato e incluyendo un dibujo de las urnas a comparar. A continuación se muestran tres posibles modelos para el ítem 1 dentro de este grupo, que corresponde al nivel de razonamiento proporcional IA (Intuitiva inferior) según Noelting (1980a;1980b), ya que la composición fraccionaria es (3,1) vs (2,1), por lo que basta con comparar los primeros términos de las razones para obtener la respuesta. Además, se clasifica en el nivel de dificultad 1, según Pérez Echeverría et al. (1986), puesto que es suficiente con comparar cantidades absolutas (número de casos favorables en cada urna). Una vez fijado el ítem concreto a utilizar entre los tres propuestos, que se presentan a continuación, se elaborarían cinco más semejantes, variando las razones utilizadas de modo que se cubriesen los niveles de Noelting expuestos en la Tabla 4.3.2.

Ítem 1.1. En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)



Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál caja elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

(A) Elijo la caja A, porque da mayores posibilidades de obtener una ficha negra.
(B) Elijo la caja B, porque da mayores posibilidades de obtener una ficha negra.
(C) Puedo tomar cualquiera, las dos cajas dan la misma posibilidad.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem 1.2. La caja A contiene 3 fichas negras y 1 ficha blanca y la caja B contiene 2 fichas negras y 1 ficha blanca.

¿En cuál de las dos cajas hay más posibilidad de sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

(A) Hay más posibilidades con la caja A.
(B) Hay más posibilidades con la caja B.
(C) Da lo mismo usar cualquiera de las dos cajas.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem 1.3. En la caja A hay 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B hay 2 fichas negras y 1 ficha blanca.

Se mueven las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿en cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

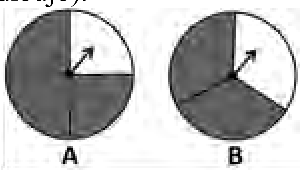
(A) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
(B) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B.
(C) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem tipo 2. Comparación de probabilidades en ruletas

Para este tipo de contexto geométrico, se utilizaría un ítem donde se presentarán dos círculos (A y B), que simulan ruletas. Cada círculo estará divido en sectores de igual área, pintados de color negro o de color blanco. Los ítems modelos que se incluyen a continuación corresponden a un nivel de razonamiento proporcional equivalente al ítem 1 anterior (IA - Intuitiva inferior; Noelting, 1980a y 1980b), ya que la composición fraccionaria de los discos A y B son respectivamente (3,1) vs (2,1), donde los sectores de color negro representan el numerador y los de color blanco al denominador. También, según Pérez Echeverría et al. (1986), estos ítems se clasifican en el nivel de dificultad 1, ya que basta con comparar la cantidad de sectores del mismo color para obtener la respuesta.

Ítem 2.1. En la ruleta A hay 3 sectores pintados de negro y 1 sector pintado de blanco y en la ruleta B hay 2 sectores pintados de negro y 1 de pintado de blanco. Al girar una ruleta obtienes un premio si la flecha apunta un sector negro (Mira el dibujo).



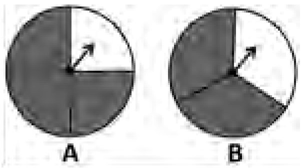
¿Cuál ruleta elegirías si quieres ganar el premio? Señala la respuesta correcta:

(A) Elijo la ruleta B, porque da mayores posibilidades de ganar el premio.
(B) No tengo preferencia. Las dos ruletas dan la misma posibilidad de ganar el premio.
(C) Elijo la ruleta A, porque da mayores posibilidades de ganare el premio.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Esta equivalencia entre los ítems tipo 1 y tipo 2, en cuanto al razonamiento proporcional (Noelting; 1980a, 1980b) y al de dificultad (Pérez Echeverría et al., 1986) no es una casualidad, sino que precisamente se quiere establecer una correspondencia entre los ítems con urnas y los ítems con ruletas para poder contrastar el nivel alcanzado en la comparación de probabilidades según contextos. A continuación, se exponen tres variantes del posible ítem tipo 2, para que se elija finalmente el más adecuado, según los expertos.

Ítem 2.2. La ruleta A está divida en 4 partes de igual área (3 están pintados de negro y 1 pintado de blanco) y la ruleta B está divida en 3 partes de igual área (2 están pintados de negro y 1 pintado de blanco).

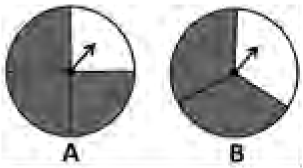


¿Cuál ruleta da más posibilidad de obtener el color negro al girar la aguja? Señala la respuesta correcta

(A) La ruleta A tiene mayores posibilidades de obtener el color negro.
(B) La ruleta B tiene mayores posibilidades de obtener el color negro.
(C) Las dos ruletas tienen la misma posibilidad de obtener el color negro.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: ……………………………………………

Ítem 2.3. En la ruleta A hay 3 sectores de color negro y 1 sector de color blanco y en la ruleta B hay 2 sectores de color negro y 1 de color blanco.



Se gana un juego si al girar la ruleta la flecha apunta a un sector negro, ¿cuál ruleta elegirías para jugar? Señala la respuesta correcta

(A) La ruleta B.
(B) La ruleta A.
(C) Cualquiera de las dos.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: ……………………………………………

Ítem tipo 3. Comparación de razones

Para poder establecer el nivel de razonamiento proporcional, se emplearán ítems similares a los ejemplos que se incluyen a continuación, que son una adaptación del problema empleado por Noelting (1980a; 1980b) en sus investigaciones. Este ítem pide comparar el sabor relativo a una sustancia en dos mezclas. Por ejemplo, en el ítem 3.1, se quiere comparar el sabor relativo a limón de dos limonadas (la de María y la de Juan), compuestas por “a” cantidad de vasos de zumo de limón y “b” cantidad de vasos de agua; por lo que la mezcla de María tiene la composición (a_1, b1) y la mezcla de Juan (a_2, b2). Específicamente, en este modelo de ítem la comparación sería: (3,1) vs. (2,1); por lo que tiene un nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a; 1980b) y un nivel de dificultad (Pérez Echeverría et al., 1986) equivalentes a los ítems de los tipos 1 y 2, descritos anteriormente. En el ítem 3.2, se compara cuál de las limonadas tiene un sabor más dulce, a partir de la cantidad de vasos de zumo de limón y cucharadas de azúcar. Por último, en el ítem 3.3 se compara el sabor a café de una mezcla de tazas de café con vasos de leche.

Ítem 3.1. María y Juan preparan limonada. María mezcla 3 vasos de zumo de limón con 1 vaso de agua. Juan mezcla 2 vasos de zumo de limón con 1 vaso de agua.

María		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?
(A) La de María.
(B) La de Juan.
(C) Las dos igual.
(D) No lo sé.
Explica por qué das esta respuesta: ……………………………………………

Ítem 3.2. María y Juan preparan limonada. (Mira el dibujo)

María		**Juan**	
Jugo de limón	Azúcar	Jugo de limón	Azúcar
			

Si María mezcla 3 vasos de jugo de limón con 1 cucharada de azúcar y Juan prepara limonada mezclando 2 vasos de jugo de limón con 1 cucharada de azúcar, ¿cuál de las dos limonadas tiene un sabor más dulce?
(A) La de Juan.
(B) La de María.
(C) Las dos sabrían igual.
(D) No lo sé.
Explica por qué das esta respuesta: ……………………………………………

Ítem 3.3. María y Juan preparan café con leche. (Mira el dibujo)

María		**Juan**	
Café	Leche	Café	Leche
			

Si María mezcla 3 tazas de café con 1 vaso de leche y Juan mezcla 2 tazas de café con 1 vaso de leche, ¿cuál de las dos mezclas tendría mayor sabor a café?
(A) Las dos igual.
(B) La de Juan.
(C) La de María.
(D) No lo sé.
Explica por qué das esta respuesta: ……………………………………………

La equivalencia entre estos tres primeros tipos de ítems está asociada al cumplimiento de los objetivos planteados, ya que busca estudiar si el nivel de razonamiento proporcional según Noelting (1980a;1980b), requerido para tareas de comparación de razones, se mantiene en tareas de comparación de probabilidades según contexto (urnas y ruletas); así como estudiar la correlación entre los niveles de dificultad de las tareas de comparación de probabilidades y los de las tareas de comparación de razones.

Análogos a los ítems de estos modelos se prepararían diferentes versiones cambiando sólo la composición de urnas, ruletas y mezclas: en el modelo de ítem tipo 1 se cambia el número de fichas negras y fichas blancas, en el modelo de ítem tipo 2 el número de sectores negros y de sectores blancos, y en el modelo de ítem tipo 3; por ejemplo, si se eligiera el modelo 3.1, se cambiaría el número de vasos con zumo de limón y vasos con agua, en el modelo 3.2 se modificaría el número de vasos con zumo de limón y el número de cucharas con azúcar, y en el 3.3 se cambiaría la cantidad de tazas de café y la cantidad de vasos de agua.

Más adelante (en la Tabla 4.5.1) se establece la composición de los distintos tipos de ítems considerando los niveles de razonamiento proporcional de Noelting (1980a; 1980b) y los niveles de dificultad propuestos por Pérez Echeverría et al. (1986). Se propondría a los expertos tres pares de razones diferentes para cada uno de los niveles, para seleccionar finalmente los que se utilizarían en el cuestionario, según el resultado del juicio de expertos.

Ítem tipo 4. Juego equitativo

Se incluirá en el cuestionario un ítem sobre determinación de la ganancia en un juego equitativo, similar al ítem 2 del cuestionario del primer estudio (Anexo 2), el cual también fue utilizado por Green (1982) y posteriormente por Cañizares (1997). En este se pide encontrar la cantidad que equipare la ganancia de dos jugadores, de acuerdo a la probabilidad que tienen de ganar. Para esto, el estudiante tiene que darse cuenta que las ganancias deben ser inversamente proporcionales a la probabilidad de ganar de cada jugador; es decir, para el ítem 4.1 Esteban tiene una probabilidad de perder cinco veces mayor que María, si ella gana una barra de chocolate, entonces Esteban debería obtener cinco barras de chocolate. En el ítem 4.2, como Esteban tiene el doble de posibilidades de perder que María, si ella gana una barra de chocolate, Esteban debería obtener dos barras cada vez que gane. Por último, en el caso del ítem 4.3, como Esteban tiene el triple de posibilidades de perder que María, si ella gana una barra de chocolate, Esteban debería obtener tres barras cada vez que gane. De los ítems 4.1, 4.2 y 4.3 se utilizará solo uno en el cuestionario, elegido según criterio de expertos.

Ítem 4.1. María y Esteban juegan a lanzar un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de barras de chocolate. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban cuando sale el 1, para que el juego sea justo o equitativo? ………………………………………………………………………………………….

Ítem 4.2. María y Esteban juegan con un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si en el dado sale un 1 o un 2. Si resulta un número mayor a 2, gana Esteban. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban para que el juego sea justo o equitativo? ………………………………………………………………………………………….

Ítem 4.3. María y Esteban juegan a lanzar dos dados, cada uno con 6 caras numeradas del 1 al 6. Luego de lanzar los dados se calcula el producto de los números de las caras que salgan. María gana 1 barra de chocolate si el producto es par y Esteban gana una cierta cantidad de barras de chocolate si el producto es impar. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban para que el juego sea justo o equitativo? ………………………………………………………………………………………….

Ítem tipo 5. Construcción de espacio muestral en ruletas

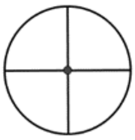
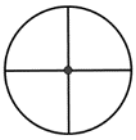
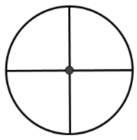
Para este tipo de tarea se ajustó el ítem 13 del Estudio 1, que ahora solo propone la construcción de espacios muestrales asociados a tres sucesos: seguro, equiprobable e imposible. Esto puesto que, en el primer estudio, el suceso posible fue muy sencillo para los niños, ya que permite muchas respuestas.

El ítem tipo 5.1, modelo utilizado en el primer estudio, presenta tres ruletas dividas cada una en 4 partes con igual área. En este caso se puede crear un espacio muestral de hasta 4 sucesos diferentes (4 números distintos), en cuyo caso todos los sucesos elementales serían equiprobables; pero si alguno de los números se repite, como por ejemplo construir una ruleta numerada: 1, 1, 2, 3, en este caso se consigue un espacio muestral donde el suceso “1” tiene doble probabilidad que los restantes sucesos elementales y, por tanto, María tendría el doble de probabilidad de ganar que Esteban. Para conseguir el suceso seguro se debe repetir cuatro veces el número 1 (para que gane María siempre), para lograr el imposible, se debe excluir el número 1, y para que María y Esteban tengan igual posibilidad de ganar, tienen que tener el mismo número de sucesos elementales a su favor, es decir, en la ruleta debe haber la misma cantidad de sectores numerados con el 1 que con el 2.

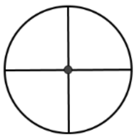
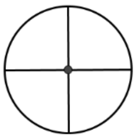
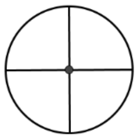
En el caso de los ítems 5.2 y 5.3 se presentan tres ruletas dividas cada una en partes con igual área, para que cada sector (sucesos elementales) sea equiprobable. El ítem 5.2 muestra ruletas en cuatro sectores y el 5.3 en seis sectores. En ambos ítems se plantea que al girar la ajuga de la ruleta, si cae en un sector de color negro, María gana un premio y si cae en un sector blanco, Esteban gana un premio; por lo que se solicita colorear sectores en blanco o negro de tal forma que se cumpla con el espacio muestral solicitado. Para conseguir el suceso seguro se debe pintar todos los sectores de color negro (para que gane María siempre), para lograr el imposible, se deben dejar todos los sectores sin pintar (de color blanco) y para que María y Esteban tengan igual posibilidad de ganar, tienen que tener el mismo número de sucesos elementales a su favor, es decir, en la ruleta debe haber la misma cantidad de sectores de color negro y de color blanco.

La resolución de la tarea requiere razonar sobre experimento aleatorio y resultado aleatorio, sucesos posibles del experimento, suceso favorable (a ganar María) y desfavorable (no gana María), así como, según el apartado, razonar sobre el suceso seguro, equiprobable e imposible.

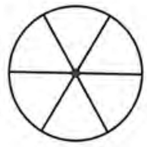
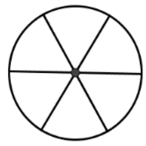
Ítem 5.1. María y Esteban juegan con una ruleta. María gana un premio si la aguja que gira cae en el 1 y Esteban gana un premio si cae en el 2. Coloca en las siguientes ruletas los números que consideres oportuno para que se cumpla:

		
(a) María gana seguro	(b) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	(c) Es imposible que María gane

Ítem 5.2. María y Esteban juegan con una ruleta dividida en cuatro partes iguales. María gana un premio si la aguja que gira cae en una parte de color negro y Esteban gana si cae en una de color blanco. Pinta en las siguientes ruletas tantas partes negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

		
(a) María gana seguro	(d) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	(b) Es imposible que María gane

Ítem 5.3. María y Esteban juegan con una ruleta dividida en seis partes iguales. María gana un premio si la aguja que gira cae en una parte de color negro y Esteban gana si cae en una de color blanco. Pinta en las siguientes ruletas tantas partes negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

 (a) María gana seguro	 (b) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	 (c) Es imposible que María gane

Ítems tipo 6. Construcción de espacio muestral en urnas

En este tipo de ítems, María gana sacando la bola negra, y la única restricción es que el espacio muestral consta de bolas negras y blancas; por lo que se puede construir un espacio muestral con cualquier cantidad de bolas, aunque es de esperar que el niño piense en un número pequeño de ellas. De nuevo el niño ha de razonar sobre el experimento aleatorio y sus posibles resultados, así como en los casos posibles, favorables, desfavorables y los tipos de sucesos, según apartado. Para lograr el suceso seguro, debe rellenar la urna (dibujar y pintar) solo con bolas negras y para el imposible solo con bolas blancas. El suceso equiprobable constará del mismo número de bolas blancas y negras. Lo único que cambia en los modelos de ítems 6.1, 6.2 y 6.3 es la redacción de los enunciados.

Ítem 6.1. María gana cuando saca una bola negra. Pinta en las siguientes urnas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

 (a) María gana seguro	 (b) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	 (c) María nunca gana

Ítem 6.2. María y Esteban juegan a sacar, sin mirar, una bola de una caja. María gana si saca una bola negra y Esteban gana si saca una bola blanca. Dibuja en las siguientes cajas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que se cumpla:

 (a) María gana siempre	 (b) Hay la misma probabilidad de que ganen María o Juan	 (c) María no gana nunca

Ítem 6.3. En un juego se saca, sin mirar, una bola de una urna, si esta es de color negro María gana y si es de color blanco Esteban gana. Dibuja y pinta en las siguientes urnas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

		
(a) Es seguro que María gana	(b) Es igual de probable que ganen María o Esteban	(c) Es imposible que María gane

4.5. DISEÑO PREVISTO DEL CUESTIONARIO

Para evitar el cansancio de los estudiantes al responder a un cuestionario excesivamente largo, se decidió dividirlo en dos partes equivalentes, que se distribuirían aleatoriamente en igual número a los estudiantes de cada curso y país. Además, se quiso asegurar que en cada cuestionario apareciesen todos los tipos de ítems descritos, así como igual número de ítems de cada nivel de razonamiento proporcional de Noelting (1980a; 1980b).

Para ello, se diseñaron dos cuestionarios de dificultad equivalente, cada uno de ellos compuesto por 14 ítems de respuesta abierta, y estructurados de la siguiente forma: tres ítems de comparación de probabilidades en urnas, cinco ítems de comparación de probabilidades en ruletas (dos de ellos con sectores de igual color alternados en una de las ruletas y en la otra juntos), tres ítems de comparación de razones, uno de juego equitativo y otros dos de construcción de espacio muestral, uno de ellos en contexto de urnas y el otro en contexto de ruletas.

A continuación, se describe con mayor detalle los criterios seguidos en la división de los ítems en estos dos cuestionarios.

Valores previstos para los términos de las razones

En primer lugar, se eligieron tres pares de razones sencillas cuya comparación permite evaluar cada uno de los niveles de razonamiento Noelting que se tendrían en cuenta en el cuestionario en las tareas tipo T1, T2 y T3, es decir, que se utilizarían para elaborar 6 ítems diferentes de cada uno de los problemas de comparación de razones y comparación de probabilidades en ruletas y urnas. Los valores de los antecedentes y consecuentes de cada una de las posibles razones se presentan en la Tabla 4.5.1.

Posteriormente, se pediría a los expertos que, para cada uno de los niveles, valorasen las parejas de razones, respecto a los objetivos del cuestionario, para elegir, con su ayuda, dos parejas de razones de cada nivel, en las cuales hubiese mayor consenso.

Tabla 4.5.1. Razones propuestas para cada uno de los niveles de Noelting

Etapa	Estrategias	Composición (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)		
		Propuesta 1	Propuesta 2	Propuesta 3
IA	Comparar numeradores	(3,1) vs (2,1)	(3,2) vs (5,2)	(2,3) vs (1,3)
IB	Comparar denominadores	(5,1) vs (5,3)	(4,1) vs (4,3)	(5,1) vs (5,4)
IIA	Correspondencia[1]	(2,2) vs (4,4)	(2,2) vs (3,3)	(4,4) vs (3,3)
IIB	Correspondencia o proporción[2]	(3,1) vs (6,2)	(4,2) vs (2,1)	(2,6) vs (1,3)
IIIA	Correspondencia o proporción[3]	(2,1) vs (6,2)	(3,1) vs (4,2)	(3,6) vs (1,3)
IIIB	Proporción[4]	(2,3) vs (1,2)	(3,2) vs (4,3)	(3,4) vs (4,5)

Notas:
1: Se calcula la razón entre numerador y denominador en la primera fracción y se compara con la misma razón en la segunda. La razón es igual a la unidad.
2: Se calcula la razón entre numerador y denominador en la primera fracción y se compara con la misma razón en la segunda. La razón es distinta a la unidad.
3: Las razones entre numerador y denominador de cada fracción son números enteros pero diferentes entre sí.
4. Solo se puede resolver reduciendo las razones a común denominador y comparando.

Elaboración de los dos cuestionarios paralelos

Como se ha indicado, se diseñaron dos cuestionarios paralelos (A y B) con 14 ítems de respuesta abierta cada uno. A partir de la selección de las parejas de razones mostradas en la Tabla 4.5.1 por parte de los expertos, en cada instrumento aparecerán tres ítems del tipo 1, cinco del tipo de ítem 2 (tres sin sesgo y dos con sesgo) y tres del tipo de ítem 3. Por tanto, para el montaje de los cuestionarios se elaboraron 21 ítems de los tipos 1, 2 y 3, de acuerdo a la distribución establecida en las Tablas 4.5.2 y 4.5.3.

Tabla 4.5.2. Distribución de ítems tipo 1, 2 y 3, según nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a; 1980b) para el Cuestionario A

Niveles de Noelting		Sin sesgo		Con sesgo
	Ítem tipo 1	Ítem tipo 2	Ítem tipo 3	Ítem tipo 2
IA	X		X	
IB		X		
IIA	X		X	
IIB		X		X
IIIA	X		X	
IIIB		X		X

Tabla 4.5.3. Distribución de ítems tipo 1, 2 y 3, según nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a; 1980b) para el Cuestionario B

Niveles de Noelting	Ítem tipo 1	Sin sesgo Ítem tipo 2	Ítem tipo 3	Con sesgo Ítem tipo 2
IA		X		
IB	X		X	
IIA		X		X
IIB	X		X	
IIIA		X		X
IIIB	X		X	

Dicha distribución asegura que en cada cuestionario se incluyen tres ítems de cada uno de los tipos 1 y 3 (comparación de probabilidades en urnas y comparación de razones) y cinco del tipo 2 (comparación de probabilidades en ruletas) de nivel diferente de razonamiento (Noelting, 1980a; 1980b). Además, cada cuestionario contiene dos ítems de cada uno de los niveles de Noelting fijados. El conjunto de los dos cuestionarios también contiene un ítem con sesgo para cada nivel de Noelting de IIA a IIIB.

Además de estos ítems, cada cuestionario tendrá un ítem de juego equitativo (ítem tipo 4), y 2 ítems de construcción de espacios muestrales, iguales para ambos instrumentos, uno en contexto de ruletas (ítem tipo 5) y otro en contexto de urnas (ítem tipo 6).

Por último, los cuestionarios se administrarán en forma aleatorizada en cada uno de los grupos de estudiantes participantes. Ello asegurará la posibilidad de analizar conjuntamente todas las variables.

4.6. JUICIO DE EXPERTOS Y APROXIMACIÓN A LA VALIDEZ

En términos generales, Hernández et al. (2014) definen la validez, como el grado en que un instrumento mide realmente la variable que pretende medir. Asociado a la validez de un instrumento, Lissitz y Samuelsen (2007) señalan que es el grado en que este evalúa lo que pretende evaluar desde una perspectiva de validez interna, entendida como la medida en el que el diseño de un estudio proporciona control y, por lo tanto, confianza en la interpretación de los resultados (Palella y Martins, 2006). Hay diversos modos de obtener indicadores de la validez de un instrumento, en este caso, se utilizará la validez de contenido (Díaz, 2007).

La validez de contenido es entendida como el grado en que un instrumento refleja un dominio específico de contenido de lo que se mide (Hernández et al., 2014).

La validez de contenido también se asocia con la calidad y precisión de un instrumento de investigación y se relaciona con la obtención de evidencias válidas (Juárez-Hernández y Tobón, 2018). Para lograr la validez de contenido de un instrumento es necesaria una correspondencia entre la muestra de tareas del instrumento y el dominio que pretende medir; es decir, que este represente a todos o la mayoría de los componentes del dominio de contenido de las variables que se van a medir (Martínez et al., 2014).

Para mejorar la validez de contenido y minimizar los errores de medición en el presente cuestionario, buscando que el muestreo que este realizaría del universo de posibles prácticas prototípicas de los estudiantes estén acordes con lo que se pretende medir y cualificar, se establece como estrategia de evaluación el juicio de expertos, el cual consiste en solicitar a una serie de personas destacadas la demanda de un criterio hacia un objeto, un instrumento, un material de enseñanza, o su opinión respecto a un aspecto concreto (Cabero y Llorente, 2013), que en este caso es a un cuestionario.

4.6.1. Selección de expertos

En la selección de los ítems mediante juicio de expertos se pidió a algunos investigadores que evaluasen los siguientes criterios en los ítems (Díaz, 2007; Wang y Osterlind, 2013):

- *Redacción correcta, claridad y consistencia.* Además, se pidió a los estudiantes que han participado en las pruebas piloto que indicaran las posibles dificultades de comprensión.
- *Nivel adecuado de dificultad.* En el cuestionario se incluyó una gama de dificultades, deducidas del Estudio 1 y del nivel de razonamiento proporcional requerido en los ítems.
- *Adecuación de cada ítem a las especificaciones del cuestionario*.

Respecto a la definición de experto, de manera general se indica como aquella persona especializada o con grandes conocimientos en una materia (DLE, 2023). Según Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) un experto es una persona con trayectoria en un tema particular, cualificada y reconocida en el campo, y que puede dar información, evidencia, juicios y valoraciones en algún contenido específico.

El problema de investigación y la propia naturaleza del estudio condicionan el perfil del experto; por lo que el procedimiento de selección de estos pasa necesariamente por establecer criterios que se adecúen a la investigación que se desea realizar. De acuerdo a esto, se establece para este juicio de expertos los siguientes criterios de selección: a) la *experiencia y experticia* en el tema de estudio (McGartland et al., 2003; Skjong y Wentworht, 2000), por lo que se buscaron investigadores con grado de doctorado y publicaciones en revistas indexadas de Educación Matemática, específicamente en Didáctica de la Probabilidad; b) la *disponibilidad y motivación* para participar, y c) la *imparcialidad* en su juicio (Skjong y Wentworht, 2000).

En cuanto a qué cantidad de expertos es la adecuada para este proceso de evaluación, varía entre diferentes visiones de autores y no existe un consenso entre ellos (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008). Sin embargo, Hyrkäs et al. (2003) establecen que, para validar un cuestionario, se considera que diez expertos brindarían una estimación confiable de la validez de contenido de un instrumento.

En la Tabla 4.6.1 se resume la nacionalidad, institución en la que labora y grado académico de cada experto seleccionado. En cuanto al perfil de cada experto colaborador, según el criterio de experiencia y experticia, todos tienen amplia trayectoria en investigación en Didáctica de la Estadística y Probabilidad. Hay que señalar que también se consideraron para esta selección los criterios de disponibilidad y motivación, buscando que estos se pudieran contactar de manera ágil mediante correo electrónico y tuvieran el interés por ser parte de este proceso; además, se valoró como característica importante que pudiesen leer la lengua castellana, puesto que los ítems están redactados en dicha lengua. Asimismo, como la investigación se llevará a cabo con estudiantes de España y Costa Rica, se buscó tanto expertos de nacionalidad española como expertos de América Latina.

Tabla 4.6.1. Criterios de selección de los expertos colaboradores en la valoración del contenido del cuestionario

Nº	Nacionalidad	Institución	Grado académico
1	Argentina	Universidad de Santa Fe	Doctorado en Didáctica de la Matemática
2	Chile	Universidad Católica de Maule	Doctorado en Educación
3	Costa Rica	Universidad de Costa Rica	Doctorado en Educación
4	España	Universidad de Granada	Doctorado en Educación
5	España	Universidad de Granada	Doctorado en Educación
6	España	Universidad de Granada	Doctorado en Educación
7	España	Universidad de Zaragoza	Doctorado en Educación
8	España	Universidad de Jaén	Doctorado en Didáctica de la Matemática
9	España	Universidad de Lleida	Doctorado en Educación
10	México	CINVESTAV	Doctorado en Matemática Educativa

4.6.2. Diseño del cuestionario para expertos

Una vez seleccionados los expertos, se diseñó un instrumento para ser completado en dicho proceso de validación del cuestionario. Los objetivos principales de este proceso fueron:

1. Seleccionar uno de tres ítems para cada uno de los tipos de ítems que se han descrito en la Sección 4.4.2, valorando en una escala Likert su adecuación al estudio (para cada ítem) e indicando su preferencia por uno de los tres. Todo ello considerando aspectos de validez y representatividad en la definición del constructo, representatividad del grupo de ítems, aspectos gramaticales de los ítems y claridad de las instrucciones (Koller et al., 2017).
2. Ordenar de acuerdo a su criterio y elegir dos de tres propuestas de razones (Tabla 4.5.1) para cada uno de los niveles de Noelting. Estos valores serían utilizados en la construcción de los ítems de comparación de probabilidades en urnas y en ruletas.
3. Validar el contenido del cuestionario diseñado (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008).

Para evitar contaminaciones por persuasión o prestigio personal, los ítems fueron valorados por los expertos con el esquema conocido como "panel ciego"; de esta forma, cada experto desconocía la identidad de los otros y nunca tuvieron un encuentro cara a cara (Wang y Osterlind, 2013). El instrumento que utilizaron a los expertos (Ver Anexo 3) está estructurado con las siguientes partes (Ver ejemplo del contenido del instrumento en la Figura 4.6.1):

1. *Sección introductoria*. En la primera página se realiza una breve presentación donde se indica el objetivo del cuestionario y la importancia que tiene para la investigación la contribución académica del experto; al final de esta sección se brinda un agradecimiento por su colaboración. En una segunda página, se proporcionan instrucciones precisas sobre la forma de completar el cuestionario.
2. *Calificación y selección de ítems.* En las siguientes páginas del cuestionario se presentó una tripleta de ítems según los 6 tipos establecidos (descritos en la Sección 4.4.2), para ser calificados por los expertos según los criterios fijados. En general, se solicita al experto:

- Valorar cada uno de los enunciados propuestos, para cada contenido, según su opinión experta.
- Sugerir mejoras en la redacción de los ítems.
- Calificar la pertinencia de cada actividad, según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa “Nada pertinente” y 5 “Muy pertinente”. Al final se añade un espacio en el que poder realizar comentarios para la mejora de los ítems.

3. *Selección de razones propuestas para las tareas de comparación de probabilidades*. Luego de evaluar los ítems de comparación de razones y comparación de probabilidades, se presenta la Tabla 4.5.1, donde el experto elegiría dos de tres pares de razones sencillas para cada uno de los niveles de Noelting (1980a; 1980b).

Ítems tipo 4. Determinación de la ganancia en juegos equitativos

Ítem 4.1. María y Esteban juegan a lanzar un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de barras de chocolate. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban cuando sale el 1, para que el juego sea justo o equitativo?

Ítem 4.2. María y Esteban juegan con un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si en el dado sale un 1 o un 2. Si resulta un número mayor a 2, gana Esteban. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban para que el juego sea justo o equitativo?

Ítem 4.3. María y Esteban juegan a lanzar dos dados, cada uno con 6 caras numeradas del 1 al 6. Luego de lanzar los dados se calcula el producto de los números de las caras que salgan. María gana 1 barra de chocolate si el producto es par y Esteban gana una cierta cantidad de barras de chocolate si el producto es impar. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban para que el juego sea justo o equitativo?

Califique la pertinencia de cada tarea según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa “Nada pertinente” y 5 “Muy pertinente”. Marque con una “X” en la casilla que considere según su criterio.

Marque para cada ítem una puntuación:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
El ítem 4.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 4.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 4.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

Ítem elegido en primer lugar:

Figura 4.6.1. Ejemplo del contenido del cuestionario para expertos

4.6.3. Resultados del juicio de expertos

Una vez recogidos los cuestionarios enviados a los diez expertos colaboradores, se tabularon los puntajes asignados a cada ítem en una hoja de cálculo. Al analizar las puntuaciones asignadas por cada experto al conjunto de ítems evaluados, se encontraron dos expertos que establecieron valores atípicos y poco consistentes con respecto a los demás. Por ello, para evitar una distorsión a la hora de seleccionar los ítems para el cuestionario final, se tomó la decisión de eliminar las respuestas de estos dos expertos. En la Tabla 4.6.2 se muestra un resumen de la puntuación asignada a cada ítem y algunas medidas de resumen y dispersión de dichas puntuaciones que nos ayudaron a tomar las decisiones correspondientes. Señalamos en negrita en cada grupo de ítems el que fue finalmente elegido para formar parte del cuestionario.

Tabla 4.6.2. Frecuencia de puntuación (1-5) de los expertos a cada ítem

Ítem	1	2	3	4	5	Media	Mediana	D. Típica
1.1			1	6	1	4,00	4,00	0,53
1.2			1	6	1	4,00	4,00	0,53
1.3		1	1	1	5	4,25	5,00	1,16
2.1			3	3	2	3,88	4,00	0,83
2.2			2	2	4	4,25	4,50	0,89
2.3		1		5	2	4,00	4,00	0,93
3.1			1	1	6	4,63	5,00	0,74
3.2				5	3	4,38	4,00	0,52
3.3		1		5	2	4,00	4,00	0,93
4.1			1	4	3	4,25	4,00	0,71
4.2			2	2	4	4,25	4,50	0,89
4.3			1	6	1	4,00	4,00	0,53
5.1		1		4	2	4,00	4,00	1,00
5.2				4	3	4,43	4,00	0,53
5.3				4	3	4,43	4,00	0,53
6.1		2	2	4		3,25	3,50	0,89
6.2		1	1	1	5	4,25	5,00	1,16
6.3				4	4	4,50	4,50	0,53

Notas:
- Un experto no dio puntuación a los ítems tipo 5.
- El número de ítem subrayado y en negrita fue el seleccionado para el cuestionario final.

Para la selección de cada modelo de ítem, según tipo, se consideraron diferentes aspectos, no solo estadísticos, como la frecuencia de calificaciones 5, la media, la mediana y la desviación estándar de las puntuaciones por ítem. También se consideraron elementos cualitativos, como características del ítem y comentarios realizados por los expertos, cuando había que tomar una decisión entre un ítem y otro, con puntuaciones muy similares.

En el ítem tipo 1 (comparación de probabilidades en urnas), se eligió el modelo 1.3, debido a que cinco de los expertos le dieron la calificación máxima, a pesar de que era el modelo con mayor dispersión en puntuaciones.

Para el ítem tipo 2 (comparación de probabilidades en ruletas), se seleccionó el modelo 2.2 debido a que era el que tenía la mayor media y la mayor mediana; en este caso, la dispersión entre los puntajes de los tres modelos era similar, por lo que no se tomó como criterio de selección.

Estos mismos criterios se tomaron para elegir el modelo 3.1, en el caso del ítem tipo 3 (comparación de razones).

En el caso de la selección del ítem 4 (determinación de la apuesta en un juego equitativo), aunque los modelos 4.1 y 4.2 tenían igual media, e incluso el ítem 4.2 tenía una mediana superior a la del modelo 4.1, se eligió el 4.1, principalmente, porque era el ítem que se utilizó en el primer estudio y en investigaciones previas (Cañizares, 1997, Green, 1983); por lo que utilizar este ítem brinda una validez comprobada, y además, permite la comparación de resultados entre estudios.

En el ítem tipo 5 (construcción de espacio muestral), aunque los modelos 5.2 y 5.3 tuvieron las mismas calificaciones, se escogió el modelo 5.3 debido a que la ruleta estaba dividida en seis sectores en lugar de cuatro, como aparece en el modelo 5.2, lo que permite mayor flexibilidad en las respuestas y poder identificar algún sesgo. Por último, para el tipo de ítem 6 (construcción de espacio muestral en urnas), se seleccionó el modelo 6.3, por tener la mayor media y la menor dispersión de las puntuaciones; además, que ningún experto le dio una puntuación menor a 4, como sí ocurrió con el ítem 6.2.

En cada ítem seleccionado se incorporaron las sugerencias de redacción propuestas por los expertos, luego de analizarlas y reconocer que eran pertinentes. Las principales incorporadas a los ítems definitivos fueron las siguientes:

- Incluir la frase “observa el dibujo” en algunos ítems.
- Cambiar la frase “se mueven las cajas”, por “se agitan las cajas” en la comparación de probabilidades en urnas.
- Añadir la frase “al girar la flecha”, cuando se pregunta cuál ruleta de dos da mayor probabilidad.
- Indicar que los vasos tienen la misma capacidad en los ítems de comparación de razones.

- Cambio de los nombres de los chicos en algunos ítems.
- Dibujar una flecha en las ruletas en los ítems de construcción del espacio muestral.
- Cambiar la palabra posibilidad por probabilidad.

4.7. ESTUDIO PILOTO

Posterior al diseño de los dos cuestionarios (A y B) que se utilizarían para el Estudio 2, se decidió llevar a cabo una prueba piloto con niños de entre 10 y 12 años de edad; es decir, de igual o menor edad que los más pequeños de la muestra establecida para el estudio. Este estudio piloto tenía como objetivos principales:

1. Garantizar que los enunciados y figuras empleadas en las tareas propuestas en el cuestionario fueran comprensibles para la población de estudio, y poder así, corregir o ajustar los elementos que distorsionaran el mensaje de los ítems o que generasen alguna duda al estudiantado participante.
2. Validar los ítems que evalúan el razonamiento probabilístico, comprobando que los estudiantes identifican que las situaciones propuestas representan experimentos aleatorios y no deterministas.
3. Garantizar que el lenguaje probabilístico utilizado en los ítems es conocido por los estudiantes y no generan confusiones o incomprensión de las tareas matemáticas planteadas.

Con esta prueba también se recabaría información del tiempo aproximado que se podría tardar en completar los cuestionarios completos; además, se podría recabar información no sólo del manejo del lenguaje probabilístico de los estudiantes, sino también, indagar si existen diferencias entre el lenguaje coloquial español y el costarricense, porque aunque ambas poblaciones son de habla española, algunos términos pueden tener distintos significados o no ser comprendidos por alguna población; por ejemplo, quedaba la duda de si los estudiantes costarricenses comprenderían a qué se refiere la palabra "zumo", ya que no es común en el vocabulario costarricense, o también el término "urna". En lo que sigue se describe el instrumento para el pilotaje, la muestra y los resultados de la prueba piloto.

4.7.1. Descripción del cuestionario

Puesto que todos los ítems del mismo tipo tenían la misma redacción y los mismos objetos gráficos que representaban los dispositivos (urnas, ruletas, mezclas) para los experimentos, para comprobar la legibilidad era suficiente que los niños participantes en el estudio piloto completasen únicamente uno de cada tipo; por lo que se preparó un cuestionario piloto con un ítem de cada uno de los tipos discutidos en las secciones anteriores; es decir, el instrumento se compuso en total de seis ítems. De los tipos 1, 2 y 3 se eligió el ítem correspondiente a nivel más bajo posible (IA o IB, según Noelting, 1980a, 1980b), para que el niño pudiese resolverlo con facilidad y no se frustrase; y además, que se pudiera concentrar en entender el enunciado y el nivel de dificultad no incidiera en la recolección de la información. Específicamente, el cuestionario se compuso de los siguientes ítems tomados de los cuestionarios (Ver Tabla 4.7.1):

Tabla 4.7.1. Descripción del cuestionario piloto

Número de ítem	Tipo de ítem	Descripción
1	Comparar probabilidades en urnas	Ítem 1, Cuestionario A
2	Comparar probabilidades en ruletas	Ítem 4, Cuestionario A
3	Comparar razones	Ítem 10, Cuestionario A
4	Juego equitativo	Ítem 13, Cuestionarios A y B
5	Construcción espacio muestral en ruletas	Ítem 14, Cuestionarios A y B
6	Construcción espacio muestral en urnas	Ítem 15, Cuestionarios A y B

El cuestionario piloto se dio impreso y se completó por escrito, individualmente, donde se tenía la posibilidad de realizar cualquier consulta del mismo. Posterior a esto, se realizó una entrevista a cada niño, donde se formularon individualmente algunas preguntas asociadas a los objetivos propuestos. En lo que sigue se describe la muestra y los resultados de la prueba piloto.

4.7.2. Descripción de la muestra de estudiantes

La muestra para la prueba piloto estuvo compuesta de 4 niñas y 6 niños de entre 10 y 12 años de edad, 3 de nacionalidad española y 7 de nacionalidad costarricense. Los estudiantes costarricenses pertenecían a una escuela pública del cantón central de la provincia de Cartago, y en el caso de los estudiantes españoles, dos a escuelas públicas del centro de Granada y uno a un centro público de Huelva.

A estos 10 estudiantes se les asignaron los códigos: E1, E2, …, E9 y E10. Estos cursaban el 5º y 6º curso de Educación Primaria y realizaron la actividad dentro de sus clases, con autorización del profesor de aula y del director del centro educativo. Se seleccionaron estudiantes de rendimiento medio pero que fueran participativos y con facilidad para comunicarse de forma oral y escrita.

A todos los estudiantes se les explicó la importancia de responder cuidadosamente todas las actividades, y que tuvieran la confianza de preguntar lo que no comprendieran y de externar cualquier inquietud o sugerencia.

Los niños mostraron un gran interés por participar y ocuparon entre 20 y 25 minutos en completar los seis ítems. Además, escribieron sus sugerencias al investigador, por ejemplo, una niña de 10 años que resolvió correctamente todos los ítems, excepto el de determinación de la apuesta en el juego equitativo, pidió al investigador que le "diese los resultados" cuando lo pasase a otros niños. En su opinión, el "examen" era demasiado fácil y aconsejó al investigador hacerlo más difícil o "todos los niños acertarían el examen".

4.7.3. Resultados del estudio piloto y modificaciones en algunos ítems

Luego de la aplicación de la prueba piloto, se realizó un análisis de contenido en las respuestas, para categorizarlas en correctas, parcialmente correctas, incorrectas o sin respuesta, como observamos en la Tabla 4.7.2.

Tabla 4.7.2. Frecuencia de respuesta al cuestionario piloto

Ítem	Correctas	Parcialmentecorrectas	Incorrectas	Sin respuesta
1	9	0	1	
2	10	0	0	
3	9	0	1	
4	3	5	1	
5a	8	0	2	
5b	9	0	1	
5c	9	0	1	
6a	7	0	3	
6b	9	0	1	
6c	9	0	1	

En los ítems del 1 al 3, la respuesta se considera correcta únicamente si seleccionaron la opción correcta y dieron una explicación válida. Para el ítem 4, la respuesta correcta corresponde básicamente a la descrita en el análisis a priori, mientras que las parcialmente correctas incluyen pequeños errores, como por ejemplo, cuando el estudiante se da cuenta de que los niños del juego tienen distintas probabilidades de ganar, pero realiza una estimación incorrecta de barras de chocolate. Los ítems 5 y 6 solo admiten dos posibilidades, correcta e incorrecta, será correcta si se construye el suceso solicitado e incorrecta en caso contrario.

Los resultados anteriores (Tabla 4.7.2) informan que, en general, los ítems propuestos fueron comprensibles para la totalidad de los estudiantes. Esto se garantiza, primero, porque no hubo ítems sin responder y, segundo, por el porcentaje de corrección; además, mediante la entrevista a los estudiantes, estos manifestaron que las tareas planteadas quedaron claras. Sin embargo, se recogieron algunos comentarios sobre aspectos que no comprendieron o que para ellos generaban confusión; estos nos permitieron mejorar la redacción del ítem. A continuación, presentamos estos resultados:

Respecto a los ítems 1, 2 y 5, no hubo comentarios en cuanto a la comprensión de los enunciados, fueron claros y precisos para los estudiantes participantes.

En el caso del ítem 3 (Figura 4.7.1), varios estudiantes preguntaron para qué servía o cómo se utilizaba para la resolución del ítem el recipiente de mayor tamaño “el pichel o jarrón” que aparecía en la figura. Esta figura tenía como propósito que el estudiante imaginara que ahí se mezclaría el contenido de cada vaso; sin embargo, al parecer para ellos fue un objeto accesorio que no utilizaban y más bien podría confundirles, al pensar que debía utilizarse para su resolución matemática. Por lo tanto, se decide eliminar esta imagen de los ítems de este tipo para el cuestionario final.

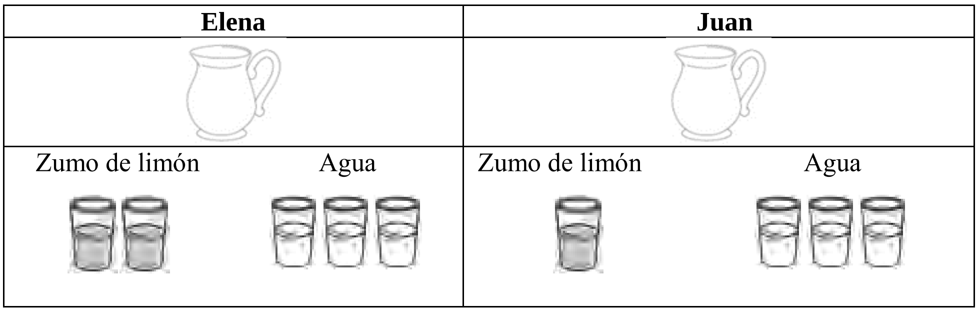


Figura 4.7.1. Representaciones gráficas del ítem 3 del cuestionario piloto

En cuanto al ítem 4, algunos estudiantes no tenían claro el término “juego equitativo”, por lo que se decidió cambiarlo por “juego justo”; además, faltaba dar una instrucción donde se solicitara de manera directa que el estudiante explicara su respuesta; ya que al no existir esto, algunos estudiantes sólo indicaron la cantidad de chocolates que habían estimado.

Con respecto al ítem 6, de construcción de espacios muestrales en urnas, resultó que para los estudiantes costarricenses, el término "urna" no era familiar, así que se decide cambiarlo por "caja", como aparece en el ítem 1, el cual no generó confusión.

Respecto al segundo objetivo propuesto para este estudio piloto, se encontró que las respuestas a los ítems de comparación de probabilidades tenían evidencia de que los estudiantes participantes fueron conscientes de que los experimentos que se representaban en los ítems manifestaban una situación de incertidumbre y que estaban influenciados por el azar. Se concluye que las indicaciones como "Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados" y el uso de la ruleta como dispositivo aleatorio, fue bien comprendido por los estudiantes como generadores de experimentos aleatorios y no deterministas. Esto se puede evidenciar en algunos de los argumentos utilizados, que se muestran a continuación, como el de E3 (12 años) que utiliza el término "posibilidades", que se puede interpretar como que el niño es consciente de que no es un evento seguro. Por otro lado, E5 (12 años) no compara la cantidad de sectores en que se divide cada ruleta, sino el tamaño del área negra; muestra que tiene comprensión del funcionamiento de una ruleta como dispositivo aleatorio.

> E3: Porque hay más posibilidades en la B ya que hay más fichas negras (ítem 1, Respuesta B).
>
> E5: En la ruleta A porque casi la ruleta es negra, aunque tenga la misma cantidad de espacios que el B (ítem 2, respuesta A).

Por otro lado, E1 (12 años) elige la opción que indica que las cajas tienen igual probabilidad de sacar una ficha negra, solo por el hecho de que en ambas cajas tienen mayor cantidad de fichas negras que de blancas; es decir, comprende que en ambas cajas, el evento sacar una ficha negra es más probable que el evento sacar una ficha blanca, pero no compara cantidades en los espacios muestrales de cada caja.

> E1: En la caja A y B hay más probabilidades de sacar una bola negra, porque hay más bolas negras en las dos (ítem 1, Respuesta C).

Asimismo, al finalizar el cuestionario se hicieron varias consultas asociadas a la comprensión de los enunciados y figuras de los ítems, pero también se plantearon las siguientes preguntas:

A la consulta "¿Siempre saldrá la ficha negra?", la totalidad de los estudiantes señalaron que no necesariamente esto iba ocurrir siempre. Algunos ejemplos son los siguientes:

> E1: No casi siempre saldrá la bola negra, hay más posibilidades como 80% pero 20% de la blanca.

E2: Hay más probabilidad porque hay más bolas negras por ejemplo el conocido "voto por mayoría".
E3: No hay tanta posibilidad que siempre salga, pero sí puede salir varias veces ya que hay más y no hay tantas blancas.
E4: No hay nada que asegure que salga siempre la negra en la caja B, pero hay más posibilidades por la cantidad.
E5: La mayoría de veces saldrá pero no siempre, porque hay más bolas negras que blancas.

También se les consultó si encontraban alguna diferencia entre los ítems 1 y 2 y el ítem 3. Esta pregunta no fue tan comprensible, se centraron en diferencias que fueron poco claras y no generaron información útil respecto al propósito planteado, como por ejemplo en E1 y E4:

E1: Yo creo que son 2 tipos de ejercicios parecidos solo que los primeros son de porcentajes y este es de lógica.
E4: A diferencia de los otros ítems, en este se usan más objetos secundarios (el agua) que los principales (limón).

Sin embargo, algunos estudiantes como E2 y E3 mostraron que intuitivamente las situaciones planteadas en el ítem 1 y 2 eran aleatorias y la del ítem 3 era determinista:

E2: Para mí la diferencia es que en los ítems anteriores me daban una posible respuesta y en esta me están dando una respuesta más posible y puede ser más exacto.
E3: La diferencia es que en las otras dudaba más y esta la capté fácil y me da más seguridad de que sea verdadera.

En cuanto al ítem 4 de juego equitativo, en el cual más de la mitad de la muestra no contestó correctamente, al entrevistar a algunos estudiantes, sus respuestas revelan que aunque se dan cuenta que María y Esteban tienen distinta probabilidad de ganar, y por ende, es requerido hacer una equiparación del premio, pero realizan una estimación de la cantidad de chocolates muy intuitiva sin aplicar la proporcionalidad inversa, por lo que se obtienen resultados incorrectos. La estimación más utilizada por los estudiantes participantes fue "6 chocolates", como en E4:

E4: Esteban debería de ganar 6 barras de chocolate ya que María tiene 5 veces más oportunidades de ganar que Esteban.

Asimismo, a algunos estudiantes que tuvieron errores en los ítems de construcción de espacios muestrales, como los que se presentaron en el Estudio 1 (por ejemplo, construir el suceso "mucha probabilidad" en lugar del suceso seguro, o también construir el suceso "poca probabilidad" en lugar del suceso "imposible"), se les consultó individualmente el porqué de esta construcción. Por ejemplo, el estudiante E4 construyó todos los espacios muestrales correctamente excepto el de suceso seguro en el contexto de urnas (Ver Figura 4.7.2).

Figura 4.7.2. Respuesta al ítem 6a de E4.

Respecto a la consulta de por qué realizó esta construcción para este suceso, el estudiante respondió: “Puse una en rojo en la (a) porque al haber tantas negras, las posibilidades de que gane Esteban son casi imposibles porque tiene que competir una sola contra cientos de bolas diferentes”

Es interesante que E4 construya correctamente el suceso seguro en contexto de ruletas pero no así en el contexto de urnas. Esto también le ocurrió a E3 (Ver Figura 4.7.3), que explicó: “Puse más negras para que María tuviera más posibilidades de ganar y dos blancas para que Esteban no pudiera ganar”.

Figura 4.7.3. Respuesta al ítem 6a de E3.

Por otro lado, E3 también tuvo errores para construir el suceso imposible, en ambos contextos (Ver Figura 4.7.4). Cuando se le consultó por sus construcciones, contestó: “Según yo, así María no tenía posibilidad de ganar”.

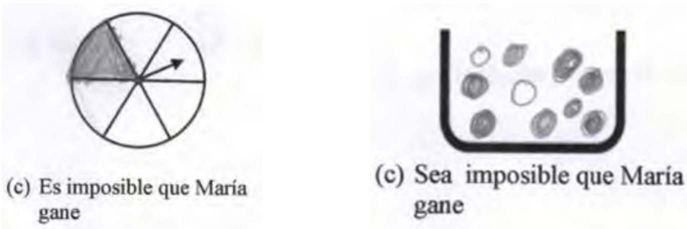


Figura 4.7.4. Respuestas de E3 a los ítems 5c y 6c.

En el caso de E2, solo construyó incorrectamente el suceso seguro, en ambos contextos (Ver Figura 4.7.5), a lo que indicó para el contexto de ruletas “Porque no sería justo para Esteban y me imagino que es una competencia”; y para el contexto de urnas: “Lo dejé así porque tenía seguro que ganara (María) pero dejé una en blanco, porque para que dejaría en una caja bolas iguales, no sería justo para Esteban”.

Figura 4.7.5. Respuestas de E2 a los ítems 5a y 6a.

Considerando los argumentos de los estudiantes entrevistados, pareciera que hay cierta confusión respecto a los sucesos seguro e imposible, que puede deberse a que el estudiante no acepta que un experimento, al ser aleatorio, tenga un suceso cuya probabilidad sea 100% o sea 0%, por lo que en el suceso seguro dejan una pequeña probabilidad de que no ocurra y en el suceso imposible cierta probabilidad de que pueda ocurrir, lo que devela cierto sesgo de la comprensión del concepto de probabilidad.

4.8. INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA SOBRE EL CUESTIONARIO DEFINITIVO

Como información complementaria, a continuación, se incluye el análisis de la fiabilidad de cada uno de los dos cuestionarios diseñados, que se utilizaron en el Estudio 2 y cuyos resultados se describen en el Capítulo 5.

Fiabilidad de los cuestionarios

Para cada uno de los cuestionarios se llevó a cabo el cálculo de su fiabilidad, utilizando como muestra 292 estudiantes de Costa Rica de los cursos 6º a 10º (Educación General Básica y Educación Diversificada). La composición de la muestra se describe en el Capítulo 5 con más detalle.

Se calculó, para cada uno de los dos cuestionarios (Anexos 4A y 4B) el coeficiente de fiabilidad Alfa de Cronbach, incluyendo como variables las respuestas y argumentos (1=correcto, 0=incorrecto) a cada ítem. En la construcción de espacios muestrales no se pide argumento y en la determinación del juego equitativo simplemente se valora el argumento. En total, en cada cuestionario se obtuvieron un total de 29 elementos para el cálculo de la fiabilidad, que arrojó un valor de 0,793 para el cuestionario A (respondido por 145 estudiantes) y de 0,838 para el cuestionario B (respondido por 147 estudiantes). Son valores suficientemente altos, teniendo en cuenta que el cuestionario evalúa diferentes conocimientos.

Índices de dificultad

Para cada uno de los cuestionarios y cada ítem del mismo (así como argumento en su caso), se calcularon los índices de dificultad que se presentan en la Tabla 4.8.1 para el Cuestionario A y en la Tabla 4.8.2 para el Cuestionario B. En la Figura 4.8.1 se representa la distribución de los valores de estos índices.

Tabla 4.8.1. Índices de dificultad en el cuestionario A

	Nivel Noelting	Ítem	Media	Desviación estándar
Urnas	IA	I1R	,88	,323
		I1A	,88	,331
	IIA	I2R	,67	,472
		I2A	,64	,481
	IIIA	I3R	,50	,502
		I3A	,19	,396
Ruletas	IB	I4R	,86	,346
		I4A	,79	,406
	IIB	I5R	,57	,497
		I5A	,63	,483
	IIIB	I6R	,32	,470
		I6A	,19	,396
Ruletas sesgado	IIB	I8R	,40	,492
		I8A	,44	,498
	IIIB	I9R	,40	,492
		I9A	,33	,472
Razones	IA	I10R	,92	,266
		I10A	,83	,379
	IIA	I11R	,72	,448
		I11A	,68	,467
	IIIA	I12R	,48	,501
		I12A	,22	,416
Juego		I13	,57	,497
E. muestral	Ruleta: seguro	I14a	,41	,494
	Ruleta: equiprobable	I14b	,88	,323
	Ruleta: imposible	I14c	,51	,502
	Urna: seguro	I15a	,38	,487
	Urna: equiprobable	I15b	,90	,306
	Urna: imposible	I15c	,51	,502

Tabla 4.8.2. Índices de dificultad en el cuestionario B

	Nivel Noelting	Ítem	Media	Desviación estándar
Urnas	IB	I1R	,89	,313
		I1A	,70	,460
	IIB	I2R	,27	,443
		I2A	,22	,414
	IIIB	I3R	,37	,484
		I3A	,07	,253
Ruletas	IA	I4R	,76	,431
		I4A	,82	,389
	IIA	I5R	,76	,431
		I5A	,76	,431
	IIIA	I6R	,63	,486
		I6A	,45	,499
Ruletas sesgado	IIA	I8R	,50	,502
		I8A	,52	,501
	IIIA	I9R	,44	,498
		I9A	,35	,480
Razones	IB	I10R	,96	,199
		I10A	,85	,358
	IIB	I11R	,46	,500
		I11A	,39	,490
	IIIB	I12R	,22	,414
		I12A	,04	,199
Juego		I13	,56	,498
E.muestral	Ruleta: seguro	I14a	,39	,490
	Ruleta: equiprobable	I14b	,87	,337
	Ruleta: imposible	I14c	,49	,502
	Urna: seguro	I15a	,37	,486
	Urna: equiprobable	I15b	,88	,329
	Urna: imposible	I15c	,50	,502

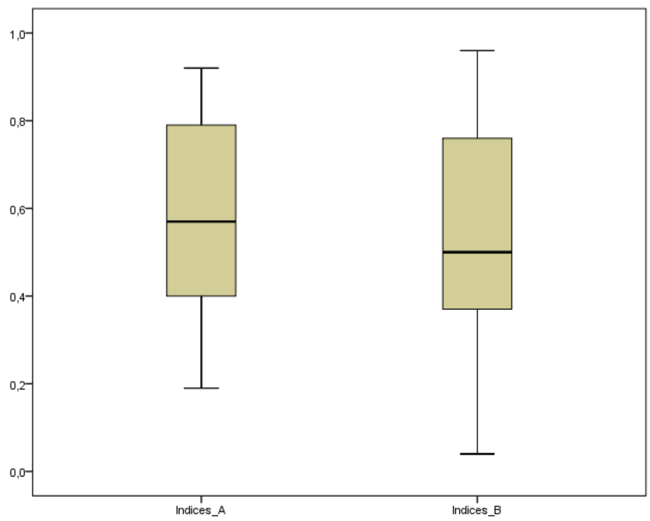


Figura 4.8.1. Distribución de los índices de dificultad en los Cuestionarios A y B.

Se observa una distribución aproximadamente simétrica con los valores centrales en torno al 50% (entre 40% y 80% en los valores correspondientes al 50% de los datos). No se presentan valores atípicos del índice de dificultad en ninguno de los cuestionarios y, además, hay una gama amplia de dificultad desde 0,19 a 0,92 en el Cuestionario A, y desde 0,04 a 0,96 en el Cuestionario B.

Hacemos notar que el número medio de respuestas correctas (incluyendo respuestas y argumentos) fue 16,73 en el Cuestionario A y 15,47 en el Cuestionario B, de un máximo posible de 29; es decir, en torno al valor medio teórico en un cuestionario equilibrado.

Consideramos, entonces, que el instrumento es adecuado a los propósitos de evaluación que se pretenden realizar en el Estudio 2, cuyos resultados se presentan en el Capítulo 5. A continuación, se discute el logro de los objetivos propuestos para su construcción.

4.9. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CUESTIONARIO

Se finaliza con esta sección, en la que se discuten las conclusiones sobre los objetivos que se plantearon para la construcción del cuestionario, en respuesta al tercer objetivo general de nuestra investigación:

O3. Estudiar la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas en estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

Para abordar dicho objetivo, se ha construido un nuevo cuestionario de evaluación orientado a "medir el razonamiento probabilístico y su relación con el razonamiento proporcional" mediante diversos tipos de tareas, probabilísticas y en comparación de razones, similares a las utilizadas por la literatura previa, siguiendo las normas metodológicas recomendadas por la AERA, APA y NCME (2014), cuyo diseño y validación se han descrito a lo largo de este capítulo. A continuación, se discute el logro de los objetivos específicos para la construcción del mismo.

O3.1. Estudiar si el nivel de razonamiento proporcional de una muestra de estudiantes de 11 a 16 años (de acuerdo al modelo de Noelting, 1980a, 1980b) requerido para tareas de comparación de razones se mantiene en tareas de comparación de probabilidades.

En el diseño del cuestionario se han considerado diversos tipos de tareas (descritas en la Sección 4.3), que han sido cuidadosamente diseñadas de acuerdo con la literatura previa, cuya revisión bibliográfica se presentó en el Capítulo 2. Por ello, se incluye para cada uno de los niveles de razonamiento proporcional de Noelting (1980a; 1980b), desde IA hasta IIIB, tareas de razonamiento proporcional y de comparación de probabilidades, para así poder relacionar los resultados de los estudiantes en estos dos tipos de tareas, que han sido seleccionadas para ser incluidas en el cuestionario mediante juicio de expertos. En conclusión, consideramos que el instrumento permite estudiar si los estudiantes que logran resolver problemas de razonamiento proporcional para un nivel dado, también obtienen éxito en los problemas de comparación de probabilidades del mismo nivel y viceversa.

O3.2. Estudiar la posible relación entre el nivel de razonamiento proporcional y los resultados en la resolución de otras tareas probabilísticas, en concreto, problemas de juego equitativo y tareas de construcción de espacios muestrales correspondientes a un suceso seguro, imposible y equiprobable.

Se cumple con este objetivo, porque se incluyen en el cuestionario tareas en las que se pide determinar la ganancia para asegurar un juego equitativo, así como de construcción del espacio muestral, según su correspondencia con los tipos de suceso: seguro, imposible y equiprobable. Se trata de tareas similares a las empleadas con los estudiantes del Estudio 1, pero con este nuevo cuestionario se permite relacionar, de manera precisa, resultados obtenidos en las tareas indicadas con los obtenidos en las tareas sobre razonamiento proporcional, al considerar el nivel máximo alcanzado (según Noelting, 1980a; 1980b) por el estudiante en las tareas de razonamiento proporcional.

O3.3. Comparar el nivel de razonamiento alcanzado en la comparación de probabilidades en problemas planteados en contextos de urnas y de ruletas.

En el cuestionario se plantean tareas de comparación de probabilidades en los dos tipos de contextos (urnas y ruletas), según cada uno de los niveles de Noelting (1980a; 1980b). Por tanto, el cuestionario es un instrumento que permite comparar de manera precisa los resultados en cada pareja de ítems del mismo nivel de razonamiento proporcional.

O3.4. Estudiar la influencia de sesgos en razonamiento probabilístico en la resolución de las tareas de acuerdo al nivel alcanzado en la comparación de probabilidades.

El cuestionario permite analizar los sesgos e intuiciones de los estudiantes y su influencia en las respuestas, respaldado por los resultados de investigaciones previas en que se emplean tareas similares (e. g. Cañizares, 1997; Konold, 1989; Lecoutre, 1992), como se evidenció en el Estudio 1 (Hernández et al., 2022), que se describe en el Capítulo 3 de esta investigación. Además, se alcanza este objetivo al incluir distractores en parte de las tareas del cuestionario, con los que comprobar la influencia de dichos sesgos y analizar su variación en las respuestas al resto de tareas.

O3.5. Analizar el efecto del curso escolar y del entorno educativo (español o costarricense) en algunas tareas del cuestionario.

Este objetivo se garantiza por el estudio piloto realizado en una muestra reducida de estudiantes en los dos países, que se describe en la Sección 4.7. Los resultados de este estudio garantizan la comprensión de los enunciados y figuras empleadas en las tareas propuestas del cuestionario, comprobando que los estudiantes diferencian las situaciones como aleatorias y no deterministas de aquellas que, específicamente, evalúan el razonamiento proporcional. Además, se garantiza la comprensión del lenguaje probabilístico utilizado en las tareas propuestas en el cuestionario, por lo que se garantiza la comparación de los resultados obtenidos en los dos países y por curso.

O3.6. Comparar los resultados conseguidos en el estudio de evaluación con los obtenidos por Cañizares (1997) y Green (1982) con estudiantes de la misma edad.

En el diseño del cuestionario se consideran tareas similares a las utilizadas en estudios previos con estudiantes de edades similares (entre 11 y 16 años), específicamente, por Green (1982) y Cañizares (1997), según formato y con nivel de razonamiento proporcional equivalente. Por tanto, se garantiza la comparación de los resultados obtenidos mediante la administración del cuestionario, dependiendo de la tarea, según estudios previos analizados en los antecedentes que se describieron en el Capítulo 2. Además, en el cuestionario se pide al estudiante justificar sus resultados en algunas tareas, por lo que se podrá comparar no solo los porcentajes de respuestas correctas a dichas tareas sino las estrategias que emplean, de acuerdo con los resultados obtenidos por Cañizares (1997) y Green (1982).

En resumen, consideramos que se lograron los objetivos planteados para lograr disponer de un instrumento que permitiera conocer las dificultades de los estudiantes de las edades abordadas en las tareas seleccionadas, así como evaluar la mutua influencia entre las principales variables consideradas, tal como se indicaba en el tercer objetivo general de esta investigación. Este instrumento será empleado en el Estudio 2, cuyos resultados se describen en el Capítulo 5.

CAPÍTULO 5: RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y RESOLUCIÓN DE TAREAS PROBABILÍSTICAS DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Del contenido de este capítulo se derivan los siguientes trabajos:

Batanero, C. y Hernández-Solís, L. A. (2023). Razonamiento proporcional en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles. *Uniciencia, 37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analysing Costarican and Spanish students´ proportional reasoning and comparison of probabilities. *Statistics Education Research Journal, 22*(3), 1-23. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Gea, M. M., Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Relating students' proportional reasoning level and their understanding of fair games. *Journal on Mathematics Education, 14*(4), 663-682. https://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp663-682

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023). Costarican students' proportional reasoning and performance in comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 9(*12), 1-14. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (en prensa). Razonamiento proporcional y construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos por estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística.*

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los resultados del segundo estudio de evaluación, en el que se analiza la influencia del razonamiento proporcional sobre la resolución de tareas probabilísticas en estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Secundaria. La finalidad fue completar el estudio exploratorio descrito en el Capítulo 3 y analizar si los resultados en las tareas de probabilidad similares a las utilizadas en dicho estudio se relacionan con el nivel de razonamiento proporcional (Noelting 1980a, 1980b) de las tareas propuestas.

Aunque son varios los trabajos que analizan la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades (entre otros, Berrocal, 1990; Cañizares, 1997; Green, 1982; Pérez Echeverría et al., 1986 y Piaget e Inhelder, 1951) no se han considerado todas las edades que trataremos en este Estudio 2.

Respecto al Estudio 1, en este segundo estudio se amplió el rango de edad de los estudiantes para considerar el último curso de Educación Primaria y toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Con este fin se construyó el cuestionario de evaluación descrito en el Capítulo 4 y se pasó a una muestra de estudiantes de estos niveles educativos en cada uno de estos países.

En lo que sigue, se presenta en primer lugar los objetivos e hipótesis de este segundo estudio, se dan detalles de las muestras de estudiantes que han participado, se describe la metodología de análisis de datos y, por último, se resumen los resultados a partir de una serie de artículos publicados en diferentes revistas o en proceso de publicación.

5.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS DEL ESTUDIO 2 DE EVALUACIÓN

Los objetivos de este segundo estudio de evaluación desarrollan el tercer objetivo general de nuestra investigación, que fue el siguiente:

O3. Estudiar la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas en estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

Dicho objetivo se justificó por la falta de investigaciones específicas que relacionasen el razonamiento probabilístico y proporcional en estudiantes costarricenses. Además, en una parte de este estudio se compararían los resultados con los de estudiantes españoles de las mismas edades, puesto que las investigaciones sobre el tema en España son escasas y tampoco se encontraron estudios comparativos como el pretendido. De este objetivo, se deducen los siguientes objetivos específicos:

O3.1. Estudiar el razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

El estudio del razonamiento proporcional ha recibido un gran interés en la investigación didáctica, como se recoge en trabajos de síntesis tales como Behr, et al. (1992), Ben-Chaim et al. (2012), Kieren (2020), Lamon (2007), Singer y Resnick (1993) o Van Dooren et al. (2018). Sin embargo, no se cuenta con investigaciones realizadas en Costa Rica, ni estudios comparados de resultados con estudiantes españoles. Para completar esta carencia, uno de los objetivos de este segundo estudio de evaluación fue realizar un análisis comparado del razonamiento en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles de 11 a 16 años de edad. Ello permitirá a los profesores conocer mejor el razonamiento de estos estudiantes, para diseñar tareas en temas como probabilidad, estadística o magnitudes que requieran de este razonamiento.

Para alcanzar este objetivo, se incluyeron en el cuestionario de evaluación (descrito en el Capítulo 4) una serie de ítems sobre comparación de razones, que tienen en cuenta seis niveles consecutivos de razonamiento proporcional en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b). Cada estudiante respondería a tres de estos ítems, con niveles de dificultad progresivos, lo que permitiría en cada grupo de edad y país determinar qué niveles de las tareas son adecuados para los estudiantes de la muestra. Los resultados se han publicado en el siguiente artículo:

Batanero, C. y Hernández-Solís, L. A. (2023). Razonamiento proporcional en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles. *Uniciencia, 37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

O3.2. Estudiar la relación existente entre el nivel de razonamiento proporcional de las tareas resueltas por los estudiantes de la muestra en la comparación de razones y de probabilidades en urnas.

Para alcanzar este objetivo se incluyeron, en el cuestionario de evaluación (descrito en el Capítulo 4), una serie de ítems sobre comparación de probabilidades en contexto de urnas, que están asociados a seis niveles consecutivos de razonamiento proporcional en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b). Cada estudiante respondería a tres de estos ítems, con niveles de dificultad progresivos, lo que permitiría, en cada grupo de edad y país, determinar el nivel medio de razonamiento alcanzado en tareas de comparar probabilidades en urnas, así como los niveles más frecuentes de los estudiantes de la muestra. Además, se analizarían las posibles diferencias entre los resultados obtenidos en comparación de razones y los obtenidos en comparación de probabilidades en urnas. Los resultados de este punto están publicados en:

Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analysing Costarican and Spanish students´ proportional reasoning and comparison of probabilities. *Statistics Education Research Journal, 22*(3), 1-23. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Los siguientes objetivos se centrarán únicamente en los estudiantes costarricenses, con la finalidad de presentar la tesis en un tiempo razonable, aunque en el futuro se pretende analizar los datos disponibles de los estudiantes españoles.

O3.3. Estudiar la relación existente, con los estudiantes costarricenses de la muestra, entre el nivel de razonamiento proporcional en la resolución de tareas en comparación de razones y de probabilidades en ruletas.

Para alcanzar este objetivo se incluyeron, en el cuestionario de evaluación (descrito en el Capítulo 4), una serie de ítems sobre comparación de probabilidades en contexto de ruletas, que están asociados a seis niveles consecutivos de razonamiento proporcional en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b). Cada estudiante resolvería tres de estos ítems, con niveles de dificultad progresivos, lo que permitiría, en cada grupo de edad y país, determinar el desempeño alcanzado en las tareas. Además, se analizarían las posibles diferencias entre los resultados obtenidos en comparación de razones y los obtenidos en comparación de probabilidades en ruletas, así como comparar los resultados con los de investigaciones previas. Los resultados de este punto se han publicado en:

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023). Costarican students' proportional reasoning and performance in comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 9(*12), 1-14. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

O3.4. Estudiar si existe relación entre el éxito en tareas de comparación de razones de diferente nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y los resultados obtenidos en la resolución de una tarea de juego equitativo.

Para alcanzar este objetivo se incluyó, en el cuestionario de evaluación (descrito en el Capítulo 4), un ítem que plantea una tarea asociada al juego equitativo, la cual requiere razonamiento en proporcionalidad inversa para su resolución, puesto que se trata de determinar la ganancia justa para ajustar un juego y que sea equitativo. Cada estudiante respondería a este ítem, lo que permitiría, en cada grupo de edad, determinar si el éxito en tareas de comparar razones de diverso nivel de razonamiento proporcional está asociado a la puntuación obtenida según corrección de la estrategia empleada en la resolución de la tarea sobre juego equitativo.

Los resultados se han publicado en el siguiente trabajo:

Gea, M. M., Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Relating students' proportional reasoning level and their understanding of fair games. *Journal on Mathematics Education, 14*(4), 663-682. https://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp663-682

O3.5. Estudiar si existe relación entre el nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y los resultados obtenidos en tareas de construcción de espacios muestrales.

Para alcanzar este objetivo se incluyeron, en el cuestionario de evaluación (descrito en el Capítulo 4), ítems asociados a tareas de construcción de espacios muestrales: un ítem en contexto de urnas y otro en contexto de ruletas. En ellos se pide a los estudiantes construir un espacio muestral consistente con que un suceso dado sea equiprobable, seguro o imposible. Cada estudiante respondería a estos dos ítems, lo que permitiría, en cada grupo de edad, determinar si el nivel medio de razonamiento proporcional alcanzado en tareas de comparar razones está asociado a los porcentajes de corrección obtenidos en la resolución de este tipo de tarea. Los resultados han sido aceptados para publicación en el siguiente trabajo:

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (en prensa). Razonamiento proporcional y construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos por estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística.*

O3.6. Estudiar la posible influencia de creencias de tipo subjetivo en la resolución de tareas probabilísticas.

En general para cada una de las tareas probabilísticas del Estudio 2, se analizó si hubo presencia de sesgos y creencias subjetivas, antes documentadas en estudios previos (e. g. Cañizares, 1997; Konold, 1989; Lecoutre, 1992). Específicamente, en los ítems de comparación de probabilidades en ruletas aparecen ítems donde una ruleta tiene sectores del mismo color juntos y en la otra ruleta sectores del mismo color separados por uno o varios sectores de distinto color. Además, en este mismo contexto, aparecen en dos ruletas de un mismo ítem, una flecha (o aguja) apuntando a un color y en la otra ruleta apuntando al otro color, con el propósito de evaluar si esta diferencia en el dibujo de las ruletas incide en las respuestas de los estudiantes. Los resultados relativos a este objetivo se han recogido en la siguiente publicación:

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023). Costarican students' proportional reasoning and performance in comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 9*(12), 1-14. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

Hipótesis

Seguidamente, se presentan las hipótesis relativas al segundo estudio de evaluación, que se irán discutiendo a lo largo de este capítulo:

H1. Se espera encontrar correlación entre el éxito en tareas de diferente nivel de razonamiento proporcional alcanzado por los estudiantes de la muestra y el curso escolar.

Esta hipótesis se basa en resultados de estudios previos como los de Noelting (1980a, 1980b) quien establece etapas en el desarrollo del razonamiento proporcional, según diversas edades que incluyen las consideradas en la muestra del presente estudio. Puesto que los estudiantes de un mismo curso escolar se caracterizan por una edad homogénea (con diferencia aproximada de un año), se espera que al avanzar el curso se alcance un nivel superior en los descritos por Noelting (1980a, 1980b). Sin embargo, se considera que puede haber un desarrollo más temprano del asumido por el autor, debido a la enseñanza recibida.

Además, se tiene conciencia de que puede haber diferencias del nivel alcanzado en grupos de estudiantes del mismo curso, según nacionalidad, al tener un currículo de matemáticas y un sistema educativo distinto.

H2. Se espera encontrar correlación entre el éxito de los estudiantes en tareas de comparación de probabilidades y tareas de comparación de razones, según la clasificación de Noelting (1980a, 1980b).

Nos fundamentamos en resultados de estudios previos, como el de Pérez Echeverría et al. (1986) y Cañizares (1997), entre otros (descritos en el Capítulo 2 de esta Memoria), donde se analiza la influencia del razonamiento proporcional y el éxito en tareas probabilísticas, así como el modo en que se resuelven dichas tareas. Se espera encontrar cierta relación entre las etapas donde se evidencia desarrollo en la capacidad de comparación de probabilidades y las correspondientes al desarrollo del razonamiento proporcional, aunque no se trate de una equivalencia. Pues, como se observó en Cañizares (1997), los estudiantes muestran dificultad al emplear razonamiento proporcional en tareas de comparación de probabilidades, aunque los estudiantes en su estudio hubieran estudiado comparación de razones en cursos previos.

H3. Se sospecha que se encontrarán sesgos de razonamiento probabilístico, como el de equiprobabilidad y el efecto de distribución de sectores en los ítems de comparación de probabilidades en ruletas, que afectarán las estrategias y resultados de los estudiantes en las tareas.

Lo anterior se basa en algunos resultados del primer estudio exploratorio (Ver Capítulo 3), que han sido publicados en Hernández-Solís et al. (2021) y Hernández-Solís (2023), así como en algunos resultados de Cañizares (1997) y Maury (1984), quienes informan de haber encontrado dichos sesgos en sus estudiantes. Para comprobar esta hipótesis se han incluido en el cuestionario ítems equivalentes, algunos de ellos orientados a la detección de estos sesgos y otros no orientados.

H4. También se espera encontrar menor dificultad en los problemas planteados en contextos de ruletas (continuo, que favorece la relación parte-todo) que de urnas (discreto, que favorece la relación parte-parte).

Esto considerando algunos resultados del primer estudio exploratorio (Ver Capítulo 3) y las sugerencias de Maury (1984). Igualmente, Cañizares (1997) indica que en las ruletas se favorece la comparación parte-todo por lo que es más sencillo aplicar la regla de Laplace. En la comparación de probabilidades en urnas, sin embargo, se favorece la comparación parte-parte es decir entre casos favorables y desfavorables.

H5. Igualmente, se espera encontrar una relación entre el nivel de razonamiento proporcional alcanzado y el éxito en la construcción de espacios muestrales (que implica el razonamiento combinatorio) y tareas asociadas al juego equitativo (que implica la proporcionalidad inversa, al determinar las esperanzas de ganancia de todos los jugadores cuando las probabilidades de estos no son iguales).

La hipótesis se apoya en que el razonamiento combinatorio y proporcional son esquemas que corresponden a la etapa de las operaciones formales y se desarrollan según el mismo esquema de etapas en la teoría de Piaget e Inhelder (1951). Por otro lado, la determinación de la ganancia en un juego equitativo requiere razonar según la proporcionalidad inversa. Por ello se piensa que los dos tipos de tarea se facilitan con la madurez del estudiantado.

H6. Finalmente, se supone una mejora del razonamiento en todas las tareas respecto al progreso en un curso escolar superior.

Este supuesto está de acuerdo con las teorías de Piaget e Inhelder (1951) y Noelting (1980a, 180b) sobre desarrollo del razonamiento probabilístico y razonamiento proporcional, respectivamente. Además, la enseñanza recibida es mayor según aumenta la edad, por lo que es de esperar mayor conocimiento en los estudiantes según progresan de curso.

5.3. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

La muestra estuvo formada por 704 estudiantes, 292 de Costa Rica y 412 españoles, de 6º curso de Educación Primaria en España y curso equivalente (6º de Educación General Básica, en adelante: EGB) en Costa Rica y cada uno de los cuatro cursos de Educación Secundaria Obligatoria (en adelante: ESO) española y cursos equivalentes (7º a 9º de EGB y 10º del Ciclo Diversificado, en adelante: CD) en Costa Rica. La composición y el número de estudiantes que utilizó cada cuestionario se presenta en la Tabla 5.3.1.

El 45,3% de los estudiantes fueron mujeres, el 50,8% hombres y el resto no indicó su género. La finalidad fue elegir al menos 50 estudiantes en cada nivel escolar y país, pero al tomar grupos de nivel completos, en algunos casos se ha superado este número.

Se realizó un muestreo por conveniencia (Otzen y Manterola, 2017), seleccionando instituciones educativas por su ubicación geográfica y disponibilidad de colaboración. En España, participaron cuatro centros educativos públicos, dos de Educación Primaria, uno de Almería y otro de Granada, y dos de secundaria, uno de Almería y otro de Sevilla. La muestra de estudiantes costarricenses se tomó de una única institución privada de la provincia de Cartago.

Tabla 5.3.1. Composición de la muestra, según curso escolar, país y cuestionario

Curso	Cuestionario A		Cuestionario B		Total	
	España	Costa Rica	España	Costa Rica	España	Costa Rica
6ºEGB	39	35	39	33	78	68
1ºESO/7ºEGB	43	26	37	26	80	52
2ºESO/8ºEGB	32	31	31	33	63	64
3ºESO/9ºEGB	50	26	46	26	96	52
4ºESO/10ºED	55	27	40	29	95	56
Total	219	145	193	147	412	292

En cada uno de los grupos participantes (es decir, cada curso escolar de cada escuela y país) se distribuyeron en forma aleatoria los cuestionarios A y B (Ver Capítulo 4) a la mitad del estudiantado; es decir, en un grupo escolar la mitad del estudiantado completaría el cuestionario A y la otra mitad el cuestionario B. Esta es una técnica que asegura la equivalencia de las dos muestras completas que pasaron los cuestionarios A y B, al dividirse la muestra total en forma aleatoria, dentro de cada grupo. Con ello se puede estimar el porcentaje de respuestas a cada ítem y categoría en la muestra total, partiendo de los datos de una de las submuestras y estimando una proporción similar en la segunda. Todo ello, debido a que se utilizan dos muestras equivalentes seleccionadas aleatoriamente de la muestra total y que la proporción muestral es el mejor estimador de la proporción poblacional.

Se recuerda que la muestra se reduce a los estudiantes costarricenses para los últimos objetivos de este Estudio 2 en la investigación.

5.4. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS DE LOS DATOS

Con las respuestas al cuestionario se realizó un doble tipo de análisis:

- Por un lado, se estudia la opción elegida en cada uno de los ítems de opción múltiple, para analizar si se trata de la opción correcta o una incorrecta. Con estos resultados se determinará el porcentaje de respuestas correctas (opción correctamente elegida) en cada uno de estos ítems por curso y por país, para cuando se trate de un estudio comparativo. A este análisis se le llamará corrección de respuesta.

- Con los argumentos del estudiantado de la muestra a cada pregunta de respuesta abierta incluida en los ítems del cuestionario se llevará a cabo un análisis de contenido (Krippendorff, 2013), que permite establecer categorías de modo objetivo como resultado del análisis sistemático realizado. Este análisis se complementa con información numérica que se muestra mediante tablas indicando, tanto para las estrategias correctas como para las incorrectas, el porcentaje de estudiantes que las emplea en cada curso escolar y país (cuando sea pertinente). Las categorías utilizadas en el análisis se describen y ejemplifican en los correspondientes apartados del capítulo.

  Para asegurar la fiabilidad de la codificación, un segundo investigador recodificó los cuestionarios de 20 estudiantes y se calculó el coeficiente de fiabilidad Kappa, obteniéndose un valor Kappa = 0,9139 para la codificación de las opciones elegidas y Kappa = 0,9186 para la codificación de las estrategias. Puesto que el valor de Kappa se considera alto si es mayor que 0,8 se deduce una alta fiabilidad de codificación.

Además de los anteriores análisis, se han calculado para partes del cuestionario el número de ítems correctamente respondidos y estrategias correctas, que se han correlacionado con el nivel de razonamiento proporcional y el curso, para analizar su posible asociación.

En los siguientes apartados se presentan la codificación de las estrategias, resultados y conclusiones correspondientes a cada parte del cuestionario. Para cumplir con los requisitos de una tesis como agrupación de publicaciones, se reproducen partes de los artículos correspondientes, sin repetir el marco teórico y antecedentes que fueron sistematizados en los dos primeros capítulos de esta Memoria.

5.5. RAZONAMIENTO PROPORCIONAL DE ESTUDIANTES ESPAÑOLES Y COSTARICENSES

5.5.1. Introducción

El razonamiento proporcional tiene un papel relevante en los currículos escolares de Matemática, debido a sus conexiones con temas de geometría, álgebra, estadística y probabilidad, constituyéndose un componente del pensamiento formal y base del razonamiento algebraico elemental; además de su aplicabilidad en la resolución de problemas de la vida real (Lamon, 2007).

El número racional se estudia tanto en España (MECD, 2014; 2015; MEFP, 2022b; 2022c) como en Costa Rica (Ministerio de Educación Pública, MEP, 2012). En Educación Primaria se introduce el concepto de fracción, su lectura, escritura, representación gráfica, relación de orden y operaciones básicas, para posteriormente diferenciar entre las fracciones propias e impropias. También se introducen las fracciones equivalentes y se emplean porcentajes simples y regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa para resolver problemas de la vida cotidiana. En los dos primeros años de Educación Secundaria, en ambos países, se siguen utilizando los números fraccionarios y distintas estrategias de cálculo para simplificar las operaciones. En 1ºESO en España y 7ºEGB en Costa Rica se estudia la proporcionalidad inversa. En 8ºEGB se introduce el concepto de número racional y sus propiedades; mientras que en España se incluye en 3ºESO. En los siguientes cursos no aparecen nuevos contenidos asociados al razonamiento proporcional, pero sigue estando presente, de manera implícita, en la resolución de diversos problemas.

El progreso en el razonamiento proporcional supone un largo periodo de tiempo, y finaliza en la transición de las operaciones concretas a las operaciones formales (Lamon, 2007; Post et al., 1988). Aun así, el sujeto puede tardar algunos años para resolver las tareas que corresponden a su desarrollo lógico (Van Dooren et al., 2018) y muchos estudiantes encuentran dificultades en el razonamiento proporcional después de la instrucción.

Por todo ello ha recibido un gran interés en la investigación didáctica, como se recoge en trabajos de síntesis tales como Behr et al. (1992), Ben-Chaim et al. (2012), Carpenter et al. (1993), Kieren (2020), Lamon (2007) y Van Dooren et al. (2018). Sin embargo, no se cuenta con investigaciones realizadas en Costa Rica, ni estudios comparativos con estudiantes españoles. Considerando esta carencia, en esta sección se aborda el primer objetivo específico de este segundo estudio de evaluación:

O3.1. Estudiar el nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

En lo que sigue se detalla la estructura de los ítems del cuestionario para abordar dicho estudio, las estrategias previstas en el análisis a priori y los resultados obtenidos, que ha sido publicado en:

Batanero, C. y Hernández-Solís, L.A. (2023). Razonamiento proporcional en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles. *Uniciencia, 37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

5.5.2. Estructura de los ítems

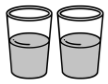
A los estudiantes se les proporcionó uno de dos cuestionarios A y B, cada uno con tres problemas de comparación de razones de complejidad creciente y similares a los empleados por Boyer y Levine (2015), Noelting (1980a, 1980b), Karplus et al. (1983), Pérez Echeverría et al. (1986) y Tournaire y Pulos (1985). En conjunto, entre los dos cuestionarios se obtuvieron seis de los niveles de razonamiento de Noelting (1980a, 1980b). Cada estudiante solo resolvió la mitad de los ítems, para evitar un aprendizaje de la respuesta al avanzar el cuestionario. Cada uno de los cuestionarios se dio a la mitad de los sujetos de cada curso escolar y país (Ver Tabla 5.3.1), de modo que se tuviese aproximadamente igual número de estudiantes de las mismas características respondiendo cada ítem. En la Tabla 5.5.1 se especifican las características de cada uno de los ítems según cuestionario.

Tabla 5.5.1. Ítems del cuestionario según nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a, 1980b) y nivel de dificultad (Pérez Echeverría et al., 1986)

Ítem	Cuestionario	Composición (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)	Nivel de razonamiento proporcional	Edad esperada (años, meses)	Nivel de dificultad
1	A	(2,3) vs (1,3)	IA-Intuitiva inferior	(3,6)	1
2	B	(5,1) vs (5,4)	IB-Intuitiva media	(6,4)	1
3	A	(2,2) vs (4,4)	IIA-Operacional concreta inferior	(8,1)	2
4	B	(3,1) vs (6,2)	IIB-Operacional concreta superior	(10,5)	2
5	A	(3,1) vs (4,2)	IIIA-Operacional formal inferior	(12,2)	3
6	B	(3,2) vs (4,3)	IIIB-Operacional formal superior	(15,1)	4

En estos ítems se pide comparar dos razones (a_1,b_1) y (a_2,b_2), donde el primer término de cada par es el antecedente o dividendo de la razón (vasos de zumo/vasos de agua) y el segundo el consecuente o divisor. En la Figura 5.5.1 se presenta el Ítem 1 (cuestionario A) donde se comparan las razones (2,3) vs. (1,3) y es posible resolverlo comparando sólo los antecedentes, siendo iguales los consecuentes. Los otros 5 ítems tienen la misma estructura, variando las cantidades de vasos de zumo y vasos de agua.

Elena y Juan preparan limonada. Elena mezcla 2 vasos de zumo de limón con 3 vasos de agua. Juan mezcla 1 vaso de zumo de limón con 3 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

Elena		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?
( ) **La de Elena. (Opción correcta)**
( ) La de Juan.
( ) Las dos igual.
( ) No lo sé.
Explica por qué das esta respuesta:

Figura 5.5.1. Enunciado del Ítem 1. Elaboración propia

5.5.3. Categorías de análisis de estrategias

Con las respuestas al cuestionario se realizó un análisis de contenido (Krippendorff, 2013), que permite establecer categorías de modo objetivo como resultado del análisis sistemático realizado. Este análisis se complementa con información numérica que se muestra mediante tablas para el porcentaje de respuestas correctas y de cada estrategia en cada ítem, así como de niveles de razonamiento proporcional por curso.

La clasificación de las estrategias que pueden utilizar los estudiantes para resolver las tareas planteadas parte de las identificadas en trabajos previos (Noelting, 1980a, 1980b; Pérez Echeverría et al., 1986; Tournaire y Pulos, 1985) y se fue completando mediante el análisis de contenido. A continuación, se describen las estrategias previstas, agregando un ejemplo de respuesta de un estudiante en cada una de ellas, indicando "Ex" para representar al "estudiante número x".

Comparar totales en cada razón. En otras palabras, comparar el total de vasos (de zumo de limón y de agua) en cada razón; es decir, si $a_1+b_1 > a_2+b_2$ entonces $(a_1,b_1)>(a_2,b_2)$. No es correcta en ningún ítem del cuestionario, pero podría generar respuestas correctas en el Ítem 1. Un ejemplo fue dado por E29, quien argumenta que hay mayor cantidad de vasos en la mezcla de Elena y ha seleccionado la respuesta correcta. La respuesta es correcta debido a que la cantidad de vasos de agua es la misma en ambas mezclas y la cantidad de zumo de limón es mayor en la mezcla de Elena, sin embargo, el argumento es incorrecto porque no considera la proporcionalidad de las mezclas, sino solo la cantidad.

E29: Porque Elena ha mezclado más limonada que Juan (Ítem 1, opción correcta).

Comparar los primeros términos "a" de las razones, sin considerar los segundos términos "b". Da respuestas correctas solo cuando los segundos términos son iguales ($b_1 = b_2$) y es una estrategia característica del nivel intuitivo inferior (IA) de Noelting (por ejemplo, E346). El estudiante debe diferenciar los dos términos de la razón. En el estudio daría respuestas correctas en el ítem correspondiente al nivel IA (Ítem 1).

E346: Porque tiene más zumo (Ítem 1, opción correcta).

Comparar los segundos términos "b" de las razones. Da respuestas correctas si los primeros términos son iguales ($a_1 = a_2$). El estudiante debe comprender que con el mismo numerador la razón es mayor si el denominador es más pequeño; lo que requiere entender que "b" es el recíproco de "a". Corresponde al nivel intuitivo medio (IB) de Noelting (1980a, 1980b). Esta estrategia incluye a la anterior, puesto que primero debe comparar los primeros términos y darse cuenta que son iguales. En el estudio daría respuestas correctas en el ítem correspondiente al nivel IB (Ítem 2), por ejemplo:

E29: Porque Elena tiene un vaso de agua y Juan tiene cuatro (Ítem 2, opción correcta).

Comparar la diferencia entre los términos de cada razón. Considera los cuatro términos a comparar, pero realiza comparaciones aditivas, analizando la diferencia entre términos. Según Noelting (1980a, 1980b), el estudiante compara los términos de una fracción con los de otra (que denominó estrategia "entre") o compara los términos dentro de una misma fracción, para establecer una razón, y luego compara con la otra razón, mediante la comparación en los términos de la fracción restante (que denominó estrategia "intro"). En el caso de E39, se realiza una estrategia "intro", ya que se comparan las diferencias de los términos dentro de una misma fracción para establecer una razón. Esta estrategia corresponde al nivel intuitivo superior (IC) de Noelting, y en el estudio daría respuestas correctas en los Ítems 1 y 2 del cuestionario.

E39: Porque la de Elena tiene un vaso más de agua que de zumo y la de Juan tiene dos vasos más de agua que de zumo (Ítem 1, opción correcta).

Relación de equivalencia a la unidad. Se compara el valor de una razón (a_1,b_1) con el de la otra razón (a_2,b_2), es decir, se utiliza una operación multiplicativa aplicada a los términos de ambas razones, encontrando que hay una equivalencia a la unidad. Esta estrategia implica la diferenciación y combinación, no solo de los términos dentro de una misma razón (a_1,b_1), sino también de la razón entre los términos de una fracción con los de otra. Se obtienen respuestas correctas solo cuando los términos en cada una de las razones son iguales y corresponde al nivel operacional concreto inferior (IIA) de Noelting. En el estudio daría respuestas correctas al Ítem 3, por ejemplo:

> E421: Porque ambas limonadas tienen la misma cantidad de zumo y agua en diferentes litros (Ítem 3, opción correcta).

Relación de equivalencia entre razones. Se compara el valor de una razón (a_1,b_1) con el de la otra razón (a_2,b_2), encontrando equivalencia entre las razones. Esta estrategia dará respuestas correctas solo cuando las razones pertenezcan a una misma clase de equivalencia de fracciones. Corresponde al nivel operacional concreto superior (IIB) de Noelting y en el estudio da respuestas correctas en el Ítem 4. La comprensión de la correspondencia *uno-varios* es un paso esencial en dicha comprensión, según Vanluydt et al. (2022a). El estudiante E317 se da cuenta que ambos términos de la segunda razón (6,2) son del doble que los de la primera razón (3,1), por lo que establece la equivalencia entre estas.

> E317: Porque la cantidad de limonada de Elena es menor y el agua también, los de Juan son como si se multiplicara por 2 (Ítem 4, opción correcta).

Correspondencia entre términos de las razones. Se establece un criterio de proporcionalidad entre los términos de una razón (a_1,b_1), para luego comparar si la relación respecto a la otra razón (a_2,b_2) es menor o mayor (por ejemplo, E506). Este tipo de estrategias darán respuestas correctas siempre y cuando dos de los cuatro términos a comparar sean múltiplos. Pertenece al nivel operacional formal inferior (IIIA) de Noelting. En el estudio daría respuestas correctas en el Ítem 5 y los anteriores.

> E506: Está concentrado en menos cantidad de agua. Por cada vaso son 3 de limón por lo que Juan debía usar 6 vasos de limón par ser igual de ácido que Elena (Ítem 5, opción correcta).

Proporcionalidad. Se reducen las razones a fracciones con común denominador y se comparan. Con esta estrategia se logra comparar cualquier tipo de razones, por lo que se pueden obtener respuestas correctas para cualquier tarea de comparación de razones. Corresponde al nivel operacional formal superior (IIIB) de Noelting. En el estudio daría respuestas correctas en todos los ítems del cuestionario.

> E80: Porque el porcentaje de zumo de limón en la limonada de Elena (60%) es mayor que el de Juan (57%) (Ítem 6, opción correcta).

5.5.4. Resultados

A continuación, se presenta el porcentaje de respuestas correctas en cada ítem según curso, las estrategias empleadas y el porcentaje de estudiantes que alcanzan cada nivel de Noelting (1980a, 1980b) en los diferentes cursos.

Respuestas correctas en cada ítem

En la Tabla 5.5.2 se presenta el porcentaje de estudiantes en cada curso escolar y país que eligió la opción correcta en cada ítem. Conforme aumenta el nivel de razonamiento proporcional del ítem requerido para resolver las tareas (Noelting, 1980a, 1980b), el porcentaje de respuestas correctas disminuye, siendo pequeño (entre 15,2% y 37,5%, según curso y país) en el Ítem 6 (nivel IIIB). Hay que recordar que la edad promedio esperada para alcanzar el nivel de razonamiento IIIB según Noelting es de 15 años y un mes, por lo que la mayor parte de estudiantes del último curso debieran haberlo alcanzado y resolver correctamente dicho ítem.

Tabla 5.5.2. Porcentaje de estudiantes que elige la opción correcta por ítem, según curso y país

Ítem	Nivel Noelting	6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR
1	IA	89,7	91,4	88,4	92,3	93,8	90,3	86,0	92,3	94,5	96,3
2	IB	87,2	90,9	91,9	96,2	96,8	97,0	95,7	100,0	92,5	96,6
3	IIA	64,1	65,7	79,1	69,2	84,4	80,6	82,0	76,9	94,5	70,4
4	IIB	28,2	30,3	40,5	42,3	71,0	48,5	71,7	53,8	77,5	58,6
5	IIIA	41,0	40,0	46,5	57,7	59,4	48,4	36,0	50,0	58,2	48,1
6	IIIB	17,9	15,2	27,0	23,1	35,5	18,2	32,6	26,9	37,5	27,6

Casi todos los estudiantes, independientemente del curso y país, responden correctamente los Ítems 1 y 2, correspondiente a los niveles de razonamiento proporcional IA y IB de Noelting, respectivamente, obteniendo resultados similares a la tarea del mismo nivel de dificultad (nivel 1) en Pérez Echeverría et al. (1986), para los estudiantes de cursos equivalentes. En los demás ítems, los porcentajes de respuestas correctas aumentan con el curso, lo que se explica por la mayor edad e instrucción. Sin embargo, es evidente que no todos los estudiantes alcanzan el nivel de razonamiento proporcional en la tarea correspondiente, según la edad esperada por Noelting (1980a, 1980b).

Al comparar los resultados en los dos países, los porcentajes de corrección son similares en los cursos 6ºEGB y 1ºESO / 7ºEGB. En los demás cursos, a partir del nivel IIA los porcentajes de corrección en estudiantes costarricenses (excepto en el Ítem IIIA para los estudiantes de 3ºESO / 9ºEGB) tienden a ser un poco inferiores al de los estudiantes españoles. En el Ítem 6, que requería el nivel IIIB, se obtuvo, a partir de 2ºESO, porcentajes de corrección superiores al 30% en los estudiantes españoles, siendo inferiores en todos los cursos los resultados de los estudiantes costarricenses. Para esta tarea, los promedios de respuestas correctas fueron 33,1% (España) y 22,2% (Costa

Rica) de la muestra. Este ítem se categoriza en el mayor nivel de razonamiento proporcional en Noelting (1980a, 1980b) y mayor nivel de dificultad en Pérez Echeverría et al. (1986).

Por otro lado, al considerar toda la muestra, los porcentajes de corrección son muy similares a los obtenidos por Noelting (1980a, 1980b) en ítems equivalentes, según nivel de razonamiento proporcional requerido: IA (91,0% vs. 99,4% en Noelting), IB (94,0% vs. 95,6% en Noelting), IIA (77,0% vs. 78,2% en Noelting), IIB (41,2% vs. 48,6% en Noelting), IIIA (47,3% vs. 43,9% en Noelting), IIIB (26,5% vs. 15,6% en Noelting). Hay que hacer la salvedad de que la muestra de Noelting es de 6 a 16 años y la de este estudio es de 11 a 16 años; sin embargo, es notable la similitud en cuanto a la proporción de respuestas correctas.

Estrategias correctas

En la Tabla 5.5.3 se presenta el porcentaje de estudiantes que usa diferente tipo de estrategia correcta en cada curso y país, para cada ítem. Se considera que una estrategia es correcta en un ítem si aporta la solución matemáticamente válida.

Como se puede apreciar en la Tabla 5.5.3, en los Ítems 1 y 2 (niveles IA e IB, respectivamente) las estrategias más utilizadas fueron la comparación del valor absoluto del primero o segundo término de la razón y la comparación de diferencias entre los términos. Entre estas tres estrategias, los porcentajes suman más de dos terceras partes del estudiantado en estos ítems en cada curso y país.

Tabla 5.5.3. Porcentaje de estrategias correctas por ítem, según curso y país

Estrategia	Ítem	6º EGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR
Comparar primeros términos	1(IA)	71,8	54,3	72,1	69,2	50,0	58,1	40,0	53,8	50,9	51,9
Comparar segundos términos	2(IB)	51,3	45,5	59,5	76,9	51,6	60,6	47,8	53,8	40,0	34,5
Comparar diferencias	1(IA)	10,3	22,9	9,3	7,7	18,8	32,3	30,0	11,5	20,0	29,6
	2(IB)	17,9	42,4	27,0	15,4	41,9	15,2	28,3	26,9	27,5	37,9
Equivalencia a la unidad	3(IIA)	51,3	68,6	69,8	65,4	62,5	58,1	62,0	57,7	45,5	59,3
Equivalencia de razones	4(IIB)	17,9	24,2	35,1	30,8	64,5	24,2	54,3	23,1	30,0	41,4
Correspondencia	1(IA)				3,8						3,7
	2(1B)						3,0				
	3(IIA)			7,0			3,2				
	4(IIB)	5,1		2,7	3,8		6,1	2,2	3,8	2,5	
	5(IIIA)	7,7	11,4	16,3	11,5	43,8	19,4	12,0	26,9	20,0	25,9
Proporcionalidad	1(IA)							4,0	11,5	18,2	3,7
	2(IB)										
	3(IIA)	2,6		2,3	3,8	12,5	3,2	10,0	11,5	40,0	11,1
	4(IIB)		3,0	2,7	3,8	3,2	9,1	8,7	15,4	37,5	10,3
	5(IIIA)	2,6			3,8	6,3		10,0	3,8	30,9	11,1
	6(IIIB)			5,4		9,7	3,0	8,7	7,7	30,0	10,3

En el Ítem 3 (nivel IIA), más de la mitad de los estudiantes de cada curso identifican que en las razones representadas existe una relación de equivalencia a la unidad, y excepto en 4ºESO, otras estrategias de mayor nivel de razonamiento proporcional fueron usadas por menos del 12,5%. En el Ítem 4 (nivel IIB), predomina utilizar la equivalencia de razones; pero, a excepción de los cursos 2º y 3º de la ESO y 10º de ED, menos de las dos quintas partes de cada curso utilizaron esta estrategia. Además, a excepción de 4ºESO, menos de una quinta parte por curso emplearon estrategias de mayor nivel de razonamiento proporcional.

En el Ítem 5 (nivel IIIA), aparecen las estrategias de correspondencia y proporcionalidad, pero con pequeña frecuencia (a excepción de 2ºESO), que aumenta en los cursos superiores. El Ítem 6 (nivel IIIB) solo se puede resolver correctamente utilizando la proporcionalidad, pero a excepción de 4ºESO, menos del 11% de estudiantes por curso utilizaron esta estrategia. A partir del Ítem 3, entre 30% y 40% de estudiantes españoles de 4ºESO emplearon la proporcionalidad. En la investigación de Pérez Echeverría et al. (1986) tan sólo el 12,5% de los estudiantes del último curso de bachillerato emplearon estrategias proporcionales en la tarea de nivel 4 de dificultad; siendo superior el porcentaje obtenido (30,0%) en este estudio con estudiantes españoles de menor edad (4ºESO).

Para tener una visión más completa del uso de estrategias correctas, en la Tabla 5.5.4 se presentan los totales de estrategias correctas para cada ítem en cada curso y país. Se puede apreciar, que conforme aumenta el nivel de razonamiento (según Noelting) en el ítem, disminuyen los porcentajes de estrategias correctas utilizadas, sobre todo del nivel IIA en adelante, lo que es razonable puesto que las estrategias que son válidas en estos ítems requieren un nivel mayor de razonamiento proporcional. En los Ítems 1 y 2, que se pueden resolver correctamente mediante la comparación del valor absoluto de los términos de las razones y comparación de sus diferencias, los porcentajes de estrategias correctas son similares por curso, con una diferencia aproximada de 10% entre un ítem y otro.

Tabla 5.5.4. Total de estrategias correctas por ítem, según curso y país

Ítems	Nivel Noelting	6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR
1	IA	82,1	77,2	81,4	80,7	68,8	90,4	74,0	76,8	89,1	88,9
2	IB	69,2	87,9	86,5	92,3	93,5	78,8	78,3	88,4	77,5	79,3
3	IIA	53,9	68,6	79,1	69,2	75,0	64,5	72,0	69,2	85,5	70,4
4	IIB	23,0	27,2	40,5	38,4	67,7	39,4	65,2	42,3	70,0	51,7
5	IIIA	10,3	11,4	16,3	15,3	50,1	19,4	22,0	30,7	50,9	37,0
6	IIIB			5,4		9,7	3,0	8,7	7,7	30,0	10,3

Los porcentajes de estrategias correctas aumentan (o se mantienen similares) con el curso. Hasta el nivel IIB, más de la mitad de estudiantes por curso y país realizan estrategias correctas; sin embargo, a partir de este nivel hay cursos que no alcanzan el 50% de estrategias correctas. Desde el nivel IIA, los estudiantes españoles obtienen porcentajes mayores de estrategias correctas respecto a los estudiantes costarricenses, excepto en 6ºEGB, donde los costarricenses obtienen resultados levemente superiores.

Estrategias incorrectas

Para completar el análisis de estrategias y comprender mejor los puntos difíciles en los diferentes ítems, se presenta la Tabla 5.5.5, con los porcentajes de diferentes estrategias incorrectas por curso y país. Una estrategia se considera incorrecta si es incorrecta en cualquier ítem o proporciona respuestas incorrectas en ítems específicos.

Tabla 5.5.5. Porcentaje de estrategias incorrectas por ítem, según curso y país

Estrategia	Ítems	6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR
Comparar totales	Todos	4,3	3,8	2,2	3,2	2,1	0,5	1,0	1,9	0,6	2,3
Comparar primeros términos	2 a 6	20,0	10,0	15,7	12,3	4,5	11,9	9,7	13,1	6,2	9,1
Comparar segundos términos	1,3,4,5,6	5,6	2,9	6,4	4,6	3,8	3,2	3,0	4,6	1,9	2,9
Comparar diferencias	3 a 6	25,0	40,3	16,3	25,0	19,2	30,2	17,8	21,2	15,4	23,8
Equivalencia a la unidad	1,2,5,6	1,7	1,0	0,8	1,3	2,1	1,0	0,0	1,3	0,8	4,8
Equivalencia de razones	5 y 6	5,2	7,4	2,5	3,9	6,4	3,1	1,1			
Confusas	Todos	6,4	3,4	6,9	2,6	2,1	2,7	5,2	2,5	1,9	0,6
No matemáticas	Todos	4,3	1,4	1,4	2,5		2,6	1,7		1,1	
No responde	Todos	4,3	3,4	5,8	5,8	11,0	7,8	14,2	11,6	10,9	9,7

La estrategia incorrecta más utilizada fue la comparación de las diferencias entre los dos términos de las razones (que es correcta solo para los Ítems 1 y 2). Se ha usado en los Ítems del 3 a 6, que requieren estrategias multiplicativas, por estudiantes que no alcanzan el nivel de razonamiento proporcional requerido para resolverlas (Tourniaire y Pulos, 1985). Un ejemplo se muestra a continuación.

> E458: Porque en ambos hay un vaso menos de agua que de zumo de limón (Ítem 6, opción incorrecta).

El uso de esta estrategia aumenta a mayor nivel de dificultad del ítem. Se interpreta, que al igual que en Pérez Echeverría et al. (1986), algunos estudiantes que emplearon estrategias multiplicativas en ítems sencillos volvieron a las aditivas en los problemas con mayor nivel de dificultad. Puede notarse, también, que esta estrategia es más frecuente en estudiantes costarricenses y se empleó más en el Ítem 6, sobre todo por estudiantes de 6ºEGB (46,2% estudiantes españoles y 72,7% costarricenses). En Pérez Echeverría et al. (1986), en la tarea de nivel 4 de dificultad, el 65% de los estudiantes de 8ºEGB usaron estrategias aditivas; resultados parecidos se obtuvieron en este estudio en el Ítem 6 (nivel 4), con estudiantes de edad similar (63,6% en 8ºEGB y 61,3% en 2ºESO).

Aunque en menor porcentaje, destaca también la comparación de los primeros términos de las dos razones, especialmente en el Ítem 4 (por ejemplo, E57), donde hay equivalencia entre razones. Fue usada en este ítem por el 38,5% de los estudiantes españoles y el 18,2% de los costarricenses de 6ºEGB.

E57: Porque Juan ha mezclado más limón que Elena (Ítem 4, opción incorrecta).

También aparecen estrategias confusas, en las que no queda claro cómo se obtuvo la respuesta; otras que emplean criterios subjetivos (no matemáticas), donde no se utiliza alguna operación matemática; así como respuestas donde no se argumenta la opción seleccionada. De los Ítems 1 al 4 los porcentajes no superaron el 20%; pero encontramos porcentajes mayores en los Ítems 5 y 6, sobresaliendo un mayor número de respuestas en blanco (estudiantes que no justificaron su respuesta), lo cual es normal debido a que son tareas de mayor dificultad. El total de estrategias incorrectas se presenta en la Tabla 5.5.6.

Tabla 5.5.6. Porcentaje total de estrategias incorrectas por ítem, según curso y país

Ítems	Nivel Noelting	6ºEGB		7ºEGB/1ºESO		8ºEGB/2ºESO		9ºEGB/3ºESO		10ºED/4ºESO	
		CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.
1	IA	22,8	17,9	19,3	18,6	9,6	31,2	23,2	26	11,1	10,9
2	IB	12,1	30,8	7,7	13,5	21,2	6,5	11,6	21,7	20,7	22,5
3	IIA	31,4	46,1	30,8	20,9	35,5	25	30,8	28	29,6	14,5
4	IIB	72,8	77	61,6	59,5	60,6	32,3	57,7	34,8	48,3	30
5	IIIA	88,6	89,7	84,7	83,7	80,6	49,9	69,3	78	63	49,1
6	IIIB	100	100	100	94,6	97	90,3	92,3	91,3	89,7	70

Lógicamente el comportamiento global es complementario al de las estrategias correctas, siendo más numerosas las incorrectas en los ítems de nivel superior, especialmente en 6ºEGB. El porcentaje global de estrategias incorrectas disminuye por curso, aunque es muy alto todavía en el último curso en los Ítems 5 y 6 (Niveles IIA y IIIB, según Noelting).

El desarrollo de estas estrategias tiene bastante coincidencia en los dos países, con más variación por ítem, dentro de cada curso en España que en Costa Rica.

Nivel de razonamiento proporcional

En la Tabla 5.5.7 se presentan los porcentajes de estudiantes en cada nivel de razonamiento proporcional de Noelting (1980a, 1980b), por curso y país. Para calcular el nivel que corresponde al estudiante se considera que haya resuelto correctamente el ítem asociado a dicho nivel (es decir, que proporcione en el ítem respuesta y argumento correcto). Se añade un Nivel 0, que corresponde a estudiantes que, habiendo completado los ítems, no resolvieron correctamente ninguno de ellos, por fallar en la estrategia o la respuesta. Se observa que en este nivel se presenta un porcentaje importante (entre 11,3% y 17,5%) en todos los cursos, lo que indica las dificultades que todavía tienen estos estudiantes al resolver tareas que requieran razonamiento proporcional. Por otro lado, son muy pocos los estudiantes que alcanzan el nivel superior IIIB, ni siquiera en el último curso, habiendo coincidencia en los dos países.

Tabla 5.5.7. Porcentaje de estudiantes según nivel de razonamiento proporcional alcanzado, según curso y país

Ítems	6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR	Esp.	CR
Nivel 0	16,7	11,8	11,3	11,5	17,5	14,1	14,6	13,5	11,6	10,7
IA	17,9	11,8	6,25	11,5	0,0	12,5	6,3	5,8	4,2	10,7
IB	26,9	30,9	22,5	26,9	14,3	21,9	10,4	23,1	7,4	17,9
IIA	23,1	29,4	33,75	25,0	14,3	21,9	29,2	23,1	29,5	19,6
IIB	11,5	13,2	16,25	17,3	27,0	18,8	28,1	17,3	20,0	21,4
IIIA	3,8	2,9	8,75	5,8	22,2	9,4	8,3	13,5	18,9	14,3
IIIB			1,25	1,9	4,8	1,6	3,1	3,8	8,4	5,4

En los cursos de 6ºEGB de los dos países, menos de la mitad de los estudiantes consigue al menos el nivel IIA (Operacional concreto inferior); en estudiantes españoles solo el 38,5% y en costarricenses el 45,5%. Esto implica que la mayoría de estudiantes se ubica en la etapa intuitiva, donde no llegan a comparar los cuatro términos de las dos fracciones. Puesto que los estudiantes en este curso tienen 11 o 12 años, se esperaría que la mayoría alcanzaran el nivel IIA de Noelting (1980a, 1980b).

En los cursos equivalentes de 1ºESO y 7ºEGB (12-13 años), el 60% y 50% de los estudiantes en España y Costa Rica, respectivamente, logran al menos un nivel IIA; sin embargo, se esperaría un nivel IIIA, correspondiente a las operaciones formales.

En los cursos de 2ºESO, 3ºESO y 4ºESO (13 a 16 años) más de las dos terceras partes de los estudiantes españoles logran al menos un nivel de IIA y entre un 52% y un 61% de los estudiantes de cursos equivalentes en Costa Rica. En estas edades habría que esperar el nivel de razonamiento proporcional IIIB en el curso superior, según Noelting (1980a, 1980b), que pocos estudiantes alcanzan.

En Noelting (1980a,1980b), los porcentajes de estudiantes con edades similares se ubican en niveles de razonamiento proporcional superior: estudiantes de 12 años (6ºEGB) el 82,4% se ubica entre los niveles IIA y IIIA, de 13 años (7ºEGB/1ºESO) el 83,8% está entre IIB y IIIA, de 14 años (8ºEGB/2ºESO) el 80% se ubica entre los niveles de IIIA y IIIB, de 15 años (9ºEGB/3ºESO) la totalidad y 16 años (10ºED/4ºESO) casi la totalidad (94,7%) alcanzan como mínimo el nivel IIB.

En resumen, aunque aumenta el porcentaje de los niveles de razonamiento superior, según el curso escolar, la edad a la que se alcanzan, al menos para esta muestra y para el tipo de tareas propuestas en este estudio, es algo superior a lo supuesto por dicho autor.

5.5.5. Discusión y conclusiones

El análisis de las respuestas a las tareas planteadas sugiere que los estudiantes de la muestra realizan sin dificultad los ítems correspondientes a los primeros niveles de razonamiento proporcional de Noelting (etapas IA y IB), donde emplean estrategias de comparación de los valores absolutos de los primeros o segundos términos de las razones o bien estrategias aditivas. Esto concuerda con los resultados de Vanluydt et al. (2022b), donde se concluye que al preferir relaciones aditivas, se tiene más éxito en problemas elementales de razonamiento proporcional. Dichas estrategias producen respuestas correctas en estos ítems, aunque no son válidas para los de nivel superior.

No se evidenció alguna dificultad asociada al uso de unidades discretas y mezcla continua, como se encontró en Boyer y Levine (2015); ya que en los dos primeros ítems casi la totalidad de la muestra obtuvo respuestas correctas; utilizándose las mismas unidades en todos los ítems. También, como se aprecia en los resultados obtenidos, se conserva la dificultad relativa de los problemas propuestos por Pérez Echeverría et al. (1986), aunque la variedad de estrategias correctas e incorrectas ha sido mayor que las identificadas por dichos autores.

Al igual que en He et al. (2018), se concluye que un porcentaje considerable de estudiantes son capaces de reconocer la proporcionalidad cuando las fracciones a comparar son equivalentes; sin embargo, se encuentra que fue más sencillo identificar las que son equivalentes a la unidad, donde más de las dos terceras partes de los estudiantes, sin importar curso y país, obtuvieron respuestas correctas, a diferencia de cuando las fracciones eran equivalentes pero distintas a la unidad (Ítem 4), donde solo los tres cursos españoles superiores sobrepasaron la mitad de respuestas correctas. El análisis de los niveles de razonamiento alcanzados en función del curso escolar (que corresponde a la diferente edad de los estudiantes) contradice las edades promedio en que se debieran alcanzar estos niveles en el estudio de Noelting (1980a, 1980b), donde se espera que el 50% de los estudiantes logren el nivel operacional formal inferior (IIIA) a los 12 años y 2 meses de edad, y la misma proporción a los 15 años y 1 mes, en el nivel IIIB, niveles que son alcanzados por un tamaño de muestra mucho menor.

Fueron pocos los estudiantes que alcanzaron el nivel IIIB, ni siquiera en los cursos 4ºESO/10ºED y apenas un 20% el nivel IIIA (unos pocos más en España); suponiendo que es porque la proporción de estudiantes usando estrategias correctas de correspondencia y proporcionalidad fue pequeña, menor en Costa Rica que en España. En este sentido, se recomienda a los profesores insistir con los estudiantes, sobre todo en los cursos 3ºESO/9ºED en que traten de resolver los problemas usando estas estrategias. Es importante también tener en cuenta en cada país el nivel de razonamiento proporcional más frecuente en cada curso, para adaptar las tareas propuestas a dicho nivel y ayudar al estudiante a progresar al inmediatamente superior.

Así en Costa Rica, el 45,5% de estudiantes de 6ºEGB y el 50% de 7ºEGB consigue al menos el nivel IIA operacional concreto. Entre un 52% y un 61% de los estudiantes de 8ºEGB a 10ºED alcanza este nivel en Costa Rica. En España, por otra parte, el 38,5% de los estudiantes de 6ºEGB y el 60% en 1ºESO razona al menos al nivel IIA. En los cursos de 2ºESO, 3ºESO y 4ºESO (13 a 16 años) más de las dos terceras partes de los estudiantes españoles logran al menos un nivel IIA.

Es importante tener en cuenta estos resultados en la enseñanza, con el propósito de mejorar, en lo posible, este razonamiento en el estudiantado, debido a su importancia en el inicio del razonamiento algebraico elemental y el desarrollo del pensamiento formal (Burgos y Godino, 2019; Kieren, 2020; Obando et al., 2014).

5.6. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES EN URNAS Y RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

5.6.1. Introducción

La probabilidad se enseña actualmente en la Educación Primaria y Secundaria en muchos países, como Costa Rica (MEP, 2012) y España (MECD, 2014; 2015; MEFP, 2022a; 2022b). El objetivo es dotar al estudiantado de una sólida cultura probabilística (Gal, 2005) para comprender los fenómenos aleatorios y tomar decisiones adecuadas en situaciones de incertidumbre (Alsina et al., 2020). Esta necesidad se hizo evidente en la pandemia debida al COVID, donde la discusión de modelos probabilísticos para evaluar la situación y los riesgos potenciales asociados a diferentes decisiones políticas fue predominante en los medios de comunicación (Gal y Geiger, 2022; Muñiz-Rodríguez et al., 2020).

El logro del aprendizaje de los estudiantes requiere una evaluación previa de sus capacidades para afrontar las tareas que se les proponen en el aula. En esta sección se presenta el trabajo centrado en la comparación de probabilidades, que es un tema de considerable interés en los primeros estudios sobre razonamiento probabilístico, en un periodo en el que la mayoría de los participantes en estas investigaciones no habían recibido educación formal en probabilidad (Bryant y Núñez, 2012; Hernández-Solís, Gea et al., 2023; Nikiforidou, 2018; Pratt y Kazak, 2018). Estas investigaciones sugieren una fuerte relación entre el éxito en la comparación de probabilidades y el razonamiento proporcional de los estudiantes. Sin embargo, pocos estudios examinaron ambas competencias de forma sistemática y simultánea. Tampoco encontramos investigaciones sobre el tema en Costa Rica, ni estudios que comparen los resultados en este país con los de estudiantes españoles.

Para llenar este vacío, uno de los objetivos del estudio fue evaluar la competencia para comparar probabilidades y su relación con el nivel de razonamiento proporcional, en una muestra de estudiantes costarricenses de 11 a 16 años y otro grupo similar de estudiantes españoles. Más concretamente, se trata de responder las siguientes preguntas de investigación:

1. Para cada nivel escolar y país, ¿Cuál es la dificultad relativa de comparar probabilidades en urnas para problemas de diferente nivel de razonamiento proporcional según Noelting (1980a, 1980b)? ¿Coincide esta dificultad con la de comparación de razones en problemas del mismo nivel de razonamiento?
2. ¿Qué estrategias usan los estudiantes en diferentes cursos y ambos países para comparar razones y probabilidades? ¿Hay estrategias incorrectas específicas de la comparación de probabilidades?

Para poder responder a estas preguntas, en el cuestionario de evaluación se añadieron algunos ítems de este tipo, similares a los utilizados por Green (1982) y Cañizares (1997). En lo que sigue se detalla la estructura de estos ítems, las estrategias previstas en el análisis a priori y los resultados, que han dado origen al siguiente artículo publicado, del cual, en las siguientes secciones se han traducido los resultados y conclusiones:

5.6.2. Estructura de los ítems

Los ítems analizados en esta sección son los seis problemas de comparación de razones analizados en la Sección 5.5.2 y seis problemas de comparación de probabilidades en urnas, semejantes a los utilizados por Cañizares et al. (1997) con niveles crecientes de razonamiento proporcional (Ver Tabla 5.6.1).

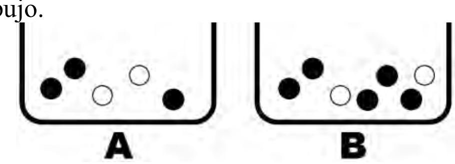
En los ítems deben compararse dos razones o probabilidades (a_1,b_1) y (a_2,b_2). El primer término de cada par es el antecedente o dividendo de la razón (vasos de zumo/vasos de agua) y el segundo término es su consecuente o divisor, en los ítems de comparación de proporciones; mientras que en los ítems de comparación de probabilidades, estos términos representan el número de casos favorables y desfavorables, respectivamente.

En el Ítem 1 (Figura 5.5.1) las razones son (2,3) y (1,3), y puede resolverse comparando sólo los antecedentes, porque los consecuentes son idénticos. Del mismo modo, el Ítem 7 (Figura 5.6.1) puede resolverse comparando sólo los casos favorables. Ambos ítems son del mismo nivel de razonamiento proporcional (IA, Intuitivo inferior) y mismo nivel de dificultad (nivel 1).

Tabla 5.6.1. Niveles de razonamiento proporcional (Noelting 1980a, 1980b) y niveles de dificultad (Pérez Echeverría et al., 1986) en los ítems

Ítem	Tipo de ítem	Composición (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)	Nivel de razonamiento proporcional	Nivel de dificultad	Cuestionario
1	Comparar razones	(2,3) vs (1,3)	IA. Intuitivo inferior	1	A
2	Comparar razones	(5,1) vs (5,4)	IB. Intuitivo medio	1	B
3	Comparar razones	(2,2) vs (4,4)	IIA. Operacional concreto inferior	2	A
4	Comparar razones	(3,1) vs (6,2)	IIB. Operacional concreto superior	2	B
5	Comparar razones	(3,1) vs (4,2)	IIIA. Operacional formal inferior	3	A
6	Comparar razones	(3,2) vs (4,3)	IIIB. Operacional formal superior	4	B
7	Comparar probabilidades	(3,2) vs (5,2)	IA. Intuitivo inferior	1	A
8	Comparar probabilidades	(4,1) vs (4,3)	IB. Intuitivo medio	1	B
9	Comparar probabilidades	(2,2) vs (3,3)	IIA. Operacional concreto inferior	2	A
10	Comparar probabilidades	(2,6) vs (1,3)	IIB. Operacional concreto superior	2	B
11	Comparar probabilidades	(3,6) vs (1,3)	IIIA. Operacional formal inferior	3	A
12	Comparar probabilidades	(3,4) vs (4,5)	IIIB. Operacional formal superior	4	B

Ítem 7. En la caja A hay 3 fichas negras y 2 fichas blancas. En la caja B hay 5 fichas negras y 2 fichas blancas. Observa el dibujo.



Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿En cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
( ) **Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B**. **(Opción correcta)**
( ) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Figura 5.6.1. Ejemplo de ítem de comparación de probabilidades

5.6.3. Categorías de análisis de estrategias

En primer lugar, se separan las estrategias en correctas e incorrectas, partiendo de aquellas definidas en investigaciones anteriores como Cañizares et al. (1997), Green (1982) y Noelting (1980a, 1980b), para luego completarlas con el análisis de contenido (Krippendorff, 2013) de las obtenidas en nuestro estudio.

A continuación, se describen las distintas estrategias utilizadas en la comparación de probabilidades con ejemplos de respuestas de los estudiantes en cada categoría. Como se indicó anteriormente, los estudiantes se denotan por "Ex", donde "x" es el orden del estudiante en el archivo de datos. Las estrategias usadas en la comparación de razones se describieron en la Sección 5.5.3.

Comparar casos posibles. Comparando el total de fichas en ambas urnas. Esta estrategia es incorrecta para todos los ítems y fue descrita por Green (1982).

E1: Porque en la caja B hay menos fichas. Por lo tanto, será más fácil sacar una negra que en la caja A, porque en la A hay más fichas (Ítem 11, opción B).

Comparar casos favorables. Este procedimiento sólo proporciona resultados correctos cuando los casos desfavorables son iguales ($b_1 = b_2$) (por ejemplo, E8). Los estudiantes que ya se encuentran en el nivel intuitivo inferior (IA) de Noelting pueden utilizarlo. Se debe diferenciar ambos términos de la proporción. En este estudio, proporciona respuestas correctas a los Ítems 1 y 7. Algunos estudiantes aplicaron el método incorrectamente a otros problemas, como E42.

E8: Porque hay más bolas negras en B (Ítem 7, opción B).
E42: Porque en la caja B hay más bolas negras que en la caja A; por lo tanto, B es más probable (Ítem 9, opción B).

Comparar casos desfavorables. Este procedimiento proporciona respuestas correctas si los primeros términos son idénticos ($a_1 = a_2$). El estudiante debe comprender que con el mismo numerador (mismo número de casos favorables), el cociente es mayor (la probabilidad es mayor) si el denominador (número de casos desfavorables) es menor. Esta estrategia corresponde al nivel intuitivo intermedio (IB) de Noelting y da respuestas correctas a los Ítems 2 y 8 (por ejemplo, E54), aunque algunos estudiantes la utilizaron incorrectamente, por ejemplo, E25.

E54: Porque hay más fichas blancas en la caja B (Ítem 8, opción A).
E25: Porque hay el mismo número de bolas blancas (Ítem 7, opción C).

Comparar las diferencias entre los casos favorables y desfavorables. Considerando los cuatro términos del problema, pero se realizan comparaciones aditivas analizando la diferencia entre estos términos. Según Noelting (1980a, 1980b), esta estrategia indica que el estudiante construye la razón, percibe la diferencia entre los términos de cada razón y selecciona el de mayor diferencia. La estrategia es correcta en los Ítems 1 y 2, 7 y 8 de los cuestionarios. Algunos estudiantes la utilizaron incorrectamente (por ejemplo, E655).

E1: Una ficha negra es más probable en B porque hay más fichas negras que blancas (Ítem 7, opción B).
E655: Porque sólo hay una diferencia de 1 entre las dos cajas (Ítem 12, opción C).

Razón de equivalencia a la unidad. El estudiante compara una razón (a_1,b_1) con la otra (a_2,b_2), es decir, aplica una operación multiplicativa a los términos de ambas razones, descubriendo una equivalencia a la unidad (deduciendo la equiprobabilidad en tareas de comparación de probabilidades). Mientras que las estrategias anteriores implican comparar los términos de cada cociente o sus diferencias, en este caso se deben considerar los términos de ambos cocientes. Proporciona respuestas correctas cuando los términos de cada cociente son idénticos. Esta estrategia corresponde al nivel operativo concreto inferior (IIA) de Noelting. En el estudio, da respuestas adecuadas a los Ítems 3 y 9.

E446: En ambas urnas hay la misma cantidad de fichas blancas y negras (Ítem 9, opción C).

Relación de equivalencia entre razones. El estudiante compara una razón con la otra mediante una operación multiplicativa, encontrando la equivalencia de ambas razones. Esta estrategia conduce a respuestas correctas sólo cuando los cocientes pertenecen a la misma clase de equivalencia de fracciones. El procedimiento corresponde al nivel operativo concreto superior de Noelting (IIB) y da respuestas correctas en los Ítems 4 y 10, y se aplicó incorrectamente en algunos casos (por ejemplo, E134).

E14: Porque en la urna A hay el triple de fichas blancas que negras y lo mismo en la urna B (Ítem 10, opción C).

E134: Porque en ambas urnas hay la mitad de bolas negras que de blancas (Ítem 11, opción C).

Correspondencia entre los términos de cada razón. El estudiante aplica un criterio de proporcionalidad entre los términos de cada razón para determinar cuál de estas proporciones es menor. Esta estrategia da respuestas correctas si los términos de las razones a comparar son múltiplos. Corresponde al nivel operativo formal inferior (IIIA), resuelve los Ítems 5 y 11 y casi siempre se utilizó correctamente.

E17: Porque la urna A tiene la mitad de fichas negras que blancas y la urna B tiene un tercio de fichas negras que blancas (Ítem 11, opción A).

Proporcionalidad. Las razones se reducen a fracciones de denominador común y se comparan. Con esta estrategia se puede comparar cualquier razón y dar respuestas correctas para cualquier tarea de comparación de razones. Corresponde al nivel operativo formal superior de Noelting (IIIB) y resuelve todos los ítems del cuestionario. Nunca se utilizó incorrectamente.

E303: La probabilidad de obtener una ficha negra es del 50% en ambas urnas, ya que el número de fichas es el mismo para ambos colores (Ítem 9, opción C).

Estrategias sesgadas. Algunos estudiantes proporcionaron estrategias que sugerían la existencia de sesgos probabilísticos. Estos razonamientos incorrectos incluían el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988), el enfoque del resultado (Konold, 1989) y juzgar la probabilidad por las propiedades físicas del generador aleatorio (descritas en el Capítulo 2). En el siguiente ejemplo, E614 sugiere equiprobabilidad en ambas urnas en el Ítem 7, aunque es consciente de que en una urna hay más casos favorables.

E614: En la urna B, obviamente hay más fichas negras; pero hay posibilidad de negra en ambas urnas, por lo que la probabilidad es la misma (Ítem 7, opción C).

Otros estudiantes no interpretaron el problema de forma probabilística. En su lugar, entendieron que debían predecir el resultado del experimento aleatorio. Esta interpretación es incorrecta, ya que los sucesos aleatorios son impredecibles, aunque podamos estimar su probabilidad. Konold (1989) denominó a este razonamiento el *enfoque en el resultado*:

> E10: Puede haber resultados diferentes porque se elige con los ojos cerrados. Aunque la urna con mayor número sea más probable, esto no influye en los resultados (Ítem 9, opción C).

Unos pocos estudiantes aludieron a consideraciones físicas. Por ejemplo, E103 supuso que un pequeño movimiento en las urnas afectaría a los resultados, debido a la posición inicial de las fichas:

> E103: Porque cuando agitamos la urna, la bola blanca subirá a la parte superior de la urna A, pero aún existe la oportunidad de que salga una bola negra. Cuando agitamos la urna B, las bolas negras subirán a la parte superior, pero sigue existiendo la posibilidad de que salga la bola blanca (Ítem 8, opción C).

Finalmente, algunas estrategias fueron confusas y otros estudiantes no explicaron su procedimiento.

5.6.4. Resultados

En esta sección se presentan los resultados para cada grupo de preguntas planteadas en la introducción. A continuación, se responderá a la primera serie de preguntas para cada nivel escolar y país: ¿Cuál es la dificultad relativa de comparar probabilidades en urnas para problemas de diferente nivel de razonamiento proporcional según Noelting (1980a, 1980b)? ¿Coincide esta dificultad con la de comparar proporciones en problemas del mismo nivel de razonamiento?

Respuestas correctas por ítem

Para dar una respuesta a los anteriores interrogantes, en la Tabla 5.6.2 se presentan los porcentajes de respuestas correctas para los ítems de comparación de probabilidades y en la Tabla 5.6.3 para cada ítem de comparación de razones.

Tabla 5.6.2. Porcentaje de estudiantes que seleccionan la respuesta correcta en los ítems de comparación de probabilidades por país y curso escolar

Ítem	Nivel de Noelting	6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		S	CR	S	CR	S	CR	S	CR	S	CR
7	1A	79,5	85,7	86,0	88,5	84,4	93,5	80,0	88,5	80,0	81,5
8	1B	92,3	93,9	86,5	80,8	90,3	87,9	93,5	84,6	87,5	96,6
9	IIA	53,8	51,4	72,1	69,2	96,9	61,3	84,0	80,8	81,8	74,1
10	IIB	17,9	18,2	35,1	23,1	45,2	24,2	37,0	26,9	65,0	41,4
11	IIIA	35,9	45,7	30,2	42,3	59,4	48,4	44,0	61,5	56,4	51,9
12	IIIB	56,4	69,7	45,9	61,5	45,2	51,5	43,5	57,7	15,0	55,2

Tabla 5.6.3. Porcentaje de estudiantes que seleccionan la respuesta correcta en los ítems de comparación de razones por país y curso escolar

Ítem	Noelting level	6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		S	CR	S	CR	S	CR	S	CR	S	CR
1	IA	89,7	91,4	88,4	92,3	93,8	90,3	86,0	92,3	94,5	96,3
2	IB	87,2	90,9	91,9	96,2	96,8	97,0	95,7	100,0	92,5	96,6
3	IIA	64,1	65,7	79,1	69,2	84,4	80,6	82,0	76,9	94,5	70,4
4	IIB	28,2	30,3	40,5	42,3	71,0	48,5	71,7	53,8	77,5	58,6
5	IIIA	41,0	40,0	46,5	57,7	59,4	48,4	36,0	50,0	58,2	48,1
6	IIIB	17,9	15,2	27,0	23,1	35,5	18,2	32,6	26,9	37,5	27,6

Las tareas clasificadas en los niveles IA y IB (nivel intuitivo inferior y medio en la clasificación de Noelting, 1980a, 1980b) resultaron muy fáciles para los estudiantes de la muestra, que las resolvieron correctamente en un alto porcentaje (al menos el 80% en cualquier país) en todos los grados, para ambos tipos de ítems. Estos ítems se pueden resolver comparando únicamente el numerador o el denominador de los cocientes (casos favorables o desfavorables en la comparación de probabilidades).

La dificultad aumenta en los problemas de nivel IIA (equivalencia con la clase unitaria), que es ligeramente superior en la comparación de los ítems de probabilidad de los cursos 6ºEGB y 1ºESO/7ºEGB. En estos ítems, los numeradores (casos favorables) y denominadores (casos desfavorables) son idénticos en cada mezcla (o urna). La dificultad en cada nivel de la comparación de razones disminuye, en general, con el curso, especialmente en España, con un 94,5% de respuestas correctas a los ítems de nivel IIA en 4ºESO. No hay un patrón tan claro de éxito en los ítems de probabilidad, aunque mejoran con el curso escolar, pues presentan oscilaciones. Sin embargo, el porcentaje de estudiantes que seleccionan las respuestas correctas es mayor en España (en comparación con Costa Rica), principalmente en los ítems de probabilidad.

El éxito en los problemas de nivel IIB (clase de equivalencia de cualquier razón) aumenta progresivamente por curso, con más fuerza en la comparación de razones y en España (respecto a Costa Rica). El patrón no es tan claro con los ítems de nivel IIIA, y el nivel IIIB es demasiado difícil en todos los cursos y en ambos países; sin embargo, el porcentaje de estudiantes españoles que seleccionan las respuestas correctas es ligeramente superior en los ítems de comparación de razones (en comparación con Costa Rica). Además, en la comparación de probabilidades, el Ítem 10 (nivel IIB) es más difícil que el Ítem 11 (IIIA) en todos los cursos de Costa Rica y en algunos cursos de España. En general, la dificultad fue ligeramente superior en la comparación de probabilidades (Ítems 7 a 12) que en la comparación de razones (Ítems 1 a 6) en ambos países.

Estrategias correctas

Para analizar qué estrategias correctas utilizan los estudiantes de los distintos cursos y países en la comparación de razones y probabilidades, se presentan en las Tablas 5.6.4 y 5.6.5 el porcentaje de quienes utilizan estrategias correctas en los distintos ítems, clasificados por curso y país.

Destaca la alta frecuencia de comparación de un solo término en cada razón (comparando sólo casos favorables o desfavorables) en los ítems de nivel IA y IB de comparación de probabilidades, donde estas estrategias son correctas. Se observa que el porcentaje de estudiantes que utilizan estas estrategias es menor en la comparación de probabilidades.

Las comparaciones aditivas (diferencias entre el número de casos favorables y desfavorables en probabilidad o entre el primer y el segundo término de las razones) son válidas en ítems de niveles más bajos, por ejemplo, en los Ítems 1 y 2, 7 y 8 de los cuestionarios. El uso de estas estrategias es algo mayor en los ítems de probabilidad en ambos países. En ítems de niveles operativos concretos IIA y IIB, los estudiantes cambiaron a procedimientos de equivalencia a unidad o equivalencia a razón, este último con menor frecuencia en la comparación de probabilidad, en particular, en Costa Rica.

Tabla 5.6.4. Porcentajes de estrategias correctas en la comparación de probabilidades por ítem, según curso y país

Ítem	Estrategia	Curso									
		6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		S	CR	S	CR	S	CR	S	CR	S	CR
7(IA)	Comparar casos favorables	53,8	48,6	60,5	57,7	28,1	54,8	44,0	57,7	30,9	44,4
	Comparar diferencias	25,6	34,3	34,9	30,8	34,4	38,7	36,0	26,9	32,7	29,6
	Correspondencia					3,1					
	Proporcionalidad		2,9		3,8	18,8		2,0	3,8	16,4	3,7
8(IB)	Comparar casos desfavorables	38,5	42,4	32,4	30,8	26,7	27,3	28,3	34,6	27,5	31,0
	Comparar diferencias	43,6	39,4	37,8	34,6	53,3	27,3	41,3	26,9	22,5	31,0
	Correspondencia						3,0			2,5	
	Proporcionalidad	2,6		8,1			9,1	8,7	7,7	17,5	3,4
9(IIA)	Equivalencia a la unidad	38,5	48,6	60,5	57,7	68,8	54,8	58,0	57,7	56,4	59,3
	Proporcionalidad	2,6	5,7	11,6	11,5	21,9	9,7	12,0	7,7	27,3	11,1
10(IIB)	Equivalencia a la razón	10,3	6,1	18,9	11,5	26,7	12,1	23,9	3,8	35,0	17,2
	Correspondencia	2,6					6,1		3,8		3,4
	Proporcionalidad	2,6	3,0	8,1	7,7	6,7	12,1	8,7	15,4	27,5	6,9
11(IIIA)	Correspondencia	2,6	14,3	9,3		37,5	12,9	12,0	30,8	9,1	7,7
	Proporcionalidad		5,7	4,7		21,9	12,9	4,0	3,8	32,7	7,7
12(IIIB)	Proporcionalidad			8,1		6,5	9,1	10,9	15,4	17,5	10,3

Tabla 5.6.5. Porcentajes de estrategias correctas en la comparación de razones por ítem, según curso escolar y país

Ítem	Estrategia	Curso									
		6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		S	CR	S	CR	S	CR	S	CR	S	CR
1(IA)	Comparar los primeros términos	71,8	54,3	72,1	69,4	50,0	58,0	40,0	54,0	50,9	51,9
	Comparar diferencias	10,3	22,9	9,3	7,7	18,8	32,3	30,0	11,5	20,0	29,6
	Correspondencia				3,8	3,0					3,7
	Proporcionalidad							4,0	11,5	18,2	3,7
2(IB)	Comparara los segundos términos	51,3	45,5	59,5	76,9	51,7	60,6	47,8	53,8	40,0	34,5
	Comparar diferencias	17,9	42,4	27,0	15,4	41,9	15,2	28,3	26,9	27,5	37,9
	Correspondencia						3,0				
	Proporcionalidad							2,3	7,8	10	7
3(IIA)	Equivalencia a la unidad	51,1	68,5	69,8	65,6	62,5	58,1	62,0	57,7	45,5	59,3
	Correspondencia			7,0			3,2				
	Proporcionalidad	2,6		2,3	3,8	12,5	3,2	10,0	11,5	40,0	11,1
4(IIB)	Equivalencia a la razón	17,9	24,3	35,3	31,0	64,5	24,2	54,5	23,2	30,0	41,5
	Correspondencia	5,1		2,7	3,8		6,1	2,2	3,8	2,5	
	Proporcionalidad		3,0	2,7	3,8	3,2	9,1	8,7	15,4	37,5	10,3
5(IIIA)	Correspondencia	7,7	11,4	16,3	11,6	43,7	19,3	12,0	26,9	20,1	25,9
	Proporcionalidad	2,6			3,8	6,3		10,0	3,9	30,9	11,1
6(IIIB)	Proporcionalidad			5,5		9,7	3,0	8,7	7,7	30,0	10,4

Las estrategias más avanzadas, como la correspondencia o la proporcionalidad, aparecieron en menor porcentaje en todos los cursos, lo que indica que los estudiantes de cursos superiores aún no estaban familiarizados con estos métodos. Sin embargo, estos procedimientos fueron utilizados, mayormente, en la comparación de probabilidades en ambos países.

Estrategias incorrectas

Para analizar las estrategias incorrectas, en la Tabla 5.6.6 se presenta el porcentaje de estudiantes que utilizan estrategias incorrectas en los ítems de comparación de probabilidad y en la Tabla 5.6.7 los porcentajes en los ítems de comparación de razones, clasificados por curso y país.

Aunque el uso de cada estrategia incorrecta fue escaso en todos los ítems, sumando todas las estrategias erróneas por ítem, el porcentaje de estudiantes es notable. En particular, el porcentaje medio de estudiantes españoles que no explicaron su estrategia fue superior al de los estudiantes costarricenses, así como el porcentaje medio de las estrategias incorrectas en la comparación de probabilidades en 3ºESO.

Tabla 5.6.6. Porcentaje estrategias incorrectas al comparar probabilidades por curso y país

Ítem	Estrategia	Curso									
		6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		S	CR	S	CR	S	CR	S	CR	S	CR
7(IA)	Comparar casos posibles	2,7	5,7	2,3	7,7	3,1	3,2	2,0	7,8	5,5	7,4
	Comparar casos desfavorables	12,8	5,7			12,5	3,3	4,0		5,5	
	Equivalencia a la razón									1,8	
	Estrategias sesgadas	5,1	2,9					8,0	3,8	5,4	11,2
	Confusas			2,3				4,0		1,8	3,7
8(IB)	Comparar casos posibles	2,4	3,0		3,8	3,3	3,0	4,3	11,5		6,9
	Comparar casos favorables	10,3	6,1	18,9	23,1	6,6	21,2	15,2	7,7	22,5	13,9
	Estrategias sesgadas	2,6				3,3	6,1		3,9	7,5	6,9
	Confusas		9,1	2,8	7,7	6,8	3,0	2,2	7,7		6,9
9(IIA)	Comparar casos posibles	7,7	14,2	2,4			9,7	4,0		7,3	7,4
	Comparar casos favorables	23,0	20,0	9,3	26,9		12,9	8,0	19,2	1,8	11,1
	Comparar casos desfavorables	10,3		2,3		3,1				1,8	
	Comparar diferencias	7,7	2,9	9,3	3,9	3,1	3,2	6,0	3,8	1,8	
	Estrategias sesgadas	5,1		2,3		3,1	9,7	6,0	11,6	3,6	7,4
	Confusas	5,1	8,6	2,3				6,0			3,7
10(IIB)	Comparar casos posibles	17,9	27,2	10,9	15,5	33,5	15,1	21,7	42,4	2,5	27,6
	Comparar casos favorables	10,3	15,2	16,2	11,5	3,3	15,1	10,9	7,8	15,0	6,9
	Comparar casos desfavorables	33,2	18,2	32,4	26,9	13,3	27,3	15,2	11,6	10,0	13,8
	Comparar diferencias	12,8	24,2	8,1	23,1	10,0	6,1	6,5	3,8	2,5	20,8
	Equivalencia a la unidad					3,3			3,8		
	Estrategias sesgadas	7,7		2,7	3,8	3,3		10,9	3,8	7,5	3,4
	Confusas	2,6	6,1	2,7			6,1	2,2	3,8		
11(IIIA)	Comparar casos posibles	12,8	20,0	18,5	23,1	6,2	32,3	8,0	7,7	10,9	22,3
	Comparar casos favorables	25,6	20,0	11,6	26,9	9,4	16,1	24,0	15,4	14,5	33,3
	Comparar casos desfavorables	33,3	5,7	30,2	30,8	6,3	12,9	16,0	15,5	12,8	14,2
	Comparar diferencias	23,1	25,7	14,0	19,2	6,3	3,2	20,0	11,5	9,1	3,7
	Equivalencia a la unidad						3,2				
	Equivalencia a la razón			7,0				2,0			
	Estrategias sesgadas	2,6	2,9			12,4	6,5	10,0	11,5	10,9	7,4
	Confusas		5,7	4,7				4,0	3,8		3,7
12(IIIB)	Comparar casos posibles	17,9	9,1	5,4	3,5	22,6	6,1	8,6	11,5	7,5	3,4

Comparar casos favorables	15,4	30,3	24,3	13,9	12,9	27,2	13,0	11,5	17,5	13,8
Comparar casos desfavorables	7,7	9,1	10,8	10,3	3,2	9,1	6,5	7,8	2,5	10,4
Comparar diferencias	30,8	45,4	43,2	13,8	41,9	33,2	17,4	38,5	12,5	48,3
Equivalencia a la unidad								3,8		
Equivalencia a la razón					3,2					
Correspondencia	5,1						2,2		5,0	
Estrategias sesgadas	12,8		2,8	37,9	6,5	6,2	21,8	11,5	15,0	10,4
Confusas	10,3	6,1	5,4	10,3	3,2	9,1	19,6		22,5	3,4

Tabla 5.6.7. Porcentaje de estrategias incorrectas al comparar razones por curso y país

Ítem	Estrategia	Curso									
		6ºEGB		1ºESO/7ºEGB		2ºESO/8ºEGB		3ºESO/9ºEGB		4ºESO/10ºED	
		S	CR	S	CR	S	CR	S	CR	S	CR
1(IA)	Comparar totales	7,7	11,4	2,3	3,8	9,4		4	3,8	1,8	
	Comparar segundo término			2,3	7,7						
	Equivalencia a la unidad							2			
	Confusas	10,2	11,4	14	7,6	18,8	9,7	20	19,2	9	11,1
2(IB)	Comparar totales	2,6									6,9
	Comparar los primeros términos	15,4	3	8,1	3,8	3,2	12,1	6,5	3,8	2,5	10,3
	Equivalencia a la unidad		3								
	Confusas	12,8	6,1	5,4	3,9	3,2	9,1	15,2	7,7	20	3,4
3(IIA)	Comparar totales	7,7	2,9					2	7,7		
	Comparar los primeros términos	15,4	11,4	9,3	7,7	6,3	16,1	8	7,7	1,8	7,4
	Comparar segundos términos	2,6		2,3	3,8		3,2	2			
	Comparara diferencias	10,3	5,7	2,3	3,8		6,5			7,3	3,7
	Confusas	10,3	11,5	7	15,3	18,7	9,7	16	15,4	5,4	18,5
4(IIB)	Comparar totales	5,1	3	5,4							6,9
	Comparar los primeros términos	38,5	18,2	24,3	19,2	6,5	15,2	15,2	23,1	12,5	13,8
	Comparar segundos términos		3,0	5,4	3,8		9,1	4,3	3,8	2,5	6,9
	Comparara diferencias	23,1	48,5	16,2	23,1	1	24,2	4,3	19,2	5	17,2
	Confusas	10,3	0	8,1	15,3	6,4	12,2	10,8	11,5	10	3,4
5(IIIA)	Comparar totales		5,7			3,1				1,8	
	Comparar los primeros términos	17,9	14,3	23,3	23,1	6,3	12,9	10	23,1	9,1	3,7
	Comparar segundos términos	20,5	8,6	18,6	15,4	3,3	9,7	2	7,7	1,8	7,4
	Comparar diferencias	20,5	34,3	11,6	30,8	9,4	38,7	32	19,2	21,8	29,6
	Equivalencia a la unidad	2,6	5,7	4,6	3,8	9,4					7,4
	Confusas	28,2	20	25,6	11,5	18,7	19,4	34	19,2	14,5	14,8
6(IIIB)	Comparar totales	2,6		5,4	15,4		3				
	Comparar los primeros términos	12,8	3	13,5	7,7		3	8,7	7,7	5	10,3

Comparar segundos términos	7,7	6,1	13,5	7,7	16,1	6,1	13	15,4	7,5	6,9
Comparar diferencias	46,2	72,7	35,1	42,3	45,2	51,5	34,8	46,2	27,5	44,8
Equivalencia a la unidad	12,9	9,1	2,7	7,7	9,7	9,1	2,2	3,8	2,5	6,9
Correspondencia		6,1		3,9	6,6	3	2,2		2,5	6,9
Confusas	18	3	24,3	15,3	12,9	21,3	30,4	19,2	25	13,8

Las estrategias erróneas más frecuentes fueron la comparación de un solo término en los cocientes (sólo casos favorables o sólo desfavorables, en probabilidad) así como la comparación de casos posibles o diferencias, aunque esta última sólo resuelve correctamente problemas de los niveles IA y IB en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b). La comparación de diferencias o primeros términos (casos favorables) o la determinación de la equivalencia a la razón fueron más frecuentes en los ítems de razón que en los de probabilidad, donde los estudiantes tendieron más a comparar casos desfavorables. Las diferencias entre países fueron mayores en la comparación de diferencias.

Pocos estudiantes revelaron sesgos de razonamiento en los ítems de probabilidad como la equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988), el enfoque del resultado (Konold. 1989) o consideraciones físicas; se conjetura que la enseñanza de la probabilidad recibida por estos estudiantes les ayudó a superar dichos razonamientos erróneos.

5.6.5. Discusión y conclusiones

En esta sección se han presentado los análisis de las respuestas de una muestra de estudiantes costarricenses y españoles (de 11 a 16 años) al comparar razones y probabilidades en doce ítems con diferentes niveles de razonamiento proporcional en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b) y dificultad de Pérez Echeverría et al. (1986).

Se informa de los porcentajes de respuestas correctas en los ítems, de las estrategias correctas e incorrectas por curso y país, así como de los niveles de razonamiento alcanzados.

Los porcentajes de respuestas correctas indicaron que la dificultad de ambos tipos de problemas aumentaba rápidamente para los problemas de nivel IIA en adelante. En general, un mayor porcentaje de estudiantes de cursos superiores resolvió problemas de todos los niveles de razonamiento; sin embargo, los ítems de probabilidad fueron, en general, más difíciles que los ítems de razón, equivalentes en ambos países. Estos resultados confirman los obtenidos por Berrocal (1990), aunque ella sólo utilizó una tarea, sin considerar todos los posibles niveles de razonamiento de Noelting (1980a, 1980b). Además, en la muestra de este estudio, los estudiantes habían aprendido algo de probabilidad, lo que no ocurría en el estudio de Berrocal.

También, se observa que los niveles de dificultad en la investigación de Pérez Echeverría et al. (1986) se aplican en la comparación de problemas de razón, pero no en la probabilidad para problemas de nivel de dificultad 3 en su clasificación. La tarea 10 (nivel 2 en la clasificación de Pérez Echeverría et al.) fue más difícil que las tareas 11 y 12 (niveles 3 y 4 en dicha clasificación) en algunos cursos. Se atribuyen estas diferencias, al menor tamaño de la muestra de Pérez Echeverría et al. (1986). En la muestra de este estudio, muchos estudiantes compararon totales (casos posibles) para resolver el Ítem 10, que es una estrategia incorrecta.

En comparación con el estudio exploratorio de evaluación (Ver Capítulo 3) con niños de 6º curso de Educación Primaria (Hernández-Solís et al., 2021), los resultados en este curso mejoraron en el presente estudio. Otra conclusión es que en la muestra del presente estudio, las edades establecidas por Noelting (1980a, 1980b) para alcanzar cada uno de los niveles de razonamiento, se retrasó para los niveles IIA y posteriores y, en consecuencia, los estudiantes de la muestra no alcanzaron los estadios superiores de desarrollo, asumidos por Piaget e Inhelder (1951) en la comparación de probabilidades a la edad esperada.

Al comparar las estrategias de los estudiantes de la muestra del presente estudio con las de Pérez Echeverría et al. (1986), éstos emplearon 10% de estrategias multiplicativas en problemas de comparación de probabilidades. Estas estrategias incluyen la correspondencia y la proporcionalidad que en el presente estudio fueron escasamente utilizadas. Sin embargo, hay algunas excepciones, principalmente en los estudiantes españoles de 2ºESO, 3ºESO y 4ºESO para algunos ítems. En resumen, pocos alumnos, incluso en los cursos superiores de ambos países, utilizan estrategias multiplicativas. Esta es la razón por la que no resolvieron correctamente los problemas más difíciles.

El uso de estrategias incorrectas por ítem fue escaso en la muestra, aunque, al sumar todos los ítems, muchos estudiantes intentaron procedimientos incorrectos para resolver los problemas más difíciles y las estrategias incorrectas coincidieron con las descritas por Cañizares et al. (1997) y Green (1982). La proporción de estudiantes con sesgos como equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988) y el de enfoque en el resultado (Konold, 1989) fue muy pequeña.

Cañizares et al. (1997) informaron de los siguientes porcentajes de estudiantes en diferentes niveles de razonamiento probabilístico en toda su muestra, ya que no clasificó los resultados por curso: Nivel 0, 11,2%; Nivel IA, 21,6%; Nivel IB, 23,9%; Nivel IIA, 14,9%; Nivel IIB, 17,9%; Nivel IIIA, 9,0%; y Nivel IIIB, 1,5%. En el presente estudio, el porcentaje de estudiantes en el Nivel 0 es mayor en ambos países, mientras que el porcentaje en los niveles superiores IIIA y IIIB presenta mayor similitud. Los porcentajes son menores en los niveles IA y IIB y mayores en los niveles IB y IIA. Más concretamente, el 49,7% de los estudiantes españoles y el 45,3% de los costarricenses se sitúan entre los niveles IB y IIA.

5.7. COMPARACIÓN DE PROBABILIDADES EN RULETAS Y RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

5.7.1. Introducción

La mayoría de las investigaciones que analizan la comparación de dos probabilidades utilizaron la selección de bolas de urnas y pocas de ellas consideraron, al mismo tiempo, el razonamiento proporcional de los participantes. En un trabajo relacionado (Batanero et al., 2023) se analizaron las respuestas de los mismos 704 estudiantes de 11-16 años de nuestro Estudio 2, de Costa Rica y España, en la comparación de razones y la comparación de probabilidades en urnas (Ver Sección 5.6). Las tareas abarcaban seis niveles diferentes de razonamiento proporcional para cada tipo de problema y los resultados confirmaron la mayor dificultad en la comparación de probabilidades que en la comparación de razones, y que el nivel de razonamiento alcanzado en ambas tareas era inferior al sugerido en investigaciones previas. También se informó de las estrategias correctas e incorrectas de los estudiantes en la comparación de probabilidades en urnas.

El trabajo que se presenta en esta sección complementa dicha investigación, evaluando la comparación de probabilidades en el contexto de ruletas y su relación con el nivel de razonamiento proporcional en una muestra de estudiantes costarricenses de 11 a 16 años. Adicionalmente, se analiza la posible existencia de sesgos de razonamiento originados por la distribución de sectores favorables en las ruletas. Se atiende, así, al tercer objetivo del Estudio 2, enunciado en la forma siguiente:

> *O3.3. Estudiar la relación existente, con los estudiantes costarricenses de la muestra, entre el nivel de razonamiento proporcional en la resolución de tareas en comparación de razones y de probabilidades en ruletas.*

Para lograrlo, en el cuestionario de evaluación se añadieron algunos ítems de este tipo. En lo que sigue se detalla la estructura de dichos ítems, las estrategias previstas en el análisis a priori y, por último, los resultados obtenidos. Específicamente, planteamos las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué porcentaje de estudiantes de cada curso compara correctamente probabilidades en ruletas, en tareas correspondientes a los distintos niveles de razonamiento de proporcionalidad de Noelting (1980a; 1980b)? ¿Coinciden estos niveles en la comparación de razones?
2. ¿Cuáles son las estrategias, correctas e incorrectas, más comunes al comparar probabilidades en ruletas por curso y nivel de razonamiento proporcional? ¿Cambian algunas estrategias en los ítems con sesgo?
3. ¿Qué nivel de razonamiento probabilístico y de proporcionalidad alcanzan los estudiantes en cada curso? ¿Están relacionados estos niveles?

Las siguientes secciones son una traducción de partes del siguiente artículo publicado:

Hernández-Solís, L.A., Batanero, C. y Gea, M. (2023). Costarican students' proportional reasoning and performance in comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 9(*12), em2373. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

5.7.2. Estructura de los ítems

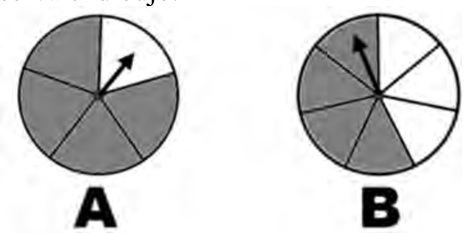
En esta sección se analizan los ítems de nuestro estudio en comparación de razones (descritos en la Sección 5.5.2, con la Figura 5.5.1 como ejemplo) y comparación de probabilidades en ruletas. Cada cuestionario, A y B, incluía tres problemas de comparación de probabilidades en ruletas con sectores del mismo color adyacentes (Ver Figura 5.7.1) y dos problemas de comparación de probabilidades en ruletas con sectores de colores alternados (Ver Figura 5.7.2). En cada cuestionario se consideraron tres niveles de razonamiento proporcional creciente y, en conjunto (razones y ruletas), aparecen seis niveles de razonamiento considerando ambos cuestionarios.

Tabla 5.7.1. Tipo de ítem, nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a, 1980b) y tipo de cuestionario

Ítem	Tipo	Composición (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)	Nivel de Razonamiento proporcional	Edad (años, meses)	Cuestionario
1	Razón	(2,3) vs (1,3)	IA	(3,6)	A
2	Razón	(5,1) vs (5,4)	IB	(6,4)	B
3	Razón	(2,2) vs (4,4)	IIA	(8,1)	A
4	Razón	(3,1) vs (6,2)	IIB	(10,5)	B
5	Razón	(3,1) vs (4,2)	IIIA	(12,2)	A
6	Razón	(3,2) vs (4,3)	IIIB	(15,1)	B
7	Ruletas, insesgado	(3,2) vs (5,2)	IA	(3,6)	B
8	Ruletas, insesgado	(4,1) vs (4,3)	IB	(6,4)	A
9	Ruletas, insesgado	(2,2) vs (3,3)	IIA	(8,1)	B
10	Ruletas, insesgado	(2,6) vs (1,3)	IIB	(10,5)	A
11	Ruletas, insesgado	(3,6) vs (1,3)	IIIA	(12,2)	B
12	Ruletas, insesgado	(3,4) vs (4,5)	IIIB	(15,1)	A
13	Ruletas, sesgado	(3,3) vs (4,4)	IIA	(8,1)	B
14	Ruletas, sesgado	(4,8) vs (2,4)	IIB	(10,5)	A
15	Ruletas, sesgado	(8,4) vs (6,2)	IIIA	(12,2)	B
16	Ruletas, sesgado	(5,4) vs (4,3)	IIIB	(15,1)	A

A modo de ejemplo, se reproducen dos ítems en las Figuras 5.7.1 y 5.7.2, en los que deben compararse probabilidades cuyos términos, (a_1,b_1) y (a_2,b_2), representan el número de casos favorables (a_1 y a_2) y desfavorables (b_1 y b_2). En los Ítems del 13 a 16 se introdujo, además, un distractor; ya que los sectores favorables están unidos en una ruleta e intercalados en la otra. El propósito era comprobar si los estudiantes manifestaban el sesgo de distribución descrito por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984).

Ítem 8. La ruleta A está divida en 5 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 1 pintada de blanco) y la ruleta B está divida en 7 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 3 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



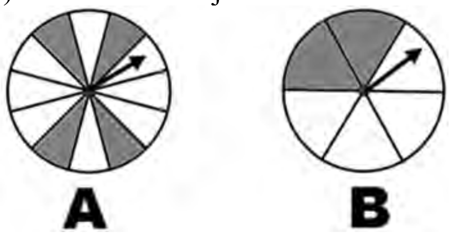
Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Figura 5.7.1. Ítem 8 (Cuestionario A)

Ítem 14. La ruleta A está divida en 12 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 8 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 6 partes de igual área (2 están pintadas de negro y 4 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Figura 5.7.2. Ítem 14 (Cuestionario A)

5.7.3. Categorías de análisis de estrategias

Como en apartados anteriores, se clasifican las estrategias de los estudiantes para resolver las tareas como correctas o incorrectas. A continuación, se describen dichas estrategias en la comparación de probabilidades y se incluyen algunas respuestas de los estudiantes como ejemplo. Se recuerda que las estrategias en la comparación de razones se describieron en la Sección 5.5.3.

Comparar casos posibles (totales). Se compara el total de sectores en que está divida cada ruleta (Ver E136). Esta estrategia es incorrecta para todos los ítems.

E136: En la ruleta A es más difícil ganar, ya que hay más divisiones que en la B (Ítem 10, opción B).

Comparar los casos favorables. Este procedimiento sólo proporciona resultados correctos cuando los segundos términos de los cocientes (sectores desfavorables) son idénticos ($b_1 = b_2$). Esta estrategia, típica del nivel intuitivo inferior (IA) de Noelting, proporciona respuestas correctas a los Ítems 1 y 7. Otros estudiantes utilizaron incorrectamente este método, por ejemplo E50, que no se dio cuenta de que la ruleta A también contenía más partes blancas.

E291: Porque hay más trozos negros (Ítem 7, opción B).
E50: Porque hay más partes negras (Ítem 10, opción A).

Comparar los casos desfavorables. Esta estrategia es válida cuando los primeros términos son idénticos ($a_1 = a_2$) porque "b" es el recíproco de "a". El procedimiento es típico del nivel intuitivo intermedio (IB) de Noelting y da respuestas correctas a los Ítems 2 y 8 (Ver E57). Sin embargo, E154 asume equiprobabilidad porque no comparó los casos favorables sino los desfavorables, en el Ítem 7.

E57: Ambas ruletas incluyen cuatro espacios negros, pero en B hay más espacios blancos y entonces A es más probable (Ítem 8, opción A).
E154: Porque ambos tienen la misma cantidad (2 partes) (Ítem 7, opción C).

Comparar las diferencias entre casos favorables y desfavorables. Noelting (1980a, 1980b) señaló que esta estrategia implica que el estudiante percibe la razón como un todo. Es válida en ítems de niveles inferiores (IA y IB); por ejemplo, en los Ítems 1 y 2, 7 y 8 del cuestionario (Ver E3), aunque es incorrecta en los ítems de nivel superior, que requieren una estrategia multiplicativa (Ver E123).

E3: En A hay menos blancos que negros (Ítem 8, opción A).
E123: Porque en ambas hay un blanco más que un negro (Ítem 12, opción C).

Razón de equivalencia a la unidad. El estudiante compara una razón (a_1/b_1) con la otra (a_2/b_2), descubriendo la equiprobabilidad. Mientras que las estrategias anteriores implican combinar los términos de una misma razón, en este caso deben considerarse ambas razones. Corresponde al nivel operativo concreto inferior de Noelting (IIA) y da respuestas adecuadas a los Ítems 3 y 9 (Ver E275).

E275: Porque tienen la misma cantidad de zonas pintadas y no pintadas (Ítem 9, opción C).

Equivalencia entre razones. El estudiante compara una razón (a_1/b_1) con la otra (a_2/b_2) mediante una operación multiplicativa, comprobando que son equivalentes. Esta estrategia conduce a respuestas correctas sólo cuando los cocientes pertenecen a la misma clase de equivalencia de fracciones. El procedimiento corresponde al nivel operativo concreto superior de Noelting (IIB) y resuelve los Ítems 4 y 10 (Ver E71).

E71: Aunque A tiene doble espacio en blanco, también tiene doble espacio en negro (Ítem 10, opción C).

Correspondencia entre los términos de la razón. Los estudiantes construyen un criterio de proporcionalidad entre los términos de la primera razón (a_1/b_1) para determinar si la relación en la otra (a_2/b_2) es menor o mayor. Esta estrategia da respuestas correctas siempre que dos de los cuatro términos a comparar sean múltiplos. Corresponde al nivel operativo formal inferior (IIIA) y resuelve los Ítems 5 y 11. A continuación, se muestra cómo E224 construye una correspondencia entre los términos de cada razón, que luego compara. Siempre se utilizó correctamente.

E224: La fracción simplificada de sus partes es menor ($3/6=1/2>1/3$) (Ítem 11, opción A).

Proporcionalidad. Las razones se reducen a fracciones con denominador común y se comparan. Con esta estrategia se puede comparar cualquier razón, y da respuestas correctas para cualquier tarea de comparación de razones. Corresponde al nivel operativo formal superior de Noelting (IIIB) y resuelve todos los ítems del cuestionario. Siempre se utilizó correctamente.

E255: 8/12 y 6/8; luego 2/3<3/4. (Ítem 15, opción B)

Además, se encontraron las siguientes estrategias incorrectas:

Sesgo de equiprobabilidad. Cuando todos los sucesos de un experimento aleatorio se consideran equiprobables (Lecoutre, 1992). Por ejemplo, E46 y E62 asumen la equiprobabilidad del blanco y el negro, sin importar el número de sectores de cada color.

E46: Creo que la probabilidad es la misma en ambos giros (Ítem 12, opción C).
E62: Podría parar en blanco o en negro de la misma manera (Ítem 8, opción C).

Enfoque en el resultado. Algunos estudiantes no interpretan el problema de forma probabilística, sino determinista, y entienden que deben predecir los resultados del experimento aleatorio. Konold (1989) describió este razonamiento como el enfoque en el resultado. Por ejemplo, E174 elige la opción C al pensar que el resultado depende del azar, y entonces cualquier resultado es equiprobable, sin importar la composición de las ruletas y responde que no se puede predecir el resultado.

E174: Ambos, ya que las ruletas dependen del azar y no podemos predecir en cuál se detendrá (Ítem 7, opción C).

Consideraciones físicas. El estudiante asocia las condiciones físicas del experimento con la probabilidad de un suceso dado. Algunos factores son la velocidad a la que gira la ruleta o la fuerza con la que se hace girar (Ver E112). Además, en los ítems del 7 a 12, las flechas están colocadas en posiciones diferentes, y este hecho influyó en las respuestas de algunos estudiantes (Ver E208).

E112: Depende, ya que es una ruleta, y podemos tirar de la flecha a diferentes velocidades. Si se tira lentamente de A, puede pararse en cualquier sitio, lo mismo en B. Depende de la fuerza y de la velocidad de la flecha (Ítem 8, opción C).
E208: Como le faltan dos saltos para llegar al negro. En A, le faltan tres. (Ítem 12, opción B).

Distribución de los sectores coloreados. En los Ítems del 13 a 16, los sectores blancos y negros se alternan en una ruleta, siendo adyacentes en la otra ruleta, para evaluar si este hecho influía en las respuestas de los estudiantes. Se encontraron estudiantes que asignaron una mayor probabilidad a la ruleta en la que los sectores del mismo color eran adyacentes entre sí (Ver E223); y otros dieron una mayor probabilidad cuando los sectores se alternaban. Por ejemplo, aunque E224 calculó 3/3=4/4, reconociendo la equivalencia con la unidad del Ítem 13, asignó mayor probabilidad a la ruleta B porque los colores estaban "intercalados".

E223: Como todos los triángulos negros están muy juntos, hay más probabilidad de que la flecha caiga ahí (Ítem 13, opción A).

E224: Al estar dividida en más secciones y también intercaladas, la ruleta B tiene más probabilidades de caer en el negro (Ítem 13, opción B).

5.7.4. Resultados

En esta sección se responde a las preguntas de investigación planteadas en la Sección 5.7.1.

Respuestas correctas en la comparación de probabilidades

En primer lugar, analizamos el porcentaje de estudiantes por curso que resolvieron correctamente cada ítem. En la Tabla 5.7.2 presentamos los resultados en la comparación de razones y en la Tabla 5.7.3 los resultados en la comparación de probabilidades, para facilitar la comparación de resultados.

Tabla 5.7.2. Porcentaje de estudiantes por curso que seleccionan la respuesta correcta en la comparación de razones

Ítem	Nivel de Noelting	Curso				
		6º	7º	8º	9º	10º
1	IA	77,2	80,7	90,4	76,8	88,9
2	IB	87,9	92,3	78,8	88,4	79,3
3	IIA	68,6	69,2	64,5	69,2	70,4
4	IIB	27,2	38,4	39,4	42,3	51,7
5	IIIA	11,4	15,3	19,4	30,7	37,0
6	IIIB			3,0	7,7	10,3

Tabla 5.7.3. Porcentaje de estudiantes por curso que seleccionan la respuesta correcta en la comparación de probabilidades

Ítem	Nivel de Noelting	Ítems sesgados	Curso				
			6º	7º	8º	9º	10º
7	IA		63,6	76,9	75,8	80,8	82,8
8	IB		82,9	100,0	80,6	80,8	88,9
9	IIA		66,7	65,4	81,8	88,5	72,4
10	IIB		34,3	61,5	48,4	69,2	70,4
11	IIIA		60,6	53,8	57,6	65,4	58,6
12	IIIB		31,4	30,8	19,4	34,6	29,6
13	IIA	x	51,5	50,0	54,5	46,2	48,3
14	IIB	x	31,4	26,9	41,9	53,8	48,1
15	IIIA	x	36,4	53,8	39,4	50,0	41,4
16	IIIB	x	37,1	53,8	35,5	34,6	40,7

Se observa, por curso, una mejora en las calificaciones de los ítems de los niveles IA a IIA, aunque no de forma consistente. Los porcentajes de respuestas correctas fueron, en general, más altos en las tareas de probabilidad, porque muchos estudiantes compararon las áreas coloreadas de blanco y negro en las ruletas, en lugar de las proporciones de casos favorables y desfavorables. Este resultado contradice las conclusiones de Berrocal (1990) y Batanero et al. (2023), según ítems en comparación de probabilidades en urnas. Se supone, entonces, que los estudiantes entienden mejor la idea de razón como comparación de parte con todo en la ruleta, que como comparación de parte con parte en las urnas, como sugiere Cañizares (1997).

El porcentaje de respuestas correctas disminuye al aumentar el nivel de razonamiento proporcional requerido en los ítems de todos los cursos y más en la comparación de razones. Se destaca el diferente porcentaje de respuestas correctas en los niveles IIIA y IIIB en ambos tipos de tareas (comparación de razones y comparación de probabilidades). Sin embargo, al comparar los ítems correspondientes al mismo nivel de razonamiento probabilístico, con y sin sesgo, el número de respuestas correctas en este último (Ítems del 13 al 16) desciende, debido a que algunos estudiantes se ven influidos por sus creencias erróneas. Esta tendencia no se mantiene en los Ítems de nivel IIIA y IIIB sesgados. Por un lado, los estudiantes que utilizaron la proporcionalidad en estos ítems y alcanzaron el nivel más alto de razonamiento proporcional no se dejaron confundir por creencias erróneas; y por otro lado, muchos estudiantes compararon áreas en lugar de trabajar con fracciones en estos ítems y pudieron resolver el problema con un nivel de razonamiento inferior.

Estrategias en la comparación de probabilidades

En segundo lugar, se analizaron las estrategias en las tareas de comparación de probabilidades (Véase la Tabla 5.7.4), donde predomina la comparación de áreas en todos los ítems y cursos. Sin embargo, al comparar los ítems sesgados y no sesgados del mismo nivel de razonamiento, hay menos proporción de comparación de áreas en los ítems sesgados; probablemente, cuando se intercalan sectores del mismo color, la cantidad total de área del mismo color no es tan claramente perceptible.

La comparación de casos favorables sólo se aplicó en el nivel IA y con menor frecuencia que la comparación de áreas. Se observó un comportamiento similar en la comparación de casos desfavorables, sólo utilizada en el nivel IB. Este hecho sugiere que los estudiantes comprenden mejor la idea de razón como comparación de parte con todo que como comparación de parte con parte. El análisis de diferencias sólo se utilizó en los ítems de nivel IA y IB. Las estrategias de correspondencia fueron muy escasas en todos los ítems y cursos, mientras que los estudiantes utilizaron la proporcionalidad en un pequeño porcentaje, que aumentó con el curso y el nivel del ítem. Esta estrategia también fue menos frecuente en los ítems sesgados.

Tabla 5.7.4. Porcentaje de estrategias correctas al comparar probabilidades por ítem y curso

Estrategia	Ítem	Curso				
		6º	7º	8º	9º	10º
Comparar casos favorables	7(IA)	30,3	19,2	27,3	11,5	24,1
Comparar casos desfavorables	8(IB)	20,0	23,1	22,6	15,4	11,1
Comparar diferencias	7(IA)	3,0	23,1	15,2	11,5	6,9
	8(IB)	37,1	11,5	12,9	3,8	18,5
Equivalencia a la unidad	9(IIA)	27,3	19,2	36,4	30,8	24,1
	13 (IIA)	24,2	15,4	24,2	15,4	13,8
Equivalencia a la razón	10(IIB)	5,7	2,9	12,9	19,2	3,7
	14(IIB)	8,6		6,5	11,5	3,7
Correspondencia	8(IB)				3,8	
	10(IIB)	2,9				
	11(IIIA)				3,8	3,4
	14(IIB)	2,9				
Proporcionalidad	7(IA)			6,1	7,7	6,9
	8(IB)	2,9	11,5	3,2	3,8	3,7
	9(IIA)	6,1	7,7	12,1	15,4	13,8
	10(IIB)	8,6	5,7	16,1	15,4	22,2
	11(IIIA)	6,1	11,5	21,2	19,2	20,7
	12(IIIB)	5,7	2,9	3,2	15,4	11,1
	13 (IIA)	6,1	15,4	9,1	15,4	13,8
	14(IIB)	5,7	2,9	19,4	11,5	7,4
	15(IIIA)	3,0	7,7	9,1	7,7	13,8
	16(IIIB)	5,7	2,9	12,9	7,7	
Comparar áreas	7(IA)	36,4	50,0	30,3	38,5	31,0
	8(IB)	17,1	50,0	22,6	38,5	37,0
	9(IIA)	45,5	57,7	27,3	23,1	48,3
	10(IIB)	37,1	34,3	25,8	30,8	66,7
	11(IIIA)	30,3	46,2	33,3	53,8	31,0
	12(IIIB)	34,3	37,1	32,3	38,5	37,0
	13 (IIA)	15,2	23,1	24,2	19,2	24,1
	14(IIB)	22,9	22,9	12,9	34,6	40,7
	15(IIIA)	21,2	38,5	30,3	23,1	20,7
	16(IIIB)	25,7	31,4	22,6	11,5	33,3

Todas las estrategias correctas encontradas en nuestro estudio anterior (Batanero et al. (2024) aparecen en este caso. Sin embargo, la frecuencia de comparación de casos favorables o desfavorables o de equivalencia a la unidad es menor, porque los estudiantes tienden a utilizar la comparación de áreas, que no puede aplicarse en el caso de las urnas.

Estrategias incorrectas

En la Tabla 5.7.5 se presenta el porcentaje promedio de estrategias incorrectas por ítem. Se calculan estos porcentajes promedios dividiendo la suma de los porcentajes de estudiantes que utilizaron cada estrategia en distintos ítems por el número de ítems en los que aparecía la estrategia. Por ejemplo, el porcentaje 10,6, en la comparación de casos favorables en 6º curso, significa que el 10,6% de los estudiantes por término medio (media) utilizaron incorrectamente esta estrategia en los Ítems 8 a 16.

Tabla 5.7.5. Porcentaje promedio de estrategias incorrectas en la comparación de probabilidades, por curso

Estrategia	Ítems	Curso				
		6º	7º	8º	9º	10º
Comparar totales	7-16	8,7	5,7	6,0	3,8	4,9
Comparar casos favorables	8-16	10,6	7,9	9,5	6,4	6,0
Comparar casos desfavorables	7, 9-16	3,6	3,5	4,6	3,0	1,9
Comparar diferencias	9-16	10,0	4,6	8,6	2,7	4,7
Equivalencia a la unidad	7, 8, 10-12, 14-16	0,4		0,8		0,5
Equivalencia a la razón	7, 8, 11, 12, 15, 16	0,0	1,0	0,8	1,0	0,9
Sesgo de equiprobabilidad	7-16			1,3	1,5	0,3
Enfoque en el resultado	7-16			1,2	0,4	0,4
Consideraciones físicas	7-16	4,1	1,2	2,2	3,1	2,9
Sesgo distribucional	13-16	23,6	17,7	20,2	23,1	30,4
Argumento confuso	7-16	3,3	2,4	2,2	1,5	1,4
Sin argumentos	7-16	4,4	1,7	5,6	12,3	6,7

La frecuencia de estrategias incorrectas es muy similar a la encontrada en la comparación de urnas (Batanero et al., 2023). La excepción es el sesgo de distribución, que tiene una frecuencia destacada en los ítems sesgados y no se aplica en la comparación de urnas.

La comparación de totales aparece en todos los ítems y es siempre una estrategia errónea. Su frecuencia es baja y se da principalmente en los ítems de nivel IIB y IIIB (en torno al 10%). La comparación incorrecta de casos favorables (que sólo es correcta en el Ítem 7) también fue frecuente, especialmente para los estudiantes de 6º curso (30%) en los ítems de nivel IIIA (tanto en los sesgados como en los no sesgados). Estos mismos estudiantes compararon incorrectamente las diferencias entre casos favorables y posibles con más frecuencia que en los demás cursos, en los ítems de nivel IIB y superiores.

Destacan las respuestas basadas en la disposición física de los sectores coloreados, utilizadas en los ítems sesgados en una alta proporción en todos los cursos. Sobresale el 10º curso con más del 27% en cada uno de estos ítems. Aunque los sesgos de equiprobabilidad, enfoque de resultados y consideraciones físicas están presentes en todos los ítems, su frecuencia es insignificante.

Niveles de razonamiento

Por último, al analizar el nivel de razonamiento probabilístico y proporcional de los estudiantes, en las Tablas 5.7.6 y 5.7.7 se presentan los porcentajes de estudiantes según el nivel de razonamiento proporcional y probabilístico alcanzado, por curso. Se asigna un nivel determinado a un estudiante, cuando ha resuelto correctamente el ítem asociado al nivel (respuesta y argumento correctos). El nivel 0 significa que no ha resuelto correctamente ninguno de ellos, ya sea porque ha fallado en la estrategia o en la respuesta; y sobresale un porcentaje considerable de estos estudiantes en todos los cursos, lo que indica las dificultades que aún tienen estos para resolver los ítems.

Tabla 5.7.6. Porcentaje de estudiantes en diferentes niveles de razonamiento proporcional en la comparación de razones por curso

Nivel	Curso				
	6º	7º	8º	9º	10º
0	11,8	11,5	14,1	13,5	10,7
IA	11,8	11,5	12,5	5,8	10,7
IB	30,9	26,9	21,9	23,1	17,9
IIA	29,4	25,0	21,9	23,1	19,6
IIB	13,2	17,3	18,8	17,3	21,4
IIIA	2,9	5,8	9,4	13,5	14,3
IIIB		1,9	1,6	3,8	5,4

Tabla 5.7.7. Porcentaje de estudiantes en diferentes niveles de razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades por curso

Nivel	Curso				
	6º	7º	8º	9º	10º
0	19,1	7,7	18,8	15,4	10,7
IA	5,9	9,6	3,1	5,8	7,1
IB	26,5	21,2	14,1	5,8	10,7
IIA	19,1	17,3	15,6	17,3	17,9
IIB	7,4	13,5	18,8	26,9	25,0
IIIA	13,2	17,3	23,4	23,1	19,6
IIIB	8,8	13,5	6,3	5,8	8,9

El porcentaje es mayor en la comparación de probabilidades que en comparación de razones, en todos los cursos excepto en 7º curso.

El nivel de razonamiento aumenta, como era de esperar, con el curso escolar. Así, mientras que la mayoría de los estudiantes se situaba en los niveles IB y IIA en 6º curso, en 10º curso la mayoría se ubicaba en los niveles IIA a IIIA. Hubo pocos estudiantes razonando en el nivel superior IIIB, aunque la edad media proyectada por Noelting (1980a, 1980b) para alcanzar este nivel es de 15 años y 1 mes y los estudiantes del 10º curso tienen entre 15 y 16 años.

Para analizar mejor la relación entre el razonamiento probabilístico y proporcional con el grado escolar, en la Tabla 5.7.8 se muestra el coeficiente de correlación de Pearson entre estas variables.

Tabla 5.7.8. Correlación entre razonamiento probabilístico, proporcional y curso

		R. proporcional	R. probabilístico
Curso	Correlación de Pearson	0,097	0,124*
	Valor p	0,196	0,034
Razonamiento proporcional	Correlación de Pearson		0,209*
	Valor p		0,000

Todas estas correlaciones son estadísticamente significativas, pero de pequeña intensidad, excepto la correlación entre el curso y el nivel de razonamiento proporcional. Además, existe una correlación más fuerte entre el razonamiento proporcional y el probabilístico que la correspondiente a cualquiera de estas variables y cursos. En consecuencia, es importante reforzar el razonamiento proporcional de los estudiantes para ayudarles a tener éxito en la comparación de probabilidades; puesto que la correlación es una propiedad simétrica; y a la inversa, mejorar el nivel de razonamiento probabilístico de los estudiantes les ayudará a desarrollar su razonamiento proporcional.

En la Tabla 5.7.9 se muestran los coeficientes de correlación de Pearson entre el número de respuestas correctas (opción correcta y argumentos correctos) en los tres tipos de ítems (comparación de razones y comparación de probabilidades en ruletas sesgadas y no sesgadas).

Tabla 5.7.9. Coeficiente de correlación entre el número de respuestas correctas en problemas de comparación de razones y de probabilidades (ítems sesgados y no sesgados) por curso

		Número de respuestas correctas		
		Mezclas	Ruletas	Ruletas sesgadas
Curso	Correlación de Pearson	0,137*	0,126*	0,069
	Valor p	0,019	0,031	0,240
Mezclas	Correlación de Pearson		0,207**	0,135*
	Valor p		0,000	0,021
Ruletas	Correlación de Pearson			0,249**
	Valor p			0,000

Se observa que todas las correlaciones son positivas y estadísticamente significativas, aunque de poca intensidad, excepto la correlación entre los ítems sesgados y el curso. La mayor correlación aparece entre la comparación de ruletas en ítems sesgados y no sesgados. Esto significa que a medida que el estudiante resuelve más ítems no sesgados, en la comparación de probabilidad, también resuelve más ítems sesgados. También existe una correlación importante entre el número de ítems de comparación de razones (mezclas de zumo) resueltos correctamente y el número de ítems de comparación de probabilidad no sesgados resueltos correctamente. Por tanto, resolver problemas proporcionales ayuda a resolver los problemas probabilísticos en ítems no sesgados. La relación es mucho menor con los ítems de ruletas sesgados, de modo que el razonamiento proporcional no necesariamente incide positivamente en la resolución de ítems con este tipo de sesgos, relacionados con la disposición de los sectores en las ruletas.

5.7.5. Discusión y conclusiones

En nuestro estudio se evaluó conjuntamente el desempeño en la comparación de probabilidades en ruletas y el nivel de razonamiento proporcional en una muestra de estudiantes costarricenses de 6º a 10º curso. Se analizaron las respuestas abiertas de 292 estudiantes a tres tipos de ítems: comparación de razones en mezclas y comparación de probabilidades en ruletas sesgadas y no sesgadas. Se analizaron los porcentajes de selección correcta a los ítems, las estrategias en la comparación de razones y probabilidades y los niveles de razonamiento proporcional y probabilístico.

En cuanto a la selección de la respuesta correcta, los ítems de los niveles IA, IB y IIA resultaron extremadamente fáciles para los estudiantes, ya que se obtuvieron altos porcentajes de respuestas correctas en estos ítems. La explicación es que los de nivel IA y IB se pueden resolver mediante la comparación de una sola variable y en los de IIA es claramente visible la identificación de la equivalencia a la unidad en una ruleta. La dificultad aumentó en los niveles siguientes, aunque se produjo una mejora general con el curso en todas las tareas.

Los resultados de este estudio contradicen los hallazgos de Berrocal (1990) y Batamero et al. (2023), quienes utilizaron la comparación de probabilidades en urnas, ya que en estos estudios la comparación de probabilidades fue más difícil que la comparación de razones. Se supone, entonces, que los estudiantes entienden mejor la idea de razón como comparación de parte con todo en la ruleta, que como comparación de parte con parte en las urnas, como sugiere Cañizares (1997). Además, se encontraron porcentajes más bajos de respuestas correctas en los ítems sesgados que en los no sesgados, para el mismo nivel de razonamiento. Este hecho apunta a la existencia del sesgo de distribución señalado por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984).

En cuanto a las estrategias en la comparación de probabilidades, no se observa el sesgo señalado por Falk et al. (1980) consistente en elegir sistemáticamente el conjunto con casos más favorables. Aunque esta estrategia se utilizó incorrectamente en muchos ítems, el porcentaje de uso sólo fue superior al 10% en el sexto curso y en el Ítem 11. Además, en general, la selección de la opción dependía de las características del ítem y así, en los ítems de nivel IB, los estudiantes optaron por la ruleta con sectores más desfavorables. En los ítems de nivel IIA decidieron la equiprobabilidad, y adaptaron sus estrategias en los ítems restantes. Estas estrategias también fueron señaladas por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984).

También coincidimos con Gürbüz et al. (2014) en que muchos estudiantes resolvieron correctamente las tareas comparando las áreas de sectores blancos y negros, una estrategia que es específica para la comparación de ruletas y no aparecen en la comparación de probabilidades en urnas.

Por último, los resultados sugieren que el nivel de razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades aumenta con el curso. Sin embargo, la edad a la que se alcanzan los niveles superiores es posterior a la supuesta por Noelting (1980a, 1980b). También se observa una correlación entre el razonamiento proporcional y el probabilístico, que fue mayor que la existente entre cualquiera de estas variables y el curso escolar. El número de respuestas y argumentos correctos a los tres tipos de ítems utilizados en el estudio también están correlacionados. Sin embargo, la correlación del número de problemas con el curso y del número de ítems sesgados resueltos con el número de problemas proporcionales correctos ha sido muy pequeña.

5.8. COMPRENSIÓN DEL JUEGO EQUITATIVO Y RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

5.8.1. Introducción

El desarrollo de la inferencia estadística y el aumento de la información probabilística en los medios de comunicación y en contextos profesionales y científicos, junto con su papel en la toma de decisiones, requiere la educación probabilística de los ciudadanos (Jones et al., 2007; Sharma, 2016). La probabilidad tiene fuertes vínculos con otros contenidos matemáticos, como la proporcionalidad, la combinatoria, la lógica y el álgebra (Van Dooren, 2014). Este protagonismo ha llevado a enseñar probabilidad desde la Educación Primaria en los planes de estudio de matemáticas (por ejemplo, Ministerio de Educación Pública, MEP, 2012; Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP, 2022).

En este trabajo, nos centramos en la comprensión que tienen los estudiantes de los juegos equitativos, concretamente, en su competencia para transformar un juego no equitativo en uno equitativo. Por tanto, abordamos el siguiente objetivo del Estudio 2:

O3.4. Estudiar si existe relación entre el éxito en tareas de comparación de razones de diferente nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y los resultados obtenidos en la resolución de una tarea de juego equitativo.

Los juegos de azar originaron las primeras ideas de probabilidad (Batanero et al., 2005) y desempeñan un importante papel en su enseñanza. Son el principal contexto donde los niños comienzan a tomar conciencia del azar y a realizar estimaciones probabilísticas, incluso antes de la instrucción (Batanero et al., 2019). Además, refuerzan algunas ideas fundamentales incluidas por Gal (2005) en su modelo de alfabetización probabilística, a saber, aleatoriedad, variabilidad, incertidumbre e independencia. También, requieren estimar o calcular probabilidades y utilizar el lenguaje probabilístico. Además, Pratt (2000) sugirió que la comprensión de la equitatividad está vinculada a la concepción que tienen los niños de la aleatoriedad, a la que atribuyen las propiedades de irregularidad, imprevisibilidad y equitatividad. También ayudan a desarrollar el razonamiento probabilístico de los estudiantes (Hernández-Solís et al., 2021a).

El currículo costarricense propone el análisis de probabilidades mediante juegos de azar y problemas en el contexto del estudiante para la Educación Primaria. Una expectativa de aprendizaje es identificar eventos igualmente probables, considerando el número de resultados para cada suceso (MEP, 2012). En el último curso de primaria (6º curso), los estudiantes deben utilizar las ideas intuitivas adquiridas en cursos anteriores para calcular la probabilidad, según la regla de Laplace. Aunque en 7º curso no hay contenidos sobre probabilidad, en 8º curso se estudian de nuevo todas las ideas sobre probabilidad introducidas en cursos anteriores, con un aumento de la dificultad de los problemas y una mayor precisión matemática. En 9º curso se introduce la definición frecuencial de probabilidad y la ley de los grandes números. En 10º curso, se formalizan las reglas básicas de la probabilidad y se utilizan las propiedades de unión y complemento para resolver problemas. Sin embargo, no se hace referencia explícita a situaciones asociadas a la idea de juego equitativo, ni a establecer un premio en función de la expectativa de ganar de cada jugador.

Aunque existen investigaciones previas, como se ha descrito en el Capítulo 2, no se ha encontrado ninguna que relacione la comprensión de los juegos equitativos, por parte de los estudiantes, con su nivel de razonamiento proporcional. En un estudio exploratorio previo (Hernández-Solís et al., 2021), se inicia una investigación sobre este tema con una muestra reducida de sólo estudiantes de 6º curso de Educación Primaria, sin tener en cuenta el nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes. Para contribuir a este tema, en la presente sección se analizará el significado personal que los estudiantes costarricenses (de 6º a 10º curso) asignan a los juegos equitativos, relacionándolo con su nivel de razonamiento proporcional. Asimismo, se describen los principales conflictos semióticos encontrados, comparando los resultados obtenidos, con los establecidos en investigaciones anteriores.

Los resultados que se describen a continuación se han traducido de la siguiente publicación:

Gea, M. M., Hernández-Solís, L., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Relating students' proportional reasoning level and their understanding of fair games. *Journal on Mathematics Education, 14*(4), 663-682. https://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp663-682

5.8.2. Estructura de los ítems

En la Sección 5.5.2 de esta Memoria se describieron los ítems de comparación de razones que conforman el cuestionario A y B de nuestro Estudio 2. Además, se incluyó en los dos cuestionarios el mismo ítem (Ver Figura 5.8.1), para evaluar los significados personales que los estudiantes asignaron a un juego equitativo. La tarea consta de dos pasos. En primer lugar, el estudiante debe darse cuenta de que María lleva ventaja en el juego (tiene más probabilidades de ganar que Esteban). En segundo lugar, el estudiante debe cuantificar el número de chocolatinas que Esteban debería obtener al ganar, para que el juego sea justo. Para ello, los premios deben ser inversamente proporcionales a la probabilidad de ganar de cada jugador.

María y Esteban juegan a lanzar un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de chocolatinas. ¿Cuántas chocolatinas debe ganar Esteban cuando sale el 1, para que el juego sea justo?

Explica por qué das esta respuesta:

Figura 5.8.1. Ítem 7

5.8.3. Categorías de análisis de estrategias

Se clasifican las estrategias que los estudiantes pueden utilizar para resolver las tareas, partiendo de las identificadas en trabajos anteriores (Cañizares et al., 2004; Hernández-Solís et al., 2021a), completándolas mediante el análisis de contenido empleado como metodología en nuestra investigación (Ver Sección 5.4). A continuación, se describen las estrategias en la resolución del ítem de juego equitativo, añadiendo un ejemplo de respuesta de un estudiante a cada una de ellas. Las estrategias en la comparación de razones se describieron en la Sección 5.5.3.

Estimación correcta del premio, calculando la probabilidad para cada jugador y utilizando la esperanza matemática. Sean “a” los casos favorables del suceso *Esteban gana*, “b” los resultados posibles al lanzar un dado, y k_1, k_2 el número de chocolatinas que ganaría cada jugador. El estudiante iguala la esperanza matemática de cada jugador (Esteban: $k_1 \cdot (a/b)$ y María: $k_2 \cdot ((b-a)/b)$) buscando el valor k_1 tal que $k_1 \cdot (a/b) = k_2 \cdot ((b-a)/b)$, donde $k_1 \cdot (1/6) = 1 \cdot (5/6)$, por lo que $k_1 = 5$.

E71: Cinco, María tiene una probabilidad 5/6 de ganar 1 chocolatina mientras que Esteban tiene 1/6 de probabilidad: por tanto, sólo es justo cuando obtiene 5 chocolatinas.

Estimación correcta del premio, aplicando la proporcionalidad inversa. Sea “a” el número de casos favorables y “b” el número de chocolatinas a ganar en el juego, entonces $(a_1,b_1)=(5,1)$ representa que María tiene cinco oportunidades de ganar y gana una chocolatina, y $(a_2,b_2)=(1,x)$ representa que Esteban tiene un caso favorable para ganar y "x" número de chocolatinas: $x = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5$. Por consiguiente, los estudiantes utilizan la proporcionalidad inversa, ya que al comparar las razones a_1/b_1 y a_2/b_2 encuentran que $a_1 \cdot a_2 = b_2 \cdot b_1$ (Ben Chaim et al., 2012).

E218: Cinco chocolatinas. Si María gana una chocolatina cada vez que consigue una de las cinco caras, Esteban debería ganar cinco chocolatinas cada vez que consigue una cara."

Estimación correcta del premio, con un argumento confuso. Se interpreta que el estudiante resolvió correctamente el problema, pero no tuvo fluidez para explicar el método seguido.

E233: Cinco, porque María tiene más probabilidad.

En las respuestas parcialmente correctas, el estudiante calcula correctamente la probabilidad, pero proporciona una estimación incorrecta del premio o no lo calcula. El estudiante se da cuenta de la ventaja de María, es decir, de que el juego no es justo; pero no realiza una asignación correcta de chocolatinas a Esteban. Esta respuesta está ligada a estrategias aditivas de intuición que no implican ningún procedimiento matemático, sino sólo una estimación del valor; pueden aparecer respuestas como 2, 4 y 6 chocolatinas. Las siguientes respuestas se consideran parcialmente correctas:

- El estudiante calcula correctamente la probabilidad, pero estima mal el premio, como E35.

E35: 6 barras, porque su probabilidad es 1/6 y la de María es 5/6.

- El estudiante se da cuenta de que las probabilidades son diferentes, pero no calcula las probabilidades ni el premio, como E4.

E4: Más chocolatinas, ya que María tiene muchas posibilidades de ganar y Esteban sólo una.

Finalmente, en las respuestas incorrectas, tanto el premio como la probabilidad no se calculan o son incorrectos, como en E13:

E13: Dos, porque María tiene más probabilidad.

Otras respuestas incorrectas se debieron a argumentos no matemáticos, como en el caso de E192, que sólo sugiere que ambos jugadores deben llegar a un acuerdo para dividir el premio. Otros estudiantes, como E179 razonan según el *enfoque del resultado* (Konold, 1989) ya que malinterpretan la pregunta y, en lugar de calcular una probabilidad, pretenden adivinar el resultado del juego.

E192: María y Esteban deben llegar a un acuerdo.
E179: No podemos saberlo, ya que se puede ganar muchas veces.

Por último, un estudiante evidencia un conflicto semiótico (Godino, et al. 2007; 2019) cuando asigna a un objeto matemático (por ejemplo "equitatividad del juego") un significado diferente al de la institución docente. Así, el estudiante E274 sugiere que cualquier juego de azar es justo, razonamiento también descrito por Cañizares et al. (2004). Este estudiante asigna una chocolatina a Esteban, considerando que ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar. Esta estrategia está relacionada con el *sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992), donde la persona concibe la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, aunque haya casos más favorables para un suceso que para otro.

E274: Uno, porque si sale un 6, María también se lleva una chocolatina y es justo.

5.8.4. Resultados

En esta sección presentamos los resultados de analizar las respuestas de los estudiantes costarricenses que formaron parte de nuestro Estudio 2 al resolver una tarea de juego equitativo, y de su relación con el nivel de razonamiento proporcional evidenciado al resolver tareas de comparación de razones. Los resultados sobre el nivel de razonamiento proporcional se describieron en la Sección 5.5.4.

Comprensión del juego equitativo

En la Tabla 5.8.1 se presenta el porcentaje de estudiantes que emplearon las distintas estrategias descritas en la Sección 3.8.3 para resolver la tarea de juego equitativo (Ítem 7).

La proporción de soluciones correctas supuso un 45,6%, 42,4%, 51,5%, 75,1% y 53,6% de respuestas en los cursos de 6º a 10º, respectivamente. Cañizares et al. (2004) obtuvieron un 45,1%, 62,1% y 46,6% de soluciones correctas en los cursos de 6º a 8º. Así pues, los autores consiguieron una mayor proporción de soluciones correctas en los cursos de 7º y 8º en comparación con la muestra del presente estudio. Esto resultó contrario a las expectativas planteadas, ya que en el estudio de Cañizares et al. (2004) los estudiantes no tenían estudios previos de probabilidad.

Tabla 5.8.1. Porcentaje de estudiantes usando cada estrategia en el Ítem 7 por curso

Respuesta		Curso				
		6	7	8	9	10
Estimación correcta del premio	Esperanza matemática	2,9	7,7	9,4	13,5	7,1
	Proporcionalidad inversa	33,8	30,9	34,4	50,0	35,8
	Estimación correcta, con argumento confuso o sin argumento	8,9	3,8	7,7	11,6	10,7
Cálculo correcto de la probabilidad sin estimar el premio	Estimación incorrecta del premio y probabilidad correcta		3,8	6,3		3,6
	Probabilidad correcta sin estimar el premio		1,9	1,6		
	No calcula, pero observa probabilidades diferentes	2,9	3,8	3,1		3,6
Respuesta incorrecta	Probabilidad y premio incorrectos	27,9	28,9	18,7	11,5	19,6
	Argumentos no matemáticos			1,6		
	Enfoque en el resultado			1,6		
	Sesgo de equiprobabilidad	11,8	17,3	6,3	5,8	7,1
	Respuesta incorrecta, confusa o sin argumento	4,4	1,9	1,6	3,8	1,8
No responde		7,4		7,7	3,8	10,7

En el 9º curso, los estudiantes habían estudiado recientemente la probabilidad al final del curso anterior, y estaban estudiando el tema cuando se aplicó el cuestionario, y eso explica los mejores resultados en este grupo. Los resultados en 6º curso fueron mejores que los del estudio exploratorio (Hernández-Solís et al., 2021), en el que los estudiantes sólo obtuvieron un 32,7% de respuestas correctas. En general, hubo un escaso uso de argumentos no matemáticos o de sesgos de razonamiento como la equiprobabilidad o el enfoque en el resultado. Sin embargo, la proporción de los que calcularon probabilidades y premio incorrectos varió entre el 11% y el 28,9% en los distintos cursos. Esto apoya la conjetura planteada al inicio del estudio, de que la comprensión de la equitatividad está vinculada al razonamiento proporcional de los estudiantes. Esta conjetura se estudiará en los siguientes apartados.

Para visualizar mejor cómo aumenta la comprensión de los estudiantes sobre los juegos equitativos con el curso, la Tabla 5.8.2 resume las distintas estrategias y se añade una puntuación a cada estudiante, con los siguientes criterios:

0. Cuando el estudiante no responde la pregunta o proporciona una respuesta incorrecta. Aquí se incluyen los diferentes sesgos de razonamiento, las estrategias no matemáticas y la ausencia de argumento o el argumento confuso.
1. Cuando el estudiante no resuelve el problema, pero percibe las diferentes probabilidades para los dos jugadores del juego.
2. Cuando se calcula correctamente la probabilidad de cada jugador, aunque no se estima el premio para obtener un juego justo. Aquí se incluyen los estudiantes que no calcularon el premio y a los que lo hicieron de forma incorrecta.
3. Cuando se obtiene correctamente la probabilidad de los dos jugadores y se estima correctamente el premio para que el juego sea equitativo. Sin embargo, las explicaciones son incorrectas o confusas.
4. Aquellos estudiantes que responden correctamente tanto las probabilidades como el premio, y además, utilizaron un argumento matemático correcto para justificar su respuesta. Aquí se incluyen los que utilizan la esperanza matemática y a los que emplean la proporcionalidad inversa.

Tabla 5.8.2. Resumen de estrategias en el Ítem 7 por curso

Respuesta	Puntuación	6	7	8	9	10
Estimación y argumentos correctos	4	36,7	38,5	43,8	63,5	42,9
Estimación correcta	3	8,9	3,8	7,7	11,6	10,7
Probabilidad correcta	2		5,8	7,9		3,6
Diferente probabilidad	1	2,9	3,8	3,1		3,6
Otras respuestas		51,5	48,1	37,5	24,9	39,2

Los resultados de la Tabla 5.8.2 sugieren que menos de la mitad de los alumnos de cada curso alcanzaron el nivel máximo de comprensión del juego equitativo, proporcionando una estimación correcta del premio con una argumentación adecuada. Además, el porcentaje aumenta por curso, con la excepción del 9º curso, en el que la mayoría de los alumnos alcanzó la puntuación máxima. Por otra parte, la puntuación más baja (0) de los estudiantes que no contestaron o dieron respuestas incorrectas mostró diferentes conflictos semióticos, que disminuyeron con el curso. La puntuación media por curso fue de 1,8 (6º curso), 1,8 (7º curso), 2,2 (8º curso), 2,9 (9º curso) y 2,1 (10º curso).

Relación entre la comprensión del juego equitativo y el razonamiento proporcional

Para estudiar la relación entre el nivel de razonamiento proporcional y la comprensión del juego equitativo, en la Tabla 5.8.3 se presentan el porcentaje de alumnos que emplearon las distintas estrategias descritas para resolver el Ítem 7, según cada uno de los distintos niveles de razonamiento en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b).

Se observa que el uso de las estrategias correctas para determinar el premio en el juego justo (esperanza matemática y proporcionalidad inversa) aumenta con el nivel de razonamiento según Noelting (1980a, 1980b) y más de la mitad de los alumnos de los niveles IIIA y IIIB utilizaron estas estrategias. De forma menos sistemática, también aumenta la proporción de los que calculan correctamente las probabilidades de ambos jugadores. La puntuación media por nivel es de 1,9 (nivel 0), 1,4 (nivel IA), 1,8 (nivel IB), 2,2 (nivel IIA), 2,6 (nivel IIB), 2,8 (nivel IIIA) y 3,4 (nivel IIIB). En cambio, la proporción de los que tienen estrategias incorrectas o sesgos de razonamiento disminuye al aumentar el nivel de razonamiento proporcional.

Tabla 5.8.3. Porcentaje de estudiantes según la estrategia en el juego equitativo y razonamiento proporcional

Respuesta	Puntaje		Nivel de razonamiento proporcional						
			0	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB
Estimación correcta del premio	4	Esperanza matemática	2,6	6,5	2,8	6,0	11,8	23,1	28,6
	4	Proporcionalidad inversa	25,6	25,8	39,4	38,8	45,1	34,6	42,9
	3	Estimación correcta, con argumento confuso o sin argumento	20,5	3,2	2,8	11,9	5,9	11,6	0,0
Cálculo correcto de la probabilidad sin estimar el premio	2	Estimación incorrecta del premio y probabilidad correcta	5,1			1,5	3,9	3,8	28,5
	2	Probabilidad correcta sin estimar el premio			1,4		2,0		
	1	No calcula, pero observa probabilidades diferentes	2,6	3,2	4,2	1,5	2,0	3,8	
Respuesta incorrecta	0	Probabilidad y premio incorrectos	10,3	32,3	25,5	29,8	15,6	11,6	
	0	Argumentos no matemáticos					2,0		
	0	Enfoque en el resultado	2,6						
	0	Sesgo de equiprobabilidad	12,8	16,1	11,3	9,0	7,8		
	0	Respuesta incorrecta, confusa o sin argumento		6,4	7,0			7,6	
No responde	0		17,9	6,5	5,6	1,5	3,9	7,7	

Estas tendencias son más visibles en la Tabla 5.8.4, donde se resumen las puntuaciones obtenidas en el Ítem 7 (juego equitativo) en cada nivel de razonamiento. Así, encontramos tan sólo un 28,2% de alumnos que alcanzaron 4 puntos en el nivel 0, mientras que el 71,5% de los alumnos lograron la máxima puntuación en el nivel IIIB.

Por el contrario, mientras que el 43,6% de los alumnos con puntuación 0 se mantuvo en el nivel 0 de la clasificación de Noelting (1980a, 1980b), ningún alumno del nivel IIIB y sólo el 23,1% del nivel IIIA se mantuvo en ese nivel 0.

Tabla 5.8.4. Porcentaje de estudiantes con diferente puntación en la comprensión del juego equitativo en cada nivel de razonamiento proporcional

Puntuación	0	IA	IB	IIA	IIB	IIIA	IIIB
4	28,2	32,3	42,2	44,8	56,9	57,7	71,5
3	20,5	3,2	2,8	11,9	5,9	11,6	
2	5,1		1,4	1,5	5,9	3,8	28,5
1	2,6	3,2	4,2	1,5	2,0	3,8	
0	43,6	61,3	49,4	40,3	29,3	23,1	

Todos los resultados anteriores se ven confirmados por el estudio de las correlaciones entre las distintas variables consideradas (Ver Tabla 5.8.5). Se observa que el coeficiente de correlación entre el nivel de razonamiento proporcional y las puntuaciones de comprensión del juego equitativo es mayor que entre el nivel de razonamiento proporcional con el curso escolar, y la que existe entre las puntuaciones de comprensión del juego equitativo y el curso escolar. Estos valores de correlación son pequeños, pero estadísticamente significativos; en particular, la correlación entre la comprensión del juego equitativo y el nivel de razonamiento proporcional es altamente significativa.

Tabla 5.8.5. Coeficientes de correlación entre el razonamiento proporcional, puntuación den la comprensión del juego equitativo y curso

	Puntuación en la comprensión del juego equitativo	Valor p	Curso	Valor p
Nivel de razonamiento proporcional	0,210	0,000	0,124	0,034
Curso	0,137	0,019		

5.8.5. Discusión y conclusiones

Los resultados mostraron un incremento en el nivel de razonamiento proporcional con el curso, aunque la edad a la que se alcanzan los niveles superiores fue mayor que la asumida por Noelting (1980a, 1980b). Los niveles de dificultad descritos por Pérez-Echeverría et al. (1986) fueron similares a la presente investigación. El porcentaje de estudiantes que aplicaron estrategias correctas en el problema del juego equitativo también aumentó con el curso de forma parecida a los estudiantes del estudio de Schlottmann y Anderson (1994) para decidir la equitatividad del juego.

Una diferencia con Cañizares (1997), es que en su investigación muchos estudiantes consideraban que solo eran equitativos los juegos en los que los dos jugadores tenían la misma probabilidad de ganar. Creencias similares tuvieron niños y adultos en la investigación de Batista et al. (2022). Tampoco se encontró, en el presente estudio, ejemplos de las creencias erróneas descritas por Watson y Collis (1994), como que los dispositivos aleatorios podían favorecer a un jugador o que las características físicas pudieran afectar a la equidad del juego, lo que es razonable dadas las edades superiores de los estudiantes del presente estudio. Ninguno de los estudiantes de la muestra argumentó que algunos números tuvieran más probabilidades de ocurrir, en contradicción con los resultados obtenidos por Vidakovic et al. (1998), lo cual hace suponer que el estudiantado conocía muy bien las características del dado como dispositivo aleatorio. En consecuencia, en el presente estudio los estudiantes mostraron un mejor razonamiento proporcional y probabilístico, que se le puede atribuir a la enseñanza de probabilidad que habían recibido en los cursos anteriores.

Es importante señalar que se evidenció una relación entre la comprensión de la equitatividad de un juego y el nivel de razonamiento proporcional. Los participantes en los niveles más altos de razonamiento proporcional aplicaron con más frecuencia estrategias y argumentos correctos en su estudio de la equitatividad del juego. Este hecho quedó confirmado por una correlación significativa entre la puntuación otorgada a la corrección en la determinación de la equitatividad del juego y el nivel de razonamiento proporcional.

Por último, hay que advertir que el razonamiento proporcional es una de las principales competencias de los alumnos, porque influye en la comprensión de la probabilidad, el álgebra, la medida y otros contenidos matemáticos (Burgos y Godino, 2020; Lamon, 2007). Sin embargo, en el presente estudio, pocos estudiantes de 10º curso alcanzaron el máximo nivel IIIB en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b). Este hecho puede impedir su progreso en el aprendizaje de otros temas matemáticos y, en consecuencia, es necesario prestar atención al nivel de razonamiento proporcional de los alumnos a la hora de organizar la enseñanza.

5.9. CONSTRUCCIÓN DE ESPACIOS MUESTRALES Y RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

5.9.1. Introducción

El espacio muestral (o conjunto de sucesos posibles de un experimento aleatorio) es fundamental en el estudio de la probabilidad (Langrall y Mooney, 2005; Lima y Borba, 2021; Nunes et al., 2014), pues su composición se debe identificar para resolver cualquier problema probabilístico. En Costa Rica, los estudiantes comienzan a familiarizarse con el espacio muestral en el primer ciclo de Educación Primaria (1º a 3º curso), donde identifican situaciones aleatorias y seguras y clasifican los sucesos en más o menos probables. Continúan este estudio el resto de la Educación Primaria, clasificando los sucesos en seguros, probables, equiprobables e imposibles; obteniendo la probabilidad de un suceso en 6º curso. En 8º y 9º (Educación Secundaria) se retoman estos conceptos, pero brindando una mayor precisión matemática, y en 10º curso se formalizan las reglas básicas de la probabilidad.

A pesar de su aparente sencillez, varias investigaciones (Chernoff y Zazkis, 2011; Hernández-Solís et al*.,* 2021c) informan de las dificultades de los estudiantes. Parte de estos problemas podrían explicarse por un nivel de razonamiento proporcional insuficiente, debido a su relación con el pensamiento combinatorio, requerido en la construcción de un espacio muestral (Zapata-Cardona, 2018).

Como ya se ha repetido en las secciones anteriores, el razonamiento proporcional ha recibido un gran interés en la investigación didáctica. Sin embargo, no se encuentran estudios que analicen empíricamente la relación entre el razonamiento proporcional y la competencia en la construcción del espacio muestral. Igualmente, son muy escasas las relacionadas con la construcción del espacio muestral, a excepción del trabajo previo (Hernández-Solís et al., 2021c).

Para completar estas carencias, en esta sección se describen resultados de nuestro estudio, en el que se trata de relacionar estos dos conocimientos en estudiantes costarricenses de 11 a 16 años de edad. Con ello se aborda el quinto objetivo del Estudio 2, enunciado en la forma siguiente:

O3.5. Estudiar si existe relación entre el nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y los resultados obtenidos en tareas de construcción de espacios muestrales.

En las secciones siguientes se describe la estructura de los ítems, categorías de análisis de estrategias, los resultados y conclusiones obtenidas en nuestro estudio, incluidos en la siguiente publicación aceptada:

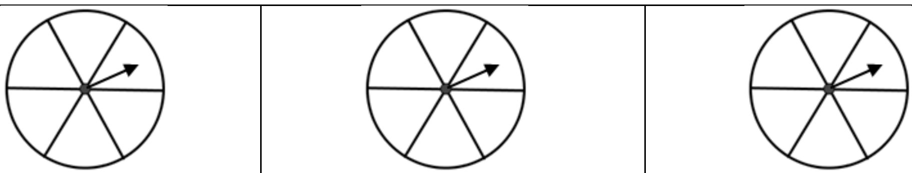
Hernández-Solís, L.A., Batanero, C. y Gea, M.M. (en prensa). Razonamiento proporcional y construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos por estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística.*

5.9.2. Estructura de los ítems

Los ítems de comparación de razones se describieron en la Sección 5.5.2 y los dos ítems que aparecen en la Figura 5.9.1 se añadieron, tanto al cuestionario A como al

B, para nuestro estudio sobre la construcción de espacios muestrales. En ellos se pide al estudiante construir un espacio muestral para que el suceso “gana María” sea, respectivamente: seguro, equiprobable a su complementario o imposible. Su resolución implica la comprensión del experimento aleatorio y los sucesos: posible, favorable (gana María) y desfavorable (no gana María), seguro, equiprobable a su complementario e imposible, según cada apartado. Los ítems han sido tomados de Hernández-Solís et al. (2021c), modificándose el Ítem 7, cuyas ruletas estaban divididas en 4 partes y se solicitaba escribir un numeral en los sectores, en lugar de colorearlos.

Ítem 7. María y Esteban juegan con una ruleta dividida en seis partes iguales. María gana un premio si la aguja que gira cae en una parte pintada de color negro y Esteban gana si cae en una parte pintada de color blanco. Pinta en las siguientes ruletas tantas partes negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:



(a) María gana seguro	(b) María y Esteban tienen igual probabilidad de ganar	(c) Es imposible que María gane

Ítem 8. En un juego se saca, sin mirar, una bola de una caja. Si ésta es de color negro María gana y si es de color blanco Esteban gana. Dibuja y colorea en las siguientes cajas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que:

(a) Sea seguro que María gane	(b) Sea igual de probable que gane María o Esteban	(c) Sea imposible que María gane

Figura 5.9.1. Ítems de construcción de espacios muestrales

En el Ítem 7 (ruletas) la probabilidad de los dos sucesos diferentes (blanco y negro) dependerá del número de sectores coloreados de cada color. Para que María gane con seguridad, todos los sectores de la ruleta deben colorearse en negro y todos en blanco para que sea imposible que María gane. La equiprobabilidad entre ganar y perder se logra coloreando la mitad de los sectores de cada color.

En el Ítem 8 se debe formar un espacio muestral con cualquier número de bolas blancas y negras. Si todas las bolas son negras, se logra el suceso seguro (María gana), y si todas son blancas, el imposible (María pierde). El suceso equiprobable a su complementario se logra si en la urna se representan el mismo número de bolas blancas y negras.

Se usan los dos contextos porque la ruleta favorece las comparaciones de tipo parte-todo, mientras las urnas favorecen la comparación parte-parte (Cañizares, 1997).

Además, en Hernández-Solís et al., (2021c) fue levemente más difícil el contexto de ruletas y se desea comprobar si el nivel de dificultad se mantiene al cambiar la división en partes de las ruletas; asimismo, ver si existen diferencias con una muestra de estudiantes mucho mayor y de mayor amplitud en edad.

5.9.3. Categorías de análisis de estrategias

A continuación, se describen las categorías usadas para clasificar las respuestas de los estudiantes en los Ítems 7 y 8 sobre construcción de espacios muestrales. Las correspondientes a la comparación de razones se describen en la Sección 5.5.3.

En los ítems de construcción de espacio muestrales se codificó la respuesta proporcionada para cada apartado del ítem como correcta o incorrecta y, entre estas últimas, se diferenció el tipo de sucesos implicado por el espacio muestral construido, siguiendo los criterios utilizados en Hernández-Solís et al. (2021c):

Espacio muestral que proporciona un suceso seguro. La respuesta sería correcta si se construye un espacio muestral formado sólo por casos favorables al suceso *María gana*. En la Figura 5.9.2 se muestran algunos ejemplos incorrectos. En el primero (ruletas), la probabilidad de ganar María sería 5/6, es decir, se confunde el suceso "seguro" con el suceso "muy probable". En el ejemplo incorrecto para el contexto de urnas, se construye también un espacio muestral para el suceso "muy probable que María gane", ya que la probabilidad de que María gane es 6/8. La confusión entre muy probable y seguro apareció en las investigaciones de Cañizares (1997), Green (1982) y Hernández-Salmerón et al. (2017).

Incorrecto, ruletas	Incorrecto, urnas
 (a) María gana seguro	 (a) Sea seguro que María gane

Figura 5.9.2. Espacios muestrales incorrectos para el suceso seguro.

Espacio muestral que proporciona un suceso equiprobable a su complementario. El segundo apartado de los Ítems 7 y 8 solicita al estudiante construir un espacio muestral tal que los sucesos "María gana" y "María pierde" sean equiprobables. La respuesta correcta consiste en incluir el mismo número de casos favorables y desfavorables en el espacio muestral. En la Figura 5.9.3 se presentan algunas respuestas incorrectas con dos casos favorables y cuatro desfavorables. En el primero, se unen sectores blancos adjuntos como un solo suceso elemental; así, el estudiante considera que hay dos casos favorables y dos casos desfavorables. En el segundo se mostraría el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), al considerar equiprobable cualquier resultado de un experimento aleatorio, independientemente del número de casos favorables y posibles. Es factible que el estudiante haya considerado solo el color de resultado, sin tener en cuenta su probabilidad, pues Chernoff y Zazkis (2011) y Nilsson (2007) indican que los espacios muestrales supuestos por los estudiantes no siempre coinciden con los normativos.

Incorrecto, ruletas	Incorrecto, urnas
	

Figura 5.9.3. Espacios muestrales incorrectos para el suceso equiprobable a su complementario

Espacio muestral que corresponde a un suceso imposible. La última tarea consiste en determinar un espacio muestral que haga imposible que María gane el juego, para lo cual, el espacio muestral ha de estar compuesto totalmente por sucesos desfavorables. Se presentan en la Figura 5.9.4, ejemplos incorrectos que evidencian confusión entre sucesos probables (ejemplo en ruletas) o muy poco probables (ejemplo en urnas) e imposibles, citado por Cañizares (1997), Green (1982) y Hernández-Salmerón et al. (2017). Al considerar el suceso imposible, los estudiantes incluyen algunos casos favorables, aunque proponen menos casos favorables que desfavorables.

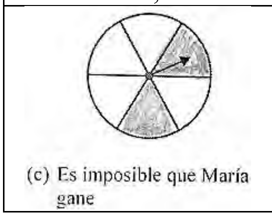
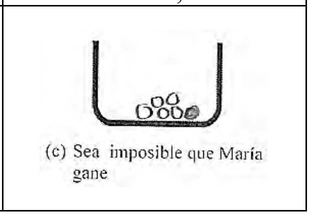
Incorrecto, ruletas	Incorrecto, urnas
	

Figura 5.9.4. Espacios muestrales construidos para un suceso imposible.

5.9.4. Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la construcción de espacios muestrales en contextos de ruletas y de urnas, para finalmente analizar la relación entre este tipo de tareas y aquellas que evalúan el nivel de razonamiento proporcional, que se han descrito en la Sección 5.5.4.

Espacios muestrales construidos en contexto de ruletas

En la Tabla 5.9.1 se presenta el porcentaje de estudiantes que en cada curso construye un espacio muestral correcto para cada tipo de suceso en contexto de ruletas, y en la Tabla 5.9.2 se clasifican las respuestas, según el espacio muestral construido, resaltando con negrita las correctas.

Tabla 5.9.1. Porcentaje de estudiantes que construyen correctamente el espacio muestral por curso en el Ítem 7 (ruletas)

Curso	Suceso solicitado		
	Seguro	Equiprobable a su complementario	Imposible
6º	25,0	88,2	36,8
7º	55,8	90,4	65,4
8º	34,4	87,5	48,4
9º	51,9	80,8	57,7
10º	41,1	91,1	46,4

Tabla 5.9.2 Porcentaje de respuestas en cada apartado del Ítem 7 (ruletas)

Espacio muestral construido	Suceso solicitado		
	Seguro	Equiprobable a su complementario	Imposible
Suceso seguro	**40,4**	0,3	1,7
Suceso muy probable	37,7	0,7	1,7
Suceso equiprobable a su complementario	5,1	**87,7**	1,7
Suceso posible	7,9	3,4	9,2
Suceso poco probable	2,7	2,1	29,5
Suceso imposible	0,7	0,7	**50,0**
Construcción confusa		0,3	
No responde	5,5	4,8	6,2

Se observa, en la Tabla 5.9.1, que es mucho más sencillo construir el espacio muestral que lleva a un suceso equiprobable a su complementario en el juego propuesto, pues casi el 90% en todos los cursos lo realiza correctamente, creciendo ligeramente el porcentaje con el curso. Es bastante más difícil responder a los otros apartados, en particular para los estudiantes de 6º curso; y no se observa un patrón regular de mejora de las respuestas con el curso escolar. El porcentaje de niños de 6º curso que resuelven adecuadamente la pregunta sobre el suceso seguro es algo menor que el obtenido en Hernández-Solís et al. (2021c) (34,5%) y mayor para el suceso imposible que en aquel caso (35,5%).

Los principales errores, como se observa en la Tabla 5.9.2, fueron confundir suceso seguro con suceso muy probable y suceso imposible con suceso poco probable, coincidiendo con los resultados obtenidos por Cañizares (1997), Green (1982), Groth et al. (2020) y Hernández-Salmerón et al. (2017).

Espacios muestrales construidos en contexto de urnas

En la Tabla 5.9.3 se presenta el porcentaje de estudiantes que construye un espacio muestral correcto para cada tipo de sucesos (seguro, equiprobable a su complementario e imposible) en contexto de urnas en cada curso, y en la Tabla 5.9.4 se clasifican las respuestas por espacio muestral construido, resaltando en negrita la respuesta correcta.

Tabla 5.9.3. Porcentaje de estudiantes que construyen correctamente el espacio muestral por curso en el Ítem 8 (urnas)

Curso	Suceso solicitado		
	Seguro	Suceso equiprobable a su complementario	Imposible
6º	22,1	89,7	33,8
7º	50,0	92,3	67,3
8º	35,9	87,5	51,6
9º	44,2	84,6	55,8
10º	41,1	89,3	48,2

Tabla 5.9.4. Porcentaje de respuestas en cada apartado del Ítem 8 (urnas)

Espacio muestral construido	Suceso solicitado		
	Seguro	Equiprobable a su complementario	Imposible
Suceso seguro	**37,7**		3,1
Suceso muy probable	42,1	0,3	2,1
Suceso equiprobable a su complementario	0,7	**88,7**	0,3
Suceso posible	7,5	3,4	5,1
Suceso poco probable	2,7	0,7	32,9
Suceso imposible	2,7	0,4	**50,3**
Construcción confusa	0,4		
No responde	6,2	6,5	6,2

Al comparar con los trabajos sobre comprensión del lenguaje de probabilidad, encontramos que Green (1982) obtuvo 40%, 44% y 57% de respuestas correctas para el significado de “no puede ocurrir” en los cursos 6º, 7º y 8º; 18%, 25% y 34% para “igual posibilidad” y 84%, 84% y 89% para “imposible”. Por su parte, Cañizares (1997) obtuvo 46,2%, 55,2% y 65,8% para “no puede ocurrir”, 42,9%, 52,9% y 58,5% para la frase “igual posibilidad” y 81%, 83,9% y 78,1% para “imposible”. En ambos estudios, la mayor dificultad fue comprender la idea de suceso seguro (siempre ocurre) y equiprobable (igual posibilidad).

Los resultados obtenidos son inferiores en los dos ítems, pero la tarea es más compleja puesto que se pide, además de comprender el lenguaje de probabilidad, construir el espacio muestral. Por otro lado, no se observa tan claramente un progreso en la tarea con el curso escolar como en las citadas investigaciones. Esto puede deberse a que este tipo de tareas no es común en la enseñanza matemática costarricense ni en los libros de texto que se emplean en el sistema educativo.

Relación entre la competencia de construir de espacios muestrales y el nivel de razonamiento proporcional

En la Tabla 5.9.5 se presenta el porcentaje de estudiantes que construye un espacio muestral correcto para cada tipo de sucesos (seguro, equiprobable e imposible) por nivel de razonamiento probabilístico en contexto de ruletas y en la Tabla 5.9.6 en contextos de urnas.

Tabla 5.9.5. Porcentaje de estudiantes que construyen correctamente el espacio muestral en contexto de ruletas por nivel de razonamiento proporcional

Nivel razonamiento proporcional	Suceso solicitado		
	Seguro	Equiprobable a su complementario	Imposible
0	38,5	74,4	46,2
IA	19,4	83,9	38,7
IB	19,7	84,5	35,2
IIA	40,3	92,5	47,8
IIB	56,9	94,1	66,7
IIIA	80,8	96,2	73,1
IIIB	85,7	85,7	85,7

Tabla 5.9.6. Porcentaje de estudiantes que construyen correctamente el espacio muestral en contexto de urnas por nivel de razonamiento proporcional

Nivel razonamiento proporcional	Suceso solicitado		
	Seguro	Equiprobable a su complementario	Imposible
0	15,4	69,2	35,9
IA	25,8	87,1	45,2
IB	22,5	91,5	36,6
IIA	38,8	94,0	49,3
IIB	58,8	90,2	66,7
IIIA	69,2	96,2	76,9
IIIB	85,7	85,7	85,7

Se observa un crecimiento en función del nivel de razonamiento proporcional, prácticamente en los tres tipos de sucesos y los dos contextos, mientras este crecimiento no era tan visible en relación al curso (Tablas 5.9.1 y 5.9.3). En particular, mientras el porcentaje global de construcciones correctas para los sucesos seguro e imposible era cercano al 40%, supera los 2/3 en los estudiantes que se sitúan en los niveles de razonamiento proporcional superiores.

Para analizar la posible significación estadística de estos resultados, en las Tablas 5.9.7 y 5.9.8 se presentan las correlaciones no paramétricas entre el curso, nivel de razonamiento proporcional y número de respuestas correctas para la construcción de espacios muestrales en contexto de ruletas y en contexto de urnas, para los sucesos seguro, equiprobable a su complementario e imposible, según el número total de espacios muestrales construidos, resaltando en negrita los resultados estadísticamente significativos.

Tabla 5.9.7. Correlaciones no paramétricas (Tau de Kendall) entre el número de espacios muestrales correctos, nivel de razonamiento proporcional y curso escolar

	Curso	p	Nivel razonamiento proporcional	p
Curso			,097*	,037
Ruletas	,058	,238	,269**	,000
Urnas	,068	,162	,310**	,000
Suceso seguro	,097	,056	,300**	,000
Suceso equiprobable a su complementario	,012	,818	,185**	,000
Suceso imposible	,055	,278	,221**	,000
Total espacios correctos	,065	,169	,292**	,000

Tabla 5.9.8. Correlaciones no paramétricas (Rho de Spearman) entre el número de espacios muestrales correctos, nivel de razonamiento proporcional y curso escolar

	Curso	p	Nivel razonamiento proporcional	p
Curso			,122*	,037
Ruletas	,070	,230	,324	,000
Urnas	,079	,178	,360	,000
Suceso seguro	,112	,055	,358	,000
Suceso equiprobable a su complementario	-0,14	,818	,212	,000
Suceso imposible	,064	,275	,262	,000
Total espacios correctos	,079	,175	,362	,000

Se observan correlaciones estadísticamente muy significativas entre el nivel de razonamiento proporcional y cada una de las variables citadas, excepto la variable curso, que no presenta correlación con ninguna de las variables. Aunque las correlaciones tienen un tamaño pequeño o moderado, son de sentido positivo, lo que muestra una asociación directa entre el nivel de razonamiento proporcional y la construcción de espacios muestrales de cada uno de los tipos estudiados en el trabajo.

5.9.5. Discusión y conclusiones

En el estudio sobre la relación entre el nivel de razonamiento proporcional, según la clasificación de Noelting (1980a, 1980b), y la competencia en construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos, en contextos de urnas y de ruletas, se ha encontrado asociación estadística directa entre estas variables, confirmando la conjetura expuesta por autores como Zapata-Cardona (2018), no probada anteriormente de forma empírica. Sin embargo, esta relación estadística no se da con el curso escolar, lo que indica una posible dificultad en la combinatoria.

El refuerzo del razonamiento proporcional, como conclusión, mejoraría igualmente la comprensión de las ideas de imposible y seguro, que fueron difíciles para los estudiantes, en general, al igual que en Cañizares (1997), Green (1982) y Groth et al.

(2020). Dicha dificultad implica la falta de relación entre el espacio muestral con la mayor o menor posibilidad de cada resultado del experimento (Horvath y Lehrer, 1998). Por otro lado, pudiera deberse a la dificultad en no separar bien los casos favorables y desfavorables en los experimentos propuestos (Nilsson, 2007).

La dificultad se supera, sin embargo, en los estudiantes que razonan en los niveles IIA y superiores de la clasificación de Noelting (1908a, 1980b). Dada la relación entre la capacidad de construcción del espacio muestral, el razonamiento combinatorio (Lockwood et al., 2020) y la resolución de problemas de probabilidad (Nunes, et al., 2014; Langrall y Mooney, 2005) la mejora del razonamiento proporcional repercutirá en la del razonamiento probabilístico de los estudiantes.

En las tareas propuestas se debe construir un espacio muestral a partir de ciertas condiciones iniciales, lo que plantea un desafío para el estudiante al no ser una tarea habitual para ellos, muchos de los cuales, sin embargo, la han completado satisfactoriamente.

Aunque en un trabajo previo (Hernández-Solís et al., 2020), el contexto de ruletas fue levemente más complejo que el de urnas (con una muestra mucho menor y solamente de 6º curso), no se encontró mucha diferencia en el presente estudio que incluye una muestra mayor en estudiantes de mayor edad. Dichas tareas podrían utilizarse en el aula, para reforzar la articulación entre combinatoria y probabilidad, basada en la construcción de espacios muestrales (Lima y Borba, 2021). Al mismo tiempo podrían contribuir a la mejora del razonamiento proporcional, dado la importancia del contexto de los problemas proporcionales en su dificultad y las estrategias con que los abordan los estudiantes (Supply et al., 2023).

5.10. CONCLUSIONES GENERALES DEL ESTUDIO 2 DE EVALUACIÓN

5.10.1. Conclusiones sobre los objetivos

En esta sección se discuten los resultados para cada uno de los objetivos de este segundo estudio de evaluación, los cuales desarrollan el tercer objetivo general de la investigación, enunciado del modo siguiente:

O3. Estudiar la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas en estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

Dicho objetivo se justificó por la falta de investigaciones específicas que relacionasen el razonamiento probabilístico y proporcional en estudiantes costarricenses. Además, en una parte de este estudio se compararían los resultados con los de estudiantes españoles de las mismas edades, puesto que las investigaciones sobre el tema en España son escasas y tampoco se han encontrado estudios comparativos como el pretendido. Seguidamente se desglosaron los siguientes objetivos específicos:

O3.1. Estudiar el razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

En el cuestionario de evaluación aparecen una serie de ítems sobre comparación de razones que tienen en cuenta seis niveles consecutivos de razonamiento proporcional en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b), lo que permitió analizar y comparar diferentes variables relacionadas con el razonamiento proporcional de estudiantes costarricenses y españoles de los cursos 6º a 10º.

En una muestra de 704 estudiantes se proporcionó información detallada del porcentaje de respuestas correctas a cada ítem en los diferentes cursos escolares, así como de sus estrategias correctas e incorrectas para resolver las tareas. Dichas estrategias varían con el nivel de razonamiento de la clasificación de Noelting (1980a,1980b) requerido en la tarea.

Se obtuvo un gran porcentaje de éxito en los ítems de nivel de razonamiento proporcional IA y IB en todos los cursos, pues los estudiantes utilizaron para resolverlos estrategias de una variable o aditivas, que eran válidas para estos niveles. Fueron más difíciles los ítems de niveles superiores, al igual que ocurrió en Pérez-Echeverría et al. (1986), aunque en el presente estudio se obtiene una mayor variedad de estrategias.

Hay que notar que los estudiantes de la muestra parecen razonar a niveles inferiores que los supuestos en la teoría de Noelting (1980a, 1980b), resultado que debiera tenerse en cuenta por los profesores, por la importancia del razonamiento proporcional en el razonamiento algebraico elemental y el desarrollo del pensamiento formal (Burgos y Godino, 2019; Kieren, 2020; Obando et al., 2014).

O3.2. Estudiar la relación existente entre el nivel de razonamiento proporcional de las tareas resueltas por los estudiantes de la muestra en la comparación de razones y de probabilidades en urnas.

Para desarrollar este objetivo, se incluyó en el cuestionario una serie de ítems que planteaban la comparación de probabilidades en urnas, que correspondían a los diferentes niveles de razonamiento proporcional de la clasificación de Noelting (1980a,1980b). Estos ítems fueron similares a los utilizados por Green (1982) y Cañizares (1997). Para la misma muestra de 704 estudiantes españoles y costarricenses se analizaron cada una de las siguientes variables: a) porcentaje de respuestas correctas por ítem, país y curso escolar; b) porcentaje de estrategias correctas en la comparación de probabilidades por curso y país, comparándolas con las obtenidas en la comparación de razones; c) porcentaje promedio de comparación de probabilidades y razones por curso y país; y d) nivel de razonamiento en los ítems de comparación de probabilidades comparando con el nivel de razonamiento proporcional en la comparación de razones.

La dificultad de los problemas creció rápidamente con el nivel de razonamiento proporcional de los problemas, siendo, en general, más difíciles los problemas de probabilidad que los de proporcionalidad, en consonancia con Berrocal (1990). Otro resultado fue que los niveles de dificultad en la investigación de Pérez-Echeverría et al. (1986) no se conservaron en los problemas de comparación de probabilidades, pero sí en los de razones. Las estrategias multiplicativas encontradas en el 10% de los estudiantes de Pérez-Echeverría et al. (1986) fueron muy escasas en la muestra de nuestro estudio.

Por otro lado, fue escasa la existencia de sesgos como el de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988) o enfoque en el resultado (Konold, 1989), así como el uso de estrategias subejtivas.

O3.3. Estudiar la relación existente, con los estudiantes costarricenses de la muestra, entre el nivel de razonamiento proporcional en la resolución de tareas en comparación de razones y de probabilidades en ruletas.

Este estudio se llevó a cabo únicamente con la muestra de estudiantes costarricenses (292 estudiantes), para poder finalizar en un tiempo razonable la tesis, aunque se piensa en el futuro completar el estudio comparado. Igualmente, se ha procedido para alcanzar el resto de los objetivos que se discuten en lo que sigue.

No obstante, incluso con los estudiantes de un solo país, se han obtenido resultados interesantes en el estudio de estos ítems, uno de los cuales ha sido el cambio de las estrategias de resolución de los problemas de comparación de probabilidades en urnas, por un uso mayoritario y casi siempre correcto de comparación de áreas.

Se obtuvo un alto porcentaje de respuesta correcta en los ítems de los niveles IA, IB y IIA, que resultaron muy sencillos, incluso para los estudiantes de 6º curso de Educación Primaria. La dificultad aumentó en los niveles siguientes, aunque se produjo una mejora general con el curso en todas las tareas.

La comparación de probabilidades en ruletas fue más sencilla que la de razones (en los problemas de mezcla), quizás porque el primer contexto favorece la idea de razón como comparación de parte con todo y el segundo la comparación de parte con parte (vasos de agua vs vasos de zumo). Además, se obtuvo menor número de respuestas correctas en los ítems sesgados, respecto a los no sesgados, para el mismo nivel de razonamiento, debido al sesgo de distribución señalado por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984).

En cuanto a las estrategias en la comparación de probabilidades, en general, su selección de la opción dependía de las características del ítem. Se coincide con Gürbüz et al. (2014) en que muchos estudiantes resolvieron correctamente las tareas comparando las áreas de sectores blancos y negros, una estrategia que es específica para la comparación de ruletas.

O3.4. Estudiar si existe relación entre el éxito en tareas de comparación de razones de diferente nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y los resultados obtenidos en la resolución de una tarea de juego equitativo.

Este objetivo se aborda en la Sección 5.8, donde se evaluaron conjuntamente la comprensión de los juegos equitativos y el nivel de razonamiento proporcional en una muestra de estudiantes costarricenses de 6º a 10º curso.

Como se mostró en las Tablas 5.8.3 y 5.8.4, se observa una relación entre la comprensión de la equitatividad de un juego y el nivel de razonamiento proporcional. En estas tablas, claramente aumenta el porcentaje de estrategias correctas en la resolución del problema de juego justo con el nivel de razonamiento proporcional de la clasificación de Noelting (1980a, 1980b), Por otro lado, el porcentaje de estrategias incorrectas o sesgos de razonamiento disminuye al aumentar el nivel proporcional.

Esta relación quedó evidenciada por una correlación significativa entre la puntuación otorgada a la corrección en la determinación de la equitatividad del juego y el nivel de razonamiento proporcional que se presenta en la Tabla 5.8.5.

O3.5. Estudiar si existe relación entre el nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes costarricenses y los resultados obtenidos en tareas de construcción de espacios muestrales.

Se trató de responder a este objetivo en la Sección 5.9, en que se analiza los resultados en los ítems de comparación de razones y otros dos en construcción de un espacio muestral asociado a la idea de los siguientes sucesos: seguro, imposible y equiprobable a su complementario.

Los resultados muestran una relación estadísticamente significativa entre el nivel de razonamiento proporcional y el número de espacios muestrales construidos correctamente, tanto en contexto de urnas como de ruletas.

Los resultados sugieren, por tanto, la necesidad de prestar atención a la comprensión del lenguaje de probabilidad por parte de los estudiantes, lo que podría llevarse a cabo en la enseñanza, teniendo en cuenta las ideas de Groth (2020) sobre polisemia, interrelación y multidimensionalidad. Es necesario que los estudiantes reconozcan el carácter polisémico de las palabras seguro e imposible, la interrelación entre diferentes términos asociados al lenguaje de la probabilidad y que vayan adquiriendo este lenguaje en forma incremental. Para ello será importante que, además de las estimaciones cuantitativas de la probabilidad, se utilicen expresiones cualitativas, puesto que en ocasiones estas se comprenden posteriormente a la adquisición de la probabilidad numérica, y se descarte de este modo, los significados poco precisos que se utilizan fuera del aula (Groth, 2020).

O3.6. Estudiar la posible influencia de creencias de tipo subjetivo en la resolución de tareas probabilísticas.

En general, se encontró un bajo porcentaje de creencias de tipo subjetivo en la resolución de tareas probabilísticas planteadas en el cuestionario, estando presentes en todos los ítems: el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), el enfoque en el resultado (Konold, 1989) y algunas consideraciones físicas. Este comportamiento puede deberse a que los estudiantes de la muestra ya habían recibido enseñanza en probabilidad en cursos anteriores, a diferencia, por ejemplo, de los estudios de Cañizares (1997) y Green (1982).

Por otro lado, en los ítems de comparación de probabilidades en ruletas, se encontraron mejores resultados en los ítems no sesgados que en los sesgados, aunque estos tuvieran el mismo nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a, 1980b) y el mismo nivel de dificultad (Pérez-Echeverría et al., 1986), lo cual evidencia la existencia moderada del sesgo de distribución señalado por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984).

5.10.2. Conclusiones sobre las hipótesis

Seguidamente se presentan las hipótesis relativas al segundo estudio de evaluación, que se irán discutiendo a lo largo de la sección:

H1. Se espera encontrar correlación entre el éxito en tareas de diferente nivel de razonamiento proporcional alcanzado por los estudiantes de la muestra y el curso escolar.

Esta hipótesis se apoya especialmente en el estudio de Noelting (1980a, 1980b), quien establece etapas en el desarrollo del razonamiento proporcional, según diversas edades que incluyen las consideradas en la muestra de nuestro Estudio 2.

En diferentes secciones de este Capítulo, así como en los correspondientes artículos publicados, se han obtenido resultados consistentes con esta hipótesis. Por ejemplo, la Tabla 5.5.6 muestra que en cada curso escolar hay un mayor porcentaje de estudiantes en los niveles superiores de razonamiento proporcional, disminuyendo el correspondiente a los niveles inferiores. Sin embargo, en Noelting (1980a,1980b), los porcentajes de estudiantes con edades similares a los de la muestra del presente estudio, se ubican en niveles de razonamiento proporcional superior; es decir, pocos estudiantes de nuestra muestra llegan al nivel de razonamiento proporcional en la edad proyectada por Noelting (1980a,1980b).

Además, la correlación entre el curso y el nivel de razonamiento proporcional, que se calculó para los estudiantes costarricenses (ver Tabla 5.8.5) fue de pequeña intensidad, pero estadísticamente significativo ($r = 0{,}124$, $p = 0{,}034$). Se obtuvieron, no obstante, algunas diferencias del nivel alcanzado en promedio entre grupos de estudiantes del mismo curso español y costarricense que se describen en la Sección 5.5.4. Estas disparidades son lógicas al haber pequeñas diferencias en el currículo de matemáticas y sistema educativo de los dos países.

H2. Se espera encontrar correlación entre el éxito de los estudiantes en tareas de comparación de probabilidades y tareas de comparación de razones, según la clasificación de Noelting (1980a, 1980b).

Esta hipótesis se confirma, tanto en lo que respecta a la comparación de probabilidades en urnas, como a la comparación de probabilidades en ruletas.

Se encontró una correlación entre el razonamiento proporcional y el probabilístico, que fue mayor que la existente entre cualquiera de estas variables y el curso escolar. El número de respuestas y argumentos correctos a los tres tipos de ítems utilizados en el estudio también están correlacionados. Sin embargo, la correlación del número de problemas resueltos correctamente con el curso y del número de ítems sesgados resueltos correctamente con el número de problemas proporcionales correctos ha sido muy pequeña.

Con ello, los resultados obtenidos contradicen los hallazgos de Berrocal (1990) en los que la comparación de probabilidades fue más difícil que la comparación de razones. Esto fue especialmente notable en la comparación de probabilidades en ruletas, posiblemente debido a que los estudiantes entienden mejor la idea de razón como comparación de parte con todo (ruleta) que como comparación de parte con parte (urnas), como sugiere Cañizares (1997).

H3. Se sospecha que se encontrarán sesgos de razonamiento probabilístico, como el de equiprobabilidad y el efecto de distribución de sectores en los ítems de comparación de probabilidades en ruletas, que afectarán las estrategias y resultados de los estudiantes en las tareas.

Aunque se encontraron sesgos como el de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992) y el enfoque en el resultado (Konold, 1989), fue menor de lo esperado en los estudiantes de la muestra. Sin embargo, en la comparación de probabilidades en ruletas, se observó, aunque en una proporción no muy alta, el sesgo de distribución, citado por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984). Esto puede deberse a la instrucción recibida por los estudiantes de la muestra.

H4. También se espera encontrar menor dificultad en los problemas planteados en contextos de ruletas (continuo, que favorece la relación parte-todo) que de urnas (discreto, que favorece la relación parte-parte).

Esta hipótesis se confirma, ya que los estudiantes utilizaron con frecuencia la comparación de áreas para resolver los problemas de ruletas, en lugar de recurrir a estrategias de comparación de razones. Por ello, utilizaron la idea de fracción como relación *parte-todo*, mientras que en los problemas de urnas se decantaron por la comparación *parte-parte*.

Sin embargo, la mayor facilidad no se conserva cuando en el ítem se incluye el sesgo de distribución descrito por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984). Es decir, cuando en una de las ruletas los casos favorables aparecen alternados con los desfavorables, aumenta la dificultad del problema, pues los estudiantes no logran aplicar la comparación de áreas para resolverlos o la aplican incorrectamente. De hecho, los porcentajes de respuestas correctas son menores en los ítems sesgados que en los no sesgados, para el mismo nivel de razonamiento proporcional de la clasificación de Noelting (1980a, 1980b). Este hecho apunta a la existencia del sesgo de distribución señalado por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984).

H5. Igualmente se espera encontrar una relación entre el nivel de razonamiento proporcional alcanzado y el éxito en la construcción de espacios muestrales (que implica el razonamiento combinatorio) y tareas asociadas al juego equitativo (que implica la proporcionalidad inversa, al determinar las esperanzas de ganancia de todos los jugadores cuando las probabilidades de estos no son iguales).

Como ya se ha indicado, esta hipótesis se ha confirmado mediante el cálculo de coeficientes de correlación entre las variables implicadas y el análisis de los porcentajes de estudiantes con estrategias correctas e incorrectas, según los diversos niveles de razonamiento proporcional.

H6. Finalmente, se supone una mejora del razonamiento en todas las tareas respecto al progreso en un curso escolar superior.

Esta hipótesis se confirma en todas las tareas analizadas, aunque no con tanta fuerza como se esperaba a priori, pues incluso en el último curso son pocos los estudiantes que resuelven los problemas correspondientes a un nivel de razonamiento probabilístico superior.

El porcentaje de estudiantes que aplicaron estrategias correctas en la comparación de razones, comparación de probabilidades y el problema del juego equitativo, también aumentó con el curso. Por otro lado, no es claro el progreso con el curso escolar en la tarea de construcción de espacios muestrales. Esto último de forma parecida a los estudiantes del estudio de Schlottmann y Anderson (1994) para decidir la equitatividad del juego.

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

6.1. INTRODUCCIÓN

En esta Memoria se ha presentado un trabajo de investigación centrado en el análisis de la influencia que tiene el razonamiento proporcional sobre la forma en que los estudiantes resuelven diferentes tareas de probabilidad, que consta de dos componentes diferenciados, el teórico y el empírico.

El primero de estos componentes, de carácter teórico, ha consistido en recopilar, analizar y sintetizar los principales estudios de evaluación sobre el razonamiento proporcional y el razonamiento probabilístico de los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria, así como sobre otros puntos tratados en el trabajo. Con ello se trató de dar soporte a la primera y segunda parte de la investigación y situarla en el contexto de otros trabajos.

En cuanto al componente empírico, la primera parte de la investigación es un estudio exploratorio con estudiantes de último curso de Educación Primaria costarricense, que buscó evaluar el razonamiento probabilístico a partir de la resolución de distintos problemas probabilísticos propuestos en un cuestionario; buscando comparar los resultados obtenidos con los establecidos por Piaget e Inhelder (1951) para la etapa en que se esperaba que estuviesen los niños (alcanzando las operaciones formales) y con otras investigaciones previas, en particular las de Cañizares (1997) y Green (1982).

A partir de los resultados de este primer estudio, se diseñó el segundo estudio, el cual tuvo como propósito analizar el razonamiento probabilístico y su relación con el nivel de desarrollo del razonamiento proporcional de estudiantes costarricenses y españoles, al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria. Se justificó el interés de llevar a cabo esta evaluación debido a que la probabilidad se incluye como tema básico en el currículo de matemáticas en toda la Educación General Básica en los dos países. Además, son muy pocas las investigaciones realizadas con estudiantes en España y ninguna en Costa Rica, sobre el nivel de razonamiento probabilístico alcanzado por estos, una vez que han tenido educación en probabilidad.

En particular, este tipo de investigación cobra un interés especial en Costa Rica, pues en la aprobación en 2012 de nuevos programas de estudio de Matemáticas para la Educación Primaria y Secundaria costarricense, se le dio un relieve mucho mayor al área de Estadística y Probabilidad respecto a los anteriores currículos nacionales.

A continuación, se exponen los principales logros obtenidos respecto a los objetivos planteados, las conclusiones obtenidas sobre hipótesis iniciales expuestas en el Capítulo 1, las principales aportaciones obtenidas y las limitaciones de la investigación, así como algunas sugerencias para continuar con el tema, finalizando con algunas implicaciones para la enseñanza de la probabilidad.

6.2. CONCLUSIONES SOBRE LOS OBJETIVOS

En esta sección se discuten los logros alcanzados para cada uno de los objetivos iniciales de la investigación, planteados en el Capítulo 1.

O1. Realizar una síntesis de los principales trabajos de investigación anteriores al realizado en esta tesis, que permita situar los resultados obtenidos, dentro de una panorámica más amplia, en el campo de la Educación Estadística.

Este objetivo ha quedado ampliamente cubierto, como se puede comprobar en el Capítulo 2, en el cual se expone una síntesis metódica de la investigación sobre la emergencia del razonamiento probabilístico en los niños y adolescentes, así como sobre los estudios relacionados con la comparación de probabilidades. Dicha síntesis fue elaborada a partir de un trabajo sistemático y riguroso de búsqueda, clasificación, lectura, resumen y comparación de la bibliografía recogida. Se completaron estos dos trabajos de síntesis, que dieron origen a sendos artículos publicados en revistas indexadas en Scopus, con un resumen de investigaciones sobre juego equitativo, construcción del espacio muestral y algunas investigaciones sobre razonamiento proporcional, que también han permitido sentar las bases de la investigación.

Entre otras conclusiones, se observó un incremento del interés por la investigación en la didáctica de la probabilidad en los últimos años, en especial, la relacionada con estudiantes de Educación Primaria y Secundaria, lo que justifica más aún el interés de nuestra investigación. También se observó la escasez de trabajos que relacionasen el razonamiento proporcional y probabilístico de los estudiantes; así como de estudios en el tema con estudiantes costarricenses.

O2. Evaluar el razonamiento probabilístico en estudiantes de último año de la educación primaria costarricense, a partir de la resolución de distintos problemas probabilísticos propuestos en un cuestionario.

Este objetivo se ha alcanzado mediante el Estudio 1 de nuestra investigación, que fue una primera etapa para analizar el razonamiento probabilístico en problemas elementales, utilizados en investigaciones previas con estudiantes sin instrucción en el tema. En este primer estudio, se diseñó un cuestionario que fue completado por una pequeña muestra de estudiantes costarricenses de sexto curso de Educación Primaria, analizando con detalle sus respuestas. Los resultados y conclusiones obtenidos sirvieron de base para diseñar el Estudio 2, además de dar como resultado una serie de artículos de investigación descritos en el Capítulo 3. Las principales conclusiones obtenidas fueron las siguientes:

- En los ítems de cálculo de probabilidades simples, los porcentajes de respuestas correctas en dicho estudio fueron superiores o similares a los de estudios previos con los que se realizó la comparación. Se presume que estos resultados pudieron deberse a que este tipo de tareas (experimentos con una sola urna), se aproximan más al tipo de problemas que pueden haber estudiado los niños en los cursos anteriores, de acuerdo a lo revisado en los libros de texto utilizados y a las entrevistas con sus docentes.
- Algunos de los problemas propuestos de comparación de probabilidades fueron difíciles para los niños de la muestra, lo que nos llevaría en el Estudio 2 a ampliar el rango de edad de los participantes, para analizar si en cursos superiores persistían estas dificultades o había una mejoría en los resultados.
- Asimismo, aunque los estudiantes mostraron buena comprensión del significado de un juego justo, se evidenciaron dificultades al justificar la equiparación de ganancia según la esperanza de ganar de cada jugador, lo que es debido a una falta de desarrollo de razonamiento proporcional. Esto también motivó y orientó el diseño del Estudio 2, donde se incluyó en el cuestionario un ítem sobre determinación de la ganancia en un juego equitativo, similar al ítem 2 del

cuestionario del primer estudio.

- Se observó que varias tareas se relacionaban con el razonamiento proporcional, por lo que se decidió, para el Estudio 2, incluir una serie de ítems que permitieran evaluar también el razonamiento proporcional de los estudiantes, para ponerlo en relación con su competencia en diversas tareas probabilísticas.
- Los estudiantes participantes mostraron un grado razonable de razonamiento probabilístico en tareas como la construcción de un espacio muestral, paso importante en el estudio de la probabilidad (Bryant y Nunes, 2012). En esta tarea influyó el lenguaje, sin duda, que les permite interpretar las tareas de probabilidad que se les plantean (Amir y Williams, 1999). Sin embargo, hubo dificultades al construir los espacios muestrales asociados a los sucesos seguro e imposible, por lo que se quiso investigar si estas dificultades disminuían o desaparecían en estudiantes de cursos superiores.
- En el estudio aparecieron ejemplos de argumentos que pudieron ser influenciados por sesgos o creencias de tipo subjetivo. Aunque el porcentaje de sesgos fue pequeño en los ítems de contexto discreto, fue mayor en el relacionado con dispositivos continuos, en particular, el orden de colocación de los números en los sectores del trompo. Esto último, motivó el estudiar específicamente la existencia del sesgo de distribución señalado por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984), en estudiantes de cursos superiores.

O3. Estudiar la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas en estudiantes costarricenses y españoles al finalizar la Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria.

Para lograr este objetivo se construyó un cuestionario válido y fiable, siguiendo las normas psicométricas de AERA, APA y NCME (2014), que se describe, junto con el proceso seguido para su diseño, en el Capítulo 4.

Los ítems considerados finalmente en las dos partes en que se dividió el cuestionario incluyen los niveles de razonamiento proporcional de la clasificación de Noelting (1980a, 1980b), desde el nivel IA hasta el nivel IIIB (excepto el nivel IC), tanto en tareas de razonamiento proporcional, como de comparación de probabilidades (contextos de urnas y ruletas), para poder relacionar los resultados de los estudiantes en estos dos tipos de tareas. También se añaden al cuestionario algunas tareas asociadas a la comprensión del juego equitativo y a la construcción de espacios muestrales, con el propósito de analizar si el nivel de logro en la resolución de estas tiene alguna correlación con el nivel de razonamiento proporcional evidenciado.

Además, se incluyeron algunos ítems que evalúan el sesgo de distribución, descritos en las investigaciones previas (Cañizares, 1997; Green, 1982; Maury, 1984). Para todos los temas considerados se ha proporcionado detalle del porcentaje de respuestas correctas y se han clasificado las diversas estrategias de resolución tanto correctas como incorrectas. Además, se han comparado los resultados por curso escolar y nivel de razonamiento proporcional del ítem (cuando procede). Las conclusiones obtenidas del Estudio 2 se han discutido ampliamente en el Capítulo 5 y dieron lugar a una serie de publicaciones que se describen en dicho capítulo. Las más importantes de estas conclusiones fueron las siguientes:

- Se observa que pocos estudiantes, incluso en el 10º curso (Costa Rica) o 4º de la ESO (España), resuelven correctamente la totalidad de problemas; específicamente, son muy complicados los ítems correspondientes a los niveles de razonamiento proporcional IIIA y IIIB, por lo que, en la muestra del Estudio 2, la edad esperada en que se alcanza dicho razonamiento es mayor que la supuesta por Noelting (1980a, 1980b).
- Se encontraron correlaciones estadísticamente significativas entre el nivel de razonamiento proporcional en que se sitúa un estudiante y sus resultados en el nivel de razonamiento probabilístico en comparación de probabilidades en urnas y en ruletas, construcción del espacio muestral y comprensión del juego equitativo. Aunque estas correlaciones son de intensidad pequeña, este estudio las muestra, por primera vez, en varios tipos de tarea; y supera a la relación entre el nivel de razonamiento proporcional y el curso escolar.
- Hubo un cambio de estrategia en la comparación de probabilidades en ruletas, respecto a la comparación de probabilidades en urnas, sobre todo por el uso de la comparación de áreas. Esta estrategia facilita la resolución de los problemas de nivel de razonamiento probabilístico más alto, aunque menos en los ítems en que se evalúa el sesgo de distribución.
- En general, se encontró un bajo porcentaje de creencias de tipo subjetivo en la resolución de tareas probabilísticas planteadas en el cuestionario, sobresaliendo

en una mayor aparición, el sesgo de distribución (Cañizares, 1997; Green, 1982 y Maury,1984) en los ítems de ruletas con sesgo.

O4. Comparar los resultados obtenidos con investigaciones previas a la nuestra.

En el Estudio 2 se realizó un estudio comparado de las respuestas, estrategias y nivel de razonamiento proporcional según Noelting (1980a, 1980b) en la comparación de razones. Los resultados obtenidos complementan los estudios sobre razonamiento proporcional en la comparación de razones, como los de Boyer y Levine (2015), Karplus et al. (1983), Noelting (1980a, 1980b) y Pérez-Echeverría et al. (1986), donde pocos resultados se han obtenido en España con muestras de tamaño razonable y, además, no hay estudios comparados con otros países; es el primer trabajo que estudia esta problemática en Costa Rica.

En concordancia con trabajos previos como el de Pérez Echeverría et al. (1986), las dificultades de resolución de los ítems de comparación de razones aparecen o van aumentando al requerirse estrategias multiplicativas, pues muchos estudiantes recurren otra vez a estrategias aditivas, que pueden encubrir el sesgo del número natural (Gómez y Dartnel, 2019; González-Forte et al., 2022)

Por otro lado, en las tareas probabilísticas se han comparado detalladamente los resultados obtenidos en el cuestionario con los alcanzados en estudios como el de Green (1982) y el de Cañizares (1997), Corral (2014) y Pérez-Echeverría et al. (1986) para estudiantes de la misma edad. Los resultados obtenidos en estas comparaciones se han analizado con detalle en los Capítulos 3 y 5.

6.3. CONCLUSIONES SOBRE LAS HIPÓTESIS

A partir de los resultados de las investigaciones previas y el estudio exploratorio realizado en la primera etapa de este trabajo, se presentaron en al Capítulo 1 las hipótesis de investigación que ahora pasamos a discutir, con base a los resultados de los dos estudios empíricos realizados.

H1. Se esperaba encontrar una correlación moderada entre los índices de dificultad de las tareas de comparación de probabilidades en urnas y los de las tareas de comparación de razones, con el mismo nivel en la clasificación de Noelting (1980a, 1980b).

Además, la expectativa era que las tareas de comparación de probabilidades en urnas fuesen más difíciles que las tareas de comparación de razones; esto con base en estudios en el campo de la psicología como el de Pérez-Echeverría et al. (1986). Para ello, en el cuestionario utilizado en el Estudio 2, se incluyeron tareas de comparación de razones y comparación de probabilidades en urnas de diferentes niveles de dificultad según la clasificación de Noelting (1980a, 1980b).

En consonancia con esta hipótesis, en el Estudio 2, descrito en el Capítulo 5, se encontró una correlación entre el razonamiento proporcional y el probabilístico, que fue mayor que la existente entre cualquiera de estas variables y el curso escolar. Igualmente, se observa una mayor dificultad de los problemas de probabilidad (sobre todo en urnas) que en los de comparación de razones en los niveles superiores de razonamiento, coincidiendo con los hallazgos de Pérez-Echeverría et al. (1986) y los resultados comunicados por Supply et al. (2020) con estudiantes alemanes en las pruebas PISA. Otras conclusiones se exponen en el Capítulo 5.

H2. También se esperaba encontrar menor dificultad en los problemas planteados en contextos de ruletas (continuo, que favorece la relación parte/todo) que de urnas (discreto, que favorece la relación parte/parte).

Investigaciones como las de Maury (1984) revelaron que algunos estudiantes modifican sus estrategias en la comparación de probabilidades en función del contexto, discreto o continuo. En problemas que, aunque podrían ser equivalentes desde el punto de vista probabilístico o de razonamiento proporcional, presentan distintos resultados. Esto se respalda, también, en algunos resultados de primer estudio exploratorio de esta investigación; por lo que se trató de comprobar la hipótesis incluyendo ítems de comparación de probabilidades en ruletas, de diferente nivel de razonamiento proporcional, en el segundo cuestionario.

Esta hipótesis se confirmó en el presente trabajo, ya que, en el Estudio 2, los estudiantes utilizaron con mucha frecuencia la comparación de áreas en los problemas relacionados con las ruletas; estrategia también presente en el Estudio 1. Dicha estrategia, que no se puede utilizar en la comparación de probabilidades en contexto de urnas, facilitó mucho la resolución de los problemas de nivel de razonamiento proporcional más alto en los ítems sin sesgo. Se supone, entonces, que los estudiantes entienden mejor la idea de razón como comparación de parte con todo (ruleta) que como comparación de parte con parte (urnas), como sugiere Cañizares (1997).

H3. Igualmente, esperábamos encontrar una relación entre el nivel de razonamiento proporcional alcanzado y el éxito en la construcción de espacios muestrales (que implica el razonamiento combinatorio) y tareas asociadas al juego equitativo, al determinar las esperanzas de ganancia de todos los jugadores, si las probabilidades de estos no son iguales (que supone la proporcionalidad inversa).

La hipótesis se sustenta en que el razonamiento combinatorio y proporcional son esquemas que corresponden a la etapa de las operaciones formales y, por consiguiente, los estudiantes debieran alcanzar ambas habilidades conjuntamente. Para comprobarla, en el cuestionario utilizado en el Estudio 2 se incluyeron algunos ítems que evalúan la construcción de espacio muestrales y un ítem para evaluar los significados personales que los estudiantes asignan a un juego equitativo, antes utilizado en el Estudio 1, junto con los ya citados de razonamiento proporcional.

Los resultados del Estudio 2 mostraron un apoyo a esta hipótesis, puesto que se ha encontrado asociación estadística directa entre el nivel de razonamiento proporcional del estudiante con el número de espacios muestrales correctamente construidos, tanto en contexto de urnas como de ruletas y en total. Igualmente se encontró dicha asociación entre el número de espacios maestrales construidos para obtener varios tipos de sucesos en un juego y el razonamiento proporcional. Aunque las asociaciones fueron pequeñas, fueron mayores que la existente entre el nivel de razonamiento proporcional y el curso escolar.

Asimismo, se observa que el coeficiente de correlación entre el nivel de razonamiento proporcional y las puntuaciones de comprensión del juego equitativo es mayor que la correlación del nivel de razonamiento proporcional con el curso escolar, y la que existe entre las puntuaciones de comprensión del juego equitativo y el curso escolar.

H4. Se encontrarán sesgos de razonamiento probabilístico que afectarán las estrategias y resultados de los estudiantes en los problemas.

Se tuvo presente que los estudiantes traen consigo intuiciones o ideas que asumen como verdaderas y que pueden incidir en sus respuestas; por lo que se pensó que se podrían evidenciar algunos sesgos y creencias subjetivas antes documentadas en estudios previos (e. g. Cañizares, 1997; Konold, 1989; Lecoutre,1992). Esto se basó, también, en algunos resultados de nuestro primer estudio exploratorio. Asimismo, a partir de los resultados del Estudio 1, se quiso analizar el sesgo de distribución que consiste en asignar diferente probabilidad en contexto de ruletas según los casos favorables y desfavorables se encuentren adosados o alternados (Cañizares, 1997).

Al analizar los resultados del Estudio 2, efectivamente, se identificaron algunos de estos sesgos, aunque la proporción de estudiantes que los presentaban era pequeña. Se conjetura que el bajo porcentaje de ocurrencia se atribuye a que los estudiantes de la muestra del Estudio 2 tenían instrucción en probabilidad de cursos anteriores. La proporción fue mayor en el sesgo de distribución, citado por por Cañizares (1997), Green (1982) y Maury (1984), que se aplica en los ítems de comparación de probabilidades en ruletas. Este sesgo se muestra, sobre todo, en los ítems sesgados y hace que la proporción de respuestas correctas en los mismos sea menor que la correspondiente a ítems no sesgados de comparación de ruletas del mismo nivel de razonamiento proporcional (Noelting, 1980a, 1980b) y el mismo nivel de dificultad (Pérez-Echeverría et al., 1986).

H5. Se preveían mejores resultados en el presente estudio de evaluación que los obtenidos por Cañizares (1997) y Green (1982) con estudiantes de la misma edad.

Puesto que los estudiantes de la muestra han recibido enseñanza en probabilidad y los de la muestra de Green (1982) y de Cañizares (1997) no tuvieron preparación formal en este tema, se consideró posible que hubiese diferencias en los resultados que se obtuvieran en los ítems del cuestionario que fueron tomados de estos estudios. Ello se justifica por la influencia de la instrucción en las intuiciones primarias de los niños, que ya ha sido documentada en diferentes estudios (e. g. Fischbein y Gazit, 1984; Fischbein et al., 1967).

La hipótesis no llega a confirmarse. En problemas de comparación de probabilidades en urnas hubo poco uso de estrategias incorrectas, que coincidieron con las descritas por Cañizares et al. (1997) y Green (1982). En la muestra del Estudio 2, el porcentaje de alumnos en el nivel 0 fue mayor que el de Cañizares, mientras que el porcentaje de alumnos en los niveles IIIA y IIIB fue similar. Los porcentajes son menores en los niveles IA y IIB y mayores en los niveles IB y IIA. En los problemas de comparación de probabilidades en ruletas, se observó con frecuencia el sesgo de distribución señalado por Cañizares (1997) y Green (1982).

Respecto a la comprensión del juego equitativo, y en contra de las expectativas planteadas, Cañizares (1997) obtuvo una mayor proporción de soluciones correctas en los cursos 7º y 8º en comparación con el Estudio 2. Otra diferencia es, que muchos de sus estudiantes consideraban que sólo eran equitativos los juegos en los que los dos jugadores tenían la misma probabilidad de ganar, mientras que no fue esto así en el presente estudio, lo cual revela una mejor comprensión de la idea de juego equitativo. Finalmente, en relación con la construcción de espacios muestrales, se encontró la confusión entre muy probable y seguro, que ya apareció en las investigaciones de Cañizares (1997) y Green (1982).

H6. Finalmente, se suponía una mejora, con el curso, del razonamiento en todas las tareas propuestas en el cuestionario.

Esta hipótesis se sustentó en lo supuesto en la teoría de Piaget e Inhelder (1951) y Noelting (1980a, 1980b). Para evaluarla, se han comparado todos los resultados en los diferentes cursos participantes, puesto que cada curso va asociado a una edad determinada del estudiante. Las comparaciones han incluido tanto los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas, como de las diferentes estrategias de resolución de todas las tareas.

Estas comparaciones muestran que, en general, la hipótesis se cumple, puesto que la dificultad de los problemas es mayor en los cursos inferiores en todas las tareas. No obstante, todavía en los cursos superiores se observa un porcentaje pequeño de estudiantes que resuelven las tareas correspondientes a los niveles de razonamiento proporcional más avanzado de Noelting (1980a, 1980b) y una similitud de resultados en las tareas de construcción de espacios muestrales.

6.4. PRINCIPALES APORTACIONES Y LIMITACIONES DEL TRABAJO

Se considera que este trabajo ha aportado nuevo conocimiento referente al razonamiento proporcional y probabilístico de los estudiantes costarricenses y a su relación en lo referente a la comparación de probabilidades en urnas y ruletas, juego equitativo y construcción del espacio muestral. No solamente se informa del porcentaje de respuestas correctas e incorrectas en las tareas planteadas, sino que, para cada uno de los tipos de tareas considerados, se realiza un análisis exhaustivo de las estrategias empleadas. Igualmente, se aporta la misma información para una parte de las variables consideradas y los estudiantes españoles. Estas aportaciones se han reflejado en diferentes trabajos que se han reseñado a lo largo de la Memoria, así como en las publicaciones realizadas.

Estos resultados complementan investigaciones anteriores, ya que en Costa Rica no se disponía de datos relacionados, y las llevadas a cabo en España no incluían las mismas edades y utilizaban muestras de tamaño moderado. Además, no se encontró ningún estudio que analizara de forma sistemática y conjunta la comparación de probabilidades y razones en el mismo rango de edad que el considerado en el presente estudio.

Una segunda aportación es el cuestionario empleado en el Estudio 2, construido según las normas psicométricas más rigurosas, que puede ser utilizado en otras investigaciones. Igualmente, los profesores podrían utilizarlo, de manera completa o solo una parte, en la evaluación del aprendizaje de sus estudiantes; considerando a priori las posibles estrategias de resolución y sesgos que podrían darse.

Finalmente, el estado de la cuestión realizado actualiza y amplía otros trabajos previos de tipo *survey*, con lo que se facilita la continuación de la investigación a investigadores interesados en la evaluación y desarrollo del razonamiento probabilístico.

No obstante, se reconocen las carencias del trabajo, que, como cualquier otro, es mejorable. Una primera limitación ha consistido en utilizar una muestra intencional, aunque el tamaño de la misma haya sido apreciable. Por supuesto, dado que la muestra de alumnos no fue aleatoria y participaron pocos centros educativos diferentes, se acepta que ello afecta o restringe las posibles conclusiones de esta investigación, que deben tomarse con precaución.

Otra limitación ha sido que en los resultados para algunas de las variables consideradas solo se han considerado los estudiantes costarricenses. Esta decisión se tomó, debido al gran volumen de datos generados únicamente con estos estudiantes y la necesidad de poder presentar la tesis en un tiempo razonable. Sin embargo, en un futuro próximo se piensa seguir analizando la información que se recolectó con el cuestionario.

Finalmente, se reconoce que en el cuestionario construido, se han utilizado un número restringido de tareas, y hay muchas variantes de las mismas que podrían analizarse. Por tanto, sería necesario replicar el trabajo variando las tareas para asegurar que las conclusiones se mantienen con ligeras variaciones del enunciado.

6.5. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURAS

Las limitaciones señaladas en la sección anterior indican puntos en los que se puede continuar el trabajo iniciado con nuevas investigaciones.

En primer lugar, se tiene intención de finalizar la codificación de los datos obtenidos con estudiantes españoles en las tareas de comparación de probabilidades en ruletas, juego equitativo y construcción del espacio muestral. Con ello, se podrá completar el estudio comparado de los nuevos resultados con los de los estudiantes costarricenses de la misma edad.

Como ya se ha señalado, se debe ampliar el estudio con nuevas muestras de estudiantes y variaciones de los ítems empleados, lo que permitirá dotar de mayor generalizabilidad a los resultados encontrados.

Por otro lado, se abre una línea de investigación en el diseño de secuencias de enseñanza que permitan fortalecer las competencias de los estudiantes de final de la Educación Primaria y estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria en la comparación de razones, comparación de probabilidades, juego equitativo y construcción del espacio muestral. El diseño de estos procesos de estudio, su idoneidad didáctica y la evaluación del efecto de la enseñanza con grupos de estudiantes es otro trabajo necesario.

Relacionado a lo anterior, queda pendiente analizar la enseñanza de fracciones en Educación Primaria y del número racional en Educación Secundaria, ya que aunque los estudiantes de la muestra estudiaron técnicas para comparar fracciones y contenidos como la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa (MECD, 2014; MEP, 2012), gran porcentaje de la muestra no supo implementar estos conocimientos matemáticos para resolver las tareas propuestas y se apoyaron en la intuición o en la comparación absoluta de términos y en métodos no multiplicativos.

Finalmente, se precisa investigar en los diferentes componentes del conocimiento del profesor para enseñar los temas abordados en el trabajo y en el diseño de procesos de enseñanza que permitan ampliar este conocimiento.

6.6. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Las conclusiones discutidas respecto a los objetivos e hipótesis de la investigación apuntan a una serie de consecuencias, que deberían ser consideradas por los profesores, para mejorar su acción didáctica en la enseñanza de la probabilidad. Esta información puede permitir a los profesores diseñar tareas matemáticas que requieran este tipo de razonamiento, de acuerdo con el nivel alcanzado según edad.

Una conclusión directa es el interés de reforzar el razonamiento proporcional de los estudiantes, teniendo en cuenta sus diversos significados y su articulación progresiva (Burgos y Godino, 2020), puesto que el estudio muestra que pocos, incluso en los cursos superiores, logran el razonamiento proporcional de mayor nivel. Dicho refuerzo tendría una clara repercusión en la mejora de las competencias en comparación de probabilidades, por la relación mostrada entre el razonamiento probabilístico y proporcional a lo largo del trabajo. De acuerdo a lo anterior, es importante que el estudio de fracciones (Educación Primaria) y número racional (Educación Secundaria), se articule en diferentes áreas matemáticas como la Probabilidad, la Estadística y la Geometría; ya que aunque los estudiantes de la muestra estudiaron métodos de comparación de fracciones, de acuerdo a lo establecido en el currículo de ambos países (MECD, 2014 y MEP, 2012), se sospecha, que estos contenidos no se emplearon para resolver distintas tareas como la comparación de probabilidades y por esto no supieron que podían emplear estas herramientas para responder correctamente a los ítems de probabilidades de nivel superior de razonamiento proporcional.

Más concretamente, en España se debiera ayudar a los estudiantes a comprender que la comparación única del primer o segundo término de la razón sólo es válida en caso de que el otro término sea igual en las dos razones. En Costa Rica, por otro lado, el mayor esfuerzo sería tratar de desterrar la comparación de los totales de las dos razones o diferencias de sus términos.

El progreso en el razonamiento proporcional implica un gran periodo de tiempo y se completa en la transición del desarrollo de operaciones concretas a formales (Lamon, 2007). Este desarrollo parece ser más lento en la muestra del presente estudio y confirma los hallazgos de Van Dooren et al. (2018), dado que muchos estudiantes seguían teniendo dificultades con el razonamiento proporcional después de la instrucción.

Los profesores deberían tener en cuenta estos resultados para ayudar a los estudiantes a alcanzar niveles más altos de razonamiento proporcional, que no solo es necesario para resolver problemas de probabilidad, sino también en otras áreas, como la geometría o el álgebra (Ben-Chaim et al., 2012). Además, aunque el razonamiento proporcional es sin duda un requisito para resolver problemas de probabilidad, la competencia en probabilidad también incide en el desarrollo del razonamiento proporcional. Por esta razón, los profesores deberían sacar provecho de las diferentes habilidades implicadas en la comparación de probabilidades y utilizar tareas relacionadas con esta investigación para desarrollar ideas matemáticas en sus estudiantes.

Además, los problemas de probabilidad pueden utilizarse como ejemplos de problemas proporcionales y la práctica basada en ejemplos es beneficiosa para los estudiantes con menos conocimientos previos de proporcionalidad. Estas consideraciones deberían incluirse en la formación de los profesores para enseñar probabilidad y proporcionalidad.

Igualmente, se deben considerar las conexiones del razonamiento proporcional con otros temas matemáticos, como magnitudes y funciones (Van-Dooren, 2018). Todos estos temas, donde el principal objetivo de aprendizaje no es el número racional (aunque permiten aplicarlo y reforzar su aprendizaje), pueden introducirse de manera efectiva si los niveles de razonamiento proporcional de las tareas se controlan teniendo en cuenta las capacidades de los estudiantes, según su edad.

Finalmente, se recuerda que la comparación de razones enfatiza la proporcionalidad, que es únicamente uno de los posibles significados del número racional (Behr et al., 1983; Burgos y Godino, 2020; Lamon, 2007). Por ello, se sugiere la necesidad de continuar este trabajo comparando sus resultados con los obtenidos en otras tareas que involucren otros significados del número racional. Igualmente, sería de interés analizar la influencia del nivel de razonamiento proporcional de los estudiantes en el desempeño de tareas que involucren este razonamiento de forma implícita, por ejemplo, la comparación de probabilidades o la semejanza de polígonos y homotecias.

De acuerdo con investigaciones previas (e.g. Cañizares et al., 2004) no fue fácil para todos los estudiantes participantes en la investigación reconocer la equitatividad de un juego y estimar el premio en un juego equitativo cuando dos jugadores tienen diferentes probabilidades. Esta dificultad se debe al razonamiento sobre proporcionalidad inversa, requerido para resolver la tarea y persiste incluso en los estudiantes de más edad. Los profesores deberían reflexionar sobre este hecho y utilizar problemas relacionados con juegos justos en su enseñanza de la probabilidad, que, además, permitirían reforzar la comprensión de la proporcionalidad inversa y mostrar una aplicación de la misma.

REFERENCIAS

Abrahamson, D. (2006). The shape of things to come: The computational pictograph as a bridge from combinatorial space to outcome distribution. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(1), 137-146. https://doi.org/10.1007/s10758-006-9102-y

Alpízar, M., Barrantes, J., Bolaños, H., Céspedes, M., Delgado, E., Freer, D., Padilla, E., y Víquez, M. (2012). Aspectos relevantes sobre la formación docente en I y II ciclos en los temas probabilidad y estadística. *Educare, 16*(2), 113-129. https://doi.org/10.15359/ree.16-2.7

Alpízar, M., Chavarría, L. y Oviedo, K. (2015). Percepción de un grupo de docentes de I y II ciclo de educación general básica de escuelas públicas de Heredia sobre los temas de estadística y probabilidad. *Actualidades Investigativas en Educación, 15*(1), 1-23. https://doi.org/10.15517/aie.v15i1.17728

Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en educación infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas, 7*, 4-22. https://doi.org/10.15366/didacticas2012.7.001

Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: un itinerario didáctico. *Épsilon, 95,* 25-48.

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN, 48*, 41-58. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/526

Alsina, Á., Vásquez Ortiz, C. A., Muñiz-Rodríguez, L., y Rodríguez Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Epsilon, 104,* 99-128.

American Educational Research Association (AERA), American Psychological Association (APA) y National Council on Measurement in Education (NCME). (2014). *Standards for educational and psychological testing.* AERA, APA y NCME.

Amir, G. y Williams, J. (1994). The influence of children‟s culture on their probabilistic thinking. En J. P. Pontes y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 24-31). Universidad de Lisboa.

Amir, G. S. y Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 18(*1), 85-107. DOI: https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00018-8

Andréu, J. (2011). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada.* Fundación Centro de Estudios Andaluces, Universidad de Granada.

Atkinson, R. F. (1954). A note on the “gambler's fallacy”. *Analysis, 14*(6), 149-150. https://doi.org/10.1093/analys/14.6.149

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2013). *The Australian curriculum: Mathematics.* ACARA.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 8*(3), 247-264.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar* (pp. 1-17). Sociedad de Educación Matemática Thales.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? En J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, y F. Viseu, (eds.) (2013). *Atas do III Encontro de probabilidades e estatística na escola*. Centro de Investigação em educação da Universidade do Minho.

Batanero, C. (2020). Making sense of probability in professional and everyday life. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, numero speciale *7*, 7-16.

Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Teaching and learning of probability. *ZDM Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L., y Gea, M.M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico. *PNA*, *15*(4), 267-288. https://doi.org/10.30827/pna.v15i4.22349

Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2021). Prospective mathematics teachers understanding of classical and frequentist probability. *Mathematics, 9*(19), 1-15. https://doi.org/10.3390/math9192526

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability.* ICME-13. Topical Survey series. Springer.

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). The meaning and understanding of mathematics. In K. Franbçois (Ed.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Springer.

Batanero, C. y Godino, C. (2004). *Estocástica: estadística y probabilidad.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Springer.

Batanero, C. y Hernández-Solís, L.A. (2023). Razonamiento proporcional en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles. *Uniciencia, 37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M.M. (2023). Analysing Costarican and Spanish students´ proportional reasoning and comparison of probabilities. *Statistics Education Research Journal, 22*(3), 1-23. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Batanero, C., Ortiz, J., Gómez, E. y Gea, M. M. (2019). Les jeux équitables comme contexte pour l‟enseignement des probabilités et la formation des enseignants. En V. Martin, M. Thibault y L. Theis (Eds.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités.* Presses de l‟Université de Québec.

Batista, R., Borba, R. y Henriques, A. (2022). Fairness in games: a study on children"s and adults" understanding of probability. *Statistics Education Research Journal, 21*(1), 1-15. https://doi.org/10.52041/serj.v21i1.79

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296–333). Macmillan.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). Academic Press.

Beltrán-Pellicer, P. (2017). Una propuesta sobre probabilidad en educación infantil con juegos de mesa. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(1), 53-61. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2017.53-61

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: Aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, *32*(61), 526-548. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. S. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4_2

Berrocal, P. F. (1990). Relaciones teórico-empíricas entre los esquemas de proporción, probabilidad y covariación. *Revista de Psicología General y Aplicada, 43*(3), 331-337.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. P. P. U.

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. En C. Batanero, C. Reading y G. Burrill (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education* (pp. 71-83). Springer.

Borovcnik, M. (2015). Risk and decision making: The "logic" of probability. *The Mathematics Enthusiast, 12(*1), 113-139. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1339

Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(3),1491-1516,

Borovcnik, M. y Bentz, H. J. (1991). Empirical research in understanding probability. En M. Borocnik y R. Kapadia (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 73-105). Springer.

Borovcnik, M. y Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop, K. Clements, C Keitel y J Kilpatrick (Eds.), *International handbook of mathematics education* (239–288). Kluwer

Boyer, T. W. y Levine, S. C. (2015). Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. *Developmental Psychology, 51(5),* 615–620. https://doi.org/10.1037/a0039010

Bryant, P., y Nunes, T. (2012). Children"s understanding of probability: A literature review (full report). *London: Nuffield Foundation*.

Butto, C. M., Fernández, J. D., Araujo, D. C. y Ramírez, A. B. (2019). El razonamiento proporcional en educación básica. *Horizontes Pedagógicos, 21*(2), 39-52. https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.21204

Burgos, M. y Godino, J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática, 31*(3), 117-150. https://doi.org/10.24844/em3103.05

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 18,* 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros maestros de educación primaria. *Profesorado, 25*(2), 281–306. https://doi.org/10.30827/profesorado.v25i2.8725

Burgos, M. y Godino, J. D. (2022). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Butto, C. M., Fernández, J. D., Araujo, D. C. y Ramírez, A. B. (2019). El razonamiento proporcional en educación básica. *Horizontes Pedagógicos, 21*(2), 39-52. https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.21204

Cabero, J. y Llorente, M. (2013). La aplicación del juicio de experto como técnica de evaluación de las tecnologías de la información y comunicación. *Revista de Tecnología de Información y Comunicación en Educación, 7*(2), 11-22.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *UNO*, *14*, 99-114.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L. y Ortiz, J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, *37*, 37-55.

Carpenter, T. P., Fennema, E., y Romberg, T. A. (Eds.). (2012). *Rational numbers: An integration of research*. Routledge (2º edición).

Cerrón, W. (2019). La investigación cualitativa en educación. *Horizonte de la Ciencia, 9*(17), 1-8. https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2019.17.510

Chaves, E. (2016). La enseñanza de la estadística y la probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 21-31.

Chernoff, E. (2009). Sample space partitions: An investigative lens. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 19-29. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2009.03.002

Chernoff, E. J. y Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics, 77*, 15-33. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9288-8

Common Core State Standards Initiative, CCSSI (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Cohen, J. (1957). Subjective probability. *Scientific American, 197,* 128-138.

Corral, A. (2014). El aprendizaje de la estrategia de comparación de proporciones. *Infancia y Aprendizaje,* *10*(37), 33-43. https://doi.org/10.1080/02103702.1987.10822146

Davies, H. (1965). Development of the probability concept in children. *Child Development*, *99*, 29-39. https://doi.org/10.2307/1126923

Denison, S., y Xu, F. (2014). The origins of probabilistic inference in human infants. *Cognition, 130*(3), 335-347. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.12.001

Department of Education and Science and the Welsh Office. (1991). *National curriculum: Mathematics for ages 5 to 16.* Central Office of Information.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

English, L. D. (1991). Young children‟s combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*(5), 451–474. https://doi.org/10.1007/BF00367908

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición*, *6*(1), 27-36.

Estrada, A. y Batanero, C. (2019). Prospective primary school teachers‟ attitudes towards probability and its teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15(*1), em0559. https://doi.org/10.29333/iejme/5941

Estrada, A., Batanero, C., Díaz, C. (2018). Exploring teachers‟ attitudes towards probability and its teaching. En C, Batanero y E. Chernoff, E. (Eds) *Teaching and learning stochastics.* Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_18

Etikan, I., Musa, S. A. yAlkassim, R. S. (2016). Comparison of convenience sampling and purposive sampling. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics, 5*(1), 1–4. https://doi.org/10.6224/jn.61.3.10T

Falk, R., Falk, R. y Levin, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 181-204. https://doi.org/10.1007/BF00304355

Falk, R., Yudilevich-Assouline, P., y Elstein, A. (2012). Children‟s concept of probability as inferred from their binary choices-revisited. *Educational Studies in Mathematics, 81,* 207–233. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9402-1.

Fay, A. L. y Klahr, D. (1996). Knowing about guessing and guessing about knowing: Preschoolers' understanding of indeterminacy. *Child Development, 67*, 689-716. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1996.tb01760.x

Fernández, C., y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Reidel.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 1-24. https://doi.org/10.1007/BF00380436

Fichbein, E., Pamput, E. y Minzat, I. (1967). The child‟s intuition of probability. *Enfance, 2*, 193-280.

Francisco, J. M. y Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(2–3), 361–372. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.001

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Springer

Gal, I. y Geiger, V. (2022). Welcome to the era of vague news: a study of the demands of statistical and mathematical products in the COVID-19 pandemic media. *Educational Studies in Mathematics,* 1-22. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10151-7

Gandhi, H. (2018). Understanding children‟s meanings of randomness in relation to random generators. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.). *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 181-200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_11

Gea, M. M., Hernández-Solís, L., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). Relating students‟ proportional reasoning level and their understanding of fair games. *Journal on Mathematics Education,* *14*(4), 663-682. https://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp663-682

Gil, J., León, J. y Morales, M. (2017). Los paradigmas de investigación educativa, desde una perspectiva crítica. *Conrado, 13*(58), 72-74.

Girotto, V., Fontanari, L., Gonzalez, M., Vallortigara, G., y Blaye, A. (2016). Young children do not succeed in choice tasks that imply evaluating chances. *Cognition*, 152, 32–39. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2016.03.010

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. (2018). *Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática*. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos teóricos y propuestas curriculares.* Síntesis.

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2016). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Burgos, M. y Gea, M. M. (2022). Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(10), 2609-2636. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1896042

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39–88.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90 - 113. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J., Rivas, H., y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa, 7*(2), 331-354. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.7i2.0002.ç

Goldberg, E. (1966). Probability judgment by preschool children. *Child Development, 37*, 157-167. https://doi.org/10.2307/1126436

Gómez, D. y Dartnell, P. (2019). Middle schoolers‟ biases and strategies in a fraction comparison task. International *Journal of Science and Mathematics Education, 17*(6), 1233-1250. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9913-z

Gómez, E., Ortiz, J.J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión 35*, 75-91.

Gong, Z. y He, S. (2017). Developmental stages and important periods of probability cognition in 6 to 14 year-old students. *Avances de Investigción en Educación Matemática, 11*, 47-68. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.194

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022). Profiles in understanding operations with rational numbers. *Mathematical Thinking and Learning, 24(*3), 230-247. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1882287

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in school pupils aged 11-16 years*. Ph. Dissertation. University of Loughborough

Groth, R. E., Bergner, J. A. y Austin, J. W. (2020). Dimensions of learning probability vocabulary. *Journal for Research in Mathematics Education, 51(1*), 75-104. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.2019.0008

Gürbüz, R., Erdem, E. y Fırat, S. (2014). The effect of activity-based teaching on remedying the probability-related misconceptions: A cross-age comparison. *Creative Education, 5*(1), 18-30, http://dx.doi.org/10.4236/ce.2014.51006

Haladyna, T. M. y Rodriguez, M. C. (2013). *Developing and validating test items.* Google books.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics:11-16*, John Murray.

He, W., Yang, Y., y Gao, D. (2018). Proportional reasoning in 5- to 6-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 19*(4), 389–412. https://doi.org/10.1080/15248372.2018.1495218

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGrawHill.

Hernández-Salmerón, E., López-Martín, M.M. y Batanero, C. (2017). Estudio exploratorio sobre el lenguaje del azar en educación secundaria obligatoria. En J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 305-314). Universidad de Zaragoza.

Hernández-Solís, L. A. (2023). Sesgos en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 23*(2), 1-16. https://doi.org/10.18845/rdmei.v23i2.6368

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. y Gea, M. (2021). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños y niñas costarricenses. *Innovaciones Educativas (Innoeduca), 23*(34), 228-243. http://dx.doi.org/10.22458/ie.v23i34.3429

Hernández-Solís, L.A., Batanero, C. y Gea, M. (2023). Costarican students" proportional reasoning and performance in comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 9(*12), em2373. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

Hernández-Solís, L.A., Batanero, C. y Gea, M. M. (en prensa). Razonamiento proporcional y construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos por estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística.*

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M.M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con niños costarricenses de Educación Primaria. *Uniciencia, 35*(2), 1-19. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: Un estudio exploratorio con niños de educación primaria. *Educación Matemática*, *33*(1). http://dx.doi.org/10.24844/EM3301.07

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M.M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes de educación primaria. *Educaçao e Realidade, 46*(3). https://doi.org/10.1590/2175-6236105401

Hernández-Solís, L. A., Gea, M. M., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023) Investigación sobre el razonamiento de los niños en la comparación de probabilidades. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 29(*1), 1-24. -24. https://www.seio.es/beio/research-on-childrens-reasoning-in-comparing-probabilities/

HodnikČadež, T. y Škrbec, M. (2011). Understanding the concepts in probability of pre-school and early school children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 7*(4), 263-279. https://doi.org/10.12973/ejmste/75203

Hoemann, H. W. y Ross, B. M. (1971). Children's understanding of probability concepts. *Child Development, 42*(1), 221-236. https://doi.org/10.2307/1127077

Hoemann, H. y Ross, B (1982). Children"s concepts of chance and probability. En Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition* (pp. 93 - 121). Springer Verlag.

Horvath, J. K. y Lehrer, R. (1998). A model-based perspective on the development of children's understanding of chance and uncertainty. En S. Lajoie (Ed,), *Reflections on statistics: learning, teaching, and assessment in grades K-12 (*pp. 121-148). Routledge.

Hyrkäs, K., Appelqvist-Schmidlechner, K, y Oksa, L. (2003). Validating an instrument for clinical supervision using an expert panel. *International Journal of Nursing Studies, 40* (6), 619 -625. https://doi.org/10.1016/S0020-7489(03)00036-1

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. Basic Book.

Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 909-955). Information Age Publishing y NCTM.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C. y Mogill, A. (1997). A framework for assessing and nurturing young children"s thinking in probability. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 101–125. https://doi.org/10.1023/A:1002981520728

Jones, G. y Thornton, C. (2005) An overview of research into the teaching and learning of probability. En Jones, G. (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning*. (pp. 65-92). Springer.

Juárez-Hernández, L. y Tobón, S. (2018). Análisis de los elementos implícitos en la validación de contenido de un instrumento de investigación. *Espacios*. https://www.revistaespacios.com/cited2017/cited2017-23.html

Kafoussi, S. (2004). Can kindergarten children be successfully involved in probabilistic tasks? *Statistics Education Research Journal, 3*(1), 29-39. https://doi.org/10.52041/serj.v3i1.540

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases.* Cambridge University Press.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on „rate"problems. *Educational studies in Mathematics, 14*(3), 219-233. https://doi.org/10.1007/BF00410539

Kazak S., y Leavy A.M. (2018) Emergent reasoning about uncertainty in primary school children with a focus on subjective probability. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education.* (pp. 34-54). Springer: https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_3

Kieren, T. E. (2020). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt, R.

Putnam y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323-371). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315044606

Koller, I., Levenson, M. R., y Glück, J. (2017). What do you think you are measuring? A mixed methods procedure for assessing the content validity of test items and theory-based scaling. *Frontier in Psychology, 8*(126), 1-20. http://dx.doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00126

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6*, 59- 98. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0601_3

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: an introduction to its methodology*. Sage.

Kuzmak, S. D., y Gelman, R. (1986). Young children's understanding of random phenomena. *Child Development, 57*(3), 559-566. https://doi.org/10.2307/1130336

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 1, pp. 629-668). Information Age Publishing y NCTM.

Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. En G. Jones (Ed,), *Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning* (pp. 95-119). Springer.

Laplace, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las posibilidades*. Madrid: Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1814).

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568. https://doi.org/10.1007/BF00540060

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 357- 368.

Lidster, S. T., Watson, J. M., Collis, K. F. y Pereira-Mendoza, L. (1996). The relationship of the concept of fair to the construction of probabilistic understanding. En Clarkson, P. C. (Ed.), *Technology in Mathematics Education, Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne* (pp. 352-359). MERGA.

Lima, E. y Borba, R. (2021). Articulando combinatória e probabilidade: jovens e adultos revisitando problemas combinatórios via construção de espaços amostrais. *Paradigma, 42*(Extra 1), 257-284. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p257-284.id1025

Lissitz, R. W. y Samuelsen, K. (2007). A suggested change in terminology and emphasis regarding validity and education. *Educational Researcher, 36*(8), 437–448. https://doi.org/10.3102/0013189X0731

Lockwood, E., Wasserman, N. H. y Tillema, E. S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100783. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100783

Martínez, M., Hernández, M. y Hernández, M. (2014). *Psicometría*. Alianza editorial.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilites: analyse des argumentes utilises par les élevés de classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *5*(2), 187-215.

McGartland, D. Berg, M., Tebb, S. S., Lee, E. S. y Rauch, S. (2003). Objectifying content validity: Conducting a content validity study in social work research. *Social Work Research, 27* (2), 94-104.

Metz, K. E. (1998). Emergent ideas of chance and probability in primary-grade children. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in Grades K–12* (pp. 149–174). Erlbaum.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Autor.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II Y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Autor.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022a). *Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil*. MEFP.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022b). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* MEFP.

Ministerio de Educación y Formación Profesional, MEFP. (2022c). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria.* MEFP.

Mohamed, N. y Ortiz, J. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Números*, 80, 103-117.

Molnar, A. (2018). Language and lexical ambiguity in the probability register. En C. Batanero y A. Chernoff (Eds,), *Teaching and learning stochastics* (pp. 23-37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_2.

Montero, I. y León, O. G. (2012). *Metodologías científicas en Psicología*. UOC.

Muñiz J. (2010). Las teorías de los tests: teoría clásica y teoría de respuesta a los ítems. *Papeles del Psicólogo, 31* (1), 57-66.

Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L. J., & Alsina, Á. (2020). Deficits in the statistical and probabilistic literacy of citizens: Effects in a world in crisis. *Mathematics, 8(*11), 1872. https://doi.org/10.3390/math8111872

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Nikiforidou, Z. (2018) Probabilistic thinking and young children: theory and pedagogy. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education* (pp. 21-34). Springer: https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_3.

Nikiforidou, Z. (2019). Probabilities and preschoolers: Do tangible versus virtual manipulatives, sample space, and repetition matter? *Early Childhood Education Journal, 47*, 769–777. https://doi.org/10.1007/s10643-019-00964-2.

Nikiforidou, Z. y Pange, J. (2010). The notions of chance and probabilities in preschoolers. *Early Childhood Education Journal, 38*(4), 305-311. https://doi.org/10.1007/s10643-010-0417-x.

Nikiforidou, Z., Pange, J., y Chadjipadelis, T. (2013). Intuitive and informal knowledge in preschoolers‟ development of probabilistic thinking. *International Journal of Early Childhood, 45*(3), 347–357. https://doi.org/10.1007/s13158-013-0081-6

Nilsson, P. (2007). Different ways in which students handle chance encounters in the explorative setting of a dice game. *Educational Studies in Mathematics, 66(*3), 293–315. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9062-0

Nilsson, P., y Li, J. (2015). Teaching and learning of probability. En S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 437-442). Springer.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Diferentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at succesive stages: Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics, 11*(3), 331-363.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Gottardis, L. y Terlektsi, M.-E. (2014). The cognitive demands of understanding the sample space. *ZDM Mathematics Education, 46*(3), 437-448. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0581-3

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: Un estado del arte. *RELIME, 17*(1), 59-81.

OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy.* PISA, OECD Publishing.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). SEIEM.

Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, J. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15* (1), 63-9.

Otzen, T. y Manterola, C. (2017). Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. *International Journal of Morphology, 35*(1), 227-232. http://dx.doi.org/10.4067/S0717-95022017000100037

Palella, S. y Martins, F. (2006). *Metodología de la investigación cuantitativa*. FEDUPEL.

Paparistodemou, E., Noss, R., y Pratt, D. (2008). The interplay between fairness and randomness in a spatial computer game. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(2), 89-110. https://doi.org/10.1007/s10758-008-9132-8.

Peard, R. (1990). Gambling and ethnomathematics in Australia. En Booker, G., Cobb, P. y Mendicutti, T. (Eds), *Proceedings of the XIV PME Conference* (V.2, pp. 335-342). México. PME Group.

Pérez Echeverría, M. P., Carretero, M. y Pozo, J. I. (1986). Los adolescentes ante las matemáticas: Proporción y probabilidad. *Cuadernos de Pedagogía, 133*, 9-13.

Piaget, J. (1975). *Psicología de la inteligencia*. Psique.

Piaget, J., Grize, J. B., Szeminska, A. y Vinh, B. (1968). *Epistémologie et psychologie de la fonction,* Presses Universitaires de France.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1997). *La psicología del niño*. Ediciones Morata. (Trabajo original publicado en 1967)

Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64.

Post, T., Behr, M. y Lesh, R. (1988). Proportionality and the development of pre-algebra understandings. En A. Coxford, A. Shulte (Eds.*), The idea of algebra, K-12* (pp. 78-90), National Council of Teachers of Mathematics.

Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 602-625. https://doi.org/10.2307/749889

Pratt, D. y Kazak, S. (2018). Research on uncertainty. In D. Ben-Zvi (Ed.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 193-227). Springer https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Real Academia de la Lengua (2023). *Diccionario de la Lengua Española.* Espasa Calpe

Resnik, D. B. (2017). The role of intuition in risk/benefit decision-making in human subjects research. *Accountability in Research, 24(*1), 1-29. https://doi.org/10.1080/08989621.2016.1198978

Santillana (2019b). *Matemática 5: Cuaderno de actividades*. (1a. ed.). San José, Costa tica: Editorial Santillana.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly, 23*, 139-159. https://doi.org/10.1080/10573560601158461

Schlottmann, A. y Anderson, N. H. (1994). *Children's judgements of expected value. Developmental Psychology, 30* (1), 56-66. https://doi.org/10.1037/0012-1649.30.1.56

Serrano, L., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10*(1), 7-25.

Sharma, S. (2016). Probability from a socio-cultural perspective. *Statistics Education Research Journal, 15*(2), 126-144. https://doi.org/10.52041/serj.v15i2.244

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465- 494). MacMillan.

Shulman, A. y Carey, S. (2007) Impossible or improbable? How children reason about the possibility of extraordinary claims. *Child Development*, *78*, 1015-1032. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01047.x

Singer, J. A. y Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, *23,* 231-246. https://doi.org/10.1007/BF02309531

Skjong, R. y Wentworth, B. (2001). Expert judgement and risk perception. *Proceedings of the Eleventh International Offshore and Polar Engineering Conference Stavanger* (Vol. 4, pp. 537-544). International Society of Offshore and Polar Engineers.

Supply, A. S., Vanluydt, E., Van Dooren, W. y Onghena, P. (2023). Out of proportion or out of context? Comparing 8-to 9-year-olds‟ proportional reasoning abilities across fair-sharing, mixtures, and probability contexts. *Educational Studies in Mathematics,* 1-18. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10212-5

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*(2), 181-204. https://doi.org/10.1007/PL00020739

Truran, J. (1994). Examination of a relationship between children's estimation of probabilities and their understanding of proportion. En J. P. Ponte and J. F. Matos (Eds), *Proceedings of the XVIII PME Conference* (Vol. 4, pp. 337-344). Universidad de Lisboa.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin, 76*(2), 105. https://doi.org/10.1037/h0031322

Van Dooren, W., Vamvakoussi, X. y Verschaffel, L. (2018). *Proportional reasoning*. International Academy of Education.

Vanluydt, E., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2022a). The role of relational preference in early proportional reasoning. *Learning and Individual Differences, 93,* 102108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2021.102108

Vanluydt, E., Verschaffel, L., y Van Dooren, W. (2022b). The early development of proportional reasoning: A longitudinal study of 5- to 8-year-olds. *Journal of Educational Psychology*. https://doi.org/10.1037/edu0000734

Vásquez, C. V. y Alsina, Á. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de educación primaria. *Bolema, 31*(57), 454-478. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a22.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Acta Scientiae*, *21*(3), 131-154. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215

Vidakovic, D., Berenson, S., & Brandsma, J. (1998). Children‟s intuitions of probabilistic concepts emerging from fair play. En L. Pereira-Mendoza, L. S. Kea, T. W. Kee, & W. Wong (Eds.), *Proceedings of the 5th International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 1, pp. 67–73). International Statistical Institute.

Vygotskiĭ, L. S. (2012). *Thought and language.* MIT press.

Wang, Z. y Osterlind, S. J. (2013). *Classical test theory. Handbook of quantitative methods for educational research*. Sense Publishers.

Watson, J. y ColIis, K. F. (1994). Multimodal functioning in understandi chance and data concepts. En Ponte, J. P. y Matos, J. P. (Eds), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Volume 4, pp. 369-376). Universidad de Lisboa.

Yost, P., Siegel, A. & Andrews, J. (1962). Non verbal probability judgement by young children. *Child Development*, *33*, 769-780.

Zapata-Cardona L. (2018) Supporting young children to develop combinatorial reasoning. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education.* (pp. 257-272). Singapore; Springer: https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_15.

Zapico, M. (2007). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. En MINEDUC (Ed.), *Primer Seminario Internacional de Textos Escolares (SITE 2006)* (pp. 149-155). Santiago: MINEDUC.

ANEXOS

ANEXO 1: INDICADORES DE IDONEIDAD EPISTÉMICA DE LOS CONTENIDOS DE PROBABILIDAD DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA COSTARRICENSE

El contenido de este capítulo se deriva del siguiente trabajo;

Hernández-Solís, L. A. y Batanero, C. (2022). Indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad del currículo de Matemática Costarricense. *PädiUAQ, 6*(11), 1-18. https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/article/view/742/879

Introducción

El estudio de la probabilidad ha adquirido relevancia en todos los niveles educativos, debido a la necesidad de proporcionar a los ciudadanos una cultura probabilística (Gal, 2005) requerida en distintas áreas profesionales y científicas. Además de ser una parte importante de la matemática, que se puede relacionar con otras, como la aritmética, álgebra y funciones, cálculo, geometría y medida, la probabilidad es una herramienta necesaria para la toma de decisiones en condiciones aleatorias (Batanero, 2005; Borovcnik, 2016). En consecuencia, son muchos los autores que abogan por la incorporación de los conocimientos probabilísticos desde la escuela elemental (Alsina, 2017; Vásquez et al., 2019).

Como consecuencia son muchos los países que introducen contenidos de probabilidad desde edades tempranas (e. g. Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2013; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD, 2014 y National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Costa Rica no ha sido una excepción, por lo que en los recientes Programas de Estudio de Matemática para la educación preuniversitaria (MEP, 2012), se ha dado gran relevancia al área de Estadística y Probabilidad, cuyos contenidos y expectativas de aprendizaje se organizan de manera integrada, desde el primer año de educación primaria hasta el último de educación secundaria.

La finalidad de este trabajo es analizar la idoneidad epistémica de la propuesta curricular costarricense para la Educación General Básica (EGB). En concreto, se sigue la metodología sugerida por Godino et al. (2012) para inferir indicadores de idoneidad epistémica del tema de Probabilidad, a partir del análisis de las directrices curriculares en los Planes de Estudio de Matemática del Ministerio del Educación Pública costarricense (MEP, 2012). En lo que sigue, se describe el currículo de matemática costarricense, se expone el marco teórico, la metodología empleada, los resultados y se discuten las conclusiones.

Currículo de Matemática Costarricense

El currículo costarricense de Matemáticas para la Educación General Básica (en adelante: EGB) (MEP, 2012) está organizado en tres de los cuatro ciclos del sistema educativo de este país. Los dos primeros corresponden a la Educación Primaria y los otros dos a Educación Secundaria. Los planes de estudio de Matemáticas en cada ciclo son organizados de forma integrada del primero al último curso en torno a los conocimientos matemáticos y habilidades relacionadas que se espera sean desarrollados. Se plantean cinco áreas: *Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra* y *Estadística y Probabilidad*.

El área de *Estadística y Probabilidad* incluye, por un lado, la identificación, organización y presentación de la información (estadística descriptiva), y por otro la probabilidad, donde se centrará este trabajo. Esta área está presente a lo largo de todos los ciclos, manteniéndose en Educación Primaria en la misma proporción que Geometría, Medidas y Relaciones y Álgebra y constituyendo en Educación Secundaria una cuarta parte del Currículo.

Conocimientos de probabilidad que se desarrollan en la EGB

Como se muestra en las Tablas A1.1 y A1.2, los conocimientos de probabilidad se desarrollan de manera paulatina y complejidad creciente, desde el primer año (Educación Primaria) hasta el noveno año (Educación Secundaria), que constituyen la EGB en Costa Rica. En el Primer ciclo se trata de que los niños identifiquen las situaciones donde interviene el azar, como aquellas cuyo resultado no se puede predecir, y las diferencien de las deterministas. Se propone no solo realizar juegos con monedas, dados, ruletas y otros dispositivos, sino incluir situaciones cotidianas vinculadas a la incertidumbre, que acerquen al niño a estas experiencias. Para este ciclo únicamente se desea generar nociones intuitivas sin estudiar la cuantificación de las probabilidades, únicamente se habla de eventos más o menos probables.

En Segundo ciclo se sugiere analizar probabilidades de juegos de azar y problemas del contexto estudiantil. Se aprovecha la intuición desarrollada en el primer ciclo para profundizar en conceptos relacionados con eventos y sus representaciones. En el último año se introduce el cálculo de probabilidades según la Ley de Laplace. En consecuencia, se da un salto cualitativo en la enseñanza, pues partiendo de ideas intuitivas se llega a calcular probabilidades como una proporción de resultados favorables entre posibles.

En el Tercer ciclo se lleva a cabo una transición entre la Educación Primaria y Secundaria, por lo que en el octavo año hay una nivelación y precisión de conceptos probabilísticos estudiados en el ciclo anterior y se incrementa la dificultad de los problemas planteados. En el último año se introduce la definición frecuencial de probabilidad.

Tabla A1.1. Conocimientos probabilísticos que se desarrollan en la Educación General Básica del currículo de Matemática costarricense MEP (2012). *Fuente:* Elaboración propia.

Conocimientos	I CICLO			II CICLO			III CICLO		
	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º
Situaciones: aleatorias y seguras.	x	x	x	x				x	
Eventos: seguro, probable, imposible, más y menos probables.		x	x	x	x			x	
Resultados simples de un experimento aleatorio.			x	x	x			x	
Representación de eventos.				x				x	
Definición clásica o laplaciana de probabilidad.						x		x	
Propiedades de las probabilidades						x		x	
Eventos simples y compuestos								x	
Muestras aleatorias									x
Probabilidad frecuencial									x
Introducción a la ley de los grandes números									x

Nota: En séptimo año no aparecen contenidos de probabilidad, para dar mayor espacio al refuerzo de contenidos estadísticos estudiados en Educación Primaria.

Aunque en la Tabla A1.1 hay conocimientos que se repiten en diferentes años y ciclos, en la Tabla A1.2 se puede apreciar que el nivel de profundidad de cada contenido es progresivo por ciclo. Además, en Tercer ciclo se formalizan los conceptos y propiedades mediante mayor precisión matemática y uso de lenguaje simbólico. Por último, en Tercer ciclo, además de las habilidades generales presentadas en la Tabla A1.2, aparecen otras asociadas a ejes disciplinares transversales del Currículo que deben ser logradas por los estudiantes a lo largo de toda la EGB: la *resolución de problemas como estrategia metodológica principal*; la *contextualización activa como un componente pedagógico especial*; y el *uso de la Historia de las Matemáticas*.

Tabla A1.2. Habilidades generales asociadas a conocimientos probabilísticos en el currículo de Matemática costarricense para EGB. *Fuente:* Elaboración propia a partir de MEP (2012).

Conocimientos	Habilidades generales		
	I CICLO	II CICLO	III CICLO
Situaciones: aleatorias y seguras.	- Identificar situaciones aleatorias y seguras dentro de la cotidianidad y eventos asociados con ellas.		
Eventos aleatorios.	- Clasificar eventos aleatorios en más o menos probables para situaciones o experimentos particulares. - Identificar eventos de acuerdo con los resultados simples que están vinculados con ellos.	- Identificar eventos más probables, menos probables o igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento.	- Identificar eventos provenientes de situaciones aleatorias particulares y determinar probabilidades asociadas a ellos.
Probabilidad clásica o laplaciana.		- Determinar probabilidades elementales vinculadas con eventos particulares. - Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias.	- Utilizar la definición laplaciana de probabilidad para deducir las propiedades vinculadas con el evento: seguro, probable e imposible.
Probabilidad frecuencial			- Utilizar la definición frecuencial o empírica de probabilidad para resolver problemas vinculados con fenómenos aleatorios.

Marco teórico

Utilizaremos el Enfoque Ontosemiótico (en adelante: EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero, 1994, Godino et al., 2007; 2019), que concuerda epistemológicamente con MEP (2012), debido al papel central que el EOS da a las situaciones problema y las prácticas deducidas de ellas y a la importancia dada en MEP (2012) a la resolución de problemas como vehículo de aprendizaje. De este marco teórico se utilizará el constructo *significado institucional* y la clasificación de tipos de objetos que permitirán analizar el contenido de las orientaciones curriculares. Además, se empleará la idoneidad didáctica y, en particular, la idoneidad epistémica y sus indicadores.

Significados institucionales y personales

El EOS parte de una formulación ontológica de los objetos matemáticos, que, a partir de la *situación-problema* define los conceptos de *práctica*, *objeto* (personal e institucional) y *significado del objeto* (Godino et al., 2007; 2019). El significado de los objetos matemáticos se origina de las prácticas llevadas a cabo por una persona o institución al resolver problemas relacionados con dichos objetos. Una práctica es "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334) y pueden ser personales o institucionales.

Las *prácticas institucionales* están normadas por los sujetos de una institución, grupo que realiza prácticas sociales tomando en cuenta sus instrumentos, reglas y modos de funcionamiento, mientras que las *personales* corresponden a un sujeto. Se define el *objeto institucional (personal)* como un emergente del sistema de prácticas institucionales (personales) asociadas a un campo de problemas y dicho sistema de prácticas se concibe como el significado institucional (personal) del objeto. En Godino et al. (2007) se clasifican los significados institucionales en *Referencial, Pretendido, Implementado* y *Evaluado*, y los significados personales en *Global*, *Declarado* y *Logrado*. En este trabajo, nos centraremos en dos tipos de significados institucionales, que es necesario comparar, según Godino (2013), para evaluar la idoneidad epistémica de un proceso de estudio: a) *Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido y b) *Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

Para analizar el significado de la probabilidad pretendido en el currículo es necesario explicitar el significado de referencia del tema. Batanero (2005) y Batanero y Díaz (2007) indican que el significado de probabilidad ha sido "polifacético" a lo largo de la Historia (Batanero et al., 2005) y describen diferentes significados parciales: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo, axiomático, lógico y propensión. La comprensión global de la probabilidad requiere la de sus varios significados, que deben ser relacionados entre sí, por lo que dependiendo del contexto en que se utilice puede ser "la razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad" (p. 260).

Por otro lado, Godino (2013) advierte que "el significado de referencia será relativo al nivel educativo en el que tiene lugar el proceso de estudio" (p.119), por lo que tomaremos como significado de referencia de la probabilidad en la EGB costarricense (estudiantes de 7 a 15 años, aproximadamente) el conjunto de tres enfoques: intuitivo, el clásico o laplaciano y frecuencial, que son los presentados en el currículo (MEP, 2012).

Objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Godino et al. (2007) describen diferentes tipos de objetos matemáticos o entidades primarias que se pueden observar en un texto matemático y que emergen de los sistemas de prácticas asociadas a un campo de problemas:

- *Situaciones – problemas*: aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas que conllevan actividad matemática. Por ejemplo, la cuantificación de la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio.
- *Elementos lingüísticos*: expresiones, notaciones o gráficos empleados para enunciar o resolver problemas que permiten su operacionalización. En el caso de la probabilidad, pueden aparecer representaciones tabulares y gráficas, lenguaje cotidiano ("suerte", "posibilidad") o matemático (esperanza matemática, distribución de probabilidad) y símbolos algebraicos.
- *Conceptos - definición*: enunciados que identifican y caracterizan a objetos matemáticos mediante sus definiciones o descripciones. Algunos ejemplos de conceptos implicados en la probabilidad son los de equiprobabilidad, espacio muestral o evento seguro, entre otros.
- *Proposiciones - propiedades*: enunciados que involucran relaciones o propiedades de los conceptos. Por ejemplo, que la probabilidad de un suceso es un valor entre 0 y 1.
- *Procedimientos:* algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, que se pueden aplicar en la resolución de la situación-problema, como enumerar o contar los casos favorables de un suceso y casos posibles del experimento aleatorio.
- *Argumentos*: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos. Un tipo sería realizar una simulación de un experimento aleatorio para analizar la convergencia de la frecuencia relativa de un suceso a su probabilidad teórica o clásica.

Idoneidad didáctica

Como se ha indicado, en este trabajo nos centraremos en la *idoneidad didáctica* (Godino, 2013), herramienta creada para apoyar el diseño y evaluación de programas de estudio y acciones formativas de profesores. Se define como el grado en que un proceso de instrucción es adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Godino et al., 2006; Godino et al., 2016). Se trata de la articulación coherente y sistémica de las seis componentes: *idoneidad epistémica* (representatividad del significado institucional), *idoneidad ecológica* (ajuste a la sociedad y el entorno), *idoneidad cognitiva* (adecuación a los estudiantes), *idoneidad afectiva* (aspectos emocionales), *idoneidad interaccional* (permite identificar y resolver conflictos de significado) e *idoneidad mediacional* (adecuación de los recursos didácticos) (Godino et al., 2007). Para cada una de estas facetas Godino (2013) propone componentes y criterios de idoneidad. Los criterios de idoneidad se deben de entender como reglas o indicadores emanados de la comunidad científica, orientados a conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor" (Godino et al., 2009, p. 60). En este trabajo analizamos la *idoneidad epistémica*, que "refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia" (Godino et al., 2007). Es decir, se pretende analizar en qué medida el significado de la probabilidad pretendido en MEP (2012) es pertinente desde el punto de vista de la teoría probabilística aceptada en la comunidad matemática (significado de referencia). Godino (2013) considera como componentes de la idoneidad epistémica los objetos primarios considerados en el EOS y sus relaciones (Tabla A1.3), para cada uno de los cuales propone una serie de indicadores que consideraremos en nuestro trabajo.

Tabla A1.3. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica. *Fuente:* Godino (2013, p.119).

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	• Se presenta una muestra representativa y articulada de situacionesde contextualización, ejercitación y aplicación. • Se proponen situaciones de generación de problemas(problematización)
Lenguajes	• Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica, etc.) traducciones y conversiones entre las mismas. • Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales deltema para el nivel educativo dado. • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadasal nivel educativo al que se dirigen. • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	• Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones,etc.) se relacionan y conectan entre sí.

Antecedentes

Nos basamos también en algunos trabajos que han analizado la idoneidad didáctica de la probabilidad en documentos curriculares. Así, Godino et al. (2012) proponen una metodología para la evaluación de la idoneidad de procesos de instrucción matemática mediante el análisis de contenido de propuestas curriculares. La ejemplifica estudiando los contenidos matemáticos generales de los *Principios y Estándares del NCTM* (2000), centrándose específicamente en los que refieren al análisis de datos y probabilidad. En la Tabla A1.4 presentamos los específicamente ligados a la probabilidad.

Tabla A1.4. Indicadores de idoneidad epistémica en los estándares de NCTM (2000) (contenido de probabilidad). *Fuente*: Adaptación de la tabla mostrada en Godino et al. (2012, p. 349).

Problemas: • Se plantean problemas – investigaciones (proyectos) con diversas fuentes y tipos de datos teniendo en cuenta los elementos básicos de la probabilidad. *Lenguajes:* • Se utilizan diferentes representaciones de uso convencional en probabilidad, tales como: números, símbolos, coordenadas cartesianas, palabras, frecuencias absolutas, frecuencias relativas, tablas, histogramas y diagramas (de barra, lineal, de sectores, de caja y de puntos). Los gráficos incluyen los títulos y etiquetas que permiten identificar claramente los datos representados. • Se incluyen situaciones en las que se requiere discriminar entre el uso más adecuado de una u otra representación. *Reglas (conceptos, procedimientos, proposiciones):* • Se describen y evalúan las posibilidades de ocurrencia de un suceso como posible, imposible, probable o seguro, a partir de experiencias cercanas y de la observación de regularidades en experimentos aleatorios simples. • Se introducen la regla de Laplace como un modelo que permite predecir el valor de la probabilidad de ocurrencia de un evento simple, sin realizar el experimento aleatorio.

Beltrán-Pellicer et al. (2018) presentan una guía de valoración de la idoneidad didáctica de la probabilidad en la educación secundaria obligatoria (estudiantes de 12 a 16 años) para dotar al docente de un instrumento que promueva la reflexión en torno a experiencias de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad. Específicamente para nuestro estudio, utilizaremos la Tabla A1.5, donde se sintetizan los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por dichos autores.

Tabla A1.5. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica específicos para los procesos de estudio de la probabilidad. *Fuente:* Beltrán-Pellicer et al (2018, p.536).

Componentes	Indicadores
Situaciones-problema	• Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica). • Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales,distinguiéndolas de experiencias deterministas. • Se propone una muestra representativa de contextos para ejercitar y aplicar los contenidos. • Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios.
Lenguajes	• Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias • Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado. • Se emplean términos precisos. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.
Reglas	• Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad. • Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario; propiedades de las frecuencias relativas • Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. • Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de tablas y diagramas de árbol. • Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo. • Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas. • Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	• Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad

Metodología

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo con un alcance descriptivo (Hernández et al., 2014), basado en el análisis de contenido (Andréu, 2011). Dicha técnica se empleará para extraer y sistematizar las normas relacionadas con la faceta epistémica contenidas en MEP (2012), que se resumirán para deducir de ellas indicadores de idoneidad epistémica, siguiendo el método expuesto en Godino et al. (2012).

En una primera fase, el texto es dividido en unidades de análisis, las cuales son clasificadas según las facetas y componentes que propone la *Teoría de la Idoneidad Didáctica*, seleccionando las que se refieren a la faceta epistémica. En una segunda fase, dichas unidades son comparadas entre sí y reducidas con el fin de evitar reiteraciones.

Posteriormente, se infieren indicadores de idoneidad epistémica, particularizados para la probabilidad.

Finalmente, se redactan las normas reducidas identificadas en el documento (MEP, 2012), redactándolas en forma de indicadores y presentando una tabla resumen, que es comparada con los indicadores de idoneidad epistémica propuestos por Godino (2013), Godino et al. (2012) y Beltrán-Pellicer et al. (2018). La finalidad de la metodología descrita es la elaboración de una síntesis de indicadores de idoneidad de los contenidos de probabilidad del currículo costarricense que sirva de guía para el diseño y evaluación de la instrucción en el tema y en la formación de profesores. Al tiempo que se identifican limitaciones y complementariedades entre los instrumentos comparados.

Análisis y resultados

En esta sección se resumirán las normas generales y específicas asociadas a contenidos probabilísticos establecidas en MEP (2012), que en el marco del EOS son consideradas como epistémicas, esto es, referidas a características de los objetos matemáticos contemplados desde el punto de vista institucional. Igualmente, se describen las explicaciones y justificaciones de las mismas. Dichas normas se clasifican según las componentes de la idoneidad epistémica propuestas por Godino (2013), es decir, según se refieren a los diferentes tipos de objetos matemáticos descritos en el marco teórico o sus relaciones. Para no ser reiterativos, se entiende que todas las normas se deben leer comenzando con "se deben", aunque esta expresión no se repite al presentar cada una de ellas.

Normas epistémicas sobre las situaciones-problema

Puesto que la estrategia metodológica subyacente en las directrices curriculares es la resolución de problemas, existen normas generales al respecto, que orientan la enseñanza de los diferentes tópicos matemáticos, incluida la probabilidad. Se han identificado las siguientes MEP (2012):

- Identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas (p. 24).
- Determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente (p. 24).

Asociada a las anteriores normas, se han podido encontrar las siguientes explicaciones y justificaciones (MEP, 2012):

> Se asume que usar este tipo de problemas es una poderosa fuente para la construcción de aprendizajes en las Matemáticas. Al colocarse en contextos reales, el planteo y resolución de problemas conlleva directamente a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos (p. 13).
>
> La resolución de problemas está asociada sustancialmente a la naturaleza de las Matemáticas, sean problemas del entorno o abstractos. Intuir, describir, plantear, resolver y generalizar problemas matemáticos define la actividad de estos profesionales en contextos sociohistóricos donde existen criterios y métodos de comunicación y validación (p. 28).

Normas específicas de probabilidad

También se han identificado las siguientes directrices sobre el papel de las situaciones-problemas en el estudio de la probabilidad, algunas de las cuales muestran una posición normativa sobre dicha actividad matemática, otras explican cómo debe realizarse dicha actividad o aportan razones por las cuales se requiere dicha actividad (MEP, 2012):

- Dirigir la acción estudiantil hacia el planteo de problemas vinculados con el cálculo de probabilidades (p. 361).
- Formular situaciones u organizar juegos en los cuales se puedan establecer diferencias claras entre situaciones aleatorias o inciertas y situaciones seguras. (p. 146).
- Motivar el planteamiento de situaciones genéricas como la lotería nacional, los juegos de dados, el Tico-Bingo, entre otros (p. 361).
- Formular situaciones de aprendizaje (juegos o situaciones de la cotidianidad) que permitan identificar el número de resultados a favor de un evento determinado y con base en ese conocimiento tomar decisiones (p. 257).
- No es recomendable limitarse únicamente a los juegos de azar, se requiere adecuar situaciones al contexto estudiantil para favorecer una mayor comprensión de la incertidumbre en la vida cotidiana (p. 369).
- Aprovechar las situaciones para precisar el concepto de probabilidad de un evento como la proporción de casos a favor del evento o sea la razón de puntos muestrales a favor del evento entre el total de puntos muestrales (p. 360).
- Proponer problemas del contexto donde el análisis de probabilidades permita la toma de decisiones (p. 361).
- Generar situaciones aleatorias en las que el espacio muestral sea indeterminado o infinito (p. 365).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes, sobre el papel de la resolución de problemas en el estudio de la probabilidad:

- Construir los conocimientos probabilísticos a través de la resolución de problemas, juegos y situaciones de incertidumbre cercanas al contexto estudiantil, en diversos contextos que involucren los diferentes significados de la probabilidad.
- Resolver problemas que susciten la toma de decisiones del estudiantado en situaciones de incertidumbre.
- Generar problemas (problematización estudiantil), juegos o situaciones asociadas a fenómenos de incertidumbre o experimentos aleatorios.
- Evaluar y controlar las estrategias de resolución de problemas probabilísticos.

De estas normas se infieren los indicadores de idoneidad asociados a la resolución de problemas que se incluyen en la sección de síntesis de resultados (Tabla A1.6). Asociadas a las anteriores normas, se han podido encontrar explicaciones o justificaciones como "En todo momento, lo que es apenas natural en esta área, las temáticas se presentan a través de problemas reales" (MEP, 2012, p. 55) o también:

> Se desea subrayar en esta visión la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes (p. 28).

Normas epistémicas sobre los elementos lingüísticos/representaciones

A partir de los procesos matemáticos "Representar" y "Comunicar" se plantean normas generales que orientan el uso del lenguaje matemático en las diferentes áreas matemáticas del currículo, por ejemplo (MEP, 2012):

- Fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares) (p. 26).
- Identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas" (p. 25).
- Elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas (p. 26).
- Expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa (p. 25).

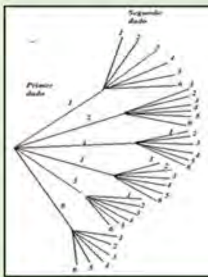
- Traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada (p. 26).

Asociadas a estas normas generales se establecen, en la malla curricular, indicaciones puntuales por contenido probabilístico como las que se presentan en la Figura A1.1:

"Para identificar cada resultado puede emplear terna de datos, por ejemplo, ECC significa que se obtuvo escudo en el primer lanzamiento y corona en los otros dos" (p. 358).

"Los espacios muestrales de experimentos que tienen un número pequeño de resultados se pueden representar entre llaves { } o mediante diagramas de otro tipo" (p. 358).

"Además de la enumeración en pares de la forma: (2,2), (2,3), …, (6,6), los resultados se pueden representar de la siguiente forma:" (p. 268)



Resultados posibles al lanzar dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Una representación gráfica como la siguiente puede ayudar: (p. 268)

Figura A1.1. Indicaciones puntuales asociadas al componente lingüístico
Fuente: Elaboración propia a partir de MEP (2012).

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas asociadas a conocimientos probabilísticos en los MEP (2012).

Normas específicas de probabilidad

- Iniciar el análisis de los términos probable, imposible y seguro (MEP, 2012, p. 154).
- Incluir diagramas, esquemas, cuadros y gráficos con información que puede ser interpretada dentro del contexto (MEP, 2012, p. 161).
- Enfatizar el papel que juegan las representaciones tabulares y gráficas dentro de los análisis estadísticos y probabilísticos (MEP, 2012, p. 370).
- Considerar la presentación de información por medio de cuadros, diagramas y gráficos como una estrategia de gran importancia para comunicar resultados de los análisis efectuados (MEP, 2012, p. 370).
- Estas representaciones contengan suficientes elementos: título general, títulos secundarios, entre otros; de modo que un lector pueda comprender el mensaje que comunican sin necesidad de recurrir a más información (MEP, 2012, p. 370).
- Centrar en el análisis y la interpretación proporcionada por los datos (para ofrecer respuesta a preguntas concretas sobre los problemas) (MEP, 2012, p. 370).
- Emplear programas de computadora, por ejemplo, hojas de cálculo, editores de texto, programas graficadores u otras herramientas que pueden ayudar a mejorar la calidad de la representación y reducir el tiempo en su construcción (MEP, 2012, p. 370).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre el uso del lenguaje en probabilidad, a partir de las cuáles se infieren los correspondientes indicadores de idoneidad presentados en la Tabla A1.6, en la sección de síntesis de resultados.

- Emplear distintas representaciones (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólica, etc.) para interpretar, comunicar y modelar situaciones de incertidumbre y experimentos aleatorios, resaltando su papel en el análisis.
- Precisar paulatinamente el lenguaje probabilístico (experimento aleatorio, eventos, espacio muestral, puntos muestrales, evento seguro, evento imposible, etc) partiendo del vocabulario que emplea estudiantado en situaciones cotidianas.
- Traducir de una representación a otra, reconociendo sus ventajas y desventajas (o alcances), según las características de la situación que se quiere modelar;
- Utilizar diferentes herramientas digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas.

Asociadas a las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones, como las que se indican a continuación (MEP, 2012):

> Es muy importante insistir en que la representación y modelización de muchos fenómenos se hace por medio de datos, y que los diferentes conjuntos de datos se pueden comparar y así brindar más conocimiento de los fenómenos de partida (p. 55).
>
> La representación y manipulación de objetos matemáticos no deben verse como un fin en sí mismo, debe entenderse que estas representaciones y sus leyes expresan a la vez acciones mentales y características de los objetos matemáticos (p. 58).
>
> Las computadoras permiten la representación de conceptos y procedimientos matemáticos (objetos matemáticos que acuden fácilmente al mundo de los sentidos). Estas tecnologías no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje (p. 37).

Normas epistémicas sobre las reglas (conceptos, propiedades, procedimientos)

A continuación, se presentan algunos enunciados clasificados según su carácter de norma, asociada a conceptos, propiedades o procedimientos probabilísticos de acuerdo con la malla curricular (MEP, 2012):

- Diferenciar entre una situación aleatoria y una determinista o segura (p. 146).
- Identificar eventos seguros o aleatorios, y dentro de las situaciones aleatorias aquellas que son más o menos probables de acuerdo con nociones intuitivas (p. 169).
- Identificar situaciones más probables o menos probables dentro del contexto estudiantil (p. 155).
- Inducir que es igualmente probable obtener un escudo (E) o una corona (C) al lanzar una moneda y por ende que los eventos obtener un escudo y una corona (EC) y obtener una corona y un escudo (CE) al lanzar dos monedas son igualmente probables. (p. 167).
- Generalizar la idea de que una situación es más probable que otra si tiene más posibilidad de ocurrir, o sea ocurre con mayor regularidad (p. 154).
- Intuir hechos que tienen una mayor probabilidad de ocurrencia y de este modo favorecer sus decisiones (p. 146).
- Definir el concepto de probabilidad como la proporción de casos favorables de un evento entre el total de casos. Aquí debe quedar claro que esta definición es válida siempre que todos los resultados sean igualmente probables (p. 261).
- A partir de la definición laplaciana o clásica de probabilidad, y de los conceptos de evento probable, imposible y seguro, es conveniente que la acción estudiantil esté dirigida hacia la deducción de algunas de las propiedades básicas que cumplen las probabilidades (p. 361).
- Generar la ley de los grandes números desde un punto de vista intuitivo, en el sentido que entre más grande sea la muestra con la que se trabaja, más se aproxima la probabilidad frecuencial de un evento a su valor real (p. 368).

Las normas anteriores, como también otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes, asociadas a elementos regulativos, de las que se infieren los indicadores de idoneidad correspondientes y que se presentan en la sección de síntesis de resultados en la Tabla A1.6:

- Diferenciar entre fenómenos deterministas y fenómenos aleatorios y entre sucesos más o menos probables, para favorecer la toma de decisiones.
- Estimar y calcular probabilidades de acuerdo al significado de probabilidad (intuitivo, clásico o frecuencial) propuesto según nivel educativo y las características de la situación o experimento aleatorio planteado.
- Deducir las propiedades de la probabilidad a partir de los conceptos de evento probable, imposible y seguro y del enfoque clásico.
- Emplear la ley de los grandes números desde un punto de vista intuitivo para aproximar la probabilidad de un evento, relacionando los enfoques clásico y frecuencial.

Igualmente, se encuentran justificaciones para dichas normas:

> El concepto clásico de probabilidad se ha venido construyendo paulatinamente en función de la identificación de los puntos muestrales que están a favor de un evento dentro del espacio muestral. No obstante, ante lo limitado de la definición clásica o laplaciana se requiere introducir el análisis probabilístico con base en la definición frecuencista, por la cual se aproximan las probabilidades mediante una frecuencia relativa determinada a través de una muestra aleatoria. Este enfoque genera una aproximación a las probabilidades, aprovechando la noción intuitiva de la ley de los grandes números para identificar la evolución que esas probabilidades van experimentando a medida que se incrementa el tamaño de la muestra (MEP, 2012, p. 379).

Normas epistémicas sobre los argumentos

A partir de los procesos matemáticos "Razonar y argumentar" y "Comunicar" se plantean normas generales que orientan la importancia de la argumentación en las diferentes áreas matemáticas (MEP, 2012):

- Plantear una conjetura y buscar los medios para justificarla (en adecuación a cada nivel educativo), ya sea por medio de materiales concretos, diagramas, calculadoras u otros instrumentos (p. 56).
- Cultivarse de una manera gradual, primero acudiendo a formas verbales, luego escritas y más tarde simbólicas (p. 56).

A continuación, se presentan algunos enunciados clasificados según su carácter de normas sobre la argumentación, asociadas a conocimientos probabilísticos.

Normas específicas de probabilidad

- Comunicar mediante una adecuada argumentación las respuestas a dichas interrogantes (MEP, 2012, p. 148).
- Realizar un debate donde se discutan los resultados obtenidos, en función de los argumentos empleados para justificar las respuestas (MEP, 2012, p. 360).
- Simular otras situaciones que permitan apreciar la ley de los grandes números. Por ejemplo, utilizando una hoja de cálculo es posible generar números aleatorios que permiten simular fenómenos de distinta naturaleza (MEP, 2012, p. 369).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre la argumentación en probabilidad.

- Emplear de manera gradual diferentes tipos de argumentación (verbal, escrita, simbólica) de acuerdo al nivel educativo del estudiantado.
- Plantear conjeturas y justificarlas empleando diferentes recursos (materiales concretos, diagramas, calculadoras, etc.) que apoyen y debatan los argumentos expuestos.

- Utilizar simulaciones como apoyo en la argumentación relacionada con el significado frecuencial y la ley de los grandes números.

Asociadas a las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones, como las siguientes (MEP, 2012):

> Se trata de actividades mentales que aparecen transversalmente en todas las áreas del plan de estudios y que desencadenan formas típicas del pensamiento matemático: deducción, inducción, comparación analítica, generalización, justificaciones, pruebas, uso de ejemplos y contraejemplos (p. 24).
>
> La justificación y prueba son parte esencial de los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben ocupar un lugar especial en la formación escolar. (p. 56).
>
> Las computadoras permiten la representación de conceptos y procedimientos matemáticos (objetos matemáticos que acuden fácilmente al mundo de los sentidos). Estas tecnologías no sólo favorecen la representación matemática múltiple, sino también recursos extraordinarios en la interacción estudiante-conocimiento, permitiendo un involucramiento activo del sujeto en su aprendizaje (p. 37).

Normas epistémicas sobre las relaciones entre componentes

A partir del proceso matemático “Conectar” se plantean normas generales que orientan la forma en que deben relacionarse los conceptos o las diferentes áreas matemáticas del currículo, por ejemplo (MEP, 2012):

- El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces (p. 57).
- Entrenar y desarrollar la capacidad para hacer conexiones puede hacerse en todos los niveles educativos sin gran dificultad (p. 25).

A continuación, aparecen algunos enunciados clasificados según su carácter de normas asociadas a relaciones sobre conocimientos probabilísticos de acuerdo con las directrices curriculares (MEP, 2012). Las dos primeras conectan elementos regulativos de otras áreas matemáticas con elementos regulativos probabilísticos, siguen dos que conectan elementos regulativos estadísticos y probabilísticos. Las dos siguientes conectan situaciones problemas con estos mismos elementos; sigue otra que conectan la argumentación y resolución de problemas.

Normas específicas de probabilidad

- La probabilidad conecta mucho con *Números y Geometría*, y se debe tratar de manera informal en los primeros años para ir avanzando en su abstracción en la Secundaria (MEP, 2012, p. 55).

- Este problema permite conectar los conceptos de Probabilidad con el cálculo de áreas en *Geometría*. Se puede identificar que es más probable la figura que tiene mayor área (MEP, 2012, p. 360).
- Establecer vínculos entre los conceptos estadísticos y los probabilísticos (MEP, 2012, p. 163).
- Aunque los problemas con el análisis de las probabilidades pueden diferir de los problemas eminentemente estadísticos, los principios básicos que los regulen deben ser los mismos (MEP, 2012, p. 380).
- Favorecer los procesos de resolución de problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil (MEP, 2012, p. 360).
- Centrar en el análisis y la interpretación proporcionada por los datos (para ofrecer respuesta a preguntas concretas sobre los problemas) (MEP, 2012, p. 370).
- Realizar un debate donde se discutan los resultados obtenidos, en función de los argumentos empleados para justificar las respuestas (MEP, 2012, p. 360).

Las normas anteriores, como otras que contienen ideas similares, pueden ser sintetizadas en las siguientes sobre relaciones, que se traducen en indicadores en la sección de síntesis de resultados en la Tabla A1.6.

- Conectar la probabilidad con otras áreas temáticas, en particular *Números* y *Geometría*, usando en lo posible la resolución de problemas.
- Plantear problemas que relacionen la estadística y la probabilidad y ayuden a desarrollar elementos regulativos de probabilidad;
- Emplear diferentes representaciones para la resolución de problemas de probabilidad.
- Utilizar la argumentación para respaldar respuestas planteadas en problemas de probabilidad.

En relación con las anteriores normas, se ha podido encontrar explicaciones o justificaciones, como las siguientes (MEP, 2012):

> Aunque las Matemáticas han evolucionado en distintas disciplinas o áreas, han llegado a integrarse con el correr del tiempo. Esta integración es de tal nivel y el flujo de relaciones de un lado a otro es tan grande que no insistir en esas conexiones y ese carácter unificado haría perder la comprensión adecuada de lo que son las Matemáticas (p. 24).
>
> Observar la aplicabilidad e interconectividad de las Matemáticas refuerza su aprecio y disfrute (p. 57).
>
> Las Matemáticas, por su misma naturaleza, poseen las potencialidades para apoyar los procesos transdisciplinarios que desde los primeros años escolares se deben cultivar. El conocimiento debe visualizarse como una realidad interconectada llena de enlaces (p. 57).

Las conexiones con el entorno y otras materias son fáciles de realizar en Estadística y Probabilidad en todo momento (p. 59).

Síntesis de indicadores de idoneidad epistémica

En la Tabla A1.6 se muestran los indicadores de idoneidad epistémica específicos del tema de probabilidad inferidos de la sistematización de las normas extraídas de las directrices curriculares costarricenses (MEP, 2012). Su comparación con las Tablas A1.3, A1.4 y A1.5 nos lleva a obtener las siguientes conclusiones:

- Los indicadores obtenidos sobre la componente de situaciones-problema abarcan los propuestos en Godino (2013) y los específicos de probabilidad planteados en el NCTM (2000) (Godino et al., 2012), puesto que los problemas tienen en cuenta los elementos básicos de la probabilidad y, además, son planteados empleando diversos contextos. Respecto a los derivados por Beltrán-Pellicer et al. (2018), no se cita en el currículo el significado subjetivo de la probabilidad, pero implícitamente se contempla un primer acercamiento al insistirse en la toma de decisiones. Se añade en nuestro caso, el control y evaluación de las estrategias de resolución de problemas probabilísticos, no contemplado por Beltrán-Pellicer et al. (2018).

Tabla A1.6. Indicadores de idoneidad epistémica específicos de Probabilidad. *Fuente:* Elaboración propia

Componentes	**Indicadores**
Situaciones-problemas	• Se construyen los conocimientos probabilísticos a través de la resolución de problemas, juegos y situaciones de incertidumbre cercanas al estudiantado, en diversos contextos que involucren los diferentes significados de la probabilidad. • Se resuelven problemas que suscitan la toma de decisiones del estudiantado en situaciones de incertidumbre. • Se busca que el estudiantado genere problemas (problematización estudiantil), juegos o situaciones asociadas a fenómenos de incertidumbre o experimentos aleatorios. • Se busca que el estudiantado evalúe y controle las estrategias de resolución empleadas en problemas probabilísticos.
Lenguajes	• Se emplean distintas representaciones (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólica, etc.) para interpretar, comunicar y modelar situaciones de incertidumbre y experimentos aleatorios, resaltando su papel en el análisis. • Se precisa, de manera paulatina, el lenguaje probabilístico (experimento aleatorio, eventos, espacio muestral, puntos muestrales, evento seguro, evento imposible, etc) partiendo del vocabulario que emplea estudiantado en situaciones cotidianas. • Se busca que el estudiantado pase de una representación a otra, reconociendo las ventajas y desventajas (o alcances), según las características de la situación que se quiere modelar. • Se utilizan diferentes herramientas digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas.

Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Se diferencian los fenómenos deterministas de los fenómenos aleatorios y los sucesos más o menos probables, para favorecer la toma de decisiones. • Se estiman y calculan probabilidades de acuerdo al significado de probabilidad (intuitivo, clásico o frecuentista) propuesto según nivel educativo y las características de la situación o experimento aleatorio planteado. • Se deducen las propiedades de la probabilidad a partir de los conceptos de evento probable, imposible y seguro y del enfoque clásico. • Se emplea la ley de los grandes números desde el punto de vista intuitivo para aproximar la probabilidad de un evento, relacionando los enfoques clásico y frecuencial.
Argumentos	• Se emplean, de manera gradual, diferentes tipos de argumentación (verbal, escrita, simbólica) de acuerdo al nivel educativo del estudiantado. • Se plantean conjeturas y se justifican empleando diferentes recursos (materiales concretos, diagramas, calculadoras, etc.) que apoyen los argumentos expuestos; • Se utilizan simulaciones como apoyo en la argumentación, relacionada con el significado frecuencial y la ley de los grandes números.
Relaciones	• Se conecta la probabilidad con otras áreas temáticas, en particular Números y Geometría, usando en lo posible la resolución de problemas. • Se plantean problemas que relacionan la estadística y la probabilidad y ayudan a desarrollar elementos regulativos de probabilidad; • Se emplean diferentes representaciones para la resolución de problemas de probabilidad. • Se utiliza la argumentación para respaldar respuestas planteadas en problemas de probabilidad.

- Respecto al lenguaje probabilístico, los indicadores inferidos en nuestro trabajo incluyen los contemplados por Godino (2013), excepto el nivel adecuado del lenguaje para los niños a los que va dirigida la enseñanza; sin embargo, este indicador está implícito cuando se indica que se debe precisar paulatinamente el lenguaje probabilístico, partiendo de vocabulario cotidiano o cercano al estudiante para posteriormente crear conexiones con los términos formales. La traducción entre diferentes representaciones supone las situaciones de expresión e interpretación matemática. Además, en nuestro caso, se añade el uso de medios digitales para la construcción de representaciones tabulares y gráficas. Los comentarios anteriores implican que se incluyen los indicadores deducidos del NCTM (2000) por Godino et al. (2012) y los sugeridos por Beltrán-Pellicer et al. (2018).
- En relación a las reglas, los indicadores de Godino (2013) están contemplados, en cuanto a que los alumnos han de emplear, deducir y aplicar definiciones y propiedades de la probabilidad. Todas las reglas citadas por Godino et al. (2012) y por Beltrán-Pellicer et al. (2018), se incluyen en los indicadores del currículo costarricense, aunque expresados de forma diferente. El uso de tablas y diagramas de árbol lo hemos situado dentro de

los indicadores referidos al lenguaje, ya que en las directrices curriculares MEP (2012) se consideran herramientas de representación de objetos matemáticos para la comunicación y resolución de problemas, más que contenidos en sí mismos.

- Igualmente, se recogen en nuestro conjunto de indicadores los relacionados con la argumentación en los obtenidos por Beltrán-Pellicer et al. (2018) y, al igual que en este caso, se añade la simulación como un tipo particular de argumentación apropiado para el trabajo con la probabilidad. Además, en nuestro caso, se añade el uso de diversos recursos y representaciones que apoyen los argumentos presentados. En Godino et al. (2012) no se incluye este componente y en Godino (2013) no se cita la argumentación.
- Finalmente, los indicadores asociados con las relaciones contemplan los de Godino (2013) y Beltrán-Pellicer et al. (2018), y en Godino et al. (2012) no aparecen. En nuestro caso, el conjunto de indicadores en este componente es más rico, puesto que se divide en cuatro diferenciados, que tienen en cuenta la resolución de problemas conectada con: elementos regulativos (en áreas probabilísticas y otras); con la argumentación y con el uso de representaciones.

Conclusiones y comentarios finales

En este trabajo se analizaron los documentos curriculares que regulan la enseñanza de la matemática en Educación General Básica en Costa Rica, para inferir indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad, siguiendo el método sugerido en Godino et al. (2012). Consideramos que este análisis es un primer acercamiento a la valoración de la calidad de dichas orientaciones curriculares.

El conjunto de indicadores obtenidos y la comparación con diferentes modelos propuestos previamente, sugiere que estos documentos incluyen normas de las cuales se deducen todos los indicadores propuestos por Beltrán-Pellicer et al. (2018), Godino (2003), Godino et al. (2012), generalmente, con algo más de especificación y centrando como componente modular en las situaciones-problema, que integran y catalizan los demás componentes (lenguaje, reglas y argumentos), lo cual es consistente con lo que plantea el enfoque curricular costarricense (MEP, 2012). Asimismo, se evidencia a nivel general que se promueve la utilidad de la probabilidad en diversas áreas matemáticas y no matemáticas. En consecuencia, se deduce una alta idoneidad epistémica de los lineamientos curriculares en Costa Rica (MEP, 2012) para la enseñanza de la probabilidad en la EGB, es decir, un buen acoplamiento del significado institucional pretendido con el significado institucional de referencia de la probabilidad, dado por la investigación didáctica previa.

Finalmente, resaltamos la utilidad que la *Teoría de idoneidad didáctica* ha tenido como instrumento de valoración de las orientaciones curriculares de Costa Rica, explicitando de modo objetivo indicadores de la forma en que contemplan en dicho currículo los diversos tipos de objetos matemáticos propuestos en el EOS y sus relaciones.

Por supuesto, reconocemos que puede haber una diferencia entre lo propuesto en el currículo y lo implementado en el aula, de modo que la idoneidad epistémica final de la enseñanza en cada curso y situación dependerá de cómo se traduzca el currículo a la acción de aula. No hay que olvidar, además, el resto de las componentes de la idoneidad didáctica, cuyo análisis quedaría pendiente para nuevos trabajos y que dependería de las circunstancias y el contexto que rodea la acción didáctica.

No obstante, consideramos que este análisis presenta una síntesis que puede orientar al docente en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza de la probabilidad, en el marco de las orientaciones curriculares costarricenses; constituyéndose un "puente" entre estas y su práctica docente (Godino et al., 2012). Además, valoramos que puede servir de insumo para la formación inicial docente y como material para procesos de capacitación en conocimiento didáctico-matemático.

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Nombre y apellido:_______________________________ **Fecha de nacimiento:** ___/___/_____
día / mes / año

Institución educativa:_______________________________________

Ítem 1: Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en una caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan a sacar al mismo tiempo una bola de su caja (con los ojos cerrados) y el ganador es el niño que saque una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente bolas de igual color, devuelven las bolas a sus cajas y el juego continúa. Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya. ¿Cuál es tu opinión sobre lo que dice Eduardo?

Ítem 2: María y Esteban juegan a lanzar un dado.

María gana 1 confite si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de confites. ¿Cuántos confites debe ganar Esteban cuando sale el 1, para que el juego sea justo o equitativo?

Ítem 3a: Una clase de sexto año de una escuela tiene 13 niños y 16 niñas. Cada nombre de los alumnos se escribe sobre un trozo de papel. Todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar. Señala la frase correcta:

(A) Es más probable que el nombre sea de un niño que de una niña
(B) Es más probable que el nombre sea de una niña que de un niño
(C) Es igual de probable que sea de un niño que de una niña
(D) No lo sé

Ítem 3b: ¿Por qué?

Ítem 4a: En una bolsa se ponen 4 bolas rojas, 4 azules y 2 verdes, y después se revuelven. Se sacan tres bolas fuera, resultando 2 rojas y 1 azul. A continuación sacamos otra bola sin echar las anteriores a la bolsa. ¿De qué color es más probable que sea?

(A) El rojo tiene mayor probabilidad
(B) El azul tiene mayor probabilidad
(C) El verde tiene mayor probabilidad
(D) Todos los colores tienen la misma probabilidad
(E) No lo sé

Ítem 4b: ¿Por qué?

Ítem 5a: En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)

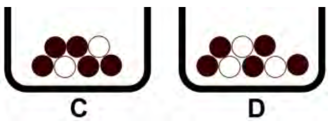
Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál caja elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

(A) La caja A da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
(B) La caja B da mayores posibilidades de obtener una ficha negra
(C) Las dos cajas dan la misma posibilidad
(D) No lo sé

Ítem 5b: ¿Por qué?

Ítem 6a: Otras dos cajas tienen en su interior algunas fichas negras y algunas fichas blancas (Mira el dibujo):

- Caja C: 5 negras y 2 blancas
- Caja D: 5 negras y 3 blancas



¿Qué caja (la C o la D) da más posibilidades de sacar una ficha negra? ¿O, por el contrario, dan las dos la misma posibilidad?

(A) Caja C
(B) Caja D
(C) La misma posibilidad
(D) No lo sé

Ítem 6b: ¿Por qué?

Ítem 7a: Otras dos cajas distintas tienen también fichas negras y blancas (Mira el dibujo):

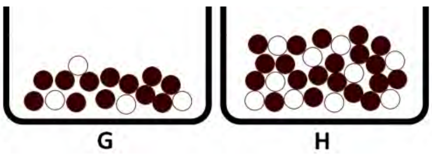
- Caja E: 2 negras y 2 blancas
- Caja F: 4 negras y 4 blancas

¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) Caja E
(B) Caja F
(C) La misma posibilidad
(D) No lo sé

Ítem 7b: ¿Por qué?

Ítem 8a: Otras dos cajas distintas tienen fichas negras y blancas (Mira el dibujo):



- Caja G: 12 negras y 4 blancas
- Caja H: 20 negras y 10 blancas

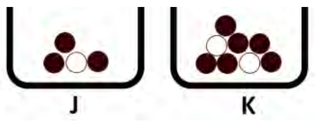
¿Qué caja da mejor posibilidad de sacar una ficha negra?

(A) La misma posibilidad
(B) Caja G
(C) Caja H
(D) No lo sé

Ítem 8b: ¿Por qué?

Ítem 9a: Otras dos cajas distintas de las anteriores tienen fichas negras y blancas (Mira el dibujo):

- Caja J: 3 negras y 1 blanca
- Caja K: 6 negras y 2 blancas



¿Qué caja da mejor posibilidad de obtener una ficha negra?

(A) La misma posibilidad
(B) Caja J
(C) Caja K
(D) No lo sé

Ítem 9b: ¿Por qué?

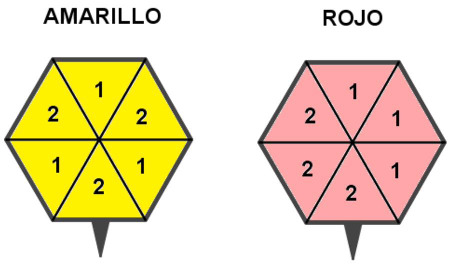
Ítem 10a: La figura muestra dos discos (ruletas) que tienen agujas que una vez giradas se detienen y apuntan a un número (Mira el dibujo):

¿Con qué disco es más fácil obtener un 3? Señala la respuesta correcta:

(A) Es más fácil obtener 3 en el disco rojo
(B) Es más fácil obtener 3 en el disco azul
(C) Los dos discos dan la misma posibilidad de obtener 3
(D) No lo se

Ítem 10b: ¿Por qué eliges esta respuesta?

Ítem 11a: Dos trompos de seis lados están marcados con unos y doses, como se indica en el siguiente dibujo representativo:

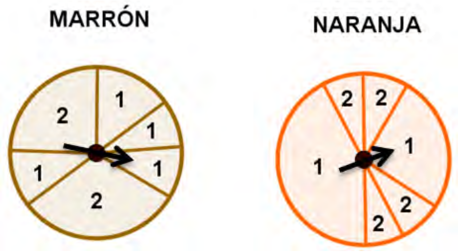


¿Qué trompo te da mejor oportunidad de obtener un 2 cuando se lanza? ¿O, dan la misma posibilidad?

(A) El amarillo es mejor para obtener un 2
(B) El rojo es mejor para obtener un 2
(C) Ambos trompos dan la misma posibilidad
(D) No lo sé

Ítem 11b: ¿Por qué?

Ítem 12a: Dos discos (ruletas), uno naranja y otro marrón, están marcados con números (Mira el dibujo):

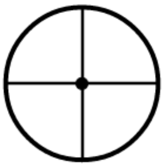
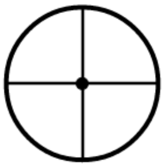
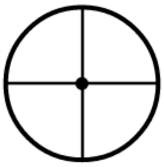
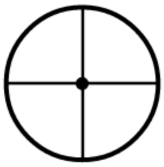


Cada disco tiene una aguja que gira. Si se quiere obtener un 1, ¿Es uno de los discos mejor que el otro, o ambos dan la misma posibilidad?

(A) El marrón es mejor para sacar un 1
(B) El naranja es mejor para sacar un 1
(C) Ambos discos dan la misma posibilidad
(D) No se puede decir

Ítem 12b: ¿Por qué has elegido esta respuesta?

Ítem 13: María y Esteban juegan con una ruleta. María gana un confite si la aguja que gira cae en el 1 y Esteban gana un confite si cae en el 2. Coloca en las siguientes ruletas los números que consideres oportunos para que se cumpla:

 (A) María gana seguro	 (B) Es posible que María gane
 (C) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	 (D) Es imposible que María gane

Ítem 14: María gana cuando saca ficha negra. Pinta en las siguientes urnas tantas fichas negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

 (A) María gana seguro	 (B) Es posible que María gane
 (C) María tienen igual posibilidad de ganar que de perder	 (D) Es imposible que María gane

Dra. Carmen Batanero Bernabeu
Dpto. Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
batanero@ugr.es

Estimado(a) Profesor(a)

El cuestionario adjunto es parte de una investigación sobre la influencia del razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades y resolución de tareas probabilísticas, en estudiantes costarricenses y españoles, al finalizar la educación primaria y a lo largo de la secundaria; es decir, estudiantes de 11 a 16 años.

Usted ha sido seleccionado(a) para participar en esta investigación como experto(a) en Didáctica de la Estadística, debido a su experiencia e investigaciones asociadas al tema.

Sus contribuciones serán utilizadas en una de las fases de diseño del instrumento de evaluación. Concretamente, sus aportes forman parte de la revisión, a partir del juicio de expertos, de aspectos metodológicos relacionados con el enunciado de los ítems que serán considerados para el cuestionario.

De antemano le agradecemos su importante colaboración, la cual nos permitirá conseguir mayor validez científica en los resultados que se obtengan en nuestro trabajo. Estamos dispuestos a proporcionar información complementaria sobre nuestra investigación y atender a sus preguntas sobre la misma.

Atentamente,

Dra. Carmen Batanero Bernabeu
Directora

MSc. Luis Hernández Solís
Doctorando

Cuestionario para Expertos

Considerando evaluar el constructo "razonamiento probabilístico y su relación con el razonamiento proporcional", el presente instrumento se estructura según contenido de la siguiente manera:

- Ítems tipo 1: Comparación de probabilidades en contexto de urnas
- Ítems tipo 2: Comparación de probabilidades en contexto de ruletas
- Ítems tipo 3: Comparación de fracciones
- Ítems tipo 4: Determinación de la ganancia en juegos equitativos
- Ítems tipo 5: Construcción de espacios muestrales en contexto de ruletas
- Ítems tipo 6: Construcción de espacios muestrales en contexto de urnas

PRIMERA PARTE:

Para cada contenido se presentan tres posibles ítems. Requerimos su colaboración para:

- Valorar cada uno de los enunciados propuestos, para cada contenido, según su criterio experto.
- Sugerir mejoras en la redacción de los ítems.
- Calificar la pertinencia de cada tarea según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa "Nada pertinente" y 5 "Muy pertinente".

SEGUNDA PARTE:

Se presenta la Tabla 1 donde aparecen tres pares de fracciones sencillas asociadas a cada uno de los niveles de Noelting que se tendrían en cuenta para el diseño de los cuestionarios para los ítems de tipo 1, 2 y 3; es decir, que se utilizarían para elaborar 18 ítems diferentes en total, distribuidos de la siguiente forma: 6 problemas de comparación de fracciones, 12 problemas de comparación de probabilidades (6 en contexto de urnas y 6 en contexto de ruletas).

En esta parte, usted deberá seleccionar dos de tres propuestas para cada nivel de Noelting, considerando la estrategia de resolución que se indica en la Tabla 1.

PRIMERA PARTE

Ítems tipo 1. Comparación de probabilidades en urnas

Ítem 1.1

En la caja A se han metido 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B se han metido 2 fichas negras y 1 ficha blanca. (Mira el dibujo)

Si tienes que sacar una ficha negra para ganar un premio, sin mirar dentro de la caja, ¿cuál caja elegirías para hacer la extracción? Señala la respuesta correcta:

(A) Elijo la caja A, porque da mayores posibilidades de obtener una ficha negra.
(B) Elijo la caja B, porque da mayores posibilidades de obtener una ficha negra.
(C) Puedo tomar cualquiera, las dos cajas dan la misma posibilidad.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem 1.2

La caja A contiene 3 fichas negras y 1 ficha blanca y la caja B contiene 2 fichas negras y 1 ficha blanca.

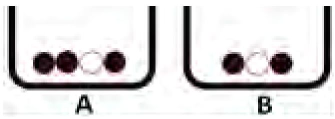
¿En cuál de las dos cajas hay más posibilidad de sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

(A) Hay más posibilidades con la caja A.
(B) Hay más posibilidades con la caja B.
(C) Da lo mismo usar cualquiera de las dos cajas.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem 1.3

En la caja A hay 3 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B hay 2 fichas negras y 1 ficha blanca.



Se mueven las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿en cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

(A) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
(B) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B.
(C) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Califique la pertinencia de cada tarea según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa "Nada pertinente" y 5 "Muy pertinente". Marque con una "X" en la casilla que considere según su criterio.

Marque para cada ítem una puntuación:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
El ítem 1.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 1.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 1.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

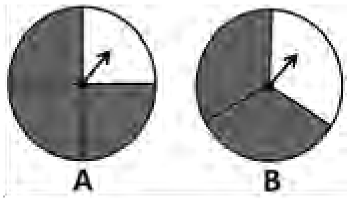
Ítem elegido en primer lugar:

Modificaciones sugeridas:

Ítems tipo 2. Comparación de probabilidades en ruletas

Ítem 2.1

En la ruleta A hay 3 sectores pintados de negro y 1 sector pintado de blanco y en la ruleta B hay 2 sectores pintados de negro y 1 de pintado de blanco. Al girar una ruleta obtienes un premio si la flecha apunta un sector negro (Mira el dibujo).



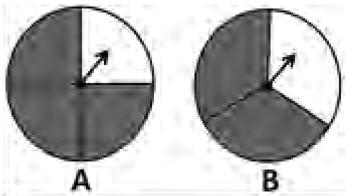
¿Cuál ruleta elegirías si quieres ganar el premio? Señala la respuesta correcta:

(A) Elijo la ruleta B, porque da mayores posibilidades de ganar el premio.
(B) No tengo preferencia. Las dos ruletas dan la misma posibilidad de ganar el premio.
(C) Elijo la ruleta A, porque da mayores posibilidades de ganare el premio.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem 2.2

La ruleta A está divida en 4 partes de igual área (3 están pintados de negro y 1 pintado de blanco) y la ruleta B está divida en 3 partes de igual área (2 están pintados de negro y 1 pintado de blanco).



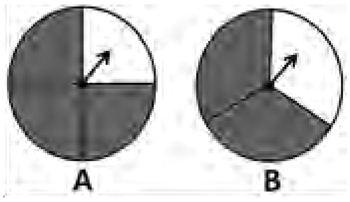
¿Cuál ruleta da más posibilidad de obtener el color negro al girar la aguja? Señala la respuesta correcta

(A) La ruleta A tiene mayores posibilidades de obtener el color negro.
(B) La ruleta B tiene mayores posibilidades de obtener el color negro.
(C) Las dos ruletas tienen la misma posibilidad de obtener el color negro.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem 2.3

En la ruleta A hay 3 sectores de color negro y 1 sector de color blanco y en la ruleta B hay 2 sectores de color negro y 1 de color blanco.



Se gana un juego si al girar la ruleta si la flecha apunta un sector negro, ¿cuál ruleta elegirías para jugar? Señala la respuesta correcta

(A) La ruleta B.
(B) La ruleta A.
(C) Cualquiera de las dos.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Califique la pertinencia de cada tarea según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa “Nada pertinente” y 5 “Muy pertinente”. Marque con una “X” en la casilla que considere según su criterio.

Marque para cada ítem una puntuación:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
El ítem 2.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 2.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 2.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

Ítem elegido en primer lugar:

Modificaciones sugeridas:

Ítems tipo 3. Comparación de fracciones

Ítem 3.1

María y Juan preparan limonada. María mezcla 3 vasos de zumo de limón con 1 vaso de agua. Juan mezcla 2 vasos de zumo de limón con 1 vaso de agua.

María		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

(A) La de María
(B) La de Juan
(C) Las dos igual
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem 3.2

María y Juan preparan limonada. (Mira el dibujo)

María		**Juan**	
Jugo de limón	Azúcar	Jugo de limón	Azúcar
			

Si María mezcla 3 vasos de jugo de limón con 1 cucharada de azúcar y Juan prepara limonada mezclando 2 vasos de jugo de limón con 1 cucharada de azúcar, ¿cuál de las dos limonadas tiene un sabor más dulce?

(A) La de Juan
(B) La de María
(C) Las dos sabrían igual
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: …………………………………………….

Ítem 3.3

María y Juan preparan café con leche. (Mira el dibujo)

María		Juan	
Café	Leche	Café	Leche
			

Si María mezcla 3 tazas de café con 1 vaso de leche y Juan mezcla 2 tazas de café con 1 vaso de leche, ¿cuál de las dos mezclas tendría mayor sabor a café?

(A) Las dos igual.
(B) La de Juan.
(C) La de María.
(D) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta: ………………………………………………….

Califique la pertinencia de cada tarea según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa “Nada pertinente” y 5 “Muy pertinente”. Marque con una “X” en la casilla que considere según su criterio.

Marque para cada ítem una puntuación:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
El ítem 3.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 3.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 3.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

Ítem elegido en primer lugar:

Modificaciones sugeridas:

Ítems tipo 4. Determinación de la ganancia en juegos equitativos

Ítem 4.1

María y Esteban juegan a lanzar un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de barras de chocolate. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban cuando sale el 1, para que el juego sea justo o equitativo?

……………………………………………….…………………………………………….

Ítem 4.2

María y Esteban juegan con un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si en el dado sale un 1 o un 2. Si resulta un número mayor a 2, gana Esteban. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban para que el juego sea justo o equitativo?

……………………………………………….…………………………………………….

Ítem 4.3

María y Esteban juegan a lanzar dos dados, cada uno con 6 caras numeradas del 1 al 6. Luego de lanzar los dados se calcula el producto de los números de las caras que salgan. María gana 1 barra de chocolate si el producto es par y Esteban gana una cierta cantidad de barras de chocolate si el producto es impar. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban para que el juego sea justo o equitativo?

……………………………………………….…………………………………………….

Califique la pertinencia de cada tarea según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa “Nada pertinente” y 5 “Muy pertinente”. Marque con una “X” en la casilla que considere según su criterio.

Marque para cada ítem una puntuación:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
El ítem 4.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 4.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 4.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

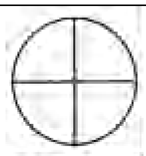
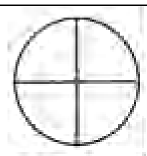
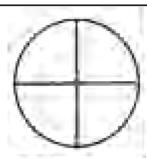
Ítem elegido en primer lugar:

Modificaciones sugeridas:

Ítems tipo 5. Construcción de espacio muestral en ruletas

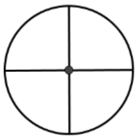
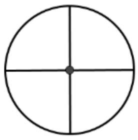
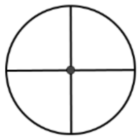
Ítem 5.1

María y Esteban juegan con una ruleta. María gana un premio si la aguja que gira cae en el 1 y Esteban gana un premio si cae en el 2. Coloca en las siguientes ruletas los números que consideres oportuno para que se cumpla:

		
(a) María gana seguro	(b) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	(c) Es imposible que María gane

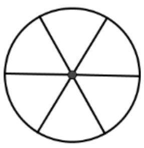
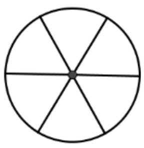
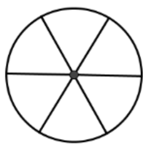
Ítem 5.2

María y Esteban juegan con una ruleta dividida en cuatro partes iguales. María gana un premio si la aguja que gira cae en una parte de color negro y Esteban gana si cae en una de color blanco. Pinta en las siguientes ruletas tantas partes negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

		
(a) María gana seguro	(b) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	(c) Es imposible que María gane

Ítem 5.3

María y Esteban juegan con una ruleta dividida en seis partes iguales. María gana un premio si la aguja que gira cae en una parte de color negro y Esteban gana si cae en una de color blanco. Pinta en las siguientes ruletas tantas partes negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

		
(a) María gana seguro	(b) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	(c) Es imposible que María gane

Califique la pertinencia de cada tarea según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa “Nada pertinente” y 5 “Muy pertinente”. Marque con una “X” en la casilla que considere según su criterio.

Marque para cada ítem una puntuación:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
El ítem 5.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 5.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 5.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

Ítem elegido en primer lugar:

Modificaciones sugeridas:

Ítems tipo 6. Construcción de espacio muestral en urnas

Ítem 6.1

María gana cuando saca una bola negra. Pinta en las siguientes urnas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

 (a) María gana seguro	 (b) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	 (c) María nunca gana

Ítem 6.2

María y Esteban juegan a sacar, sin mirar, una bola de una caja. María gana si saca una bola negra y Esteban gana si saca una bola blanca. Dibuja en las siguientes cajas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que se cumpla:

 (a) María gana siempre	 (b) Hay la misma probabilidad de que ganen María o Juan	 (c) María no gana nunca

Ítem 6.3

En un juego se saca, sin mirar, una bola de una urna, si esta es de color negro María gana y si es de color blanco Esteban gana. Dibuja y pinta en las siguientes urnas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

 (a) Es seguro que María gana	 (b) Es igual de probable que ganen María o Esteban	 (c) Es imposible que María gane

Califique la pertinencia de cada tarea según el propósito pretendido del ítem, mediante una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 representa "Nada pertinente" y 5 "Muy pertinente". Marque con una "X" en la casilla que considere según su criterio.

Marque para cada ítem una puntuación:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
El ítem 6.1 es adecuado para este contenido					
El ítem 6.2 es adecuado para este contenido					
El ítem 6.3 es adecuado para este contenido					

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias para mejorar el enunciado del ítem elegido en primer lugar (más adecuado), sin variar su contenido:

Ítem elegido en primer lugar:

Modificaciones sugeridas:

SEGUNDA PARTE

A continuación, se le presenta la Tabla 1 donde aparecen tres pares de fracciones sencillas para cada uno de los niveles de Noelting que se tendrían en cuenta para el diseño de los dos cuestionarios en los ítems de tipo 1, 2 y 3.

De acuerdo a la tabla 1 seleccione dos de las tres propuestas que se plantean para cada nivel de Noelting, considerando la estrategia de resolución que se indica.

Tabla 1. Fracciones propuestas para cada uno de los niveles de Noelting

Etapa	Estrategias	Composición (a_1,b_1) vs (a_2,b_2)		
		Propuesta 1	Propuesta 2	Propuesta 3
IA	Comparar numeradores	(3,1) vs (2,1)	(3,2) vs (5,2)	(2,3) vs (1,3)
IB	Comparar denominadores	(5,1) vs (5,3)	(4,1) vs (4,3)	(5,1) vs (5,4)
IIA	Correspondencia[1]	(2,2) vs (4,4)	(2,2) vs (3,3)	(4,4) vs (3,3)
IIB	Correspondencia o proporción[2]	(3,1) vs (6,2)	(4,2) vs (2,1)	(2,6) vs (1,3)
IIIA	Correspondencia o proporción[3]	(2,1) vs (6,2)	(3,1) vs (4,2)	(3,6) vs (1,3)
IIIB	Proporción[4]	(2,3) vs (1,2)	(3,2) vs (4,3)	(3,4) vs (4,5)

1: Se calcula la razón entre numerador y denominador en la primera fracción y se compara con la misma razón en la segunda. La razón es igual a la unidad.

2: Se calcula la razón entre numerador y denominador en la primera fracción y se compara con la misma razón en la segunda. La razón es distinta a la unidad.

3: Las razones entre numerador y denominador de cada fracción son números enteros pero diferentes entre sí.

4. Solo se puede resolver reduciendo las fracciones a común denominador y comparando.

Complete el siguiente cuadro marcando con una (X) en el espacio correspondiente las tres propuestas de fracciones que considere más pertinentes para cada nivel de Noelting.

Etapa	Propuesta 1	Propuesta 2	Propuesta 3
IA			
IB			
IIA			
IIB			
IIIA			
IIIB			

Si lo considera necesario, incluya algunas sugerencias:

A

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

5Nombre y apellido: _______________________________________ **Fecha de nacimiento:** ___/___/_____

Institución educativa: _____________________________________ día / mes / año

Nivel educativo: _____ año **Sexo:** __Hombre __Mujer

I PARTE. Selección única. Lea cuidadosamente cada uno de los siguientes ítems y marque con **X** (equis) dentro de los paréntesis ( ) que están a la par de la respuesta que usted considera correcta. Luego explique porqué seleccionó esa respuesta.

Ítem 1

En la caja A hay 3 fichas negras y 2 fichas blancas. En la caja B hay 5 fichas negras y 2 fichas blancas. Observa el dibujo.

Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿En cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B.
( ) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 2

En la caja A hay 2 fichas negras y 2 fichas blancas. En la caja B hay 3 fichas negras y 3 fichas blancas. Observa el dibujo.

Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿En cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

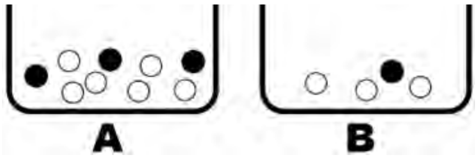
( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B.
( ) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

A

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 3
En la caja A hay 3 fichas negras y 6 fichas blancas. En la caja B hay 1 ficha negra y 3 fichas blancas. Observa el dibujo.

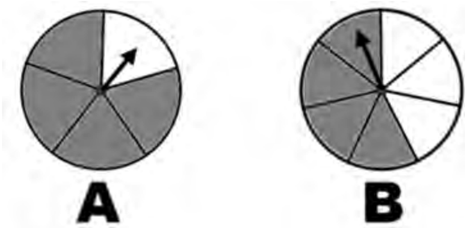


Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿En cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B.
( ) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 4
La ruleta A está divida en 5 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 1 pintada de blanco) y la ruleta B está divida en 7 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 3 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

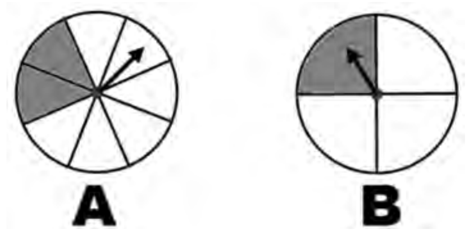
( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

A

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 5
La ruleta A está divida en 8 partes de igual área (2 están pintadas de negro y 6 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 4 partes de igual área (1 está pintada de negro y 3 pintadas de blanco). Observa el dibujo.

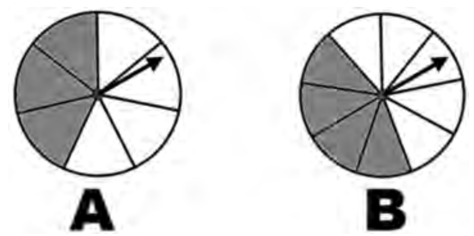


Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 6
La ruleta A está divida en 7 partes de igual área (3 están pintadas de negro y 4 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 9 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 5 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

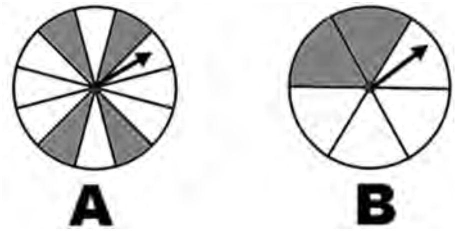
( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 7

La ruleta A está divida en 12 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 8 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 6 partes de igual área (2 están pintadas de negro y 4 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



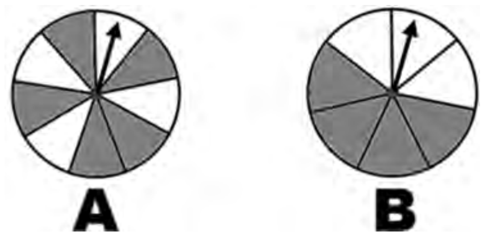
Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 8

La ruleta A está divida en 9 partes de igual área (5 están pintadas de negro y 4 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 7 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 3 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 9
Elena y Juan preparan limonada. Elena mezcla 2 vasos de zumo de limón con 3 vasos de agua. Juan mezcla 1 vaso de zumo de limón con 3 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

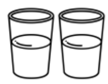
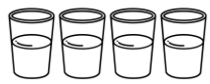
Elena		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

( ) La de Elena.
( ) La de Juan.
( ) Las dos igual.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 10
Elena mezcla 2 vasos de zumo de limón con 2 vasos de agua. Juan mezcla 4 vasos de zumo de limón con 4 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

Elena		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

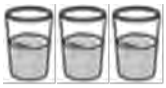
( ) La de Elena.
( ) La de Juan.
( ) Las dos igual.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

A

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 11
Elena mezcla 3 vasos de zumo de limón con 1 vaso de agua. Juan mezcla 4 vasos de zumo de limón con 2 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

Elena		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

( ) La de Elena.
( ) La de Juan.
( ) Las dos igual.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

A

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

II PARTE. Respuesta abierta. Lea cuidadosamente cada uno de los siguientes ítems y responda lo que se pide.

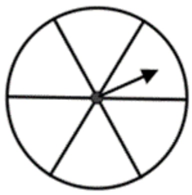
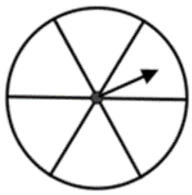
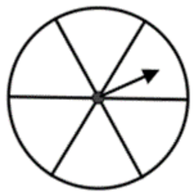
Ítem 12

María y Esteban juegan a lanzar un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de barras de chocolate. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban cuando sale el 1, para que el juego sea justo?

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 13

María y Esteban juegan con una ruleta dividida en seis partes iguales. María gana un premio si la aguja que gira cae en una parte pintada de color negro y Esteban gana si cae en una parte pintada de color blanco. Pinta en las siguientes ruletas tantas partes negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

		
(a) María gana seguro	(b) María y Esteban tienen igual de ganar	(c) Es imposible que María gane

Ítem 14

En un juego se saca, sin mirar, una bola de una caja. Si ésta es de color negro María gana y si es de color blanco Esteban gana. Dibuja y colorea en las siguientes cajas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que:

		
(a) Sea seguro que María gane	(b) Sea igual de probable que gane María o Esteban	(c) Sea imposible que María gane

B

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

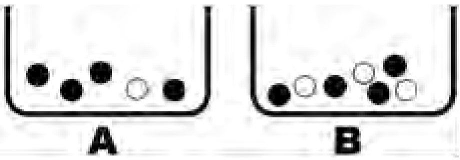
Nombre y apellido: ____ **Fecha de nacimiento:** ___/___/_____

Institución educativa: ____________________________________ día / mes / año

Nivel educativo: _____ año **Sexo:** __Hombre __Mujer

I PARTE. Selección única. Lea cuidadosamente cada uno de los siguientes ítems y marque con **X** (equis) dentro de los paréntesis ( ) que están a la par de la respuesta que usted considera correcta. <u>Luego explique porqué seleccionó esa respuesta.</u>

Ítem 1
En la caja A hay 4 fichas negras y 1 ficha blanca. En la caja B hay 4 fichas negras y 3 fichas blancas. Observa el dibujo.

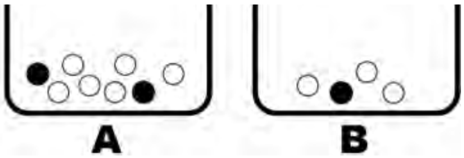


Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿En cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B.
( ) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 2
En la caja A hay 2 fichas negras y 6 fichas blancas. En la caja B hay 1 ficha negra y 3 fichas blancas. Observa el dibujo.



Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿En cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

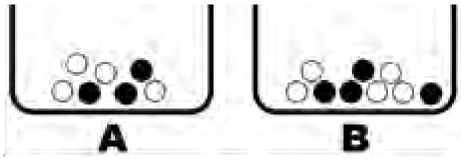
( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B.
( ) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

B

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 3
En la caja A hay 3 fichas negras y 4 fichas blancas. En la caja B hay 4 fichas negras y 5 fichas blancas. Observa el dibujo.

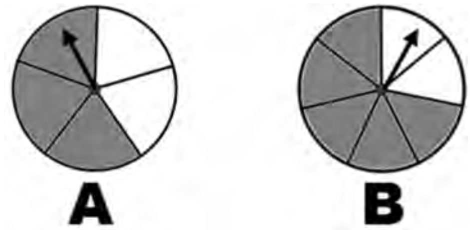


Se agitan las cajas y se saca una ficha con los ojos cerrados ¿En cuál es más probable sacar una ficha negra? Señala la respuesta correcta:

( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja A.
( ) Hay más probabilidad de sacar una ficha negra de la caja B.
( ) En ambas cajas hay igual probabilidad de sacar una ficha negra.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 4
La ruleta A está divida en 5 partes de igual área (3 están pintadas de negro y 2 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 7 partes de igual área (5 están pintadas de negro y 2 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

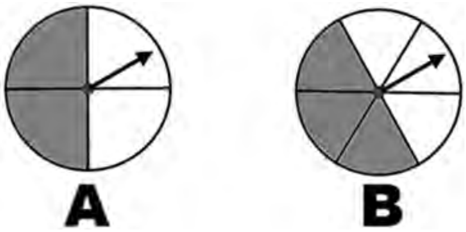
( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

B

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 5
La ruleta A está divida en 4 partes de igual área (2 están pintadas de negro y 2 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 6 partes de igual área (3 están pintadas de negro y 3 pintadas de blanco). Observa el dibujo.

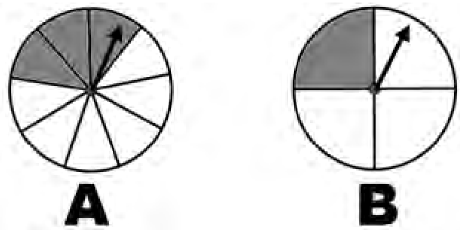


Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 6
La ruleta A está divida en 9 partes de igual área (3 están pintadas de negro y 6 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 4 partes de igual área (1 está pintada de negro y 3 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

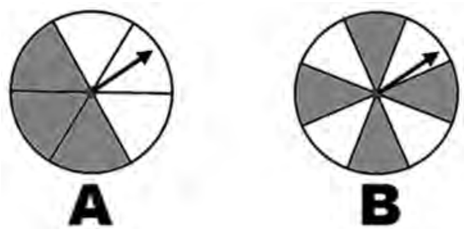
Explica por qué das esta respuesta:

B

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 7

La ruleta A está divida en 6 partes de igual área (3 están pintadas de negro y 3 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 8 partes de igual área (4 están pintadas de negro y 4 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



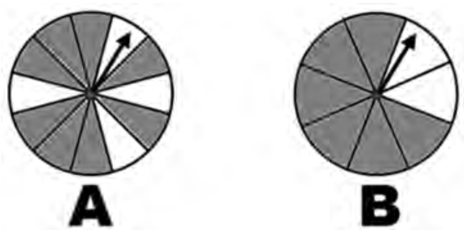
Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 8

La ruleta A está divida en 12 partes de igual área (8 están pintadas de negro y 4 pintadas de blanco) y la ruleta B está divida en 8 partes de igual área (6 están pintadas de negro y 2 pintadas de blanco). Observa el dibujo.



Si se gira la flecha, ¿Cuál de las dos ruletas da mayores probabilidades de que la flecha pare en el color negro? Señala la respuesta correcta.

( ) La ruleta A.
( ) La ruleta B.
( ) Las dos ruletas tienen la misma probabilidad.
( ) No lo sé.

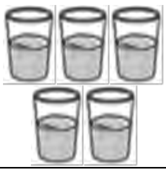
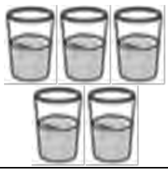
Explica por qué das esta respuesta:

B

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 9

Elena y Juan preparan limonada. Elena mezcla 5 vasos de zumo de limón con 1 vaso de agua. Juan mezcla 5 vasos de zumo de limón con 4 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

Elena		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

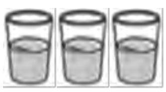
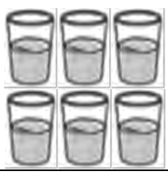
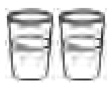
¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

( ) La de Elena.
( ) La de Juan.
( ) Las dos igual.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 10

Elena mezcla 3 vasos de zumo de limón con 1 vaso de agua. Juan mezcla 6 vasos de zumo de limón con 2 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

Elena		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

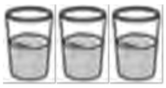
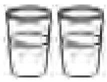
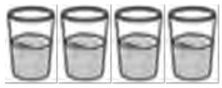
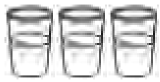
¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

( ) La de Elena.
( ) La de Juan.
( ) Las dos igual.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

Ítem 11
Elena mezcla 3 vasos de zumo de limón con 2 vasos de agua. Juan mezcla 4 vasos de zumo de limón con 3 vasos de agua. Todos los vasos contienen la misma cantidad de líquido. Observa el dibujo.

Elena		**Juan**	
Zumo de limón	Agua	Zumo de limón	Agua
			

¿Cuál de las dos limonadas sabe más a limón?

( ) La de Elena.
( ) La de Juan.
( ) Las dos igual.
( ) No lo sé.

Explica por qué das esta respuesta:

B

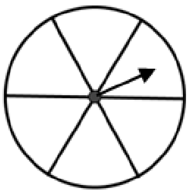
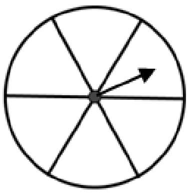
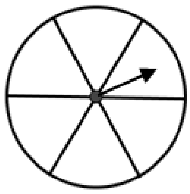
Cuestionario en probabilidad y razonamiento proporcional

II PARTE. Respuesta abierta. Lea cuidadosamente cada uno de los siguientes ítems y responda lo que se pide.

Ítem 12
María y Esteban juegan a lanzar un dado con 6 caras numeradas del 1 al 6. María gana 1 barra de chocolate si el dado sale 2 ó 3 ó 4 ó 5 ó 6. Si resulta un 1, Esteban gana una cierta cantidad de barras de chocolate. ¿Cuántas barras de chocolate debe ganar Esteban cuando sale el 1, para que el juego sea justo?

Explica por qué das esta respuesta:

Ítem 13
María y Esteban juegan con una ruleta dividida en seis partes iguales. María gana un premio si la aguja que gira cae en una parte pintada de color negro y Esteban gana si cae en una parte pintada de color blanco. Pinta en las siguientes ruletas tantas partes negras y blancas, como consideres oportuno, para que ocurra:

		
(a) María gana seguro	(b) María y Esteban tienen igual de ganar	(c) Es imposible que María gane

Ítem 14
En un juego se saca, sin mirar, una bola de una caja. Si ésta es de color negro María gana y si es de color blanco Esteban gana. Dibuja y colorea en las siguientes cajas tantas bolas negras y blancas, como consideres oportuno, para que:

		
(a) Sea seguro que María gane	(b) Sea igual de probable que gane María o Esteban	(c) Sea imposible que María gane

PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA TESIS

ARTÍCULOS

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico. *PNA*, *15*(4), 267-288. https://doi.org/pna.v15i4.22349

Batanero, C. y Hernández-Solís, L. A. (2023). Razonamiento proporcional en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles. *Uniciencia*, *37*(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analysing Costarican and Spanish students´ proportional reasoning and comparison of probabilities. *Statistics Education Research Journal,* *22*(3), 1-23. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Gea, M. M., Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023) Relating students' proportional reasoning level and their understanding of fair games. *Journal on Mathematics Education,* *14*(4), 663-682, https://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp663-682

Hernández-Solís, L. A. (2023). Sesgos en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 23*(2), 1-16. https://doi.org/10.18845/rdmei.v23i2.6368

Hernández-Solís, L. A. y Batanero, C. (2022). Indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad del currículo de Matemática Costarricense. *PädiUAQ,* *6*(11), 1-18. https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/article/view/742/879

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. y Gea, M. M. (2021). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños y niñas costarricenses. *Innovaciones Educativas (Innoeduca),* *23*(34), 228-243. http://dx.doi.org/10.22458/ie.v23i34.3429

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (2023). Costarican students' proportional reasoning and performance in comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 9*(12), em2373. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (en prensa). Razonamiento proporcional y construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos por estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística.*

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con niños costarricenses de Educación Primaria. *Uniciencia, 35*(2), 1-18. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: Un estudio exploratorio con niños de educación primaria. *Educación Matemática, 33*(1). http://dx.doi.org/10.24844/EM3301.07

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Educaçao e Realidades, 46*(3). https://doi.org/10.1590/2175-6236105401

Hernández-Solís, L. A., Gea, M. M., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023) Investigación sobre el razonamiento de los niños en la comparación de probabilidades. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 29*(1), https://www.seio.es/beio/research-on-childrens-reasoning-in-comparing-probabilities/

CONGRESOS

Hernández-Solís, L. A. (2021). Razonamiento probabilístico en estudiantes de sexto año de educación primaria. *XI Simposio de Matemática y Educación Matemática, X Congreso Internacional de Matemática asistida por Computador, I Simposio de Competiciones Matemáticas (MEM 2021)*, 18 al 22 de febrero de 2021, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia.

Hernández-Solís, L. A. & Gea, M. (2022). How primary school children understand the sample space linked to different types of events. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, p. 358). PME.*

Criterios de calidad de las publicaciones

La tesis doctoral desarrollada en esta memoria se presenta en la modalidad de compendio de publicaciones. A continuación, se incluyen los criterios de calidad de las publicaciones aportadas.

Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. Hernández-Solís, L. A., y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico. *PNA*, *15*(4), 267-288. https://doi.org/pna.v15i4.22349

Indicios de calidad de la revista PNA:

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición: 895/1498
2. Índice de impacto SJR (2021): 0,255 (Q3, Education).
3. Indexada en Emerging Sources Citation Index, ERIHplus, Catálogo Latindex, EBSCO, Fuente Academica Plus, DIALNET, DOAJ, ERA, Psicodoc.

Batanero, C. y Hernández-Solís, L. A. (2023). Razonamiento proporcional en comparación de razones de estudiantes costarricenses y españoles. Uniciencia, 37(1), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.21

Indicios de calidad de la revista Uniciencia:

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición: 993/1420
2. Índice de impacto SJR (2021): 0,24 (Q3, Social Sciences).
3. Indexada en Emerging Sources Citation Index, DOAJ, Dialnet, Catálogo Latindex.

Batanero, C., Hernández-Solís, L. A. y Gea, M. M. (2023). Analysing Costarican and Spanish students´ proportional reasoning and comparison of probabilities. *Statistics Education Research Journal,* *22*(3), 1-23. https://doi.org/10.52041/serj.v22i3.659

Indicios de calidad de la revista Statistics Education Research Journal:

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición: 906/1420
2. Índice de impacto SJR (2022): 0,27 (Q3, Education).
3. Indexada en EBSCO, ERIC, ERIH plus, JUFO, APA.

Gea, M. M., Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023) Relating students' proportional reasoning level and their understanding of fair games. *Journal on Mathematics Education* *14*(4), 663-682, https://doi.org/10.22342/jme.v14i4.pp663-682

Indicios de calidad de la revista Journal on Mathematics Education

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición: 507/1420
2. Índice de impacto SJR (2022): 0,52 (Q2, Education).
3. Indexada en ERIC, DOAJ, JUFO.

Hernández-Solís, L. A. (2023). Sesgos en la resolución de tareas probabilísticas por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 23*(2), 1-16. https://doi.org/10.18845/rdmei.v23i2.6368

La revista está indexada en Catálogo Latindex, Redalyc, DOAJ y REDIB.

Hernández-Solís, L. A. y Batanero, C. (2022). Indicadores de idoneidad epistémica de los contenidos de probabilidad del currículo de Matemática Costarricense. *PädiUAQ, 6*(11), 1-18. https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/article/view/742/879

La revista está indexada en Directorio: Latindex y LatinRev: Red latinoamericana de revistas académicas en ciencias sociales y humanidades.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R. y Gea, M. (2021). Significados personales del concepto de juego equitativo en niños y niñas costarricenses. *Innovaciones Educativas (Innoeduca), 23*(34), 228-243. http://dx.doi.org/10.22458/ie.v23i34.3429

La revista está indexada en Emerging Sources Citation Index, Dialnet, Redib, FECYT (posición 74 de 89 revistas de educación; puntuación 21.75). Journal Citation indicator: 1,27; Educaction & Educational Research.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. (2023). Costarican students' proportional reasoning and performance in comparing probabilities in spinners. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 9(*12), em2373. https://doi.org/10.29333/ejmste/13869

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición SNIP: 524/1498
2. Índice de impacto SJR (0,51) (Q2, Education).
3. La revista está indexada en IBZ, ERC, Psycinfo, APA. ERIH plus. JUFO.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C. y Gea, M. M. (en prensa). Razonamiento proporcional y construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos por estudiantes costarricenses. *Revista de Educación Estadística.*

Esta revista solo lleva un año de publicación y no está indexada todavía.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021a). Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con niños costarricenses de Educación Primaria. *Uniciencia, 35*(2), 1-18. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.9

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición 161/264 General Social Sciences.
2. Índice de impacto SJR (2021):0,27 (Q3, General Social Sciences).
3. Indexada en Emerging Sources Citation Index, DOAJ, Dialnet, Catálogo Latindex.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021b). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: Un estudio exploratorio con niños de educación primaria. *Educación Matemática, 33*(1). http://dx.doi.org/10.24844/EM3301.07

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición SNIP: 893/1498
2. Indice de impacto SJR (2021): 0,252 (Q3, Education).
3. La revista está indexada en DIALNET, Catálogo Latindex.

Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021c). Resolución de tareas probabilísticas en contexto geométrico por estudiantes costarricenses de educación primaria. *Educaçao e Realidades, 46*(3).

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición 1052/1498
2. Índice de impacto SJR (0,22) (Q3, Education), Q2 (Arts and Humanities).

Hernández-Solís, L. A., Gea, M. M., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2023) Investigación sobre el razonamiento de los niños en la comparación de probabilidades. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa, 29*(1), https://www.seio.es/beio/research-on-childrens-reasoning-in-comparing-probabilities/

1. Indexada en Scopus. Social Sciences (Education) Posición 1364/1498
2. Índice de impacto SJR (0,11) (Q4, Education).