UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Escuela Internacional de Posgrado

MÁSTER EN PROFESORADO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE FUNCIONES EN 4º DE ESO

Presentado por:
D. Juan Antonio Lirio Piñar

Curso Académico 2022-2023

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD DEL TFM

D. Juan Antonio Lirio Piñar, con DNI 26510806V, declaro que el presente Trabajo de Fin de Máster es original, no habiéndose utilizado fuentes sin ser citadas debidamente. De no cumplir con este compromiso, soy consciente de que, de acuerdo con la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada de 20 de mayo de 2013, *esto conllevará automáticamente la calificación numérica de cero [...] independientemente del resto de las calificaciones que el estudiante hubiera obtenido. Esta consecuencia debe entenderse sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudieran incurrir los estudiantes que plagien.*

Y para que así conste firmo el presente documento.

En Granada a 9 de junio de 2023.

RESUMEN

La didáctica de la Matemática es una disciplina científica que se ocupa del estudio de los fenómenos que interfieren en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. El presente Trabajo Fin de Máster se centra en el desarrollo de una unidad didáctica sobre funciones matemáticas para un 4º de Educación Secundaria Obligatoria en España en el curso 2022-23. A lo largo del mismo, haremos uso del análisis didáctico para terminar proponiendo una secuenciación de sesiones y tareas para llevar al aula, en los que el estudiante adquiera un mayor protagonismo mediante una adecuada orientación del docente y a través del empleo de diferentes recursos educativos. Se ha considerado este tema en concreto por sus numerosas aplicaciones no sólo en el campo de la matemática sino también en otros campos como la biología, la química, la física, la psicología, etc. Es, precisamente, por su importancia en contextos reales por lo que resulta imprescindible su enseñanza en la etapa escolar en la sociedad actual.

ABSTRACT

Didactics of Mathematics is a scientific discipline that deals with the study of the phenomena that interfere in the teaching-learning process of Mathematics. This Master's Final Project focuses on the development of a didactic unit on mathematical functions for a 4th year of Compulsory Secondary Education in Spain in the 2022-23 academic year. Throughout it, we will make use of didactic analysis to end up proposing a sequencing of sessions and homework to take to the classroom, in which the student acquires a greater role through proper guidance from the teacher and using different educational resources. This topic has been considered for its numerous applications not only in the field of mathematics but also in other fields such as biology, chemistry, physics, psychology, etc. It is precisely because of its importance in real contexts that it is essential to teach it in school today.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las funciones matemáticas es una parte fundamental del currículo de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. Las funciones son una herramienta poderosa para modelar una amplia variedad de fenómenos en la vida real, desde la trayectoria de un proyectil hasta el comportamiento de los mercados financieros. Además, las funciones son una parte esencial del estudio del cálculo y de otras áreas de las matemáticas superiores. Por lo tanto, es crucial que los estudiantes[1] comprendan bien el concepto de función y se sientan cómodos trabajando con ellas.

Sin embargo, el aprendizaje y la enseñanza de las funciones puede resultar desafiante tanto para los estudiantes como para los profesores. Los estudiantes pueden tener dificultades para entender el concepto de función y cómo aplicarlo a situaciones reales. Por otro lado, los profesores pueden encontrar complicado enseñar las funciones de manera efectiva, especialmente si no cuentan con la formación adecuada.

El objetivo de este trabajo fin de máster es diseñar una unidad didáctica con base en las mejores prácticas para la enseñanza de las funciones matemáticas en el cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO). En particular, la unidad didáctica incluirá nuevas estrategias pedagógicas y recursos didácticos que pueden ser útiles para mejorar la enseñanza de las funciones matemáticas en este nivel.

En concreto, nos vamos a centrar en un curso de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (en adelante ESO), en la asignatura de Matemáticas A según los criterios establecidos por la Ley Orgánica de modificación de la Ley Orgánica de Educación (LOMLOE en lo que sigue).

2. JUSTIFICACIÓN

La enseñanza de las funciones, tanto desde un punto de vista algebraico, como por medio de sus gráficas, queda justificada con base en los puntos que trataremos a continuación.

2.1 Historia

Las funciones matemáticas son un concepto fundamental en las matemáticas y se utilizan para modelar una gran variedad de fenómenos en la naturaleza, la física, la economía, la ingeniería y muchas otras áreas. A lo largo de la historia, las funciones matemáticas han evolucionado desde una comprensión intuitiva hasta una descripción más formal y rigurosa. En este recorrido histórico, exploraremos los hitos más importantes en el desarrollo de las funciones matemáticas.

Las primeras referencias, según Pickover (2009), a las funciones matemáticas se remontan a los antiguos babilonios y egipcios, quienes utilizaban funciones para resolver problemas prácticos relacionados con la agricultura y el comercio. Sin embargo, fue en la antigua Grecia donde se inició el estudio sistemático de las funciones matemáticas. Los griegos desarrollaron una comprensión intuitiva de las funciones y las utilizaron en su geometría y en la solución de problemas matemáticos. El matemático griego Euclides, en su obra "Los Elementos", fue uno de los primeros en presentar un enfoque formal para las funciones matemáticas.

[1] En el presente trabajo abreviaremos usando el masculino genérico (“el alumnado”, “los alumnos” o “los estudiantes”) para referirnos al conjunto completo de los y las estudiantes.

En la Edad Media, los matemáticos árabes y persas continuaron con el desarrollo de las funciones matemáticas y enriquecieron la comprensión de estas con nuevos métodos y técnicas. Uno de los más importantes matemáticos de la Edad Media fue Al-Khwarizmi, quien fue el primero en utilizar el término "algebra" y desarrolló técnicas para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Al-Khwarizmi también trabajó en el campo de las funciones trigonométricas y desarrolló nuevas técnicas para medir el tamaño de la Tierra. De acuerdo con Sastre, Rey y Boubée (2008), el primero en utilizar la representación gráfico-geométrica para expresar las propiedades cambiantes de los sistemas fue Nicolás Oresme, a mediados del siglo XIV.

Durante el Renacimiento, los matemáticos europeos continuaron con el desarrollo de las funciones matemáticas. El matemático italiano Leonardo da Vinci fue uno de los primeros en utilizar funciones para describir las leyes de la física y la mecánica. Otros matemáticos destacados de la época incluyen a Galileo Galilei, Johannes Kepler y René Descartes. Descartes fue uno de los primeros en utilizar la geometría analítica para describir las funciones matemáticas, lo que permitió una comprensión más rigurosa de las mismas.

Durante los siglos XVIII y XIX, los matemáticos continuaron trabajando en el desarrollo de las funciones matemáticas. El matemático suizo Leonhard Euler fue uno de los más destacados de la época y es conocido por sus contribuciones a la teoría de los números, la geometría y el cálculo. El matemático francés Augustin-Louis Cauchy también hizo importantes contribuciones a la teoría de las funciones y sentó las bases para el análisis matemático moderno. Otras contribuciones especialmente relevantes fueron hechas por Joseph Fourier o Johann Dirichlet (de acuerdo con Azcárate y Deulofeu, 1990).

En el siglo XX, el desarrollo de las funciones matemáticas se aceleró con el surgimiento de la computación y la tecnología digital. Los matemáticos comenzaron a utilizar la teoría de las funciones para modelar fenómenos en una amplia variedad de campos, incluyendo la física, la economía y la biología. El desarrollo de la teoría de conjuntos (fundada por Cantor) también constituyó un hito importante que permitió el desarrollo del concepto moderno de función en el siglo XX.

2.2 Aplicaciones

Las funciones matemáticas son una herramienta poderosa para modelar una amplia variedad de fenómenos en la vida real. A continuación, se describirán algunas de las aplicaciones más importantes de las funciones en diversos ámbitos:

- En Matemáticas, las funciones describen las relaciones entre variables tan abstractas como se quiera. Suponen por tanto una parte esencial del estudio del cálculo, la geometría y otras áreas de las matemáticas superiores, ya que permiten estudiar conceptos más complejos, como la curvatura de una superficie o todo tipo de transformaciones satisfaciendo las propiedades que se deseen (funciones que transforman funciones en funciones, por ejemplo).
- En Física, las funciones son usadas para modelar fenómenos naturales. Por ejemplo, la segunda ley de Newton resulta en una ecuación del movimiento que expresa, en forma funcional, la relación entre el tiempo y la posición del sistema estudiado: $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$ representa por ejemplo un movimiento de caída libre en función del tiempo. Las funciones también se utilizan para modelar el

comportamiento de ondas, como las ondas de luz y sonido. Constituyeron además la pieza angular para el desarrollo de la Mecánica Cuántica.

- En Ingeniería, las funciones se utilizan para diseñar y analizar sistemas complejos. Por ejemplo, las funciones se utilizan para modelar la relación entre las variables que afectan el rendimiento de un motor o un sistema de control automático. Las funciones también se utilizan en la construcción de simuladores de sistemas complejos, como puede ser el clima.
- En Economía, encontramos funciones al estudiar el comportamiento de los mercados financieros. Por ejemplo, las funciones se utilizan para modelar la relación entre la oferta y la demanda de un producto: el modelo más sencillo considera ambas lineales con el precio del producto:
$$\begin{cases} O(p) = a + bp \\ D(p) = c - dp \end{cases}$$
También se representa con funciones la relación entre el tiempo y el valor de una inversión. Incluso se utilizan para construir modelos que predicen el comportamiento de los mercados financieros o evalúan el riesgo de una inversión.
- En Biología, las funciones modelan el comportamiento de los sistemas biológicos. Por ejemplo, la relación entre la concentración de una sustancia química en el cuerpo y su efecto sobre la salud de una persona. O también el crecimiento de poblaciones de animales y plantas en función del tiempo, o la propagación de enfermedades. Incluso el enfriamiento del cuerpo humano al fallecer en función del tiempo: $T(t) = (37 - T_{ext})e^{-\frac{t}{10}} + T_{ext}$.
- En Informática, los sistemas informáticos y de redes pueden ser representados mediante funciones. Por ejemplo, se utilizan para modelar la relación entre el tiempo de respuesta de un sistema informático y el número de usuarios que lo utilizan. También se emplean para modelar la propagación de virus informáticos u otros tipos de programas malignos.
- En Deportes, un ejemplo llamativo para los alumnos adolescentes puede ser el mundo deportivo. Cómo mediante funciones matemáticas se mide, por ejemplo, el rendimiento deportivo de un atleta en función del tiempo de entrenamiento.

En resumen, las funciones matemáticas tienen una amplia variedad de aplicaciones en diversos ámbitos, desde la Física y la Ingeniería hasta la Economía y la Biología. Podemos abreviar diciendo que la importancia de las funciones reside en su potencia para modelar, y por ello son utilizadas ampliamente en todas las ciencias y ciencias sociales, además de la propia Matemática. Su uso en la resolución de problemas y en la toma de decisiones es crucial para avanzar en la investigación y el desarrollo en una amplia variedad de campos.

2.3 Propedéutica

Con propedéutica nos referimos a los conocimientos y habilidades básicas que los estudiantes adquirieren con el estudio de las funciones para poder comprender y trabajar con funciones matemáticas de manera efectiva en el futuro. El alumnado necesita conocer funciones porque le serán útiles para:

- El estudio del Álgebra, la Geometría o la Probabilidad. Aquellos estudiantes que se preparan para un Bachillerato de Ciencias y Tecnología o Humanidades y Ciencias Sociales utilizarán frecuentemente las funciones para representar relaciones entre variables geométricas, o para resolver ecuaciones y sistemas. En Probabilidad también encontrarán las funciones densidad de probabilidad y la función de distribución.

- La construcción de Matemáticas más complejas. De nuevo, aquellos alumnos enfocados en una Bachillerato de Ciencias y Tecnología usarán el concepto de función como base para el estudio de las derivadas, integrales o incluso series de potencias en cursos más avanzados.
- El modelado de fenómenos en Ciencias. La Física o la Química (asignaturas incluidas en el currículo del Bachillerato de Ciencias y Tecnología) basan sus teorías en relaciones funcionales entre las variables. Por ejemplo, las trayectorias (relación entre espacio y tiempo) o las reacciones químicas (relación entre concentración de los reactivos y los productos, y el tiempo).
- El modelado de fenómenos en Ciencias Sociales. Para los estudiantes de Humanidades y Ciencias Sociales, sus materias de modalidad de Economía o Geografía hacen uso de funciones para relacionar ingresos y gastos, o para representar la evolución de las poblaciones.

Es por ello importante que los alumnos que cursan Matemáticas A en 4º de ESO (preparando la entrada en un Bachillerato) conozcan bien el concepto de función, sus propiedades, los algoritmos básicos y los diferentes usos que tienen las funciones.

2.4 Currículo

La Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE) establece un nuevo marco curricular para el sistema educativo español.

En este contexto, el perfil de salida se define como un conjunto de habilidades, conocimientos y valores que un estudiante debe alcanzar al finalizar su paso por el sistema educativo. El perfil de salida incluye unas competencias clave, que son un conjunto de destrezas y habilidades consideradas esenciales para el desarrollo integral de un estudiante, agrupadas en ocho áreas: comunicación lingüística; plurilingüe; matemática y competencia en ciencia, tecnología e ingeniería; digital; personal, social y de aprender a aprender; ciudadana; emprendedora y cultural.

Por otro lado, las competencias específicas hacen referencia a las habilidades y destrezas propias de cada área del currículo, como la capacidad de comprender y aplicar conceptos matemáticos. Además, los saberes básicos son los conocimientos que se consideran esenciales para el desarrollo cognitivo y personal de un estudiante.

En cuanto la evaluación, se elaboran criterios de evaluación que miden la capacidad, competencia y adquisición de conocimientos del estudiante.

En el caso específico de las funciones matemáticas, este es un tema fundamental en el currículo de la asignatura Matemáticas A que se cursa en 4º de ESO. De hecho, las relaciones y funciones representan un apartado propio dentro de uno de los saberes básicos que establece la normativa curricular establecida por el Real Decreto 217/2022. (Figura 1).

D. Sentido algebraico
5. Relaciones y funciones.
− Relaciones cuantitativas en situaciones de la vida cotidiana y clases de funciones que las modelizan.
− Relaciones lineales y no lineales: identificación y comparación de diferentes modos de representación, tablas, gráficas o expresiones algebraicas, y sus propiedades a partir de ellas.
− Representación de funciones: interpretación de sus propiedades en situaciones de la vida cotidiana

Figura 1: Extracto del Real Decreto 217/2022 donde podemos ver el saber básico que engloba el tema de funciones.

Se especifica en el currículo que el estudio de funciones matemáticas en la ESO es importante por varias razones. En primer lugar, son una herramienta fundamental en matemáticas y se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias sociales. En segundo lugar, su estudio ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades importantes, como la capacidad de analizar y resolver problemas, la capacidad de visualizar y manipular gráficos y la habilidad de comunicar ideas matemáticas de manera clara y efectiva. Finalmente, el estudio de funciones también puede ayudar a los estudiantes a comprender mejor el mundo que les rodea, ya que muchas relaciones en la naturaleza y en la sociedad pueden ser modeladas y descritas mediante funciones matemáticas.

De acuerdo con los saberes básicos, los estudiantes deben desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos relacionados con las funciones, como determinar relaciones entre variables y graficar funciones. También deben desarrollar la capacidad de resolver tareas relacionadas con funciones y ser capaces de aplicar los conocimientos matemáticos adquiridos en situaciones de la vida real. Los criterios de evaluación se basarán en la capacidad de los estudiantes para aplicar conceptos matemáticos y destrezas en el análisis y resolución de problemas relacionados con funciones.

2.5 Artículos, investigaciones y libros

Existe un sinfín de textos bibliográficos que justifican la importancia del estudio de funciones en la Educación Secundaria Obligatoria. Citamos a continuación solamente tres de ellos:

- En el anteriormente mencionado Azcárate y Deulofeu (1990), se pone de relevancia la necesaria formación de los alumnos en la interpretación de la información. En particular, aquella que proviene de relaciones funcionales, usada ampliamente para conocer cómo unas magnitudes dependen de otras y expresar de forma sencilla estas dependencias, ya sea en forma de fórmula matemática (recogiendo toda la abstracción de la función), o bien en forma de gráfica, una manera que proporciona una interpretación visual mucho más rápida. Lo anterior es especialmente relevante en contextos fuertemente cambiantes, como el que tenemos en nuestra sociedad actual de la información y la comunicación.

Otras aportaciones algo más modernas de los mismos autores (por ejemplo, Deulofeu, 2001) señalan a las funciones como un tema clave en la transición de la matemática elemental a la matemática avanzada.

- Para Carlson y Oehrtman (2005), el concepto de función es central en las Matemáticas básicas, uno de los fundamentos de la Matemática moderna, y un punto esencial en el resto de áreas relacionadas. Por tanto, desde principios del siglo XX ha existido una tendencia global para colocar a las funciones en un lugar cada vez más importante en los currículos escolares.
- Según Dorado y Díaz (2014), el concepto de función ocupa un lugar primordial en cualquier currículo, ya que es fundamental para otros conocimientos, incluso en otras disciplinas. Es por ello que no debe limitarse a ser representado a través de una fórmula, una tabla o una gráfica sin articulación entre ellos, sino que una buena forma de trabajar con él es a través de la modelización de situaciones cercanas al alumno.

3. CONTEXTO

A continuación, recogemos un pequeño resumen del contexto para el que está planteada la presente unidad didáctica. Al igual que ya hemos hablado sobre el contexto curricular, también es conveniente ubicar el centro y el alumnado que constituyen el objetivo al que va dirigido este trabajo.

3.1 Centro

La unidad didáctica propuesta en este trabajo ha sido desarrollada, en parte, durante mi estancia de prácticas en el Instituto de Educación Secundaria Generalife, en la ciudad de Granada. Por ello, supondremos en lo que sigue que la unidad está orientada a su aplicación al alumnado de 4º de ESO de dicho centro del actual curso académico 2022-2023.

Para realizar una descripción completa del IES Generalife, me voy a centrar en los siguientes puntos:

1. Identificación del centro: El Instituto de Educación Secundaria Generalife es un centro educativo público, fundado en el año 1978, en el que se imparten los cursos desde 1º de ESO hasta 2º de Bachillerato, además de un Ciclo Formativo Superior en Asistencia a la Dirección.

El centro, situado en la ciudad de Granada, tiene una localización bastante especial: por un lado, está emplazado fuera de la autovía de circunvalación de la ciudad (que ha supuesto desde hace años una muralla de contención urbanística) y, como tal, podríamos decir que se ubica a las afueras de Granada. Sin embargo, está a escasos minutos andando de la zona centro de la ciudad, lo que lo dota de características bastante especiales.

El instituto está constituido por una plantilla de profesores que ronda las 60 personas, y un alumnado variable a lo largo de los diferentes años, pero que está cerca de 700 estudiantes.

2. Estructura organizativa: La estructura organizativa del centro está formada por director, vicedirector, jefe de estudios, vicejefe de estudios y secretario, que se encargan de planificación y organización de las actividades administrativas y académicas, la gestión de los recursos financieros, materiales y humanos del centro, la coordinación pedagógica de forma conjunta con el equipo de orientación, la evaluación y seguimiento de los resultados docentes, las comunicaciones y relaciones institucionales, y la promoción de los valores y la cultura.

3. Recursos materiales: El centro está dividido en tres edificios: el principal, donde se encuentran la mayor parte de las aulas, la sala de profesores, los distintos departamentos y un salón de actos; y dos edificios anexos más pequeños donde se encuentras aulas auxiliares para los desdobles, la biblioteca (dotada de un amplio catálogo de libros y recursos multimedia), los laboratorios de Ciencias (Física y Química, y Biología y Geología) y talleres de Tecnología, el aula de Informática, así como una cafetería a disposición de alumnos y profesores durante la media hora que dura el recreo.

Con respecto a las aulas, todas están equipadas con pizarras digitales ampliamente utilizadas, y que comparten su espacio con la pizarra tradicional.

Además, los edificios están rodeados de dos grupos de pistas deportivas equipadas con porterías de fútbol, canastas de baloncesto, redes de tenis desmontables, … con las que los alumnos desarrollan sus clases de Educación Física y pasan el tiempo de recreo.

4. Recursos humanos: La plantilla educativa del centro consta de en torno a 60 profesores (altamente cualificados y con experiencia en su área de enseñanza). Por su situación geográfica y su buena reputación entre el mundo docente (históricamente ha sido un centro de alto nivel educativo y socioeconómico), cabría esperar que este centro sea el destino definitivo de un gran número de profesores de avanzada edad. Sin embargo, esto no es así. Aunque la mayoría de los profesores son de Granada o alrededores, un buen número de ellos son interinos.

Con respecto al departamento de Matemáticas, está formado por 7 profesores. Además, en varios de los grupos existen profesores de apoyo (tanto profesores de Matemáticas como de otras asignaturas como de Economía o Tecnología) que permiten el desdoble de algunos grupos. Esto sucede también en otras asignaturas troncales.

Además de los profesores de cada una de las asignaturas principales, cuenta con un equipo de orientación educativa y psicopedagógica formado por una orientadora y una pedagoga terapeuta (PT) que trabajan en colaboración con el equipo docente.

5. Proyecto educativo del centro: El proyecto educativo (enlace) del centro tiene como pilares básicos el convertir el centro cada día en un instituto más abierto al entorno (a través de las colaboraciones con el vecino IES Fray Luis de Granada, con los centros adscritos, con el Ayuntamiento de Granada, o con la Universidad de Granada través por ejemplo de este Prácticum); hacer que los alumnos se eduquen, desarrollen sus capacidades, y trabajen en equipo (usando para ellos el trabajo interdisciplinar o por ámbitos); desarrollar en el centro un lugar de convivencia y participación de toda la comunidad educativa, incluyendo a las familias a través del AMPA o la comunicación diaria con el profesorado; dotar al centro de una gran biblioteca, con material TIC y suficientes equipamientos e instalaciones.

Sin embargo, lo más característico del proyecto de centro es el plurilingüismo, el cual es su seña de identidad. Por ello, esta característica cuenta con una gran implicación y compromiso por parte de alumnado, promoviendo todo tipo de actividades y planes educativos que comentaré a continuación.

6. Planes y programas educativos: Entre los planes y programas educativos que se desarrollan en el centro, podemos encontrar los planes de atención a la diversidad, los planes de convivencia, los planes de igualdad, …

Una buena parte de los planes de centro están orientados a fomentar el plurilingüismo. El centro incluye un plan Lingüístico y un proyecto Plurilingüe, que involucran a los alumnos como participantes de ERASMUS+ e intercambios lingüísticos con otros centros europeos. Además, los departamentos de idiomas facilitan la formación de los alumnos para que se presenten anualmente a las pruebas Cambridge English en inglés, y DELF (Alianza Francesa) en francés.

Por último, una característica relevante del centro es que es uno de los 8 centros andaluces (el único de la provincia de Granada) donde se ofrece la posibilidad de cursar el *Bachibac*. Ello permite a los alumnos cursar parte del Bachillerato en francés (incluyendo las asignaturas Historia de Francia y Lengua Francesa y Literatura), obteniendo así acceso tanto a las universidades francesas como a las españolas.

3.2 Alumnado

El alumnado del IES Generalife es mayoritariamente de origen español. Sin embargo, Granada es una ciudad muy multicultural con una amplia diversidad étnica y cultural. La ciudad cuenta con una importante población de origen inmigrante, principalmente de países africanos, latinoamericanos y europeos. Además, al tratarse de una ciudad universitaria, acoge a numerosos estudiantes de otras nacionalidades participantes en programas de intercambio tipo ERASMUS. Toda esta diversidad queda reflejada igualmente en el instituto, con una pequeña, aunque apreciable, minoría de estudiantes de estos mismos países de origen.

Como consecuencia de los cursos que se imparten, la edad de los estudiantes está entre los 12 y los 18 años aproximadamente.

Por lo general, el nivel socioeconómico de los alumnos que recibe el centro, así como de sus familias, es medio o medio-alto. Como consecuencia de la zona en que está ubicado el centro, una buena parte de los alumnos son hijos de profesores universitarios (la Facultad de Ciencias está situada muy próxima), profesores de otros centros cercanos, sanitarios que trabajan en la zona o funcionarios. En consecuencia, el alumnado tiene medios y tiempo para participar en multitud de actividades (complementarias y extraescolares) y las familias están, por lo general, bastante implicadas en la educación de sus hijos.

Sin embargo, el nivel educativo y el rendimiento de los alumnos no es tan alto como se esperaría de un centro con estas características. El descenso en el número de alumnos de los últimos años ha obligado al centro a aceptar alumnos de fuera de los centros históricamente adscritos al instituto. En los inicios del centro, la práctica totalidad de los alumnos del centro procedía del CEIP Sierra Elvira (Granada). Sin embargo, en la actualidad, aunque la mayoría de los alumnos siguen proviniendo de este colegio, una parte apreciable del estudiantado proviene de los colegios de los pueblos cercanos a la ciudad de Granada (por ejemplo, el CEIP Virgen de los Dolores de Purchil, municipio de la vega de Granada). Esta nueva pluralidad ha supuesto un descenso notable en el nivel académico del centro, que se está viendo agravado año tras año.

Particularizando al caso de los alumnos de 4º de ESO con los que trabajamos, se tratan de alumnos fuertemente desmotivados y con una gran falta de base de cursos previos (desconocimiento de nociones básicas como simplificación de polinomios, o identidades notables). Estas dos características justifican también la elección o no de ciertos materiales didácticos para esta unidad.

Los alumnos se distribuían en grupos pequeños (14 y 18 alumnos respectivamente), y en cada uno de estos grupos existía solamente una persona con la asignatura suspensa en cursos previos.

Además, hemos de destacar que una parte de cada unidad del curso debe ser impartida en inglés, de acuerdo con las directrices plurilingües del centro.

4. Análisis didáctico

En las secciones que siguen vamos a realizar un análisis didáctico sobre el tema de funciones matemáticas. El análisis didáctico es una herramienta clave en la elaboración de unidades didácticas y situaciones de aprendizaje efectivas. De acuerdo con Rico y Moreno (2016), se compone de análisis de contenido, análisis del aprendizaje, análisis de la enseñanza y análisis de avaluación, y se basa en el estudio de los contenidos a impartir, la identificación de objetivos de aprendizaje y la propuesta de estrategias de enseñanza y evaluación.

- El **análisis de contenido** implica la descomposición y análisis detallado del material de aprendizaje que se va a enseñar. Esto incluye la identificación de los conceptos clave, la organización y estructura del material, y la identificación de los puntos de dificultad y oportunidades de enseñanza.
- El **análisis del aprendizaje** implica el examen de la forma en que los estudiantes aprenden y procesan la información. Esto incluye la identificación de los conocimientos previos que los estudiantes deben tener para comprender el material, el planteamiento de los objetivos del aprendizaje, y la comprensión de los procesos que ayudan u obstaculizan la obtención de dichos objetivos
- El **análisis de la enseñanza** implica la identificación de las estrategias de enseñanza y los recursos necesarios para facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Esto puede incluir la creación de tareas y recursos de enseñanza y la selección de estrategias de enseñanza efectivas.
- El **análisis de la evaluación** implica la preparación de materiales y métodos capaces de servir a la evaluación de la efectividad de la enseñanza en los alumnos en base a los criterios marcados por el currículo.

5. Análisis del contenido

A continuación, realizaremos un análisis del contenido relacionado con nuestro tema principal que son las funciones. Para ello, lo abordaremos desde distintas perspectivas: desde el punto de vista histórico (que ya hemos visto en la justificación histórica), las aplicaciones (que también hemos visto en aplicaciones), desde el sentido que le damos, desde las representaciones que utilizamos, y desde la organización cognitiva de los conceptos.

5.1 Sentido

En este apartado, pretendemos explorar aquellos escenarios y aquella terminología bajo los que las funciones adquieren un sentido concreto. Para ello, abordaremos el problema desde diferentes puntos:

- Desde los **fenómenos** que les dan origen y organizan:
  - Relaciones entre variables en fenómenos físicos. En la física encontramos una disciplina del conocimiento plenamente relacionada con las matemáticas. El primer ejemplo que se presenta al alumnado de Educación Secundaria es el de la velocidad, donde los estudiantes pueden ver en fórmulas sencillas la relación entre variables físicas como pueden ser la velocidad, el espacio, el tiempo, la aceleración… Estas fórmulas no son otra cosa que funciones que describen la relación de dependencia que presentan varias variables. Es por ello por lo que motivar las funciones a partir de fenómenos físicos puede resultar una buena idea ya que, a partir de conceptos, más o menos cotidianos, los alumnos comprenden el poder y alcance que tienen las mismas.
  - Razones utilizadas en arquitectura: La arquitectura y el arte nos presentan todo un contexto en el que las matemáticas, y concretamente las funciones y las relaciones están por todas partes. Un ejemplo que se conoce desde la antigüedad es la relación áurea. Otro ejemplo sería el uso de parábolas o catenarias en la construcción de cúpulas y arcos en catedrales y palacios, estudiando su expresión algebraica como función.
  - Hechos en economía, intercambios y transacciones: La economía es un área en la cual encontramos aplicaciones de las matemáticas en nuestra vida cotidiana. Un buen ejemplo para introducir las funciones al alumnado de la ESO sería presentarle los intereses de un banco, en función de los años que tengan sus ahorros en él. Para ver la utilidad de las funciones en cursos más superiores se les podría proponer a los alumnos ejemplos de modelización de situaciones mediante funciones y de calcular máximos y mínimos relacionados con negocios y con economía. Un ejemplo de esto es calcular el momento óptimo para vender una mercancía de un determinado producto perecedero, sabiendo que cada semana que pasa su precio de venta sube una determinada cantidad, pero se echan a perder a la vez ciertos kilos.
- Desde los **términos y los modos de uso** que lo identifican.

  Los términos más usados en el contexto matemático de funciones y relación son:
  - <u>Dependencia, “a depende de b”</u>: El significado matemático está claro (existe una relación unívoca que permite determinar a a partir de b), no tiene exactamente el mismo uso que en la vida cotidiana, donde expresamos la dependencia de una manera más difusa e informal.
  - <u>Evaluación</u>: En la vida diaria el término evaluación significa, según la RAE “señalar el valor de algo” o “estimar el conocimiento de los alumnos”. Sin embargo, no tiene el significado del que le dotamos en matemáticas (concretar el valor de una variable), lo cual puede resultar en un primer momento una fuente de confusión para el alumnado.

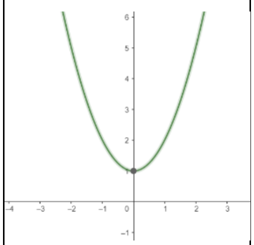
    - Variable: Este término suele dar problemas durante los primeros cursos de secundaria ya que los alumnos no llegan a distinguir en su totalidad la variable dependiente de la independiente, confundiéndolas en nomenclatura en diversas ocasiones. La RAE define variable como aquello inestable, inconstante, mudable, que varía o puede variar. Esta acepción de la vida cotidiana está levemente relacionada con el concepto matemático, y es por ello por lo que, quizás, sea motivo de confusión durante estos cursos.
    - Argumento: En este caso además de no tener nada que ver con el significado común de argumento, encontramos que aparece varias veces en el lenguaje matemático con distintas acepciones. En primer lugar, lo encontramos en nuestro tema, el argumento de una función. En segundo lugar, lo encontramos en el análisis complejo con el argumento de un número complejo. Asignar el mismo sustantivo a dos conceptos totalmente distintos tampoco es de mucha ayuda para el alumnado.
- Desde las **situaciones** en las que se aplica. Esto ya lo hemos discutido con más detenimiento en la justificación de la unidad didáctica (Aplicaciones).
- Desde los **contextos y cuestiones** a las que da respuesta
    - Problemas de modelado de situaciones: Encontramos aquí gran variedad de enunciados de problemas relacionados con el modelado de contextos del mundo real y que están relacionados con el cálculo de áreas, volúmenes, tiempo… Por ejemplo, el perfil de un río representa su altura con respecto al nivel del mar en función de su longitud.
    - Problemas de optimización (búsqueda de máximos y mínimos en algunos contextos): Por ejemplo, conociendo el volumen de una lata cilíndrica, encontrar radio y altura de manera que la superficie sea mínima. Este problema requiere trabajo con funciones y derivadas.
    - Contextos técnicos: Generalmente relacionados con la física, la química, u otras disciplinas científicas. Por ejemplo, la posición de una partícula en movimiento en un determinado momento se expresa a través de una función $x = x(t)$.

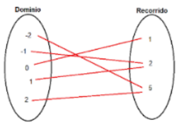
5.2 Representaciones

De acuerdo con Lupiáñez (2016), los sistemas de representación permiten una mirada más profunda al contenido y significado de los conceptos matemáticos. Por tanto, las tareas en el aula deben alentar el uso de diferentes formas de representación para mejorar la comprensión del contenido y la adquisición de habilidades y competencias por parte de los estudiantes.

Además, en nuestro tema particular, las representaciones ocupan un lugar central en tanto que varios de los objetivos que plantearemos a continuación tienen como base algún sistema de representación concreto, o bien las conversiones entre estos.

En la Tabla 1 recogemos un resumen de las diferentes representaciones que los alumnos deben conocer en relación con las funciones.

Representación	Ejemplo	Ventajas	Desventajas
Expresión algebraica	$f(x) = x^2 + 1$	Se trata de la manera más general y abstracta de trabajar, que nos permite hacer construcciones más complejas sobre la misma (cálculo de límites, cortes con los ejes, derivación, asíntotas…). Además, a partir de esta representación se pueden construir las siguientes.	Es la forma que más tiempo puede llevar hasta que los alumnos adquieran habilidades para trabajar con la misma.
Función dependiente de parámetros	$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$	Supone un nivel más de la expresión algebraica, que nos permite expresar familias de funciones o restringirnos a algunos casos que nos interesen.	Puede suponer un problema para alumnos que aún no distinguen entre variable y parámetro.
Representación gráfica		Esta forma es la más visual, y nos permite apreciar sin dificultad las tendencias de las relaciones (como son la monotonía, los extremos relativos, los límites…) Además, en caso de que la gráfica pueda construirse, existe un gran número de herramientas para hacerlo de forma muy sencilla.	Esta forma solo nos permite acercarnos a las funciones desde un punto de vista aproximado. Además, cabe la posibilidad de que la gráfica no sea construible y, por tanto, esta representación no nos sirva de ayuda (o incluso produzca confusiones entre los alumnos). Este sería el caso, por ejemplo, de la función de Dirichlet (1 para los racionales y 0 para los irracionales).
Enunciado	"La distancia al origen en función del tiempo de un móvil que se mueve en línea recta, partiendo desde el reposo a 1m del origen, y con una aceleración constante de $1m/s^2$."	Este tipo de representaciones son las más cercanas al alumnado puesto que son las que establecen la conexión entre el mundo real y las matemáticas a través de la modelización.	A veces puede resultar difícil encontrar la conexión con las matemáticas, o requerir de conocimientos previos. Además, existen muchas más funciones que las que pueden representar situaciones reales simples.

<table>
<tr><th>Representación</th><th>Ejemplo</th><th>Ventajas</th><th>Desventajas</th></tr>
<tr><td>Mediante características</td><td>“Una función parabólica cuyo vértice sea el punto (0,1) y que pase por el punto (1,2).”</td><td>Definir una función a través de algunas características concretas, y si nos restringimos a una familia de funciones, es interesante para hacer que el alumno ponga en juego sus conocimientos y habilidades sobre las funciones, y otros temas como resolución de ecuaciones y sistemas.</td><td>En general, no se usa (salvo para realizar ejercicios como hemos comentado antes) porque es una manera bastante pobre de definir una función. Además, puede que esta definición ni siquiera sea única en algunos casos.</td></tr>
<tr><td>Diagrama sagital</td><td>
</td><td>Los diagramas sagitales son fundamentalmente útiles para introducir los conceptos de dominio, recorrido y función (esta última como transformación que sucede entre los otros dos). Además, permite en casos sencillos distinguir entre relación y función (aquellos diagramas sagitales en los que a un elemento del dominio le corresponda más de uno de la imagen, será una relación, pero no una función).</td><td>Para las funciones usuales con las que se trabaja en la Educación Secundaria, en que el dominio suele ser un subconjunto infinito de ℝ, estos diagramas solo nos permiten incluir un número finito de elementos tanto en dominio como en recorrido, lo cual puede resultar confuso para el alumno</td></tr>
<tr><td>Tabla de valores</td><td><table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>-2</td><td>5</td></tr><tr><td>-1</td><td>2</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr></table></td><td>Las tablas de valores nos permiten entender las funciones como transformaciones entre una entrada y una salida. Suelen ser utilizadas como paso intermedio de la representación algebraica a la gráfica, y es interesante usarlas cuando queremos examinar una parte de una función lo suficientemente regular, dado que nos permite observar, por ejemplo, los intervalos de crecimiento. Además, una buena parte de las calculadoras escolares las hacen automáticamente.</td><td>Presenta el mismo hándicap que los diagramas sagitales: solo permiten evaluar la función en un número finito de valores.
Por otro lado, por sí solas constituyen una fuente de información pobre acerca de la función, y necesita ser complementada con las representaciones algebraica y/o gráfica.</td></tr>
</table>

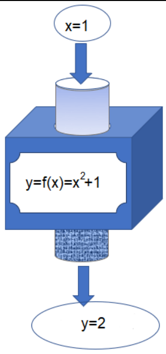
<table>
<tr><th>Representación</th><th>Ejemplo</th><th>Ventajas</th><th>Desventajas</th></tr>
<tr><td>Función como máquina</td><td>
</td><td>Este tipo de representación suele ser útil para presentar el concepto de función en un inicio, así como enfatizar la unicidad de la evaluación y los conceptos de dominio y recorrido.</td><td>Supone solamente un esbozo del concepto de función, y no aporta apenas ninguna información sobre una función concreta.</td></tr>
</table>

Tabla 1: Resumen de las principales representaciones de funciones, así como las ventajas y desventajas que presenta cada una de ellas.

Como ya hemos comentado anteriormente, en nuestro tema es fundamental, además del conocimiento de los diferentes sistemas de representación, el ser capaz de realizar transformaciones entre las mismas. Las más importantes son:

- **Paso de la representación algebraica a la expresión gráfica**. Esta es la más importante debido a que la transformación implica varios de los conocimientos básicos en estas edades: cálculo de límites, de cortes con los ejes, de extremos relativos y de intervalos de monotonía, derivación, evaluación de la función… Además, esta transformación suele ayudarse de un paso intermedio: el uso de las tablas de valores para guiar la representación. Debido por tanto a la gran cantidad de contenidos que involucra (más cuanta más exactitud se pretenda en la gráfica), este suele ser uno de los ejercicios más típicos en los libros de texto.
  Además, para realizar este tipo de conversiones podemos ayudarnos de procesadores geométricos con software interactivos, como puede ser GeoGebra (entre muchos otros).
- **Paso de enunciados, tablas de valores, funciones definidas por sus características, o gráficas a su correspondiente expresión algebraica**. Esta conversión entre representaciones está ligada a la modelización, y se puede realizar dejando al alumno libertad absoluta para que elija la familia de funciones que mejor se ajuste a los datos, o bien restringirse a una familia paramétrica ya dada de la que solamente deben hallar los parámetros para encontrar una función concreta.

El resto de las conversiones entre representaciones tienen menor importancia y se presentan de forma mucho más puntual.

5.3 Organización cognitiva

Para realizar una organización cognitiva de la unidad, nos vamos a centrar por un lado en conceptos y por otro en procedimientos:

- **Organización conceptual:**
  - Hechos:
    - Términos: función, transformación, relación, dependencia, representación, gráfica, modelización, …

- Notaciones: normalmente a las funciones las denotamos por $f(x)$ o $y = f(x)$ para dejar de manifiesto la relación de la función con la ordenada en las gráficas. Normalmente lo leemos como "f de x". También solemos adoptar la notación de
$$función : dominio \rightarrow recorrido$$
Existen además algunas funciones comunes con notación establecida como son las trigonométricas (sin, cos, tan, csc, sec, cot), las funciones hiperbólicas (sinh, cosh, tanh, csch, sech, coth), la exponencial (exp) o los logaritmos en base e o base 10 (ln, log).
Otra convención ampliamente utilizada es la de notar por f' a la función derivada de f, e ir añadiendo tildes para las derivadas sucesivas.
- Convenios: para los nombres de las funciones se suele usar la letra f (o bien g, h si trabajamos con más de una función). Para las variables, lo usual es elegir x, y, z o t. Por otro lado, en la representación de funciones usamos como eje X el horizontal y como eje Y el vertical, con direcciones positivas hacia la derecha y hacia arriba respectivamente. En el caso de representación de funciones en 3 dimensiones, también existe una orientación estándar para los ejes (Figura 2).

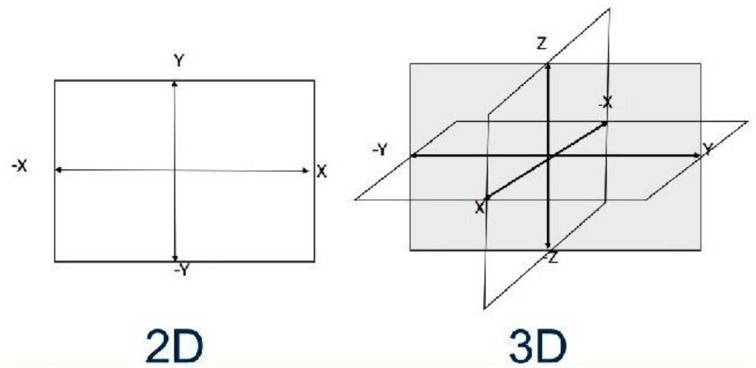


Figura 2: Orientación estándar para los ejes en 2 y 3 dimensiones.

- Resultados: citamos solo alguno de los más básicos:
- ✓ Una función tiene inversa si, y solo si, es biyectiva.
- ✓ Toda función derivable es continua.
- ✓ La composición de funciones es, en general, una operación no conmutativa.
- ✓ Teorema de Bolzano: Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en su dominio tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces para todo $c \in [f(a), f(b)]$ existe al menos un valor $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = c$.
- ✓ Teorema de Rolle: Si $\mathrm{f}: [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en su dominio y derivable en (a, b), entonces existe al menos un $\mathrm{c} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ tal que $\mathrm{f}'(\mathrm{c}) = \frac{\mathrm{f(b)-f(a)}}{\mathrm{b-a}}$.
- o Conceptos: función, variable, dominio, recorrido, imagen, preimagen, evaluación, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, continuidad, límite, derivación, integración, monotonía, función creciente, función decreciente, función constante, extremo, extremo absoluto, extremo relativo, máximo, mínimo, punto de inflexión, convexidad, concavidad, suma, diferencia, producto, cociente, composición, función inversa, periodicidad, simetría par, simetría impar, gráfica, coordenadas, abscisa, ordenada, función lineal, pendiente, ordenada en el origen, función cuadrática, orientación de las ramas, vértice, cortes con los ejes, función a trozos, asíntotas, …

- Estructura: los espacios de funciones con las operaciones de suma y producto por escalares tienen estructura de espacio vectorial; los espacios de polinomios con coeficientes enteros tienen estructura de anillo, y en particular, de dominio de factorización única, y podemos descomponerlos en elementos irreducibles. Las funciones se pueden clasificar en diferentes espacios según su grado de derivabilidad: espacio de funciones continuas, $\mathcal{C}$, o derivables hasta orden n, $\mathcal{C}^n$, y estos espacios vectoriales con sus productos escalares son espacios de Hilbert. Las funciones reales de variable real (las que se usan en la ESO) junto con la composición tienen estructura de monoide.

- **Organización procedimental:**
- Destrezas: en este grupo incluimos el uso de los algoritmos más básicos e inmediatos que los alumnos deben conocer. Entre ellos encontramos la evaluación de una función, el cálculo de dominios y recorridos de funciones básicas, los algoritmos elementales para operar con funciones (suma, diferencia, producto, cociente y composición), el cálculo de la función inversa, la simplificación de funciones, la extracción de propiedades a partir de la representación gráfica, la determinación de la continuidad o discontinuidades de funciones a trozos, la derivación, el cálculo de límites, …
- Razonamientos: con razonamiento nos referimos a un proceso más largo y complejo que las destrezas, y que requiere del uso de conocimientos previos y de toma de decisiones. Por ejemplo, la determinación del dominio máximo o imagen de una función (implica conocimiento de los dominios de funciones básicas, resolución de ecuaciones e inecuaciones, cálculo de extremos relativos y límites), el cálculo de máximos y mínimos de una función a partir de cálculo diferencial (usando para ello derivación, resolución de ecuaciones, evaluación de la segunda derivada para comprobar que los extremos sean efectivamente máximos o mínimos), el estudio completo de funciones para su representación gráfica (mediante cálculo de cortes con los ejes, puntos notables como el vértice de una parábola, extremos, monotonía, límites y asíntotas), …
- Estrategias: aquí metemos aquellos procesos más sofisticados que requieren de la movilización de competencias más complejas y no siguen un algoritmo concreto, sino que el estudiante debe desarrollar por su cuenta. Por ejemplo, tenemos la definición de funciones apropiadas para modelizar un problema real o el planteamiento de problemas que se pueden resolver mediante funciones.

5.4 Mapa conceptual

A partir de los puntos anteriores, podemos resumir la organización cognitiva de nuestra unidad a partir del siguiente mapa conceptual (Figura 3):

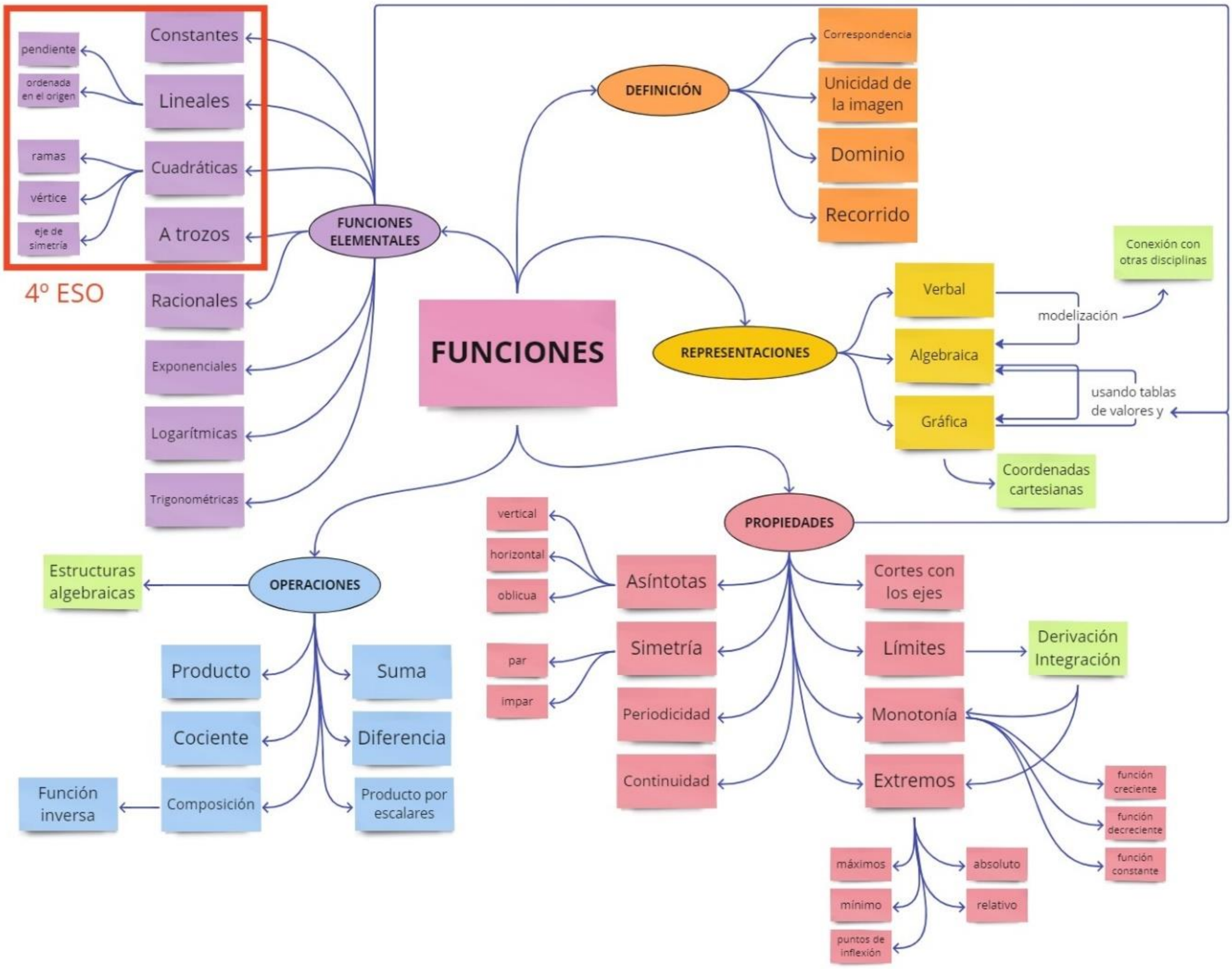


Figura 3: Mapa conceptual que recoge las relaciones entre los conceptos y procedimientos que construyen el tema de funciones.

6. Análisis del aprendizaje

Con base en el análisis de contenido realizado anteriormente, plantearemos a continuación el análisis del aprendizaje. En él partiremos de los requisitos previos de aprendizaje por partes de los alumnos. Además, propondremos una serie de objetivos didácticos que conseguir con nuestra unidad. Por otro lado, basándonos en la bibliografía, mencionaremos algunos errores comunes que comete el alumnado en relación con nuestra unidad, así como algunas oportunidades de aprendizaje que podemos explotar en el desarrollo de la unidad.

6.1 Conocimientos previos

En esta unidad didáctica, los conceptos relacionados con funciones se van a tratar desde el un nivel muy básico dada la falta de conocimientos previos por parte de los alumnos. Sin embargo, es necesario por su parte que tengan ciertos conocimientos básicos que usarán a lo largo de toda la unidad. Entre ellos incluimos:

- Coordenadas cartesianas. Conocer los ejes de abscisas y ordenadas es importante para poder ubicar más tarde puntos dados por pares coordenados y así representar una función.
- Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado. Será necesario resolver ecuaciones de este tipo para, por ejemplo, hallar los cortes con los ejes de las distintas funciones.

6.2 Objetivos didácticos

Los objetivos (O) planteados para esta unidad son los que se exponen a continuación en la Tabla 2. Cabe destacar que los dividiremos en cuatro secciones. Por un lado, se presentan aquellos objetivos generales que darán inicio al tema en cuestión; a continuación, aquellos objetivos que involucran el trabajo con la fórmula algebraica; por otro, aquellos objetivos más relacionados con la representación gráfica; y, por último, los objetivos referidos al cambio entre representaciones y la modelización con funciones.

6.3 Relación entre los objetivos didácticos y las competencias específicas

De acuerdo con la normativa curricular de la LOMLOE establecida por el Real Decreto 217/2022, existen una serie de competencias específicas (CE)[2] para cada asignatura que los alumnos deben desplegar en situaciones o problemas propios de la materia.

Como consecuencia, el profesional docente debe asegurarse de que los objetivos didácticos planteados están de acuerdo con las diferentes competencias específicas. Esto es precisamente lo que aparece recogido en la Tabla 3. Por un lado, tenemos en las filas un pequeño resumen de cada competencia específica, y en cada columna nuestros objetivos didácticos. En la tabla resultante, escribimos los apartados correspondientes a cada competencia específica que pretenden ser cubiertas con cada objetivo.

Como se puede observar en la Tabla 3, en vista de la cantidad de competencias específicas que cubre, el objetivo fundamental de la unidad es el O9, relacionado con la modelización y la resolución de problemas. Sin embargo, este objetivo está intrínsecamente relacionado con los anteriores, que aportan los conocimientos necesarios para poder alcanzar dicho objetivo.

[2] En lo que sigue, nos referiremos como CEx a la competencia específica número x, mientras que cuando escribamos CE$x.y$ estaremos haciendo referencia al criterio de evaluación y de la competencia específica x.

GENERALES	**O1. Distinguir qué es una función y qué no lo es:** Se intentará que el alumno conozca la condición que diferencia a una función de aquello que no lo es (unicidad de la imagen) y lo diferencie de la inyectividad (unicidad de la preimagen). Se incluye además la identificación de variable dependiente e independiente.
	O2. Hallar el dominio y el recorrido de funciones: A partir de la representación gráfica de una función, los alumnos deben ser capaces de escribir en forma de intervalo el de la misma, así como calcular el dominio de algunas funciones sencillas involucrando raíces o denominadores, además del de las funciones elementales.
EXPRESIÓN ALGEBRAICA	**O3. Reconocer la expresión de algunas funciones elementales, sus elementos y propiedades:** Entre las funciones elementales que se estudiarán a partir de la expresión algebraica se encuentran las constantes, las lineales (pendiente y ordenada en el origen), las cuadráticas (vértice, simetría, orientación de las ramas) y las funciones a trozos (continuidad).
	O4. Operar con funciones: Con este objetivo se pretende que el alumno conozca las operaciones básicas suma, diferencia y producto de funciones, producto de una función por un número real, cociente y composición de funciones (cuando sea posible)
GRÁFICAS Y TABLAS	**O5. Interpretar gráficas de funciones:** Entre las propiedades que se espera que los alumnos reconozcan se encuentran la continuidad, inyectividad y sobreyectividad, dominio, monotonía y extremos, existencia de asíntotas, periodicidad, … Además, se debe ser capaz de reconocer el tipo de función a partir de la gráfica. Por otra parte, el alumno alcanzará la capacidad de extraer estas propiedades y características de una función a partir de su expresión gráfica, así como la aptitud para de poner en contexto estas propiedades y extraer su significado en un contexto real.
CAMBIO DE REPRESENTACIONES	**O6. Representar funciones elementales a partir de su expresión algebraica:** A través del uso de algoritmos básicos, como los del cálculo de dominio, evaluación de funciones, o cálculo de elementos notables de funciones elementales, los alumnos deben ser capaces de pasar a forma gráfica algunas fórmulas sencillas.
	O7. Hallar la expresión algebraica de una función a partir de gráficas, tablas o enunciados: Es el objetivo opuesto al anterior. Restringiéndonos a una familia paramétrica de funciones (por ejemplo, las funciones lineales $f(x) = ax + b\ con\ \ a, b \in \mathbb{R}$) el alumno debe ser capaz de encontrar los parámetros adecuados para que la función responda a la gráfica, la tabla o el enunciado proporcionados.
	O8. Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados: este objetivo engloba tareas como decidir qué situaciones se corresponden con relaciones causales reales y cuáles con correlaciones eventuales, elegir la representación gráfica más apropiada la modelización (algebraica o gráfica), escoger entre las funciones básicas para el modelo más adecuado, resolver problemas derivados de la situación (planificación de la resolución, uso de estrategias y procedimientos, utilización del lenguaje apropiado, reformulación del problema, división en subproblemas, …)

Tabla 2: Lista de los objetivos didácticos planteados para la unidad sobre funciones.

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8
CE1. Resolver problemas		1.2	1.3		1.1 1.3	1.3	1.3	1.1 1.2
CE2. Validar soluciones						2.1	2.1	2.1 2.2
CE3. Comprobar conjeturas	3.1	3.3	3.1			3.3		
CE4. Diseñar algoritmos	4.1	4.2		4.2				4.1
CE5. Conexiones intramatemáticas						5.1	5.1	
CE6. Conexiones extramatemáticas	6.1				6.1			6.1 6.2
CE7. Representaciones						7.2	7.2	7.2
CE8. Comunicar					8.1			8.1 8.2
CE9. Gestionar emociones								9.1 9.2
CE10. Trabajo en equipo								10.1 10.2

Tabla 3: Conexiones entre las competencias específicas recogidas en la normativa y los objetivos didácticos planteados.

- **CE1.1** Reformular problemas matemáticos de forma verbal y gráfica, interpretando los datos, las relaciones entre ellos y las preguntas planteadas.
  - **O5:** En este caso, los datos se muestran de forma gráfica y el alumnado debe interpretarlos relacionando las cuestiones planteadas con las distintas propiedades que muestre la gráfica.
  - **O8**: En la modelización de situaciones va implícita una correcta comprensión y análisis tanto de los datos como de la situación que se nos plantea. Además, la correcta resolución de un problema contextualizado requiere una correcta interpretación de los datos que nos da el enunciado y cómo estos se relacionan entre sí, así como una profunda comprensión de las preguntas formuladas en el mismo.
- **CE1.2** Seleccionar herramientas y estrategias elaboradas valorando su eficacia e idoneidad en la resolución de problemas.
  - **O2**: El cálculo de dominios implica el uso de algoritmos básicos que deben adaptarse según el tipo de función estudiada.
  - **O8**: La finalidad de este criterio de evaluación es la resolución de problemas, que coincide con nuestro objetivo didáctico.
- **CE1.3** Obtener todas las posibles soluciones matemáticas de un problema activando los conocimientos y utilizando las herramientas tecnológicas necesarias.

  - **O3**: Los recursos tecnológicos proporcionan una herramienta idónea para la visualización de gráficas de familias funciones y así reconocer su pertenencia a diferentes familias.
  - **O5**: Al poder representar funciones tan fácilmente, se pueden interpretar tendencias y encontrar máximos y mínimos de funciones de forma gráfica.
  - **O6**: Los medios digitales se pueden usar para pasar de una representación algebraica a una gráfica casi de manera inmediata.
  - **O7**: El recíproco del anterior no es trivial, pero eso es, en realidad un punto a favor, porque requerirá el reconocimiento de en qué familia está la función representada para posteriormente ajustar los parámetros de una expresión algebraica que represente la misma relación.
- **CE2.1** Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema.
  - **O6, O7**: En el momento de cambiar de representación se pueden comprobar soluciones a distintos problemas; es decir, imaginemos que hemos obtenido analíticamente que nuestra función tiene límite b en un cierto punto, a la hora de representarla gráficamente podemos comprobar si es así o no.
  - **O8**: Una vez resuelto el problema se le propondrá al alumno comprobar si la solución, es realmente solución; esto es, por lo general, un cero de una función.
- **CE2.2** Seleccionar las soluciones óptimas de un problema valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable…).
  - **O8**: Una vez resuelta la componente matemática del problema, será necesario interpretar la solución en el contexto para llegar a la solución definitiva del problema.
- **CE3.1** Formular, comprobar e investigar conjeturas de forma guiada estudiando patrones, propiedades y relaciones.
  - **O1**: Podríamos reconocer si una relación es una función comprobando, de forma guiada, si esta cumple la definición.
  - **O3**: Reconocer patrones de una gráfica tales como crecimiento y decrecimiento, pendiente positiva o negativa, concavidad o convexidad y relacionarlas con las distintas familias y expresiones analíticas.
- **CE3.3** Emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y comprobación de conjeturas o problemas.
  - **O2**: La representación de gráficas en software puede ser útil para comprobar si los resultados obtenidos (por ejemplo, el cálculo de dominios) son coherentes con la representación gráfica obtenida.
  - **O6**: En el paso a representaciones gráficas es muy común el uso de software de representación como GeoGebra para la comprobación de soluciones.
- **CE4.1** Reconocer e investigar patrones, organizar datos y descomponer un problema en partes más simples facilitando su interpretación y su tratamiento computacional.
  - **O1**: Reconocer patrones en los datos nos dará pistas para saber qué variables dependen de otras.

  - **O8**: El reconocimiento de los patrones de datos es clave en la elección de modelos representativos de dichos datos. Además, se deben organizar los datos disponibles antes de resolver un problema e intentar descomponerlo en subproblemas de forma que su resolución sea más sencilla.
- **CE4.2** Modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz interpretando, modificando y creando algoritmos sencillos.
  - **O2**: El cálculo de dominios requiere de la creación de pequeños algoritmos como resultados de la combinación de los más básicos (dominio de funciones racionales, radicales y logarítmicas).
  - **O4**: Las operaciones con funciones también requieren del uso de algoritmos sencillos como resultado de la combinación de los más sencillos vistos en clase.
- **CE5.1** Deducir relaciones entre los conocimientos y experiencias matemáticas, formando un todo coherente.
  - **O6, O7**: El cambio entre distintas formas de representación implica un conocimiento de las relaciones entre los sentidos algebraico y geométrico.
- **CE6.1** Proponer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo y aplicando conexiones entre el mundo real y las matemáticas, y usando los procesos inherentes a la investigación científica y matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
  - **O1**: Cuando reconocemos la dependencia de dos variables estamos resaltando las matemáticas subyacentes a procesos reales.
  - **O5**: Como las gráficas establecen conexiones entre el mundo real y las matemáticas, la interpretación de estas deja patente el reconocimiento por parte del alumno de estas conexiones.
  - **O8:** Mediante este objetivo el alumno reconoce situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones y resueltas mediante distintos procedimientos, algoritmos o estrategias, conectando así el mundo real con las matemáticas.
- **CE6.2** Identificar y aplicar conexiones coherentes entre las matemáticas y otras materias realizando un análisis crítico.
  - **O8**: Estas conexiones se pueden explorar mediante distintos enunciados de problemas que estén relacionados con la física, la biología…
- **CE7.1** Representar matemáticamente la información más relevante de un problema, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos visualizando ideas y estructurando procesos matemáticos.
  - **O6**: Mediante este objetivo se pretende que el alumno represente las funciones tanto de forma analítica como de forma gráfica, visualizando así la función, incluso con herramientas digitales.
- **CE7.2** Seleccionar entre diferentes herramientas, incluidas las digitales, y formas de representación (pictórica, gráfica, verbal o simbólica) valorando su utilidad para compartir información.
  - **O6, O7**: Para poder elaborar diferentes representaciones y compararlas, es necesario conocerlas y saber pasar de una a otra

- **O8:** La modelización es, efectivamente, el paso a una representación matemática para resolver problemas.
- **CE8.1** Comunicar ideas, conclusiones, conjeturas y razonamientos matemáticos, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, con coherencia, claridad y terminología apropiada.
  - **O5**: Mediante la interpretación de gráficas se puede comprobar igualmente si el alumno expresa de forma adecuada las propiedades de esta tanto en el lenguaje verbal como en el matemático.
  - **O8**: A la hora de plantear y resolver un problema se puede comprobar si el alumno comunica de forma correcta tanto el planteamiento como la resolución de este con el lenguaje matemático.
- **CE8.2** Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana y en diversos contextos comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.
  - **O8**: Esta relación surge del uso en el lenguaje cotidiano de expresiones como "dependiendo de" o "en función de", que el alumno debe saber distinguir de funciones reales.
- **CE9.1** Identificar y gestionar las emociones propias y desarrollar el autoconcepto matemático generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.
  - **O8**: Los problemas constituyen la mayor fuente de retos matemáticos que los alumnos deben afrontar.
- **CE9.2** Mostrar una actitud positiva y perseverante al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas aceptando la crítica razonada.
  - **O8**: Trabajar en la resolución de problemas es necesario una constancia y espíritu crítico.
- **CE10.1** Colaborar activamente y construir relaciones trabajando con las matemáticas en equipos heterogéneos, respetando diferentes opiniones, comunicándose de manera efectiva, pensando de forma crítica y creativa, tomando decisiones y realizando juicios informados.
  - **O8**: Se puede evaluar este criterio mediante la resolución de problemas en grupo.
- **CE10.2** Gestionar el reparto de tareas en el trabajo en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, responsabilizándose del rol asignado y de la propia contribución al equipo..
  - **O8**: De nuevo se puede trabajar con la resolución de problemas.

6.4 Errores y dificultades

A continuación, y en relación con la lista de objetivos de aprendizaje que hemos fijado y justificado en la sección Objetivos didácticos, incluimos una clasificación de algunos de los errores (E) más comunes que pueden cometer los alumnos y las posibles dificultades (D) que van asociadas a los mismos.

Para realizar lo anterior, nos basaremos tanto en algunas referencias bibliográficas específicas que se centran en errores en las funciones, así como en mi experiencia personal en el centro de prácticas donde se contextualiza este trabajo.

O1. Distinguir qué es una función y qué no lo es

- **E1.1**: El alumno considera como función algo que no lo es.
    - **D1.1a**: Incapacidad de encontrar puntos con relaciones no unívocas.
    - **D1.1b**: Confusión entre los conceptos de ecuación y función.
- **E1.2**: El alumno considera que no es una función algo que sí lo es.
    - **D1.2**: Creencia de que solo es función aquello que se puede graficar, como se extrae de la Figura 4.

Ficha 1

Se dan las siguientes relaciones entre números reales; para cada una de ellas trace (si es posible) la gráfica cartesiana y establezca si la relación es una función:

A1) R1 es la relación tal que (para cualquier x∊R) R1(x)=2x

A2) R2 es la relación tal que (para cualquier x∊R) R2(x)=1.

A3) R3 es la relación tal que:

- si x real es racional, entonces R3 (x) = 0;
- si x real es irracional, entonces R3 (x) = 1;

A4) R4 es la relación tal que:

- si x real es racional, x = m/n, con m entero, n entero positivo, m/n irreducible, entonces: R4(x)= 1/n;
- si x real es irracional, entonces R4(x)=0 4

Resultados - Ficha A – Alumnos de 16-17 años

	Diseñan el gráfico cartesiano correcto	Respuesta: es una función	Respuesta: no es una función	Ninguna respuesta
A1	69 (92%)	71 (95%)	1 (1%)	3 (4%)
A2	61 (81%)	54 (72%)	19 (25%)	2 (3%)
A3	--	34 (46%)	31(41%)	10 (13%)
A4	--	21 (28%)	40 (53%)	14 (19%)

Figura 4: Actividad planteada por Bagni (2004) a alumnos de 4º de ESO y sus resultados. Como vemos, la mayoría no identifican las funciones R3 y R4 como funciones.

- **E1.3**: El alumno no identifica cuáles son las variables dependiente e independiente (Figura 5).
    - **D1.3**: Intercambio entre ambas variables.

Identifica las variables dependiente e independiente en la siguiente situación: "Cantidad de dinero recibida en una tienda de telas por la venta de lino, si cada metro cuesta $25".

Variables: ancho de la tela
Variable dependiente: cada metro
Variable independiente: cantidad de tela vendida.

Variables: 1m = 25
Variable dependiente: x
Variable independiente: y

Figura 5: Respuestas errónea de dos alumnos de Bachillerato en un ejercicio sobre variables dependientes e independientes, recogidas por López y Sosa (2008).

O2. Hallar el dominio y el recorrido de funciones

- **E2.1**: Al calcular dominios de funciones, el alumno involucra términos que no debe en los algoritmos básicos. Por ejemplo, para calcular el dominio de $f(x) = \sqrt{x} + 2$, resuelve la inecuación $x + 2 \geq 0$.
    - **D2.1**: No identificación de las funciones como compuestas por funciones básicas y operaciones de estas.
- **E2.2**: El alumno no resuelve correctamente ecuaciones o inecuaciones.
    - **D2.2**: Falta de conocimientos previos de los cursos anteriores o el actual.
- **E2.3**: El alumno no calcula los extremos de la función para hallar la imagen.
    - **D2.3**: Convencimiento de que el recorrido es el intervalo entre las imágenes de los extremos del dominio.

O3. Reconocer la expresión de algunas funciones elementales, sus elementos y propiedades

- **E3.1**: El alumno clasifica erróneamente una función en una familia que no le corresponde. Por ejemplo, una lineal con un coeficiente fraccionario con una racional.
    - **D3.1**: Asociación de las funciones racionales con aquellas que tienen un denominador, aunque este sea un número y no una variable.

O4. Operar con funciones

- **E4.1**: El alumno comete errores al efectuar operaciones básicas en el conjunto de los números reales (sumas y multiplicaciones erradas).
    - **D4.1**: Falta de conocimientos previos de los cursos anteriores o el actual.
- **E4.2:** El alumno intercambia el orden en la composición de funciones.
    - **D4.2:** Desconocimiento de la existencia de operaciones no conmutativas donde el orden resulta vital.

O5. Interpretar gráficas de funciones

- **E5.1**: El alumno confunde intervalos de crecimiento y decrecimiento (como podemos ver en la Figura 6).
    - **D5.1**: Lectura errónea de la gráfica de la función; por ejemplo, observándola de derecha a izquierda en lugar de izquierda a derecha.

Identifique en la siguiente gráfica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

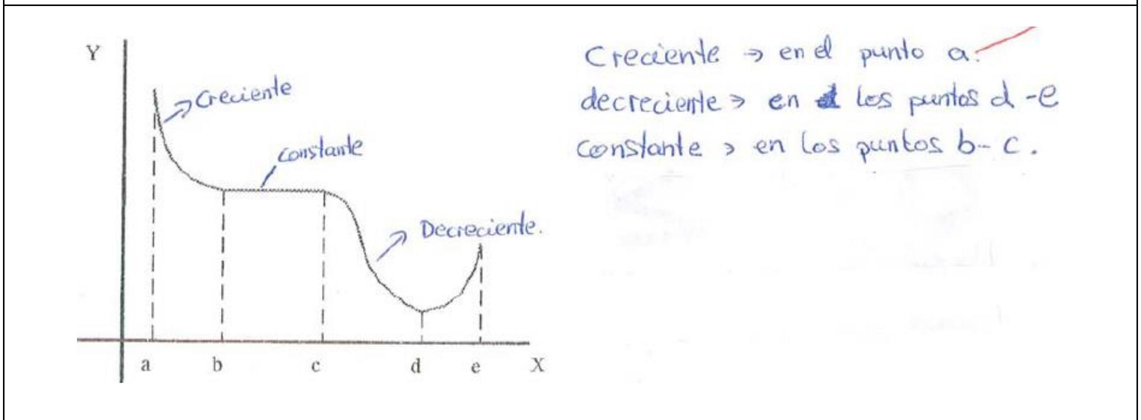
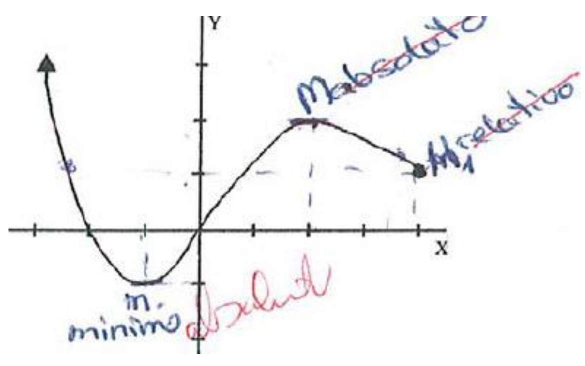


Figura 6: Solución errónea de un alumno de 4º de ESO a un problema sobre monotonía, estudiado por Ortega y Pecharromán (2014).

- **E5.2:** El alumno identifica de forma errónea máximos y mínimos tanto relativos como absolutos (Figura 7).
    - **D5.2:** Malinterpretación de los máximos como los puntos en los que la función está por encima del eje de las X, y es en esta área donde debe encontrar forzosamente tanto un máximo relativo como absoluto.

<table>
<tr><td colspan="2">Identifique en la siguiente gráfica los máximos y mínimos relativos y absolutos:</td></tr>
<tr><td>
</td><td>P: A ver el cuatro, el de los extremos, ¿por qué al punto (4,1) …, que es éste, ¿lo ves?,… le llamas máximo?, ¿por qué te parece que es un máximo?

A2: Porque está arriba del eje de las “X”, ¿no?, sobre el eje que está más… Claro, yo me guie por esto, dije, anda, de aquí para arriba serán los máximos, y habrá máximo absoluto y máximo relativo, y de aquí para abajo, habrá los mínimos, ¿sabes?, por eso.</td></tr>
</table>

Figura 7: Solución errónea de un alumno de 4º de ESO a un problema sobre extremos, incluido en el estudio de Ortega y Pecharromán (2014). En este caso se incluye también la transcripción del razonamiento del alumno al concluir el ejercicio y preguntarle por el mismo.

- **E5.3**: El alumno asigna monotonía a puntos y extremos a intervalos (Figura 6).
    - **D5.3**: Problemas para distinguir propiedades globales y locales.

O6. Representar funciones elementales a partir de su expresión algebraica

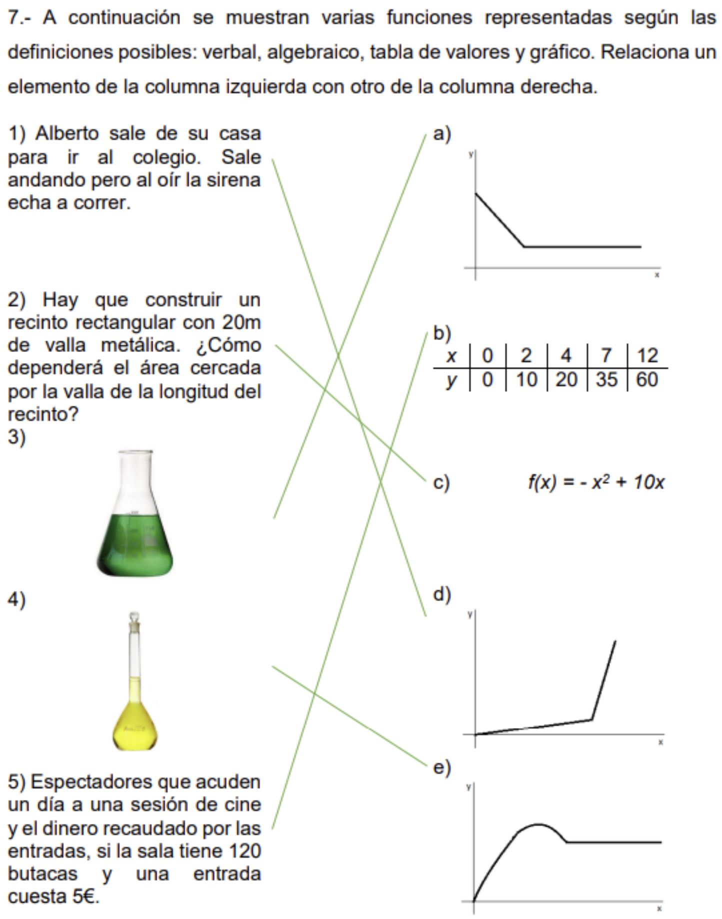
- **E6.1**: Al dar expresiones de la forma $y = f(x)$, el alumno no conoce qué par ordenado pertenece al gráfico funcional, si (x, y) o (y, x).
    - **D6.1**: Desconocimiento de la equivalencia que se establece en el sistema de representación algebraico entre las notaciones y y $f(x)$ (este error se discute ampliamente en el artículo de Alpízar y Fernández (2018)).
- **E6.2**: Ubicación incorrecta de pares ordenados en el plano cartesiano al trazar la representación gráfica de la función.
    - **D6.2**: Falta de conocimientos previos sobre el funcionamiento de las coordenadas cartesianas.

O7. Hallar la expresión algebraica de una función a partir de gráficas, tablas o enunciados

- **E7.1**: El alumno no identifica los parámetros como nuevas incógnitas del problema.
    - **D7.1**: Confusión entre los términos variable, incógnita y parámetro.
- **E7.2:** El alumno no resuelve correctamente sistemas de ecuaciones.
    - **D7.2**: Falta de conocimientos previos de los cursos anteriores o el actual.

O8. Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados

- **E8.1**: Dado un problema definido en forma verbal, el alumno determina una expresión algebraica que modele el mismo, pero extrae conclusiones erróneas con base en él.
    - **D8.1**: Interpretación incorrecta matemática del modelo.
- **E8.2**: El alumno no es capaz de relacionar el problema con la materia de funciones (Figura 8).
    - **D8.2**: Desconexión entre la realidad del alumno y sus conocimientos matemáticos.
- **E8.3**: El alumno no saca las conclusiones correctas del problema contextualizado.
    - **D6.3**: Extracción de conclusiones erróneas del problema.



		Grupo A			Grupo B		
		% Aciertos	% Fallos	% NS/NC	% Aciertos	% Fallos	% NS/NC
Pregunta 7	1	94,7	5,3	-	94,4	5,6	-
	2	78,9	21,1	-	94,4	5,6	-
	3	52,6	47,4	-	66,7	33,3	-
	4	57,9	42,1	-	72,2	27,8	-
	5	78,9	21,1	-	94,4	5,6	-

Figura 8: Porcentaje de aciertos y errores en una actividad sobre modelización con funciones planteada a dos grupos de alumnos de 4º de ESO por González (2015).

6.5 Oportunidades de aprendizaje

La unidad de funciones es una unidad muy completa, versátil y cercana al alumno. Por ello ofrece numerosas posibilidades para que los alumnos adquieran nuevos conocimientos, habilidades y competencias. Además, las características del tema lo hacen susceptible de usar contextos o recursos variados y motivadores, que permitan mantener la atención y la participación de los estudiantes.

Citamos a continuación algunas de estas oportunidades de aprendizaje (OA), dividiéndolas en cuatro grupos principales. Además, dichas oportunidades enlazan también con algunas competencias específicas, que también especificamos.

A) Relación con otros contenidos

- **OA1:** Conexión entre las funciones y los polinomios, un tema que ya han visto en unidades previas (CE5)
- **OA2:** Conexión entre las funciones y las ecuaciones, un tema que ya han visto en unidades previas (CE5)
- **OA3:** Conexión con la Física. Las funciones cuadráticas modelan la caída libre, el tiro vertical y los lanzamientos parabólicos (Figura 9):

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

En general, todo movimiento uniformemente acelerado está descrito por una función cuadrática (CE6)

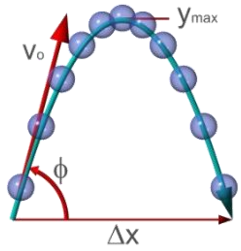


Figura 9

- **OA4:** Conexión con la Economía. Las curvas de oferta y demanda (Figura 10) pueden ser modelizadas por funciones más o menos sencillas (CE6)

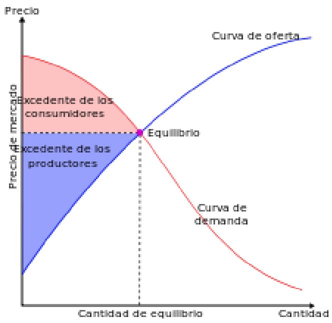


Figura 10

B) Contextos reales

- **OA5:** Encontrar formas de funciones en la arquitectura, arte o naturaleza. Por ejemplo, las parábolas están presentes en muchas construcciones como, por ejemplo, puentes (Figura 11) (CE6, CE7)

Figura 11

- **OA6:** Interpretación de gráficas en Matemática Financiera para optimizar recursos. Si conocemos un modelo que nos diga el número de clientes medio de una tienda en función del tiempo (Figura 12), podremos planificar mejor los horarios de los trabajadores. (CE7).

Figura 12

- **OA7:** Explicación de la periodicidad de las funciones a partir del historial de búsquedas de eventos periódicos. El número de búsquedas de la canción "*All I want for Christmas is you*" (Figura 13) se asemeja bastante a una función periódica con periodo de un año (CE4).

Figura 13

- **OA8:** Trabajo de funciones a través de ejemplos del entorno cercano. Por ejemplo, la tarea "El río" que propondremos en el Análisis de la enseñanza se plantea para que los alumnos investiguen acerca de un río próximo a la localidad (CE1).

C) Recursos o tecnología

- **OA9**: Uso de software de representación gráfica como GeoGebra (Figura 14) o Desmos para visualización de funciones o de sus movimientos (CE7).

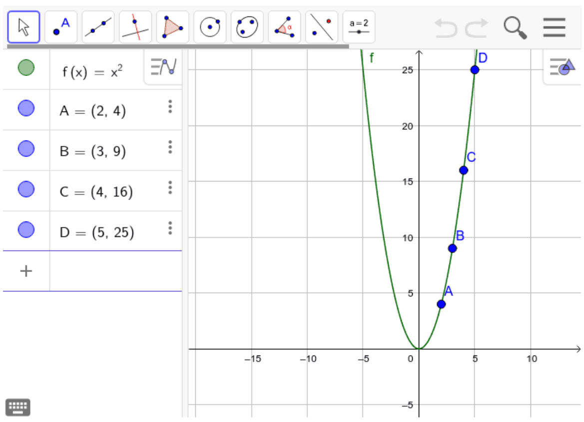


Figura 14

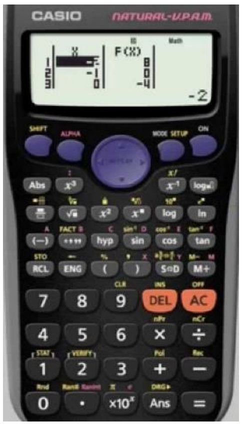


Figura 15

• **OA10:** Creación de tablas de valores para funciones usando calculadoras. Muchas de las calculadoras actuales tienen modos de construcción automática de tablas de valores dados una función y los puntos de evaluación (Figura 15) (CE7).

D) Libros (de texto u otros), artículos, internet

- **OA11:** Los libros de divulgación matemática que incluyan contenidos sobre funciones, aunque no sean específicos de las mismas, permiten a los alumnos acceder a contenidos complementarios o de ampliación, y desarrollar su interés por las Matemáticas (CE6). Por ejemplo, entre estos libros podemos incluir:
  - "Los Simpson y las matemáticas" de Simon Singh.
  - "Historia de las matemáticas" de Ian Stewart.
  - "El diablo de los números" de Hans Magnus Enzensberger.
- **OA12:** Recursos abiertos disponibles en la web, como el póster Matemápolis puede servirnos para introducir conceptos nuevos, incluyendo algunos relacionados con funciones.

7. Análisis de la enseñanza

El objetivo a continuación es especificar una programación para la unidad didáctica tratada, realizar un pequeño esbozo de cada una de las sesiones que la componen, y proponer tareas con base en el análisis de contenido anterior para que los alumnos consigan alcanzar los objetivos que también hemos formulado previamente.

7.1 Secuenciación

Esta unidad se dividirá en 12 sesiones, de entre 50 y 55 minutos de duración, que se recogen en la Tabla 4, y se desarrollan a continuación. Dicha tabla contiene además un pequeño resumen con los objetivos, competencias y contenidos que se tratan en cada una de las sesiones.

Sesiones	Competencias	Objetivos	Contenidos
S1. Funciones y conceptos básicos. Representación gráfica	O1, O3	CE1, CE3, CE5, CE6, CE7, CE8, CE10	Definición, conceptos básicos y representación gráfica.
S2. Propiedades de funciones I	O1, O3	O1, O3	Dominio, imagen, continuidad, discontinuidad.
S3. Propiedades de funciones II	O1, O2, O3	O1, O2, O3	Cortes con los ejes, monotonía de una función (intervalos de crecimiento y decrecimiento) y extremos.
S4. Expresión algebraica de una función	O1, O2, O3, O5	CE1, CE3, CE6, CE7	Tabla de valores, variable dependiente, variable independiente, expresión algebraica, representación de una función.
S5. Operaciones con funciones	O2, O4, O5, O8	CE1, CE2, CE6, CE7	Suma, diferencia, producto por escalares, producto y cociente de funciones
S6. Funciones lineales I	O1, O2, O3, O4, O5	CE1, CE3, CE5, CE6, CE7	Funciones lineales, pendiente, variación de la gráfica con respecto al parámetro.
S7. Funciones lineales II	O1, O2, O3, O4, O5	CE1, CE3, CE5, CE6, CE7	Funciones lineales, pendiente, variación de la gráfica con respecto al parámetro.
S8. Funciones cuadráticas I	O1, O2, O3, O4, O5	CE1, CE3, CE6, CE7	Relaciones cuadráticas, vértice, corte con los ejes, variación de la gráfica respecto a los parámetros.
S9. Funciones cuadráticas II	O1, O2, O3, O4, O5	CE1, CE3, CE6, CE7	Relaciones cuadráticas, vértice, corte con los ejes, variación de la gráfica respecto a los parámetros.
S10. Funciones a trozos	O1, O2, O3, O4, O5	CE1, CE2, CE6, CE7, CE8, CE10	Funciones a trozos, continuidad, funciones constantes, funciones lineales, funciones cuadráticas
S11. Modelización	O3, O4, O5, O6	CE1, CE3, CE6, CE7, CE8, CE9, CE10	Modelización de problemas, comprobación de hipótesis, dependencia de funciones con sus parámetros, continuidad
S12. Evaluación			

Tabla 4: Resumen de las distintas sesiones que constituyen la secuencia de la unidad didáctica en el aula, así como los objetivos, competencias y contenidos que se tratan en cada una de las sesiones.

En la Tabla 4 no hemos incluido una columna específica para los saberes básicos porque en general el saber básico que está presente en todas las sesiones es el relacionado con el sentido algebraico. En especial, su rama relacionada con "Relaciones y funciones", como veíamos en la Figura 1. También están incluidas "Modelo matemático", "Variable" y "Igualdad y desigualdad".

Además, de manera más tangencial se incluyen el sentido socioafectivo (en todas aquellas tareas donde sea necesario el trabajo en equipo o la toma de decisiones) y el sentido estocástico, donde se incluye la organización de la información de algunos de los problemas.

A continuación, veremos una breve programación de cada una de las sesiones con las correspondientes tareas (24 en total). De ellas, realizaremos un análisis de solamente las 10 más interesantes del punto de vista didáctico. Esto lo haremos en el Anexo A.

Antes de comenzar, cabe destacar que la mayoría de las tareas que aparecen a continuación provienen directamente, o están inspiradas, en Alonso y Soguero (2015) y Alcaide et al (2021). Este último es el libro de texto sobre el que trabajaban los alumnos la asignatura en general.

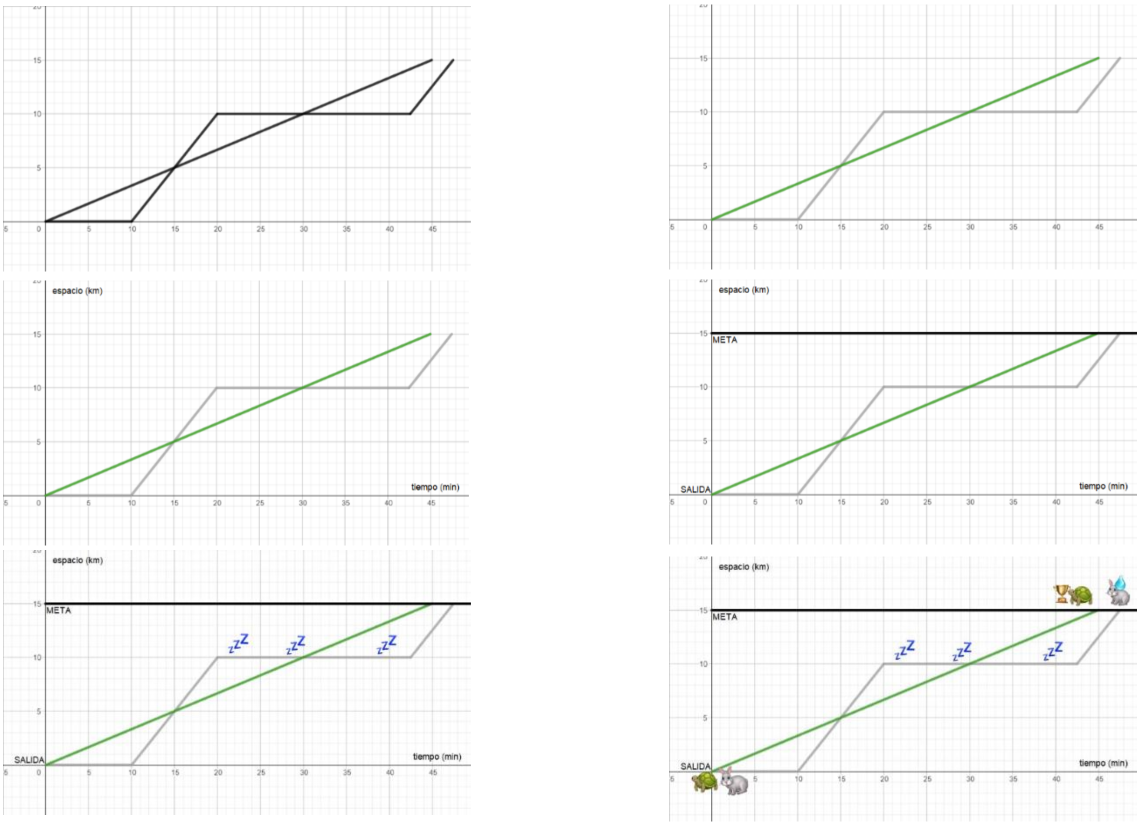
Además, la temporización que establecemos a continuación es meramente orientativa, y debe considerarse flexible para adaptarse al seguimiento de los alumnos de cada una de las sesiones.

SESIÓN 1: Funciones y conceptos básicos. Representación gráfica

Funciones y conceptos básicos. Representación gráfica	
Objetivos: O1, O5, O8	
Competencias: CE1, CE3, CE5, CE6, CE7, CE8, CE10	
Contenidos: Definición de funciones (unicidad de la imagen), conceptos básicos (variable dependiente e independiente) y representación gráfica.	
Desarrollo: A través de la tarea 1.1, se desarrolla una introducción colectiva a las funciones, donde se reflexiona sobre los conceptos de función, variable dependiente e independiente. A continuación, se da a forma de clase magistral una definición un poco más rigurosa de función, distinguiendo con ejemplos aquello que lo es de aquello que no. Para finalizar, se realiza por parejas la tarea 1.2, que es similar a la anterior, para asimilar los conceptos.	
Tarea 1.1: La liebre y la tortuga	25 min
Tarea 1.2: Emisiones mundiales de CO2	20 min

TAREA 1.1: La liebre y la tortuga

Profesor: A los alumnos se les dice que se les va a presentar una serie de 6 gráficas de un par de funciones que se corresponden con un conocido cuento. Cada gráfica se muestra durante unos 15 s. Las gráficas van aumentando en información contenida, y cada vez que alguien conozca la respuesta, debe levantar la mano hasta que acabe la secuencia de imágenes o toda la clase tenga la mano levantada. Entonces se pregunta a una de las primeras personas en levantar la mano que explique al resto de la clase cómo dedujo que se trataba del cuento de la liebre y la tortuga.



Se propone una pequeña discusión en grupo acerca de los inconvenientes que encontramos en cada una de las primeras gráficas (gráficas que no se distinguen o falta de etiquetas en los ejes) y cómo solventarlas. Así se presentan los conceptos de función y de variable dependiente e independiente.

A continuación, se entregan las siguientes actividades a resolver por parejas.

a) ¿Cuánto tiempo ha durado la carrera? ¿Y cuál era su longitud?

b) ¿Cuánto ha tardado la tortuga en completar la carrera?

c) ¿En qué tiempo o tiempos se encontraban la liebre y la tortuga en el mismo lugar? ¿A qué distancia de la salida estaban dichos lugares?

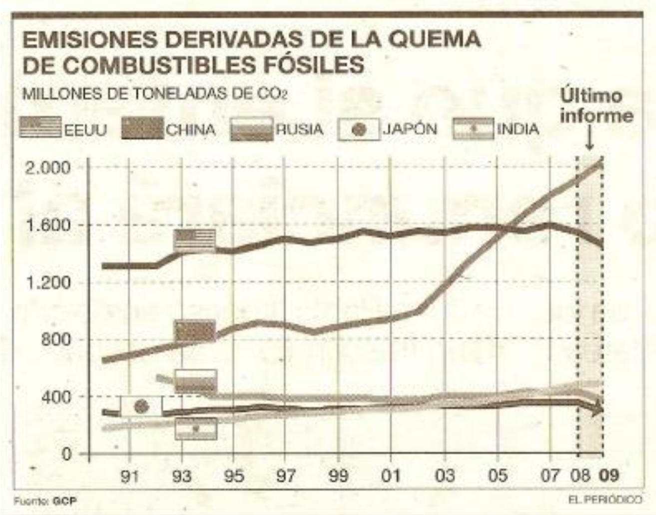
d) ¿Cuánta distancia de ventaja le ha dejado la liebre a la tortuga?

e) ¿Cuánto ha durado la siesta de la liebre?

f) ¿Cuál de los dos participantes ha realizado la carrera de forma más estable? ¿Por qué? Discute con tu compañero qué significa "estable" en esta situación.

g) ¿A qué velocidad ha mantenido la tortuga durante la carrera? Busca información sobre la velocidad de las tortugas y discute con tu compañero si la situación que se muestra en las gráficas es realista o no. Recuerda que $velocidad = \frac{distancia\ recorrida}{tiempo\ empleado}$

TAREA 1.2: Emisiones mundiales de CO_2



El día 23 de noviembre de 2010, El Periódico de Aragón publicó una noticia, bajo el titular de «China y la India disparan otra vez las emisiones mundiales de CO_2», en la que se hacía un análisis de las emisiones de este gas invernadero en distintos países. Para apoyar dicho análisis, la noticia incorporaba la gráfica que se reproduce en la página siguiente.
En esta gráfica nos muestran la evolución, a lo largo de los años, de las emisiones de CO_2 a la atmósfera. Cada una de las líneas, en diferentes tonos de gris, corresponde a un país diferente. Al presentarlas juntas, en los mismos ejes, nos aseguramos de que la escala usada en ellos es la misma para todos los casos. Esto es importante porque nos permite comparar los datos de los diferentes países.
Observa la gráfica y veamos qué información nos ofrece.
a) ¿Qué se representa en el eje de abscisas y en qué unidades? ¿Y en el de ordenadas?
b) ¿La escala empleada es la misma a lo largo de todo el eje de abscisas? ¿En qué parte no es correcta la proporción entre la longitud del eje y el tiempo? ¿Ocurre lo mismo con el eje de ordenadas?
c) ¿Cuál es el primer año en el que se tienen datos de los cinco países?
d) ¿En qué año la India iguala a Japón en emisiones? ¿Cuántas toneladas emiten en esa fecha?
e) A partir de 2002, China aumenta espectacularmente las emisiones, aumento que se mantiene hasta el último año documentado (2009). ¿Cuántas toneladas de CO_2 supone este aumento? ¿A lo largo de cuántos años? (Expresa las cantidades grandes en notación científica).
f) ¿Cuándo se igualan las emisiones de China y las de Estados Unidos?
g) Según se indicaba en el artículo del que procede la gráfica, entre los años 2008 y 2009 se redujeron las emisiones debido a la crisis económica mundial. ¿Para qué países es cierto?
h) Si sumamos las toneladas de CO_2 emitidas en 2001 por la India, Japón y Rusia en su conjunto, ¿superan a las emisiones de China? ¿Y a las de Estados Unidos?
i) Discute con tus compañeros la importancia de que estos dos países suscriban acuerdos internacionales como el de Kyoto. Para conocer mejor el tema puedes consultar la web de la Secretaría de la Convención Marco de las Naciones Unidas sobre el Cambio Climático.

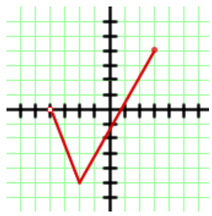
SESIÓN 2: Propiedades de funciones (I)

Propiedades de funciones (I)	
Objetivos: O2, O5	
Competencias: CE3, CE7, CE8, CE10	
Contenidos: Dominio, recorrido o imagen, continuidad, discontinuidades y clasificación (evitable, inevitable, de salto finito, de salto infinito).	
Desarrollo: Presentación en forma de clase magistral sobre los conceptos de dominio y recorrido de la función. Como ejemplos, podemos trabajar con las gráficas utilizadas en la tarea 1.1 y la tarea 1.2 y analizar cuáles serían los dominios y recorridos de cada una de las funciones representadas. Seguidamente, para dar un amplio abanico de ejemplos a los alumnos de cómo interpretar los dominios de las gráficas, se realizará la tarea 2.1 consistente en un Kahoot donde los alumnos deben averiguar los dominios de 10 funciones. A continuación, se realiza una discusión grupal sobre la intuición de continuidad y discontinuidad en cada una de las funciones analizadas en el Kahoot. Tras llegar a una definición de continuidad, se explicará en forma de clase magistral los distintos tipos de discontinuidades y se procederá a la realización de la tarea 2.2 (discusión de la continuidad o tipos de discontinuidad de las funciones trabajadas en la tarea anterior).	
Tarea 2.1: Kahoot sobre dominios	15 min
Tarea 2.2: Estudio de la continuidad	15 min

TAREA 2.1: Kahoot sobre dominios y recorridos

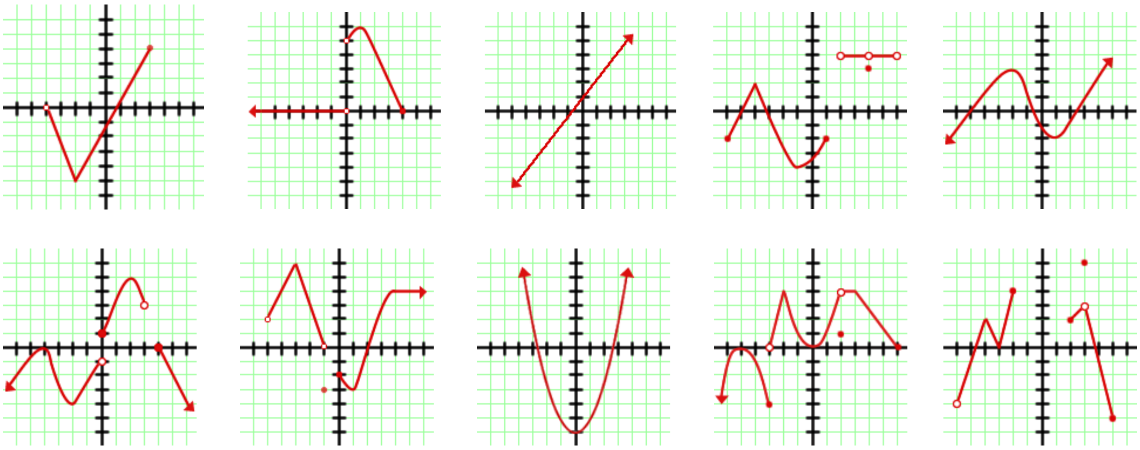
Profesor: En la pizarra digital disponible se proyecta un Kahoot con 10 preguntas sobre el dominio de diferentes funciones dadas por sus gráficas. Los alumnos deben utilizar sus dispositivos móviles (si no hay para todos se disponen en parejas) para contestar a las preguntas planteadas (en todos los casos se presenta una función de forma gráfica y se dan a elegir tres posibles dominios para la misma).
Un ejemplo de pregunta es el siguiente (todas tienen el mismo formato):

¿Cuál es el dominio de la siguiente función?
a) $[-4,3]$
b) $[-5,4]$
c) $(-4,3]$



TAREA 2.2: Estudio de la continuidad

Justifica si las siguientes funciones son continuas o discontinuas. En este último caso, clasifica las diferentes discontinuidades.

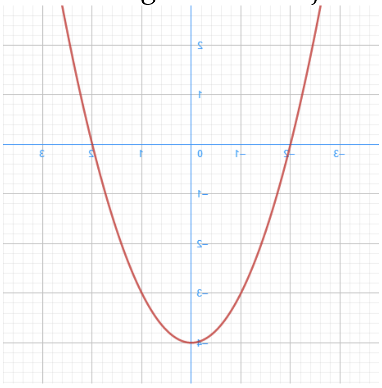


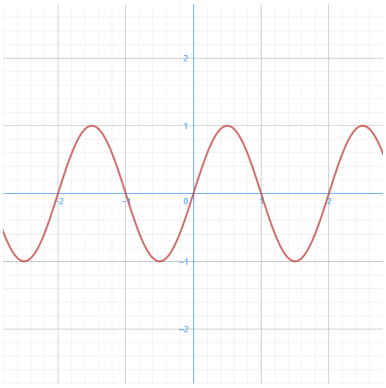
SESIÓN 3: Propiedades de funciones (II)

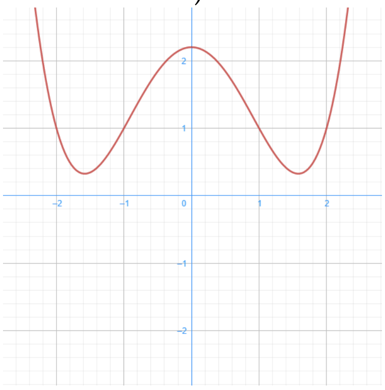
Propiedades de funciones (II)	
Objetivos: O1, O3, O5	
Competencias: CE1, CE3, CE7	
Contenidos: Cortes con los ejes de una función, monotonía de una función (intervalos de crecimiento y decrecimiento) y extremos de una función (máximos y mínimos).	
Desarrollo: Al principio de la sesión se explicarán los conceptos de cortes con los ejes a partir de funciones continuas de la sesión anterior. Seguidamente, se realizará la tarea 3.1. A continuación con los mismos ejemplos se explicará los intervalos de crecimiento y decrecimientos de una función al mismo tiempo que los máximos y mínimos y se realizará la tarea 3.2. La sesión terminará con la tarea 3.3 que permitirá afianzar los conceptos aprendidos de esta sesión y la anterior.	
Tarea 3.1: Cortes con los ejes	5 min
Tarea 3.2: Monotonía y extremos	10 min
Tarea 3.3: Estudio completo de una función	10 min

<u>Tarea 3.1: Cortes con los ejes</u>

Indica los cortes con los ejes de las siguientes funciones. Recuerda que la función puede no cortar a alguno de los ejes.

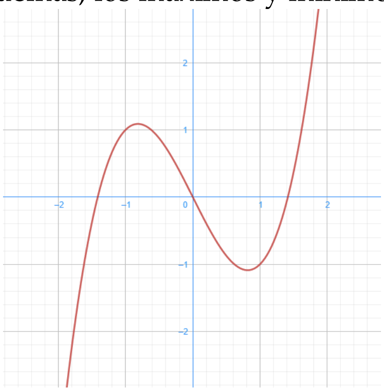
a) 

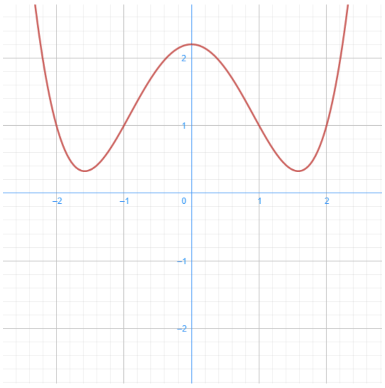
b) 

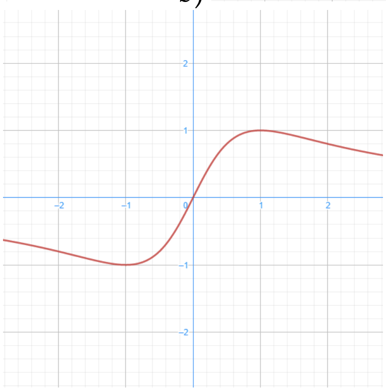
c) 

<u>Tarea 3.2: Monotonía y extremos</u>

Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones. Además, los máximos y mínimos, indicando si son absolutos o relativos.

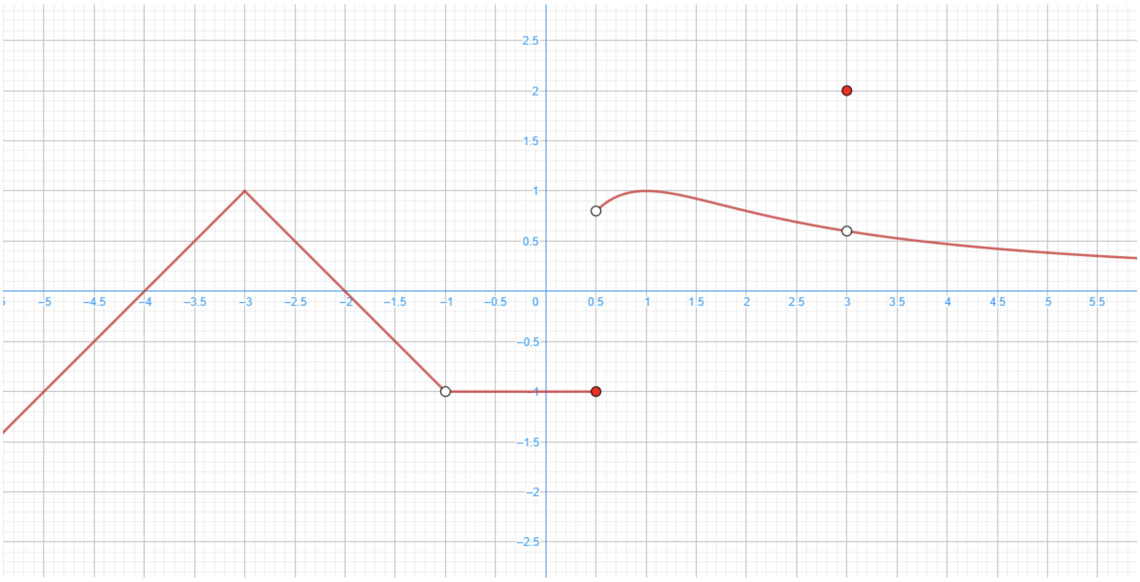
a) 

b) 

c) 

Tarea 3.3: Estudio completo de una función

Cuando hablamos de hacer el estudio completo de una función, nos referimos a indicar todos sus elementos: dominio, recorrido, discontinuidades con su clasificación, cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y extremos con su clasificación. Haz entonces un estudio completo de la siguiente función.



SESIÓN 4: Expresión algebraica de una función

Expresión algebraica de una función	
Objetivos: O1, O3, O5, O6, O7	
Competencias: CE1, CE3, CE6, CE7	
Contenidos: tabla de valores, variable dependiente, variable independiente, expresión algebraica, representación de una función	
Desarrollo: Empezaremos la sesión con un ejemplo de relación entre las variables dependiente e independiente a través de una tabla de valores. Se plantea una pregunta para un valor de la tabla muy alta, a partir de lo cual se deducirá en grupo la idoneidad de disponer de una fórmula que nos relaciones ambas variables. Esto nos permitirá introducir la expresión algebraica de las funciones. Para afianzar los conceptos, se propondrán las tareas 4.1, 4.2 y 4.3.	
Tarea 4.1: Relacionar expresiones algebraicas	5 min
Tarea 4.2: Construir la expresión algebraica	10 min
Tarea 4.3: La factura de la energía	25 min

Tarea 4.1: Relacionar expresiones algebraicas

Relaciona las tablas de valores con la función a la que corresponden.

a)

x	0	1	2
y	0	1	2

b)

x	0	1	2
y	0	1	4

c)

x	0	1	3
y	0	1	9

i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

ii) $g(x) = x$

iii) $h(x) = x^2$

Tarea 4.2: Construir la expresión algebraica

Analiza las siguientes tablas de valores y escribe la fórmula correspondiente. Luego traza la gráfica de cada una.

a)

x	1	2	5	10	25
y	800	1600	4000	8000	20000

b)

x	1600	2000	2400	3000	4000
y	30	24	20	16	12

c)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Tarea 4.3: La factura de la energía

Potencia contratada	4,4KW x 1,6956 /KW mes	7,46
Energía consumida	315KWh x 0,11776 /KWh	37,09
TOTAL ENERGÍA		44,55

Este es el extracto de la factura del gasto de energía eléctrica de una vivienda. No se tienen en cuenta impuestos ni otros gastos que aparecen en las facturas. Sólo vamos a fijarnos en los consumos y en el precio que se paga por ellos.

Se observa que hay un gasto fijo al mes, que sólo depende de la potencia contratada, y luego está lo que se paga por la energía consumida.

Así, en el caso de la factura que tenemos podemos observar que:

$$Total\ energía = 7{,}46 + 315 \cdot 0{,}11776$$

Tanto 7,46 como 0,11776 son cantidades fijas, por lo que el total a pagar (f(x)) variará en función de los KWh consumidos (x). Es decir, la expresión algebraica que representa esta situación es:

$$y = 7{,}46 + 0{,}11776x$$

a) Completa esta tabla en la que se muestran los valores de y (dinero que hay que pagar) correspondientes a diferentes valores de x (KWh consumidos en el mes):
b) Sobre unos ejes dibuja la representación gráfica. No olvides señalar los valores en cada eje.
c) ¿Qué tipo de gráfica has obtenido? ¿Es creciente o decreciente? ¿Cuál es la ordenada en el origen?
d) Elige dos puntos de los que has representado. Divide lo que ha variado la y, al pasar del primero al segundo, entre lo que ha variado la x. Anota el resultado y repite la operación con otro par de puntos de la gráfica. ¿Te sale lo mismo? ¿Crees que es casual? ¿Tiene algo que ver con la expresión algebraica de la que partíamos? Prueba con una tercera pareja de puntos. Comprobarás que sigue saliendo lo mismo. A esta cantidad se le llama pendiente de la recta.
e) Si la compañía mantuviese el precio por KWh pero el gasto fijo por la potencia contratada se cambiara a 8,45€/mes, ¿cómo sería la nueva gráfica obtenida?
f) Se recibe la siguiente información de otra compañía:

OFERTA	
Precio del KW/mes	1,81034
Precio del Kwh	0,115488

¿Sabrías darle algún consejo al dueño de la casa sobre la necesidad o no de cambiar de compañía? Para ello, representa la nueva función del gasto sobre los mismos ejes que la anterior. ¿Se cortan ambas rectas? ¿En qué punto? ¿Qué representa ese punto? A partir de estas preguntas, saca conclusiones.

SESIÓN 5: Operaciones con funciones

Operaciones con funciones	
Objetivos: O2, O4, O5, O8	
Competencias: CE1, CE2, CE6, CE7	
Contenidos: Función suma, resta, producto por escalares, producto y cociente, dominios	
Desarrollo: Comenzaremos la sesión con una explicación teórica acerca de las distintas operaciones que se pueden llevar a cabo con funciones, haciendo especial hincapié en los dominios de cada una de las funciones resultantes. Seguidamente se dejará tiempo para que los alumnos trabajen en clase las tareas 5.1, 5.2 y 5.3, donde empezarán a trabajar los algoritmos de operaciones con funciones, de forma tanto algebraica como gráfica	
Tarea 5.1: Suma y producto de funciones	5 min
Tarea 5.2: Operaciones con funciones	10 min
Tarea 5.3: Inversiones y beneficios	15 min

Tarea 5.1: Suma y producto de funciones

Consideremos las funciones $f(x) = \frac{4x-3}{x+1}$ y $g(x) = \frac{x+3}{4-x}$. Calcula si es posible

a) $f(0)$
b) $g(0)$
c) $(f+g)(0)$
d) $(f \cdot g)(0)$
e) $f(-1)$
f) $g(-1)$
g) $(f+g)(-1)$
h) $(f \cdot g)(-1)$
i) $f(-5)$
j) $g(-5)$
k) $(f+g)(-5)$
l) $(f \cdot g)(-5)$

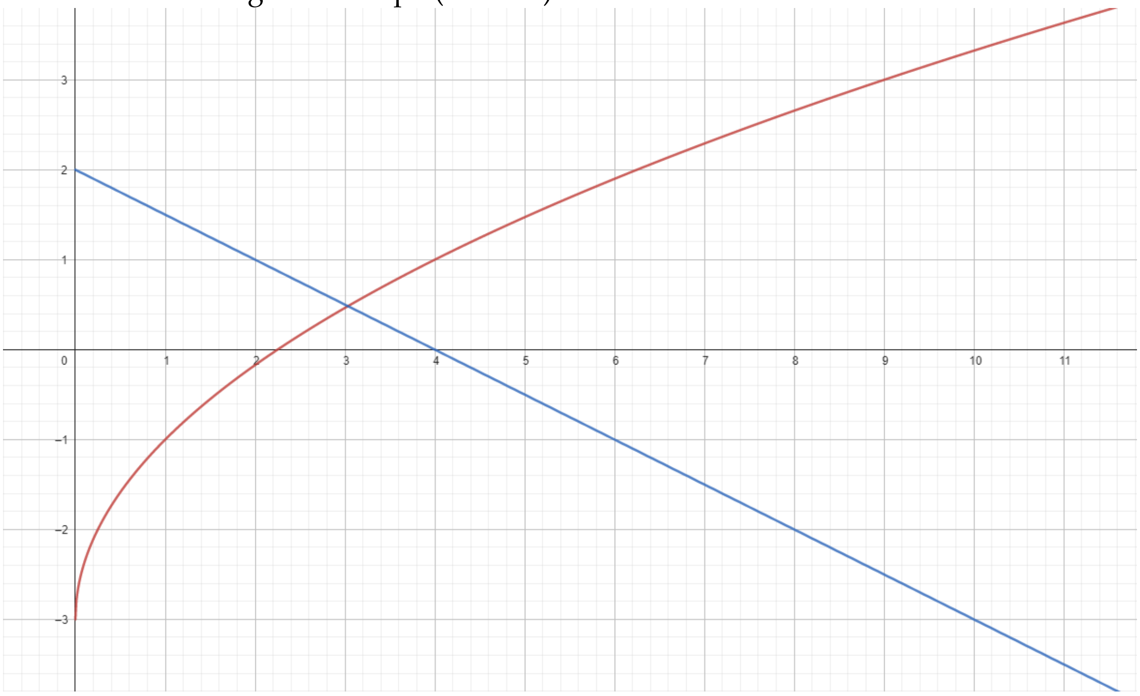
Tarea 5.2: Operaciones con funciones

Con las funciones $f(x) = x$, $g(x) = 3$ y $h(x) = \frac{1}{x}$, obtén la expresión de las siguientes funciones:

a) $(f \cdot h)(x)$
b) $((f+g) \cdot h)(x)$
c) $(f \cdot f + g)(x)$
d) $(g \cdot h)(x)$
e) $(h{:}\, f)(x)$
f) $(h+g)(x)$

Tarea 5.3: Inversiones y beneficios

La siguiente gráfica muestra los beneficios (en miles de euros) que generan dos inversiones a lo largo del tiempo (en años).



a) Representa, aproximadamente, la función suma de las anteriores.

b) Los beneficios de ambas inversiones deben extraerse al mismo tiempo. ¿Cuál será el mejor momento para optimizar el beneficio total?

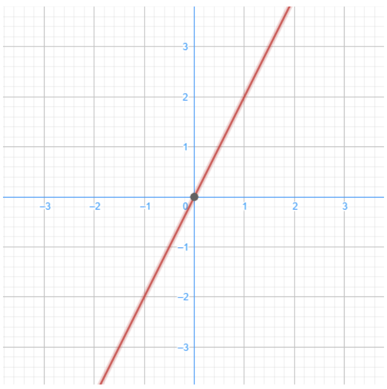
SESIÓN 6: Funciones lineales (I)

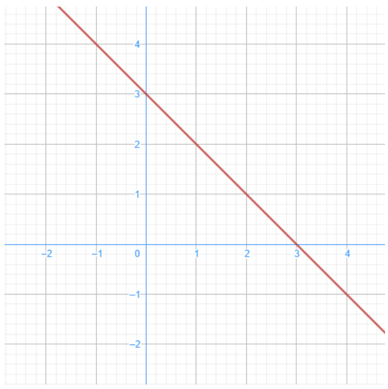
Funciones lineales (I)	
Objetivos: O1, O2, O3, O5, O6, O7, O8	
Competencias: CE1, CE3, CE5, CE6, CE7	
Contenidos: Funciones lineales, expresión algebraica, pendiente, ordenada en el origen, variación de la gráfica con respecto al parámetro.	
Desarrollo: Se comenzará esta sesión realizando un recordatorio de la expresión algebraica de una función vista en la sesión anterior. A partir de este concepto se le presentará al alumnado el concepto de función lineal. Mediante varios ejemplos estudiaremos distintos casos de funciones lineales junto con su gráfica realizando cambios entre las representaciones analíticas, tabulares y gráficas. Se les propondrá a los alumnos la tarea 6.1 para que practiquen y se familiaricen con estas funciones. Una vez realizada se explicará el concepto de pendiente y en la tarea grupal 6.2 veremos cómo variando la misma en una expresión analítica, varía a su vez la gráfica de la función, así como revisaremos todos los conceptos estudiados en la sesión.	
Tarea 6.1: Representación de funciones lineales	15 min
Tarea 6.2: Etiquetas energéticas	25 min

Tarea 6.1: Representación de funciones lineales

Representa gráficamente las siguientes funciones lineales, o halla la expresión algebraica de la gráfica:

a) $f(x) = -x - 6$
b) $g(x) = 4x - 2$
c) $h(x) = 5x$
d) i(x) = 3

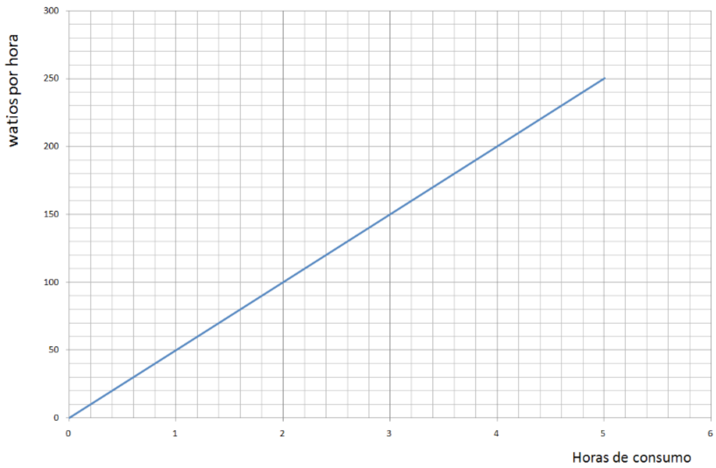
e) 

f) 

Tarea 6.2: Etiquetas energéticas

Las etiquetas energéticas informan sobre la eficiencia del consumo de energía de electrodomésticos como frigoríficos, congeladores, lavadoras, secadoras, lavavajillas y lámparas de uso doméstico.

Hay siete etiquetas (A, B, C, D, E, F, G), identificadas cada una de ellas con un color. Las etiquetas sólo son comparables dentro de un mismo grupo de electrodomésticos: no debe interpretarse igual una D en una lavadora que en una bombilla. A partir de la gráfica de consumo energético de un frigorífico de clase D, como la siguiente:



a) Elabora unas tablas para indicar el consumo de un frigorífico de clase C (su consumo es de un 18% menor que el de clase D), A (en este caso es un 47% menor) y E (cuyo consumo es un 18% superior al de la clase D).
b) Representa, sobre estos mismos ejes, las gráficas correspondientes a los datos obtenidos en el apartado anterior.
c) Escribe las ecuaciones de las tres rectas.
d) Calcula el ahorro de consumo al día si se usa un frigorífico de clase A o de clase E. ¿Cuál será el ahorro en kWh al año? Consulta el precio medio de un kWh y calcula el ahorro en euros.
e) Si un frigorífico con la etiqueta A cuesta 200€ más que uno de clase E, ¿cuánto debe ser la vida del frigorífico para que merezca la pena comprar uno de clase A?
f) Indica qué significado tiene la pendiente de cada una de las rectas.

SESIÓN 7: Funciones lineales (II)

Funciones lineales (II)
Objetivos: O3, O5, O6, O7, O8
Competencias: CE1, CE6, CE7, CE9, CE10
Contenidos: Funciones lineales, expresión algebraica, pendiente, ordenada en el origen, variación de la gráfica con respecto al parámetro.

Desarrollo: La clase se desarrolla en el aula de informática del centro. Los alumnos se distribuirán por parejas, y cada pareja utilizará un ordenador para realizar la tarea 7.1 durante toda la sesión. Los primeros apartados de la tarea pueden ser realizados por el profesor y proyectados en una pizarra digital para que los alumnos comprendan el objetivo.	
Tarea 7.1: Marbleslide. Rectas	50 min

Tarea 7.1: Marbleslide. Rectas

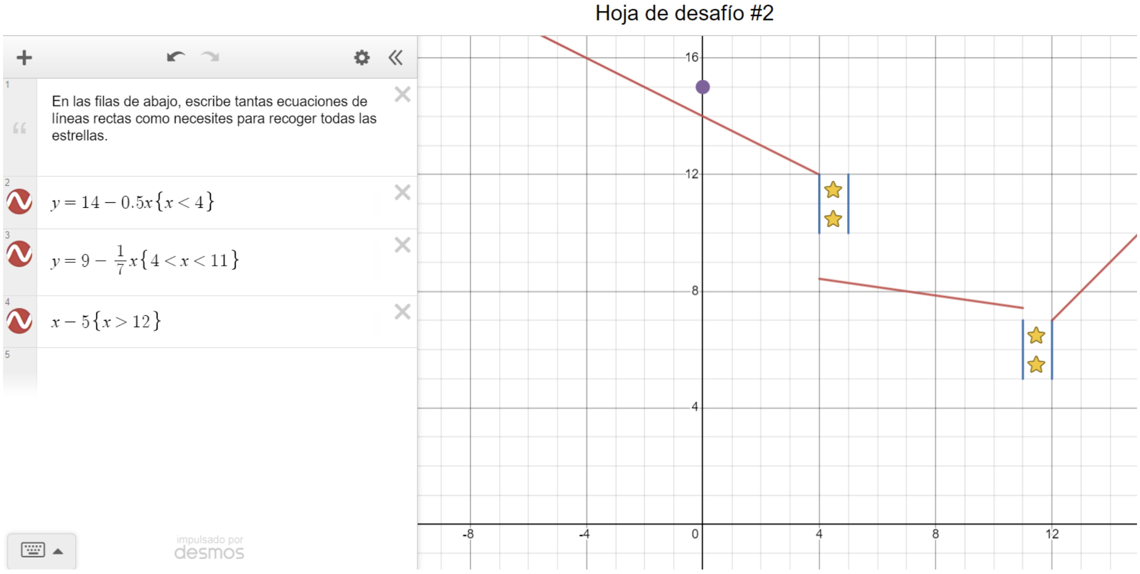
Por parejas, usa el ordenador para unirte a la herramienta Desmos con el código

7JCRMS

o bien directamente desde el enlace

https://student.desmos.com/?prepopulateCode=7jcrms&lang=es.

En esta actividad trabajarás con un software de representación gráfica de funciones, y tendrás que construir las rectas apropiadas para recoger todas las estrellas de cada una de las pantallas.



SESIÓN 8: Funciones cuadráticas (I)

Funciones cuadráticas (I)
Objetivos: O1, O2, O3, O5, O6, O7, O8
Competencias: CE1, CE3, CE5, CE6, CE7
Contenidos: Relaciones cuadráticas, expresión algebraica, vértice, eje de simetría, variación de la gráfica respecto a los parámetros.

Desarrollo: Se comenzará la sesión con la tarea de 8.1, y discutiremos en clase la diferencia entre esa función y una función lineal. Seguidamente se darán indicaciones para graficar funciones cuadráticas (fórmula para el vértice, eje de simetría, orientación de las ramas). Con toda esta información, el resto de la clase se dedicará a la tarea 8.2 y terminaremos con la tarea 8.3.	
Tarea 8.1: Lado de un cuadrado	5 min
Tarea 8.2: Representación de funciones cuadráticas	15 min
Tarea 8.3: Distancia de frenado	25 min

Tarea 8.1: Lado de un cuadrado

Profesor: Sabemos que el área de un cuadrado de lado l es l^2. Id diciendo números y completaremos la tabla de valores en la pizarra.

l								
A=l^2								

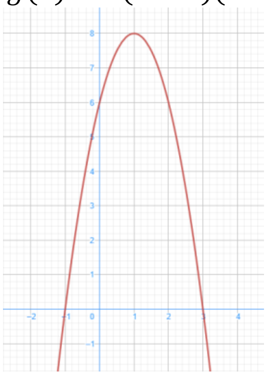
Pintaremos en la pizarra un gráfico con esta relación y decidiremos en gran grupo si eso es una función. A continuación, obtendremos su expresión algebraica

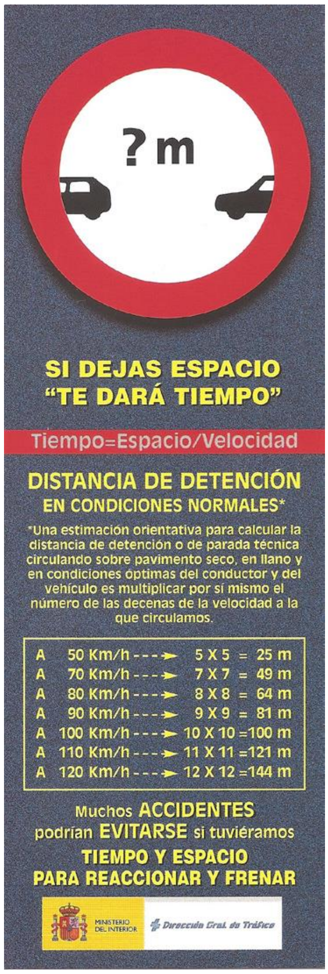
Tarea 8.2: Representación de funciones cuadráticas

Representa gráficamente las siguientes funciones parabólicas, o halla la expresión algebraica de la gráfica:

a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$

b) $g(x) = 4(x-2)(x+4)$

c) 



Tarea 8.3: Distancia de frenado

En el Código de Circulación se dice: «Todo conductor de un vehículo que circule detrás de otro deberá dejar entre ambos un espacio libre que le permita detenerse en caso de frenado brusco, sin colisionar con él, teniendo en cuenta especialmente la velocidad y las condiciones de adherencia y frenado».

En 2007, La Dirección General de Tráfico lanzó una campaña de concienciación sobre la distancia de seguridad entre vehículos en la carretera. Esta imagen formaba parte de la campaña.

a) Representa en una gráfica los datos que aparecen en la imagen.

b) De acuerdo con la gráfica, ¿crees que un vehículo que circula a 60 Km/h tiene suficiente espacio para detenerse con 32 metros de distancia?

c) Y si circula a 130 Km/h, ¿cuánto espacio crees que necesitaría?

d) Un vehículo que está a 70 metros del vehículo que va delante de él ¿a qué velocidad máxima podrá circular para que tenga tiempo de parar?

e) Como sabes, y puedes ver en la imagen, el tiempo de frenado se calcula dividiendo el espacio recorrido entre la velocidad a la que se circula. Elabora una tabla que te permita calcular el tiempo de frenado para distintas velocidades. Representa esos datos en una gráfica.

f) ¿Qué tipo de gráfica has obtenido? ¿Puedes calcular su expresión algebraica?

g) ¿Qué tiempo necesitará un vehículo que circula a 150 Km/h para detenerse?

SESIÓN 9: Funciones cuadráticas (II)

Funciones cuadráticas (II)	
Objetivos: O3, O5, O6, O7, O8	
Competencias: CE1, CE6, CE7, CE9, CE10	
Contenidos: Funciones cuadráticas, expresión algebraica, raíces, vértice, eje de simetría, variación de la gráfica con respecto al parámetro.	
Desarrollo: La clase se desarrolla en el aula de informática del centro. Los alumnos se distribuirán por parejas, y cada pareja utilizará un ordenador para realizar la tarea 9.1 durante toda la sesión. Los primeros apartados de la tarea pueden ser realizados por el profesor y proyectados en una pizarra digital para que los alumnos comprendan el objetivo.	
Tarea 9.1: Marbleslide. Parábolas	50 min

Tarea 9.1: Marbleslide. Parábolas

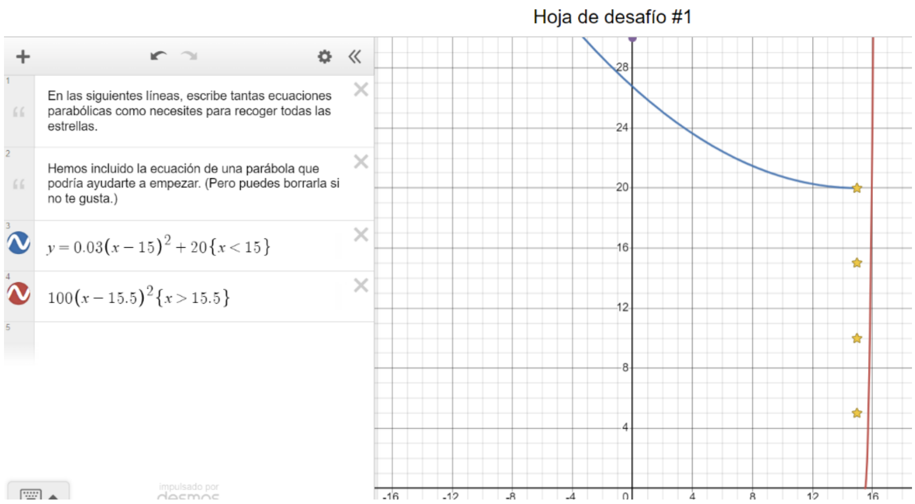
Por parejas, usa el ordenador para unirte a la herramienta Desmos con el código

VTEJUV

o bien directamente desde el enlace

https://student.desmos.com/?prepopulateCode=vtejuv&lang=es

En esta actividad trabajarás con un software de representación gráfica de funciones, y tendrás que construir las parábolas apropiadas para recoger todas las estrellas de cada una de las pantallas.



SESIÓN 10: Funciones a trozos

Funciones a trozos	
Objetivos: O2, O5, O6, O7, O8	
Competencias: CE1, CE2, CE6, CE7, CE8	
Contenidos: funciones a trozos, continuidad, funciones constantes, funciones lineales, funciones cuadráticas	
Desarrollo: Se introducirá el concepto de función definida a trozos de manera intuitiva, preguntando a los alumnos si creen que la función que representaba la gráfica correspondiente al movimiento de la liebre en la tarea 1.1 viene descrito por alguno de los tipos trabajados en las sesiones anteriores (funciones constantes, lineales o parabólicas), y viendo que sí se corresponde, pero solo en ciertos intervalos. Se llega así a una definición de función definida a trozos, donde el profesor, haciendo uso de la clase magistral, explica la manera usual de escribir la expresión algebraica de este tipo de funciones. Como las funciones definidas a trozos se pueden trabajar como una extensión de las funciones constantes, lineales y parabólicas, el resto de la clase se dedica a la realización de la tarea 10.1 y la tarea 10.2.	
Tarea 10.1: Pintando la valla de casa	20 min
Tarea 10.2: Crucero por el Mediterráneo	20 min

Tarea 10.1: Pintando la valla de casa

Todos los veranos, mi hermana y yo nos encargamos de pintar la valla que rodea el jardín de casa.

La valla mide, en total, 20m de longitud y tiene una altura de 180cm. Para no pasar calor, decidimos comenzar a las 8 de la mañana. Como mi hermana tenía que regar las plantas, comencé yo solo con un bote nuevo de pintura y trabajando a mi ritmo. Cuando llevaba pintada la décima parte del vallado, me di cuenta de que eran ya las 9 y mi hermana no había aparecido. Un poco enfadado, la llamé, le di una brocha y se puso a pintar a mi lado, ya que solo teníamos un bote de pintura. Pintando, pintando, este se nos vació. Como solo eran las 10:30h, decidimos que yo iría a comprar más pintura. En comprarla invertí 15 minutos, durante los cuales mi hermana midió el tramo que nos quedaba: ¡10 metros aún!

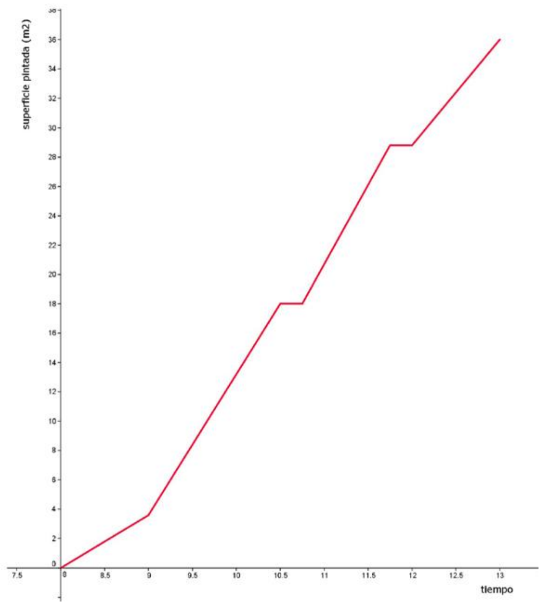
Con el bote nuevo de pintura, retomamos la tarea los dos juntos, y durante una hora no paramos de pintar. El sol era tan fuerte que decidimos parar 15 minutos para beber agua y protegernos con unas gorras. Nos quedaba entonces la quinta parte del trabajo. Pero en ese momento, mi padre se ofreció a terminar la tarea. A la 1 de la tarde había acabado. ¡La pintura le vino justa!

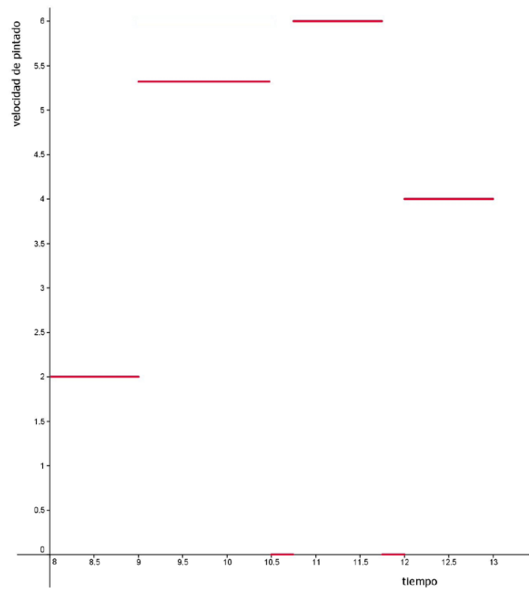
Versión Lectura fácil del relato

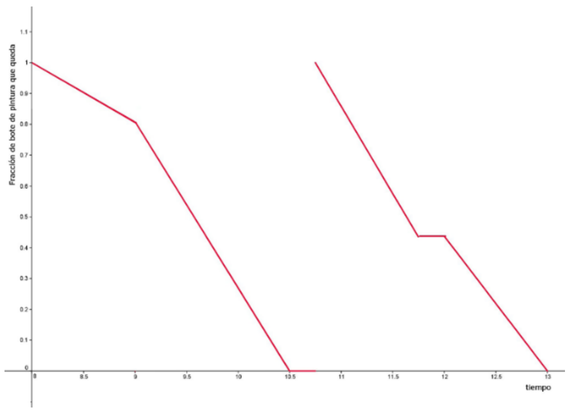
a) Completa la siguiente tabla resumen con los datos extraídos del relato anterior.

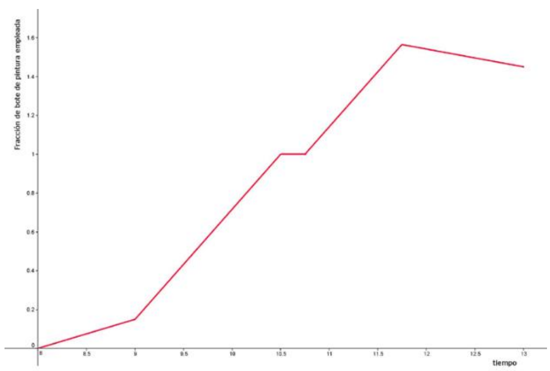
Hora	**Longitud pintada**	**Área pintada**	**% de valla pintada**	**Número de personas pintando**	**% de lata de pintura llena**

b) Por parejas, ¿cuál o cuáles de las siguientes gráficas creéis que pueden corresponder al relato? Prestad atención a lo que se representa en los ejes. Justificad vuestras respuestas.









c) Elaborad también por parejas una gráfica de la función "fracción de la valla que queda por pintar en función de tiempo". ¿Cuál es la variable dependiente y cuáles son sus unidades? ¿Y la variable independiente? Compara la gráfica obtenida con la de tus compañeros.

Tarea 10.2: Crucero por el Mediterráneo

Una agencia de viajes organiza un crucero por el Mediterráneo. El precio del viaje es de 1000 € si reúne entre 30 y 60 pasajeros; cuando el número es menor de 30, el crucero se suspende. Pero, si supera los 60, se hace una rebaja de 10 euros a cada participante por cada nuevo pasajero.

a) Halla la función que da el precio del crucero dependiendo del número de viajeros. Represéntala gráficamente.
b) Calcula la función que da el ingreso total que obtiene la agencia organizadora en función del número de viajeros. Represéntala gráficamente.
c) Critica los resultados hallados.

SESIÓN 11: Modelización

Modelización	
Objetivos: O5, O6, O7, O8	
Competencias: CE1, CE6, CE7	
Contenidos: Modelización de problemas, comprobación de hipótesis, dependencia de funciones con sus parámetros, continuidad.	
Desarrollo: Tras una breve discusión sobre las aplicaciones de las funciones, los alumnos dedican la mayor parte de la sesión a resolver las tareas 11.1 y 11.2.	
Tarea 11.1: La caminata	25 min
Tarea 11.2: El río	25 min

TAREA 11.1: La caminata

A las 8 de la mañana de un primaveral día de mayo, Marcos inició la ascensión por el único camino posible que le llevaría desde su campamento hasta el pueblo más alto de la comarca, situado 270 metros por encima de su posición en una zona muy escarpada. Acostumbrado a realizar estas actividades, sabía que la mejor manera de alcanzar su objetivo era mantener una velocidad constante durante un periodo prolongado, descansar un buen rato y continuar con la misma marcha. Así pues, durante la primera hora de la ascensión subió 90 metros, descansó durante media hora y continuó su caminata durante otra hora. Cuando paró a descansar de nuevo, ya se encontraba a 180 metros de altura con respecto al campamento. A las tres horas de comenzar, inició el último tramo de la ascensión, que en una hora más de caminata, a la misma velocidad con la que hizo el segundo tramo, le llevó hasta el poblado. Durante todo el día visitó a sus amigos y parientes y, como se le hizo tarde para regresar, decidió pasar la noche allá arriba.

A la mañana siguiente, inició el regreso a la misma hora que comenzó el día anterior, a las 8 de la mañana. Descansado como estaba y con la pendiente a su favor, descendió 120 metros en la primera hora. Decidió descansar a tomar un bocado y, tras media hora para reponer fuerzas, continuó bajando y volvió a parar cuando se encontraba a 60 metros de altura del campamento. En ese momento, el reloj marcaba las 10 de la mañana. Tras media hora contemplando el paisaje, completó el descenso en otra media hora.

Con los datos que te ofrece este relato, realiza las siguientes actividades y contesta las preguntas:

a) Dibuja sobre los mismos ejes las dos gráficas que representan la altitud a la que se encuentra Marcos respecto del campamento, en función del tiempo empleado en realizar los trayectos de subida y bajada.
b) Indica cuál es la velocidad que ha llevado Marcos en cada uno de los tramos.
c) Las dos gráficas se cortan en un punto. ¿Cuáles son sus coordenadas, aproximadamente?
d) ¿Cuál fue la velocidad media del ascenso? ¿Y la del descenso?
e) Escribe las ecuaciones de los tramos centrales que se cruzan.
f) Calcula de forma exacta el punto de corte. ¿Qué representa ese punto?

Profesor: Plantea en gran grupo la cuestión: Si no supiéramos la velocidad en cada momento, ¿habrá durante la vuelta algún momento en el que Marcos se encuentre en el mismo lugar y misma hora que al día anterior? (pequeña reflexión sobre el Teorema de Bolzano)

<u>TAREA 11.2: El río</u>

Los ríos discurren de zonas de mayor altitud a zonas más bajas, y se llama perfil del río a la representación gráfica de la altitud frente a la longitud de este. En esta actividad se propone la construcción del perfil del río que pasa por tu localidad a partir de la información disponible en internet. Los pasos que debes seguir son los siguientes:
a) Localiza cinco pueblos entre la cabecera y la desembocadura por los que pase el río, y que estén separados, al menos, 20 km uno de otro.
b) Elabora una tabla de doble entrada y coloca en la primera columna la altitud de cada uno de los cinco pueblos. (Puedes buscarla en los enlaces propuestos en recursos).
c) Mide la distancia entre el primer pueblo y los demás, y completa la segunda columna de la tabla. (Para medir estas distancias puedes usar Google Earth, Google Maps o SigPAC, cuyos accesos tienes en Google Maps, Google Earth, SigPAC).
d) Según los números que tengas en la tabla, elige una escala adecuada para cada eje y dibuja los puntos (altitud, distancia al nacimiento).
e) Une cada dos puntos con una línea recta. Añade el nombre de los pueblos junto a la altitud en el eje de abscisas. ¡Y ya tienes el perfil del río!
f) Calcula la pendiente del río en cada tramo.
g) Calcula la ecuación de la recta en el tramo de mayor pendiente y en el de menor pendiente.
h) Si el río continuase 10 km más con la misma pendiente del último tramo, ¿a qué altitud desembocaría?

7.2 Análisis de las tareas propuestas

Realizar un análisis de las tareas anteriores es una parte fundamental del análisis de la enseñanza. Dentro de este análisis incluimos:

- la búsqueda de conexiones entre nuestras tareas con los objetivos didácticos establecidos y las competencias del currículo,
- la reflexión sobre la temporalización de la tarea, así como su secuenciación (a qué parte de la unidad pertenece),
- las características relacionadas con la puesta en escena en el aula, como pueden ser la manera de formular la tarea o la agrupación de alumnos que requiere,
- consideraciones acerca de si la tarea es realista y significativa,
- un estudio sobre las fortalezas y debilidades de la tarea.

Sin embargo, por razones de extensión del trabajo, hemos decidido incluir dicho análisis en el Anexo A. Además, por el mismo motivo, solo hemos analizado 10 de las 25 tareas que hemos planteado en la sección anterior.

7.3 Relación entre las tareas, los objetivos y las competencias

A continuación, basándonos en el análisis de las tareas realizado en el Anexo A, vamos a elaborar dos tablas. En la primera de ellas (Tabla 5) relacionaremos las diferentes tareas analizadas con los objetivos didácticos que abordan.

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8
Tarea 1.1	X				X			
Tarea 1.2	X				X			
Tarea 2.1		X						
Tarea 2.2					X			
Tarea 3.1					X			
Tarea 3.2					X			
Tarea 3.3		X			X			
Tarea 4.1			X					
Tarea 4.2			X			X	X	
Tarea 4.3			X		X	X	X	X
Tarea 5.1		X		X				
Tarea 5.2		X		X				
Tarea 5.3		X		X	X			X
Tarea 6.1			X			X	X	
Tarea 6.2			X		X	X	X	X
Tarea 7.1			X			X	X	X
Tarea 8.1			X			X	X	
Tarea 8.2			X			X	X	
Tarea 8.3			X		X	X	X	X
Tarea 9.1			X			X	X	X
Tarea 10.1		X				X	X	X
Tarea 10.2					X	X	X	X
Tarea 11.1					X			X
Tarea 11.2					X			X

Tabla 5: Relación entre las tareas y los objetivos propuestos.

Como vemos, con la selección de tareas que hemos planteado, conseguimos cubrir todos los objetivos propuestos. Además, las tareas que hemos analizado en el Anexo A coinciden con las Tareas más ricas, es decir, las que abarcan, en general, un mayor número de objetivos.

Hagamos ahora algo similar, pero relacionando las tareas con las competencias específicas que se trabajan en las mismas. Esto es lo que se recoge en la Tabla 6.

	CE1	CE2	CE3	CE4	CE5	CE6	CE7	CE8	CE9	CE10
Tarea 1.1	X					X	X	X		X
Tarea 1.2					X	X	X	X		X
Tarea 2.1	X									
Tarea 2.2	X									
Tarea 3.1	X									
Tarea 3.2	X									
Tarea 3.3	X									
Tarea 4.1	X						X			
Tarea 4.2	X						X			
Tarea 4.3	X				X	X	X			
Tarea 5.1	X	X				X				
Tarea 5.2	X	X				X				
Tarea 5.3	X					X	X			
Tarea 6.1	X						X			
Tarea 6.2	X				X	X	X			
Tarea 7.1	X					X	X		X	X
Tarea 8.1	X				X		X			
Tarea 8.2	X						X			
Tarea 8.3	X		X			X	X			
Tarea 9.1	X					X	X		X	X
Tarea 10.1	X	X				X	X	X		X
Tarea 10.2	X						X	X		
Tarea 11.1	X		X					X		
Tarea 11.2	X					X	X			

Tabla 6: Relación entre las tareas analizadas y las competencias específicas.

De nuevo, en esta tabla podemos ver que solamente teniendo en cuenta las tareas analizadas, conseguimos tocar todas las competencias específicas excepto la número 4, relacionada con el diseño de algoritmos. Esta competencia no se incluye en nuestra unidad porque, en general, los algoritmos a utilizar son bastante genéricos y no se espera de los alumnos que sean capaces de deducirlos, sino solo comprenderlos y utilizarlos en determinados ejercicios y problemas, fundamentalmente los de la sesión 5.

8. Atención a la diversidad

En relación con la atención a la diversidad, la filosofía del centro para el que está planteada esta unidad didáctica es no hacer adaptaciones exclusivas para alumnos concretos a menos que sean estrictamente necesarias. Es por ello por lo que, en las clases concretas que establecíamos al hablar del Alumnado, ninguno de ellos tenía hecha una adaptación curricular.

Aun así, como plan de atención a la diversidad en el diseño de la unidad hemos tenido en cuenta tres factores:

- Por un lado, hemos diseñado cada una de las sesiones incluyendo ejemplos y tareas en orden creciente de dificultad. Para ejemplificar esto, podemos fijarnos en la sesión 8, sobre funciones cuadráticas

  Comenzamos con un pequeño ejemplo (tarea 8.1) sobre una función cuadrática para construir la gráfica y ver la forma. Seguimos con la definición concreta de función cuadrática y de sus elementos notables. A partir de ello, se puede realizar la siguiente tarea (8.2), relacionada con el uso de algoritmos básicos de representación de este tipo de funciones. Finalmente, como profundización, se plantea la tarea 8.3 donde se debe combinar los conocimientos generales de funciones con los concretos sobre funciones cuadráticas para resolver el problema.

  De hecho, esta tarea (y en general todos los problemas consistentes en varios apartados para resolver) están planteados de forma secuencial, con los apartados ordenados por dificultad creciente. Partimos de preguntas básicas sobre interpretación de gráficas, y seguimos con otras que requieren movilización de diferentes capacidades para construir la gráfica y extraer información sobre ellas. Por último, normalmente la tarea es finalizada con una pregunta abierta en forma de discusión y que invita a la reflexión sobre los resultados obtenidos.

  Planteando las sesiones y las tareas de esta manera, conseguimos que los estudiantes realicen las tareas hasta el nivel que alcancen, garantizando un mínimo en la consecución de los objetivos y las competencias.
- La tarea 10.1 consta de una versión resumida en formato de diapositivas secuenciales que incluyen audio.

  Con este formato seguimos el principio del Diseño Universal de Aprendizaje (en adelante DUA) “Proporcionar múltiples formas para la representación” a través de su pauta “Proporcionar opciones para la percepción”, todo ello según Alba (2019).

  Por otro lado, se trata de una tarea multinivel. El primer apartado se corresponde con una recogida de información, el segundo trata sobre interpretación de información en diferentes formatos (gráfico y verbal), y el tercero pretende la elaboración de gráficos que modelan la situación presentada. A través de esta dificultad creciente, proporcionamos un equilibrio entre reto y apoyo, lo cual cumple con la pauta “Proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia” y, por tanto, con el principio “Proporcionar múltiples formas de implicación”. A ello también contribuye el trabajo en equipo (por parejas) solicitado.

  Además, los dos últimos apartados se trabajan por parejas, y el último se discute de manera grupal, lo cual fomenta la cooperación y la comunicación. Asimismo, el presentar el enunciado mediante distintos sistemas simbólicos (texto, imágenes, sonido, audiovisual), y preguntar por un resumen de este también en distintos formatos (tabular o gráfico) contribuye también a la pauta “Proporcionar opciones para la expresión y la comunicación” dentro del principio “Proporcionar múltiples formas de acción y expresión”.
- Por otro lado, en una de las clases para las que está planteada la unidad hay dos alumnas marroquíes. Estas alumnas no hablan castellano, inglés ni francés, que son

los idiomas con los que se trabaja en el centro. Debido a estas dificultades, hemos creado la siguiente página web:

Recursos Didácticos: Funciones – 4º ESO

En ella, se recogen todas las tareas de esta unidad, así como un pequeño resumen de los conceptos básicos de las distintas sesiones.

Haciendo uso de este recurso interactivo conseguimos alcanzar varias metas:

- En primer lugar, la combinación de la página web con la herramienta "Traductor" (Figura 16) con la que cuentan muchos buscadores, crea un nexo que conecta las clases impartidas por el docente con estas alumnas marroquíes. Se hace así posible por parte de las alumnas un seguimiento más o menos completo de la asignatura.

  A pesar de lo anterior, no podemos garantizar que las traducciones sean completamente correctas o que se ajusten al contexto matemático en el que nos movemos

Figura 16: Página web con los contenidos y tareas de la unidad, y traducida al árabe a través de la herramienta "*Google Translate*".

- Además, la totalidad del alumnado dispone de este recurso, que pueden usar a modo de guía de la unidad, o para repasar conceptos o procedimientos de esta.
- Dado el carácter multilingüe del centro donde se desarrolla esta unidad didáctica, se puede usar también la página web para trabajar las sesiones en inglés o francés con un apoyo visual para la teoría y las tareas.
- Por último, la página nos permite incluir applets con herramientas de dibujo de funciones como pueden ser GeoGebra, y que facilitan, por ejemplo, el visualizar cómo afectan el cambio de la pendiente o la ordenada en el origen a la gráfica de una función lineal.

Con respecto a este último punto en el que hemos basado la atención a la diversidad en nuestra unidad, la página web cumple también con los principios del DUA. Con la creación de la página, ofrecemos a las alumnas marroquíes un formato diferente para presentar el contenido y donde ellas tienen acceso.

Además, también en consecuencia con el DUA, aunque este recurso ha sido creado pensando en la atención a la diversidad, también consigue mejoras adicionales en otros aspectos para los que no había sido concebida: como ya hemos comentado, lugar de referencia y consulta para todos los alumnos, apoyo para las sesiones bilingües, y material complementario tipo GeoGebra.

9. Análisis de evaluación

En base con la secuencia de sesiones y tareas que hemos expuesto en Análisis de la enseñanza, hemos decidido que los criterios de evaluación más importantes y que deben ser evaluados en la unidad son los siguientes:

- CE1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas.
- CE6.1 Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas y resueltas mediante herramientas y estrategias matemáticas, estableciendo conexiones entre el mundo real y las matemáticas y usando los procesos inherentes a la investigación: inferir, medir, comunicar, clasificar y predecir.
- CE7.1 Representar conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos de modos distintos y con diferentes herramientas, incluidas las digitales, visualizando ideas, estructurando procesos matemáticos y valorando su utilidad para compartir información.
- CE10.2 Gestionar el reparto de tareas en el trabajo en equipo, aportando valor, favoreciendo la inclusión, la escucha activa, responsabilizándose del rol asignado y de la propia contribución al equipo.

Para evaluar estos criterios de evaluación vamos a utilizar los instrumentos y métodos que se mencionan a continuación.

La evaluación se realiza de manera continua, teniendo en cuenta la realización de tareas y la observación directa del trabajo en clase (particularmente cuando se trata de trabajo en grupo), pero incluye también una prueba al final de la unidad. Se trata además de una evaluación sumativa, ya que pretendemos con ella estudiar qué tan efectiva ha sido la unidad didáctica para los alumnos, midiendo lo aprendido por ellos.

9.1 Observación directa

Mediante observación directa pretendemos evaluar y calificar el criterio de evaluación 10.2 en relación con la proactividad y el trabajo en equipo. Para ello, a lo largo de las sesiones 1, 2, 7 y 9 (estas son aquellas en las que hay planificado trabajo en grupo o discusiones colectivas) se realizará una observación del trabajo de los alumnos, a partir de la cual se rellenará la rúbrica de la Tabla 7 que servirá para obtener una calificación del criterio CE10.2.

	Insuficiente (1)	**Mejorable (4)**	**Satisfactorio (7)**	**Excelente (10)**
Trabajo (20%)	Apenas trabaja y no muestra interés	Trabaja, pero sin organización	Trabaja, aunque se detectan algunos fallos de organización	Trabaja constantemente y con muy buena organización
Participación (20%)	Solo una o dos personas participan activamente	Al menos la mitad de los estudiantes presentan ideas propias	Al menos un 75% de los estudiantes participa activamente	Todos los miembros participan activamente y con entusiasmo
Responsabilidad en la realización de las tareas (15%)	La responsabilidad recae sobre una sola persona	La responsabilidad es compartida por la mitad de los integrantes	La mayor parte del equipo comparte la responsabilidad	Todos los miembros comparten por igual la responsabilidad
Dinámica de trabajo (15%)	Muy poca interacción, conversación breve	Alguna habilidad para interactuar. Se escucha alguna evidencia de discusión	Escuchan los comentarios y sugerencias para mejorar, pero no los usan para ello	Escuchan y aceptan los comentarios y opiniones, y lo usan para mejorar
Actitud del equipo (15%)	No trabajan de forma respetuosa	Trabajan con respeto, pero no suelen animarse para mejorar el ambiente	Trabajan con respeto y se animan entre todos para mejorar el ambiente	Se respetan y animan entre todos, haciendo propuestas para que el trabajo y los resultados mejoren
Roles (15%)	No hay intención de asignar roles a cada miembro	Hay roles asignados, pero no los desempeñan	Cada estudiante tiene un rol, pero no está claramente definido	Cada estudiante tiene un rol que desempeña de manera efectiva

Tabla 7: Rúbrica de evaluación del criterio de evaluación 10.2 mediante observación directa.

Con esta tabla pretendemos evaluar a cada uno de los grupos de estudiantes (preferentemente grupos estables a los largo de todas las sesiones), aunque el resultado de la evaluación será para cada uno de los miembros del grupo.

9.2 Realización de tareas

Las elaboración de las tareas 7.1 y 9.1 (Marbleslide) nos servirá como instrumento de evaluación en relación con el criterio CE7.1 (en relación con las diferentes formas de representar conceptos).

La herramientas Desmos con la que está diseñada la actividad nos permite conocer a tiempo real el número de niveles superados por los alumnos, así como las diferentes pruebas que realizan para superar estos niveles (Figura 17).

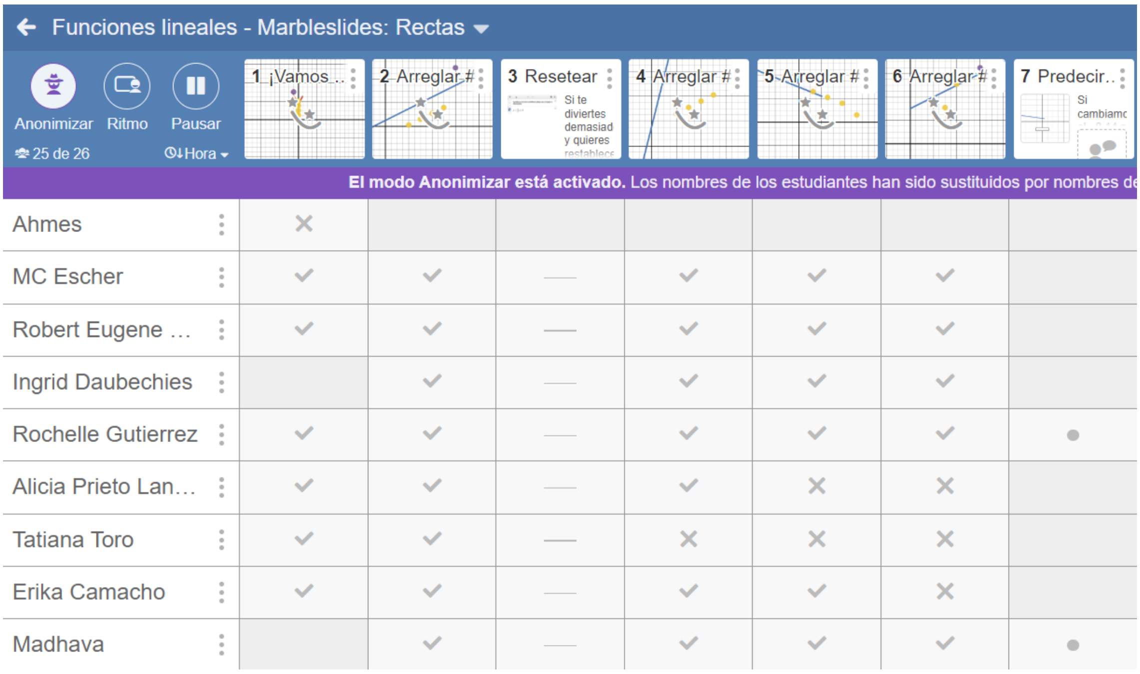


Figura 17: Panel de control de la Tarea 7.1 Marbleslide. Rectas. A través de él podemos ver si los diferentes niveles han sido superados por los alumnos.

Para calificar estas tareas, se utilizará la siguiente rúbrica (Tabla 8):

	Insuficiente (1)	Mejorable (4)	Satisfactorio (7)	Excelente (10)
Número de niveles superados (70%)	No se completan los niveles guiados	Se completan únicamente los niveles guiados	Se completan los niveles guiados, y algunos de los desafíos	Se completan tanto los niveles guiados como los desafíos
Adecuación de las funciones utilizadas (20%)	Se utilizan funciones de todo tipo en la mayoría de los niveles	En algunos desafíos aparecen funciones que no son rectas o parábolas	Se usan rectas y parábolas de forma conjunta	Solamente se utilizan rectas o parábolas, según se indica
Número de funciones utilizadas (10%)	Aparecen funciones innecesarias que no intervienen para la consecución del nivel	Las soluciones obtenidas hacen uso de un gran número de funciones, existiendo soluciones más sencillas	Se puede reducir claramente el número de funciones usadas en algunos niveles	El número de funciones utilizadas se optimiza al máximo

Tabla 8: Rúbrica de evaluación del criterio de evaluación 10.2 mediante observación directa.

9.3 Prueba escrita

La sesión 12 se dedicará a la realización de la siguiente prueba escrita:

Duración: 55 min
1. Representa gráficamente las siguientes funciones, indicando todos sus elementos (dominio, recorrido, continuidad, cortes con los ejes, monotonía, extremos, pendiente y ordenada en el origen en el caso de las rectas, y orientación de las ramas, vértice y eje de simetría en el caso de las parábolas): a) $f(x) = 3x - 2$ *(1.5 puntos)* b) $g(x) = x^2 + x - 6$ *(1.5 puntos)* c) $h(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x<1 \\ 0 & si \quad x=1 \\ -x^2+3x & si \quad x>1 \end{cases}$ *(1.5 puntos)* 2. El depósito en el que se almacena el aceite en una almazara es un cilindro de 2 m de diámetro y 4 m de altura (unos 12600L de capacidad). El grifo, situado en la parte inferior, conecta directamente con la planta embotelladora. Cuando ésta se pone en marcha, el depósito está totalmente lleno, y el ritmo de embotellado es de 500 botellas de litro por hora. Considera la función que describa la altura del aceite que queda conforme pasa el tiempo. a) Escribe su expresión algebraica y represéntala gráficamente. ¿Qué tipo de función has obtenido? *(1.5 puntos)* b) La función corta a ambos ejes. Calcula en qué puntos lo hace. ¿Qué interpretación le das en el contexto del problema? *(1 punto)* c) ¿Cuál es el dominio de esta función? *(1 punto)* d) ¿Cuántas botellas se han llenado cuando la altura del aceite en el depósito es de 1m? *(1 punto)* e) ¿Cuántas botellas se tendrían que llenar a la hora para que el depósito se vaciase en 15 horas? Escribe la expresión algebraica de la función en este caso. *(1 punto)*

Hemos decidido componer la prueba solamente de dos tareas con varios apartados de manera que se presenta de forma similar a las actividades propuestas en la unidad: por un lado, una tarea mecánica donde se ponen a prueba la capacidad de seguir algoritmos básicos de representación de funciones, y por otro, un problema con una serie de apartado más o menos secuenciales y crecientes en complejidad.

La tarea 1 de la prueba servirá nuevamente como evaluación del criterio CE7.1 sobre representaciones. Con la tarea 2 pretendemos evaluar los criterios CE1.1 (resolución de problemas) y CE6.1 (modelización y conexión con el mundo real).

Para calificar cada una de estas tareas, seguiremos las siguientes pautas e indicadores

Tarea 1 (CE7.1): Se evalúan por separado y de igual manera los tres apartados con 1.5 puntos sobre 10. Los indicadores para fijarnos son

- Se identifica cada función como lineal, cuadrática o a trozos (0.2 puntos)
- Se señala el dominio, el recorrido y la continuidad (0.2 puntos)
- Se calculan los cortes con los ejes (0.2 puntos)
- Se indican la monotonía y los extremos (0.2 puntos)

- Se explicitan pendiente/ordenada en el origen u orientación de las ramas/vértice/eje de simetría (0.2 puntos)
- Se representa de manera correcta la gráfica usando la información anterior (0.5 puntos)

Tarea 2 (CE1.1 y CE 6.1): Cada uno de los apartados se corresponde con una criterio concreto, y tiene unos indicadores establecidos:

- a) (CE6.1) Se identifican las variables independiente (tiempo) y dependiente (altura del aceite) (0.25 puntos)
- a) (CE6.1) Se reconoce la función que modela la situación como lineal (0.25 puntos)
- a) (CE6.1) Se hace corresponder la altura inicial con la ordenada en el origen (0.25 puntos)
- a) (CE1.1) Se calcula la velocidad de bajada del nivel de aceite (0.25 puntos)
- a) (CE6.1) Se hace corresponder la velocidad de bajada con la pendiente (0.25 puntos)
- a) (CE1.1) Se representa la función correctamente (0.25 puntos)
- b) (CE1.1) Se calculan los cortes con los ejes (0.5 puntos)
- b) (CE6.1) Se interpretan correctamente cada uno de estos cortes (0.5 puntos)
- c) (CE6.1) Se reconoce el dominio como aquel en que el tiempo y el nivel del aceite son positivos (0.5 puntos)
- c) (CE1.1) Se calcula adecuadamente el dominio (0.5 puntos)
- d) (CE6.1) Se hace una traducción adecuada entre el número de botellas y la altura del nivel del aceite (0.5 puntos)
- d) (CE1.1) Se da el resultado correcto (0.5 puntos)
- e) (CE6.1) Se identifica la pendiente como parámetro que debe cambiar (0.5 puntos)
- e) (CE6.1) Se calcula la nueva pendiente, y la expresión algebraica es correcta (0.5 puntos)

9.4 Calificación

Una vez tengamos la calificación obtenida a través de los diferentes instrumentos, se hará una media aritmética para aquellos criterios asociados a diferentes instrumentos. La calificación final de la unidad se obtendrá como la media aritmética de la calificación obtenida en los 4 criterios de evaluación tenidos en cuenta. En resumen,

$$calificación\, final = \frac{pr2_{CE1.1} + pr2_{CE6.1} + \frac{pr1 + ta}{2} + ob}{4},$$

donde

- ob es la calificación obtenida en la observación, relacionada con el criterio CE10.2
- ta es la calificación obtenida en la realización de tareas, relacionadas con el criterio CE7.1
- $pr1$ es la calificación obtenida en la tarea 1 de la prueba escrita, que tiene relación con el criterio CE7.1 (sobre 10)
- $pr2_{CE1.1}$ es la calificación obtenida en los apartados de la tarea 2 de la prueba escrita que tienen relación con el criterio CE1.1 (sobre 10)
- $pr2_{CE6.1}$ es la calificación obtenida en los apartados de la tarea 2 de la prueba escrita que tienen relación con el criterio CE6.1 (sobre 10)

10. Conclusiones

Para terminar, hacemos un breve resumen de aquellos puntos clave que constituyen la unidad didáctica que hemos diseñado.

Cabe destacar, en primer lugar, que hemos realizado un análisis completo del contenido que se pretendía incluir en la unidad, redactando en consecuencia unos objetivos didácticos bastante generales que se concretan luego en el desarrollo de las tareas. Además, hemos analizado diferentes dificultades y oportunidades que conlleva nuestro tema de trabajo, y que nos ha permitido diseñar como resultado unas tareas efectivas para alcanzar los objetivos propuestos.

Como punto débil de nuestra unidad cabe mencionar que no está planteada en términos de situación de aprendizaje, como establece la ley educativa LOMLOE bajo la que ha sido realizado este trabajo. Esto es debido a que nos ha parecido difícil integrar bajo una misma situación de aprendizaje tareas con contextos tan variados como las que hemos propuesto en nuestra unidad. Hacerlo de esta manera nos ha permitido plantear tareas relacionadas con la energía, el ecologismo, tareas domésticas, el ámbito de la empresa, o la circulación en carretera.

Como contrapartida, nos hemos encontrado que la gran cantidad de problemas planteados, la diversidad de contextos de estos y el exponer algunos de ellos en forma de retos ha conseguido motivar a unos alumnos que inicialmente de mostraban bastante desencantados con la asignatura de Matemáticas en general. En la puesta en práctica de esta unidad didáctica hemos pasado de un alumnado mostrando un total desinterés por cualquier tipo de actividad a una clase participativa, con cierta iniciativa por parte de los alumnos.

Además, gracias a la web creada para la atención a la diversidad hemos conseguido cierta inclusión de las alumnas marroquíes en la asignatura. Gracias a ello se han notado también algunos intentos de integración con el resto de los compañeros de la clase.

Finalmente, como conclusión extraemos la necesidad de presentar actividades innovadoras, auténtica y motivadoras en clase, para despertar en el alumnado el interés por las Matemáticas. Para ello, ponemos en juego todos los recursos disponibles actualmente, como pueden ser herramientas digitales e interactivas, o el análisis didáctico que hemos realizado en este trabajo. Es la continua formación del profesora la que permite ampliar el abanico de materiales y destrezas que facilitan el aprendizaje por parte del alumnado.

Anexo A. Análisis de las tareas propuestas

ANÁLISIS DE LA TAREA 1.1: La liebre y la tortuga	
Meta	Interpretación de gráficas Identificación de variables y unidades Extracción de datos de gráficas
Contenido	Funciones y gráficas, variable dependiente e independiente
Objetivos	O1 Distinguir qué es una función y qué no lo es O5 Interpretar gráficas de funciones
Competencias	CE1 Resolver problemas CE6 Conexiones extramatemáticas CE7 Representaciones CE8 Comunicar CE10 Trabajo en equipo
Formulación	Primera parte de manera oral y fotos expuestas usando un proyector; segunda parte de manera escrita
Materiales y recursos	Proyector; lápiz y papel; ordenador o dispositivos portátiles
Agrupamiento e interacción	La primera parte se resuelve de manera individual y se discute de forma grupal (interacción alumno-profesor y alumno-alumno) La segunda parte se resuelve por parejas
Contexto / Situación de aprendizaje	Social (cultura popular)
Temporalización	25 min
Complejidad	Primera parte de conexión Segunda parte de reproducción
Secuenciación	Inicio
Realista	Aunque el contexto es claramente ficticio, puede tener relación con situaciones reales y además forma parte de una obra de la cultura popular. Luego el realismo es discutible.
Significativa	Sí, ya que se inicia desde la intuición matemática y el conocimiento previo de la interpretación de funciones para reconocer el cuento, el identificarlo constituye un reto, y el estudiante reconoce en qué medida lo ha resuelto
Fortalezas	La relevancia se mantiene (todo el rato se pregunta en relación con el contexto) Es una tarea no rutinaria Promueve desplazamiento del contexto del problema al mundo matemático necesario para resolverlo y viceversa Es secuencial
Debilidades	No es 100% realista, y no se toman decisiones

ANALISIS DE LA TAREA 1.2: Emisiones mundiales de CO2	
Meta	Interpretación de gráficas Identificación de variables y unidades Extracción de datos de gráficas
Contenido	Funciones y gráficas, variables dependiente e independiente
Objetivos	O1 Distinguir qué es una función y qué no lo es O5 Interpretar gráficas de funciones
Competencias	CE5 Conexiones intramatemáticas CE6 Conexiones extramatemáticas CE7 Representaciones CE8 Comunicación CE10 Trabajo en equipo
Formulación	Escrita
Materiales y recursos	Lápiz y papel; ordenador o dispositivos portátiles
Agrupamiento e interacción	Los apartados del a) al h) se resuelven de manera individual, no hay interacción El apartado i) se discute en grupo, interacción alumno-alumno y alumno-profesor
Contexto / Situación de aprendizaje	Social (medio ambiente)
Temporalización	20 min
Complejidad	Reproducción, salvo el último apartado que se corresponde con reflexión
Secuenciación	Inicio
Realista	Sí, de hecho, los datos han sido extraídos de un periódico real.
Significativa	En tanto que es una tarea que requiere de la activación de los conocimientos adquiridos en la tarea anterior, pero aplicados a otro contexto, podríamos decir que sí es una tarea significativa.
Fortalezas	Es una situación real y de relevancia en el mundo actual El contexto es relevante porque se mantiene a lo largo de todos los apartados Tarea no rutinaria Promueve el desplazamiento del contexto del problema al mundo matemático necesario para resolverlo y viceversa Es secuencial
Debilidades	No hay toma de decisiones

ANALISIS DE LA TAREA 4.3: La factura de la energía	
Meta	Interpretación de una factura energética Elaboración de tablas Familiarización con expresiones algebraicas Representación de funciones Modelización
Contenido	Funciones lineales, representación, pendiente, ordenada en el origen, proporcionalidad
Objetivos	O3 Reconocer la expresión de algunas funciones elementales, sus elementos y propiedades O5 Interpretar gráficas de funciones O6 Representar funciones elementales a partir de su expresión algebraica O7 Hallar la expresión algebraica de una función a partir de gráficas, tablas o enunciados. O8 Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados
Competencias	CE1 Resolver problemas CE5 Conexiones intramatemáticas CE6 Conexiones extramatemáticas CE7 Representaciones
Formulación	Escrita
Materiales y recursos	Lápiz y papel (mejor cuadriculado), calculadora
Agrupamiento e interacción	Por parejas (interacción alumno-alumno)
Contexto / Situación de aprendizaje	Público/Social (Consumo)
Temporalización	25 minutos
Complejidad	Conexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	Sí, porque los datos que se utilizan provienen de un contexto real como es una factura eléctrica.
Significativa	No cumple especialmente ninguno de los requisitos para ser significativa.
Fortalezas	Situación real y relevante Tarea no rutinaria Moviliza distintas capacidades, además de las asociadas con funciones (por ejemplo, el trabajo con porcentajes) Toma de decisiones asociada a la compra de distintos tipos de frigoríficos
Debilidades	El contexto se pierde un poco en los apartados intermedios, pero vuelve en el final con la interpretación de la pendiente Como el contexto se pierde, no hay desplazamiento del contexto real al matemático

ANALISIS DE LA TAREA 6.2: Etiquetas energéticas	
Meta	Interpretación de contextos reales Elaboración de tablas Representación de funciones Modelización con funciones lineales
Contenido	Funciones lineales, representación, pendiente, ordenada en el origen, proporcionalidad
Objetivos	O3 Reconocer la expresión de algunas funciones elementales, sus elementos y propiedades O5 Interpretar gráficas de funciones O6 Representar funciones elementales a partir de su expresión algebraica O7 Hallar la expresión algebraica de una función a partir de gráficas, tablas o enunciados. O8 Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados
Competencias	CE1 Resolver problemas CE5 Conexiones intramatemáticas CE6 Conexiones extramatemáticas CE7 Representaciones
Formulación	Escrita
Materiales y recursos	Lápiz y papel (mejor cuadriculado), calculadora
Agrupamiento e interacción	Individual (sin interacción)
Contexto / Situación de aprendizaje	Público/Social (Consumo)
Temporalización	25 minutos
Complejidad	Conexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	Sí, porque los datos que se utilizan provienen de un contexto real como son las etiquetas de eficiencia energética.
Significativa	No cumple especialmente ninguno de los requisitos para ser significativa.
Fortalezas	Situación real y relevante Tarea no rutinaria Moviliza distintas capacidades, además de las asociadas con funciones (por ejemplo, el trabajo con porcentajes) Toma de decisiones asociada a la compra de distintos tipos de frigoríficos
Debilidades	El contexto se pierde un poco en los apartados intermedios, pero vuelve en el final con la interpretación de la pendiente Como el contexto se pierde, no hay desplazamiento del contexto real al matemático

ANÁLISIS DE LA TAREA 7.1: Marbleslide. Rectas (Similar para 9.1 Marbleslide. Parábolas)	
Meta	Uso de funciones lineales y parabólicas para modelizar trayectorias
Contenido	Modelización de fenómenos reales mediante funciones lineales y cuadráticas Expresión algebraica y gráfica de funciones Parámetros
Objetivos	O3 Reconocer la expresión de algunas funciones elementales, sus elementos y propiedades O6 Representar funciones elementales a partir de su expresión algebraica O7 Hallar la expresión algebraica de una función a partir de gráficas, tablas o enunciados O8 Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados
Competencias	CE1 Resolver problemas CE6 Conexiones extramatemáticas CE7 Representaciones CE9 Regulación emocional CE10 Trabajo en equipo
Formulación	Oral
Materiales y recursos	Dispositivos electrónicos (preferiblemente ordenador o tabletas, o móviles en su defecto; uno por pareja)
Agrupamiento e interacción	Agrupación por parejas
Contexto / Situación de aprendizaje	Científico
Temporalización	50 min
Complejidad	Conexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	No.
Significativa	Sí, porque pone en práctica conocimientos previos.
Fortalezas	Al poder jugar con los parámetros de forma continua, se puede conectar la gráfica de una función con su expresión algebraica. Mantiene el contexto durante toda la tarea No rutinaria Estimula el razonamiento del alumnado.
Debilidades	No realista ni relevante No moviliza capacidades de orden superior.

ANÁLISIS DE LA TAREA 8.3: Distancia de seguridad	
Meta	Escoger variables dependiente e independiente Representar datos en una tabla Buscar patrones Modelizar con funciones Extrapolar tendencias
Contenido	Funciones cuadráticas, variables dependiente e independiente, representación
Objetivos	O3 Reconocer la expresión de algunas funciones elementales, sus elementos y propiedades O5 Interpretar gráficas de funciones O6 Representar funciones elementales a partir de su expresión algebraica O7 Hallar la expresión algebraica de una función a partir de gráficas, tablas o enunciados O8 Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados
Competencias	CE1 Resolver problemas CE3 Plantear conjeturas CE6 Conexiones extramatemáticas CE7 Representaciones
Formulación	Escrita
Materiales y recursos	Lápiz y papel (mejor cuadriculado)
Agrupamiento e interacción	Individual (sin interacción)
Contexto / Situación de aprendizaje	Público (el coche y la seguridad en la circulación)
Temporalización	25 min
Complejidad	Conexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	Sí, de hecho, los datos están sacados de un cartel de la DGT
Significativa	De nuevo, no encaja bien en ninguna de las características propias de las tareas significativas
Fortalezas	Situación real y de relevancia para la seguridad vial La relevancia se mantiene al preguntar en todos los apartados por velocidad o espacio y tiempo de frenado Tarea no rutinaria Promueve desplazamiento del contexto del problema al mundo matemático necesario para resolverlo y viceversa Es secuencial
Debilidades	No toma de decisiones

ANALISIS DE LA TAREA 10.1: Pintando la valla de casa	
Meta	Representación de funciones a trozos Interpretación de situaciones Modelización
Contenido	Funciones a trozos, funciones constantes, funciones lineales
Objetivos	O2 Hallar el dominio y el recorrido de funciones O6 Representar funciones elementales a partir de su expresión algebraica O7 Hallar la expresión algebraica de una función a partir de gráficas, tablas o enunciados O8 Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados
Competencias	CE1 Resolver problemas CE2 Validar soluciones CE6 Conexiones extramatemáticas CE7 Representaciones CE8 Comunicación CE10 Trabajo en equipo
Formulación	Escrita
Materiales y recursos	Lápiz y papel (mejor cuadriculado)
Agrupamiento e interacción	Individual para el primer apartado, por parejas para el segundo y el tercero, y en gran grupo para la comparación final (interacción alumno-alumno)
Contexto / Situación de aprendizaje	Privado (tareas domésticas)
Temporalización	20 min
Complejidad	Conexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	Sí, los datos podrían presentarse perfectamente en una situación real
Significativa	En este caso sí que se deben activar conocimientos previos (relación área-longitud, representar diferentes variables) Por otro lado, la interpretación de los datos del enunciado en relación a las gráficas dadas puede suponer un reto para los alumnos. Además, si se compara la gráfica creada con la primera de las gráficas, debe tener la misma forma, lo que permite al alumno conocer si ha resuelto bien la tarea. Luego sí es significativa.
Fortalezas	Realista Se mantiene el contexto No rutinaria Promueve la matematización Moviliza diferentes capacidades
Debilidades	No tiene por qué movilizar las capacidades de orden superior.

ANALISIS DE LA TAREA 10.2: Crucero por el Mediterráneo	
Meta	Resolver problemas con funciones definidas a trozos Representar funciones definidas a trozos Discutir las ventajas y desventajas del modelo propuesto
Contenido	Modelización de fenómenos reales mediante funciones. Representación gráfica de funciones. Propiedades de funciones continuas.
Objetivos	O5 Interpretar gráficas de funciones O6 Representar funciones elementales a partir de su expresión algebraica O7 Hallar la expresión algebraica de una función a partir de gráficas, tablas o enunciados O8 Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados
Competencias	CE1 Resolver problemas CE7 Representaciones CE8 Comunicar
Formulación	Escrita
Materiales y recursos	Lápiz y papel (mejor cuadriculado)
Agrupamiento e interacción	Individual (sin interacción)
Contexto / Situación de aprendizaje	Social/pública (oferta de agencia de viajes)
Temporalización	20 min
Complejidad	a)-b) Reproducción, f) Reflexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	Sí, la situación podría corresponderse con una oferta real
Significativa	Sí. Trabaja la modelización y las propiedades de las funciones a trozos, y se relaciona con otras disciplinas (economía y empresa).
Fortalezas	Realista Se mantiene el contexto No rutinaria Promueve conexiones matemáticas Moviliza diferentes capacidades Fomenta la toma de decisiones
Debilidades	No tiene porqué movilizar capacidades de orden superior

ANALISIS DE LA TAREA 11.1: La caminata	
Meta	Familiarizarse con la representación de gráficas de funciones lineales en coordenadas cartesianas. Calcular puntos de corte de funciones definidas a trozos. Introducción, de manera intuitiva, al teorema de Bolzano.
Contenido	Modelización de fenómenos reales mediante funciones. Representación gráfica de funciones. Propiedades de funciones continuas.
Objetivos	O5 Interpretar gráficas de funciones O8 Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados
Competencias	CE1 Resolver problemas CE3 Plantear conjeturas CE8 Comunicar
Formulación	Escrita, salvo la última reflexión que sería oral
Materiales y recursos	Lápiz y papel (mejor cuadriculado); pizarra en la última parte
Agrupamiento e interacción	Individual (sin interacción) la primera parte Gran grupo la última reflexión (interacción alumno-alumno y alumno-profesor)
Contexto / Situación de aprendizaje	Privado/personal (deporte y excursiones)
Temporalización	20 min (primera parte) + 5 min (segunda parte)
Complejidad	a)-e) Reproducción, f) Conexión Discusión final reflexión
Secuenciación	Desarrollo
Realista	Sí, los datos podrían corresponderse con los de una salida de senderismo real
Significativa	Sí. Trabaja la modelización y las propiedades de las funciones continuas, se relaciona con otras disciplinas (educación física) y supone un reto.
Fortalezas	Realista Se mantiene el contexto No rutinaria Promueve conexiones matemáticas Moviliza diferentes capacidades Estimula capacidades de orden superior (entender el teorema de Bolzano)
Debilidades	No fomenta la toma de decisiones

ANÁLISIS DE LA TAREA 11.2: El río	
Meta	Modelizar un problema contextualizado con funciones
Contenido	Representación de funciones y cálculo de pendientes
Objetivos	O5 Interpretar gráficas de funciones O8 Modelizar situaciones y resolver problemas contextualizados
Competencias	CE1 Resolver problemas CE6 Conexiones extramatemáticas CE7 Representaciones
Formulación	Escrita
Materiales y recursos	Papel y lápiz, dispositivos electrónicos
Agrupamiento e interacción	Individual; alumno-alumno
Contexto / Situación de aprendizaje	Público/Social (Medio ambiente)
Temporalización	25 minutos
Complejidad	Conexión
Secuenciación	Cierre
Realista	Es realista porque es un contexto real.
Significativa	Sí lo es, porque tiene conexiones con la geografía y es un ejemplo de uso real.
Fortalezas	Realista Se mantiene el contexto Es no rutinaria Promueve la matematización Moviliza diferentes capacidades, como interpretar y buscar Estimula la toma de decisiones por parte del alumnado
Debilidades	Ninguna, aparentemente.

Bibliografía

Alba, C. (2019). Diseño Universal para el Aprendizaje: un modelo teórico-práctico para una educación inclusiva de calidad. *Participación educativa, 9*, 55-66.

Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E., Pérez, A., Donaire, J.J., Estebaranz, J., Benito, V.M., Pérez, A., Álvarez, J.L., Arranz, J.M., Losada, R., Mora, J.A. y Sada, M. (2021). Funciones elementales. En J. Linaje (Ed.), *4.º ESO Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Savia Nueva generación* (148-193). SM

Alonso, R. y Soguero, C. (2016). [Unidad didáctica de Matemáticas (3º ESO). Funciones (muy) reales]

Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J. L., y Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de investigación y divulgación en matemática educativa*, 9(1), 6-19.

Azcárate Giménez, C., y Deulofeu Piquet, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis, 1990.

Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 7(1), 5-23.

Carlson M. y Oehrtman M. (2005). *Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function*

Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?,¿cómo? aportaciones de la investigación. *X Jornadas para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas, X JAEM, Zaragoza. Ponencia P41*, 367-377.

Dorado, I., y Díaz, J. L. (2014). La matemática como herramienta de modelización para dar respuesta a situaciones problema. *XXIII Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas, 135.*

González, P. (2015). Dificultades en el aprendizaje de las funciones en matemáticas [Trabajo Final de Máster, Universidad de Cantabria].

López, J., y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato.

Lupiánez, J. (2016). Sistemas de representación. L. Rico Romero y A. Moreno Verdejo (Coords.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (págs. 119–137). Pirámide.

Pickover, C. A. (2009). El libro de las matemáticas. *De Pitágoras a la 57º dimensión*, *250*.

Ortega, T., y Pecharromán, C. (2014). [Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones].

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, 76, de 30 de marzo de 2022. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con 140-158

Rico, L., y Moreno, J. A. (2016), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Ediciones Pirámide.

Sastre, V., Rey, G., y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *16*, 141-155.