Epsilon – Revista de Educación Matemática 2024, nº 116, 23-36
Sección: Aportes desde la investigación en Educación Matemática

Análisis de dos tareas sobre azar y probabilidad para enriquecimiento curricular

Mónica Nieves Ermecheo
Universidad de Granada, *monicanieves@correo.ugr.es*

Nuria Rico Castro
Universidad de Granada, *nrico@ugr.es*

Resumen: *En este artículo presentamos y analizamos dos actividades seleccionadas de una sesión de enriquecimiento diseñadas para estudiantes con talento matemático. Con ellas, se abordan diferentes conceptos de azar y probabilidad de forma manipulativa. El análisis de las tareas contempla un abanico de estrategias de resolución, abarcando así diversos niveles de abstracción y dificultad. Como resultado de este análisis se tiene un recurso que los docentes podrán utilizar en gran variedad de niveles y tipos de estudiantado, lo cual les permite abordar objetivos con diferente dificultad en la estrategia de resolución.*

Palabras clave: *Alfabetización estadística, altas capacidades, cálculo de probabilidades, sesión de enriquecimiento, talento matemático.*

Analysis of two tasks on randomness and probability for curricular enrichment

Abstract: *In this paper we present and analyze two activities selected from an enrichment session designed for mathematically talented students. With them, different approaches about concepts of chance and probability are taken, in a manipulative way. The analysis of the tasks contemplates a range of resolution strategies, thus covering various levels of abstraction and difficulty. As a result of this analysis, we have a resource that teachers can use at a wide variety of levels and types of students, which will allow them to address objectives with different difficulties in the resolution strategy.*

Key words: *Statistical literacy, high abilities, probability calculus, enrichment session, mathematical talent.*

1. INTRODUCCIÓN

Según Miller (1990), el estudiantado con talento matemático no solo muestra una gran dote para los cálculos aritméticos y obtiene altas calificaciones en matemáticas, sino que muestra una elevada habilidad para comprender ideas y razonamientos matemáticos. Siguiendo a Greenes (1981), podemos esperar que este tipo de estudiantado presente resultados originales a problemas propuestos, los cuales plantea y resuelve con relativa facilidad y rapidez, siendo capaz de utilizar diferentes estrategias y presentando una buena organización de los datos.

Estas cualidades, que prevalecen en estudiantes con talento matemático, se adecúan a las capacidades necesarias para desarrollar destrezas matemáticas. Por ello, según Fernández y Pérez (2011) es fundamental saber, como docentes, cómo poder trabajarlas adecuadamente con este tipo de alumnado, utilizando la metodología adecuada, para así propiciar el desarrollo de sus habilidades metacognitivas.

Como citar: Nieves-Ermecheo, M. y Rico-Castro, N. (2024). Propuesta y análisis de dos tareas sobre azar y probabilidad para enriquecimiento curricular. *Epsilon, 116*, 23-36.

En la Ley Orgánica por la que se modifica la LOE de 2006 (LOMLOE) se declara de forma específica la necesidad de atención a la diversidad (Jefatura del Estado, 2020). En el Real Decreto 217/2022 de 29 de marzo (2022), por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, se dicta la necesidad de regular la atención a la diversidad, dando una respuesta curricular adecuada a las capacidades de cada estudiante (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Concretamente, el artículo 23 se centra en la atención al estudiantado con altas capacidades intelectuales y, específicamente, menciona que, en caso de que fuera necesario, podría reducirse un curso la duración de la escolarización de estos, para así adaptarse a su desarrollo académico, social y personal.

Sin embargo, atender esta diversidad en el aula común de la enseñanza reglada es una tarea compleja, ya que es necesario tener en cuenta las características individuales de cada estudiante, siendo flexibles y evitando en la medida de lo posible que sientan ningún tipo de exclusión por parte del resto del grupo. De acuerdo con Ramírez (2012), la buena práctica docente puede ayudar al desarrollo de las habilidades del estudiantado con talento. Por ello, es importante una atención adecuada, ofreciendo distintas herramientas y examinando qué método es el más conveniente para cada estudiante con talento. Siguiendo las ideas de Blanco et al. (2004), conocemos que existen diferentes estrategias para estudiantes con talento matemático (aceleración, agrupación, etc). De entre ellas, nos centraremos en el enriquecimiento curricular. Esta estrategia tiene como eje la enseñanza individualizada y consiste en profundizar más en contenidos del currículo o en trabajar temas que no están dentro de él. No se trata de trabajar contenidos de cursos superiores, sino de ampliar, relacionar, profundizar y hacer más complejos los temas, promoviendo el pensamiento y la creatividad.

El enriquecimiento puede realizarse en el día a día del aula, o bien desde programas extraescolares. Un ejemplo de este tipo de programas es el Proyecto Estalmat[1], un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, centrado en estudiantes de entre 12 y 14 años, y cuyo objetivo principal es la detección y el estímulo del talento matemático. De una sesión de este programa, denominada «Juegos de probabilidad», y que se celebró en la sede de Andalucía Oriental durante el curso 2022-2023, se han extraído las dos actividades que se analizan y presentan en este trabajo.

La selección de estas tareas, que están relacionadas con la aleatoriedad, el azar y el cálculo de probabilidades, es especialmente relevante dado que, como señalan varios autores (Batanero (2004) y Đono et al. (2022)) es necesario hacer un esfuerzo por la alfabetización estadística en la etapa escolar, para mejorar los conocimientos en estadística y probabilidad, ya que es una herramienta imprescindible para crear una ciudadanía proactiva y crítica.

El pensamiento estadístico, siguiendo a Gal y Gardfiel (1997), Burril y Buehler (2011) y Rossman et al. (2006), presenta notables diferencias del pensamiento matemático. Es por ello que el aprendizaje de la estadística y la probabilidad dentro de la asignatura de matemáticas suele ser deficitario (Rico y Ruiz-Hidalgo (2022)). Así, cuando se enseña la probabilidad desde una perspectiva matemática, se pueden llegar a perder elementos que son esenciales en la estadística, pero que en matemáticas no lo son.

Este marco es el que motiva la selección de las actividades a analizar; un contenido relevante para la sociedad del futuro, un grupo de estudiantes que tienen talento matemático y por ello demandan contenido extracurricular en el que profundizar, y la selección de un contenido que

[1] Página web: https://thales.cica.es/estalmat

forma parte de las matemáticas escolares pero que suele ser explicado de forma pobre y confusa (Batanero et al. (2007)).

Disponer de un análisis de las actividades seleccionadas, para que estas puedan servir como herramienta en el enriquecimiento de estudiantes con y sin talento matemático y en diferentes niveles educativos, es el objetivo de este trabajo. Tratamos en él de ofrecer un recurso que puede servir a docentes de diferentes niveles educativos para incorporar al aula todo o parte de lo que se expone. Es nuestra intención que este análisis didáctico, entendido en el sentido que indica Rico (2016), sirva como ayuda a los docentes de estadística y matemáticas que lo estimen oportuno para incorporar este material a su práctica docente, sea cual sea la etapa en la que se encuentren los estudiantes.

2. SESIÓN DE ENRIQUECIMIENTO

La sesión llamada «Juegos de Probabilidad» se enmarca dentro de un programa de 20 sesiones de enriquecimiento, en el programa Estalmat Andalucía Oriental 22/23. Estas sesiones se llevan a cabo fuera de horario escolar, generalmente durante la mañana del sábado, con una duración de 3 horas cada una de ellas. Los contenidos que se abordan cubren un amplio abanico de temas matemáticos. Durante la sesión de «Juegos de Probabilidad», concretamente, se dispone de una batería de problemas, en total 23, de temática y dificultad diferente donde son habituales las tareas en las que el objetivo es calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, planteando la pregunta como una toma de decisiones: «¿cómo sería mejor apostar?», «¿qué camino es mejor tomar?».

Los objetivos generales de la sesión se pueden resumir en cuatro: el primero de ellos es que el grupo observe diferentes casos en los que la primera intuición acerca de la solución puede ser fácilmente equivocada; el segundo objetivo es observar la experimentación como una aproximación al modelo probabilístico, no como una réplica fiel del mismo; el tercer objetivo es conseguir la abstracción de diferentes modelos para la resolución de problemas de probabilidad a través de diferentes representaciones; y el cuarto objetivo es conseguir un ambiente de trabajo en equipo respetuoso donde se gestione la frustración ante el error de forma positiva, trabajando el sentido socioafectivo con el fomento de la resiliencia.

De entre todas las tareas propuestas, hemos seleccionado dos de ellas, que representan el espíritu del conjunto al completo, dado que tienen las siguientes características: a) se puede experimentar con material manipulativo para comprobar las conjeturas, b) la intuición inicial sobre la solución es habitualmente incorrecta y c) la solución puede alcanzarse y describirse de diferentes formas y con distinto nivel de complejidad.

Contamos con que el alumnado está familiarizado con conceptos como suceso, espacio muestral, variable, unión, intersección y diagrama de árbol, entre otras. Asimismo, entendemos que hay un trabajo previo en el desarrollo de sus clases habituales, con la incertidumbre y los experimentos simples y compuestos. También damos por hecho que el alumnado está familiarizado con el cálculo de probabilidades utilizando la regla de Laplace y técnicas de recuento basadas en la elaboración de diagramas o tablas.

3. TAREA 1: LAS TRES TARJETAS

3.1. Enunciado

Se tienen tres tarjetas coloreadas: una con ambas caras verdes, otra con ambas caras rojas y una tercera con una cara verde y otra roja. Una persona, que toma el rol de presentadora, saca una de las tarjetas al azar y muestra al público una de las caras. Quien muestra la tarjeta ve una de las caras, y el público ve la otra cara. El público debe apostar por uno de los colores y acertar qué está viendo la persona que tiene la tarjeta. ¿Existe alguna estrategia ventajosa en este juego? ¿Es igual apostar viendo la tarjeta que sin verla?

3.2. Meta

En la resolución de esta tarea lo más habitual es considerar, en un principio, diferentes soluciones que no son correctas. Lo más frecuente es pensar que no hay una estrategia para que aumente la probabilidad de ganar el juego, es decir, lo normal es apostar al azar, o siempre al mismo color. Utilizar una estrategia donde el color observado forma parte de la decisión en la apuesta se consigue después de realizar el juego, observar lo ocurrido y, sobre todo, al abstraer los sucesos involucrados en el juego. Por tanto, las metas de esta tarea serán: a) modelizar correctamente la solución después de la experimentación, rectificando si es necesario la opinión inicial, b) formalizar los resultados lo máximo posible para conseguir explicar y entender cuál es la solución correcta y c) comprobar que la primera intuición nos puede llevar a estrategias que no son óptimas.

El tiempo estimado para la ejecución completa de la tarea es de entre 20 y 30 minutos (2-3 minutos de presentación, 6-9 de elaboración de conjeturas, 4-6 de experimentación, 6-9 de formalización y 4-6 de discusión final).

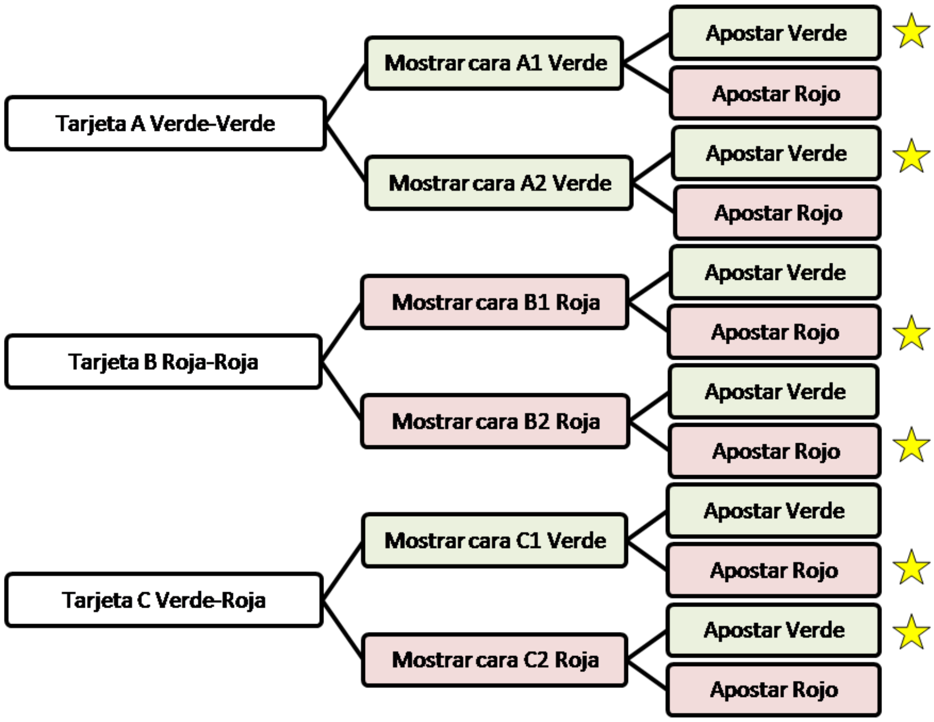
3.3. Solución

La clave en la resolución de este problema reside en no considerar los colores de forma independiente en cada cara (6 caras, 3 colores) sino observar tarjetas completas, con igual color en ambas caras (dos tarjetas) o con diferente color (1 tarjeta). Llegar a este punto no es inmediato, ya que habitualmente se tiende a considerar caras independientes, con el siguiente razonamiento: la mitad de las caras son de cada color, así que la probabilidad de que lo que ve la persona que sostiene la tarjeta sea un color u otro es la misma, es decir, 0.5. Esto, además, es cierto, si no se tiene más información. Si consideramos que cada una de las caras que se observan desde el público pueden tener detrás un color que es igual o diferente del mostrado, es cuando surge la modelización y a partir de aquí es fácil optimizar la probabilidad de acierto.

Sin embargo, aunque una vez conocida la solución nos parezca evidente, es un problema con el que se suele tener dificultad al principio, precisamente por la consideración de unos sucesos elementales que no son correctos.

Para llegar a una correcta modelización, un método posible e intuitivo es el uso de un diagrama de árbol que facilite el conteo de los casos posibles. Se muestra un ejemplo en la Figura 1.

Figura 1
Diagrama de árbol. Estrategia de conteo de la tarea 1.



En el diagrama de árbol se pueden observar, conjuntamente, todos los «caminos» distintos. Se aprecia que, de las veces en las que se ha acertado el color, en 4 de 6 ocasiones el color coincide en ambas caras. Así, concluiremos que

$$P(Acertar\ diciendo\ el\ mismo\ color) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(Acertar\ diciendo\ el\ color\ contrario) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, es más probable ganar eligiendo el mismo color que se muestra al público.

Si no se considera la información de la que se dispone (color observado), la probabilidad de acertar será

$$P(Acertar\ apostando\ al\ azar\ o\ a\ un\ color\ preferido) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

3.4. Estrategias de resolución alternativas

Dependiendo del nivel de abstracción que alcance el grupo de estudiantes, se pueden usar diferentes estrategias para resolver la tarea, entre las cuales destacamos el acercamiento mediante experimentación, el conteo con una tabla de doble entrada, la abstracción formal y la simulación mediante ordenador.

3.4.1 Acercamiento a la solución mediante experimentación

Este juego se puede llevar a cabo de forma sencilla, con unas tarjetas que son fáciles de fabricar. La experimentación resulta ser útil en la búsqueda de una generalización y, en este caso, conviene hacerlo repetidas veces para dar oportunidad al grupo de estudiantes para concluir que es mejor apostar por el mismo color. Es importante repetir el proceso un número suficiente de veces, para no crear intuiciones equivocadas si ocurriera una racha improbable. En la Figura 2 se muestra un ejemplo de tarjetas, útiles para la experimentación de la tarea.

Figura 2

Tarjetas usadas para la experimentación de la tarea 1.

3.4.2 Resolución con conteo en tabla de doble entrada

Se puede utilizar como herramienta la elaboración de una tabla a la hora de hacer el conteo de casos. Por ejemplo, la mostrada en la Tabla 1. En esta tabla, además, los sucesos no se refieren a las «caras de la tarjeta» sino a «la tarjeta» en sí, simplificando el número de casos de 12 a 6.

En la tabla se observa que existen seis sucesos distintos y que, al decir el mismo color que se muestra, la probabilidad de ganar es 2/3.

Tabla 1

Tabla de doble entrada. Estrategia de conteo de la tarea 1.

Color real	Color por el que se apuesta	
	Mismo color	Color contrario
Verde/Verde	Acierto	Fallo
Rojo/Rojo	Acierto	Fallo
Verde/Rojo	Fallo	Acierto

3.4.3. Cálculo formal de las probabilidades

Se puede, en un nivel de abstracción mayor, usar la probabilidad condicionada, aunque sea necesario un mayor conocimiento matemático. (No se prevé, en general, que estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria utilicen esta estrategia para resolver el problema, ya que es compleja y requiere el conocimiento de herramientas que se encuentran fuera del currículo de primer curso, pero al tratarse de estudiantes en un programa de enriquecimiento, podría ocurrir que se diera el caso en alguna ocasión). Se definen los sucesos:

$$M: La\ tarjeta\ elegida\ tiene\ dos\ caras\ del\ mismo\ color$$
$$D: La\ tarjeta\ elegida\ tiene\ las\ caras\ de\ distinto\ color$$
$$A: El\ concursante\ acierta\ el\ color$$
$$V: El\ concursante\ apuesta\ el\ mismo\ color\ que\ ve$$

La probabilidad que queremos calcular es $P(A|V)$ y comprarla con $P(A|\bar{V})$. Se puede utilizar la fórmula de la probabilidad total

$$P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|D)P(D)$$

donde $P(M) = \frac{2}{3}$ y $P(D) = \frac{1}{3}$ por existir dos tarjetas con igual color en ambas caras y una tarjeta con colores diferentes en sus caras. Además, se puede obtener de aquí, que

$$P(A|V) = P(A|M \cap V)P(M) + P(A|D \cap V)P(D),$$
$$P(A|\bar{V}) = P(A|M \cap \bar{V})P(M) + P(A|D \cap \bar{V})P(D).$$

Por un lado, si el concursante dice el mismo color (suceso V) tenemos

$$P(A|M \cap V) = 1\ y\ P(A|D \cap V) = 0,$$

y, entonces

$$P(A|V) = 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Por otro lado, si el concursante dice el color contrario al que observa, es decir, supuesto el suceso $\bar{V}$, obtenemos

$$P(A|M \cap \bar{V}) = 0\ y\ P(A|D \cap \bar{V}) = 1,$$

y, entonces

$$P(A|\bar{V}) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Concluimos, pues, que es más probable ganar diciendo el color que se muestra.

3.4.4. Simulación en ordenador

Se puede utilizar un programa informático sencillo para hacer una simulación y observar qué ocurre al elegir uno u otro color, ampliando la cantidad de experimentos a un número tan grande de veces como queramos. Un ejemplo de implementación en R se ofrece en la Figura 3.

Figura 3

Simulación en ordenador. Estrategia de conteo de la tarea 1.

```
# Definir las cartas
cartas <- c("Verde/Verde", "Rojo/Rojo", "Verde/Rojo")

# Función para simular el juego
simular_juego <- function() {
  # Seleccionar una carta al azar
  carta_seleccionada <- sample(cartas, 1)

  # Seleccionar una cara al azar
  cara_visible <- sample(c("Cara1", "Cara2"), 1)

  # Obtener el color de la cara visible
  color_cara_visible <- ifelse(cara_visible == "Cara1",
                               strsplit(carta_seleccionada, "/")[[1]][1],
                               strsplit(carta_seleccionada, "/")[[1]][2])

  # Obtener el color de la cara no visible
  color_cara_no_visible <- ifelse(cara_visible == "Cara1",
                                  strsplit(carta_seleccionada, "/")[[1]][2],
                                  strsplit(carta_seleccionada, "/")[[1]][1])

  # La apuesta es al color que se observa
  apuesta <- color_cara_visible

  # Devolver la apuesta y el color de la cara no visible
  return(list(apuesta, color_cara_no_visible))
}

# Configurar el número de simulaciones
num_simulaciones <- 10000

# Realizar las simulaciones y contar los aciertos
aciertos <- 0
for (i in 1:num_simulaciones) {
  apuestas <- simular_juego( if (apuestas[[1]] == apuestas[[2]]) {
    aciertos <- aciertos + 1
  }
}

# Calcular la proporción de aciertos
proporcion_aciertos <- aciertos / num_simulaciones

# Imprimir resultado
cat("Proporción de aciertos al apostar por el color de la cara visible:",
proporcion_aciertos, "\n")
```

3.5. Implementación y expectativas

Este problema está ideado para proponerlo verbalmente y recoger una primera impresión de cuál será la estrategia adecuada. A continuación, se realiza el juego utilizando unas tarjetas hechas con material básico (papel, cartulina, forro adhesivo...) un número de veces que permita observar algún patrón. Para esto, se recomienda hacer al menos 15 intentos de adivinar el color.

Se espera que, antes de simular el juego, se argumenten diferentes estrategias para ganar, con poca convicción al principio, con ideas cambiantes, utilizando ensayos mentales de qué ocurriría al decir uno u otro color. Se prevé que la mayoría opte por estrategias de elección que no llevan a una solución correcta en una primera aproximación.

Tras la puesta en práctica, una parte del grupo de estudiantes llegará a la conclusión correcta antes que el resto, aunque pueden presentar aún dificultades para explicar a sus iguales el motivo de que la estrategia elegida sea beneficiosa. En este momento, se podrá guiar al grupo en la resolución, utilizando alguna de las estrategias propuestas, o teniendo en consideración alguna estrategia que se haya propuesto por su parte.

En caso de que en el grupo de estudiantes nadie llegue a una solución, pueden ser útiles las siguientes preguntas para la reflexión: ¿apostarías al mismo color antes y después de conocer el color que se muestra al público?; si hubiera 500 tarjetas verde/verde y 500 tarjetas rojo/rojo, pero solo una verde/rojo, ¿qué esperarías que ocurriera en el experimento?, ¿cuál sería tu apuesta?; ¿apostar al mismo color que se ve tiene alguna ventaja?

Se trata de una tarea que parece más sencilla de lo que luego resulta ser, ya que la solución es poco intuitiva y lleva algún tiempo llegar a la solución correcta. A una parte del grupo puede que no le sirva la simple experimentación y demande calcular la probabilidad teórica con una de las estrategias mencionadas.

4. TAREA 2: MÁQUINA DE GALTON

4.1. Enunciado

Se dispone de una Máquina de Galton en la cual se lanzan una serie de piezas esféricas desde la parte superior. Van topando contra obstáculos a cada paso, de forma que toman el camino de la derecha con probabilidad 0.5 y el de la izquierda con probabilidad 0.5. Después de 8 obstáculos, ¿dónde es más probable que caigan las bolas al final del recorrido? Al lanzar una gran cantidad de bolas, ¿cómo quedarán distribuidas en la parte inferior?

4.2. Meta

La finalidad de esta tarea es observar cómo es la función de probabilidad binomial y cómo esta tiene una forma que tiende a parecerse a la campana de Gauss. El motivo es que, normalmente, tras leer el enunciado o atender a la explicación de la actividad, hay pocas personas (puede que ninguna) del grupo que intuyen correctamente la forma final en que van a caer las esferas. Hay quien pensará que todos los huecos del final del recorrido tienen la misma probabilidad para que una bola caiga en ellos. Creerán esto ya que, como dice el enunciado, todos los caminos tienen la misma probabilidad. Claramente, esta primera intuición es errónea. Aunque sea verdad que todos los caminos tienen la misma probabilidad, existen más rutas que llegan a los huecos del medio que a los del final del recorrido. De esta forma, la probabilidad de que la bola caiga en una casilla central es superior.

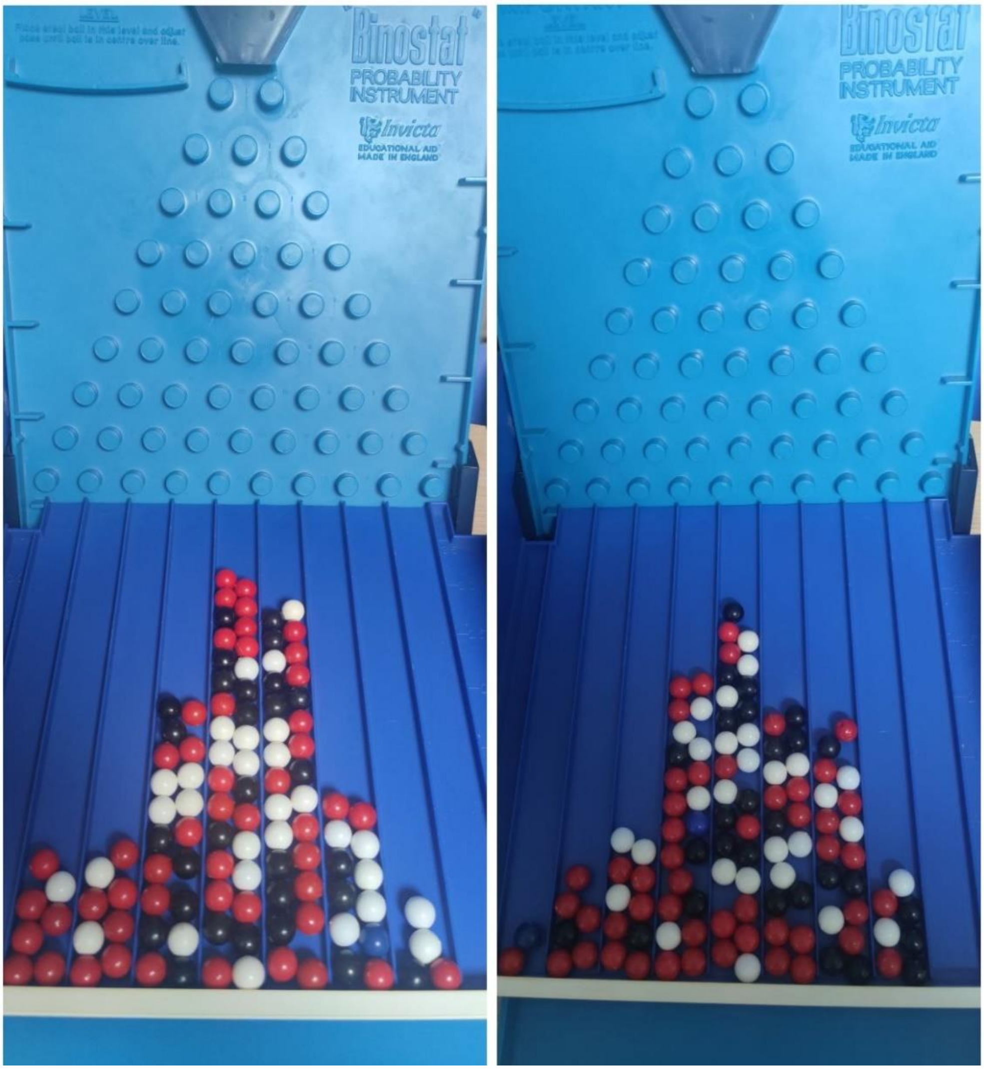
Por otra parte, observar la ocurrencia normal de sucesos muy poco probables también puede ser una meta, siempre que se realice la actividad un número de veces suficiente para que ocurra alguno de estos sucesos (recorrido extremo donde una esfera se coloca en un extremo porque siempre tomó el camino hacia esa dirección).

4.3. Solución

Una de las estrategias más eficientes para entender la tarea es el uso de la experimentación. En este caso, al usar la máquina de Galton y dejar caer una cantidad notable de bolas, se observará que las bolas tienden a acabar en las cajas del medio. Así, al finalizar, obtendremos una suerte de gráfico simétrico, con la mayoría de bolas apiladas en el centro. De esta manera, podremos abstraer y generalizar lo observado en la experimentación. Se aprecia un ejemplo de la experimentación con el uso de la máquina de Galton en la Figura 4.

Figura 4

Experimentación con la máquina de Galton. Estrategia para resolver la tarea 2.



4.4. Estrategias alternativas

Aunque la justificación de por qué las bolas tienden a acabar en las casillas del medio es la misma, hay diferentes maneras de llegar a esta conclusión.

4.4.1 Cálculo de probabilidades intuitivas

Una de las estrategias más básicas para contestar a las preguntas de la tarea puede ser calcular cuál es la probabilidad de que la pieza esférica avance por un camino concreto y, después, observar que hay más caminos que llevan a la bola a las casillas centrales. Así, se podrá observar qué casillas son las más probables. Como menciona el enunciado, la probabilidad de elegir un camino u otro en cada obstáculo es la misma (p=0.5). Por ello, como existen 8 obstáculos en cada camino, la probabilidad de que se siga una ruta en concreto es:

$$P(seguir\ el\ camino\ A) = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

Queda claro que la probabilidad de seguir un camino concreto es la misma siempre, pero hay más caminos que llegan a las posiciones del medio que a las de las esquinas. Por este motivo, es más probable que las bolas caigan en las cajas centrales. Así, al lanzar una gran cantidad de bolas, la fila central tendrá una cantidad superior de canicas, la cual irá disminuyendo cuanto más cerca se esté de las casillas de las esquinas.

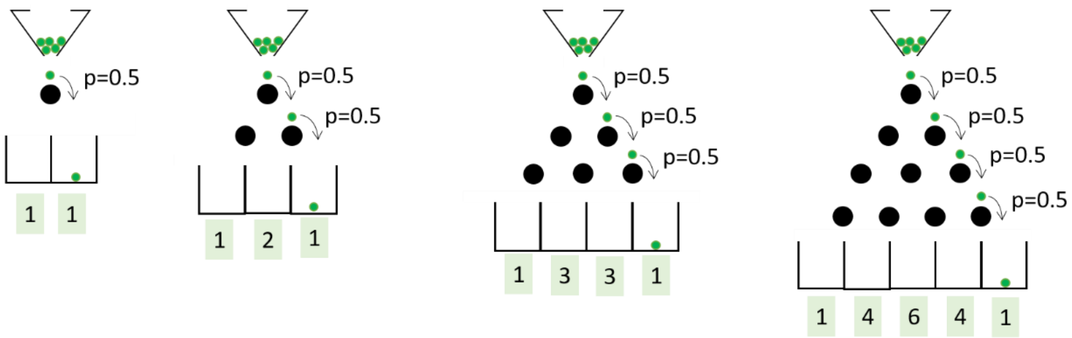
4.4.2 Uso de esquemas y croquis

El uso de un dibujo puede ayudarnos a entender la solución de la tarea. Es más fácil y sencillo crear un dibujo de una máquina más pequeña que la real, para así poder entender qué ocurre de forma más rápida y después generalizarlo. En la Figura 5 se muestra un ejemplo de una máquina de Galton con menos obstáculos que la máquina de la tarea.

Con ayuda del dibujo, se puede calcular cuál es la probabilidad de que la bola siga un camino u otro (en el caso del dibujo, $P(seguir\ el\ camino\ A) = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5$). Además, se observa que hay más caminos que llevan a las casillas centrales. En este caso concreto, empezamos observando lo que ocurre cuando solo hay un obstáculo y existen dos caminos posibles, cada uno con una probabilidad de ser elegido de 0.5. Después, analizamos el caso con dos obstáculos y cuatro caminos diferentes. Aquí, en dos de las opciones la canica cae en la casilla central, mientras que en cada una de las casillas de los extremos solo ocurre una vez. En el tercer paso, contamos con tres obstáculos y, por lo tanto, con ocho rutas distintas. De esta manera, la bola tiene tres caminos para llegar a cada una de las casillas centrales, pero solamente con uno para cada caja de los extremos. Por último, analizamos el caso con cuatro obstáculos y 16 caminos. En esta ocasión, hay seis rutas que llegan a la casilla del medio, mientras que solo uno llega a la caja del extremo. Una vez entendido esto, podemos generalizar lo observado, considerando que las bolas tienen más probabilidad de caer en las casillas del medio. Además, se aprecia que los valores que indican el número de caminos que llegan a cada casilla en cada paso coinciden con los del triángulo de Pascal.

Figura 5

Esquema de funcionamiento de la máquina de Galton. Estrategia de comprensión del funcionamiento de la tarea 2.



Con esta estrategia, podemos observar que al tener 8 obstáculos (9 casillas), la cantidad de caminos que llevan a cada casilla es 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8 y 1 respectivamente. De aquí, obtendremos que la cantidad de caminos total es 2^8=1+8+28+56+70+56+28+1=256 y por tanto conocemos el número de casos favorables a cada casilla así como el número de casos totales y podremos aplicar la regla de Laplace.

4.4.3 Definición de la función masa de probabilidad binomial

Por último, existe una estrategia más compleja y abstracta, que consiste en resolver el problema con el uso de la distribución de la probabilidad de una variable aleatoria binomial. Supongamos que:

$$X = nº\ de\ casilla\ (empezando\ en\ 0)\ en\ que\ cae\ la\ bola$$

Sabemos que X sigue una distribución de probabilidad binomial, es decir, X~B(9, 0.5). Por lo tanto,

$$P(X = k) = \binom{9}{k} p^k (1-p)^{9-k}, para\ k = 0,1, \dots, 9.$$

que es una distribución simétrica con máximo en $n \times p$, es decir, el valor central (o entre los dos centrales). Por ello, se concluye que hay más probabilidad de que las bolas acaben en las casillas centrales.

Es una estrategia muy compleja para el alumnado de esta edad. Por lo tanto, no se espera que haya nadie en el aula que use esta táctica para resolver el problema, salvo en casos excepcionales.

4.4.4 Simulación en ordenador

Existen diferentes recursos online para la simulación del funcionamiento de la máquina a las que se llega fácilmente con una búsqueda en la web[2]. Además de estas simulaciones, se puede utilizar el software R para representar la función masa de probabilidad de una distribución binomial sin más que hacer uso de las funciones **dbinom** para el cálculo de las probabilidades y **barplot** para la representación gráfica.

4.5. Implementación y expectativas

Al realizar esta tarea en el aula, se procura dejar un espacio de tiempo para elucubrar diferentes soluciones antes de pasar a la experimentación. Se espera que el alumnado debata la respuesta en voz alta, llegando a una solución intuitivamente correcta en poco tiempo. Tras la propuesta, más o menos formal, de la solución, se pasa a la experimentación con una máquina de Galton. De esta forma, se comprueba empíricamente cómo ocurren los sucesos y en qué grado la idea intuitiva original era correcta.

En caso de no disponer de una máquina, se puede realizar el experimento con una máquina dibujada y una lanzando una moneda para decidir, en cada obstáculo, si se toma el camino derecho o izquierdo. Para ello basta con asignar «cara» y «cruz» a los valores «derecha» e «izquierda» y, tras lanzar la moneda, ir dibujando dónde caería cada una de las esferas de la máquina.

[2] Véanse, a modo de ejemplo, las simulaciones en https://matematicamente.es/?action=games&players=one&game=Galton o en http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/azar_galton.htm

El tiempo estimado para la ejecución completa de la tarea es de entre 14 y 28 minutos (2-4 minutos de presentación, 2-4 de elaboración de conjeturas, 4-8 de experimentación, 1-2 de formalización y 1-2 de discusión final).

5. CONCLUSIONES

Entendemos que la selección de tareas es una cuestión de crucial relevancia a la hora de abordar los contenidos matemáticos en el aula y que un análisis en profundidad de las mismas es fundamental para establecer los objetivos de las sesiones y tener diferentes herramientas y alternativas de resolución. Con este tipo de análisis, además, nos preparamos como docentes para amoldarnos al nivel, la etapa educativa y el tipo de estudiantado que se encuentra en el aula.

En este trabajo, abordamos el análisis en profundidad de dos tareas que se proponen dentro de una selección ya realizada para una sesión de enriquecimiento extracurricular dentro del programa Estalmat. Con este análisis, los docentes pueden profundizar en el conocimiento de las estrategias de resolución posibles, de forma que pueden proponer la tarea en diferentes niveles educativos con diferentes objetivos cada vez.

Una vez realizado el análisis, podemos concluir:

a) Se trata de dos tareas que pueden ser utilizadas en diferentes niveles educativos.
b) Las diferentes estrategias de resolución y abstracción nos permiten trabajar a diferentes niveles dentro de una misma aula.
c) Son actividades que desafían al estudiantado, en el sentido de que no tienen una solución intuitiva que se corresponda con la solución final.
d) Dado que se trata de actividades en las que coligen multitud de estrategias de resolución, es conveniente que estas sean conocidas por la figura docente con antelación a la implementación en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*. *Revista de Educación Matemática de la UNL, 1*, 27-36.

Batanero, C., Ortiz J. J. y Serrano L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (44), 7-16.

Blanco, R., Ríos, C. G. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 49-60). Trineo

Burril, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education*. *New ICMI Study Series* (pp. 57-70). Springer.

Đono, B., Delalić, A., Arnaut-Berilo, A. y Orlić, M. (2022). Statistical Literacy as a Key Competency for Industry 4.0. En I. Karabegović, A. Kovačević y S. Mandžuka (Eds.), *Proceedings of the New Technologies, Development and Application V* (pp. 1051-1059). Springer International Publishing.

Fernández, M. E. y Pérez, A. (2011). Las altas capacidades y el desarrollo del talento matemático. El Proyecto Estalmat-Andalucía. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *27*, 89-113.

Gal, I. y Gardfiel, J. B. (1997). Curricular goals and assessment challenges in statistics education. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The Assessment Challenges in Statistics Education* (pp.1-13). IOS Press.

Greenes, C. (1981). Identifying the Gifted Student in Mathematics. *The Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Jefatura del Estado (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado, núm 340*, 122868.

Miller, R. C. (1990). Discovering Mathematical Talent. ERIC Digest# E482.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, *Boletín Oficial del Estado, núm 76.*

Ramírez Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Universidad de Granada.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Pirámide.

Rico, N. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Errors concerning Statistical and Probability in Spanish Secondary School Textbooks. *Applied Sciences*, *12*(24), 12719.

Rossman, A., Chanceand, B. y Medina, E. (2006). Some important comparisons between Statistics and Mathematics, and why teachers should care. En G. Burril y P. Elliot (Eds.), *Thinking and reasoning with Data and Chance* (pp. 323-333). National Council of Teachers of Mathematics.