Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis doctoral

Idoneidad didáctica de la probabilidad en documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria. Implicaciones para la formación de profesores.

Bethzabe Cotrado Mendoza

Granada, 2024

Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Idoneidad didáctica de la probabilidad en documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria. Implicaciones para la formación de profesores.

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de la doctora María J. Burgos Navarro y el doctor Pablo Beltrán Pellicer, que presenta Dña. Bethzabe Cotrado Mendoza para optar al grado de Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada.

Fdo. Bethzabe Cotrado Mendoza

Vº Bº de los directores:

Fdo. María J. Burgos Navarro

Fdo. Pablo Beltrán Pellicer

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Bethzabe Cotrado Mendoza
ISBN: 978-84-1195-247-7
URI: https://hdl.handle.net/10481/90800

La doctoranda Bethzabe Cotrado Mendoza y sus directores de tesis, los doctores María J. Burgos Navarro y Pablo Beltrán Pellicer garantizamos al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por la doctoranda bajo la dirección de los directores de tesis y que hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la elaboración de la memoria, se han respetado los derechos de otros autores citándolos cuando se han utilizado sus resultados o trabajos de investigación.

De igual forma, certificamos que:

- Bethzabe Cotrado Mendoza es co-autora de todos y cada uno de los artículos publicados, aceptados para su publicación o en evaluación, compendiados en los capítulos del 3 al 7 de esta memoria.
- El trabajo de elaboración de cada uno de estos artículos y comunicaciones en congresos ha formado parte esencial de la formación predoctoral de Bethzabé Cotrado Mendoza.
- Todos y cada uno de los artículos compendiados en esta memoria de tesis doctoral son originales y no han sido utilizados por ninguno de sus coautores en otras tesis doctorales.

En Granada a 29 de enero de 2024.

Doctoranda

Fdo: Bethzabe Cotrado Mendoza

Directores de la Tesis

Fdo: María J. Burgos Navarro

Fdo: Pablo Beltrán Pellicer

RECONOCIMIENTO

Tesis doctoral realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033.

AGRADECIMIENTOS

Mi mayor agradecimiento es a la muestra de confianza y dedicación de mis directores María Burgos Navarro y Pablo Beltrán Pellicer que con toda su experiencia y conocimiento han hecho posible esta tesis doctoral. María, por tu paciencia, apoyo inquebrantable, disposición constante y por tus mensajes amables que me han fortalecido en los momentos de bloqueo. Pablo tu valioso aporte y guía en cada momento que necesité en este trabajo han sido sustanciales.

A mis padres y hermanos por entender mi ausencia en los momentos de reunión familiar. A José Antonio, por tu constante presencia, apoyo y por compartir mis alegrías y éxitos como mis tristezas.

A mis amigos y amigas, les agradezco por sus conversaciones enriquecedoras, valiosos consejos e ideas, así como por sus buenos deseos y constante comunicación.

Agradezco al Dr. Alfredo por permitirme ingresar a su aula. A todos los estudiantes, futuros profesores del Programa de Matemática, Física, Computación e Informática de la Facultad de Educación, espero que las experiencias que compartimos les resulten útiles. Confío en haber logrado transmitir un poco de esa responsabilidad de la que tantas veces hablamos.

A la Universidad de Granada, España y a la Universidad Nacional del Altiplano, Perú, por ser entes formadores fundamentales en mi trayectoria académica.

Asimismo, extiendo mi agradecimiento a la vida por los momentos de superación y desarrollo profesional que he experimentado.

A Öguz por ser una parte invaluable de mi vida y por haberme acompañado durante mis días y noches de estudio.

Mis más sinceros e infinitos agradecimientos a todos.

RESUMEN

Esta tesis doctoral se centra en el tratamiento que recibe la probabilidad en los materiales curriculares de Educación Secundaria en Perú, las implicaciones para la enseñanza y aprendizaje de este contenido. Por una parte, dado el decisivo papel que estos recursos juegan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la tesis trata de dar respuesta a la necesidad de evaluar su adecuación, así como analizar su influencia en la comprensión de conceptos y anticipar posibles dificultades. Por otra parte, aborda la importancia de diseñar e implementar acciones formativas con docentes en formación con el objetivo de fomentar un uso crítico de los materiales curriculares apoyado en conocimientos y competencias didáctico-matemáticas en el contexto de la probabilidad.

Los objetivos que guían este estudio son: a) analizar la representatividad y articulación de los significados de la probabilidad en los documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria; b) revisar y adaptar criterios e indicadores de idoneidad didáctica, para generar una herramienta que permita evaluar el estudio de la probabilidad en dichos documentos, contemplando no solo la dimensión epistémica, sino también la cognitivo-afectiva e instruccional; c) aplicar dicha herramienta para evaluar documentos normativos y cuadernos del estudiante sobre probabilidad en Educación Secundaria; d) planificar y llevar a la práctica acciones formativas en las que futuros profesores puedan familiarizarse con el uso de la guía de idoneidad didáctica para valorar la pertinencia y potencialidad de dichos recursos para su gestión docente.

Para abordar los objetivos establecidos, en primer lugar, se lleva a cabo una revisión sistemática de la literatura sobre tres elementos esenciales y entrelazados de la educación matemática: el didáctico, la probabilidad y la formación de profesores (Capítulo 1). Dado el interés de la investigación, el marco teórico empleado es el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007; 2019). Dicho marco facilita

las herramientas teóricas y metodológicas con las que abordar el problema de investigación: la noción de significado pragmático (Batanero, 2005; Godino et al., 2007), la teoría de la idoneidad didáctica (Godino, 2013) y el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (modelo CCDM) del profesor (Godino et al., 2017). Estas herramientas aparecen descritas en el Capítulo 2 de esta memoria.

El estudio adopta un enfoque predominantemente cualitativo. Para desarrollar las guías de valoración de la idoneidad didáctica, se aplica el análisis de contenido (Cohen et al., 2011) sobre documentos normativos, investigaciones referentes a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad e investigaciones sobre análisis de materiales curriculares (normativas y libros de texto, esencialmente). En la parte de la investigación destinada a la formación de profesores, se sigue el enfoque propio de una investigación de diseño, conforme a la propuesta de ingeniería didáctica del EOS (Godino et al., 2014). Esta metodología detallada en el Capítulo 2, comprende cuatro fases distintas que guían el desarrollo de la investigación: estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación o análisis retrospectivo. En la fase preliminar, se exploran los significados de la probabilidad en los materiales curriculares oficiales actuales, como directrices curriculares y cuadernos de trabajo correspondientes al sexto ciclo (primer y segundo grado de Educación Secundaria), y se concreta la guía de valoración de idoneidad didáctica que usaremos en las siguientes fases. En la elaboración de esta pauta, pretendemos que sea una herramienta de valoración global del material, considerando además del aspecto epistémico y ecológico, las facetas cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional que no habían sido consideradas en investigaciones previas sobre materiales curriculares de probabilidad. Se persigue disponer de una visión holística de la pertinencia de los procesos instruccionales previstos o pretendidos por medio de dichos recursos. En la fase de diseño, se planifican las intervenciones formativas con futuros profesores peruanos de Educación Secundaria. El análisis didáctico a priori de los materiales que se emplean en los talleres (análisis de prácticas, objetos y procesos en el Capítulo 3; análisis de la idoneidad didáctica del programa curricular y los cuadernos de trabajo sobre probabilidad en el Capítulo 4) se realiza en base a los instrumentos desarrollados en la fase previa (Capítulo 3). La fase de implementación y evaluación implica la observación de las interacciones entre los futuros profesores y de estos con los recursos didácticos. En particular, el análisis a priori facilita la confrontación de los resultados observados en las producciones de los participantes con los previstos por medio del análisis experto.

Los resultados del análisis de prácticas, objetos y procesos en los materiales curriculares (Capítulo 3) revelan un énfasis en el significado clásico de la probabilidad en detrimento de los significados intuitivo y frecuencial, lo que puede derivar en una enseñanza sesgada de la probabilidad. Sobre este análisis de significados, la aplicación de la guía de valoración de idoneidad didáctica a los materiales (Capítulo 4) nos permite identificar carencias en los materiales asociadas a diferentes facetas, así como a proponer posibles mejoras. Se observa una ausencia de conceptos esenciales o uso impreciso de términos y expresiones en las definiciones, por ejemplo, de espacio muestral o suceso. No se clarifica las condiciones de uso de la regla de Laplace, o se aplica de manera inadecuada cuando la situación no lo permite porque los sucesos elementales no son equiprobables. Las situaciones-problema asociadas al significado frecuencial ignoran la experimentación o simulación y se reducen al cálculo de la frecuencia relativa (porcentajes) a partir de gráficas o tablas que recogen las frecuencias absolutas. Desde el punto de vista cognitivo, se presta una escasa atención a los conocimientos previos. En los cuadernos de trabajo se observan disparidades con el programa curricular, falta de articulación entre significados clásico, frecuencial e intuitivo, escasez de situaciones de experimentación y simulación, y carencia de tareas grupales para fomentar la interacción entre estudiantes, entre otras limitaciones. Estos resultados deberían ser considerados por los profesores que utilizan materiales curriculares y marcos normativos.

Distinguir los significados e identificar los objetos intervinientes en las prácticas matemáticas, si bien es un desafío para los futuros profesores, mejora su capacidad para analizar el potencial de las tareas que proponen a los estudiantes y anticipar posibles conflictos. Los resultados de las acciones formativas con los futuros profesores, detallados en los capítulos 5, 6 y 7, muestran cómo es común en investigaciones previas en otros contextos educativos un conocimiento común deficiente en probabilidad en los futuros profesores. Esta limitación puede motivar sus dificultades para diferenciar las prácticas matemáticas, identificar objetos matemáticos y reconocer los significados de la probabilidad implicados. Los futuros profesores también muestran limitaciones en la valoración de indicadores de idoneidad y dificultades para elaborar juicios razonados sobre materiales curriculares. Estas limitaciones podrían deberse a la falta de formación específica y al poco tiempo del que dispusieron para familiarizarse con los indicadores de idoneidad. No obstante, se observa que disponer de los indicadores ayuda a reconocer las carencias del material en dicha valoración.

La investigación realizada sugiere que, para mejorar estos resultados, es preciso dedicar más espacio a la reflexión sobre una mayor variedad de situaciones-problemas que permitan lograr un nivel adecuado de la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas. Para desarrollar su capacidad de valoración y gestión de los materiales, se requiere reforzar los conocimientos didáctico-matemáticos en probabilidad desde el punto de vista epistémico (prácticas, objetos y procesos característicos de los diferentes significados de la probabilidad y cómo se relacionan), cognitivo (factores que influyen en la complejidad de las situaciones de probabilidad y sesgos), así como en las demás facetas, donde se observa una idea confusa de los aspectos afectivos, lo que supone el trabajo autónomo del estudiante, o la importancia de adoptar el currículo en los materiales para garantizar una progresión de aprendizaje sin saltos.

ABSTRACT

This doctoral thesis focuses on the treatment of probability in Secondary Education curriculum materials in Peru, the implications for the teaching and learning of this content. On one hand, given the crucial role these resources play in the teaching and learning of mathematics, the thesis seeks to address the need to evaluate their adequacy, as well as analyze their influence on the understanding of concepts and anticipate possible difficulties. On the other hand, it addresses the importance of designing and implementing formative actions with teacher trainees with the goal of fostering a critical use of curriculum materials supported by mathematical-didactic knowledge and competencies in the context of probability.

The objectives guiding this study are: a) to analyze the representativeness and articulation of the meanings of probability in the normative documents and Secondary Education curriculum materials; b) to review and adapt criteria and indicators of didactic suitability, to generate a tool that allows the evaluation of the study of probability in these documents, considering not only the epistemic dimension, but also the cognitive-affective and instructional; c) to apply this tool to evaluate normative documents and student workbooks on probability in Secondary Education; d) to plan and implement formative actions in which prospective teachers can become familiar with the use of the didactic suitability guide to assess the relevance and potential of these resources for their teaching management.

To address the established objectives, firstly, a systematic review of the literature is conducted on three essential and intertwined elements of mathematics education: the didactic, probability, and teacher training (Chapter 1). Given the research interest, the theoretical framework employed is the Onto-semiotic Approach (OSA) to Mathematical Knowledge and Instruction (Godino et al., 2007; 2019). This framework facilitates the theoretical and methodological tools with which to address the research problem: the notion of pragmatic meaning (Batanero, 2005; Godino et al., 2007), the theory of didactic suitability (Godino, 2013)

and the model of mathematical-didactic knowledge and competencies of the teacher (Godino et al., 2017). These tools are described in Chapter 2 of this dissertation.

The study adopts a predominantly qualitative approach. To develop the didactic suitability assessment guides, content analysis (Cohen et al., 2011) is applied to normative documents, research on the teaching and learning of probability, and research on the analysis of curriculum materials (norms and textbooks, essentially). In the part of the research dedicated to teacher training, the approach typical of design-based research is followed, according to the proposal of didactic engineering of the OSA (Godino et al., 2014). This methodology detailed in Chapter 2, comprises four distinct phases that guide the development of the research: preliminary study, design, implementation, and retrospective evaluation or analysis. In the preliminary phase, the meanings of probability in the current official curriculum materials, such as curricular guidelines and workbooks corresponding to the sixth cycle (first and second grade of Secondary Education), are explored and the didactic suitability assessment guide that we will use in the following phases is specified. In the development of this guideline, which we intend to be a tool for a global assessment of the material, we consider in addition to the epistemic and ecological aspect, the cognitive, affective, interactional and mediational facets that had not been considered in previous research on probability curriculum materials. The aim is to have a holistic view of the relevance of the instructional processes foreseen or intended through these resources. In the design phase, formative interventions with prospective Peruvian Secondary Education teachers are planned. The a priori didactic analysis of the materials used in the workshops (analysis of practices, objects, and processes in Chapter 3; analysis of the didactic suitability of the curricular program and the workbooks on probability in Chapter 4) is carried out based on the instruments developed in the previous phase (Chapter 3). The implementation and evaluation phase involves observing the interactions between prospective teachers and with the didactic resources. In particular, the a priori analysis facilitates the confrontation of the observed results in the participants' productions with those anticipated by expert analysis.

The results of the analysis of practices, objects, and processes in the curriculum materials (Chapter 3) reveal an emphasis on the classical meaning of probability to the detriment of intuitive and frequential meanings, which may lead to a biased teaching of probability. Based on this analysis of meanings, the application of the didactic suitability assessment guide to the materials (Chapter 4) allows us to identify shortcomings in the materials associated with different facets, as well as to propose possible improvements. There is an absence of essential concepts or imprecise use of terms and expressions in the definitions, for example, of sample space or event. The conditions for using Laplace's rule are not clarified, or it is applied inappropriately when the situation does not allow it because the elementary events are not equiprobable. The problem situations associated with the frequential meaning ignore experimentation or simulation and are reduced to the calculation of relative frequency (percentages) from graphs or tables that collect absolute frequencies. From a cognitive point of view, little attention is paid to prior knowledge. In the workbooks, disparities are observed with the curricular program, lack of articulation between classical, frequential, and intuitive meanings, scarcity of experimental and simulation situations, and lack of group tasks to foster interaction among students, among other limitations. These results should be considered by teachers using curriculum materials and normative frameworks.

Distinguishing the meanings and identifying the objects involved in mathematical practices, although a challenge for prospective teachers, improves their ability to analyse the potential of the tasks they propose to students and anticipate possible conflicts. The results of the formative actions with prospective teachers, detailed in Chapters 5, 6, and 7, show how, as is common in previous research in other educational contexts, there is deficient common knowledge in probability in prospective teachers. This limitation may motivate their difficulties in differentiating mathematical practices, identifying mathematical objects, and recognizing the meanings of probability involved. Prospective teachers also show limitations in assessing indicators of suitability and difficulties in making reasoned judgments about curriculum materials. These limitations could be due to the lack of specific training and the short time they had to familiarize themselves with the suitability indicators. However, it is observed that having the indicators helps to recognize the shortcomings of the material in such an assessment.

The research suggests that, to improve these results, it is necessary to dedicate more space to reflection on a greater variety of problem situations that allow achieving an adequate level of competence in the analysis of meanings and ontosemiotic analysis of mathematical practices. To develop their capacity for assessment and management of materials, it is necessary to reinforce the didactic-mathematical knowledge in probability from the epistemic point of view (practices, objects, and processes characteristic of the different meanings of probability and how they relate), cognitive (factors that influence the complexity of probability situations and biases), as well as in the other facets, where there is a confused idea of the affective aspects, what autonomous student work entails, or the importance of adopting the curriculum in the materials to ensure a progression of learning without gaps.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN GENERAL

Diversos investigadores y propuestas curriculares defienden la necesidad de incorporar el análisis de datos y la probabilidad (ACARA, 2014; Batanero, 2004; Pratt y Kazak, 2018; Vásquez y Alsina, 2015) desde los primeros niveles educativos, en un intento por aprovechar las intuiciones de los escolares y progresar hacia la descripción, cuantificación y modelización de la incertidumbre, característica de una cultura probabilística (Gal, 2012).

El sistema educativo peruano se ha hecho eco de estas recomendaciones, y así el bloque estadística y probabilidades se ha afianzado desde el primer grado de Educación Primaria en el currículo actual, como base de la competencia para resolver problemas de gestión de datos e incertidumbre (MINEDU, 2017). En ese contexto, surge la necesidad de analizar documentos curriculares que condicionan y constituyen un referente para organizar la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Las escasas investigaciones sobre la presencia de la probabilidad en materiales curriculares (esencialmente libros de texto) muestran una mayor presencia de los contenidos ligados al significado clásico, que prioriza el contexto de los juegos de azar, en detrimento de los enfoques frecuencial o subjetivo (Alsina y Vásquez, 2016; Gómez-Torres, 2014; Sánchez, 2009; Serradó et al., 2005; Vásquez y Alsina 2015). Además, el tratamiento que recibe la probabilidad en algunos de estos materiales (por ejemplo, los libros de texto) no está en consonancia con lo que proponen las normativas curriculares (Rodríguez-Muñiz et al., 2019), por lo que se recomienda revisar el contenido de probabilidad en los materiales para garantizar que los estudiantes logren los objetivos fijados en el currículum (Alsina y Vásquez, 2016).

Los materiales curriculares actúan como intermediarios entre el currículo previsto y el implementado en el aula, determinando en gran medida el progreso en el aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, desde la investigación en educación matemática se debe valorar su grado de pertinencia. Valorar el grado de adecuación de estos materiales a los procesos de enseñanza que desde las instituciones educativas se consideran óptimos, requiere desarrollar instrumentos que orienten la reflexión en las diferentes facetas de los procesos de estudio de las matemáticas. Estos instrumentos deberán adecuarse al contenido matemático, en nuestro caso la probabilidad, a la especificidad del proceso instruccional (normativa curricular, libro de texto, cuaderno de trabajo), así como al contexto educativo (etapa escolar, entorno de los estudiantes, etc). Pero dado que son los profesores los encargados de usar estos recursos como soporte de su práctica docente, es preciso formar a los futuros docentes para que dispongan de conocimientos y competencias en la valoración y gestión de dichos recursos. En efecto, desde la investigación se insiste en que el profesor debe contar con conocimientos tanto matemáticos como didácticos para poder describir, explicar y valorar de manera sistémica los procesos de enseñanza y aprendizaje (Breda et al., 2017; Gellert et al., 2013; Giacomone et al., 2018; Pino-Fan et al., 2015). Adoptar el necesario enfoque crítico y reflexivo sobre el uso efectivo de materiales curriculares (Braga y Belver, 2016) incluye la capacitación en el desarrollo del currículo y la gestión de recursos como programas curriculares y guías didácticas, entre otros (Shawer, 2017). Los profesores deben ser competentes para interpretar la información presente en los materiales curriculares y realizar adaptaciones según las necesidades del contexto (Yang y Liu, 2019) y el tema a tratar.

Hemos observado una carencia de investigaciones sobre el tratamiento de los contenidos de probabilidad en el currículo y en los materiales curriculares, tales como cuadernos de trabajo, así como de investigaciones que se centren en el desarrollo de la competencia de análisis didáctico de futuros profesores empleando materiales curriculares, en particular, cuadernos de trabajo de los estudiantes. Ante esta situación, esta tesis parte del interés por investigar cómo se abordan los diferentes significados de la probabilidad en las directrices y materiales curriculares peruanos en Educación Secundaria, desarrollar instrumentos para su análisis y desarrollar propuestas formativas con profesores en formación para desarrollar esta competencia de análisis didáctico.

En este proceso, utilizamos el constructo idoneidad didáctica (Godino, 2013) como herramienta que nos permite sistematizar y articular coherentemente las diversas dimensiones involucradas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional) en los procesos instruccionales, siguiendo criterios consensuados por la comunidad científica (Breda et al., 2018). Para desarrollar una guía que permita valorar los materiales curriculares, partimos de los trabajos previos de Godino (2013) y Beltrán-Pellicer et al. (2018), centradas en el desarrollo profesional de los profesores, y en Castillo et al. (2022a, 2022b) como antecedentes en guías para libros de texto de matemáticas. Facilitar estas guías a los profesores no es suficiente; somos conscientes de que esto implica la necesidad de una formación específica, lo que nos lleva al diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas destinadas a desarrollar la competencia de análisis didáctico de programas y materiales curriculares, con futuros profesores.

El fundamento teórico que orienta nuestra investigación es el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2007; 2019). Empleamos la técnica de análisis de contenido (Cohen et al., 2011) para analizar y describir el significado de referencia global de la probabilidad, utilizando herramientas derivadas del análisis ontosemiótico. Estas mismas herramientas son utilizadas en la evaluación de los protocolos de respuestas de los participantes en las experiencias formativas. Asimismo, en el proceso de diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas, aplicamos la metodología de la ingeniería didáctica entendida en el sentido generalizado propuesto por el EOS (Godino et al., 2014) que lleva a diferenciar cuatro fases: estudio preliminar, diseño de las trayectorias didácticas, implementación y evaluación.

Dado que esta tesis se concibe como "tesis por compendio de artículos", las secciones de resultados corresponden a diversas publicaciones realizadas y la estructura total de la tesis comprende ocho capítulos.

El Capítulo 1, presenta una síntesis de investigaciones previas relacionadas con tres focos de interés entrelazados: análisis de materiales curriculares, probabilidad y formación de profesores; establece el problema de investigación, detallando las cuestiones, hipótesis y objetivos.

El Capítulo 2, presenta los elementos del Enfoque Ontosemiótico que aplicamos en nuestra investigación. Se presta especial atención a la teoría de la idoneidad didáctica, y al modelo CCDM del profesor. Asimismo, se proporciona una descripción detallada del enfoque metodológico utilizado, que incluye la ingeniería didáctica y la técnica de análisis de contenido basadas en el Enfoque Ontosemiótico.

El Capítulo 3, detalla el procedimiento de análisis de los significados relacionados con la probabilidad y cómo se integran en las directrices y materiales curriculares de Perú al inicio de la Educación Secundaria, dirigido a estudiantes de 12 y 13 años. Algunos de los datos presentados en este capítulo se recogen en el siguiente artículo.

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Análisis ontosemiótico de los contenidos de probabilidad en los documentos curriculares de Perú. *Educación Matemática, 34*(3), 97-131

El Capítulo 4, expone el proceso de revisión sistemática de los indicadores de idoneidad didáctica, destinado a evaluar programas y materiales curriculares sobre probabilidad dentro del marco del Enfoque Ontosemiótico. El objetivo principal es desarrollar una guía para evaluar los materiales curriculares de Educación Secundaria en Perú, específicamente dirigida a estudiantes de doce y trece años, en relación con el contenido de probabilidad. Este instrumento se utiliza para analizar las fichas dedicadas a la probabilidad en dos cuadernos de trabajo producidos por la misma institución responsable de la normativa curricular. Parte de la información presentada en este capítulo se vincula con los dos artículos siguientes:

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2021). Análisis de la idoneidad didáctica de la probabilidad en el Programa Curricular de Educación Secundaria peruana. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 34*(2), 547-558.

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales peruanos de Educación Secundaria en probabilidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 36*(73), 888-922.

El Capítulo 5, describe el diseño, implementación y resultados de una experiencia de formación con futuros profesores de matemáticas, centrándose en el desarrollo de la competencia de análisis didáctico de materiales curriculares relacionados con la probabilidad. Los detalles de esta experiencia están presentados en el artículo:

Cotrado, B., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Castro, A. (2023). Development of didactic analysis competence in prospective mathematics teachers (En revision).

El Capítulo 6, muestra los resultados de una intervención formativa dirigida a futuros profesores de matemáticas, enfocada en el análisis del programa curricular de Educación Secundaria en Perú. Los detalles completos de esta intervención se encuentran descritos en el artículo siguiente:

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2024). Análisis didáctico curricular: una experiencia con futuros profesores. Educação & Realidade. (En prensa)

El Capítulo 7, describe el diseño e implementación de una intervención formativa con futuros profesores de matemática peruanos destinada a desarrollar la competencia de análisis de idoneidad didáctica de materiales curriculares (cuaderno de trabajo del estudiante). Parte de la información incluida en este capítulo corresponde al siguiente artículo publicado:

> Cotrado, B., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Castro, A. (2023). Análisis didáctico de materiales curriculares por futuros profesores. *Cadernos de Pesquisa, 53*, e10031.

El Capítulo 8, ofrece una síntesis de los resultados de la investigación, en consonancia con los objetivos e hipótesis establecidos en el Capítulo 1, además de abordar posibles limitaciones del estudio y destacar las futuras líneas de investigación.

Para concluir, la tesis finaliza con las referencias bibliográficas utilizadas a lo largo de los diversos capítulos y los anexos organizados según la planificación de las trayectorias didácticas del estudio.

CAPÍTULO 1.
INTRODUCCIÓN

1. ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

El inicio de este capítulo establece el contexto y presenta una visión general de las investigaciones llevadas a cabo en el ámbito de la educación matemática, abordando tres elementos esenciales y entrelazados: el análisis didáctico curricular, la probabilidad y la formación de profesores.

1.1. Análisis didáctico de materiales curriculares

En los sistemas educativos se pueden distinguir elementos curriculares que se desarrollan oficialmente y elementos que se operacionalizan mediante la práctica (Remillard y Heck, 2014). El currículo oficial se materializa en documentos escritos que incluyen directrices o normas nacionales o locales, programas de estudio, materiales curriculares disponibles, así como documentos específicos de las instituciones educativas. Estos documentos, establecidos por organismos gubernamentales en base a políticas educativas determinan (a) las metas y objetivos educativos, (b) el contenido de las evaluaciones posteriores y (c) el currículo designado (Choppin et al., 2020). Los propósitos y objetivos curriculares son las expectativas que se concretan habitualmente en estándares de aprendizaje que los estudiantes deberían lograr tras recibir instrucción. Cabe observar que el contenido de las evaluaciones oficiales forma parte del currículo, ya que, al usarse para evaluar el progreso del aprendizaje de los estudiantes condiciona la instrucción previa.

El término *currículo designado* hace referencia al conjunto de planes de enseñanza prescritos por una entidad autorizada, como un Ministerio de Educación, y destaca la función que los materiales curriculares desempeñan en los sistemas escolares (Choppin et al., 2020). Según Remillard y Heck (2014) el *currículo operativo o promulgado*, abarca lo que realmente ocurre o experimentan los estudiantes en el aula. Sus componentes incluyen (a) el currículo previsto por el profesor, es decir las interpretaciones y decisiones de los profesores para planificar la enseñanza, (b) el currículo aplicado, que son las interacciones entre profesores y estudiantes en relación con las tareas de cada sesión o unidad de aprendizaje, y (c) los logros de los estudiantes (Choppin et al., 2020).

En el contexto del currículo oficial, los materiales curriculares desempeñan un papel crucial como vínculo entre los objetivos y políticas curriculares y la práctica educativa, actuando como mediadores entre lo planeado y el currículo implementado (Li et al., 2009, Valverde et al., 2002), por lo que es fundamental analizarlos en detalle (Remillard y Heck, 2014). Los materiales curriculares comprenden un conjunto de recursos educativos fundamentales para apoyar las decisiones educativas de los profesores y facilitar el proceso de aprendizaje e interacción entre los estudiantes (Davis y Krajcik, 2005; Pepin y Gueudet, 2018; Remillard y Kim, 2020). Entre estos materiales destacan los libros de texto, los manuales o guías para profesores, cuadernos o fichas de trabajo para estudiantes y otros medios basados en recursos digitales interactivos (libros de texto digitales, módulos en línea, simuladores, presentaciones en vídeo y software educativo) que se diferencian por su naturaleza y función (Pepin et al., 2017; Pepin y Gueudet, 2018).

Los libros de texto son herramientas que estructuran contenidos y orientan la planificación del estudio, diseñados para el consumo e interacción de los estudiantes (Fan et al., 2013). A menudo, incluyen ejercicios, problemas y tareas que los estudiantes deben completar. Además, ofrecen ejemplos, ilustraciones y notas para facilitar la comprensión. Gran parte de la literatura sobre materiales curriculares ha priorizado los libros de texto, dejando de lado otros componentes cruciales como los *cuadernos de trabajo* para los estudiantes. Estos cuadernos, vistos como herramientas curriculares multifuncionales (Hoadley y Galant, 2016) cumplen tres roles esenciales: a) de práctica, porque proporcionan a los estudiantes tareas o actividades estructuradas y secuenciadas, que desafían y amplían la comprensión conceptual de los contenidos y habilidades desarrollados en la clase o en los libros de texto; b) de evaluación, al abordar distintas actividades secuenciadas con diferentes grados de complejidad y utilizando respuestas, soluciones o rúbricas; y c) de seguimiento, pues permiten determinar cuánto contenido del plan curricular se cubre y en qué niveles de demanda cognitiva.

La concepción inicial de los cuadernos de trabajo es la de asistir a los profesores en la definición de las tareas para los estudiantes, asegurando la cobertura curricular al brindar instrucción y actividades con trayectorias didácticas específicas por secciones, formando así una planificación didáctica completo para todo el año (Hoadley y Galant, 2016). Estos cuadernos tienen un enfoque híbrido en algunos casos, actuando como libros de texto y colecciones estructuradas de hojas o fichas de trabajo. Por un lado, contienen instrucciones, explicaciones y textos extensos para lectura; por otro, facilitan la interacción entre estudiante y profesor, estimulando la discusión y la acción. Cada sección del cuaderno de trabajo se organiza sistemáticamente, proporcionando explicaciones conceptuales, definiciones de términos y símbolos relevantes, junto con una serie de ejercicios prácticos. Además, los cuadernos de trabajo contemplan espacios para que los estudiantes escriban sus respuestas, guiando así la naturaleza y extensión del texto que deben producir.

Las guías del profesor están diseñadas específicamente para comunicarse con los docentes, ayudan a dar forma a las lecciones, supervisar el progreso de los estudiantes y proporcionar apoyo adicional (Remillard, 2018). Por lo general, se organizan en lecciones diarias que se alinean con el libro de texto del estudiante.

Finalmente, los recursos digitales, dentro de su variedad, destacan por su mayor interactividad, personalización y evaluación adaptativa. Contienen una secuencia de actividades interactivas con contenido multimedia, como videos, explicaciones en audio y animaciones, diseñados para abordar cada tema (Heine et al., 2023).

En el ámbito de las matemáticas escolares, los materiales curriculares han recibido una atención especial en la investigación en Educación Matemática. Han sido considerados objetos de estudio en sí mismos, subrayando la necesidad crítica de evaluar su calidad (Fan et al., 2013; Schubring y Fan, 2018). Por ende, el análisis de la calidad de los materiales curriculares se ha convertido en una prioridad en este campo de estudio. En este contexto, presentamos una síntesis de estudios generales que ofrecen una perspectiva integral sobre los avances y requisitos en el análisis didáctico de los materiales curriculares, con un enfoque especial en el ámbito de las matemáticas escolares. Asimismo, destacamos investigaciones que proponen herramientas y métodos específicos para llevar a cabo este análisis de manera efectiva.

1.1.1 El análisis de los materiales curriculares en el contexto de las matemáticas

La importancia de los materiales curriculares como reflejo de la aplicación de los currículos oficiales ha sido estudiada por autores como Remillard (2005) y Remillard y Kim (2020) dentro del campo de la Educación Matemática. Estos materiales están conformados por una secuencia de prácticas y enfoques didácticos para abordar un tema específico, generalmente diseñados para un público y contexto amplios. Choppin (2011) considera estas secuencias de prácticas como un componente crítico en muchos procesos de enseñanza, que a menudo no son evidentes para los profesores. En consecuencia, los profesores deben evaluar y ajustar estas secuencias según las necesidades particulares de sus estudiantes, el contexto en el que se encuentran, sus objetivos y los estándares locales (Brown, 2009; Remillard, 2005).

Los materiales curriculares no solo incluyen el desarrollo de conocimientos institucionales, sino también contemplan los conocimientos previos que los estudiantes deben tener, indicaciones u orientaciones y, en algunos casos, elementos motivadores contextualizados a las necesidades, intereses, valores y creencias de los estudiantes. Valorar la adecuación de estos materiales implica la creación de herramientas que guíen la reflexión en estas y otras dimensiones que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Santaolalla, 2014). A pesar de ello, Monterrubio y Ortega (2012) concluyen, después de una exhaustiva revisión bibliográfica, que no existe un modelo completo para evaluar materiales curriculares (libros de texto de matemáticas) (Charalambous et al., 2010), que ayude a los profesores con su uso en el aula. Según ellos, "los modelos existentes o bien son demasiado generales o bien resultan incompletos" (p. 473).

Autores como Valverde et al. (2002) han propuesto tradicionalmente tres aspectos para analizar los materiales curriculares: contenido (como geometría), expectativas de desempeño (como resolución de problemas y razonamiento matemático) y perspectiva (como actitudes), o han investigado características específicas de los libros de texto (como procedimientos de resolución de problemas). En la misma línea, el Proyecto 2061 de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia (AAAS) (2000) ha establecido un marco de evaluación de la calidad de los materiales curriculares, especialmente para libros de texto de matemáticas, basándose en estándares nacionales o estatales y en los Estándares de Currículo y Evaluación del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000). Este proyecto utiliza criterios de instrucción derivados de una revisión científica de la literatura, abarcando aspectos como el propósito de la unidad, la secuencia de actividades, la consideración de los conocimientos previos, la inclusión de situaciones contextualizadas y experiencias de aplicación, el desarrollo de ideas matemáticas y la promoción del pensamiento estudiantil, entre otros.

El instrumento desarrollado por Santaolalla (2014) persigue analizar cómo se abordan los elementos didácticos en los libros de texto de matemáticas y evaluar si permiten el desarrollo de diferentes estilos de aprendizaje en los estudiantes de primaria. Este instrumento se fundamenta en seis categorías (aspectos formales, contenidos, metodología, aspectos afectivos, actividades y evaluación) que permiten considerar tanto los aspectos tangibles como los simbólicos de los libros de texto, así como las dimensiones cognitivas, afectivas, conductuales y socioculturales de los estudiantes que interactúan con el material curricular. Para cada categoría del instrumento se definen una serie de elementos relacionados con cuatro estilos de aprendizaje (activo, reflexivo, teórico y pragmático) que los estudiantes pueden manifestar. La autora señala que el instrumento desarrollado es bastante completo, aunque requiere un análisis muy profundo para evaluar la capacidad de los distintos elementos de un libro de texto para desarrollar cada estilo de aprendizaje. Además, menciona que los criterios para analizar un libro de texto pueden variar ampliamente según las inquietudes y enfoques de diferentes autores que realizan investigaciones centradas en los textos escolares.

Por otro lado, los estudios internacionales que comparan materiales curriculares de diferentes países, particularmente libros de texto de matemáticas, se han convertido en una propuesta ampliamente utilizada para el desarrollo de materiales didácticos (Bütüner, 2021). Estas investigaciones consideran múltiples perspectivas (Charalambous et al., 2010; Pepin y Hagarty, 2001; Valverde et al., 2002) para llevar a cabo el análisis comparativo de libros de texto. Esto incluye la investigación sobre cómo se aborda la resolución de problemas (Fan y Zhu, 2007; Han et al., 2011; Huang et al., 2021; Vincent y Stacey, 2008; Yang et al., 2017; Zhu y Fan, 2006), la formulación de problemas (Cai y Jiang, 2017), los conceptos matemáticos (Mayer et al., 1995; Takeuchi y Shinno, 2020; Yaftian y Abbasi, 2023), propiedades (Ding y Li, 2010; Miyakawa, 2017), procedimientos (Fan y Zhu, 2007; Kar et al., 2018; Shield y Dole, 2013), niveles de dificultad (Cao et al., 2017), estructuras físicas y la presentación visual de los libros de texto (Ginsburg et al., 2005; Valverde et al., 2002), y características generales o culturales de los libros de texto (Clivaz y Miyakawa, 2020; Leung, 2006).

Así, Yang et al. (2017) examinan los libros de texto de secundaria de Taiwán, Singapur, Finlandia y Estados Unidos, analizando los tipos de problemas (abiertos o cerrados) de geometría que recogen los libros. Cai y Jiang (2017) exploran cómo los libros de texto basados en estándares chinos y estadounidenses abordaban las tareas de formulación de problemas, concluyendo que dichas tareas eran escasas en los libros de texto analizados de ambos países. Miyakawa (2017) investiga las propiedades enseñadas en geometría en libros de texto de Francia y Japón. Fan y Zhu (2007) comparan los libros de texto de matemáticas de China, Singapur y Estados Unidos en cuanto a los procedimientos de resolución de problemas. Estos autores señalan que las series de libros de texto de China y Singapur simplemente presentan la ejecución del plan, mientras que más de dos tercios de los procedimientos de resolución de problemas presentado en los libros de texto de Estados Unidos adoptaron al menos dos etapas. Ginsburg et al. (2005) examinan las características clave de los sistemas de educación matemática de la escuela primaria en Singapur y Estados Unidos, además de revisar las estructuras de los libros de texto de matemáticas en este nivel y aspectos como su organización en capítulos, lecciones y el número de páginas. Clivaz y Miyakawa (2020) investigan las características culturales de una lección de matemáticas utilizando ejemplos concretos de diseño e implementación de lecciones, analizando cómo se desarrollan y presentan las lecciones de matemáticas dentro y fuera del aula o la escuela en un país específico.

Finalmente, resaltamos las investigaciones que emplean el Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2007) para examinar materiales curriculares de matemáticas. Estas investigaciones se centran en aspectos específicos, como los significados de referencia (Alvarado y Batanero, 2008; Cobo y Batanero, 2004; Fúneme et al., 2021; Gómez-Torres, 2014; Illanes y Breda, 2023; Morales et al., 2021; Pino-Fan et al., 2019), el análisis ontosemiótico de prácticas, objetos y procesos matemáticos (Batanero et al., 2015; García et al., 2022; Godino et al., 2006), así como la idoneidad didáctica (Burgos et al., 2020; Castillo et al., 2022a, 2022b; Beltrán-Pellicer et al., 2018; Godino et al., 2012; Monje et al., 2018; Morales y Navarro, 2021; Rivas, 2014). Muchos de estos estudios se enfocan en temas específicos como la media (Cobo y Batanero, 2004), suma y resta de números naturales (Godino et al., 2006), números decimales (Konic et al., 2010), límites, optimización (Balcaza et al., 2017), probabilidad (Gómez-Torres, 2014; Vásquez y Alsina, 2015), funciones (Pino-Fan et al., 2019), el número natural (Morales et al., 2021), derivadas (Illanes y Breda, 2023), entre otros. Por ejemplo, Gómez-Torres (2014) investiga el significado institucional de la probabilidad en los marcos curriculares normativos y su desarrollo en los libros de texto. Batanero et al. (2015) clasifican los objetos matemáticos asociados a la regresión en dieciséis libros de texto de Bachillerato en España. Sus hallazgos revelan similitudes en la presentación de estos objetos en los textos dirigidos a las modalidades de Bachillerato analizadas. Castillo et al. (2022a) utilizan herramientas de análisis didáctico del EOS para evaluar la adecuación didáctica de una lección de libro de texto, identificando posibles conflictos de significado y proponiendo mejoras.

1.1.2 Análisis de materiales curriculares en el contexto de la probabilidad

La probabilidad es una rama fundamental de las matemáticas, con conexiones con la proporcionalidad, la combinatoria, las funciones y la lógica matemática (Van Dooren, 2014). Su aplicación abarca numerosos escenarios cotidianos, donde las personas deben comprender la incertidumbre, los riesgos, analizar encuestas, realizar predicciones económicas e interpretar márgenes de error. Los errores en la comprensión de la probabilidad pueden influir en decisiones cruciales para las personas, como en pruebas médicas, veredictos judiciales e inversiones. Dada su importancia tanto en el ámbito educativo como fuera de él, varios países han impulsado la inclusión de la probabilidad en todos los programas curriculares del área de matemáticas, desde la educación primaria hasta la educación superior (Batanero y Borovcnik, 2016; Batanero et al., 2023; Batanero et al., 2016; NCTM, 2000; Watson, 2006). Este énfasis se refleja en las directrices oficiales y en los materiales curriculares desarrollados para estudiantes y profesores a nivel global.

Vásquez y Alsina (2015) sugieren revisar el contenido de los libros de texto sobre probabilidad para garantizar que los estudiantes logren los objetivos de aprendizaje establecidos en las normativas curriculares. Esta recomendación surge al observar una discrepancia entre el enfoque presentado en estos materiales curriculares y lo que se establece en las directrices curriculares (Alsina y Vásquez, 2016; Gómez-Torres, 2014; López-Mojica et al., 2018; Rodríguez-Muñiz et al., 2020; Vásquez y Alsina, 2015, 2017).

Aunque existen pocos estudios sobre el tratamiento de los contenidos de probabilidad en las directrices y materiales curriculares, investigaciones como la de Ortiz (2002), Serradó y Azcárate (2006), Gandhi (2015) e Ishibashi (2022) o Martín et al. (2021) examinan la representatividad de los significados de la probabilidad en los libros de texto de Educación Secundaria. Estos autores concluyen que los materiales analizados enfatizan los significados clásicos y frecuenciales de la probabilidad e incorporan en cierta medida la definición axiomática. Sin embargo, el significado subjetivo apenas es abordado.

Posteriormente, Gómez-Torres (2014) y Vásquez y Alsina (2015) analizan los significados de la probabilidad propuestos en los materiales curriculares de educación primaria. Estos estudios señalan que los cuatro significados (intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo) de la probabilidad sugeridos para este nivel educativo, según las directrices curriculares, se desarrollan parcialmente. También constatan que la probabilidad se aborda principalmente desde un enfoque intuitivo, para luego introducir progresivamente los significados frecuencial y clásico, con un leve acercamiento al significado subjetivo. En esta misma línea, Martin et al. (2021) analizan las tareas propuestas en los cuadernos de trabajo utilizados en la escuela primaria. Sus hallazgos revelan que una gran mayoría de las tareas de probabilidad se basan en el significado clásico, mientras que los significados frecuencial y subjetivo no tienen una presencia destacada en las tareas de probabilidad, a pesar de su papel en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Estos estudios no solo identifican los diferentes significados de la probabilidad en distintos materiales curriculares de diversos niveles educativos, sino que también examinan de manera separada los objetos matemáticos situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos-definiciones, propiedades y procedimientos, asociados a cada significado. En particular, autores como Gómez-Torres (2014) o Vásquez y Alsina (2015), observan que las situaciones-problema se enmarcan en el contexto de juegos de azar y algunas experiencias de la vida cotidiana. Esto conduce a que las situaciones se asocien al significado clásico en los que interviene la regla de Laplace (Ortiz, 2015), dejando de lado a problemas relacionados con la probabilidad frecuencial (Martin et al., 2021).

Según Ortiz et al. (2001), el lenguaje juega un papel fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad debido a la estrecha relación existente entre las expresiones cotidianas y el lenguaje probabilístico más formal. En ese sentido, Gómez-Torres (2014), Vásquez y Alsina (2015) y Ortiz et al. (2016) analizan los tipos de lenguaje empleados en el ámbito de la probabilidad, distinguiendo entre expresiones verbales, lenguaje numérico y simbólico, representaciones tabulares y gráficas. Los resultados revelan una amplia variedad y diversidad de expresiones verbales, destacando el predominio del lenguaje coloquial o común sobre el formal. En general, cada tipología de lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo). Se encuentra también un amplio uso de representaciones tabulares y gráficas.

Gómez-Torres (2014) y Vásquez y Alsina (2015) exploran los conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos con relación a los significados de la probabilidad. Los autores señalan que muchos de estos conceptos y propiedades se presentan de manera intuitiva, sin definiciones formales, omitiendo algunas propiedades clave o los supuestos necesarios para su aplicación. Esta carencia podría llevar a conflictos semióticos, sesgos o heurísticas si no se aclara en el aula por parte del profesor. Además, destacan la presencia de una variedad extensa de algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo básicas utilizadas para resolver problemas probabilísticos, ya sea de forma implícita o explícita en los procedimientos. En cuanto a los argumentos, notan una escasez en los libros de texto, siendo la justificación de los resultados y propiedades principalmente basada en hechos y datos.

1.2. Formación de profesores para el análisis de materiales curriculares

En las últimas décadas, se han logrado avances significativos en la investigación sobre los conocimientos necesarios para ser un profesional de la enseñanza de las matemáticas. Estos avances han dado lugar a varios modelos que permiten analizar de manera distintiva los conocimientos didáctico-matemáticos que un profesor de matemáticas debe poseer (Ball et al., 2005; Ball et al., 2008; Godino, 2009; Godino et al., 2006; Godino et al., 2013; Pino-Fan y Godino, 2015; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Shulman, 1987; 2005). En este contexto, la formación de profesores en el análisis didáctico de materiales curriculares ha emergido como un tema de gran relevancia. Diversas investigaciones (Ball y Cohen, 1996; Beyer y Davis, 2012; Ben-Peretz et al., 1982; Braga y Belver, 2016; Kesidou, 2001; Martínez-Bonafé, 1992; Schwarz et al., 2008) han abordado esta cuestión con el objetivo de promover un enfoque crítico y reflexivo en los profesores que les permita elegir y emplear de manera efectiva los materiales curriculares en el entorno educativo. Además, han demostrado cómo una formación adecuada puede tener un impacto positivo en la práctica docente, permitiendo a los profesores tomar decisiones informadas sobre la utilización de los materiales y adaptarlos según las necesidades de sus estudiantes.

Martínez-Bonafé (1992), por ejemplo, hace hincapié en la necesidad de establecer criterios profesionales en los equipos docentes para evaluar la calidad de la enseñanza proporcionada por los materiales curriculares. Este proceso requiere una formación específica que habilite a los profesores a comprender cómo valorar la efectividad de los materiales y tomar decisiones fundamentadas en su elección y uso en el aula.

Kesidou (2001) sugiere emplear herramientas de análisis de materiales curriculares, como los Criterios de Análisis de Instrucción del Proyecto 2061, para fomentar la discusión y reflexión entre los profesores. A través de proyectos de desarrollo profesional, se ha observado que los profesores se vuelven más críticos a medida que adquieren experiencia en la aplicación de estos criterios. Los participantes avanzan desde la consideración de criterios superficiales hacia la reflexión soportada por criterios más profundos y pertinentes para la calidad de la enseñanza.

Schwarz et al. (2008) exploran la dependencia que suelen tener los profesores novatos de los materiales curriculares y cómo esto puede afectar a su práctica docente. En su investigación, encuentran que algunos profesores recurren a criterios de análisis con precisión, mientras que otros los consideran poco útiles. Estos autores subrayan la importancia de desarrollar instrumentos de análisis significativos y pertinentes para la práctica docente, que ayuden a los profesores a adoptar una postura crítica y bien fundamentada al interactuar con los materiales curriculares.

Beyer y Davis (2012) proponen un enfoque de formación basado en criterios de análisis y andamiaje. Este enfoque permite a los futuros profesores de ciencias participar en el análisis de los materiales curriculares, utilizando criterios basados en la reforma educativa. Mediante la aplicación gradual de estos criterios en diferentes planes de lecciones, los profesores en formación desarrollan habilidades para evaluar la calidad de los materiales y realizar adaptaciones productivas en su planificación de la instrucción.

En su tesis doctoral, Castillo (2022) describe la elaboración de dos guías de análisis de lecciones de libros de texto de matemáticas, denominadas GALT-Matemáticas, general, y GALT-Proporcionalidad, centrada en este contenido. Estas guías emplean los componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad didáctica en las distintas facetas, proporcionando una herramienta sistemática para que los profesores identifiquen qué aspectos evaluar en las lecciones de libros de texto y cómo deben estar presentes. Además, Castillo implementa distintos ciclos de intervención formativa para desarrollar la competencia de los futuros profesores en el análisis crítico y constructivo de lecciones de matemáticas utilizando dicho instrumento. Los resultados revelan que, incluso con orientaciones, el análisis profesional de estas lecciones presenta dificultades para los futuros profesores de primaria y secundaria. Estas dificultades están vinculadas a carencias en su conocimiento didáctico-matemático, que se ven mejoradas tras recibir formación. Sin embargo, se evidencia que, con una instrucción adecuada, los participantes pueden superar estas limitaciones, y que la GALT-proporcionalidad respalda el desarrollo de su competencia reflexiva. Se constata que los futuros profesores alcanzan distintos niveles de competencia, siendo más efectivos en términos de aprendizaje en los ciclos de intervención posteriores.

Recientemente, Obczovsky et al. (2023) desarrollan en su investigación una secuencia de enseñanza específica para programas de formación de profesores con el propósito de asistir a futuros docentes de física en el análisis de materiales curriculares. Con este fin, crean una herramienta prototípica llamada REF (Representación de Características Esenciales). El REF se compone de dos dimensiones: la estructura del contenido (ideas clave de contenido, representaciones, orden de las ideas clave, modelos, analogías, contextos, estrategias para apoyar el cambio conceptual, actividades y tareas de los estudiantes, métodos específicos del sujeto) y la estructura organizativa (medios educativos, organización de clases, métodos de enseñanza, estructura de lecciones, organización del grupo y herramientas de aprendizaje). Cada dimensión muestra diferentes subdimensiones dentro del marco REF, junto con sus descripciones, uno o dos ejemplos de características esenciales (EF) y la justificación correspondiente sobre cómo estas características apoyan el aprendizaje de los estudiantes. A pesar de que esta herramienta sistemática ayudó a los futuros profesores a identificar una amplia gama de características en los materiales curriculares, tuvieron dificultades al argumentar cómo estas características facilitan el aprendizaje de los estudiantes.

1.3. La probabilidad en la formación de profesores

Un tema esencial para asegurar el éxito de la enseñanza de las matemáticas es la adecuada formación de los profesores en los distintos contenidos de la disciplina, pues lo que los estudiantes aprenden se relaciona directamente con los conocimientos, competencias, creencias y metodologías de enseñanza del profesor (Eichler, 2011). En consecuencia, la cantidad y la variedad de investigaciones que exploran estos conocimientos y disposiciones a nivel internacional han aumentado enormemente en los últimos años (Batanero, 2022). No obstante, son escasos los estudios que abordan específicamente el conocimiento matemático y didáctico-matemático de los profesores respecto a la probabilidad tanto en educación primaria como en secundaria y tanto con profesores en formación como en ejercicio (Batanero, 2002; Batanero et al., 2015). Estos estudios en todo caso muestran las carencias en el conocimiento probabilístico de los profesores para garantizar una adecuada enseñanza de la probabilidad (Azcárate, 1995; Azcárate et al., 1998; Batanero et al., 2015; Begg y Edward, 1999; Gómez-Torres, 2014; Ingram, 2022; Inzunsa y Guzmán, 2011). A modo de ejemplo, y considerando que los juegos de azar son un contexto clave en el aprendizaje de la probabilidad (Batanero, 2005), Ortiz et al. (2012) evalúan el conocimiento sobre la idea de juego equitativo de 167 profesores en formación de Educación Primaria. A diferencia de los resultados obtenidos por Azcárate (1995) y Mohamed (2012), Ortiz et al. (2012) muestran que la gran mayoría de los futuros profesores tienen un conocimiento suficiente sobre la idea de juego equitativo. Los autores creen que esto se debe a que el problema que propuso Azcárate (1995) dificultó la tarea por falta de razonamiento combinatorio y no por falta de comprensión de la idea de juego equitativo.

Teniendo en cuenta que los esquemas combinatorios son fundamentales en la formación de ideas de azar y probabilidad, Inzunza y Guzmán (2011) ponen de manifiesto que la mayoría de los profesores muestran una débil capacidad o carencia de razonamiento combinatorio

(Azcárate, 1995). Similarmente Mohamed (2012) evidencia que la falta de habilidades combinatorias entre los profesores obstaculiza la determinación del espacio muestral y el cálculo de la probabilidad. Esta limitación en el razonamiento combinatorio y errores en el cálculo de probabilidades puede atribuirse a diversos sesgos de razonamiento probabilístico (Serrano et al., 1998). La presencia de estos sesgos es investigada por múltiples estudios (Batanero et al., 2015; Begg y Edwards, 1999; Cardeñoso et al., 2017; Gea et al., 2017; Gómez-Torres, 2014; Mohamed, 2012; Parráguez et al., 2017; Vásquez y Alsina, 2015, 2017). De manera específica, en la investigación realizada por Batanero et al. (2005) con 132 futuros profesores, se identifica que el 60% de ellos utiliza la heurística de representatividad (Tversky y Kahneman, 1974), otro 60% muestra el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), mientras que el 23% tiene dificultades para interpretar enunciados probabilísticos en términos no probabilísticos (Konold, 1991).

La complejidad del cálculo de la probabilidad simple, probabilidad condicional y conjunta es destacada en varias investigaciones (Contreras, 2011; Contreras et al., 2013; Estrada y Díaz, 2007). Estos estudios subrayan las dificultades de los futuros profesores para diferenciar entre probabilidades simples, condicionales y conjuntas (Batanero et al., 2012; Díaz et al., 2012). Se observan también errores en la partición del espacio muestral (Batanero et al., 2012), la independencia de sucesos (Contreras, 2011) y la presencia de sesgos, falacias y confusiones en el razonamiento probabilístico condicional (Estrada y Díaz, 2007).

Otras investigaciones dirigen su atención hacia la comprensión de los diferentes significados de la probabilidad, tales como el intuitivo, frecuencial, clásico y subjetivo (Batanero, 2005). Gómez-Torres (2014) evalúa el conocimiento de futuros profesores de educación primaria en relación con estos significados. Observa que estos futuros profesores tienen conocimiento adecuado del significado clásico de la probabilidad, pueden enumerar espacios muestrales y calcular probabilidades simples. Sin embargo, enfrentan dificultades considerables al tratar con el significado frecuencial, como se señala en el estudio de Gea et al. (2017). Aquí, muchos de los participantes no logran captar la variabilidad en muestras pequeñas o caen en el sesgo de equiprobabilidad. Bastias et al. (2017) indagan el significado intuitivo de la probabilidad de 118 profesores chilenos de Educación Secundaria. Utilizan un instrumento compuesto por 8 ítems que evalúa la asignación intuitiva de probabilidades en contextos de contingencia nacional. Los resultados evidencian una variedad de puntuaciones en los distintos ítems, lo que refleja la presencia de sesgos en el razonamiento. Prodromou (2012) examina las relaciones establecidas por un grupo de profesores en formación de educación primaria entre los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad durante tareas de lanzamiento de dados. Los participantes se mostraron confusos al considerar la importancia del orden de los dados al calcular la probabilidad de la suma, y no lograron vincular la idea de probabilidad clásica con las frecuencias relativas del experimento debido a dificultades en comprender la noción de convergencia. Resultados similares son reportados por Parraguez et al. (2017) y Batanero et al. (2021) en un estudio de futuros profesores españoles.

Resulta evidente que tanto un profesor en formación inicial como en ejercicio debe contar con sólidos conocimientos matemáticos para resolver las tareas planteadas a sus estudiantes. Ahora bien, también es fundamental que posea un conocimiento didáctico-matemático que le permita interpretar las respuestas de sus estudiantes de manera profesional (Chapman, 2014; Mason, 2016). Esto implica ser capaz de identificar la diversidad de significados de un objeto matemático necesarios para resolver una tarea, comprender los razonamientos de los estudiantes, reconocer sus dificultades y errores en la resolución de problemas, entender sus actitudes, creencias y emociones e identificar estrategias y recursos didácticos adecuados para brindar un apoyo efectivo en el proceso de enseñanza y contribuir al progreso de sus estudiantes en el aprendizaje. No son muchas las investigaciones realizadas al respecto.

Dugdale (2001) señala que los profesores en formación emplean el software como una herramienta para estimular el diálogo y ampliar su comprensión de la probabilidad, aspectos que a menudo no se alcanzan al realizar un número limitado de ensayos con un dado físico. Además, destaca que estos futuros profesores no se limitan a observar simplemente las frecuencias relativas generadas por la simulación por ordenador, sino que avanzan hacia un razonamiento sobre las probabilidades teóricas para verificar los resultados obtenidos mediante la computadora.

Carter (2008) evalúa a 210 futuros profesores de secundaria en problemas de independencia y probabilidad conjunta, y muy pocos ofrecen explicaciones aceptables sobre el razonamiento de los estudiantes. Mohamed (2012) presenta una tarea similar a 102 futuros profesores de educación primaria, aunque la mayoría discrimina correctamente entre respuestas correctas e incorrectas, no siempre logran explicar las causas de los errores, mostrando inconsistencias entre su respuesta inicial y su evaluación del estudiante ficticio. Ortiz et al. (2012) encuentran dificultades similares en 167 futuros profesores al evaluar respuestas de los estudiantes sobre juegos equitativos en grupos pequeños. Así mismo, Vásquez y Alsina (2015) señalan limitaciones en 96 profesores de educación primaria para interpretar y describir las respuestas de estudiantes ante problemas de probabilidad.

Recientemente, Burgos et al. (2022, 2023) analizan los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas de futuros profesores de educación primaria para: a) interpretar las respuestas de los estudiantes a una tarea de comparación de probabilidades (Burgos et al., 2022) y de juego equitativo (Burgos et al., 2023) b) identificar estrategias incorrectas y reconocer razonamiento proporcional en la actividad matemática de los estudiantes, y c) proponer estrategias que ayuden a los estudiantes a superar las dificultades que los llevaron a dar una solución inadecuada. En ambas investigaciones, los futuros docentes tuvieron dificultades para justificar por qué consideran correcta la respuesta de un estudiante de primaria, así como para detectar el razonamiento proporcional en estas mismas. Los resultados revelan, también, las limitaciones de los futuros docentes para elaborar propuestas didácticas significativas con las que explicar los errores a los estudiantes y ayudarles a superar las dificultades que los generaron.

Alonso-Castaño et al. (2021) realiza un estudio con 168 futuros profesores españoles de educación primaria, en los que deben crear a partir de una situación (pregunta y respuesta dada) un problema de probabilidad para sexto de educación primaria y justificar la pertinencia para el nivel educativo. Sólo un 31,2% de los participantes fueron capaces de crear un problema matemáticamente correcto y resolverlo adecuadamente, y tanto el problema como su resolución se adaptaron al nivel educativo solicitado y al modelo de enunciado propuesto. Además, solo seis futuros profesores justificaron su elección basándose en las directrices curriculares.

Sin embargo, algunos carecen de conocimientos matemáticos especializados, lo cual se evidencia cuando proponen tareas que no corresponden a contenidos específicos o son inadecuadas para la edad de los estudiantes. Burgos y Tizón-Escamilla (2023) y Tizón-Escamilla y Burgos (2023) también abordan la creación de problemas por docentes en formación en el contexto probabilístico centrando su atención en la potencialidad de esta actividad para desarrollar el razonamiento proporcional (Burgos y Tizón-Escamilla, 2023) y algebraico (Tizón-Escamilla y Burgos, 2023). Los autores observan las dificultades de los futuros profesores para plantear problemas que impliquen un razonamiento proporcional en el contexto probabilístico, así como para identificar en sus análisis qué elementos de razonamiento proporcional y algebraico están presentes en sus soluciones. Concluyen subrayando la importancia de la formación en el análisis y creación de problemas para mejorar los conocimientos y las competencias de los futuros profesores en la interconexión del razonamiento probabilístico, proporcional y algebraico.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Basándonos en la revisión de los antecedentes de investigación sobre probabilidad, hemos identificado deficiencias en el análisis integral de los materiales curriculares y directrices normativas. A pesar de que los libros de texto continúan siendo el material preferido por los profesores (Gómez-Torres, 2014; Vásquez y Alsina, 2015), es necesario contemplar otros materiales curriculares, como cuadernos de trabajo para el estudiante o manuales del profesor que influyen de manera decisiva en la gestión de la práctica educativa y que apenas han recibido atención hasta ahora (Martin et al., 2021). La relevancia de los materiales curriculares en el proceso de enseñanza y aprendizaje motiva su consideración como objetos de estudio en investigación en Educación Matemática, resaltando la necesidad de evaluar su calidad didáctica y su influencia en la comprensión de conceptos y dificultades (Braga y Belver, 2016; Fan et al., 2013; Schubring y Fan, 2018).

Dada la importancia de los materiales curriculares y que los profesores tienen dificultades para reconocer errores en el contenido matemático de diferentes recursos (en particular, libros de texto) así como para proponer modificaciones coherentes, es imprescindible que desde la formación de profesores se desarrolle la capacidad de análisis y evaluación de la calidad de los materiales curriculares, y la competencia para adaptarlos según las necesidades específicas de enseñanza (Brown, 2009; Remillard, 2005).

Las investigaciones centradas en los materiales curriculares, especialmente los libros de texto, que abordan el tema de la probabilidad, han producido propuestas y modelos de análisis (Gómez-Torres, 2014; Vásquez y Alsina, 2015; 2017). Sin embargo, estos modelos no han proporcionado indicadores específicos para analizar aspectos epistémicos de la probabilidad, y mucho menos un análisis conjunto que considere aspectos ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales para tratar la probabilidad, que puedan aplicarse para valorar diferentes materiales curriculares.

En ese contexto, esta investigación busca abordar estas carencias proponiendo guías basadas en los criterios de idoneidad didáctica que no solo faciliten el análisis, sino también la reflexión sistemática del profesor sobre el uso y gestión de los materiales curriculares en el aula.

Además, es necesario poner a disposición de los futuros docentes estas herramientas, diseñando e implementando talleres formativos destinados a promover su uso competente y reforzar conocimientos y competencias didáctico-matemáticas en probabilidad que les permita planificar secuencias de enseñanza más efectivas en este campo.

2.1. Hipótesis de investigación

Atendiendo a la revisión de los antecedentes en relación con el estudio de la probabilidad, el análisis de materiales curriculares, fundamentalmente de libros de texto, y las investigaciones sobre conocimientos y competencias del profesor para enseñar probabilidad, planteamos las siguientes hipótesis de investigación:

H1. Existe mayor representatividad de objetos matemáticos relacionados al significado clásico frente al frecuencial e intuitivo de la probabilidad y una baja articulación entre los mismos en los documentos curriculares.

H2. Es necesario revisar los criterios e indicadores de idoneidad didáctica en el contenido de la probabilidad para elaborar guías de análisis y valoración de documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria.

H3. Los futuros profesores de Educación Secundaria no han desarrollado suficientemente la competencia para analizar y valorar reflexivamente el contenido de la probabilidad en los documentos normativos y materiales curriculares.

H4. Se puede desarrollar la competencia para analizar y valorar reflexivamente el contenido de la probabilidad en los documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria por medio de intervenciones formativas específicas.

2.2. Objetivos de investigación

Los objetivos de tipo general y específicos que abordamos son los siguientes:

Objetivo general

Desarrollar y evaluar la competencia de análisis de idoneidad didáctica de la probabilidad de los futuros profesores de Educación Secundaria de la Universidad Nacional del Altiplano de Puno, Perú acerca de los documentos normativos y materiales curriculares.

Objetivos específicos

OE1. Analizar la representatividad y articulación de los significados de la probabilidad en los documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria.

OE2. Revisar, adaptar y aplicar criterios e indicadores de idoneidad didáctica del contenido de la probabilidad en los documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria.

OE3. Describir los significados personales sobre probabilidad de un grupo de futuros profesores de Educación Secundaria.

OE4. Implementar el uso de la guía de idoneidad didáctica del contenido de la probabilidad en los documentos normativos y materiales curriculares para desarrollar la competencia de análisis de idoneidad didáctica en la formación de futuros profesores de Educación Secundaria.

OE5. Evaluar y analizar el logro de la competencia de análisis de idoneidad didáctica del contenido de la probabilidad en los documentos normativos y materiales curriculares a los futuros profesores de matemática de Educación Secundaria después de la intervención formativa.

CAPÍTULO 2.
MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Este capítulo expone los fundamentos teóricos que respaldan los diversos objetivos y propósitos de este estudio. Comienza con una breve descripción del EOS, destacando sus principios teóricos y sus métodos y herramientas de investigación en la didáctica de las matemáticas. El EOS asume que la didáctica, como disciplina científica y tecnológica, debe abordar cuestiones epistemológicas, ontológicas, semiótico-cognitivas, educativo-instruccionales, ecológicas y de optimización de la instrucción, así como la formación de los profesores (Godino et al., 2020). Al centrarse el trabajo en contenidos de probabilidad, se dedica un apartado a recoger los significados institucionales de la probabilidad, así como aspectos esenciales relacionados con la construcción de significados personales por los estudiantes.

Dado que el objetivo primordial de este estudio es el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas para desarrollar competencias y conocimientos didáctico-matemáticos en futuros profesores, el marco metodológico que se emplea es la ingeniería didáctica, siguiendo el enfoque general propuesto desde el EOS por Godino et al. (2013). Además, se detalla la técnica de análisis de contenido. Finalmente, para cerrar el marco metodológico se recogen los aspectos éticos que aseguran el progreso adecuado de esta investigación.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos

Para abordar de manera sistemática y fundamentada el problema sobre el análisis didáctico de los materiales curriculares, así como el proceso educativo-instruccional de la probabilidad y la formación de profesores, adoptamos el EOS (Godino et al., 2007, Godino et al., 2019). Este enfoque teórico, proporciona principios y herramientas metodológicas para enfrentar los problemas epistemológicos, ontológicos, cognitivos, instruccionales y ecológicos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2017).

1.1.1 Cuestiones epistemológicas, ontológicas y semiótico-cognitivo

El punto de vista antropológico (Wittgenstein, 1953) y pragmatista (Peirce, 1958) del EOS lleva a situar la resolución de problemas en el centro de la actividad matemática. La matemática es una actividad humana centrada en la resolución de cierta clase de situaciones-problema. La realización de dicha actividad se concreta en la puesta en acción de sistemas de prácticas mediante los cuales se da respuesta a la situación-problema planteada (Godino et al., 2020, p. 6)

En el EOS, se considera *práctica matemática* a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). En los sistemas de prácticas matemáticas participan y emergen distintos tipos de *objetos matemáticos*, considerados como aquellas entidades que puedes ser individualizadas o separadas según su naturaleza y función en las prácticas. Así, se propone una categorización de los objetos matemáticos o entidades primarias: *situaciones-problema* (ejercicios y problemas más o menos abiertos, aplicaciones intra matemáticas o extra matemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática), *lenguajes* (términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros), *conceptos* (entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición), *proposiciones* (enunciados sobre conceptos, propiedades o atributos), *procedimientos* (técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos) y *argumentos* (requeridos para demostrar las proposiciones o explicar los procedimientos). Estos objetos matemáticos intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas mediante los respectivos procesos primarios de problematización, comunicación, definición, enunciación, algoritmización y argumentación (Godino et al., 2019).

Estas entidades primarias se pueden contemplar desde diversos puntos de vista duales:

- Objetos *ostensivos* (materiales, perceptibles)–objetos no *ostensivos* (abstractos, ideales, inmateriales).
- Objetos *extensivos* (particulares)–objetos intensivos (generales).
- *Personales* (relativos a sujetos individuales)– *institucionales* (compartidos en una institución o comunidad de prácticas).
- *Significantes* (antecedentes)–*significados* (consecuentes de una función semiótica).
- *Unitarios* (objetos considerados globalmente como un todo)–*sistémicos* (considerados como sistemas formados por componentes estructurados).

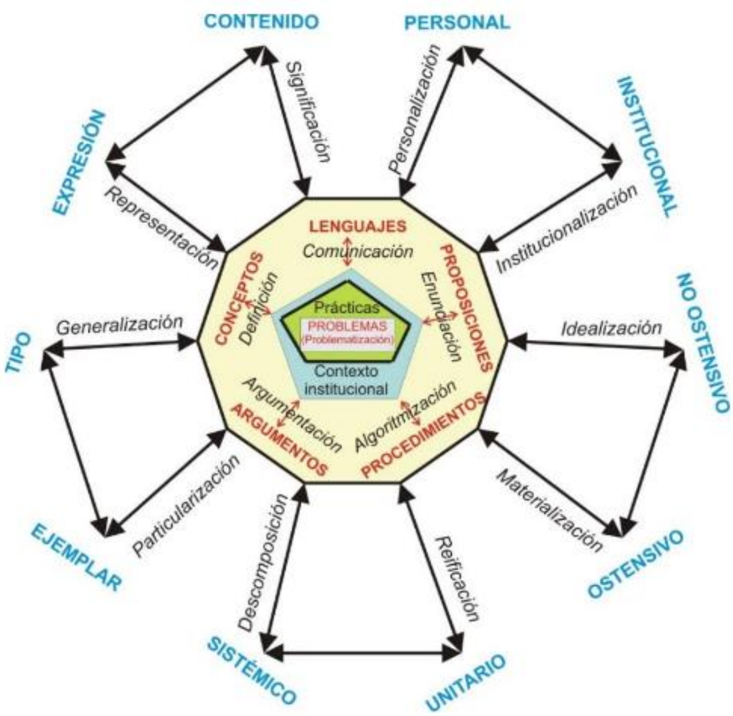
Tanto los objetos primarios como los secundarios (derivados de la aplicación de las dualidades) se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo que proporciona criterios para distinguir tipos de procesos matemáticos primarios y secundarios. La correspondencia entre un objeto y el sistema de prácticas donde interviene tal objeto se interpreta como el “significado de dicho objeto” (institucional o personal) (Godino et al., 2020, p. 9).

Puesto que los sistemas de prácticas que se ponen en juego en la resolución de las situaciones-problema son relativos a las personas y a las comunidades de prácticas en las que se desarrolla la actividad, también lo son los significados y, por tanto, los conocimientos. (Godino et al., 2020). Así el significado de un objeto matemático se refiere a los sistemas de prácticas operativas y discursivas que lleva a cabo una persona (significado personal) o que son compartidos en el contexto de una institución (significado institucional) para resolver un problema específico (Godino et al., 2007). Sin embargo, es posible reconstruir un significado global de un objeto matemático dado mediante la exploración sistemática de sus contextos de uso, las situaciones problemas en los que aparece implicado y los sistemas de prácticas que se ponen en juego para su solución. Dicho significado global se usa como modelo epistemológico y cognitivo de referencia de los significados parciales que puede adoptar dicho objeto (Godino et al., 2020, p. 8).

La interconexión de las nociones de práctica, objeto y proceso, así como las dualidades, da lugar al constructo *configuración ontosemiótica* (ver Figura 2.1). Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (*institucionales*) redes de objetos y procesos que intervienen y emergen de las prácticas necesarias desde un punto de vista experto para resolver un tipo de tareas matemáticas o *cognitivas* (*personales*) redes de objetos y procesos matemáticos que ponen en juego los estudiantes para resolver un tipo de tareas matemáticas (Godino et al., 2019).

Figura 2.1

Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos



Fuente. Adaptada de Godino (2014)

Reconocer de manera explícita la configuración de estos objetos y procesos permite identificar posibles conflictos semióticos. En el EOS, un *conflicto semiótico* se define como cualquier "diferencia o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos, ya sean personas o instituciones" (Godino, 2002, p. 258). Si la disparidad ocurre entre significados de tipo institucional (por ejemplo, entre el significado de referencia y el implementado en un libro de texto o por un profesor), se considera un conflicto epistémico. Por otro lado, si la disparidad sucede entre el significado expresado por un sujeto y el significado de referencia, se denomina conflicto cognitivo. Cuando la disparidad se presenta entre las prácticas de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo, entre estudiante-estudiante o estudiante-profesor), se habla de conflicto semiótico interaccional (Godino et al., 2007).

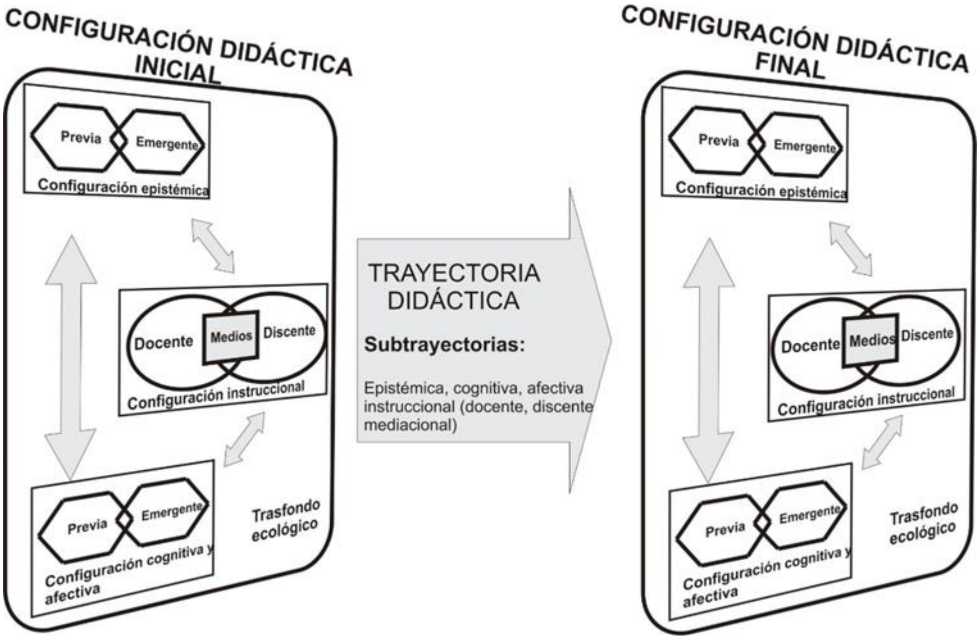
Relacionada con la configuración ontosemiótica, la noción de función semiótica permite describir el conocimiento matemático de una manera detallada y operativa como el conjunto de relaciones que el sujeto (persona o institución) establece entre los objetos y las prácticas matemáticas. Al constructo de función semiótica se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia. Los propios sistemas de práctica, como objetos sistémicos pueden ser componentes de la función semiótica.

1.1.2 El problema educativo instruccional

El EOS se vale de la noción de configuración didáctica como su herramienta principal para elaborar un análisis micro de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (Godino et al., 2007). La *configuración didáctica* se define como “un segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) que se distribuye entre los momentos de inicio y finalización de una tarea o situación – problema diseñado” (Godino et al., 2020, p. 10). Este concepto contempla las acciones tanto de los estudiantes como del profesor, junto con los medios planeados o empleados para abordar conjuntamente la tarea propuesta (Godino et al., 2014).

Figura 2.2

Configuraciones y trayectorias didácticas



Fuente. Adaptada de Godino (2014)

En cada configuración didáctica (Figura 2.2.), se pueden distinguir tres componentes principales:

- Una *configuración epistémica*, que engloba las prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales necesarios para la tarea.
- Una *configuración instruccional*, que abarca las funciones de enseñanza-aprendizaje, los recursos utilizados y las interacciones entre estos elementos.
- Una *configuración cognitivo-afectiva*, que comprende las prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describen el aprendizaje, así como los aspectos emocionales asociados.

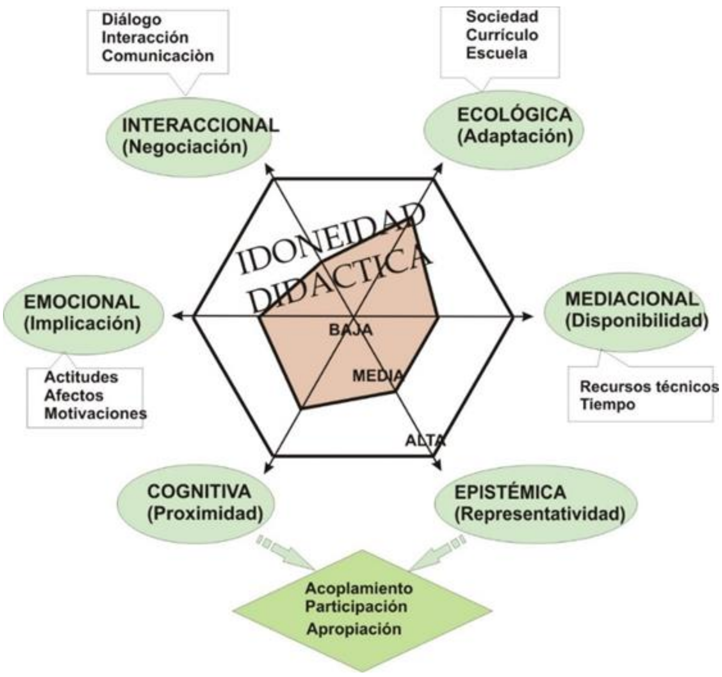
Una secuencia de configuraciones didácticas determina una trayectoria didáctica, entendida como la interacción conjunta entre las trayectorias epistémica, docente, discente y mediacional relacionadas con un sistema de prácticas y las circunstancias específicas. En esencia, se trata de una manera específica de investigar las diversas facetas o componentes del significado sistémico.

2.1.3 El problema de optimización del proceso de instrucción: criterios de idoneidad didáctica

La noción de *idoneidad didáctica* (ID) hace referencia al grado en que un proceso de instrucción (o parte de él) cumple ciertas características que lo califican como óptimo o adecuado para lograr la adaptación entre los significados personales adquiridos por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales deseados o implementados (enseñanza). Esto se considera teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles en el entorno educativo (Godino, 2013). La ID implica la articulación sistemática y coherente de seis facetas o dimensiones que interactúan entre sí (Figura 2.3):

Figura 2.3

Idoneidad didáctica



Fuente. Adaptada de Godino (2014)

Idoneidad epistémica. Se refiere al grado de representatividad e interacción de los significados institucionales o implementados respecto a un significado de referencia. El significado institucional de referencia de un objeto (contenido o tema matemático) viene determinado por lo que las instituciones matemáticas y didácticas consideran el sistema de prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto. El sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso de instrucción (por ejemplo, el previsto en los materiales curriculares) determina su significado institucional pretendido. Una alta idoneidad desde el punto de vista epistémico requiere la presencia de diversos significados del contenido correspondiente y su interconexión (Godino et al., 2017). El significado de referencia será relativo al nivel educativo correspondiente y deberá ser elaborado considerando los diversos tipos de problemas y contextos, la diversidad y adecuación de las representaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones, y argumentos que las sustentan.

Idoneidad cognitiva. Supone el grado en que los significados implementados están dentro de la zona de desarrollo potencial de los estudiantes (Vygotski, 1934), y los significados personales adquiridos se acercan a los pretendidos. Para lograr una alta idoneidad cognitiva, es importante considerar los conocimientos previos necesarios y la dificultad manejable de las situaciones planteadas.

Idoneidad afectiva. Representa el grado en que la secuencia de enseñanza atiende a los aspectos afectivos, buscando la implicación del estudiante en el proceso de estudio. Se relaciona tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen del estudiante y de su historia escolar previa. Lograr una idoneidad afectiva adecuada implica tener en cuenta las emociones, actitudes, creencias y valores del estudiante.

Idoneidad interaccional. Expresa el grado en que los tipos de configuraciones didácticas implementadas y su articulación permiten identificar y resolver los conflictos semióticos potenciales que se producen durante el proceso de instrucción. De manera específica, un adecuado grado de idoneidad interaccional en los materiales curriculares implica que las distintas situaciones permitan diagnosticar y abordar posibles desajustes, planteando actividades grupales que fomenten la comunicación, argumentación y reflexión compartida.

Idoneidad mediacional. Se refiere a la disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el proceso de enseñanza y aprendizaje. En particular, un alto grado de idoneidad mediacional supone reservar espacio suficiente a los contenidos más importantes del tema, ejemplificando adecuadamente y planificando un mayor número de tareas para los contenidos que puedan presentar mayor dificultad de comprensión.

Idoneidad ecológica. Implica ajustar adecuadamente el proceso de instrucción a la normativa curricular y al entorno educativo y socio-profesional. Lograr una alta idoneidad ecológica requiere, en particular, que los contenidos se adecuen a las directrices curriculares y se establezcan conexiones intra e interdisciplinares.

Para cada una de estas facetas, se identifican un sistema de componentes e indicadores empíricos generales, que sirven como guía para el análisis y reflexión sistemática, aportando criterios para mejorar progresivamente los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, 2013).

1.1.4 El problema de la formación de profesores

Dentro del marco del EOS, se ha desarrollado un modelo teórico de CCDM del profesor de matemáticas, que clasifica el conocimiento del profesor de matemáticas en tres dimensiones: matemática, didáctica y metadidáctico-matemática (Breda et al., 2017; Godino et al., 2017; Pino-Fan et al., 2015). La dimensión matemática se refiere a los conocimientos que un profesor de matemáticas debe poseer acerca de las matemáticas que se enseñan en la escuela. La segunda dimensión aborda los conocimientos relacionados con los aspectos implicados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluyendo una comprensión profunda de las matemáticas escolares y su interacción con los aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes, los recursos y medios, las interacciones en el aula y los aspectos ecológicos. La dimensión metadidáctica-matemática se refiere a los conocimientos que permiten a un profesor reflexionar de manera sistemática sobre su práctica y realizar juicios valorativos tanto sobre su propia práctica como sobre la de otros (Breda et al., 2017).

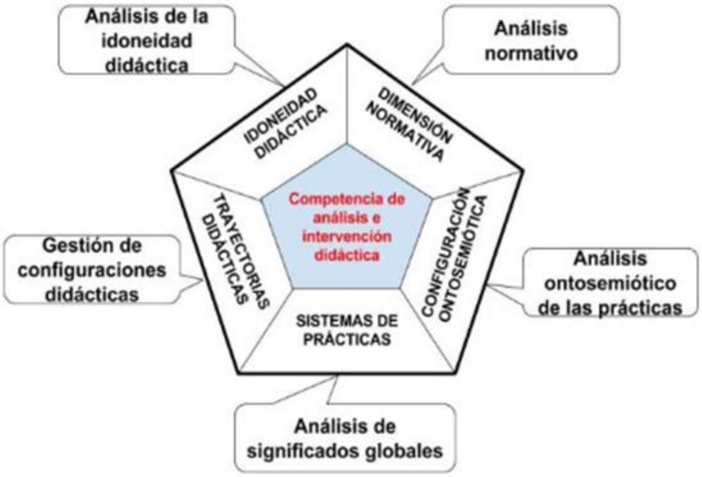
En la propuesta del modelo CCDM se consideran dos competencias clave para el profesor de matemáticas: la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica (Breda et al., 2017). La esencia fundamental de la *competencia de análisis e intervención didáctica* radica en la capacidad de "diseñar, aplicar y evaluar secuencias de aprendizaje propias y de otros, utilizando técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, evaluación y proponer mejoras" (Breda et al., 2017, p. 1897). Para desarrollar esta competencia, el profesor requiere, por un lado, conocimientos que le permitan describir y explicar lo sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otro lado, conocimientos que le habiliten para evaluar localmente lo ocurrido y proponer mejoras para futuras implementaciones.

La competencia global de análisis e intervención didáctica del profesor de matemáticas se articula a través de cinco sub-competencias (Figura 2.4), las cuales están asociadas a cinco herramientas conceptuales y metodológicas del EOS: 1) *análisis de significados globales* (basada en la identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su resolución), 2) *análisis ontosemiótico de las prácticas* (identificación de la trama de objetos y procesos implicados en las prácticas), 3) *gestión de configuraciones y trayectorias didácticas* (identificación de la secuencia de patrones de interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos), 4) *análisis normativo* (reconocimiento de la trama de normas y metanormas que condicionan y respaldan el proceso instruccional) y 5) *análisis de la idoneidad didáctica* (evaluación del proceso instruccional e identificación de posibles mejoras) (Godino et al., 2017).

En la *competencia de análisis de significados globales*, el foco de atención es “la identificación de las situaciones-problemas que aportan los significados parciales o sentidos para los objetos, o temas matemáticos bajo estudio, y las prácticas operativas y discursivas que se deben poner en juego en su resolución” (Godino et al., 2017, p. 99). Dicha competencia permitirá a los profesores responder a las cuestiones: ¿cuáles son los significados de los objetos matemáticos implicados en el estudio del contenido pretendido? y ¿cómo se articulan entre sí?

Figura 2.4

Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica



Fuente: Godino et al. (2017, p. 103).

La *competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas* permite al profesor identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas necesarias para la resolución de las situaciones-problemas. Dicho reconocimiento facilita “prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio” (Godino et al., 2017, p. 94). Se trata, por tanto, de responder a las cuestiones: ¿cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas) y ¿cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los estudiantes en la resolución de los problemas? (configuraciones cognitivas).

A través de la *competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas*, el profesor de matemáticas adquiere conocimiento y comprensión de la noción de configuración didáctica (Godino et al., 2006) y su uso como una herramienta para analizar las interacciones personales y materiales en los procesos de estudio de las matemáticas. Se trata de que el profesor conozca los diferentes tipos de configuraciones didácticas que se pueden utilizar y comprender sus efectos en el aprendizaje de los estudiantes. Además, debe poseer la competencia necesaria para utilizarlas adecuadamente en la implementación de los diseños instruccionales, lo que se conoce como competencia de gestión de configuraciones didácticas. De esta forma debe poder responder a cuestiones como: ¿Qué tipos de interacciones entre personas y recursos se llevan a cabo en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias en el aprendizaje? ¿Cómo gestionar estas interacciones para optimizar el aprendizaje? La competencia para gestionar la secuencia de momentos de exploración, comunicación, validación e institucionalización, evitando posturas transmisivas o constructivistas ingenuas, es fundamental para optimizar los aprendizajes (Godino et al., 2015).

El diseño didáctico en sus distintas etapas se basa en una compleja red de normas de diferentes orígenes y naturaleza (Godino et al., 2009), así como en metanormas (D'Amore et al., 2007). La c*ompetencia de análisis de normas y metanormas* supone reconocer explícitamente estas normas para comprender el desarrollo de los procesos de estudio matemático y dirigirlos hacia niveles óptimos de idoneidad. Por ejemplo, al estudiar fracciones, surgen normas relacionadas con su escritura o representación gráfica. También existen normas no matemáticas, como el tiempo asignado al tema de las fracciones, el libro de texto utilizado por el estudiante o las fechas de evaluación. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar la dimensión normativa, y utilizarla de manera competente. Se trata de para responder a preguntas como: ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales? ¿Quién, cómo y cuándo se establecen estas normas? ¿Cómo se pueden cambiar estas normas para optimizar el aprendizaje matemático?

En el marco del modelo CCDM, se otorga un lugar central a la noción de idoneidad didáctica para analizar, a un nivel macroscópico, los procesos de estudio matemático (Godino et al., 2017). En este contexto, es esencial que el profesor de matemáticas cuente con un profundo conocimiento, comprensión y valoración de la idoneidad didáctica, además de adquirir la competencia necesaria para su aplicación adecuada. La *competencia de análisis de idoneidad didáctica* implica la evaluación de la idoneidad didáctica en los procesos de estudio matemático, permitiendo al profesor reflexionar de manera holística y crítica sobre su práctica pedagógica, evaluarla y tomar decisiones encaminadas a su mejora continua. Esta labor profesional del profesor representa un desafío que demanda un conjunto específico de conocimientos y habilidades, que pueden resultar complejas y necesitan una formación especializada (Beyer y Davis, 2012; Godino et al., 2017; Nicol y Crespo, 2006; Shawer, 2017).

1.2. Enseñanza y aprendizaje de la probabilidad

1.2.1 Significados institucionales de la probabilidad

Según Hacking (1975), la probabilidad ha tenido desde su origen una doble concepción, pues se relaciona con el grado de creencia personal y con la tendencia mostrada por sucesos aleatorios al producir frecuencias relativas estables. Estas dos perspectivas principales, que se reflejan en los trabajos de los autores que han contribuido al progreso de la probabilidad, han evolucionado a lo largo de la historia en diferentes interpretaciones o significados de la probabilidad (Batanero 2005; Batanero et al., 2016; Batanero y Díaz 2007; Borovcnik y Kapadia, 2014). Actualmente, los principales significados de la probabilidad utilizados en la escuela, o en la enseñanza universitaria no especializada, son los significados intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático (Batanero, 2005; Batanero y Borovcnik, 2016; Batanero et al., 1987; Borovcnik y Kapadia, 2014; Batanero et al., 2005; Beltrán-Pellicer et al., 2018).

El *significado intuitivo,* que apareció en la historia antes del estudio matemático de la probabilidad (Batanero y Díaz, 2007), se corresponde con las ideas intuitivas que pueden tener los niños pequeños o personas sin conocimientos sobre la incertidumbre y el uso cotidiano de términos provenientes de experiencias y contextos ligados a fenómenos aleatorios (Batanero, 2005). No en vano, nuestro lenguaje verbal está lleno de expresiones cualitativas (como los términos imposible, probable, seguro) que permiten indicar nuestro grado de creencia personal sobre la ocurrencia de ciertos acontecimientos.

El *significado subjetivo* surge a partir del teorema de Bayes, que permite transformar probabilidades a priori, de algunas causas, en probabilidades a posteriori, que incorporan la información de los datos observados. Por ejemplo, permite averiguar la probabilidad de tener cierta enfermedad dados ciertos síntomas a partir del conocimiento de la probabilidad de tener esa enfermedad y la probabilidad (a priori) de tener esos síntomas dada esa enfermedad. Por tanto, matemáticos como Finetti o Ramsey conciben la probabilidad como grado de creencia personal (Borovcnik y Kapadia, 2014). Este significado amplía mucho el campo de aplicación, pero no se suele tratar en el currículo hasta que se introduce la probabilidad condicional (Batanero, 2005).

En el *significado frecuencial*, que se origina a partir de la publicación por Bernoulli de la primera ley de los grandes números, se define la probabilidad como el valor hipotético hacia el cual tiende a estabilizarse la frecuencia relativa de un suceso al repetir el experimento un número grande de veces (Batanero, 2005). Frente al significado clásico, tiene el inconveniente de que nunca se llega a calcular el valor verdadero de la probabilidad, sino que solo se logra estimar mediante la frecuencia relativa, lo que lleva a confundirla con la probabilidad (Batanero, 2005). Sin embargo, tiene la ventaja de poder aplicarse a experimentos con sucesos no equiprobables.

La primera definición matemática de probabilidad viene asociada al *significado clásico*, dada por Moivre en 1718 y luego refinada por Laplace en 1814 como "la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables" (Batanero, 2005, p. 254; Borovcnik y Kapadia, 2014). Esta definición, válida solo para espacios muestrales con un número finito de sucesos elementales y equiprobables, es además circular, y dio lugar a la regla de Laplace y al cálculo de la probabilidad en situaciones de juegos de azar, donde se suele aplicar el razonamiento combinatorio (Batanero y Borovcnik, 2016; Jones, 2005). La combinatoria se ocupa de resolver problemas que implican una cantidad finita de elementos (llamados conjuntos discretos) mediante la realización de distintas operaciones (Batanero et al., 1997).

En el *significado axiomático*, la probabilidad es una medida normada definida en un álgebra de eventos con valores en el intervalo [0, 1] que cumple una serie de axiomas. De manera específica, Kolmogorov consideró que para el espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio, una σ-álgebra de sucesos A (clase de subconjuntos de Ω cerrada para uniones numerables, contrarios y que contiene al vacío) sobre dicho espacio muestral. Definió la probabilidad como una función de conjuntos P: A $\rightarrow\mathbb{R}$ que satisface los axiomas:

- *No negatividad*. $P(A) \geq 0$, para todo $A \in$ A.
- *Suceso seguro*. $P(\Omega) = 1$.
- *σ-aditividad*. Para toda sucesión $\{A_i\}$ de sucesos incompatibles dos a dos, $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Estos axiomas permiten deducir las reglas del cálculo de probabilidades, aunque no la forma de asignar la probabilidad a los sucesos elementales no equiprobables (Batanero et al., 2005). No obstante, en un experimento aleatorio con espacio muestral finito Ω, asumiendo que todos los sucesos elementales son equiprobables, es decir, en las condiciones de Laplace, la función P: P(Ω) →ℝ definida por $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ ($\#A$ denota el cardinal del suceso A), cumple los axiomas anteriores.

Aunque algunos textos, al final de la secundaria, incorporan los axiomas de Kolmogorov, en general no es necesario utilizarlo, por ser demasiado formal y solo adecuado para quienes siguen estudios universitarios o matemáticas puras (Batanero et al., 2016). Cada uno de estos significados implica diferencias específicas, no solo en la definición de la probabilidad en sí, sino también en los conceptos, propiedades y procedimientos relacionados que han surgido para abordar o representar diversos problemas o fenómenos del mundo real (Batanero, 2005; Batanero y Díaz, 2007; Batanero et al., 2016; Borovnick y Kapadia, 2014). Estos significados influyen de manera implícita en "los comportamientos y respuestas de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de azar en las que deben poner en práctica sus intuiciones y conocimientos probabilísticos" (Batanero et al., 2005, p. 20). Por lo tanto, es recomendable que las actividades en el aula permitan a los estudiantes construir gradualmente un conocimiento matemático sobre la probabilidad a partir de sus intuiciones probabilísticas, hasta alcanzar una comprensión integrada de la probabilidad en todas sus múltiples dimensiones (Batanero et al., 2005).

1.2.2 Significados personales de la probabilidad

Alcanzar una progresión en los aprendizajes implica, en primer lugar, asegurar que los contenidos previstos sean de dificultad manejable y que los conceptos, representaciones, procedimientos y propiedades se presenten de manera progresivamente compleja (Monterrubio y Ortega, 2012). En segundo lugar, implica considerar las posibles limitaciones que los estudiantes puedan enfrentar en el estudio de la probabilidad, a través de actividades que posibiliten identificar ideas previas, errores y dificultades (Braga y Belver, 2016).

El cálculo o comparación de probabilidades comienza por describir o enumerar el conjunto de elementos del espacio muestral, cuya determinación correcta es una parte esencial para resolver el problema. La comprensión del espacio muestral es, de acuerdo con Langrall y Mooney (2005), fundamental para el razonamiento probabilístico. La comprensión del espacio muestral requiere: a) reconocer todos los posibles resultados de un experimento, b) poderlos describir en forma completa y c) relacionar el espacio muestral con la mayor o menor posibilidad de cada resultado del experimento (Horvath y Lehrer, 1998), siendo esta última la capacidad que entraña mayores dificultades a los estudiantes.

Pérez Echeverría et al. (1986) definen cuatro niveles de dificultad en los problemas de comparación de probabilidades, de acuerdo con la estrategia requerida. En los problemas de *nivel 1* la cantidad de casos favorables o la cantidad de casos desfavorables es la misma (no se requiere el uso de fracciones para resolverlo), en los problemas de *nivel 2* existe proporcionalidad entre los casos favorables y desfavorables de una misma urna o entre casos favorables y desfavorables de las dos urnas (se pueden resolver estableciendo una correspondencia en una urna y observando que la relación es la misma en la otra urna). El *nivel 3* corresponde a problemas que presentan relación multiplicativa únicamente entre los casos favorables de ambas agrupaciones (o urnas en nuestro caso) o solo entre los casos desfavorables, o bien entre casos favorables y desfavorables de una sola agrupación (establecida la razón entre casos favorables o desfavorables, se puede comparar, si la existente entre los otros términos es menor o mayor). En los problemas de *nivel 4*, no existe relación multiplicativa alguna entre casos favorables y desfavorables de cada agrupación. Requiere operar con fracciones, pasándolas a común denominador.

Por otro lado, lograr éxito en el análisis y comparación de probabilidades requiere un nivel adecuado de razonamiento proporcional (Bryant y Nunes, 2012), así la literatura en relación con los aspectos que influyen en la complejidad de las tareas sobre proporcionalidad (Castillo et al., 2022a) permite considerar algunos factores que intervienen en el nivel de dificultad de las tareas de comparación de probabilidades. Por ejemplo, los problemas en los que aparecen relacionados los primeros o segundos términos de una razón (de favorables a desfavorables, de favorables a posibles, o entre favorables o desfavorables), o existe una relación de divisibilidad entre sus términos, son más fáciles para los estudiantes (Castillo et al., 2022a).

Conforme la progresión de los aprendizajes de la probabilidad se va desarrollando hasta adquirir la rigurosidad matemática asociada al formalismo axiomático, también van surgiendo errores y sesgos usuales de razonamiento probabilístico. La limitada experiencia de los estudiantes con los juegos de azar y la influencia de factores subjetivos favorecen la formación de sesgos que interfieren con otras intuiciones probabilísticas correctas. Es necesario contemplar contextos probabilísticos lo más variado y rico posible, para hacer aflorar y corregir las intuiciones incorrectas de los estudiantes en el campo de la probabilidad (Cañizares, 1997). Por ejemplo, el *sesgo de la equiprobabilidad* consiste en creer que todos los sucesos elementales en un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad (Lecoutre, 1992). Por otor lado, Konold (1991) plantea el *enfoque en el resultado* como la búsqueda de patrones causales para explicar la aleatoriedad. Esto incluye interpretar preguntas sobre la probabilidad de un evento como si fueran sobre la predicción de si dicho evento ocurrirá o no. Además, Tversky y Kahneman (1974) describe el *enfoque de la heurística de representatividad* donde las personas estiman la probabilidad de un evento basándose únicamente en qué tan similar es a algunos aspectos de la población original. Esta perspectiva descuida otra información relevante para la decisión en cuestión.

2. MARCO METODOLÓGICO

Para abordar de manera exhaustiva el análisis didáctico, la fundamentación y elaboración de instrumentos de análisis de la idoneidad didáctica de materiales curriculares sobre probabilidad, así como el análisis de los resultados de las intervenciones con profesores en formación, hemos adoptado un enfoque fundamentalmente cualitativo. Este enfoque se caracteriza por el análisis sistemático de datos cuya interpretación permite explicar fenómenos sociales, como el de una experiencia educativa (Strauss y Corbin, 1990).

En este contexto, hemos utilizado dos procesos metodológicos complementarios. Por un lado, aplicamos la ingeniería didáctica (Artigue, 2011), en el sentido extendido propuesto por el EOS (Godino et al., 2013, 2014), para el diseño, implementación y evaluación de las acciones formativas. Por otro lado, empleamos el análisis de contenido (Cohen et al., 2011) para examinar las directrices curriculares oficiales, los materiales curriculares y los protocolos de respuesta de los futuros profesores.

2.1. Investigación basada en el diseño e ingeniería didáctica

La Investigación Basada en el Diseño (IBD) (Kelly et al., 2008), también conocida como Investigación de Diseño o Experimentos de Diseño, abarca una serie de enfoques metodológicos para estudiar el aprendizaje en entornos naturales de enseñanza (Godino et al., 2013). Utiliza el diseño de instrucción y el análisis sistemático de estrategias y herramientas instruccionales, precisando de ciclos sucesivos de diseño, implementación en contextos de clase y evaluación de resultados.

Por otro lado, la Ingeniería Didáctica (ID) (Artigue, 2014), estrechamente relacionada con la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998), “es una metodología de investigación basada en el diseño y la experimentación controlados de secuencias didácticas y que adopta un modo interno de validación basado en la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de éstas” (p. 203).

Las similitudes y complementariedades entre estas metodologías se exploran en Godino et al. (2013), donde se propone una visión más amplia de la ID que abarca investigaciones orientadas al diseño instruccional (Kelly et al., 2008). En esta investigación, empleamos el marco metodológico de la ID en el sentido generalizado propuesto por Godino et al. (2013) y Godino et al. (2014)., que lleva a distinguir cuatro fases diferentes:

1. *Estudio preliminar*, teniendo en cuenta las dimensiones epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e interaccional-mediacional. En esta fase, exploramos los significados actuales de la probabilidad en diversas investigaciones (Batanero, 2005; Gómez-Torres, 2014; Beltrán-Pellicer et al., 2018) y discutimos su problemática filosófica. Identificamos los objetos matemáticos asociados a cada significado de la probabilidad en los materiales curriculares oficiales (directrices curriculares y dos cuadernos de trabajo correspondientes al sexto ciclo, es decir primer y segundo grado de Educación Secundaria). Esto nos permite determinar el significado de referencia de la probabilidad previsto en los materiales curriculares, necesario en el diseño posterior de la secuencia de actividades formativas.
2. *Diseño de la trayectoria didáctica*. Implica la selección, secuenciación y análisis a priori de las actividades y planificación de intervenciones controladas por parte del profesor. En esta segunda fase, diseñamos una secuencia de actividades formativas que considera los aspectos epistémicos, cognitivos, afectivos y ecológicos identificados en el estudio preliminar. Planificamos cuatro intervenciones formativas, dos relacionadas con el análisis de significados y análisis de configuraciones ontosemióticas de los materiales curriculares peruanos sobre probabilidad en Educación Secundaria, y dos relacionados con el análisis de idoneidad didáctica de materiales y programas curriculares en probabilidad en dicha etapa educativa. Cada intervención formativa se organiza en diferentes momentos, en dos sesiones, una sincrónica y otra asincrónica. La sesión sincrónica corresponde al encuentro virtual de enseñanza-aprendizaje interactivo en tiempo real con el apoyo de la herramienta *Google Meet*, mientras que la sesión asincrónica permite compartir recursos educativos (lecturas y entrega de tareas) para consulta de los estudiantes en el aula virtual (*Classroom*) en cualquier momento. Se

contemplan los recursos utilizados en cada sesión del taller, así como el tiempo de duración aproximado para cada sesión.

3. *Implementación del diseño de la trayectoria didáctica.* Supone la observación de las interacciones entre personas, recursos y evaluación de los aprendizajes logrados. En esta etapa, ponemos en práctica las actividades planificadas y observamos las interacciones entre los futuros profesores y con los recursos didácticos. En esta fase, se recogen las producciones de los participantes y se evalúan los aprendizajes logrados. Durante las sesiones virtuales los futuros profesores abordan la formación teórico-práctica y la puesta en común, lo que les ayuda a comprender mejor los objetos matemáticos y sus significados.
4. *Análisis retrospectivo.* Esta fase implica contrastar entre lo planificado en el diseño de la trayectoria didáctica y lo observado como resultado de su implementación.

2.2. El análisis de contenido

En los objetivos de esta investigación aparecen implicados varios aspectos fundamentales: examinar la representatividad y la coherencia de los significados de la probabilidad presentes en los materiales curriculares; diseñar un instrumento de evaluación que incluya criterios e indicadores para valorar la idoneidad didáctica de estos materiales; analizar los protocolos de respuesta de futuros profesores para evaluar cómo evoluciona su competencia para el análisis didáctico de materiales curriculares con la implementación de intervenciones formativas. Para llevar a cabo estos análisis, se utiliza la técnica de análisis de contenido, respaldado por el uso de las categorías de elementos teóricos del EOS. El análisis de contenido, en este contexto, se concibe como una herramienta de investigación que permite hacer inferencias replicables y válidas a partir de textos y otros materiales significativos en relación con su contexto de uso (Krippendorff, 2018). Su propósito principal es desentrañar la estructura interna de los textos, centrándose en su contenido semántico (Fraenkel et al., 2011).

En ese sentido, los textos se definen como cualquier material escrito destinado a ser leído, interpretado y comprendido por personas diferentes de los analistas (Krippendorff, 2004). Estos textos pueden variar desde documentos curriculares normativos hasta transcripciones de clases, así como los protocolos de respuesta de los participantes y otros materiales, como productos de medios de comunicación o entrevistas personales.

El proceso de análisis de contenido comienza seleccionando una muestra de textos y definiendo en cada uno de ellos las unidades de análisis, que en este caso son segmentos, oraciones y afirmaciones específicas relacionadas con los contenidos de los materiales curriculares. Luego, se procede a la categorización de estas unidades de análisis. Para el caso de esta investigación seguimos los siguientes pasos:

- Localización de datos pertinentes. En esta fase inicial, se procede a ubicar los recursos pertinentes, como las normativas curriculares, los cuadernos de trabajo y los protocolos de respuesta de los futuros profesores.
- Definición de las unidades de análisis. Aquí, se establecen las unidades de análisis como segmentos, oraciones y afirmaciones específicas que se extraen de los contenidos señalados en los materiales curriculares y los protocolos de respuesta.
- Categorización. Según Fraenkel et al. (2011), la categorización se desarrolla de dos formas: mediante categorías predeterminadas o por medio de categorías emergentes. En la primera, el investigador determina las categorías antes de comenzar cualquier análisis. Estas categorías se basan en conocimientos previos, teoría o experiencia. Mientras que, en la segunda, el investigador se familiariza con la información descriptiva recopilada y permite que las categorías emerjan a medida que el análisis continúa. En nuestro estudio, las categorías predeterminadas empleadas tienen que ver con los objetos matemáticos (situación-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y las dimensiones e indicadores de idoneidad didáctica

(epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica). En el caso de la categorización de las producciones de los futuros profesores, las categorías son emergentes.

- Codificación. En esta fase, se procede a identificar los segmentos o frases de cada texto o documento que se relacionan con las categorías del EOS. Para codificar estas unidades de análisis, se emplean letras y dígitos numéricos. Un ejemplo de esto es la codificación de desempeños en la normativa curricular, utilizando abreviaturas como DGx.y, donde DG1.3 representa el tercer desempeño del primer grado y DG2.1 hace referencia al primer desempeño del segundo grado de Educación Secundaria.

2.3. Aspectos éticos de la investigación

La investigación se fundamenta en los principios éticos establecidos en las pautas del Comité Institucional de Ética en Investigación de la Universidad Nacional del Altiplano. Con el objetivo de formalizar el proceso de consentimiento informado antes de confirmar la entrevista, se les envía a los correos electrónicos personales de los participantes un archivo adjunto que contiene la carta de consentimiento informado (consultar Anexo 19). En dicha carta, se proporciona una breve explicación de los objetivos de la investigación, los posibles riesgos y beneficios de la participación, así como detalles sobre el registro y la protección del anonimato.

El consentimiento, según Noreña et al. (2012), implica que los participantes aceptan formar parte de la investigación debido a su interés en contribuir con su experiencia al fenómeno bajo estudio, sin que esto les cause un perjuicio moral.

Siguiendo los principios éticos establecidos, garantizamos una total confidencialidad en relación a la información proporcionada por cada participante, tal como lo señala Mesia (2007). En la presentación de los análisis e interpretaciones, para garantizar el anonimato, siglas identificativas, en este caso, "FP" (Futuro Profesor). Aseguramos a los participantes que toda la información recopilada se utiliza únicamente con fines académicos y de investigación. Por último, queremos destacar que los datos de los participantes estarán protegidos y resguardados para evitar su uso en futuras investigaciones.

CAPÍTULO 3.

ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE LOS CONTENIDOS DE PROBABILIDAD EN LOS DOCUMENTOS CURRICULARES

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Análisis ontosemiótico de los contenidos de probabilidad en los documentos curriculares de Perú. *Educación Matemática, 34*(3), 97-131

1. INTRODUCCION

Los documentos curriculares y los materiales o libros de texto componen objetos de investigación en el campo de la didáctica. Los primeros porque, evidentemente, constituyen la normativa sobre lo que se debe enseñar y aprender en cada nivel educativo. Los segundos porque, en muchas ocasiones, establecen el currículo "de facto", tal y como han señalado algunos autores (Rodríguez, 2006). Por este motivo, resulta interesante desarrollar herramientas metodológicas que faciliten el análisis de estos materiales, ya que constituyen un reflejo de los significados que se trabajan en las aulas (González y Sierra, 2004; Occelli y Valeiras, 2013; Ruiz de Gauna et al., 2013).

La probabilidad, como parte de la matemática y base de otras disciplinas, es esencial para preparar a los estudiantes de cara a tomar decisiones adecuadas en situaciones aleatorias. Esto justifica el interés y la necesidad de incluir específicamente el análisis de datos y la probabilidad como contenido curricular, aspecto que señalan diversas orientaciones internacionales (NCTM, 2000) y que ya se recoge en muchos de los currículos escolares actuales (Jones, 2005). Estos currículos destacan, además, la importancia que tienen los elementos clave del significado frecuencial, como son la experimentación y la modelización, en el aprendizaje de la probabilidad (Batanero, 2005; Jones, 2005; Ortiz y Serrano, 2008).

En esta misma línea, diversas investigaciones resaltan la necesidad de tratar desde las propuestas curriculares el significado intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico de la probabilidad de manera articulada y adecuada a la edad de los estudiantes y sus conocimientos previos (Batanero, 2005; Batanero, et al., 2005; Batanero y Borovcnik, 2016; Jones, 2005). Cada significado comporta diferentes interpretaciones y características comunes que deben ser tenidos en cuenta e incorporados de manera gradual para construir y comprender el concepto de probabilidad. La modelación y simulación con la ayuda de software permite integrar dichos enfoques, complementando la experimentación física que pueda llevarse a cabo con diversas situaciones (Batanero, 2005; Batanero y Borovcnik, 2016; Ortiz y Serrano, 2008).

Teniendo en cuenta estas consideraciones surge la necesidad de examinar si las directrices se hacen eco de las recomendaciones surgidas en el seno del área de la didáctica de la matemática, en relación a los significados de la probabilidad. A pesar de que los estudios sobre el tratamiento de los contenidos de probabilidad en el currículo y en los libros de texto, son escasos, trabajos como los de Gómez-Torres (2014), Sánchez (2009) y Vásquez y Alsina (2015), determinan que la mayoría de textos analizados presentan objetos matemáticos relacionados a los diferentes significados de la probabilidad, pero que son limitados los que tratan el significado frecuencial y subjetivo de la probabilidad. Los autores sugieren que, para una enseñanza y aprendizaje adecuado, se debería proponer una muestra representativa y equilibrada de situaciones contextualizados a cada significado de la probabilidad.

En este capítulo desarrollamos un método para analizar el tratamiento de la probabilidad en los marcos normativos y materiales curriculares aplicando herramientas del EOS. En concreto, el objetivo que perseguimos es analizar la representatividad y articulación de los diferentes significados de la probabilidad en los documentos curriculares de nivel educativo secundaria en Perú (estudiantes de 12-13 años).

2. METODOLOGÍA

Dado que nuestro propósito es analizar la representatividad y articulación de los diferentes significados de la probabilidad en los documentos curriculares, aplicamos el análisis de contenido (Krippendorff, 2018) al caso de un texto normativo curricular escolar de Perú y sus materiales didácticos en probabilidad. Dicho análisis se apoya en las nociones de configuración epistémica y configuración didáctica. De esta forma, la investigación tiene un carácter cualitativo (Fraenkel et al., 2011).

En una primera etapa localizamos y examinamos el programa curricular donde el área de la matemática queda organizada en cuatro bloques: resuelve problemas de cantidad; resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; resuelve problemas de forma, movimiento y localización, y resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. Cada una de estas, representa a una competencia y están precisadas mediante capacidades, descripción de nivel de competencia y desempeños (descripciones específicas de lo que hacen los estudiantes respecto al nivel de competencia) por grado.

Nuestro interés se centra en el último bloque, concretamente en la resolución de problemas de incertidumbre (probabilidad) y referido a estudiantes de primer (12 años) y segundo grado (13 años) de lo que se denomina ciclo VI de Educación Secundaria.

Para cada grado el programa curricular prescribe un conjunto de desempeños, de los que cinco (tanto para primer como para segundo grado) tratan sobre probabilidad. En adelante, nos referiremos a cada uno de estos desempeños por sus abreviaturas (DGx.y). Por ejemplo, como se puede observar en la Tabla 2 del Anexo 14, DG1.3 es el código abreviado para el tercer desempeño del primer grado, y DG2.1 hace referencia al primer desempeño de segundo grado de Educación Secundaria.

De igual forma, abreviaremos la descripción de nivel de competencia esperada al finalizar el ciclo VI con el código NC6.

Dado que, en la perspectiva del EOS, el significado institucional queda delimitado a partir de la configuración epistémica de objetos, para analizar los desempeños y el nivel de competencia, se procede en primer lugar a asociar los términos y expresiones, según la tipología de objetos (situaciones-problema, lenguajes, procedimientos, argumentos y conceptos-definición), con los significados intuitivo, frecuencial y clásico (no se ha detectado el significado subjetivo con claridad).

En segundo lugar, se seleccionan y analizan los cuadernos de trabajo de matemática facilitados por el Ministerio de Educación: Resolvamos Problemas de primer (MINEDU, 2019a) y segundo grado (MINEDU, 2019b) de Educación Secundaria. Cada cuaderno contiene 20 fichas que abordan diferentes temas de matemática. En el cuaderno de trabajo de primer grado se han identificado dos fichas (nº 9 y nº 13) que abordan la probabilidad, de los cuales se ha examinado la ficha 9 por contener la mayor cantidad de situaciones-problemas. En lo que respecta al cuaderno de trabajo de segundo grado se identificó una sola ficha (nº 13), que será la que analizamos.

Todas las fichas están organizadas en tres secciones: (1) aplicación, (2) comprobación y (3) evaluación de aprendizajes. Cada sección tiene un propósito relacionado con los desempeños prescritos en el programa curricular y se concreta mediante diferentes situaciones-problemas. Así, la sección de aplicación introduce una situación-problema siguiendo los pasos de resolución de problemas de Polya y sus enunciados específicos; la de comprobación expone tres situaciones-problemas con sus respectivos procedimientos de resolución predeterminadas, y la de evaluación propone 10 situaciones-problemas que el estudiante debe resolver.

Para el análisis didáctico, se ha considerado cada sección de la ficha como una unidad o configuración didáctica. Las configuraciones 1, 2 y 3 corresponden a la ficha n° 9 de primer grado y la configuración 4, 5 y 6 a la ficha n° 13 de segundo grado. Así mismo, en cada configuración didáctica se describen las prácticas y objetos matemáticos que intervienen y los conflictos semióticos potenciales que se van manifestando.

3. ANÁLISIS DEL PROGRAMA CURRICULAR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN PROBABILIDAD

En este apartado identificamos en el programa curricular términos y expresiones que hacen referencia a los diferentes significados de la probabilidad y los objetos matemáticos relacionados a los mismos. En ese sentido, el currículo señala que el estudiante al finalizar el ciclo VI de Educación Secundaria debe haber adquirido la siguiente competencia:

> Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica (NC6).

Por tanto, los registros lingüísticos en los que se espera que los estudiantes se desenvuelvan son el verbal y el simbólico-numérico (representación fraccionaria, decimal y enteros). La competencia del NC6 implica los conceptos-definiciones: evento o situación aleatoria, probabilidad, espacio muestral, suceso, suceso seguro, probable e imposible, decimal y fracción. También, aparecen involucradas proposiciones como "el suceso seguro siempre ocurre", "el suceso imposible nunca se verifica" y "la probabilidad de un suceso se asocia a un número entre 0 y 1". Para justificar las proposiciones esperadas del NC6, se pide que el estudiante emplee argumentos que apoyen a demostrar la ocurrencia de eventos, así como la asignación de valores entre 0 y 1 a un suceso seguro, probable e imposible.

En la descripción del NC6 no se identifican claramente los significados de la probabilidad por medio de objetos asimilables a cada uno de ellos, por lo cual podría relacionarse tanto con el significado clásico como con el frecuencial, teniendo elementos del intuitivo (valoración cualitativa del grado de probabilidad, predicciones). Como veremos a continuación, la delimitación de los significados de la probabilidad en el programa curricular se consigue con el análisis de los desempeños de primer y segundo grado de Educación Secundaria, puesto que son mucho más específicos que las descripciones de los niveles competenciales.

3.1 Desempeños de primer y segundo grado de Educación Secundaria

En el currículo escolar peruano los desempeños son descripciones más específicas de la competencia (NC6). En algunas ocasiones estos desempeños son iguales en primer y segundo grado debido a que requieren mayor tiempo para su desarrollo (MINEDU, 2017). En tal sentido, como se describe en la sección de metodología, se han identificado y codificado cinco desempeños tanto para primer grado (DG1.1 a DG1.5) como segundo grado (DG2.1 a DG2.5). Entre ellos, los desempeños DG1.1, DG1.4, DG2.1 y DG2.4 explicitan términos y expresiones que hacen referencia al significado clásico y frecuencial, como es el uso de la regla de Laplace y el cálculo de frecuencias o frecuencia relativa dentro de sus procedimientos. Mientras que los desempeños DG1.2, DG1.3 y DG1.5, así como DG2.2, DG2.3 y DG2.5 no determinan claramente un significado concreto de la probabilidad. Esta falta de precisión puede conllevar su orientación al significado clásico y significado frecuencial incluso al intuitivo. En relación con este último, se observa en los desempeños, ciertos indicios de valoración cualitativa de la probabilidad (Batanero y Godino, 2002).

A continuación, se desglosan en la Tabla 3.1 los objetos matemáticos relacionados a los significados de la probabilidad según los desempeños por grado.

Tabla 3.1

Objetos matemáticos relacionados a los significados de la probabilidad y los desempeños por grado

Objetos matemáticos	Significados			Desempeños	
	Clásico	Frecuencial	Intuitivo	1°	2°
Situaciones-problema					
Reconocer las condiciones que definen una situación aleatoria	x	x	x	x	x
Expresar el valor de la probabilidad como más o menos probable	x	x	x	x	
Determinar el espacio muestral	x	x	x		x
Expresar el valor de la probabilidad como seguro, probable o imposible	x	x	x		x
Determinar la probabilidad de sucesos con regla de Laplace o cálculo de su frecuencia relativa	x	x		x	x
Interpretar información de diversos textos con valores o descripciones de situaciones aleatorias	x	x	x	x	x
Plantear afirmaciones o conclusiones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos	x	x	x	x	x
Lenguajes					
Verbal	x	x	x	x	x
Simbólico – numérico	x	x	x	x	x
Gráfico	x	x	x	x	x
Tabular	x	x		x	x
Conceptos-definición					
Situación aleatoria	x	x	x	x	x
Espacio muestral	x	x	x		x
Sucesos, sucesos simples	x	x	x	x	x
Suceso seguro, probable e imposible	x	x	x		x
Probabilidad	x	x	x	x	x
Frecuencia, frecuencia relativa		x		x	x
Procedimientos					
Identificación de las condiciones de una situación aleatoria	x	x	x	x	x
Comparación del valor de la probabilidad	x	x	x	x	x
Enumeración de sucesos elementales	x	x	x		x
Aplicación de la regla de Laplace	x			x	x
Representación simbólica o gráfica.	x	x	x	x	x
Lectura de tablas, gráficos y textos con situaciones aleatorias	x	x	x	x	x
Relacionar el valor de la probabilidad con suceso seguro, probable o imposible	x	x	x		x
Cálculo de la frecuencia relativa y porcentaje		x		x	x
Revisar procedimientos	x	x	x	x	x
Extraer conclusiones y corregir errores	x	x	x	x	x
Proposiciones					
Regla de Laplace	x			x	x
La frecuencia relativa de un suceso varía entre 0 y 1		x		x	x
La probabilidad de un suceso es un valor calculable	x	x		x	x
Argumentos					
Plantear afirmaciones y extraer conclusiones	x	x	x	x	x
Reconocer errores en sus justificaciones	x	x	x	x	x
Deducción a partir de datos	x	x	x		x

Fuente: elaborado por los autores.

Como se deduce de la información recogida en la Tabla 3.1 los significados clásico y frecuencial cuentan con una mayor representatividad frente al intuitivo. Casi todos los desempeños pueden asociarse tanto al enfoque clásico como al frecuencial, salvo aquellos que mencionan explícitamente la regla de Laplace. En lo que respecta al significado frecuencial se incluyen procedimientos de naturaleza estadística, pero no procedimientos de experimentación y simulación. Mientras que el significado intuitivo queda implícito, no se hace mención a revisar los grados de creencia personal en base a la nueva información disponible, por lo que no podría relacionarse con el significado subjetivo de la probabilidad.

3.2. Análisis de las fichas del cuaderno de trabajo "Resolvamos problemas"

El análisis que realizamos a continuación sobre los materiales curriculares proporcionados para cada grado y que además se llevan al trabajo de aula, permitirá determinar el tratamiento efectivo de los desempeños con relación a los significados de la probabilidad.

3.2.1 Material curricular de primer grado de Educación Secundaria

La ficha dedicada a probabilidad (ficha nº 9) consta de tres secciones: aplicación, comprobación y evaluación. De cada una de estas secciones, emerge una configuración didáctica, como mostramos a continuación:

Configuración didáctica 1 (sección de aplicación)

En esta configuración, se contemplan tres desempeños: expresar el valor de la probabilidad como más o menos probable (DG1.2), aplicar la regla de Laplace (DG1.4) y justificar con ejemplos la probabilidad de ocurrencia de sucesos (DG1.5).

Prácticas y objetos matemáticos

Introduce una situación-problema vinculada al significado clásico contextualizada al juego de la ruleta, donde se debe calcular la probabilidad de ciertos sucesos (premio, descuento o agradecimiento). Si bien la ruleta es un dispositivo que permitiría abordar el significado frecuencial considerando sucesos elementales no equiprobables, al estar dividida en sectores de igual amplitud (Figura 3.1), la situación se relaciona con el significado clásico. Los objetos matemáticos identificados en esta configuración se resumen en la Tabla 3.3.

Figura 3.1

Ruleta en una actividad de la primera sección de la ficha 9 de primer grado

Fuente: MINEDU (2019a, p. 117).

Conflictos semióticos potenciales

A pesar de que en la ruleta se indica claramente qué sectores otorgan premio, se observan también iconos (caracoles y estrellas) que no están directamente relacionados con los dos enunciados del problema. Esto puede generar confusión en la interpretación de datos y en la enumeración correcta de todos los sucesos elementales (Bryant y Nunes, 2012).

Para resolver la situación-problema se suponen conocidos los términos de situación aleatoria, resultados posibles y favorables, sucesos y probabilidad.

En todas las situaciones que se resuelven mediante la regla de Laplace, no reflexionar sobre la equiprobabilidad subyacente de los sucesos elementales y no articular esta con otras situaciones donde no tenga sentido esta suposición, fomenta el sesgo de equiprobabilidad y la creencia de que sucesos elementales de cualquier experimento son equiprobables (Lecoutre, 1992).

Configuración didáctica 2 (sección de comprobación)

Esta configuración contempla dos desempeños: determinar las condiciones de una situación aleatoria, aplicar la regla de Laplace, determinar si un suceso es más o menos probable (DG1.2) y justificar con ejemplos la probabilidad de ocurrencia de sucesos (DG1.5). Se desarrollan mediante tres situaciones, A, B y C, que giran en torno a la aplicación de la regla de Laplace.

Prácticas y objetos matemáticos

La situación-problema A contextualizada en un juego de dados pide determinar si los sucesos del enunciado resultan ser seguro, imposible o probable. Dado que en el enunciado no se pide al estudiante un valor numérico de la probabilidad, sino una asignación cualitativa de la ocurrencia de los sucesos asociado a expresiones verbales (imposible, seguro o probable) podría abordarse desde el significado intuitivo. No obstante, como hay una cierta cuantificación latente y el espacio muestral consta de un número finito de sucesos elementales y equiprobables, la situación aleatoria corresponde al significado clásico.

La situación-problema B cuyo contexto es el lanzamiento simultáneo de dos dados, requiere determinar el espacio muestral, identificar la suma más probable y calcular la probabilidad de la suma más probable. Como se trata de asignar un valor numérico usando la regla de Laplace, la situación se relaciona directamente con el significado clásico.

La situación-problema C, planteada en un contexto biológico, pide calcular la probabilidad de que mellizos sean de distinto sexo. El espacio muestral de la situación aleatoria consta de un número finito de sucesos y valor numérico de la probabilidad se obtiene mediante la regla de Laplace, la situación corresponde al significado clásico. Los objetos matemáticos involucrados en esta configuración se resumen en la Tabla 3.3.

Conflictos semióticos potenciales

En la situación A, se define espacio muestral como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. “Resultado” es un término poco preciso que alude a cualquier suceso que pueda ocurrir en el experimento, por lo que es más adecuado hablar de sucesos elementales (Serradó et al., 2005). También se emplea, al enunciar la regla de Laplace, el término “caso”, cuando se podría haber unificado al hablar de sucesos elementales. Este uso diverso de términos puede conducir a conflictos semióticos a la hora de asignar el significado (Gómez-Torres, 2014; Serradó et al., 2005). Otro conflicto se produce al expresar la probabilidad como porcentaje también puede haber un conflicto, pues se indica “Para expresar la probabilidad en porcentajes, multiplicamos por 100 %”, lo cual es un procedimiento carente de significado.

En la situación B, se utiliza la tabla de doble entrada sin justificar por qué o en qué casos de situaciones aleatorias es necesario o pertinente su uso.

En la situación C, no queda claro cuál es el método, ni la forma de componer cada elemento del espacio muestral, ni si el orden de los sexos de los mellizos importa. Sería conveniente justificar el uso de la enumeración sistemática que consiste en formar la lista de los sucesos elementales organizadas en grupos.

En las tres situaciones del bloque de comprobación se aplica la regla de Laplace, pero se omite la justificación de las condiciones de su uso, lo mismo sucede con la escala de la probabilidad. Por tanto, hay ausencia de argumentación y justificación en los procedimientos de resolución. Además, se suponen conocidos los conceptos de situación aleatoria, casos favorables, casos posibles, tipos de suceso, suceso simple, suceso compuesto, suceso seguro, suceso imposible, probabilidad, métodos combinatorios, fracciones y porcentajes. Por último, al tratarse de una situación desde el significado clásico y, al igual que se comentó en la configuración didáctica 1, tenemos el conflicto potencial asociado a la equiprobabilidad.

Configuración didáctica 3 (sección de evaluación)

Esta sección pretende lograr cuatro desempeños: Determinar las condiciones de una situación aleatoria, aplicar la regla de Laplace y determinar si un suceso es más o menos probable que otro (DG1.1); expresar el valor de la probabilidad como más o menos probable (DG1.2); determinar la probabilidad de sucesos simples con la regla de Laplace (DG1.4; justificar mediante ejemplos la probabilidad de la ocurrencia de sucesos (DG1.5). Para tales objetivos, propone diez situaciones-problemas de las cuales nueve (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10) se plantean en el contexto de juegos de azar relacionados al significado clásico y solo la situación aleatoria 3 subyace el significado frecuencial.

Prácticas y objetos matemáticos

Del grupo de situaciones-problemas vinculadas al significado clásico, en seis (1, 2, 5, 6, 7 y 10) se requiere comparar y valorar los resultados de las probabilidades de los sucesos simples. En las situaciones-problemas 4, 8 y 9 se pide calcular la probabilidad de sucesos compuestos, lo que requiere el uso de estrategias combinatorias. Por otro lado, en la situación-problema 3 del significado frecuencial planteada en el contexto de las disciplinas deportivas que practican los estudiantes, se pide calcular la probabilidad del suceso complementario (no practican básquet) a partir de los datos expuestos en un gráfico de sector circular. Los objetos matemáticos que intervendrán en esta configuración se expresan en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2

Objetos matemáticos identificados en la configuración 1, 2 y 3

Objetos matemáticos	Configuración didáctica		
	1	2	3
Lenguajes			
Expresión verbal	x	x	x
Expresiones simbólico-numéricos (desigualdad, enteros, decimales, fracciones, porcentajes)	x	x	x
Gráficos (diagrama de árbol y sector circular)		x	x
Tabulares (tabla de doble entrada y de frecuencias)		x	x

Conceptos-definiciones			
Situación aleatoria, experimento aleatorio simple y compuesto	x	x	x
Sucesos; suceso simple y compuesto; suceso más o menos probable; suceso seguro e imposible	x	x	x
Casos posibles y favorables	x	x	x
Espacio muestral	x	x	x
Equiprobabilidad	x	x	x
Probabilidad	x	x	x
Frecuencia, frecuencia relativa y absoluta, población			x
Procedimientos			
Lectura y análisis de textos y gráficos de la situación aleatoria	x	x	x
Enumeración de sucesos elementales	x	x	x
Construir tablas o diagramas de árbol para contar casos posibles y favorables		x	x
Diferenciación de casos posibles y favorables	x	x	x
Aplicación de la regla de Laplace	x	x	x
Comparación del valor de la probabilidad	x	x	x
Ordenar el valor de la probabilidad para caracterizar como más o menos probable y como seguro, probable o imposible de ocurrir	x	x	x
Elaboración de una tabla y cálculo de frecuencias relativas			x
Proposiciones			
El espacio muestral es finito y numerable		x	
Regla de Laplace		x	
La probabilidad es un valor entre 0 y 1		x	
La frecuencia relativa de un suceso varía entre 0 y 1		x	
Argumentos			
Uso de gráficas y ejemplos		x	

Fuente: elaborado por los autores.

Conflictos semióticos potenciales

En la situación-problema 3 no se incluye el título en el gráfico de sector circular. Como señalan Díaz-Levicoy y Arteaga (2017) la omisión de títulos en los gráficos estadísticos puede causar conflicto en la interpretación de la información.

Para resolver las situaciones-problemas de esta sección, se suponen conocidos los conceptos de situación aleatoria simple y compuesta.

3.2.2 Material curricular de segundo grado de Educación Secundaria

En la ficha n° 13 se exponen catorce situaciones agrupadas en tres secciones: aplicación, comprobación y evaluación. A continuación, analizamos estas configuraciones.

Configuración didáctica 4 (sección de aplicación)

En esta sección se desarrollan dos desempeños que implican: determinar la probabilidad de sucesos mediante la regla de Laplace (DG2.4) y expresar con lenguaje matemático el valor de la probabilidad (DG2.2).

Prácticas y objetos matemáticos

Se introduce una situación-problema vinculada al significado frecuencial, donde se pide determinar a partir de los datos de una tabla el número de pasajeros que puede esperar la empresa. Además, solicita imaginar 10 fines de semana para estimar la demanda de pasajeros por escenario y calcular la frecuencia absoluta de los fines de semana. La situación es propia del significado frecuencial, hecho que no concuerda con el propósito anticipado en la ficha que pide determinar la probabilidad de los sucesos mediante regla de Laplace. Los objetos matemáticos que se implicaran en esta configuración se pueden ver en la Tabla 3.3.

Conflictos semióticos potenciales

El propósito de esta sección es la aplicación de la regla de Laplace, tal y como indica en el encabezado:

Empleamos procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace. Asimismo, expresamos con lenguaje matemático nuestra comprensión sobre el valor de la probabilidad en una situación aleatoria. Sin embargo, la situación-problema planteada no lo permite, dado que los sucesos no son equiprobables.

La tabla adjunta a la situación aleatoria no lleva un título, hecho que puede confundir a la hora de la interpretación de la información.

En el enunciado general del problema: “¿Cuál es número de pasajeros que puede esperar la empresa?”, no queda claro si se trata de calcular el número de pasajeros por cada escenario o en el total de escenarios.

Para resolver la situación-problema se suponen conocidas los términos estimación, probabilidad, frecuencia absoluta y relativa y media aritmética. Si el profesor no ha trabajado con anterioridad los conceptos-definiciones mencionados, es posible que requiera introducirlos en la resolución del problema.

Configuración didáctica 5 (sección de comprobación)

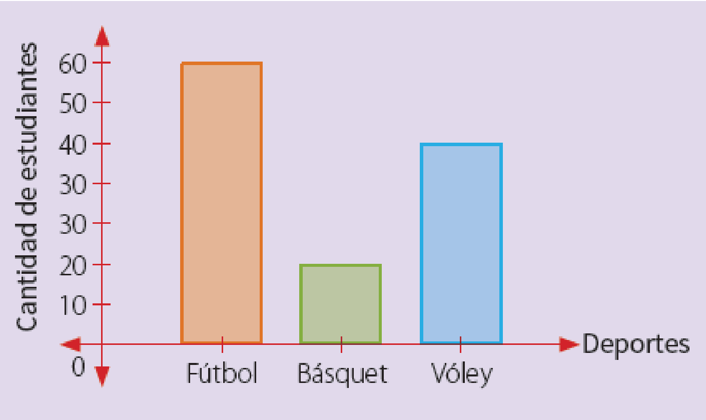
En esta configuración se persiguen dos desempeños que incluyen determinar el espacio muestral de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace (DG2.1) y justificar con conocimientos estadísticos la probabilidad de ocurrencia (DG2.5). Para lograr dichos propósitos expone tres situaciones, A, B y C, que buscan la aplicación de la regla de Laplace.

Prácticas y objetos matemáticos

La situación-problema A que trata sobre el lanzamiento de dos monedas y un dado, pide calcular la probabilidad de obtener solo una cara y un número impar.

Figura 3.2

Gráfico de barras en una actividad de la segunda sección de la ficha



Fuente: MINEDU (2019b, p. 171).

Para responder al enunciado, en la ficha se predefine unos pasos de resolución que involucran objetos matemáticos relacionados al significado clásico de la probabilidad. Mientras que, la situación B incorpora elementos del significado frecuencial y presenta los datos recogidos en una encuesta demográfica. Asimismo, pide calcular la probabilidad de tres sucesos (practicar natación, practicar algún deporte y practicar vóley) a partir de la información dada en un gráfico de barras (ver Figura 3.2). Sin embargo, la resolución que se muestra se realiza exclusivamente desde el significado clásico.

La situación-problema C corresponde al contexto geométrico, en el que se debe calcular la probabilidad de la caída del dardo en la zona X de la Figura 3.3.

Figura 3.3

Tablero circular en una actividad de la segunda sección de la ficha 13 de segundo grado

Fuente: MINEDU (2019b, p. 177).

En esta situación, al estudiante se le reta justificar si el procedimiento establecido en la ficha es correcto. En ese caso, si el estudiante identifica el error tiene la posibilidad de proponer que la situación aleatoria puede ser abordado desde el significado frecuencial por los sucesos elementales no equiprobables.

En los pasos de solución que propone la ficha para cada situación-problema de esta configuración, se ponen en juego diversos objetos matemáticos que se sintetizan en la Tabla 3.3.

Conflictos semióticos potenciales

En el propósito de la situación A se indica “Determinamos el espacio muestral de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace (valor decimal) y a partir de este valor identificamos si un suceso es seguro, probable o imposible”. Esto es confuso, pues la regla de Laplace no se utiliza para determinar el espacio muestral, sino para calcular la probabilidad de sucesos. Cuando se utiliza, se emplea un simbolismo abreviado $n(A)/n(\Omega)$ que puede resultar innecesario e inadecuado en esta etapa escolar.

En la situación A se utiliza el diagrama de árbol sin justificar en qué casos de experimentos aleatorios es necesario su uso. Convendría aclarar que el conjunto de todos los casos posibles listados, son generados mediante un proceso combinatorio de sucesos elementales de dos experimentos aleatorios simples (Bryant y Nunes, 2012).

En la situación B se omite el título del gráfico de barras, lo que nuevamente puede causar conflictos en la lectura e interpretación de la información expuesta (Díaz-Levicoy y Arteaga, 2017).

En el procedimiento de resolución que se describe en B, se presenta algorítmicamente el uso de la regla de Laplace obviando el hecho de que los datos se han obtenido mediante la repetición del mismo experimento cierto número de veces (aplicación de la encuesta a cada estudiante) y que se presenta un diagrama de barras que se corresponde con el diagrama de frecuencias. En la resolución del cuadernillo, el espacio muestral ya no es “practica vóley”, “practica fútbol” y “practica básquet”, sino que está formado por todos y cada uno de los estudiantes. En caso de hacerlo así, sería necesario indicar que estamos considerando como sucesos elementales “estudiante 1 que practica básquet”, “estudiante 2 que practica básquet”, etc.

En esta configuración se suponen conocidos algunos conceptos y procedimientos, que pueden ser desconocidos para el estudiante. Así los diagramas en árbol, la probabilidad en el contexto geométrico y el cálculo de áreas de sectores, no están contemplados en el currículo de segundo grado. Respecto a la regla de Laplace, al igual que en las configuraciones anteriores, el profesor debe exigir la reflexión antes de asumir el modelo de equiprobabilidad.

Configuración didáctica 6 (sección de evaluación)

En esta configuración se persigue: determinar el espacio muestral de una situación mediante la regla de Laplace e identificar si el suceso es seguro, probable o imposible (DG2.1); expresar con lenguaje matemático el valor de la probabilidad de una situación aleatoria (DG2.2); determinar la probabilidad de sucesos mediante la regla de Laplace (DG2.4); justificar con conocimientos estadísticos la probabilidad de ocurrencia de sucesos en estudio y corregir errores si los hubiera (DG2.5).

Prácticas y objetos matemáticos

Se propone diez situaciones-problemas, de los cuales nueve responden al significado clásico y solo una (la nº 7) al significado frecuencial. Del grupo de situaciones-problemas asociadas al significado clásico planteadas en el contexto de juegos de azar, cuatro (1, 3, 4 y 9) involucran la comparación de las probabilidades de los sucesos de una situación aleatoria simple. Mientras, las situaciones-problemas 2, 5, 6 y 8 implican el cálculo de la probabilidad de sucesos en situaciones aleatorias compuestas. El contexto de la situación-problema 10 es la lectura de una revista entre hombres y mujeres que trabajan en una empresa. Se trata de una situación aleatoria compuesta que involucra el cálculo de la probabilidad a partir de la dependencia de sucesos. Por su parte, la situación-problema 7 asociada al significado frecuencial planteada en el contexto de uso de las redes sociales, evalúa el cálculo de la frecuencia relativa y porcentaje a partir de la información disponible en una tabla de frecuencias. Los objetos matemáticos identificados para esta configuración se observan en la Tabla 3.3.

Tabla 3.3

Objetos matemáticos identificados en la configuración 4, 5 y 6

Objetos matemáticos	Configuración didáctica		
	4	5	6
Lenguajes			
Expresión verbal	x	x	x
Expresiones simbólico-numéricos (desigualdad, enteros, decimales, fracciones, porcentajes)	x	x	x
Gráficos (diagrama de árbol, diagrama de barras, sector circular)		x	x
Tabulares (tabla de doble entrada y de frecuencias)	x		x
Conceptos-definiciones			
Situación aleatoria, experimento aleatorio simple y compuesto	x	x	x
Sucesos, sucesos independientes y dependientes	x	x	x
Resultados/Casos posibles y favorables		x	x
Espacio muestral	x	x	x
Equiprobabilidad		x	x
Probabilidad	x	x	x
Frecuencia, frecuencia relativa y absoluta, población, estimación	x		x
Sector circular		x	
Procedimientos			
Lectura y análisis de textos y gráficos de la situación aleatoria	x	x	x
Enumeración de sucesos elementales		x	x
Construir tablas o diagramas de árbol para contar casos posibles y favorables		x	x
Diferenciación de casos posibles y favorables		x	x
Aplicación de la regla de Laplace		x	x
Comparación del valor de la probabilidad		x	x
Elaboración de una tabla y cálculo de frecuencias relativas	x		x
Proposiciones			
El espacio muestral es finito y numerable		x	x
Regla de Laplace		x	x
La probabilidad es un valor entre 0 y 1		x	x
La frecuencia relativa de un suceso varía entre 0 y 1		x	x
Argumentos			
Ejemplos		x	

Fuente: elaborado por los autores.

Conflictos semióticos potenciales

En la situación aleatoria 7 se omite el título en la tabla de frecuencias, lo que puede causar conflictos en la interpretación de la información.

Es posible que el estudiante de segundo grado de Educación Secundaria tenga conflictos durante el proceso de resolución de las situaciones aleatorias 6, 8 y 9, dado que el tratamiento de la probabilidad con sucesos independientes y dependientes no está considerado en los desempeños de segundo grado, ni ha sido tratada en las secciones anteriores de la ficha.

4. CONCLUSIONES

El análisis conjunto del programa curricular y las fichas de trabajo con las herramientas del EOS, nos ha permitido concluir la preferencia del significado clásico en detrimento del significado frecuencial e intuitivo de la probabilidad. Este resultado coincide con las investigaciones previas en análisis de libros de texto en el tema de probabilidad (Gómez-Torres, 2014; Sánchez, 2009; Serradó et al., 2005; Vásquez y Alsina, 2015).

Al examinar el programa curricular se evidenció mayor representatividad de objetos matemáticos relacionados al significados clásico y frecuencial frente al intuitivo, aun cuando la descripción de NC6, los desempeños de primer grado y segundo no explicitaban su relación expresa con ningún significado de la probabilidad. Para complementar este análisis y determinar el tratamiento efectivo de los desempeños con relación a los significados de la probabilidad, se tomó la decisión de examinar los materiales curriculares que proponen actividades de probabilidad.

Las actividades del material curricular se dividieron en seis configuraciones didácticas. En cada configuración se identificaron las prácticas y objetos matemáticos que permiten identificar el significado de la probabilidad con el que se vincula, así como los conflictos semióticos potenciales que se van manifestando. De las catorce situaciones-problemas expuestas en la ficha 9 de primer grado, trece corresponde al significado clásico y solo uno subyace el significado frecuencial. Mientras que, en la ficha 13 de segundo grado, de las catorce situaciones-problemas, once están relacionados al significado clásico, dos al significado frecuencial y uno contempla criterios geométricos en probabilidad. En las configuraciones se suponen conocidos los conceptos-definiciones de situación aleatoria, espacio muestral, sucesos, suceso simple, suceso seguro, probable e imposible, probabilidad, frecuencia y frecuencia relativa, que además están predeterminados en el programa curricular. No obstante, los conceptos-definiciones de situación aleatoria simple y compuesta, equiprobabilidad y sucesos dependientes, así como términos de tabla de doble entrada, diagrama de árbol, regla de la multiplicación, criterios geométricos en probabilidad, no están contemplados en el programa curricular para ciclo VI.

El análisis también nos ha permitido identificar en las configuraciones diversos conflictos semióticos potenciales. En particular, se observa un uso diverso y poco preciso de términos y expresiones que definen el significado de espacio muestral y sucesos y una ausencia de distinción de los conceptos-definiciones de suceso elemental y compuesto, así como experimento simple y compuesto. No se clarifica las condiciones de uso de la regla de Laplace, de la escala de la probabilidad, ni de los diferentes tipos de representaciones y métodos combinatorios que facilitan la enumeración del espacio muestral en experimentos compuestos. Además, se observa una aplicación inadecuada de la regla de Laplace cuando las situaciones-problemas no lo permiten porque los sucesos elementales no son equiprobables; hecho que fomenta la aparición del sesgo de la equiprobabilidad.

Las situaciones-problemas del significado frecuencial se reducen al cálculo de la frecuencia relativa y porcentual, a partir de una gráfica o tablas que recogen las frecuencias absolutas. No se pretende experimentación, ni simulación por parte de los estudiantes. Este hecho puede generar conflictos de comprensión del significado frecuencial y estabilidad de frecuencias relativas (Serradó et al., 2005).

Teniendo en cuenta los resultados de nuestra investigación, así como las recomendaciones surgidas en el área de la Didáctica de la Matemática sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, el profesor que recurra al programa curricular y las fichas de trabajo debería tomar las recomendaciones siguientes: replantear las actividades propuestas en las fichas de trabajo y conectar con el programa curricular; aclarar los conceptos que no han sido trabajados con anterioridad para evitar conflictos cognitivos durante el desarrollo de la ficha de trabajo; explicar sobre el uso de los diferentes tipos de representaciones y métodos combinatorios (tabla de doble entrada, esquemas, enumeración sistemática, diagrama de árbol) que facilitan la enumeración del espacio muestral de experimentos compuestos, debido a que no están previstos en la orientación curricular.

CAPÍTULO 4.

INSTRUMENTO Y ANÁLISIS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA DE MATERIALES CURRICULARES

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2021). Análisis de la idoneidad didáctica de la probabilidad en el Programa Curricular de Educación Secundaria peruana. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 34*(2), 547-558.

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales peruanos de Educación Secundaria en probabilidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 36* (73), 888-922.

1. INTRODUCCIÓN

Los constantes movimientos de reformas curriculares en los sistemas educativos han venido incorporando contenidos propios del análisis de datos y la probabilidad, que los estudiantes deben conocer para responder a las exigencias de la sociedad actual. La inclusión y tratamiento de la probabilidad, desde los primeros niveles educativos, se justifica tanto a partir de su utilidad para la vida diaria como por su papel instrumental en otras disciplinas. La probabilidad, como parte de las matemáticas y base de otras disciplinas, es esencial para preparar a los estudiantes de cara a tomar decisiones adecuadas en situaciones aleatorias (Gal, 2005).

El sistema educativo peruano no ha sido ajeno a estos cambios y propuestas curriculares y, así, en las últimas décadas, el bloque de estadística y probabilidad se ha integrado y consolidado en el nivel educativo primaria (III, IV y V ciclo) y secundaria (VI y VII ciclo) como base de la competencia de resolver problemas de gestión de datos e incertidumbre.

Con esta competencia, se espera que los estudiantes de educación primaria expresen la ocurrencia de los sucesos usando las nociones de posible o imposible (III ciclo), seguro, probable o menos probable (IV ciclo); realicen experimentos aleatorios reconociendo sus posibles resultados y expresen la probabilidad con relación al número de casos favorables y posibles (V ciclo). Después en la Educación Secundaria los estudiantes expresen la probabilidad como decimal o fracción e interpreten un suceso como imposible, posible o seguro, asociando los valores entre 0 y 1 (VI ciclo). Al finalizar esta etapa (VII ciclo) los estudiantes deben ser capaces de expresar la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad (MINEDU, 2017).

Diversas orientaciones curriculares destacan la necesidad de tratar los distintos significados (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico) de la probabilidad, de manera articulada y adecuada a la edad de los estudiantes y sus conocimientos previos, e insisten en la importancia de la experimentación, la modelización y la simulación con ayuda de software en el aprendizaje de la probabilidad (Batanero, 2005; Batanero y Borovcnik, 2016; Inzunsa, 2013; Vásquez y Alsina, 2019; Zimmermann y Jones, 2002). En ese contexto, surge el interés y la necesidad de analizar aquellos materiales curriculares que condicionan y constituyen el referente para organizar la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Valorar la adecuación de los materiales curriculares requiere desarrollar indicadores que guíen la reflexión en las diferentes dimensiones, no solo epistémica o cognitiva, sino también afectiva, emocional o instruccional, que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un material curricular que incluye secuencia de prácticas matemáticas y didácticas determina un proceso instruccional, previsto o planificado, que el profesor que tome la decisión de usarlo debe evaluar y adaptar en base a las necesidades específicas de sus estudiantes, circunstancias contextuales, metas y estándares locales (Brown, 2009).

En esta línea, el constructo idoneidad didáctica desarrollado en el marco del EOS, puede ser utilizado como una herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre la adecuación de estos y otros recursos educativos (Balcaza et al., 2017; Castillo et al., 2021; Monje et al., 2018).

Ahora bien, la particularidad de cada contenido matemático requiere la elaboración de guías específicas para los distintos contenidos curriculares, en particular, en el caso de la probabilidad (Beltrán-Pellicer et al., 2018). Por otro lado, además del contenido en sí, deben tenerse en cuenta las características propias del tipo de material curricular (la presentación y explicación de los contenidos, cómo se incorporan las actividades para el estudiante, los recursos manipulativos previstos o empleados, la posibilidad de interacción prevista, los instrumentos de evaluación diseñados etc.) en la elaboración de dichos instrumentos, entendiendo que el proceso instruccional previsto por medio de un cuaderno de trabajo no es el mismo que el de un libro de texto o el diseñado por el profesor.

Por este motivo, en este capítulo llevamos a cabo una revisión sistemática de los criterios e indicadores de idoneidad didáctica con la finalidad de elaborar una guía para valorar materiales curriculares sobre probabilidad.

Con el objetivo de mostrar la funcionalidad de esta guía, presentamos los resultados de su aplicación para valorar la idoneidad didáctica de las fichas que tratan la probabilidad en dos cuadernos de trabajo, uno de primer grado y otro de segundo (estudiantes de doce y trece años) de Educación Secundaria en Perú. En estos cursos (que componen el primer ciclo educativo de la Educación Secundaria), se espera que los estudiantes logren una comprensión óptima de los conceptos, propiedades y procedimientos vinculados a los significados clásico y frecuencial que centran nuestra atención en este trabajo.

En cursos posteriores, se incorporan contenidos vinculados a la probabilidad condicional y que requeriría la adaptación de la guía de análisis desarrollada. Conviene observar que los cuadernos de trabajo forman parte de los materiales curriculares oficiales puestos a disposición de los profesores desde la misma administración de la que emana la norma curricular, con lo que la aplicación de la guía de idoneidad abre la posibilidad de matizar la propia norma y evaluar su coherencia.

Los cuadernos de trabajo son materiales físicos distribuidos por el Ministerio de Educación peruano a los estudiantes, que pueden utilizar tanto en clase como en casa, si bien disponen, también, de su versión virtual. Además, dado que ni estudiantes ni profesores disponen de libro de texto, el profesor usa los cuadernos de trabajo para planificar la enseñanza sobre cada contenido específico. Tal y como se menciona en las orientaciones para el uso de estos cuadernos, el propósito es que los estudiantes desarrollen las competencias matemáticas, a través de la solución de fichas de trabajo que presentan una diversidad de situaciones problemáticas y promueven la atención diferenciada de acuerdo al logro de aprendizaje de los estudiantes.

2. METODOLOGÍA

El enfoque seguido en el análisis de los materiales curriculares de Educación Secundaria de Perú es de tipo cualitativo. Empleamos el análisis de contenido (Krippendorff, 2018), apoyado en el uso de las categorías del EOS. Godino et al. (2012) desarrollan una metodología para la mejora progresiva de los instrumentos de evaluación de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción mediante el análisis de contenido de propuestas curriculares, a fin de identificar concordancias y complementariedades con instrumentos ya existentes.

En una primera fase, el texto es dividido en unidades de análisis, que son clasificadas según las facetas y componentes propuestos en la Teoría de la Idoneidad Didáctica (Godino, 2011) para reconocer normas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así, por ejemplo, dentro de la faceta epistémica, se consideran las categorías: situaciones problemas, elementos lingüísticos/representaciones, elementos regulativos (conceptos/definición, procedimientos, proposiciones), argumentos y relaciones. (Para las demás facetas véase el Anexo A en Rivas, 2014).

En una segunda fase, dichas unidades son comparadas entre sí y reducidas con el fin de evitar reiteraciones. Posteriormente, del análisis de la normativa curricular se infieren indicadores de idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática que son comparados con los propuestos en Godino (2011), lo que da lugar a una versión revisada de dichos indicadores.

En nuestro caso, el análisis de contenido se realiza sobre investigaciones clave en relación con el análisis de materiales curriculares y a los aportes teóricos que permiten formular indicadores de idoneidad en cada una de las facetas que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en Educación Secundaria. De estos, seleccionamos aquellos que complementan los de Beltrán-Pellicer et al. (2018), revisando los indicadores que dejan de ser pertinentes o deben reinterpretarse para analizar materiales curriculares. El resultado de este proceso de revisión para la elaboración de la nueva guía se detalla en la sección cuatro

Después, empleamos este instrumento en la sección cinco para analizar dos ejemplos concretos de materiales curriculares sobre probabilidad. Se han seleccionado dos cuadernos de trabajo de matemáticas facilitados por el Ministerio de Educación: Resolvamos Problemas de primer (MINEDU, 2019a) y segundo grado (MINEDU, 2019b) de Educación Secundaria destinados a estudiantes de doce y trece años, respectivamente, cada uno de ellos divididos en veinte fichas.

Cada ficha se centra en un tema específico en relación con las cuatro competencias que propone el currículo (MINEDU, 2017): resuelve problemas de cantidad, de regularidad, equivalencia y cambio, de forma, movimiento y localización y de gestión de datos e incertidumbre. Todas las fichas comparten la misma estructura y división en secciones: aplicación, comprobación y evaluación de aprendizajes.

La sección de aplicación consta de una situación problema relacionada con la vida cotidiana, y que debe ser abordada mediante cuestiones específicas agrupadas según las fases de resolución de problemas de Polya (1945). La sección de comprobación plantea tres situaciones (A, B y C) con sus respectivos procedimientos de resolución desarrollados. En esta sección, el estudiante debe describir y explicar el proceso de solución y, en algunos casos, identificar y corregir los posibles errores proponiendo otra estrategia de solución.

Finalmente, en la sección de evaluación de los aprendizajes se incluyen diez situaciones problemas con diferentes niveles de complejidad, que el estudiante debe abordar según las orientaciones del profesor. En el cuaderno de trabajo de primer grado se incluyen dos fichas (n.º 9 y n.º 13) que tratan la probabilidad. De estas, nos centramos en la Ficha 9, dado que contiene la mayor cantidad de situaciones problemas. En el cuaderno de trabajo de segundo grado, solo encontramos una ficha, la Ficha 13, referida a la probabilidad, siendo esta la examinada.

3. REVISIÓN DE INDICADORES PARA ANALIZAR MATERIALES CURRICULARES EN PROBABILIDAD

El sistema de indicadores de idoneidad didáctica se puede entender y usar como un instrumento aplicable a la evaluación de procesos de instrucción matemática (Godino et al., 2012). Sin embargo, para asegurar su validez como instrumento de valoración que propicie la reflexión orientada a la mejora, es necesario adecuar y fundamentar dichos indicadores en base al contenido y la especificidad del proceso instruccional considerados. En nuestro caso, para el análisis de los materiales curriculares partimos de los componentes e indicadores propuestos por Godino (2013) y Godino et al. (2012). Tales criterios se formularon con la intención de “analizar la interacción entre las funciones del profesor y los estudiantes a propósito de un contenido matemático específico” (Godino, 2013, p.17), lo que supone considerar cuestiones, por ejemplo, sobre la interacción profesor-estudiante y estudiante-estudiante, así como aspectos de temporalización y ambiente en el aula. Dado que nuestro objeto de estudio es fichas de cuadernos de trabajo sobre probabilidad, entendidas como procesos de instrucción planificados, se hace necesario adecuar o reformular algunos de los criterios y componentes de Godino (2013) y Godino et al. (2012) al nuevo contexto.

3.1. Indicadores de idoneidad epistémica

Los indicadores de *idoneidad epistémica* permiten valorar aspectos que conducen a la representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto a un significado de referencia. Como señalan Breda et al. (2018, p. 272) la lista de indicadores de idoneidad didáctica debe complementarse "a partir del paso previo de reconstrucción del significado de referencia del tema específico que se quiere enseñar".

Los significados de referencia de la probabilidad contemplados en los currículos actuales del nivel educativo correspondiente a secundaria son: intuitivo, subjetivo, frecuencial, clásico y axiomático (Batanero, 2005; Batanero y Borovcnik, 2016; Batanero et al., 2005; Beltrán-Pellicer et al., 2018; Godino et al., 1987). Cada significado comporta sistemas de prácticas (operativas y discursivas) y objetos matemáticos (situaciones problemas, lenguajes, reglas, argumentos y relaciones) diferentes, que deben ser considerados de manera conjunta e integrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad (Batanero, 2005; Beltrán-Pellicer et al., 2018). Así, las situaciones problemas propuestas en el material curricular deben, por un lado, ser representativas de los significados de referencia y, por otro lado, permitir contextualizar, ejercitar y aplicar los conocimientos pretendidos. Para ser valoradas de forma positiva, deben permitir que el estudiante genere modelos para representar y relacionar los diferentes significados de la probabilidad (Beltrán-Pellicer et al., 2018).

El material curricular debe reflejar el uso adecuado y diferenciado de diversas representaciones lingüísticas de la probabilidad como son: las expresiones verbales, simbólico-numéricos, tabulares y gráficas (Gómez et al., 2013). Así mismo, debe prestar atención a las definiciones (explícitas o no), las proposiciones y los procedimientos vinculados a los distintos significados de la probabilidad, que deben estar adaptados al nivel educativo al que se dirigen. Por ejemplo, debe hacer explícita la definición de casos favorables, no favorables y posibles de manera previa a la introducción de la regla de Laplace, introducir la noción de juego equitativo, diferenciar entre probabilidad y su valor estimado por medio de frecuencias relativas (Gómez et al., 2014). Igualmente se debe precisar la finitud del número de resultados que permita la asignación de probabilidades según el significado clásico, así como garantizar la equiprobabilidad de los sucesos elementales, de manera que se pueda aplicar la regla de Laplace (Gómez et al., 2014).

En relación con el significado frecuencial, se debe insistir en el aumento en la fiabilidad de la estimación con el tamaño de muestra, propiedad básica en la comprensión de la ley de los grandes números y las nociones de variabilidad y precisión. Es importante enfatizar que la estabilidad de las frecuencias requiere la realización de ensayos repetidos con diferentes tamaños de muestra, así como explicar la diferencia entre "calcular la probabilidad", del significado clásico, y "estimar la probabilidad", del frecuencial (Gómez et al., 2014, p. 11). El material debe contemplar momentos en los que se generen y negocien las reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos) que se adaptan a las circunstancias. Estas deben ser validadas mediante argumentos pertinentes y diversos tipos de razonamientos.

Dentro del componente de relaciones se valora si el material curricular presenta los objetos matemáticos característicos de cada significado (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico), pero también que estos significados aparezcan conectados y articulados.

Por otro lado, se incluye el componente relativo a conflictos epistémicos para valorar si el material curricular presenta desajustes con el significado de referencia que pueden venir dados por medio de carencias, ambigüedades o errores en las definiciones, problemas con enunciados incomprensibles, soluciones incorrectas a los ejemplos, procedimientos incorrectos o no justificados. Es importante tener en cuenta algunos conflictos de tipo epistémico identificados previamente en el análisis de libros de texto, tales como no hacer explícita la equiprobabilidad de sucesos elementales (lo que puede derivar en el sesgo de equiprobabilidad), no reconocer el carácter aproximado de la estimación del valor de probabilidad (diferenciar el valor teórico de la probabilidad y su estimación) u obviar que la fiabilidad de la estimación aumenta con el tamaño de la muestra, lo que puede conducir a sesgos relativos a la heurística de representatividad (Gómez et al., 2014).

Partiendo de los indicadores para la idoneidad epistémica en probabilidad propuestos en Beltrán-Pellicer et al. (2018), y teniendo en cuenta las características propias de los materiales curriculares, incluimos en el Tabla 4.1 una nueva versión de dichos indicadores para cada componente y subcomponente de esta.

Tabla 4.1

Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémica

Componentes	Indicadores
Significados	Situaciones-problemas
	- Se proponen situaciones-problemas que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica). - Se incluye una muestra representativa de situaciones de contexto real o virtual distinguiendo lo aleatorio de situaciones deterministas. - Se plantean situaciones donde el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias (problematización).
	Lenguajes
	- Se utilizan diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólico-numéricos, gráficos), señalando las relaciones entre las mismas. - El nivel de lenguaje de la probabilidad es adecuado a los estudiantes a quienes se dirige. - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de experimentos aleatorios en los diferentes registros mencionados
	Conceptos-definiciones
	- Los conceptos-definiciones fundamentales de la probabilidad están formuladas de forma clara y correcta adaptados al nivel educativo al que se dirigen. - Se contemplan los conceptos-definiciones de experimento aleatorio y determinista, espacio muestral, suceso, suceso simple y compuesto, suceso seguro e imposible, casos favorables y posibles, frecuencia, frecuencia relativa, convergencia, simulación, experimentación, equiprobabilidad y probabilidad. - Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones.
	Proposiciones

	- Se emplean proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, suceso seguro y del complementario, propiedad de las frecuencias relativas, estabilidad de frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad, regla de Laplace y equiprobabilidad. - Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones.
	Procedimientos
	- Se consideran la comparación cualitativa de probabilidades; construcción del espacio muestral, distinción de casos favorables y posibles, aplicación de la regla de Laplace, empleo de tablas y diagramas de árbol, realización de predicciones a partir de observaciones de experimentos o datos, estimación de probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, cálculo y representación de frecuencias, interpretación de tablas y gráficos, simulación de experimentos aleatorios. - Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar procedimientos.
	Argumentos
	- Las proposiciones y procedimientos se explican y argumentan (se justifican y demuestran) de forma adecuadas según el nivel educativo al que se dirigen. - Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba. - Se usan simulación de experimentos para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico).
Conflictos epistémicos	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico).

Fuente: elaborado por los autores

3.2. Indicadores de idoneidad cognitiva

Los indicadores de idoneidad cognitiva consideran aquellos factores que permiten lograr una adaptación progresiva de los significados institucionales pretendidos a los significados personales logrados de los estudiantes (Godino, 2013). Para valorar la idoneidad cognitiva de un proceso de instrucción sobre probabilidad para Educación Secundaria, en Beltrán-Pellicer et al. (2018) se establecen indicadores relativos a los conocimientos previos. Sin embargo, hemos considerado adecuado incluir, además, las componentes diferencias individuales, conflictos cognitivos y evaluación, según la propuesta de Godino (2013).

En relación a los conocimientos previos se valora que el material curricular tenga en cuenta o inicie la secuencia didáctica a partir de contenidos conocidos por los estudiantes:

situaciones problema en las que se conjetura sobre experimentos aleatorios sencillos, distinción entre lo aleatorio y lo determinista, empleo de la frecuencia relativa; uso de registros para representación de la información con los que los estudiantes están familiarizados (por ejemplo, diagramas de barras y tablas), la regla de Laplace comienza a usarse en casos sencillos etc. Así, se garantiza que el estudio de la probabilidad se logre de manera progresiva e integral desde sus diversos significados. Al respecto, los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), así como las investigaciones de Batanero (2005) y Beltrán-Pellicer et al. (2018) sugieren comenzar con ideas intuitivas de azar y probabilidad centradas en el contexto y las propias experiencias de los estudiantes, con algunos matices vinculados al significado subjetivo de la probabilidad como un grado de creencia. En este proceso se puede contemplar cómo es percibido el azar y la aleatoriedad por los estudiantes, y si son capaces de diferenciar experimentos aleatorios de deterministas (Batanero y Godino, 2002), lo que permitirá, después, que puedan estimar la probabilidad en una serie larga de experimentos aleatorios y simulaciones de azar. Las simulaciones y los experimentos preparan para comprender la ley de los grandes números y las conexiones entre las nociones de frecuencia relativa y probabilidad.

Conforme se progresa en el aprendizaje de la probabilidad hasta la rigurosidad matemática asociada al formalismo axiomático y se articulan los diferentes significados, también van surgiendo errores y sesgos usuales de razonamiento probabilístico. Estos sesgos, como los de representatividad y equiprobabilidad, pueden dificultar la asimilación de conceptos y la interpretación incorrecta de las situaciones en probabilidad (Lecoutre, 1992). En este sentido, los materiales curriculares deben contemplar los errores y sesgos de razonamiento probabilístico como oportunidades de aprendizaje. Además, para valorar el progreso y las dificultades de los aprendizajes en los diferentes significados de la probabilidad, los materiales curriculares deben incluir diversos instrumentos de evaluación, coevaluación y autoevaluación que permitan valorar las competencias logradas por los estudiantes (Castillo et al., 2021).

Partiendo de estas consideraciones, se organizan los indicadores de la faceta cognitiva según la Tabla 4.2.

Tabla 4.2

Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva

Componentes	Indicadores
Conocimientos previos	- Se prevén situaciones-problemas en las que se conjetura sobre experimentos aleatorios sencillos, distinguiendo lo aleatorio de lo determinista y el empleo de la frecuencia relativa. - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en los diversos significados de la probabilidad.
Diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes.
Conflictos cognitivos	- Se valora el error como fuente de aprendizaje. - Se proponen situaciones donde puedan ponerse de manifiesto conflictos cognitivos, como los sesgos de razonamiento probabilístico (p. ej.: sesgos de representatividad y equiprobabilidad).
Evaluación	- Se proponen instrumentos de evaluación y autoevaluación. - Los diversos modos de evaluación incluidos en el texto son adecuados para evaluar si los estudiantes logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia de modelización y generalización, competencia metacognitiva). - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.

Fuente: elaborado por los autores

3.3. Indicadores de idoneidad afectiva

En este caso, se trata de analizar en qué manera los materiales curriculares contemplan el desarrollo de los componentes del dominio afectivo, es decir, emociones, actitudes, creencias y valores, así como la interrelación de estos con el resto de las facetas (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020). En primer lugar, merece la pena mencionar la importancia de atender al lenguaje, en especial al no verbal, ya que, además de transmitir significado en sí mismo, es capaz de generar cercanía, favoreciendo la interacción.

En cuanto a las emociones, se evalúa si en la secuencia de actividades se planifican momentos en los que se manifiestan las emociones ante las situaciones propuestas. Por un lado, se deben reservar espacios para explicitar estados emocionales ante la resolución de problemas: bloqueos, curiosidad, satisfacción, desesperación, etc. Por otro, se ha de procurar incluir situaciones que resalten las cualidades de estética y precisión de las matemáticas, así como situaciones contextualizadas y elementos que puedan resultar motivadores, como el humor o juegos. De esta manera, la secuencia será idónea en tanto que promueva emociones positivas hacia los contenidos de probabilidad, así como facilite la superación de emociones negativas.

Un tratamiento continuo a nivel emocional permite desarrollar el componente actitudinal. Específicamente, para las actitudes se valora la consideración de situaciones que motiven al estudiante a participar activamente y le ofrezca seguridad para explorar ideas, formular hipótesis y plantear diferentes estrategias de solución de forma flexible. Todo esto se ve facilitado si la secuencia promueve la argumentación en situaciones de igualdad y se fomenta la autoestima, evitando el rechazo o miedo a plantear o abordar situaciones problemas de probabilidad o participar en experimentos aleatorios y simulaciones. Por ejemplo, algún estudiante puede considerar tediosa la repetición de un mismo experimento. Sin embargo, el profesor debe empoderar este tipo de actividades, señalando la importancia de los resultados obtenidos. En definitiva, se debe promover la participación, la perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática.

Las creencias son un componente afectivo más estable que emociones y actitudes. Un trabajo constante en estas dos últimas componentes permite plantear, a medio y largo plazo, la modificación de creencias, siempre y cuando las situaciones impliquen la metacognición de los estudiantes y el contexto social en donde se desarrolla el aprendizaje (Castillo et al., 2021). Este contexto puede enriquecerse ofreciendo una gama amplia de aplicaciones en donde se ponga de manifiesto la importancia de razonamientos probabilísticos, por ejemplo, la medicina, el análisis de riesgos, la educación, la gestión, el clima o las votaciones, que contribuirán y darán sentido a los diferentes significados de probabilidad (Batanero y Godino, 2002). En esta misma línea, se debe destacar el valor y la utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional de los estudiantes con el objetivo de enfatizar el papel del azar y la probabilidad.

Tabla 4.3

Componentes e indicadores de idoneidad afectiva

Componentes	Indicadores
Lenguajes	- Se presta atención al lenguaje no verbal para fomentar cercanía (*inmediacy*).
Emociones	- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas. - Se planifican momentos en los que se manifiestan las emociones ante las situaciones propuestas. - Se proponen situaciones contextualizados y elementos que pueden resultar motivadores: humor o juegos.
Actitudes	- Se fomenta la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a plantear o abordar situaciones problemas de probabilidad o participar en experimentos aleatorias y simulaciones. - Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática. - Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas. - Se promueve la argumentación en situaciones de igualdad.
Creencias	- Se consideran las creencias sobre la probabilidad, sobre la metacognición de los estudiantes y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje. - Se ofrece una gama amplia de aplicaciones de probabilidad, por ejemplo, la medicina, el análisis de riesgos, la educación, la gestión, el clima o las votaciones.
Valores	- Se considera el valor y la utilidad de las matemáticas atribuidas por los estudiantes en la vida diaria y profesional.
Interrelación otras facetas	- Se planifica el componente afectivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje - Se relacionan las emociones positivas con las actitudes matemáticas y con la resolución exitosa de tareas, fomentando la reflexión emocional del alumnado en este sentido.

Fuente: elaborado por los autores

Conviene observar que, si bien ninguna faceta de la idoneidad ha de verse de forma aislada, el condicionamiento que ejerce lo afectivo en el plano cognitivo o interaccional justifica una atención especial. Un trabajo coherente en este apartado puede favorecer el desarrollo de un clima de interacción adecuado, así como progresar desde concepciones erróneas y sesgos de probabilidad hacia modos adecuados de pensamiento. Estos indicadores se ven en la Tabla 4.3.

3.4. Indicadores de idoneidad interaccional

Los indicadores, en esta componente, guían la reflexión sobre las formas de interacción previstas entre el material curricular y el estudiante o entre estudiantes. Conviene observar que, en todo momento, los indicadores deben contemplar el carácter unidireccional de los materiales. Es decir, la interacción real depende de la gestión que haga el profesor de esos materiales. No obstante, se puede valorar, en primer lugar, si se hace una presentación clara y bien organizada de las situaciones problemas, que enfatice los conceptos claves de la probabilidad y facilite la interacción por medio de tareas adecuadas y preguntas que exijan reflexión compartida. Igualmente, se puede observar si el vocabulario utilizado es comprensible, si las ilustraciones son adecuadas, pertinentes y no invasivas y si se presentan situaciones variadas y claras a lo largo de todo el material curricular (Castillo et al., 2021).

Estas situaciones, por medio de agrupaciones flexibles, deben promover el diálogo y la comunicación entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor. En ese sentido, los indicadores contemplan una componente de autonomía, para evaluar si el material curricular plantea cuestiones, presenta soluciones, propone ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar, con la finalidad de que los estudiantes asuman la responsabilidad del estudio.

Tabla 4.4

Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

Componentes	**Indicadores**
Interacción material curricular-estudiante	- El material curricular tiene una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada) enfatizando los conceptos-definiciones claves de la probabilidad. - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención del estudiante.
Interacción entre estudiantes	- Se propone situaciones-problemas que favorecen el dialogo y comunicación entre estudiantes. - Se proponen situaciones para plantear o resolver en grupo.
Autonomía	- Se contempla momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (el material curricular plantea cuestiones, presenta soluciones, propone ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar)

Fuente: elaborado por los autores

Las formas de interacción que tienen lugar en una secuencia instruccional sobre probabilidad son variadas. La premisa básica parte de que los estudiantes expresen, primero, su idea acerca del resultado de un experimento aleatorio o sobre el desarrollo de situaciones diversas, tales como juegos en donde el azar juega un papel clave (Godino et al., 1987). Conforme se experimenta y se simula, surgen oportunidades para elaborar conjeturas y matizar las ideas de partida. Finalmente, se organiza lo aprendido y se institucionaliza haciendo referencia a las interacciones que han tenido lugar. Los indicadores de esta faceta se muestran en la Tabla 4.4.

3.5. Indicadores de idoneidad mediacional

En este caso, los materiales curriculares deben promover el uso pertinente y oportuno de recursos como dados, monedas, barajas de carta, ruletas, tablas de números aleatorios, calculadoras etc. (Batanero y Godino, 2002), así como prever la gestión del tiempo para desarrollar las actividades planteadas.

Tabla 4.5

Componentes e indicadores de idoneidad mediacional

Componentes	Indicadores
Recursos materiales	- Se promueve el uso de materiales manipulativos (dados, monedas, cartas, bolas) audiovisuales e informáticos (software) que permiten aportar experiencias válidas para progresar en los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetivo, frecuencial y clásico). - Se propone la contextualización de las definiciones y propiedades, a partir de situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Tiempo (de enseñanza - aprendizaje)	- El espacio temporal previsto es suficiente para las situaciones que presentan mayor dificultad de comprensión.

Fuente: elaborado por los autores.

Por otro lado, cobran importancia los recursos virtuales o applet interactivos. Estas herramientas permiten usos que varían desde la exploración de conceptos básicos de probabilidad hasta la producción de representaciones gráficas de mayor nivel de formalidad y abstracción (Inzunsa, 2013).

Respecto a las condiciones temporales, se ha de considerar si la temporalización de actividades es factible, previendo cierta flexibilidad y reservando suficiente espacio para cubrir los contenidos de mayor complejidad (Castillo et al., 2021). Los dos componentes e indicadores de esta faceta se organizan en el Tabla 4.5.

3.6. Indicadores de idoneidad ecológica

En esta dimensión se valora el grado de concordancia del material con las normas curriculares en relación con el azar y probabilidad y si los contenidos tratados contribuyen a la formación social y laboral del estudiante. De igual forma, se analiza si las actividades se abren nuevos campos de conocimiento y estrategias de innovación tecnológica para dar soluciones a los problemas en el contexto de la probabilidad.

Tabla 4.6

Componentes e indicadores de idoneidad ecológica

Componentes	**Indicadores**
Adaptación al currículo	- Los propósitos, significados, conceptos-definiciones su desarrollo y evaluación de la probabilidad se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura a la innovación	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.
Adaptación socio-profesional	- Los contenidos de probabilidad contribuyen a la formación socio-profesional del estudiante.
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos, inclusivos y con iguales oportunidades para realizar cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico).
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos de la probabilidad se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares - Se contemplan diversos contextos para la alfabetización probabilística

Fuente: elaborado por los autores.

En cuanto a la educación en valores, el material curricular debe evitar cualquier tipo de expresión gráfica o verbal que promueva estereotipos, discriminación, racismo y exclusión social. Por otro lado, favorecer la alfabetización probabilística requiere la conexión con otros contenidos, tanto intra como interdisciplinares, considerando diversos contextos como "el mundo natural, físico, tecnológico, medicina, salud pública, justicia y delincuencia, finanzas y negocios, investigación y estadística, juegos de azar y apuestas, decisiones personales" (Gal, 2005, p. 53).

4. APLICACIÓN DE LOS CRITERIOS E INDICADORES A LOS MATERIALES CURRICULARES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PERUANA

En esta sección aplicamos los criterios e indicadores de idoneidad didáctica descritos en la sección previa para cada faceta y componente (Tabla 4.1 a 4.6) al análisis de las fichas de dos cuadernos de trabajo, una correspondiente a primer grado (estudiantes de doce años) y otra de segundo grado (estudiantes de trece años) de Educación Secundaria, dedicadas al estudio de la probabilidad.

4.1. Faceta epistémica

Situaciones – problemas

En la ficha de trabajo de primer grado se han identificado catorce situaciones-problemas, de los que trece están relacionados con el significado clásico de la probabilidad y solo una se vincula al significado frecuencial. De igual forma, en segundo grado se proponen catorce situaciones-problemas, de las cuales doce se asocian al significado clásico y dos al frecuencial. Todas estas situaciones han sido agrupadas en cinco tipos en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7

Situaciones-problemas identificadas en las fichas según los significados de la probabilidad

Significados	Situaciones-problemas	Fichas 1°	Fichas 2°
Clásico	- Expresar el valor de la probabilidad como más o menos probable	x	
	- Expresar el valor de la probabilidad como seguro, probable o imposible	x	
	- Determinar el espacio muestral	x	
	- Calcular la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace	x	x
Frecuencial	- Determinar la probabilidad de sucesos a partir de su frecuencia relativa	x	x

Fuente: elaborado por los autores.

En las fichas no se observan situaciones de contexto real o cotidiana del estudiante en las que se discuten las diferencias entre experimento aleatorio y determinista, lo que evidencia ausencia de situaciones específicas vinculadas al significado intuitivo y subjetivo. De igual forma, no se consideran situaciones que relacionen los diferentes significados de la probabilidad, ni que impliquen que el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias.

Lenguajes/representaciones

Los registros lingüísticos identificados en las fichas incluyen el verbal (con expresiones tanto cotidianas como formales), simbólico-numérico (desigualdad, igualdad, enteros, decimales, fracciones, porcentajes y escala de probabilidad), gráfico (diagrama de árbol, de barras y circulares) y tabular (tabla de doble entrada y distribución de frecuencias). Se ha identificado una mayor variedad en el uso de diferentes registros en situaciones asociadas al significado clásico de la probabilidad. No obstante, la ficha de segundo grado emplea gráficos y tablas estadísticas al proponer dos situaciones relacionadas con el significado frecuencial. También, cabe señalar que la mayor parte de estos registros lingüísticos son adecuados al nivel educativo al que se dirigen y están recogidos en el programa curricular, a excepción de los diagramas de árbol y tablas de doble entrada.

Conceptos-definiciones

En la Tabla 4.8 se recogen los conceptos-definiciones que observamos en las fichas de primer y segundo grado, según los significados de la probabilidad con los que se relacionan. En general, en ambas fichas intervienen los mismos conceptos, observándose un predominio de aquellos vinculados al significado clásico. Otros, como los tipos de sucesos, sucesos independientes y dependientes, espacio muestral y probabilidad, aparecen de forma implícita tanto en el significado clásico como en el frecuencial. Si bien la noción de experimento compuesto no se introduce de forma explícita, aparece involucrada en las situaciones propuestas que plantean el uso de varios dispositivos aleatorios de forma simultánea.

Tabla 4.8

Conceptos-definiciones identificadas en las fichas según los significados de la probabilidad

Significados	Conceptos-definiciones	Fichas	
		1°	2°
Clásico	· Experimento aleatorio simple y compuesto	x	x
	· Sucesos, suceso simple y compuesto	x	x
	· Suceso más o menos probable, seguro e imposible	x	
	· Sucesos independientes y dependientes		x
	· Resultados/casos posibles y favorables	x	x
	· Espacio muestral	x	x
	· Probabilidad	x	x
	· Área de sector circular		x
Frecuencial	· Sucesos, suceso más probable		x
	· Probabilidad	x	x
	· Frecuencia, frecuencia relativa y absoluta	x	x
	· Población	x	x

Fuente: elaborado por los autores.

Los conceptos-definiciones se adaptan al nivel educativo al que se dirigen y coinciden con lo predeterminado en el programa curricular, a excepción de las nociones de experimento aleatorio simple y compuesto, suceso compuesto, suceso seguro e imposible para primer grado y sucesos dependientes e independientes para segundo. Por otro lado, llama la atención la falta de referencias a situación determinista, simulación, ensayos y experimentación que deben ser contemplados en este nivel educativo para garantizar una adecuada idoneidad epistémica.

Procedimientos

Los procedimientos que se ponen en juego en las situaciones problemas de las fichas quedan agrupados en la Tabla 4.9 según tipos y significados a los que se asocian.

Como observamos la Tabla 4.9, la prevalencia del significado clásico frente al frecuencial se observa, también, en la variedad de procedimientos contemplados. Aunque los procedimientos ordenar y comparar el valor de la probabilidad como más o menos probable y como seguro, probable o imposible de ocurrir y cálculo de la probabilidad a partir de la dependencia de sucesos no son exclusivos de la probabilidad clásica, los hemos enmarcado aquí porque se observa su intervención constante durante el desarrollo de situaciones problemas relacionados con dicho significado. Los escasos procedimientos característicos del significado frecuencial hacen referencia a la lectura y análisis de tablas y gráficos estadísticos o el cálculo de frecuencias. Además, según los indicadores de idoneidad didáctica, se echan en falta procedimientos previstos para este nivel educativo. Por ejemplo, distinguir fenómenos aleatorios de los deterministas, comparar cualitativamente probabilidades, realizar predicciones a partir de observaciones de experimentos o datos, estimar probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio y simular experimentos aleatorios.

Tabla 4.9

Procedimientos identificados en las fichas según los significados de la probabilidad

Significados	Procedimientos	Fichas	
		1°	2°
Clásico	- Lectura y análisis de la situación aleatoria	x	x
	- Enumeración de sucesos elementales	x	x
	- Construcción del espacio muestral	x	x
	- Distinción de casos favorables y posibles	x	x
	- Empleo de tablas de doble entrada o diagramas de árbol	x	x
	- Aplicación de la regla de Laplace	x	x
	- Ordenación y comparación cualitativa del valor de la probabilidad (más o menos probable, seguro, probable o imposible de ocurrir)	x	
	- Cálculo de la probabilidad a partir de la dependencia de sucesos		x
Frecuencial	- Lectura y análisis de tablas de frecuencias y gráficos estadísticos	x	x
	- Elaboración de una tabla de distribución de frecuencias	x	x
	- Cálculo de frecuencias relativas y porcentajes	x	x

Fuente: elaborado por los autores.

Proposiciones

Las proposiciones requeridas, de forma explícita e implícita, en las situaciones propuestas de las fichas se agrupan en la Tabla 4.10 según los significados de la probabilidad. La mayor parte de las proposiciones que se muestran en la Tabla 4.10 son relativas al significado clásico de la probabilidad. Observamos que se emplea la regla de Laplace y proposiciones que involucran la equiprobabilidad, la probabilidad del suceso imposible y suceso seguro, pero no la del suceso complementario.

Tabla 4.10

Proposiciones identificadas en las fichas según los significados de la probabilidad

Significados	Proposiciones	Fichas	
		1°	2°
Clásico	- El espacio muestral es finito	x	x
	- Equiprobabilidad	x	x
	- La probabilidad es un valor entre 0 y 1	x	x
	- La probabilidad del suceso seguro es 1 y del suceso imposible es 0	x	
	- Regla de Laplace	x	x
	- Probabilidad del suceso compuesto como suma de la de los simples	x	x
Frecuencial	- La frecuencia relativa de un suceso varía entre 0 y 1	x	x

Fuente: elaborado por los autores.

Tampoco aparecen propiedades importantes del significado frecuencial, como es la estabilidad de frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. Por otro lado, no se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones.

Argumentos

En ambas fichas de los cuadernos de trabajo se identifican pocos argumentos que justifiquen las proposiciones y procedimientos. Los pocos argumentos empleados para justificar los procedimientos son adecuados al nivel educativo al que se dirigen y se apoyan en diversos registros: leguaje natural, numérico-simbólico, tabular y gráfico (diagrama de árbol). En la ficha de primer grado, son escasas (solo cuatro) las actividades en las que se pide a los estudiantes que justifiquen su respuesta. En dos de ellas, justificar el por qué supone escoger una de cuatro afirmaciones. Sin embargo, en la ficha de segundo grado, la mayoría de las actividades piden que se justifique el procedimiento o solución propuesta (Explica el procedimiento realizado para dar respuesta a la pregunta; ¿cómo lo sabes?). También se encuentran tareas en las que el estudiante debe reflexionar sobre el procedimiento seguido y buscar ejemplos que permitan generalizarlo a nuevas situaciones (¿es posible aplicar en otra situación? Propón un ejemplo) (MINEDU, 2019b). Se echan en falta argumentos apoyados en la simulación de experimentos y uso de softwares con los que demostrar empíricamente la convergencia de los resultados en una secuencia repetida de ensayos.

Relaciones

En las situaciones planteadas en el material curricular se evidencian objetos (lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentos) propios del significado clásico de la probabilidad relacionados y conectados entre sí. Sin embargo, no se observa la articulación de los significados de la probabilidad, ni los objetos matemáticos entre significados, aun cuando algunas de las situaciones propuestas se podrían abordar desde los diferentes significados.

Conflictos epistémicos

El análisis de las fichas ha permitido identificar diversos conflictos epistémicos que han sido agrupados en la Tabla 4.11 según los significados de la probabilidad asociados.

Tabla 4.11

Conflictos epistémicos identificados en las fichas según los significados de la probabilidad

Significados	**Conflictos epistémicos detectados**	**Fichas**	
		1°	2°
Clásico	- Omisión de definición de suceso, suceso favorable, suceso no favorable	x	
	- Uso inapropiado o confuso del lenguaje numérico-simbólico	x	x
	- Regla de Laplace y escala de la probabilidad no justificadas	x	x
	- Tratamiento de los diagramas de árbol y tablas de doble entrada sin explicación	x	x
	- Aplicación de la regla de Laplace a situaciones del significado frecuencial	x	x
Frecuencial	- Ausencia de situaciones-problemas que articulen el significado frecuencial con el clásico y que permitan explorar la estabilidad de las frecuencias relativas.	x	x
	- Omisión de títulos en las tablas y gráficos estadísticos	x	x
	- Enunciados ambiguos		x

Fuente: elaborado por los autores.

En las fichas de los cuadernos de trabajo no solo se proponen situaciones para resolver, sino que también se presentan situaciones resueltas que el autor aprovecha para introducir los conceptos (suceso favorable, posible), propiedades (regla de Laplace), procedimientos etc. implicados. De manera general, en las situaciones resueltas no se justifica por qué es posible aplicar la regla de Laplace (condiciones de finitud del espacio muestral y de equiprobabilidad de sucesos elementales). Se usan la tabla de doble entrada y el diagrama en árbol, pero no se explica cómo se construyen e interpretan. Por otro lado, no se explica que la notación $n(C)$ hace referencia al cardinal del conjunto (suceso) C y se usa la notación $C = \{\ \}$ para indicar el suceso imposible (conjunto vacío). Tampoco se detalla la notación f_i, h_i relativa a las frecuencias como objeto de estudio. Finalmente, hay un error recurrente en la expresión de las probabilidades como decimal y como porcentaje, como puede ser: $P(C) = \frac{1}{4} = 0{,}25;\ P(C) = 0{,}25 \times 100\%, P(C) = 25\%$ (MINEDU, 2019a, p. 124).

Algunas situaciones problemas responden a experimentos compuestos que no han sido introducidos previamente y en los que no se explica la condición de independencia entre sucesos que permite aplicar la regla del producto.

No hay una diferencia clara entre el tratamiento clásico y el frecuencial de la probabilidad. Por ejemplo, en "comprobamos nuestros aprendizajes" se afirma "determinamos el espacio muestral de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace (valor decimal)" y a la vez, "justificamos con nuestros conocimientos estadísticos la probabilidad de ocurrencia de sucesos en estudio" (MINEDU, 2019b, p. 174).

En la ficha de 2º curso, a pesar de que anuncia como propósito emplear "procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace", la situación introductoria, "El que espera, desespera", se refiere al significado frecuencial. En ella se muestra cómo una empresa ha podido "estimar la probabilidad" de tener determinadas cantidades de pasajeros los fines de semana. Se presentan en una tabla los posibles escenarios, sus frecuencias absolutas (cantidad de pasajeros) y la probabilidad asociada a cada escenario, sin explicar cómo se determinan dichas probabilidades (MINEDU, 2019b, p. 171). Finalmente, en las actividades propuestas para esta situación (MINEDU, 2019b, p. 173) se incluye de manera implícita e informal la idea de variable aleatoria, distribución de frecuencias y la noción de esperanza (ej., "¿Cuántos pasajeros esperarías por cada fin de semana?").

4.2. Faceta cognitiva

Se observa que en ninguna de las fichas se presentan situaciones introductorias que lleven a diferenciar experimentos aleatorios de deterministas, ni situaciones donde se puedan observar la convergencia de la frecuencia relativa bajo la repetición de un experimento en idénticas condiciones. Salvo una situación inicial de aproximación al significado frecuencial a partir de los datos disponibles en una tabla (que, como hemos comentado, tiene un tratamiento confuso), las demás situaciones-problemas se orientan a comprender y consolidar la aplicación de la regla de Laplace y el uso de las técnicas de recuento que son propias del significado clásico de la probabilidad.

En general, los contenidos pretendidos en ambas fichas de trabajo son alcanzables y tienen una dificultad manejable. No obstante, para evitar conflictos cognitivos es necesario que el profesor explicite algunos términos que, si bien no aparecen recogidos en el programa curricular, sí lo están en las fichas de trabajo. Por ejemplo, experimento aleatorio simple y compuesto, espacio muestral, sucesos seguro e imposible, equiprobabilidad, suceso compuesto. También podría ser necesario explicar la independencia de sucesos (y la regla del producto).

Observamos, también, que los errores y sesgos más comunes de razonamiento probabilístico no se prevén en las fichas, dado que, como hemos mencionado, las situaciones problemas propuestas están orientadas a la aplicación de la regla de Laplace, incluso en situaciones donde los sucesos no tienen por qué ser equiprobables. Así, plantear, como se hace en la ficha de segundo grado, el uso de "procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace" (MINEDU, 2019b, p. 171), cuando la situación no lo permite dado que los sucesos no son equiprobables, puede suponer un conflicto potencial asociado al sesgo de la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992).

En la segunda sección de comprobación de cada ficha, con la expresión "aprendemos a partir del error" (MINEDU, 2019b, p. 177) se presenta una situación problema con una solución dada. Al estudiante se le pide revisar dicho procedimiento, y en caso de que hubiera un error, corregir o proponer otra solución. Esto permite emplear el error como fuente de reflexión y aprendizaje. Respecto al componente de evaluación, las fichas proponen una sección de evaluación cuyo propósito principal es valorar el grado de destreza adquirida en la aplicación de la regla de Laplace. En ambas fichas se proponen diez situaciones problemas, de las que nueve evalúan la comprensión del significado clásico y solo una se destina a evaluar el significado frecuencial de la probabilidad.

4.3. Faceta afectiva

Tanto en la ficha de primer grado como en la de segundo, la mayoría de las situaciones están contextualizadas en juegos de azar y son escasas aquellas situaciones que corresponden a la vida cotidiana o social del estudiante (deportes, redes sociales, lecturas, transporte etc.). La propuesta de estas situaciones podría generar interés en los estudiantes y favorecer emociones positivas en los procesos de resolución de problemas, pero no permiten valorar la utilidad real de la probabilidad en la vida socio-profesional. Las ilustraciones (fotos, dibujos) que acompañan a cada situación están relacionadas con el contexto o aportan información. Finalmente, observamos que no se promueve la participación activa de los estudiantes y no hay una propuesta de situaciones de experimentación y simulación en ambas fichas de trabajo, lo que impide la flexibilidad para explorar ideas matemáticas en la resolución de problemas sobre probabilidad. Además, la propuesta no considera, de forma explícita, las emociones, actitudes y creencias del alumnado ante la resolución de problemas. No se encuentran ni instrumentos específicos para ello ni indicaciones para gestionar las actividades de manera que se reflejen estos aspectos, por lo que no hay una acción específica en lo afectivo.

4.4. Faceta interaccional

Como hemos puesto de manifiesto, en las fichas de los cuadernos de trabajo, no se destacan los conceptos claves de la probabilidad y la presentación no es suficientemente clara, fundamentalmente en lo que refiere a las condiciones de aplicación del significado clásico y el frecuencial. Tampoco se usan recursos argumentativos diversos que impliquen y capten la atención del estudiante. No se proponen situaciones problemas que se deban plantear y resolver en grupo, lo cual limita la comunicación e interacción entre estudiantes. Las secciones de aplicación y comprobación de las fichas se organizan por medio de preguntas guiadas con espacios donde el estudiante tiene que responder o justificar la respuesta para cada caso, y son escasas las oportunidades para que los estudiantes, de manera autónoma, investiguen sobre las cuestiones propuestas.

4.5. Faceta mediacional

En las fichas se proponen situaciones descritas verbalmente, que en algunos casos se acompañan con gráficos estadísticos, diagramas e imágenes (urnas, dados, ruletas, sectores) que pretenden contextualizar la situación. En todas estas situaciones se espera que el estudiante imagine el experimento, sin que se le faciliten materiales manipulativos para experimentar o software informático para realizar simulaciones. Así, no se aporta a los estudiantes experiencias sólidas que les permitan progresar en los diferentes significados de la probabilidad. En relación con el espacio temporal, consideramos que es suficiente, dedicando mayor extensión a las situaciones problemas que presentan mayor dificultad de comprensión.

4.6. Faceta ecológica

El programa curricular para estudiantes de primer y segundo grado de Educación Secundaria propone desarrollar el significado clásico y frecuencial a partir del intuitivo (MINEDU, 2017). Esta sugerencia no se tiene en cuenta en las fichas de los cuadernos de trabajo al priorizar situaciones relativas al significado clásico. En la Tabla 4.12 se comparan los contenidos sugeridos por las directrices curriculares y los contemplados en las fichas.

Tabla 4.12

Correspondencia entre contenidos planteados en el programa curricular y los tratados en las fichas de trabajo

Contenidos	Directrices		Fichas	
	1°	2°	1°	2°
- Determinar condiciones de una situación aleatoria	x	x		
- Suceso, suceso simple	x	x	x	x
- Sucesos más y menos probable	x	x	x	
- Suceso seguro, probable e imposible		x	x	
- Espacio muestral		x	x	x
- Calcula y compara probabilidades mediante la regla de Laplace	x	x	x	x
- Determina frecuencias relativas y las usa para comparar probabilidades	x	x	x	x
- Experimento aleatorio compuesto			x	x
- Independencia de sucesos				x
- Probabilidad como área de sector circular				x

Fuente: elaborado por los autores.

Como se observa en la Tabla 4.12, existen disparidades de contenido entre la propuesta curricular y las fichas de los cuadernos de trabajo. Por ejemplo, en primer grado las definiciones de suceso seguro, probable e imposible, espacio muestral, experimento aleatorio simple y compuesto no están previstos en el programa curricular, pero se desarrollan en la ficha 9. Tampoco lo están algunos procedimientos como la construcción de espacio muestral, el empleo de tablas de doble entrada o diagramas de árbol.

De igual forma ocurre con la inclusión en las fichas de trabajo segundo grado de experimentos compuestos, el cálculo de probabilidades en condiciones de independencia de sucesos y la probabilidad a través del área de sectores circulares. En ambas fichas no se incentiva la investigación o el uso de estrategias de innovación tecnológica por medio de las actividades, ni existe conexión con otros contenidos de la matemática. En general, no se contemplan diversos contextos para garantizar la alfabetización probabilística. Por otro lado, en las fichas no se muestran algún tipo de expresión verbal discriminatoria (por estatus social, raza, género) o imágenes que promuevan estereotipos.

5. CONCLUSIONES

El ambiente de reforma educativa que vive actualmente Perú es una oportunidad para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. La elaboración de materiales curriculares desde el propio Ministerio de Educación es una iniciativa interesante que, sin embargo, corre el riesgo de quedarse a medio camino. Esto nos ha llevado a revisar y adaptar la guía de indicadores de idoneidad didáctica de probabilidad de Beltrán-Pellicer et al. (2018) para desarrollar un instrumento que permita analizar la pertinencia de materiales curriculares en dicho contenido en la Educación Secundaria peruana. Además, hemos ejemplificado su uso aplicándola sobre las fichas que tratan la probabilidad en dos cuadernos de trabajo que el Ministerio de Educación pone a disposición del profesor y estudiantes. Los resultados del análisis evidencian algunos aspectos sobre los que merece la pena reflexionar, de cara a plantear una serie de recomendaciones y sugerencias para la acción.

A diferencia de investigaciones previas sobre materiales curriculares, no solo hemos tratado el aspecto epistémico o ecológico, sino que hemos valorado de manera global el material, considerando las facetas cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional que no habían sido consideradas, y que lleva a plantear una visión holística de la pertinencia de los procesos instruccionales previstos o pretendidos por medio de dichos recursos. Todos estos aspectos se han tenido en cuenta a la hora de adaptar la guía de indicadores de idoneidad. Una carencia importante en la faceta epistémica tiene que ver con que las fichas de los cuadernos de trabajo no propongan situaciones problemas que muestren y relacionen los diferentes significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico) y, por el contrario, enfaticen el significado clásico sobre el significado frecuencial. Esto concuerda con lo observado en otros estudios (Sánchez, 2009; Ortiz, 2014; Vásquez y Alsina; 2015) y se traduce, por ejemplo, en el uso excesivo de contextos basados en juegos de azar.

Esta escasa atención acerca del significado frecuencial es algo que señalan otros estudios, como el realizado sobre libros de texto, en España, por Gómez et al. (2014, p. 67) quienes identifican "menos presencia las del significado frecuencial, escasa atención a la experimentación y nula a la simulación". Además, se echan en falta ciertos conceptos y algunos procedimientos clave, como la comparación cualitativa de probabilidades, desarrollo de técnicas combinatorias sencillas y los que involucran estudio de la estabilidad de frecuencias relativas, que son necesarios en este nivel educativo (Batanero y Godino, 2002). Hoadley y Galant (2016), en un análisis sobre cuadernos de trabajo, señalan que el hecho de que este tipo de materiales no incluyan referencias conceptuales explícitas puede suponer un hándicap para el profesorado con un menor dominio del contenido didáctico-matemático.

Las propuestas de mejora en el aspecto epistémico deben ir orientadas, por tanto, a complementar el rango de situaciones problemas con tareas que conecten los diferentes significados de la probabilidad, experimentaciones y simulaciones, evitando la preponderancia de juegos de azar e incluyendo otros contextos, como los fenómenos atmosféricos y otros que requieran poner en juego el significado frecuencial.

Además, será necesario considerar, en el diseño global e implementación de las secuencias en el aula, estas situaciones problema conceptos, propiedades y procedimientos no abordados por los materiales. Por ejemplo: la distinción de fenómenos aleatorios de deterministas, comparaciones cualitativas de probabilidades, análisis de la estabilidad de frecuencias relativas, uso e interpretación de tabla de doble entrada y diagrama de árbol (justificando su pertinencia) etc.

Con respecto a la faceta cognitiva, la secuencia que establecen los materiales no plantea situaciones para conectar con los conocimientos previos del alumnado, elemento que se pondría en juego, sin ir más lejos, otorgando un papel importante a la experimentación y simulación de experimentos aleatorios, como señalan diversos autores (Batanero, 2005; Batanero y

Borovcnik, 2016; Inzunsa, 2013; Vásquez y Alsina, 2019; Zimmermann y Jones, 2002). Las situaciones propuestas en las fichas de los cuadernos de trabajo deben complementarse, modelando la probabilidad como límite de frecuencias relativas, lo que permitiría introducir la estadística inferencial desde una aproximación frecuencial (Batanero y Borovcnik, 2016).

Por otro lado, un uso predominante de dispositivos equiprobables (dados, monedas) puede favorecer la aparición del sesgo de equiprobabilidad en los estudiantes si extienden la aplicación de la regla de Laplace a todas las situaciones probabilísticas que pretenden resolver. Como la aparición de sesgos de razonamiento es habitual, se hará necesario plantear situaciones para advertir al alumnado de posibles errores y sesgos (como el sesgo de equiprobabilidad). Los conflictos cognitivos se pueden evitar o resolver explicitando algunos términos que, si bien no aparecen recogidos en el programa curricular, emergen de las fichas de trabajo (espacio muestral, experimento aleatorio simple y compuesto, sucesos seguro e imposible, entre otras). Esto es algo que puede realizarse en un clima de aula dialogante, aprovechando las puestas en común, facilitando conexiones con otros contenidos intra o extra-matemáticos.

El análisis sobre la faceta afectiva muestra que desde las fichas de trabajo no se contempla el desarrollo de emociones y actitudes que conformen sistemas de creencias adecuados para la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad. Por ejemplo, el tratamiento del significado frecuencial no debería ser anecdótico, sino que debería formar parte de la evaluación. De forma interrelacionada con el aspecto cognitivo, la sección aprendemos del error debe ser punto de partida para que los estudiantes valoren sus propios errores y los de sus compañeros, en el contexto real de clase.

Algo similar ocurre con las facetas interaccional y mediacional. Los materiales en sí no establecen espacios para la interacción ni cómo organizar puestas en común, al igual que, tampoco parecen contemplar el uso de diversos manipulativos, físicos o virtuales, con los que experimentar o simular. En este sentido, sería recomendable pedir a los estudiantes que desarrollen argumentos con los que justificar sus respuestas. Al mismo tiempo, para atender adecuadamente la faceta afectiva, se deben considerar y planificar situaciones en donde se pongan de manifiesto emociones y actitudes, para favorecer el desarrollo de creencias coherentes con el quehacer matemático (Schoenfeld, 1985).

Por ejemplo, además de situar el eje del aprendizaje en las interacciones en pequeño grupo, haciendo visible el pensamiento de cada estudiante, quizá, con pizarras compartidas, como sugiere Liljedahl (2020), se puedan realizar puestas en común donde se identifiquen los puntos de bloqueo y las formas de superarlos.

Además de las recomendaciones para los profesores, señaladas anteriormente, las cuales surgen del análisis realizado sobre los cuadernos de trabajo, también cabe la posibilidad de realizar acciones complementarias a la publicación y puesta a disposición de este material. De esta manera, podría ser adecuado acompañar las fichas de los cuadernos de trabajo con guías de gestión en las que se recojan recomendaciones u orientaciones como las previas, extensibles también a las fichas de otros cursos u otros contenidos.

Como señalan Breda et al. (2017), la formación del profesorado sobre los criterios de idoneidad y su aplicación explícita permite enriquecer los procesos de reflexión didáctico-matemáticos sobre su propia práctica. En ese sentido, el instrumento desarrollado en nuestra investigación puede ser aplicado dentro de los planes de formación inicial del profesorado para desarrollar esta competencia. Por último, una limitación de este trabajo es que solamente se ha realizado el análisis de las fichas de dos cuadernos de trabajo, sobre el contenido específico de la probabilidad. Como línea de trabajo futuro, se plantea la extensión de estudios similares a otros niveles educativos y a otros contenidos. En particular, teniendo en cuenta la importancia del razonamiento proporcional en la interpretación de la probabilidad (Van Dooren et al., 2003) resultaría interesante indagar de manera conjunta cómo se presenta la proporcionalidad de manera previa.

CAPÍTULO 5.
DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ANÁLISIS ONTOSEMIÓTICO DE MATERIALES CURRICULARES

El contenido de este capítulo aparece recogido en:

Cotrado, B., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Castro, A. (2023). Desarrollo de la competencia de análisis didáctico en futuros profesores de matemáticas. (Sometido a publicación).

1. INTRODUCCIÓN

Diversas perspectivas de investigación en educación matemática asumen que el profesor debe tener los conocimientos matemáticos y didácticos para describir, explicar y valorar de manera sistemática los procesos instruccionales, previstos, planificados o efectivamente implementados, así como para aplicar dichos conocimientos de forma competente (Gellert et al., 2013; Giacomone et al., 2018; Pino-Fan., 2015).

En las últimas décadas, el análisis de materiales curriculares ha ganado relevancia en la comunidad de investigación en educación matemática debido a la importancia de estos recursos como apoyo para los profesores (Burgos et al., 2020; Thompson, 2014). Estos materiales, como libros de texto, manuales para profesores y cuadernos de trabajo, desempeñan un papel crucial en los procesos educativos al reflejar el currículo establecido y servir como herramientas que influyen en las decisiones del profesor y facilitan la interacción con los estudiantes (Remillard y Kim, 2020; Pepin y Gueudet, 2018).

Ante el diseño de un proceso instruccional concreto, el profesor competente debe ser capaz de interpretar la información en los materiales curriculares, establecer críticas y realizar adaptaciones que solventen sus limitaciones considerando las necesidades del contenido (Thompson, 2014; Yang y Liu, 2019). Sin embargo, distintos estudios han demostrado que los profesores en formación, noveles o incluso con años de experiencia, suelen tener dificultades al llevar a cabo estas acciones (Yang y Liu, 2019). Por este motivo, diversos autores plantean que desde la formación de profesores se debe asumir la responsabilidad de promover en los profesores la capacidad de análisis de los problemas incluidos en los libros de texto, la identificación de objetos matemáticos que intervienen, así como las posibles dificultades de comprensión. Se trata de garantizar que los profesores dispongan de criterios para hacer un uso adecuado de dicho material (Braga y Belver, 2016; Shawer, 2017).

El proceso instruccional propuesto en materiales como libros de texto o cuadernos de trabajo requiere una evaluación y adaptación por parte del profesor según las necesidades y estándares locales (Brown, 2009). Analizar los materiales curriculares según su capacidad para ayudar a los estudiantes a lograr los objetivos de aprendizaje establecidos en los programas de estudio y directrices curriculares, supone un análisis profundo. Dicho análisis debe permitir identificar aquellos elementos potencialmente conflictivos que, en la implementación por parte del profesor, requieran de una modificación de la trayectoria didáctica planificada.

Ante esta demanda, investigaciones previas (Breda et al., 2017; Font et al., 2010; Giacomone et al., 2018; Mallart et al. 2016; Pino-Fan et al., 2018; Pochulu et al., 2016) proponen la aplicación de las herramientas del EOS para desarrollar en los profesores la competencia específica de análisis didáctico de los procesos instruccionales. Esta competencia supone, entre otras, la capacidad del profesor para describir y explicar las prácticas matemáticas puestas en juego al resolver problemas y estudiar los contenidos matemáticos pretendidos (Burgos et al., 2019; Burgos y Godino, 2021; Giacomone et al., 2018; Godino et al., 2017). Esto permitirá al profesor utilizar los materiales curriculares de manera crítica como guía para el diseño instruccional en un contexto determinado, valorando y efectuando las adaptaciones que solventen sus limitaciones (Yang y Liu, 2019).

Los escasos estudios existentes sobre el tratamiento de los contenidos de probabilidad en el currículo y en los libros de texto ponen de manifiesto deficiencias, por ejemplo, que el contexto privilegiado sea el de los juegos de azar, que las situaciones propuestas no sean suficientemente representativas y equilibradas, falta de situaciones que impliquen experimentación y simulación con manipulativos o software, entre otros, que impiden desarrollar una adecuada alfabetización probabilística (Cotrado et al., 2022; Ortiz, 2014; Vásquez y Alsina, 2015). Consideramos importante que los futuros profesores sean competentes para analizar los materiales, en particular cuadernos de trabajo de los estudiantes para reconocer las carencias que requieran por su parte decisiones de acción pertinentes.

2. METODOLOGÍA

El problema de investigación que abordamos en este capítulo se centra en el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas sobre probabilidad en futuros profesores de Educación Secundaria a través de intervenciones formativas. La metodología sigue las fases de investigaciones de diseño propuestas por Godino et al. (2014) desde el EOS, abordando estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación. El estudio es esencialmente cualitativo; recoge y analiza información a partir de las acciones de los futuros profesores en un contexto real de clase.

2.1. Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La experiencia formativa se desarrolló con un grupo de 16 estudiantes del Programa de Estudios de Educación Secundaria de la Especialidad de Matemática, Física, Computación e Informática, en la Universidad Nacional del Altiplano (Perú), durante el año 2021. El programa de estudios contempla 10 semestres académicos (5 años). Los futuros profesores (FP en adelante) que participaron en esta intervención, se encontraban en su cuarto semestre, cursando la asignatura de Estadística Descriptiva a través de la plataforma virtual LAURASIA, debido a la situación de pandemia. En la planificación del curso estaban contempladas instancias sincrónicas a través de Google Meet y asincrónicas para facilitar material de estudio y subir trabajos encargados (*Classroom* y LAURASIA). Durante la implementación del taller, que comprende tres sesiones sincrónicas virtuales de dos horas cada una, 16 participantes intervinieron en la primera sesión, mientras que a la segunda y tercera asistieron 13 participantes (tres estudiantes dejaron el curso). La formadora encargada de la gestión del taller cumple también el rol de investigadora.

Como instrumentos de recogida de información, se dispone de la grabación de las sesiones de clase a través de *Google Meet*, las anotaciones de la formadora y los protocolos de respuestas escritas de los participantes durante el desarrollo de la sesión sincrónica y asincrónica del taller.

2.2. Sesiones implementadas y recursos didácticos

El taller formativo se organiza en tres sesiones virtuales de dos horas sincrónicas cada una que incluye la formación teórico-práctica y la puesta en común. En dichas sesiones se plantean además actividades de tipo asíncrono que deben realizar los participantes como complemento a las dos horas de trabajo sincrónico, considerando la lectura de documentos y la resolución de tareas que forman parte de la evaluación final de los participantes. A continuación, describimos los momentos y actividades que se han desarrollado en cada sesión.

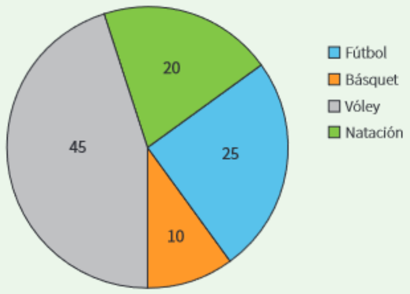
2.2.1 Sesión 1. Exploración inicial sobre prácticas y objetos matemáticos en tareas de probabilidad

Se comienza planteando la resolución de tres tareas seleccionadas de la sección de evaluación de las fichas 9 (ítem 1 y 2) y 13 (ítem 3) que tratan la probabilidad en el cuaderno de trabajo de Matemática Resolvamos problemas de primer y segundo grado de Educación Secundaria (MINEDU, 2019a; MINEDU, 2019b). La situación propuesta en el ítem 1 (Figura 5.1) corresponde a un experimento aleatorio simple descrito a partir de un gráfico de sectores, cuyos sucesos no son equiprobables, y que posee características del significado frecuencial.

Figura 5.1

Situación propuesta en la sección de evaluación de la Ficha 9 de primer grado.

El gráfico representa la población de 100 estudiantes de una academia deportiva y las disciplinas que practican.



Si un día cualquiera se escoge a un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que no practique básquet.

Fuente: MINEDU (2019a, p. 126).

El contexto del ítem 2 (Figura 5.2) es el de un experimento aleatorio compuesto formado por tres experimentos simples (lanzamiento de una moneda tres veces).

Figura 5.2

Situación propuesta en la sección de evaluación de la Ficha 9 de primer grado.

Se lanza una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener "cara" exactamente dos veces?

Fuente: MINEDU (2019a, p. 129).

En el ítem 3 (Figura 5.3) se plantea un experimento aleatorio compuesto que requiere la correcta interpretación de una tabla de contingencia, así como con la identificación de los casos favorables y posibles usando apropiadamente la regla de Laplace.

Figura 5.3

Situación propuesta en la sección de evaluación de la Ficha 13 de segundo grado.

En una empresa hay 200 trabajadores, de los cuales 100 son hombres y el resto son mujeres. Los que leen la revista "La Estación" son 30 hombres y 35 mujeres.

Si se elige un empleado al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea hombre y no lea la revista "La Estación".

b) Que lea la revista "La Estación".

Fuente: MINEDU (2019b, p. 182).

Una vez los participantes han resuelto las tareas mencionadas, se prosigue con la exploración inicial de los significados personales de los futuros profesores sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su capacidad para identificar dichos objetos en las prácticas matemáticas. Para ello, los participantes de forma individual describen y enumeran las prácticas que utilizaron para solucionar el ítem 1 e identifican los conceptos, símbolos, gráficos o tablas empleados, mencionando las dificultades detectadas, si es que las tuvieron. Seguidamente, comparten y exponen sus respuestas en clase, confrontándolas con el análisis de la solución al ítem 1 propuesto por la formadora.

Antes de finalizar la sesión, se indica a los futuros profesores que deben leer el artículo de Batanero (2005) con relación a los significados pragmáticos de la probabilidad, y en base a éste, elaborar un cuadro sinóptico proponiendo ejemplos de situaciones-problema asociados a los diversos significados de la probabilidad. Dicha lectura forma parte de la actividad asincrónica, con la que se pretende dar flexibilidad al FP para responder según su disponibilidad temporal.

2.2.1 Sesión 2. Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en probabilidad

La sesión se abre con las siguientes preguntas:

- *¿Qué tipo de significados de la probabilidad propone la lectura?*
- *¿Qué características debe tener un problema para relacionarse con un significado parcial concreto de la probabilidad?*
- *Los problemas que resolviste en la sesión anterior, ¿a qué significados de la probabilidad corresponden?*

Se pretende involucrar a los participantes en la reflexión sobre los diferentes significados de probabilidad y cómo se pueden caracterizar a partir de la red de objetos matemáticos emergentes en las prácticas asociadas. Tras la explicación detallada por parte de la formadora de las situaciones-problemas y elementos que caracterizan los diferentes significados de la probabilidad, así como su inclusión progresiva en la enseñanza de este contenido en Educación Secundaria, se pide a los FP que trabajen individualmente para responder a las siguientes consignas:

- Analizar la situación-problema planteada en el ítem 2, describiendo su procedimiento de solución.
- Identificar los objetos matemáticos y relacionarlos con un tipo de significado de la probabilidad.
- Mencionar las dificultades que se han tenido.

Las respuestas dadas de forma escrita se comparten en clase. Luego, la formadora muestra el análisis a priori del ítem 2, empleando la herramienta configuración ontosemiótica. Después de descomponer la solución en prácticas elementales (unidades de análisis) se identifican el uso e intencionalidad de cada una de ellas, así como los objetos matemáticos involucrados.

Al final de la sesión, se propone a los participantes, como tarea individual de trabajo asíncrono, analizar la situación significativa A que aparece junto a su solución en la ficha 9 del cuaderno de trabajo: Resuelve problemas de primer grado (Figura 5.4). En este caso, el análisis ontosemiótico no lo realizan sobre sus prácticas, sino sobre la solución propuesta por el autor del material curricular, completando el mismo tipo de tabla (Anexo 8) empleado por la formadora al presentar la configuración ontosemiótica.

Además, se pide que vinculen la situación A con uno de los significados de la probabilidad y que mencionen las posibles dificultades que puedan tener al relacionar la situación con los significados de la probabilidad y en identificar los objetos matemáticos.

Figura 5.4

Situación A propuesta en la sección de comprobación de la Ficha 9 de primer grado

Situación significativa A

Se lanza un dado una sola vez. A partir de ello, determina si cada suceso resulta seguro, imposible o probable.

Suceso A: Que salga un número par.

Suceso B: Que salga un número compuesto mayor que 4.

Suceso C: Que salga un número primo mayor que 5.

Suceso D: Que salga un número menor que 10.

Resolución

El espacio muestral (Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Por lo tanto, primero determinamos el espacio muestral (Ω), es decir, todos los posibles resultados que se dan al lanzar un dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

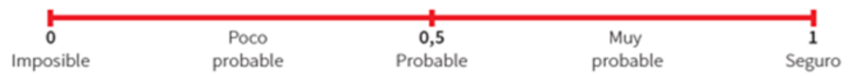
El suceso es un subconjunto del espacio muestral formado por los resultados del experimento. Entonces, realizamos una lista de las posibilidades de cada suceso:

- Suceso A, que salga par: $A = \{2, 4, 6\}$
- Suceso B, que salga un número compuesto mayor que 4: $B = \{6\}$
- Suceso C, que salga primo mayor que 5: $C = \{\ \}$
- Suceso D, que salga menor que 10: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Luego, calculamos la probabilidad de cada suceso aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{N.° de casos favorables al suceso A}}{\text{N.° de casos posibles}}$$

Los resultados de la probabilidad también se pueden representar en una recta numérica:



- El suceso A de que salga par es probable porque:

  $P(A) = \frac{3}{6}$, entonces $P(A) = 0{,}5$

  Para expresar la probabilidad en porcentajes, multiplicamos por 100 %.

  $P(A) = 0{,}5 \times 100\ \%$, entonces $P(A) = 50\ \%$

  Significa que tiene 3 (casos favorables) posibilidades de 6 (casos posibles), el 50 % de probabilidad de que salga un número par al lanzar un dado.
- El suceso B de que salga un número compuesto mayor que 4 es poco probable porque:

  $P(B) = \frac{1}{6} = 0{,}166...$, entonces $P(B) = 0{,}1666... \times 100\ \%$, entonces $P(B) = 16{,}666...\ \%$

  Esto implica: que salga un número compuesto mayor que 4, al lanzar un dado una sola vez, es poco probable.
- El suceso C de que salga un número primo mayor que 5 es imposible porque:

Fuente: MINEDU (2019a, p. 120-121)

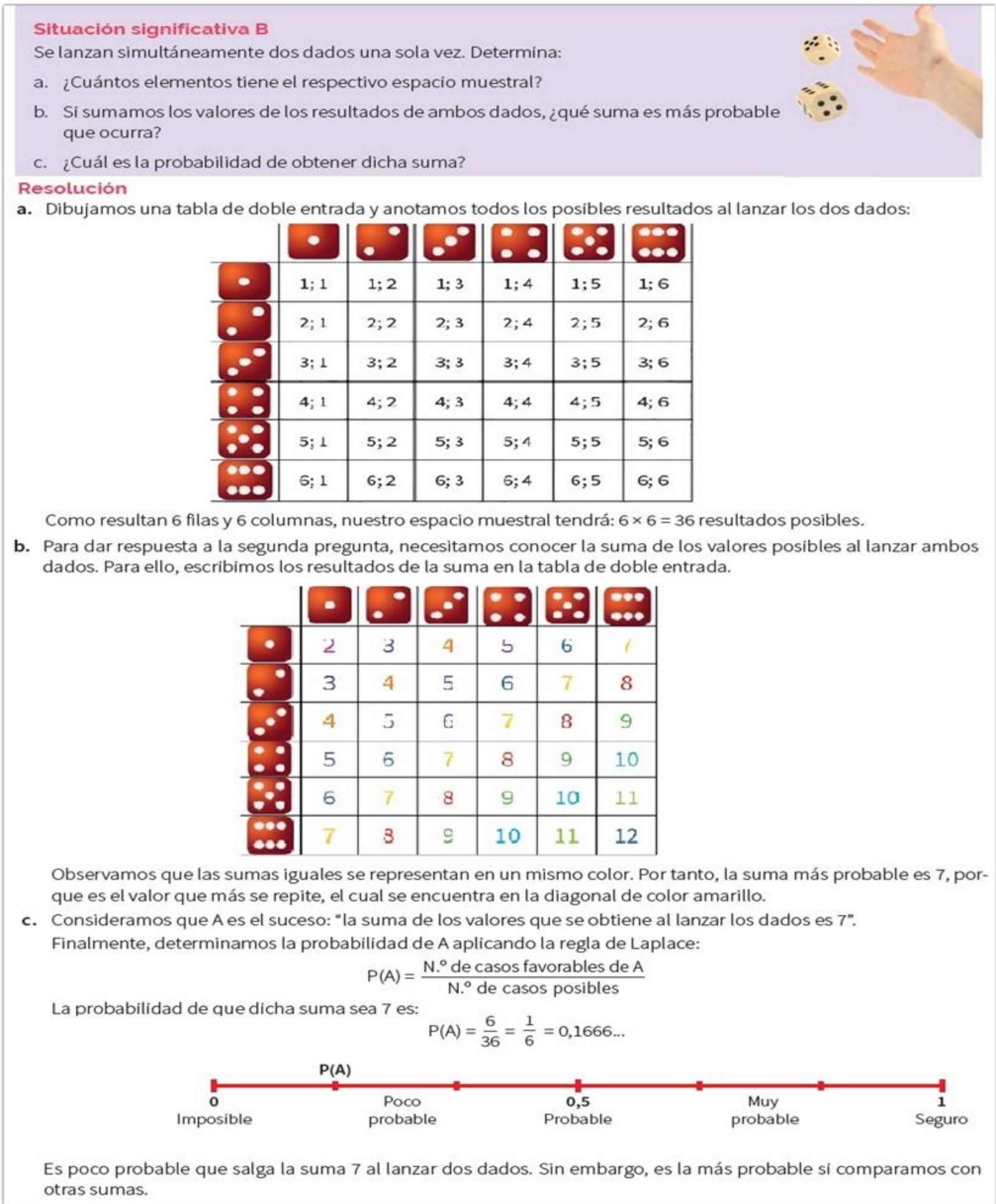
2.2.3 Sesión 3. Puesta en común y propuesta de tareas de evaluación

En esta sesión los participantes muestran el resultado de la aplicación de la herramienta configuración ontosemiótica para hacer un análisis detallado de las prácticas matemáticas descritas en la situación A (Figura 5.4).

Después la formadora, al igual que en las sesiones anteriores, comparte y explica el análisis a priori de la situación A, para que los participantes puedan comparar sus respuestas, comentando con ellos las dificultades encontradas. Al finalizar la tercera sesión, se les pide que de forma individual completen dos tareas de evaluación. En la primera, los participantes deben realizar el análisis mediante la herramienta configuración ontosemiótica de la solución propuesta por la formadora al ítem 3, con el formato de la Tabla 1 del Anexo 8. En la segunda, deben identificar el significado, elaborar la configuración ontosemiótica y reconocer posibles errores o conflictos en la solución propuesta por el autor de las fichas de trabajo a la situación significativa B (Figura 5.5) sobre lanzamiento simultáneo de dos dados.

Figura 5.5

Situación B propuesta en la sección de comprobación de la Ficha 9 de primer grado



Situación significativa B

Se lanzan simultáneamente dos dados una sola vez. Determina:

a. ¿Cuántos elementos tiene el respectivo espacio muestral?

b. Si sumamos los valores de los resultados de ambos dados, ¿qué suma es más probable que ocurra?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dicha suma?

Resolución

a. Dibujamos una tabla de doble entrada y anotamos todos los posibles resultados al lanzar los dos dados:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	1; 1	1; 2	1; 3	1; 4	1; 5	1; 6
⚁	2; 1	2; 2	2; 3	2; 4	2; 5	2; 6
⚂	3; 1	3; 2	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6
⚃	4; 1	4; 2	4; 3	4; 4	4; 5	4; 6
⚄	5; 1	5; 2	5; 3	5; 4	5; 5	5; 6
⚅	6; 1	6; 2	6; 3	6; 4	6; 5	6; 6

Como resultan 6 filas y 6 columnas, nuestro espacio muestral tendrá: $6 \times 6 = 36$ resultados posibles.

b. Para dar respuesta a la segunda pregunta, necesitamos conocer la suma de los valores posibles al lanzar ambos dados. Para ello, escribimos los resultados de la suma en la tabla de doble entrada.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Observamos que las sumas iguales se representan en un mismo color. Por tanto, la suma más probable es 7, porque es el valor que más se repite, el cual se encuentra en la diagonal de color amarillo.

c. Consideramos que A es el suceso: "la suma de los valores que se obtiene al lanzar los dados es 7".

Finalmente, determinamos la probabilidad de A aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables de A}}{\text{N.º de casos posibles}}$$

La probabilidad de que dicha suma sea 7 es:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0{,}1666...$$

Es poco probable que salga la suma 7 al lanzar dos dados. Sin embargo, es la más probable si comparamos con otras sumas.

Fuente: MINEDU (2019a, p. 122-123).

Para favorecer el trabajo autónomo y la responsabilidad de presentación, los participantes disponen de un plazo de una semana para entregar el informe de su análisis a través de la plataforma virtual *Classroom*.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Aunque la experiencia formativa está orientada a desarrollar la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico, es importante tener en cuenta las carencias en el conocimiento común sobre probabilidad de los participantes como posible obstáculo para el progreso en esta competencia. También interesa en este sentido, conocer sus ideas iniciales sobre las nociones de práctica y objetos matemáticos.

3.1. Evaluación inicial del conocimiento común del contenido

De los 16 participantes, uno no logró resolver ninguno de los problemas iniciales propuestos. Con relación al ítem 1 observamos que, de los 16 participantes, dos lo dejan en blanco y 14 dan respuestas parcialmente correctas, ya que obtienen correctamente el valor 0,9 pero no justifican cómo lo calculan o solo hacen uso de la regla de Laplace. Asimismo, se observa el uso incorrecto de la regla de Laplace como estrategia de resolución del problema. Por ejemplo,

Figura 5.6

Uso incorrecto de la regla de Laplace por FP6

Probabilidad = Casos favorables / Casos posibles

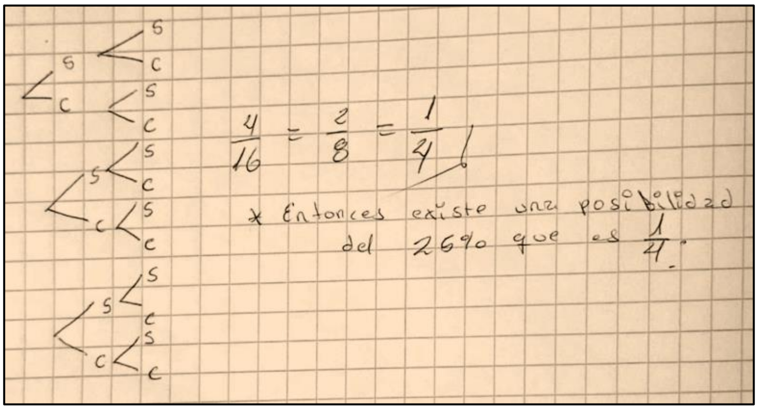
$$\frac{90}{100} = \frac{9}{10}$$

Los participantes no tienen en cuenta la distribución de las frecuencias absolutas, suponen que los cuatro sucesos del experimento aleatorio que forman el espacio muestral son equiprobables, por tanto, muestran sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992). Este sesgo aparece en los estudios de Mohamed (2012), Gómez-Torres (2014), Parraguez et al. (2017) y Batanero et al. (2021).

En el ítem 2, únicamente tres participantes presentan respuestas parcialmente correctas con respecto a la probabilidad de obtener cara exactamente dos veces. Estos participantes enumeran todos los resultados posibles y favorables mediante diagramas de árbol, pero no justifican el cálculo de la probabilidad utilizando ni la regla de Laplace ni la regla del producto.

Figura 5.7

Error de enumeración y del cálculo de la probabilidad por FP15



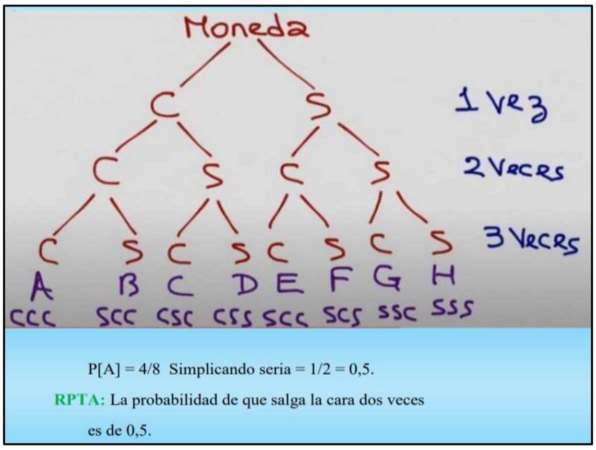
Por otro lado, once participantes calculan la probabilidad de manera incorrecta, y dos optan por dejar en blanco este ítem. Los errores en el cálculo de la probabilidad se deben a una enumeración incorrecta del espacio muestral y al uso inapropiado de esquemas de recuento para determinar el número de casos favorables y posibles, como se ilustra en la Figura 5.7. Estos mismos errores fueron observados previamente en los estudios de Mohamed (2012) y Gómez-Torres (2014).

En otros casos determinan adecuadamente todos los resultados posibles, pero no los casos favorables, señalando solo dos sucesos (C,C,S y S,C,C) o bien cuatro sucesos, como se observa en la Figura 5.8.

A pesar de que el participante desglosa adecuadamente el conjunto de posibles resultados, comete errores en el recuento de casos favorables. Estos errores pueden deberse a la percepción incorrecta de que dos resultados son idénticos cuando son diferentes, o a la consideración equivocada de que dos resultados diferentes son en realidad el mismo. Batanero, Navarro-Pelayo y Godino (1997) clasifican este tipo de error en combinatoria como "confusión del tipo de objeto"

Figura 5.8

Dificultad de reconocer los resultados favorables por FP11



El ítem 3 incluye dos requerimientos con relación al cálculo de la probabilidad compuesta, (a) y probabilidad simple (b). En a) ningún participante proporciona respuestas correctas, tres lo hicieron de manera parcialmente correcta (no determina la intersección de sucesos; incluye pequeño error de tipo operacional o expresa incorrectamente la probabilidad), 11 dan respuestas incorrectas y dos dejan en blanco. A pesar de la mayor facilidad del enunciado los resultados son peores que los de Estrada y Díaz (2007), aunque en su investigación la mitad tenían estudios previos al tema. El error frecuente que se observa en este enunciado es la confusión de la probabilidad condicional con la compuesta (Contreras, 2011; Estrada y Díaz, 2007). Es decir, el futuro profesor hace una restricción incorrecta de los casos posibles del experimento aleatorio, considerando solo a todos los hombres, en lugar de toda la muestra (ver Figura 5.9).

Figura 5.9

Restricción incorrecta de los casos posibles por FP1

Resolución:

Debemos hallar la cantidad de hombres que no lean la revista "La Estación", por lo que realizamos lo siguiente:

Cantidad total de hombres - Cantidad de hombres que leen la revista "La Estación"

100 - 30

70

La cantidad total de hombres es 100 por lo que aplicamos lo siguiente:

$$\frac{Casos\ favorables}{Resultados\ posibles}$$

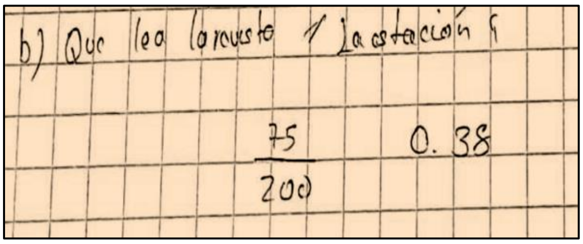
$$\frac{70}{100}$$

Es lo mismo que decir 70%

En el apartado b) ningún participante responde correctamente, 11 llegan a respuestas parcialmente correctas (errores operacionales, expresión incorrecta de la regla de Laplace o de la probabilidad), tres dan respuestas incorrectas, por ejemplo, no llegan a determinar correctamente los casos favorables (ver Figura 5.10). Además, dos lo dejan en blanco.

Figura 5.10

Error de FP16 al determinar el número de lectores en ítem 3



Como resultado de esta primera sesión se observa que los futuros profesores muestran un conocimiento común en probabilidad deficiente. Así mismo, se ha observado un sobreuso de la regla de Laplace. Por ejemplo, el ítem 1 podría haber sido abordado desde el significado frecuencial, a partir de las frecuencias relativas. También encuentran dificultades con la propia aplicación de la regla de Laplace, por ejemplo, en la determinación de los casos favorables, lo cual está íntimamente relacionado con las dificultades ante situaciones de combinatoria que se ponen de manifiesto cuando el experimento es compuesto. Todas estas limitaciones, han sido señaladas en investigaciones previas como las de Contreras (2011), Mohamed (2012) y Gómez-

Torres (2014) lo que sugiere la necesidad de mejorar la formación de los futuros profesores en probabilidad (Batanero et al., 2021; Parraguez et al., 2017; Vásquez y Alsina, 2015). Como mostramos a continuación, los propios participantes ponen de manifiesto estas carencias en el conocimiento común cuando se les pregunta por las dificultades encontradas al resolver la tarea.

3.2. Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico

El estudio de las respuestas dadas por los futuros profesores sobre el análisis de significados y configuración ontosemiótica, nos permite observar las dificultades de comprensión de las consignas, los logros alcanzados y las posibilidades ofrecidas por las situaciones planteadas en las sesiones del taller formativo.

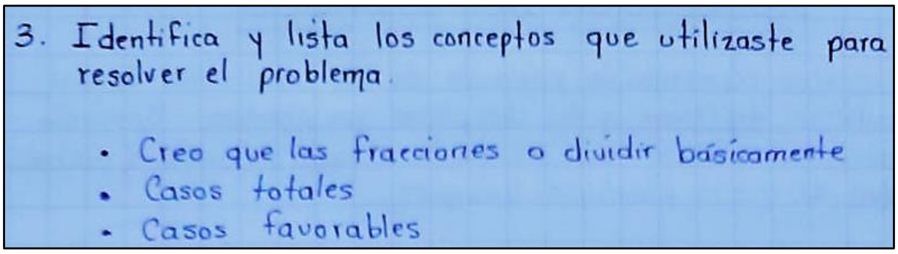
3.2.1 Análisis de la exploración inicial de prácticas y objetos matemáticos

Durante el desarrollo de la primera sesión, los FP no tenían claro cuál era la naturaleza de las prácticas matemáticas y los objetos matemáticos primarios, al igual que en el estudio de Giacomone et al. (2018). Cuando se les pidió que describieran o distinguieran las prácticas matemáticas e identificaran los objetos matemáticos (particularizando fundamentalmente a conceptos y lenguajes, con los que esperábamos estuvieran más familiarizados) en la soluciones o respuestas dadas al ítem 1: ocho participantes no respondieron, tres no distinguieron las secuencias de prácticas, pero mencionan algún objeto matemático y cinco intentaron secuenciar las prácticas matemáticas según su uso e intencionalidad. En este caso, se observa un esfuerzo por describir sus acciones en términos genéricos apoyándose en los pasos de las estrategias de resolución de Polya. Por ejemplo, utilizan expresiones como: "identificar los datos del problema", "verificar el problema", "lectura del problema", "recojo de datos", "representación de los datos y cálculo".

En general, en esta sesión inicial, ninguno de los 16 FP distinguió prácticas elementales en la descripción de la actividad matemática llevada a cabo para resolver la tarea. Esto nos muestra las dificultades iniciales de los participantes para distinguir y secuenciar las unidades de prácticas elementales.

Figura 5.11

Identificación de conceptos por FP5



3. Identifica y lista los conceptos que utilizaste para resolver el problema.

- Creo que las fracciones o dividir básicamente
- Casos totales
- Casos favorables

Después de describir las prácticas matemáticas, los participantes debían identificar algunos objetos matemáticos, tales como conceptos o lenguajes. En este caso, se observa que solo cuatro de ellos reconocen de forma parcial y con cierta duda ("Los conceptos van a ser, ¿los que estoy utilizando en la suma o los porcentajes?, esa parte no entiendo", FP3) los siguientes conceptos: fracciones, casos totales, casos favorables, porcentajes, probabilidad y población (ver Figura 5.11).

La identificación de los conceptos por parte de los FP durante la puesta en común nos permite reconocer también carencias en el conocimiento sobre probabilidad, que frecuentemente asocian únicamente con el enfoque clásico y la regla de Laplace. Así, por ejemplo, FP6 escribe "usa el concepto de probabilidad = casos favorables/casos posibles", o similarmente, FP3, comenta:

> En cuanto a los porcentajes y las probabilidades siempre uso como fórmula, se podría decir, en la parte de arriba de la fracción va lo que quiero o lo que nos pide el problema y en la parte de abajo el total, en este caso en la parte de arriba nos pide los que no practican básquet.

Además, se pedía a los participantes identificar tipos de representaciones lingüísticas empleadas en las prácticas matemáticas. En su mayoría indican "ninguno" o dejan la respuesta en blanco. Únicamente un FP reconoce el gráfico circular ("ninguno excepto el gráfico circular que estaba establecido, FP4) y otro señala como lenguajes, elementos de tipo procedimental (“la suma de datos, la división de datos totales”, FP7). La dificultad inicial de los participantes para reconocer conceptos y lenguajes empleados en las prácticas matemáticas de probabilidad estaría asociada a su desconocimiento sobre qué son dichos objetos matemáticos.

Por último, se pide a los participantes que mencionen las dificultades que pudieron

Surgir durante la resolución del problema. Cuatro estudiantes indican tener dificultades en comprender el enunciado del problema, emplear un procedimiento adecuado y acorde al problema o falta de conocimiento del tipo de problema.

3.2.2 Significados de la probabilidad y análisis ontosemiótico. Primero avances

Después de una reflexión sobre los significados de la probabilidad y sus respectivos objetos matemáticos, los FP debían poner en común la identificación de la secuencia de prácticas matemáticas y objetos matemáticos (donde se espera que hayan identificado además de conceptos y lenguajes, procedimientos, proposiciones y argumentos) implicados en la solución al ítem 2 y relacionarlo con uno de los significados de la probabilidad. Como resultado observamos que cinco participantes no realizaron la tarea, y de los ocho participantes que la entregaron, cuatro no llegaron a secuenciar las prácticas y los otros cuatro describieron parcialmente las unidades elementales. Este hecho, también fue observado en Burgos et al. (2018) cuando solo la mitad de los participantes de su estudio no distinguieron unidades de prácticas dentro de la secuencia de resolución, o bien las configuraciones que realizaron fueron muy escasas.

Se observa un leve progreso respecto de los resultados en la primera sesión con la identificación de conceptos y lenguajes (únicos tipos de objetos matemáticos considerados en la primera tarea como introducción). En el análisis del ítem 2, cinco FP reconocen pertinentemente el lenguaje gráfico, simbólico y numérico. Otros tres los mencionan haciendo referencia a cómo lo usan en las prácticas matemáticas. Por ejemplo, FP7 indica "utilizo el método [diagrama] de árbol para resolver probabilidades".

El reconocimiento del objeto matemático concepto continúa siendo conflictivo en esta sesión. Ningún FP menciona experimento aleatorio compuesto, espacio muestral, resultados posibles y resultados favorables que, sin embargo, son conceptos recurrentes en esta tarea. Solo cinco participantes reconocen los conceptos de probabilidad, suceso, porcentajes y fracción, que aparecen de forma explícita en sus soluciones, aunque cuando lo hacen los describen como las prácticas matemáticas que los involucran o la intencionalidad de estas. Así, por ejemplo, FP1 señala "conceptos: multiplicar las fracciones" o FP7 menciona "los conceptos que utilicé fueron, primero identificar los datos del problema y la probabilidad", donde parece entender "datos del problema" como concepto matemático.

Los FP tuvieron dificultades para reconocer los procedimientos en sus prácticas. De hecho, 11 de ellos no respondieron y dos los asimilaron a las propias prácticas en la secuenciación (ver Figura 5.12).

Figura 5.12

Identificación de objetos por FP1

Se lanza una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener "cara" exactamente dos veces?
Describe el procedimiento

- La moneda tiene 2 caras
- La probabilidad de obtener cara: ½
- La probabilidad de obtener cara 1 vez: ½*1/3=1/6
- 2 veces: 1/6+1/6=2/6=1/3

Identifica los conceptos: Probabilidad, fracción, multiplicar las fracciones
Los lenguajes son: simbólico
Los procedimientos ya se han mencionado
Proposiciones:
Argumentos: generalización

Solo FP12 identificó como proposición "la probabilidad de solo cara es 3/8". De igual forma, en relación con el objeto matemático argumento, solo FP1 menciona incorrectamente como argumento el proceso de generalización (Figura 5.12).

Observamos, por lo tanto, que, a pesar de la formación recibida sobre prácticas y objetos matemáticos implicados en tareas de probabilidad, los participantes continúan mostrando dificultades para secuenciar las prácticas matemáticas elementales, así como para identificar los objetos procedimientos, proposiciones y argumentos, aunque se observa pequeños logros en el reconocimiento de conceptos y lenguajes.

Respecto al significado de la probabilidad, seis FP lograron relacionar esta tarea con el significado clásico, pero no lo justificaron en base a las condiciones de equiprobabilidad, ni de finitud del espacio muestral, aunque uno de ellos lo atribuyó al contexto de juego de azar. En algunos casos muestran una idea confusa sobre la naturaleza del significado de la probabilidad, como se aprecia en la respuesta de FP3:

> En los tipos de significado de la probabilidad puse que existe una menor probabilidad de que ocurra este proceso, puesto que es menos del 50%... lo puse como clásico.

Por último, se pide a los participantes que identifiquen las dificultades que pudieron surgir durante el desarrollo de la consigna. En este caso, únicamente tres participantes señalaron dificultades para comprender el problema que debían resolver. Ninguno se refiere tener dificultades respecto a la identificación específica de los objetos matemáticos.

3.2.3 Análisis de la situación A

Al inicio de la última sesión los FP debían poner en común el análisis de la situación significativa A (MINEDU, 2019a, p.120-121), por medio de la aplicación de la herramienta configuración ontosemiótica. Se esperaba que la formación recibida y el ofrecerles un medio para secuenciar, identificar la intencionalidad y reconocer los objetos en las prácticas elementales mejorase el análisis sobre una situación, además, resuelta por el autor del texto.

En general, se observa cierta mejora en la secuenciación de prácticas elementales y la identificación de los objetos matemáticos (sobre todo en lenguajes, conceptos y procedimientos) cuando se analiza la solución dada en la ficha de trabajo. En concreto, 12 FP lograron dividir la solución en tres o cuatro unidades de análisis. Además, los 13 FP que analizaron esta tarea reconocieron adecuadamente los tipos de lenguajes en las prácticas matemáticas (simbólico y numérico con mayor frecuencia y menos referido el lenguaje natural).

Los 13 participantes reconocieron con éxito los conceptos. En este caso, al igual que en los estudios de Gómez-Torres (2014) y Vásquez y Alsina (2015) los conceptos más citados son los de probabilidad, suceso, espacio muestral, casos favorables y casos posibles, y los menos reconocidos situación aleatoria, suceso probable, suceso seguro, poco probable, suceso imposible, resultados posibles. Sin embargo, tres de ellos identificaron incorrectamente la regla de Laplace, como concepto en lugar de como propiedad. Esta confusión puede tener origen en la habitual hiper representatividad del significado clásico en los materiales curriculares, que puede conducir a una asimilación entre concepto, propiedad y procedimiento (Cotrado et al., 2022; Gómez-Torres, 2014).

También identificaron con éxito algunos de los procedimientos considerados en el análisis a priori. Por ejemplo, 11 FP identificaron el procedimiento "construir o listar el espacio muestral" y "calcular la probabilidad aplicando la regla de Laplace", este último en consonancia con lo observado en Mohamed (2012). Sin embargo, pasaron desapercibidos los procedimientos aritméticos o de conversión entre fracción y número decimal. Así, ningún FP mencionó como procedimiento reducción de la fracción y expresión del valor de la probabilidad como decimal, aunque uno citó "expresar la probabilidad en porcentajes".

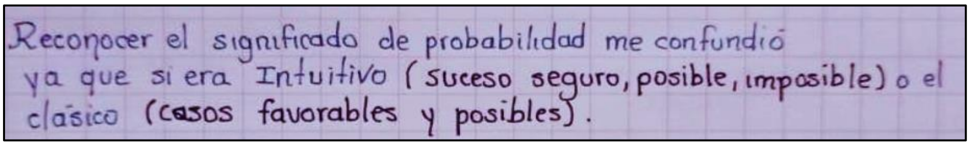
Aunque los participantes reconocieron los conceptos, lenguajes y algunos procedimientos implicados en la situación significativa A, persiste la dificultad para reconocer proposiciones y argumentos, como en los estudios de Giacomone et al. (2018) y Burgos et al. (2018). Solo dos participantes (FP1, FP13) identificaron parcialmente alguna proposición y su argumento asociado y otros dos (FP5, FP7) indican como proposición la intención o el requerimiento de la práctica ("lanzar un dado una vez, determinar los sucesos"). Por ejemplo, FP1 indica la proposición “La cantidad de casos favorables en el suceso A es 3” y como argumento “porque en los 6 sucesos del espacio muestral solo 3 cumplen con lo que pide el suceso A”. También asocia a la proposición “Es poco probable que salga un número compuesto mayor que 4 en el suceso B” el argumento “Porque en el suceso B, [la probabilidad] es del 16,6%” apoyado en el cálculo explícito previo de la probabilidad de ocurrencia de dicho suceso. FP13 señaló como proposición “el valor de la probabilidad oscila entre 0 y 1” y como argumento “la regla de Laplace”. En otros casos, se señalan argumentos genéricos previos a las proposiciones y no pertinentes.

En este sentido, se puede concluir que, aunque se observan logros al identificar los objetos conceptos, lenguajes y procedimientos, los futuros profesores continúan mostrando dificultades en el reconocimiento de las proposiciones y argumentos.

La situación A, fue relacionada por seis FP con el significado intuitivo de la probabilidad, cuatro de ellos la asociaron al significado clásico, uno con el significado clásico e intuitivo y dos no respondieron a esta cuestión. Salvo FP8 justifica que el significado asociado es el clásico por ser un juego de azar, los demás no argumentaron respuesta. Tampoco lo hicieron en la puesta en común, pese a las preguntas por parte de la formadora, aunque en algunos casos señalaron sus dificultades al respecto. En este sentido, siete participantes mencionaron tener conflictos para reconocer los objetos matemáticos, (“la verdad no tuve muchas dificultades, solo un poco al momento de reconocer los objetos matemáticos, puesto que el hecho de estudiar los objetos matemáticos resulta algo nuevo para mí”, FP4) tres para relacionar la situación con un significado de la probabilidad (ver Figura 5.13); dos se refieren a las dificultades en poder comprender el procedimiento de la situación resuelta y cuatro no registraron respuestas.

Figura 5.13

Dificultades mencionadas por FP5


Reconocer el significado de probabilidad me confundió ya que si era Intuitivo (suceso seguro, posible, imposible) o el clásico (casos favorables y posibles).

En la puesta en común FP5 indica que si bien en un principio tenía claro que el significado era el intuitivo porque “el intuitivo tenía suceso, seguro, posible, imposibles”, después comenzó a tener dudas si era el significado clásico “porque había casos favorables y posibles”. Podemos concluir que los futuros profesores muestran dificultades para diferenciar los significados intuitivos y clásico en las prácticas matemáticas asociadas a una situación-problema.

3.2.4 Análisis de las tareas de evaluación final

Si bien a lo largo de la implementación del taller se llevó a cabo la evaluación sistemática del progreso en los participantes, el ítem 3 y la situación significativa B (Figura 5.5) son utilizadas como instrumentos de evaluación final tras las sesiones formativas.

En este apartado presentamos, los resultados de 12 respuestas obtenidas sobre el análisis de significados y análisis ontosemiótico de la situación significativa B y 10 del ítem 3 (ambas situaciones son resueltas). Estas mismas respuestas permitirán determinar el grado de competencia de análisis ontosemiótico logrado con la implementación del taller formativo.

Resultados del análisis de la situación significativa B por los futuros profesores

Observamos que, de los 12 FP que analizaron la situación significativa B, nueve descompusieron las secuencias de prácticas matemáticas en dos o tres unidades de análisis y tres no distinguieron. Asimismo 11 FP reconocieron adecuadamente el objeto matemático lenguaje, donde los más citados continúan siendo los tipos de lenguaje verbal, simbólico y numérico. Solo dos participantes identificaron el lenguaje gráfico o tabular implicado en la “tabla de doble entrada”.

El siguiente objeto matemático con el que los participantes muestran más éxito para identificarlo es el concepto. Nueve de ellos identifican adecuadamente los conceptos en las prácticas matemáticas, siendo los más mencionados espacio muestral y suceso, y los menos referidos resultado posible y probable. Este resultado coincide con lo obtenido por Giacomone et al. (2018) y Burgos et al. (2018) donde también se observa un progreso en la identificación de los conceptos matemáticos frente a otros objetos tras la formación. Sin embargo, al igual que en las tareas anteriores cuatro FP identificaron incorrectamente la regla de Laplace (ver Figura 14) como concepto en lugar de propiedad. En otras palabras, los futuros profesores persisten en identificar la regla de Laplace como concepto.

Figura 5.14

Identificación de objetos en la tabla ontosemiótica por FP11

Responder a los enunciados aplicando de Regla de Laplace	Hay probabilidad de obtener lo siguiente en el primer enunciado que se nos pide, de la siguiente manera: $P(A) = \frac{\text{Nro de casos favorables de A}}{\text{Nro de casos posibles}}$ $P(A) = \frac{6}{36}$ $P(A) = 0,1666..$	**Lenguaje**: verbal, simbólico, numérico, **Procedimiento**: Hallar la probabilidad aplicando la Regla de Laplace **Conceptos – definiciones**: espacio muestral, probabilidad, regla de Laplace **proposición:** apoyo de la tabla

Así mismo, en esta tarea, como en el estudio de Contreras (2011), los FP reconocieron como conceptos, elementos que describen el problema: color, dado.

Vemos que, el objeto matemático procedimiento es reconocido por siete FP, sobre todo en la unidad de práctica “Determinamos la probabilidad de A aplicando la regla de Laplace”. El que aparece mencionado con mayor frecuencia es “cálculo de la probabilidad con la regla de Laplace” (en todos los casos), seguido de “listar el espacio muestral” (tres participantes) “construir una tabla de doble entrada” (dos FP). Ningún FP indicó los cálculos aritméticos implicados como procedimientos. Los demás participantes, no señalaron ningún tipo de procedimiento o continúan identificando de manera errónea procedimiento con la intención o uso de las prácticas matemáticas. Por ejemplo, mencionan “identificar los datos que se nos da, con respecto a cómo escribir los datos obtenidos en la tabla de doble entrada y recta numérica" (FP5); "identificar cuanto será el espacio muestral" (FP1); "utilizar el método de la tabla para resolver" (FP7).

En el análisis de la situación B, ningún FP logró identificar de forma correcta todas las proposiciones y argumentos que se aprecian en el análisis a priori. De manera parcial, FP3 señala la regla de Laplace como proposición y FP4 menciona como proposición "La probabilidad de que al lanzar los dados resulten sumados 7 es 16,67". En otros casos, confunden las proposiciones con preguntas planteadas en el problema: "¿Cuántos elementos tiene el respectivo espacio muestral?"; "¿qué suma es más probable que ocurra?"; "la probabilidad de obtener dicha suma". Respecto al objeto argumento, FP5 incluye el "apoyo en la tabla" y FP4 asocia a la proposición previa indicada "Porque de 36 resultados posibles, solo 6 resultan una suma igual a 7".

Cinco participantes relacionaron esta tarea con el significado clásico, dos de ellos dijeron que corresponde al significado frecuencial y clásico a la vez y uno con el intuitivo. Como ya había ocurrido en el análisis de la situación A, ninguno logra justificar el porqué de la relación con dichos significados. Respecto a las dificultades dos mencionan seguir encontrando conflictiva la elaboración de la configuración ontosemiótica, pero en este caso, ninguno mencionó haber tenido dificultades para relacionar la tarea con los significados de la probabilidad (a pesar de que cuatro de ellos no respondieron a dicha consigna).

Resultados del análisis de la solución experta al ítem 3

El análisis ontosemiótico de la solución al ítem 3, facilitado por la formadora, fue realizado por 10 futuros profesores. Como resultado se observa que siete distinguen las secuencias de prácticas matemáticas en dos o tres unidades de análisis y los otros tres no las diferencian. Respecto a la identificación de los objetos, ocho futuros profesores identifican correctamente el lenguaje verbal y el simbólico-numérico en las distintas unidades elementales, pero presentan dificultades para reconocer el lenguaje tabular (siendo identificado así por un único FP), que la mitad de ellos señalan como lenguaje gráfico a la construcción de la tabla de doble entrada (ver Figura 5.15).

Nueve participantes reconocieron conceptos explícitos en esta tarea, como probabilidad, azar, casos favorables y casos posibles. Sin embargo, los conceptos de población, suceso, espacio muestral, frecuencia y tabla de doble entrada fueron muy poco mencionados. Al igual que en Contreras (2011), los participantes no hicieron referencia a la probabilidad compuesta. También, se mantiene la referencia a algunos elementos esenciales en la información dada por el problema (por ejemplo, “total de trabajadores” en lugar de casos posibles) o referencias a las prácticas (“ubicación de datos”, Figura 5.15).

Figura 5.15

Identificación de objetos por FP4

<table>
<tr>
<td>Elaboración del gráfico de doble entrada</td>
<td>Construcción de la tabla de doble entrada
<table>
<tr><th></th><th>Leen Revista</th><th>No leen Revista</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Hombres</td><td>30</td><td>70</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Mujeres</td><td>35</td><td>65</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Total</td><td>65</td><td>135</td><td>200</td></tr>
</table>
</td>
<td>Lenguaje: Grafico (tabla de doble entrada)
Procedimiento: Construir una tabla de doble entrada donde ubicamos los datos
Definición: tablas de doble entrada, ubicación de datos</td>
</tr>
</table>

El objeto matemático procedimiento es reconocido en distintas prácticas por siete FP. En concordancia con el estudio de Contreras (2011) y como ocurrió en las tareas anteriores, la mayoría hace referencia al modo de calcular la probabilidad con la “aplicación de la regla de Laplace”. En la unidad de prácticas “construimos una tabla de contingencia, ubicamos las variables y distribuimos las frecuencias absolutas dobles, marginales y total en cada celda” solo dos participantes mencionaron parcialmente como procedimientos “construir una tabla de doble entrada” y “trasladar datos”. En este caso, los participantes mencionan como procedimiento el cálculo aritmético, que no había sido mencionado en los análisis previos.

Persiste la dificultad de los participantes para reconocer los argumentos y proposiciones (Burgos et al., 2018; Contreras, 2011; Giacomone et al., 2018; Gómez-Torres, 2014). Solo tres respondieron de forma parcial, indicando correctamente alguna proposición en la solución dada, por ejemplo, “la probabilidad de que sea hombre y no lea la revista es 0,35” (FP1) y asignando argumento, aunque no pertinente, por ejemplo, “Argumento: apoyo gráfico” (FP1) refiriéndose a la información incluida en la tabla de doble entrada. Este es el único argumento indicado por los participantes (“apoyo de la tabla para comprobar los datos”, FP5) además del basado en la regla de Laplace (FP3). El resto de los participantes confunde la proposición con lo que pide el problema, indican como proposición lo referido a la tabla de doble entrada, o no dan respuestas.

Finalmente, mencionemos que tres FP relacionaron esta tarea con el significado frecuencial y dos con el significado clásico. Respecto a las dificultades solo FP13 mencionó tener dificultades con la identificación de objetos matemáticos y el resto no mencionó ninguna o mantuvo las iniciales (Sesión 1) con relación a la comprensión del problema. A pesar de la formación recibida, los participantes continúan encontrando dificultades para identificar las proposiciones y argumentos en las prácticas matemáticas desarrolladas en tareas de probabilidad, así como para diferenciar los significados intuitivo, clásico y frecuencial involucrados en dichas prácticas.

4. CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo, hemos descrito el diseño, la implementación y los resultados de una experiencia formativa con futuros profesores de matemáticas peruanos orientada a fomentar la competencia de análisis didáctico de materiales curriculares en el tema de la probabilidad. Distinguir los significados e identificar los objetos intervinientes en las prácticas matemáticas es un reto para los futuros profesores. Sin embargo, es una competencia que les permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos necesarios de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes.

Los resultados de la exploración inicial mostraron, al igual que en investigaciones previas (Contreras, 2011; Gómez-Torres, 2014; Mohamed, 2011; Vásquez y Alsina, 2015) un conocimiento común deficiente en probabilidad en los futuros profesores. En sus respuestas se encuentran sesgos de equiprobabilidad (Lecoutre, 1992); enumeración incorrecta del espacio muestral; uso inadecuado de esquemas de recuento (diagrama de árbol) para calcular el número de casos favorables y posibles; confusión de la probabilidad condicional con la compuesta (Contreras, 2011; Estrada y Díaz, 2007), además de errores de cálculo.

Además de las limitaciones que supone para el progreso de la competencia de análisis didáctico un conocimiento matemático deficiente, nos encontramos con que los futuros profesores que participaban en la experiencia formativa no tenían clara la naturaleza de los objetos matemáticos y sus significados. Aun así, creemos que la formación recibida, la puesta en común y las discusiones de las respuestas dadas en cada clase, ayudaron mejorar a los futuros profesores a distinguir y secuenciar las unidades de prácticas matemáticas elementales, comenzar a reconocer los conceptos y lenguajes y reconocer de forma parcial los distintos tipos de significados pragmáticos de la probabilidad puestos en juego en diversas tareas planteadas. En el caso de los procedimientos, estos con frecuencia se confunden con las mismas prácticas matemáticas o su intencionalidad y no distinguen argumentos de proposiciones, que a veces aparece en forma interrogativa refiriendo a los enunciados del problema (Burgos y Godino, 2021; Burgos et al., 2018).

Los resultados de la experiencia nos llevan a ser conscientes del reto que supone este tipo de actividades tanto para los futuros profesores como para los formadores. No obstante, el reconocimiento de los significados, la descripción de las prácticas y la identificación de los objetos es un elemento clave para capacitar a los profesores en la implementación de procesos de estudio de las matemáticas que promuevan la competencia matemática de los estudiantes.

En nuevas experiencias es preciso en primer lugar, reforzar el conocimiento matemático sobre el contenido involucrado, en nuestro caso la probabilidad, así como dedicar más espacio a la reflexión en torno a una mayor variedad de situaciones-problemas que permitan lograr un nivel adecuado de la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas.

CAPÍTULO 6.

ANÁLISIS DIDÁCTICO POR FUTUROS PROFESORES DE UN PROGRAMA CURRICULAR SOBRE PROBABILIDAD

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2024). Análisis didáctico curricular: una experiencia con futuros profesores. Educação & Realidade. (En prensa).

1. INTRODUCCIÓN

La formación de profesores de matemáticas enfatiza la importancia de desarrollar habilidades para describir, explicar y valorar de forma profesional los procesos de enseñanza y aprendizaje (Breda et al., 2017; Giacomone et al., 2018; Pino-Fan et al., 2015). Puesto que es esencial promover un enfoque crítico y reflexivo sobre el uso efectivo de materiales curriculares (Braga y Belver, 2016), Shawer (2017) sugiere fomentar la capacitación en desarrollo del currículo, incluyendo la gestión de recursos como programas curriculares y guías didácticas, entre otros. Los profesores deben interpretar información en materiales curriculares y realizar adaptaciones según las necesidades del contexto (Taylor, 2013; Thompson, 2014; Yang y Liu, 2019). En este capítulo se describe una experiencia formativa con futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria peruanos, centrada en el análisis didáctico de un programa curricular sobre probabilidad, en el que se incluyen aspectos cognitivos, sociales, culturales y axiológicos de la enseñanza.

El análisis didáctico se entiende en el EOS como "[…] el estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular – o de aspectos parciales del mismo – con unas herramientas teóricas y metodológicas específicas" (Godino et al., 2006, p. 4). Supone, por tanto, el análisis de los significados mediante la identificación de prácticas, el análisis ontosemiótico o reconocimiento de los objetos implicados en estas, y la valoración de la idoneidad didáctica del proceso instruccional previsto o planificado.

2. METODOLOGÍA Y CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

El enfoque de investigación adoptado es interpretativo de tipo exploratorio. Se desarrolla en un contexto real de clase, basado en la planificación, implementación y análisis retrospectivo de una intervención (Godino et al., 2014). Las transcripciones de las grabaciones de clase, así como los protocolos de respuesta de los participantes se examinan por medio del análisis de contenido (Cohen et al., 2011).

2.1. Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La experiencia formativa se llevó a cabo en la Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Altiplano (Perú), con 14 futuros profesores (FP) del Programa de Matemática, Física, Computación e Informática que cursaban Estadística Descriptiva en el cuarto semestre de 2021. Estos fueron parte de los FP que participaron en la intervención descrita en el capítulo previo. Así, la experiencia incluyó actividades teórico-prácticas y la puesta en común, utilizando *Google Meet* y *Classroom* para sesiones sincrónicas y asincrónicas y se desarrolló después de la acción formativa descrita en dicho capítulo.

Se realizaron cuatro sesiones sincrónicas virtuales de dos horas cada una. Las dos primeras abordaron el análisis de significados y análisis ontosemiótico, y las dos últimas se centraron en el análisis de idoneidad didáctica de la normativa curricular.

Sesión 1: Desarrollo de la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico.

Se expusieron los significados pragmáticos de la probabilidad y la red de objetos matemáticos característicos. A continuación, los FP analizaron el programa curricular (PC) (MINEDU, 2017) para el bloque de gestión de datos e incertidumbre. El PC se divide en 11 unidades de análisis: NC6 (nivel de competencia esperado al final del ciclo VI), DG1.1-DG1.5 (desempeños de primer grado) y DG2.1-DG2.5 (desempeños de segundo grado). La tarea en esta sesión consistió en identificar los objetos matemáticos y relacionarlos con los significados de probabilidad que emergen en NC6. La sesión incluye una puesta en común y se propone como trabajo asíncrono el análisis de DG1.1.

Sesión 2: Puesta en práctica.

Los FP compartieron y confrontaron su análisis de DG1.1. Continuaron analizando de forma individual DG1.2, DG1.3 y DG1.4, y luego discutieron los resultados. Se les asignó como tarea asíncrona de evaluación individual analizar las unidades de análisis relativas al segundo grado sobre probabilidad.

Sesión 3: Introducción de la herramienta de análisis de idoneidad didáctica.

Se presentó la idoneidad didáctica y su sistema de componentes e indicadores empíricos generales como medio de reflexión y rúbrica para analizar procesos de estudio en la práctica docente.

Sesión 4: Aplicación de la herramienta de idoneidad didáctica.

Los FP aplicaron los indicadores de idoneidad al PC utilizando la guía de Cotrado et al. (2022), examinando las unidades de análisis y evaluando si los indicadores de idoneidad se satisfacían siempre, a veces o nunca.

Se utilizaron grabaciones de sesiones, anotaciones de la formadora y respuestas escritas a tareas específicas como instrumentos de recogida de datos.

2.2. Análisis a priori del Programa Curricular

Los autores llevaron a cabo el análisis didáctico del programa curricular (PC) como base para examinar las producciones de los participantes. El análisis detallado se muestra en el capítulo 3 de esta memoria.

Inicialmente, analizaron los significados y objetos matemáticos involucrados en las unidades de análisis NC6, DG1.1 a DG1.5 y DG2.1 a DG2.5 del PC. En el análisis de NC6, se determinó que los significados de la probabilidad no se identifican claramente mediante los objetos asociados a cada uno de ellos (Batanero, 2005), de manera que las situaciones pueden relacionarse tanto con el enfoque clásico como frecuencial, o incluso con aspectos intuitivos (valoración cualitativa, predicciones). Se espera que los estudiantes utilicen registros lingüísticos verbales y simbólico-numéricos (representación fraccionaria, decimal y enteros). De manera específica, aparecen involucrados los conceptos: evento o situación aleatoria, probabilidad, espacio muestral, suceso, suceso seguro, suceso probable y suceso imposible. Se identificaron procedimientos como “enumeración de sucesos elementales”, “relacionar el valor de la probabilidad con suceso seguro, probable o imposible” y “predecir ocurrencia de eventos”. También se encontraron proposiciones como “el suceso seguro siempre ocurre” y “la probabilidad de un suceso se asocia a un número entre 0 y 1”. Para justificar las proposiciones en NC6, se espera que el estudiante emplee argumentos que respalden la ocurrencia de eventos y la asignación de valores entre 0 y 1 a sucesos seguros, probables e imposibles.

En la Tabla 6.1 se ejemplifica el análisis experto de las unidades de análisis de primer grado en relación con los objetos matemáticos observados en el PC. En cuanto a los significados de la probabilidad, se observó que en las unidades de análisis DG1.1, DG1.4, DG2.1 y DG2.4, se mencionan términos y expresiones referentes a los enfoques clásico y frecuencial, como el uso de la regla de Laplace y el cálculo de frecuencias o frecuencia relativa. Por otro lado, DG1.2, DG1.3, DG1.5, DG2.2, DG2.3 y DG2.5 no establecen claramente un enfoque específico, lo que podría sugerir orientación hacia los enfoques clásico, frecuencial o incluso intuitivo. Respecto al enfoque frecuencial, se incluyen procedimientos estadísticos, pero no de experimentación y simulación. El enfoque intuitivo se identifica mediante valoraciones cualitativas de probabilidad.

Tabla 6.1

Análisis a priori de los objetos matemáticos implicados en las unidades de análisis de primer grado

Objetos matemáticos	Unidades de análisis				
	DG1.1	DG1.2	DG1.3	DG1.4	DG1.5
Situaciones-problema					
Reconocer las condiciones que definen una situación aleatoria	x				
Expresar el valor (decimal o porcentajes) de la probabilidad como más o menos probable	x	x			
Determinar la probabilidad de sucesos con la regla de Laplace o cálculo de su frecuencia relativa	x			x	
Interpretar información de diversos textos con valores o descripciones de situaciones aleatorias			x		
Plantear afirmaciones o conclusiones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos					x
Lenguajes					
Verbal	x	x	x	x	x
Simbólico – numérico	x	x		x	x
Gráfico		x	x		
Tabular		x	x		
Conceptos					
Situación aleatoria	x	x	x	x	
Sucesos, sucesos simples	x	x		x	x
Suceso más o menos probable	x	x			
Probabilidad	x			x	x
Frecuencia, frecuencia relativa	x			x	
Decimales, porcentajes	x			x	
Gráfico de barras, gráfico circular			x		
Procedimientos					
Distinción de las condiciones de una situación aleatoria	x				
Comparación de la probabilidad expresada en decimales o porcentajes	x				
Aplicación de la regla de Laplace	x			x	
Representación simbólica o gráfica					
Lectura de tablas, gráficos y textos con situaciones aleatorias			x		
Aplicación de diversas representaciones para expresar el valor de la probabilidad.		x			
Cálculo de la frecuencia relativa y porcentaje				x	
Revisar procedimientos				x	
Extraer conclusiones y corregir errores					x
Proposiciones					
Regla de Laplace	x			x	
La probabilidad de un suceso es un valor calculable	x	x			
La frecuencia relativa de un suceso varía entre 0 y 1				x	
Argumentos					
Justificar las condiciones para que haya aleatoriedad y qué suceso es más o menos probable que otro	x	x			
Plantear afirmaciones y extraer conclusiones					x
Reconocer errores en sus justificaciones					x

Fuente: elaborado por los autores.

Tras analizar los significados y objetos matemáticos, los investigadores evaluaron de forma independiente la idoneidad del PC, siguiendo criterios e indicadores de idoneidad didáctica. Este análisis experto servirá como referencia para interpretar las valoraciones de los futuros profesores (FP). Al grado de cumplimiento de un indicador, nunca, a veces y siempre, se les asigna 0, 1 y 2 puntos, respectivamente.

Tabla 6.2

Valoración e identificación de indicadores según los componentes de idoneidad epistémica

Indicadores según componentes	Grado de cumplimiento	Unidades de análisis identificados en el programa curricular
	Situación-problema	
I1. Propone el uso y planteamiento de situaciones-problemas que muestran y relacionan diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica).	A veces	– Toda actividad matemática tiene como escenario la resolución de problemas planteados a partir de situaciones, las cuales se conciben como acontecimientos significativos que se dan en diversos contextos (p. 148) – NC6, DG1.1, DG1.2, DG1.3, DG1.4 y DG1.5, DG2.1, DG2.2, DG2.3, DG2.4 y DG2.5.
I2. Enfatiza el planteamiento de situaciones donde el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias (problematización).	Nunca	– El PC no especifica en ninguna parte del documento sobre este indicador.
	Lenguajes	
I3. Promueve el uso de diferentes registros lingüísticos y representaciones específicas de la probabilidad como son las expresiones verbales, simbólico-numéricas, tabulares y gráficas.	Siempre	– Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas: representar el comportamiento de un conjunto de datos, seleccionando tablas o gráficos estadísticos (p. 170). – Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre […] sobre el valor de la probabilidad (p. 172).
I4. Nivel lingüístico adecuado al alumnado que se dirige.	Siempre	

Fuente: elaborado por los autores

La Tabla 6.2 ilustra cómo se reflejan los diferentes indicadores y en qué grado, en relación con los componentes situación-problema y lenguajes de la faceta epistémica, ejemplificando el análisis esperado por parte de los FP.

Idoneidad epistémica. El PC presenta distintos tipos de situaciones-problema sin precisar su relación con los significados de probabilidad, llevando a una valoración "a veces". No se menciona la problematización de situaciones donde el estudiante pueda experimentar o simular experiencias aleatorias, lo que resulta en una valoración "nunca". En cuanto a lenguajes, el PC promueve registros adecuados para el nivel educativo, con una valoración "siempre". Faltan conceptos, proposiciones y procedimientos clave en primer y segundo grado, lo que podría generar sesgos en el aprendizaje (Vásquez y Alsina, 2017). No se clarifican relaciones entre los significados de probabilidad mediante objetos matemáticos asimilables (Batanero, 2005).

Idoneidad cognitiva. El PC presenta expresiones generales sobre el tratamiento progresivo de contenidos, pero no aborda completamente los diversos significados de la probabilidad (Batanero, 2005). El currículo se centra en el significado clásico, con poca consideración al frecuencial e intuitivo, y no menciona sesgos de razonamiento comunes (Lecoutre, 1992).

Idoneidad afectiva. La valoración de cumplimiento en relación con las necesidades e intereses de los estudiantes es "siempre", ya que el PC indica de forma clara: "[…] que el estudiante analice datos sobre un tema de interés o estudio o de situaciones aleatorias, que le permitan tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida" (MINEDU, 2017, p. 273). Si bien el currículo no muestra evidencias específicas sobre emociones, actitudes y creencias de los estudiantes hacia las situaciones aleatorias, sí se registra de manera general para toda el área de la matemática que "Las emociones, actitudes y creencias actúan como fuerzas impulsadoras del aprendizaje" (MINEDU, 2017, p. 148); por lo tanto, su valoración de cumplimiento es "nunca".

Idoneidad interaccional. Todos los indicadores de esta dimensión se observan de forma parcial, porque el PC no proporciona orientaciones específicas de interacción entre docente-estudiante o promueve orientaciones muy genéricas que fomenten interacción comunicativa entre estudiantes, como se observa en la siguiente expresión: “Brindar espacios a los estudiantes para el diálogo, el debate, la discusión y la toma de decisiones, en relación con la forma de actuar de ellos u otras personas frente a diversas situaciones” (MINEDU, 2017, p. 25). Asimismo, la autonomía es promovida mediante la competencia transversal “Gestiona su aprendizaje de manera autónoma” (MINEDU, 2017, p. 29), la cual corresponde a todas las áreas.

Idoneidad mediacional. El uso de recursos materiales manipulativos e informáticos no se explicita directamente para la probabilidad en el currículo; aunque, mediante la expresión “[…] usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos” (MINEDU, 2017, p. 170), se puede inferir la orientación del uso de recursos que permitirán viabilizar el cálculo de medidas probabilísticas. Respecto al uso adecuado del espacio y recursos del aula, el PC menciona de forma genérica que “La organización de los espacios educativos, el uso adecuado y pertinente de materiales y recursos educativos, así como el rol docente, brindan entornos e interacciones que permiten tener un clima favorable para el aprendizaje” (MINEDU, 2017, p. 54). No se observan indicios en el PC que supongan la gestión de un horario o tiempo apropiado para tratar la probabilidad.

Idoneidad ecológica. Las investigaciones y directrices internacionales señalan que los significados de la probabilidad deben tratarse de forma progresiva en los currículos escolares (Batanero, 2005; Beltrán-Pellicer et al., 2018; Vásquez y Alsina, 2017). Sin embargo, esto solo se cumple parcialmente en el PC. No se observan expresiones que promuevan la innovación. Las dimensiones socio-profesionales, educación en valores y conexiones interdisciplinares se presentan de forma muy genérica. Por ejemplo, en cuanto a la formación en valores, el PC generaliza que

> […] los enfoques transversales son la concreción observable de los valores y actitudes que se espera que los maestros, estudiantes, […] lleguen a demostrar en la dinámica diaria de la institución educativa, y que se extienda a los distintos espacios personales y sociales en que se desenvuelven (MINEDU, 2017, p. 20).

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección, examinamos la identificación de significados y objetos matemáticos por los FP y su éxito al evaluar la idoneidad didáctica en el currículo utilizando la guía de indicadores específicos incluida en el capítulo 3 (Cotrado et al., 2022). También analizamos la relación entre la pertinencia del análisis ontosemiótico y la valoración de cumplimiento de la idoneidad didáctica del PC.

3.1. Desarrollo de la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico

Para valorar el grado de desarrollo alcanzado en la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico comenzamos por examinar las dificultades encontradas en la tarea inicial (pre-formación).

3.1.1 Exploración inicial sobre significados y objetos matemáticos

La tarea inicial buscaba determinar las concepciones iniciales de los FP sobre práctica y objeto matemático, tomando NC6 como unidad de análisis. Los FP identificaron correctamente la presencia de lenguaje verbal y simbólico-numérico y conceptos como el de probabilidad y espacio muestral, pero tuvieron dificultades con las situaciones-problema, procedimientos (sólo un FP indicó que podría ser un procedimiento la asignación de 0 o 1 como probabilidad), proposiciones y argumentos, así como en reconocer los significados de probabilidad involucrados en NC6. En relación con los significados de la probabilidad, cuatro indicaron el significado frecuencial, basándose en la aparición de tablas estadísticas o predicciones. Dos FP relacionaron el texto con el significado intuitivo, mientras que otros dos consideraron el clásico sin justificarlo. Además, FP12 sugirió que el significado podría ser frecuencial o clásico, dependiendo del espacio muestral. Estas limitaciones podrían deberse a que los marcos normativos prescriben acciones estudiantiles, lo que requiere interpretar descripciones en términos de objetos matemáticos involucrados en las prácticas. Este hallazgo orientó la reflexión posterior.

3.1.2 Avances en la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico

En la segunda sesión, los FP analizaron las unidades de primer grado (DG1.1 a DG1.4), mostrando avances en la identificación de objetos matemáticos. La adecuación del análisis se puntuó de la siguiente manera: 0 (sin respuesta o todos incorrectos), 1 (al menos un objeto correcto, pero menos de la mitad), 2 (al menos la mitad de los objetos correctos, pero no todos) y 3 (todos los objetos correctos). La Tabla 6.3 resume la frecuencia de los niveles de adecuación exhibidos por los FP al identificar objetos matemáticos en cada unidad de análisis. Se observó una ligera mejora en comparación con la primera sesión.

En el análisis inicial de DG1.1, solo cinco de los 14 FP participaron de forma activa y únicamente dos identificaron al menos una situación-problema correcta (reconocer las condiciones que definen una situación aleatoria) o la mitad de las situaciones problemas correctos. Las mayores dificultades se centraron en la identificación de procedimientos, proposiciones y argumentos. Por ejemplo, solo dos FP reconocieron la aplicación de la regla de Laplace como procedimiento. Los FP no reconocieron que la probabilidad es un valor calculable y confundieron la regla de Laplace como concepto en lugar de proposición o procedimiento.

En el análisis de DG1.2 once de los 14 FP participaron activamente, pero persistieron las dificultades en la precisión de las situaciones-problema (a veces descripciones o intencionalidad de prácticas matemáticas, por ejemplo “calcula la probabilidad de situaciones”) y confundieron procedimientos con proposiciones (por ejemplo, se considera que “determinar el valor de la probabilidad” es una proposición). También tuvieron dificultades para reconocer el lenguaje gráfico y tabular. Durante el análisis de DG1.3 y DG1.4, hubo leves avances en la identificación de las situaciones, procedimientos y proposiciones, y empezaron a indicarse las justificaciones como argumentos.

Tabla 6.3

Adecuación de la identificación de objetos matemáticos en el análisis llevado a cabo por los FP en las diferentes unidades de primer grado

Valoración del análisis al identificar objetos	Unidades de análisis			
	DG1.1	DG1.2	DG1.3	DG1.4
Situaciones-problema				
0 puntos	12	14	12	11
1 punto	1	0	0	0
2 puntos	1	0	0	0
3 puntos	0	0	2	3
Lenguajes				
0 puntos	12	2	1	1
1 punto	0	3	1	2
2 puntos	1	9	11	2
3 puntos	1	0	1	10
Conceptos				
0 puntos	10	2	2	1
1 punto	3	0	8	0
2 puntos	1	12	4	13
3 puntos	0	0	0	0
Procedimientos				
0 puntos	12	13	10	2
1 punto	1	1	4	6
2 puntos	1	0	0	6
3 puntos	0	0	0	0
Proposiciones				
0 puntos	13	14	14	2
1 punto	1	0	0	12
2 puntos	0	0	0	0
3 puntos	0	0	0	0

Fuente: elaborado por los autores.

Después de identificar los objetos matemáticos, los FP debían vincular cada unidad de análisis con los significados de la probabilidad subyacentes. Tres FP relacionaron DG1.1 y DG1.4 con el significado clásico basándose en la presenciade la regla de Laplace y con el significado frecuencial por contener el término de la frecuencia relativa. Otros atribuyeron al significado intuitivo por el uso de expresiones como más o menos probable, poco probable o muy probable. Las unidades DG1.2 y DG1.3 se relacionaron con el significado clásico, frecuencial e intuitivo, pero ningún FP logró justificar sus respuestas.

En general, los FP expresaron sus inseguridades y limitaciones para identificar objetos (fundamentalmente con proposiciones y argumentos) y significados. Esta dificultad puede deberse por un lado a la falta de formación y por otro a que en el PC no se explicitan las entidades matemáticas, sino que se prescriben las acciones que el estudiante debe realizar, lo que supone la necesidad de interpretar las prácticas y objetos emergentes de dichas actividades. De igual forma, en algunas unidades de análisis la norma no explicita expresiones que hacen referencia a los significados de probabilidad que deben abordarse.

3.1.3 Resultados de la tarea de evaluación

A lo largo de la implementación del taller, se observó un progreso en la capacidad de análisis ontosemiótico de los FP. Las unidades de análisis de segundo grado (DG2.1 al DG2.5) se utilizaron como instrumentos de evaluación final después de las sesiones formativas. La Tabla 7.4 recoge la frecuencia de los niveles de calidad exhibidos por los FP al identificar objetos matemáticos en cada unidad de análisis de segundo grado.

En esta actividad, la mayoría de los FP identificó al menos una situación-problema correcta en las unidades de análisis. Sin embargo, pocos FP reconocieron proposiciones. De hecho, a pesar de reflexionar sobre la regla de Laplace como propiedad, los FP continuaron identificándola como un concepto. En su mayoría los procedimientos se categorizaron como situaciones-problemas (por ejemplo, cálculo de la probabilidad usando regla de Laplace, cálculo de frecuencias relativas, comparación de la frecuencia de sucesos, lectura de tablas o gráficos de histogramas). Respecto al objeto argumento, solo dos FP mencionaron de forma parcial la justificación de los resultados en DG 2.4 (por ejemplo, FP7 considera presencia de argumentos en "justifica usando la información obtenida, y sus conocimientos estadísticos y probabilísticos") pero ninguno pudo reconocerlo adecuadamente.

En todas las unidades de análisis, los significados de la probabilidad se relacionaron con el significado intuitivo, clásico y frecuencial. Sin embargo, en ningún caso se justificó por qué correspondían con dichos significados de la probabilidad, excepto FP6 y FP11, quienes mencionaron que DG2.5 se relacionaba con el significado frecuencial al contener el término de frecuencia relativa.

Tabla 6.4

Frecuencia de la calidad de la identificación de objetos matemáticos en el análisis llevado a cabo por los FP en las diferentes unidades de segundo grado

Calidad del análisis al identificar objetos	Unidades de análisis				
	DG2.1	DG2.2	DG2.3	DG2.4	DG2.5
Situaciones-problema					
0 puntos	1	14	12	5	9
1 punto	8	0	2	1	0
2 puntos	5	0	0	1	0
3 puntos	0	0	0	7	5
Lenguajes					
0 puntos	2	1	1	1	2
1 punto	0	2	0	0	1
2 puntos	0	11	10	2	1
3 puntos	12	0	3	11	10
Conceptos					
0 puntos	1	2	2	1	4
1 punto	2	2	0	2	4
2 puntos	11	5	1	9	0
3 puntos	0	5	11	2	6
Procedimientos					
0 puntos	7	14	6	4	14
1 punto	6	0	0	0	0
2 puntos	1	0	0	3	0
3 puntos	0	0	8	7	0
Proposiciones					
0 puntos	1	14	14	3	14
1 punto	11	0	0	0	0
2 puntos	2	0	0	0	0
3 puntos	0	0	0	11	0

Fuente: elaborado por los autores.

3.2. Análisis de la idoneidad didáctica del programa curricular por los futuros profesores

En esta sección, presentamos los resultados del análisis de la idoneidad didáctica de la normativa curricular realizado por diez FP, utilizando el instrumento descrito en el capítulo 3 (Cotrado et al.,2022). Las Tablas 6.5 a 6.10 resumen las frecuencias de las valoraciones otorgadas por los FP al cumplimiento de los indicadores de idoneidad en cada una de las facetas.

Tabla 6.5

Valoración por los FP de los indicadores de idoneidad epistémica en el PC

Indicadores según componentes	Valoración			
	Siempre	A veces	Nunca	No responde
Situación-problema				
I1. Propone el uso y planteamiento de situaciones-problemas que muestran y relacionan diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica).	9	**1**	0	0
I2. Enfatiza el planteamiento de situaciones donde el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias (problematización).	6	1	**3**	0
Lenguajes				
I3. Promueve el uso de diferentes registros lingüísticos y representaciones específicas de la probabilidad como son las expresiones verbales, simbólico-numéricas, tabulares y gráficas.	**8**	0	0	2
I4. Nivel lingüístico adecuado al alumnado que se dirige.	**2**	4	1	3
Conceptos				
I5. Incluye los conceptos esenciales: experimento aleatorio y determinista, espacio muestral, suceso (simple y compuesto, seguro e imposible), casos favorables y posibles, frecuencia, frecuencia relativa, convergencia, simulación, experimentación, variabilidad, equiprobabilidad y probabilidad.	6	**2**	2	0
Proposiciones				
I6. Propone emplear proposiciones y propiedades como la probabilidad del suceso imposible, suceso seguro y del complementario, estabilidad de frecuencias relativas c, regla de Laplace y equiprobabilidad.	5	**5**	0	0
Procedimientos				
I7. Incluye procedimientos de comparación cualitativa de probabilidades; construcción de espacio muestral, aplicación de la regla de Laplace, realizar predicciones a partir de observaciones o datos, estimar probabilidades, calcular y representar frecuencias, usar e interpretar diagramas, tablas y gráficos, simular experimentos aleatorios.	7	**3**	0	1
Argumentos				
I8. Reconoce la importancia de la argumentación como medio para demostrar o justificar las proposiciones y procedimientos de solución en el que puede o no manifestarse un razonamiento inductivo o deductivo.	5	**3**	0	2
Relaciones				
I9. Presenta los objetos matemáticos (problemas, definiciones, etc.) relacionados y conectados entre sí.	**5**	1	2	2
I10. Reconoce y presenta la articulación de los diversos significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico) como un todo organizado.	5	0	**3**	2

Fuente: elaborado por los autores.

Se destacan en negrita aquellas que coinciden con la valoración de los investigadores para verificar su corrección.

Respecto de la idoneidad epistémica, la Tabla 6.5 muestra gran disparidad con la evaluación experta en aspectos relacionados con situaciones-problema, conceptos, procedimientos y argumentos. La mayoría de los FP tuvo dificultades para identificar situaciones-problema correctas en el análisis ontosemiótico, sin embargo, nueve de ellos consideraron a través del cumplimiento de I1 la presencia de múltiples situaciones en el PC asociadas a los diferentes significados de la probabilidad. Es posible que los FP hayan malinterpretado dicho indicador o se centraron en expresiones generales. Por ejemplo, FP3 indicó que el PC promueve el desarrollo de competencias para resolver problemas de gestión de datos e incertidumbre. Aunque el PC enfatiza situaciones-problema, carece de precisión en relación con los significados de la probabilidad que deben integrarse en la enseñanza y el aprendizaje (Batanero, 2005; Beltrán-Pellicer et al., 2018). El planteamiento de situaciones-problema debe incluir experimentación y simulación (Beltrán-Pellicer et al., 2018). La norma presenta indicios generales, lo que pudo confundir a los FP. En cuanto a los registros lingüísticos, más de la mitad de los FP identificaron los distintos tipos de lenguaje en el PC, pero no supieron establecer si eran adecuados al nivel correspondiente (I4).

La mayoría de los FP identificó al menos dos o más conceptos correctos en el PC, pero asignaron valoraciones inadecuadas al I5, obviando conceptos esenciales para la enseñanza de la probabilidad (Batanero, 2005). Del mismo modo, pasaron por alto procedimientos básicos relacionados con el significado frecuencial (experimentación, estimación y simulación). La mitad de los FP valoró adecuadamente I6 pero no justificó su valoración, aunque algunos identificaron alguna proposición correcta en el PC. En la normativa, hay argumentos implícitos, pero no se propone el uso de tipos de argumentos (inductivo o deductivo). Esto pudo llevar a siete FP asignaran una valoración poco pertinente al I8. En cuanto al componente relaciones, la mitad de los FP consideró que el I10 siempre se cumple, a pesar de no haber identificado claramente los significados de la probabilidad en el PC.

La Tabla 6.6 resume la valoración de los FP en el PC respecto a los indicadores de la faceta cognitiva.

Tabla 6.6

Valoración por los FP de los indicadores de idoneidad cognitiva en el PC

Indicadores según componentes	Valoración			
	Siempre	A veces	Nunca	No responde
Conocimientos previos				
I11. Sugiere trabajar de manera progresiva los contenidos según los significados de la probabilidad.	7	**1**	2	0
I12. Propone contenidos alcanzables y con un grado de dificultad manejable en los diversos significados de la probabilidad.	0	**4**	4	2
Conflictos cognitivos				
I13. Sugiere plantear situaciones para prevenir y superar los errores y sesgos de razonamiento probabilístico: la representatividad y equiprobabilidad.	3	5	**1**	1
Diferencias individuales				
I14. Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes.	3	**2**	3	2
Evaluación				
I15. Brinda orientaciones sobre la evaluación, sus procedimientos y aplicación de las diversas técnicas e instrumentos.	6	**3**	1	0
I16. Propone difundir los resultados de la evaluación para tomar decisiones.	3	2	**4**	1

Fuente: elaborado por los autores.

De manera general, se observa un mayor desajuste con la evaluación experta en los indicadores I11, I14, I15 e I16.

En cuanto a los conocimientos previos, la mayoría de los FP consideró que el I11 siempre se cumple. Es probable que no tuvieran en cuenta expresiones asociadas al tratamiento progresivo de los contenidos según los significados de la probabilidad. Aunque justificaron que el PC incluye los diferentes niveles de desarrollo de la competencia, no observaron que dichas expresiones solo plantean elementos lingüísticos y conceptos esperados al finalizar cada ciclo escolar. El PC no refleja expresiones referidas a conflictos cognitivos, pero la mayoría de los

FP asignó sin justificarlo valoraciones de cumplimiento parcial o total al indicador I13 asociado. De igual forma, I14 tuvo valoraciones no adecuadas y sin justificar, posiblemente porque los FP no pudieron distinguir los procesos metacognitivos según las diferencias individuales. No obstante, FP2 justificó el cumplimiento parcial del indicador, argumentando que según el PC "los estudiantes aprenden por sí mismos cuando son capaces de autorregular su proceso de aprendizaje y de reflexionar sobre sus aciertos, errores, avances y dificultades, que surgieron durante el proceso de resolución de problemas". En cuanto a la evaluación, seis FP valoraron que el I15 siempre se cumple, aunque este se observa de forma parcial. Posiblemente, bastó para los FP que el PC proponga algunos instrumentos de evaluación genéricos. Además, la mitad de los FP indicó que el PC hace referencia a los resultados de aprendizajes de manera parcial o siempre, aunque este indicador no aparece en el currículo.

Tabla 6.7

Valoración por los FP de los indicadores de idoneidad afectiva en el PC

Indicadores según componentes	Valoración			
	Siempre	A veces	Nunca	No responde
Intereses y necesidades				
I17. Propone plantear situaciones de probabilidad a partir de las necesidades e intereses de los estudiantes.	**6**	0	3	1
Emociones				
I18. Propone planificar momentos en los que los estudiantes manifiesten emociones ante las situaciones aleatorias propuestas.	3	2	**4**	1
I19. Propone plantear situaciones aleatorias contextualizadas y elementos que pueden resultar motivadores.	4	5	**0**	1
I20. Promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a plantear o abordar situaciones de probabilidad o participar en experimentos aleatorias y simulaciones.	3	3	**4**	0
Actitudes				
I21. Incentiva la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud positiva de la probabilidad.	5	2	**2**	1
Creencias				
I22. Orienta el proceso de enseñanza-aprendizaje de la probabilidad de forma gradual a partir de las creencias de los estudiantes.	4	3	**0**	3

Valores				
I23. Tiene en cuenta y destaca el valor y la utilidad del azar y la probabilidad en la vida diaria de los estudiantes.	5	4	**0**	1

Fuente: elaborado por los autores.

Como se observa en la Tabla 6.7., en el plano afectivo, las valoraciones de los FP en componentes como emociones, actitudes, creencias y valores discrepan de las de los investigadores. Probablemente, la valoración parcial o total del grado de cumplimiento de dichos indicadores se debió a la identificación de expresiones poco precisas en el PC al respecto, como rasgos de los mismos. Por ejemplo, FP2 valoró los indicadores I19, I20, I21 con “a veces” justificando que “Las emociones, actitudes y creencias actúan como fuerzas impulsadoras del aprendizaje” (MINEDU, 2017, p. 148).

En la Tabla 6.8, la discrepancia en las valoraciones podría deberse a que el PC no proporciona orientaciones específicas para la interacción docente-estudiante o entre estudiantes y el desarrollo de la autonomía (I26, I27 y I28), lo que condujo a asignar valoraciones distintas a las de los investigadores.

Tabla 6.8

Valoración por los FP de los indicadores de idoneidad interaccional en el PC

Indicadores según componentes	Valoración			
	Siempre	A veces	Nunca	No responde
Interacción docente-discente				
I24. Propone capacidades comunicativas adecuadas al lenguaje de la probabilidad.	3	**4**	1	2
I25. Promueve que el docente utilice los diversos tipos de diálogo para guiar la interacción comunicativa en el aula.	6	**2**	2	0
Interacción entre estudiantes				
I26. Propone momentos que favorecen el dialogo y comunicación entre estudiantes.	5	**3**	2	0
I27. Propone la inclusión en el grupo y evita la exclusión.	5	3	**1**	1
Autonomía				
I28. Propone el trabajo autónomo de los estudiantes en la resolución de situaciones aleatorias	8	**2**	0	0

Fuente: elaborado por los autores.

La Tabla 6.9 presenta las valoraciones de los indicadores de idoneidad mediacional que los FP asignaron a al evaluar el PC. Las expresiones generales relacionadas con recursos materiales, condiciones del aula y gestión del tiempo en el PC pueden haber dificultado a la mayoría de los FP asignar valoraciones adecuadas del grado de cumplimiento.

Tabla 6.9

Valoración por los FP de los indicadores de idoneidad mediacional en el PC

Indicadores según componentes	Valoración			
	Siempre	A veces	Nunca	No responde
Recursos materiales				
I29. Promueve el uso de materiales manipulativos (dados, monedas, cartas, bolas), audiovisuales y TIC (softwares, applets y dispositivos aleatorios) para potenciar y comprender los significados de la probabilidad.	8	**2**	0	0
N.º de estudiantes, horario y condiciones de aula				
I30. Propone emplear o priorizar un horario apropiado para impartir temas de probabilidad.	3	1	**5**	1
I31. Establece lineamientos concretos para el uso adecuado del espacio, equipamiento y recursos del aula.	4	**3**	2	1
Tiempo				
I32. Propone gestionar el tiempo a favor del logro de los objetivos propuestos para enseñar la probabilidad.	3	3	**3**	1

Fuente: elaborado por los autores.

En la faceta ecológica, la Tabla 6.10 muestra que cuatro FP consideran que I33 se cumple “siempre”, lo que sugiere que posiblemente no realizaron un análisis previo del currículo en relación con la correspondencia con investigaciones y normativas internacionales.

En esta faceta los indicadores en los que se observa mayor disparidad con la valoración experta son los de apertura a la innovación, educación en valores y conexiones intra e interdisciplinares. Por ejemplo, en el PC no se observan expresiones relacionadas con la innovación y la práctica reflexiva, pero la mayoría de los FP asignó valoraciones de cumplimiento “siempre” o “a veces” a dicho indicador. Aunque el PC no explicita la relación intra e interdisciplinar, se observan referencias a la estadística que llevó a que la mayoría de los FP valoraran como “siempre” el cumplimiento de I37, cuando en realidad es de forma parcial.

Tabla 6.10

Valoración por los FP de los indicadores de idoneidad ecológica en el PC

Indicadores según componentes	Valoración			
	Siempre	A veces	Nunca	No responde
Adaptación al currículo				
I33. Los significados, su implementación y evaluación de la probabilidad se corresponden con las directrices curriculares internacionales e investigaciones	4	**4**	1	1
Apertura a la innovación				
I34. Promueve implementar actividades de innovación basadas en la investigación y la práctica reflexiva.	4	2	**2**	2
Adaptación socio- profesional				
I35. Los contenidos de la probabilidad contemplados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes	4	**4**	2	0
Educación en valores				
I36. Incita la formación en valores democráticos, inclusivos y con iguales oportunidades para realizar cuestionamientos (pensamiento crítico).	4	**5**	1	0
Conexiones intra e interdisciplinares				
I37. Los contenidos de la probabilidad se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.	5	**1**	3	1

Fuente: elaborado por los autores.

3.3. Relación entre el análisis Ontosemiótico e Idoneidad Didáctica

En este apartado, analizamos la relación entre el grado de corrección en la identificación de objetos matemáticos en el PC y el éxito logrado en el análisis de la idoneidad didáctica. Para observar dicha relación, la Tabla 6.11 recoge la frecuencia de las diferentes valoraciones de idoneidad didáctica que efectuaron los FP. Además, muestra la pertinencia de la identificación de objetos, según las puntuaciones cuantitativas 0 (sin respuesta o todos incorrectos), 1 (al menos un objeto correcto, pero menos de la mitad), 2 (al menos la mitad de los objetos correctos, pero no todos) y 3 (todos los objetos correctos).

En general, todos los FP reconocieron al menos un objeto matemático correcto en todas las unidades de análisis del PC. Sin embargo, la mayoría no tuvo éxito en la valoración de la idoneidad del PC en las facetas epistémica, afectiva, (valoradas correctamente sólo por dos FP en cada caso), interaccional (sólo correctamente valorada por un FP) y mediacional (correctamente evaluada por tres FP) siendo mejor en las facetas cognitiva y ecológica, valoradas correctamente por seis y cinco FP, respectivamente.

Tabla 6.11

Frecuencia de los FP según la puntuación de identificación de objetos y pertinencia de valoración de idoneidad didáctica

Valoración de idoneidad		Pertinencia de identificación de objetos matemáticos																			
		Situación Probl.				Lenguajes				Conceptos				Procedimientos				Proposiciones			
		0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Epistémica																					
Alta	2	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0	1	1	0	2	0	0	0	2	0	0
Media	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
Baja	7	2	5	0	0	0	1	5	1	0	4	2	1	0	7	0	0	2	5	0	0
Cognitiva																					
Alta	6	0	6	0	0	0	0	3	3	0	3	2	1	0	6	0	0	0	6	0	0
Media	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
Baja	3	2	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	3	0	0	1	2	0	0
Afectiva																					
Alta	2	0	2	0	0	0	0	1	1	0	0	2	0	0	2	0	0	1	1	0	0
Media	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
Baja	7	2	5	0	0	0	1	4	2	0	4	2	1	0	7	0	0	1	6	0	0
Interaccional																					
Alta	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
Media	3	0	3	0	0	0	0	2	1	0	2	1	0	0	3	0	0	0	3	0	0
Baja	6	2	4	0	0	0	1	2	3	0	1	3	2	0	6	0	0	2	4	0	0
Mediacional																					
Alta	3	0	3	0	0	0	1	2	0	0	0	2	1	0	3	0	0	1	2	0	0
Media	3	0	3	0	0	0	0	2	1	0	2	1	0	0	3	0	0	0	3	0	0
Baja	4	2	2	0	0	0	1	2	1	0	1	1	1	0	4	0	0	1	3	0	0
Ecológica																					
Alta	5	0	5	0	0	0	0	3	2	0	2	2	1	0	5	0	0	1	4	0	0
Media	2	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	2	0	0	0	2	0	0
Baja	3	1	2	0	0	0	1	1	1	0	2	1	0	0	3	0	0	1	2	0	0

Fuente: elaborado por los autores.

Los lenguajes y conceptos fueron los objetos mejor referidos, pero solo los indicadores asociados al componente de lenguajes fueron valorados pertinentemente en la faceta epistémica. En cambio, la valoración de los indicadores relacionados con el componente de conceptos fue poco pertinente tanto en la faceta epistémica (donde los FP no reconocieron conceptos esenciales carentes en el PC que son esenciales para una enseñanza adecuada la probabilidad) como en la cognitiva (en el componente de los conocimientos previos, no lograron observar adecuadamente que el PC proponía de forma parcial el tratamiento progresivo y la dificultad manejable de los contenidos).

Las situaciones-problema, procedimientos y proposiciones presentaron mayores dificultades de identificación, y la valoración de los indicadores relacionados también fue poco pertinente. Así, la escasa identificación de situaciones-problema influyó en la valoración adecuada de los indicadores relativos a la faceta afectiva, como es el caso de la propuesta de situaciones-problema a partir de las necesidades e intereses de los estudiantes y la contextualización de estas con elementos motivadores.

4. CONCLUSIONES

En este capítulo, hemos descrito el diseño, la implementación y los resultados de una experiencia formativa con futuros profesores de matemáticas peruanos, orientada a fomentar la competencia de análisis didáctico de programas curriculares (marcos normativos) en el tema de la probabilidad. Si bien estos recursos curriculares condicionan la planificación de los procesos instruccionales sobre un determinado contenido, su análisis es una tarea compleja que requiere también de conocimientos didáctico-matemáticos sobre el contenido específico, su enseñanza y su aprendizaje (Remillard y Kim, 2017).

La distinción de los significados e identificación de los objetos matemáticos que intervienen en estos marcos normativos es un desafío para los futuros profesores y una competencia indispensable que le permitirá comprender y reflexionar de manera sistemática y detallada sobre la pertinencia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad considerando el contexto educativo. Cada significado de la probabilidad comporta sistemas de prácticas distintas y por tanto diferentes retos y dificultades en su instrucción. Identificar apropiadamente los tipos de objetos, garantiza comprender cuál es su funcionalidad en estas prácticas. Sin embargo, como hemos visto en nuestra investigación, los participantes mostraron limitaciones para identificar dichos objetos (especialmente las proposiciones).

En general, la identificación inadecuada de objetos matemáticos en el PC influyó en la poca pertinencia de la valoración de la idoneidad didáctica del PC. Este hecho se refleja principalmente en la faceta epistémica, donde solo dos FP tuvieron éxito en su valoración y donde se observó que los FP obviaban conceptos fundamentales para una enseñanza adecuada de la probabilidad, o procedimientos decisivos en relación al significado frecuencial. La dificultad para valorar pertinentemente indicadores de otras facetas en el plano afectivo, interaccional o mediacional puede venir motivada tanto por la dificultad para interpretar convenientemente los indicadores, como por la falta de precisión en el programa. Por tanto, se infiere la necesidad de que los programas curriculares presenten orientaciones más específicas a los profesores e incorporen los resultados de las investigaciones en el área de la educación matemática para que la norma ayude a una mejora de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en nuestro caso. Pero también la necesidad de formar a los futuros profesores para que sean desarrolladores del currículo que valoren de forma reflexiva, fundada y crítica las directrices.

A pesar de la disparidad en las valoraciones entre investigadores y FP, estos últimos pudieron identificar las principales carencias y deficiencias en el PC, como había sido observado en experiencias previas en el contexto de la proporcionalidad (Castillo y Burgos, 2022). Por tanto, analizar y evaluar las normativas curriculares antes de su uso es una buena estrategia para generar espacios de análisis crítico, reflexión y desarrollo profesional.

El análisis ontosemiótico y de la idoneidad didáctica de la normativa curricular sobre probabilidad ha sido difícil para muchos futuros profesores, posiblemente debido a la falta de formación específica y el poco tiempo para familiarizarse con los indicadores de idoneidad. Se recomienda especificar más aquellos indicadores difíciles de valorar e incluir formación previa sobre facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica en futuras intervenciones formativas.

CAPÍTULO 7.
ANÁLISIS DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE CUADERNOS DE TRABAJO DE PROBABILIDAD POR FUTUROS PROFESORES

El contenido de este capítulo aparece publicado en:

Cotrado, B., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Castro, A. (2023). Análisis didáctico de materiales curriculares por futuros profesores. *Cadernos de Pesquisa*, 53, e10031.

1. INTRODUCCIÓN

La importancia de los materiales curriculares como apoyo de la labor del profesor ha motivado que, en las últimas décadas, el análisis de dichos recursos haya recibido especial atención desde la comunidad de investigación en educación matemática (Burgos et al., 2020; Thompson, 2014). Los materiales curriculares son "herramientas" (Stein et al., 2007) o "artefactos" (Brown, 2009) que apoyan la planificación y la práctica del profesor. Dentro de este "conjunto específico de recursos, diseñados para apoyar un programa concreto de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes a lo largo del tiempo" (Remillard y Kim, 2020, p. 3), se encuentran los programas curriculares, libros de texto, cuadernos de trabajo para los estudiantes, y las guías didácticas, diseñadas para el profesorado.

Ante el diseño de un proceso instruccional propuesto en un libro de texto o en los cuadernos de trabajo para el estudiante, el profesor debe ser capaz de analizar, establecer críticas y realizar adaptaciones que solventen sus limitaciones considerando las particularidades del contenido (Thompson, 2014; Yang y Liu, 2019). Valorar los materiales curriculares según su capacidad para ayudar a los estudiantes a lograr los objetivos de aprendizaje establecidos en las directrices curriculares, supone un análisis profundo. Dicho análisis debe permitir identificar elementos potencialmente conflictivos que, durante su implementación, requieran de una modificación de la trayectoria didáctica planificada.

Como hemos mencionado, investigaciones previas desarrolladas en el marco del EOS se ha preocupado por desarrollar experiencias formativas con futuros profesores para desarrollar su competencia para el análisis crítico y reflexivo sobre los procesos instruccionales Batanero et al., 2015; Batanero et al., 2021; Breda et al., 2017; Burgos et al., 2018; Burgos et al., 2019; Burgos y Godino, 2019; Contreras et al., 2013; Díaz et al., 2012; Giacomone et al., 2018; Godino et al., 2017; Gómez et al., 2016; Parraguez et al., 2017; Pino-Fan, 2018; Pochulu et al., 2016; Rivas, 2014; Seckel y Font, 2020). La competencia de análisis e intervención didáctica permitirá al profesor utilizar los materiales curriculares, valorando su pertinencia y la necesidad de adaptaciones para superar sus limitaciones atendiendo al contexto educativo concreto (Yang y Liu, 2019).

A pesar de que los cuadernos de trabajo para el estudiante son considerados como recursos curriculares de práctica, evaluación y de seguimiento (Hoadley y Galant, 2016), gran parte de la literatura sobre materiales curriculares se ha focalizado en los libros de texto, pasando por alto los cuadernos de trabajo de los estudiantes.

Por este motivo, en este capítulo se describe el diseño e implementación de una acción formativa con futuros profesores de matemática de Educación Secundaria, dirigida a desarrollar su competencia de análisis de la idoneidad didáctica de los cuadernos de trabajo sobre probabilidad, empleando la guía descrita en el capítulo 4 de esta memoria (Cotrado et al., 2022). En ese sentido, se plantean las siguientes cuestiones:

- ¿Qué observaciones realizan los futuros profesores al valorar los indicadores de idoneidad didáctica? ¿Qué dificultades encuentran?
- ¿Cuál es el nivel de pertinencia de sus valoraciones para cada una de las idoneidades parciales y en general para la idoneidad didáctica del material?

- ¿Tienen en cuenta la valoración de la idoneidad didáctica para decidir cómo usar el cuaderno de trabajo? ¿En qué manera?

2. METODOLOGÍA

Al igual que en el capítulo previo, en la experiencia formativa seguimos el enfoque metodológico de la ingeniería didáctica propuesto por el EOS (Godino et al., 2014). El estudio es de tipo cualitativo (Strauss y Corbin, 1990) y empleamos la técnica de análisis de contenido (Cohen et al., 2011) para examinar los protocolos de respuesta de los futuros profesores.

2.1. Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La experiencia formativa se desarrolla con 38 futuros profesores (FP en adelante) de la Especialidad de Matemática, Física, Computación e Informática en la Universidad Nacional del Altiplano (Perú) durante el año 2022, que cursaban la asignatura de Estadística Descriptiva en la modalidad virtual. En este formato se contemplan acciones sincrónicas a través de videoconferencia (*Google Meet*) y asincrónicas para facilitar material de estudio y subir trabajos encargados mediante la plataforma *Google Classroom*. La implementación del taller comprende tres sesiones sincrónicas virtuales de dos horas cada una: intervinieron 38 FP en la primera sesión; mientras que a la segunda y tercera asistieron 35 FP, de los que solo 30 llegaron a completar la tarea de evaluación planteada.

La formadora encargada de la gestión del taller (autora de esta memoria) cumple también el rol de investigadora. Como instrumentos de recogida de información, se dispone de las anotaciones de la formadora y de los protocolos de respuestas escritas de los participantes.

2.2. Diseño e implementación de las sesiones

Cada una de las sesiones síncronas se complementa con actividades asincrónicas en las que el FP debe trabajar sobre lecturas guiadas y desarrollar individualmente sus informes. En todo momento puede plantear las consultas que precise a la formadora.

2.2.1 Sesión 1. Exploración inicial e introducción a una herramienta para la reflexión

Los participantes reflexionan y comparten sus opiniones sobre las posibles características ideales de un material curricular y responden a la interrogante ¿cómo debería ser un buen material curricular de matemática? A continuación, la formadora presenta la ficha 9 dedicada a la probabilidad en el cuaderno de trabajo de primer grado de Educación Secundaria (MINEDU, 2019a) y les pregunta:

- ¿Podrías decir si la ficha 9 del cuaderno de trabajo de primer grado es un buen material curricular? ¿Lo utilizarías en un aula de matemáticas? ¿Por qué?

Los FP, de forma individual, reflexionan, describen y explican las razones por las que creen que deben utilizar o no dicha ficha en un aula. El objetivo es que los FP hagan un análisis a partir de sus significados personales sin ninguna pauta que pueda influir en su valoración. Seguidamente, comparten sus respuestas en clase.

Después de la puesta en común, la formadora introduce la noción de la idoneidad didáctica y su estructura en criterios como normas emanadas del consenso en la comunidad educativa e investigadora. A continuación, se presentan de manera resumida los componentes e indicadores para las distintas facetas, haciéndolos más precisos en caso de la probabilidad. La actividad asíncrona correspondiente consiste en la lectura de un documento sobre los criterios e indicadores de idoneidad didáctica de materiales curriculares en probabilidad elaborada por los autores a partir de Cotrado et al. (2022).

2.2.1 Sesión 2 y 3. Puesta en práctica de la guía de indicadores de idoneidad didáctica

La Sesión 2 comienza con la reflexión sobre la lectura propuesta en la sesión anterior. A continuación, se identifican tres configuraciones didácticas tomadas como unidades de análisis en la ficha 9: Aplicamos (UA1), Comprobación (UA2) y Evaluación (UA3). Los FP deben responder de manera individual a las consignas:

1. Teniendo en cuenta las unidades de análisis en que se descompone la ficha 9 del cuaderno de trabajo, identifica y justifica si se cumplen los indicadores de cada idoneidad parcial descritos en la lectura previamente facilitada.
2. Elabora un juicio razonado y valorativo sobre la idoneidad didáctica de la ficha 9 en cada una de las facetas.
3. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso de la ficha 9 para incrementar su idoneidad didáctica? Describe los cambios o mejoras que podrías introducir para cada vacío o conflicto que identificaste en la sección.

Dada la complejidad de la tarea, se dedican dos sesiones para que los FP completen las tres consignas. Además, para apoyar y supervisar las producciones de los participantes, se les pide que compartan su archivo de trabajo con la formadora.

3. RESULTADOS

El estudio de las valoraciones de los FP de la idoneidad didáctica de la ficha 9 nos permite observar las dificultades de comprensión de las consignas, las posibilidades ofrecidas por cada tarea y finalmente los logros alcanzados por los participantes.

3.1. Exploración inicial e introducción a una herramienta para la reflexión

La intención de la primera tarea es explorar las concepciones previas de los FP sobre qué es un material curricular. Los participantes de esta sesión lo conciben como cualquier elemento, herramienta o recurso utilizado por los profesores. Pusieron como ejemplos de materiales curriculares: libros, videos, software, pizarra, páginas web, simuladores y enciclopedias, pero no así los cuadernos de trabajo, considerados como material curricular según Remillard y Kim (2020).

En este momento, se pregunta *¿cómo debería ser un buen material curricular de matemáticas?* Como resultado se obtienen las opiniones de 19 FP de 38 que se resumen en la Tabla 7.1.

Tabla 7.1

Opiniones de los FP sobre características de un buen material curricular según facetas

Facetas	Descripción	Frecuencia
Epistémica	Tareas significativas concretas, definiciones breves	4
Afectiva	Atractivo, bien ilustrado, llama la atención del alumno, motivador	9
Interaccional	Claro y preciso, didáctico	5
	Promueve la interacción entre docente y estudiante	1
Cognitiva	Acorde a la edad e interés del estudiante, conecta con la vida real del alumno	5
Mediacional	Fácil uso o manejo	5
Ecológica	Finalidad o propósito definido	3
Otras	General, no precisa característica	4

Fuente: elaborado por los autores.

Tras esta reflexión general, los FP debían valorar inicialmente la ficha 9 (sin instrucción sobre la idoneidad didáctica) y justificar si les parecía un buen material, si la utilizarían y por qué en clase de matemáticas. En este caso, 15 FP valoraron a la ficha como adecuada o buena, dos FP como medianamente buena y solo FP19 consideró que la ficha no era adecuada y no la utilizaría en el aula. En las valoraciones de estos 18 FP se reconocen rasgos incipientes de indicadores, aunque poco precisos y basados en características superficiales del material curricular. Estos aparecen resumidos según facetas en la Tabla 7.2.

Desde el punto de vista epistémico, siete FP priorizan la contextualización de las situaciones-problema (“El enunciado-problema se relaciona con el contexto del estudiante, y esto hace que pueda aplicar los conocimientos aprendidos en cualquier situación de la vida cotidiana”, FP20) y otros siete FP destacan la pertinencia de las representaciones gráficas (“utiliza gráficos del área de matemática como por ejemplo el gráfico circular o de pastel”, FP21). En menor medida, señalan que la ficha incluye breves definiciones de probabilidad (“Presenta algunas definiciones de probabilidad para que el estudiante entienda las diferencias de cada uno”, FP24), el uso correcto de la Regla de Laplace (“Presenta el uso correcto de la fórmula del tema”, FP33), el detalle procedimental (“Los pasos del desarrollo de las soluciones de cada problema están muy bien explicados para la mejor comprensión del estudiante”, FP20) y la posibilidad de argumentar ("los estudiantes puedan justificar los resultados del problema", FP26).

Tabla 7.2

Rasgos incipientes de indicadores de idoneidad didáctica por facetas

Facetas	Indicios de indicadores	Frecuencia
Epistémica	Problemas contextualizados y de la vida cotidiana	7
	Propone varios ejercicios	2
	Hace uso de representaciones gráficas	7
	Presenta algunas definiciones de probabilidad	3
	Explica las fórmulas y utiliza la regla de Laplace	3
	Los pasos están muy bien explicados	2
	Permite que los estudiantes justifiquen sus respuestas	1
Afectiva	Contiene imágenes y colores atractivos	12
	Motiva al estudiante con ejercicios sencillos	7
	Incentiva un papel activo del estudiante	2
Interaccional	Muestra preguntas abiertas, ejemplos y soluciones para guiar los problemas posteriores	6
	Los problemas son claros y están bien ordenados	6
	Muestra interacción entre docente y estudiante	2
Cognitiva	Los enunciados son comprensibles y para diferentes niveles de aprendizaje	4
	Tiene un apartado de evaluación	2
	Los problemas contienen interrogantes que generan conflicto cognitivo	1
	Usa el error como fuente de aprendizaje	1
Mediacional	Presenta espacios para resolver los problemas	6
Ecológica	Es un material acorde con el MINEDU	2

Fuente: elaborado por los autores.

La mayoría de los FP consideran "buena" la ficha porque su diseño es llamativo ("es atractivo para el estudiante, tiene imágenes y colores", FP22). Otros siete FP observan que las situaciones-problemas fomentan la motivación y la actitud positiva ("tiene problemas fáciles de responder y eso lo ayuda al estudiante a motivarse a responder los ejercicios", FP31; "esta ficha tiene varios ejercicios con pocas letras de manera que no genera aburrimiento", FP21). Estos son aspectos referidos a la dimensión afectiva.

Desde lo interaccional consideran que la ficha muestra ejemplos y soluciones que ayudan al estudiante ("Presenta la resolución de algunos ejercicios para guiar la solución de situaciones similares", FP24); presenta orden y secuencia ("Contiene un buen orden, para una mejor comprensión y para que el estudiante no se complique al momento de leer", FP20) y promueve interacción entre profesor y estudiante.

En menor medida recomiendan el uso de la ficha por motivos de tipo cognitivo: contiene problemas que responden a diferentes grados de complejidad ("El enunciado que nos plantean es comprensible y adecuado para el nivel de aprendizaje de los estudiantes", FP20) o contempla la evaluación ("tiene un apartado de autoevaluación", FP25).

Por otro lado, las escasas opiniones que mostraban rasgos relacionados a la faceta mediacional se referían al espacio para trabajar la resolución de problemas ("tiene espacios para desarrollar problemas", FP27) y en lo ecológico se mencionaba el currículo ("la ficha presenta secuencias didácticas que el ministerio propone", FP24). FP19, que no consideró adecuada la lección, se basó en que "propone muchos ejercicios verbales y aburridos porque los estudiantes ya no están como para solucionar esos problemas".

3.2. Aplicación de los indicadores de idoneidad didáctica para valorar materiales curriculares

La segunda sesión se centró en los criterios e indicadores de idoneidad didáctica de materiales curriculares en probabilidad, tomando como punto de partida de reflexión los rasgos que ellos mismos mencionaron en la sesión anterior. Para ello, los FP realizan el análisis del material curricular por medio de la aplicación de la guía de idoneidad didáctica (Cotrado et al., 2022). Se entregó la actividad 30 FP. En esta sección mostramos el resultado del análisis realizado por los 30 FP que entregaron la tarea.

3.2.1 Faceta epistémica

Los FP lograron identificar y valorar los indicadores de idoneidad epistémica de forma específica, lo que supuso un gran avance respecto de las descripciones genéricas de la sesión anterior. También se observó la particularización de los componentes en situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos, relaciones y conflictos epistémicos para analizar la ficha. Los 30 FP reconocieron 14 situaciones-problemas en todo el material curricular y las relacionaron en su mayoría con el significado clásico de la probabilidad. Sin embargo, no las justificaron en base a las condiciones de equiprobabilidad, tampoco de finitud del espacio muestral, aunque algunos mencionaron el contexto de juego de azar. La Tabla 7.3 resume los indicadores correctamente valorados y justificados por los FP.

Tabla 7.3

Indicadores de idoneidad epistémica correctamente identificados por los FP

Componentes	Valoración de indicadores	Frecuencia
Situación-problema	Ausencia de situaciones-problema que relacionan diferentes significados de la probabilidad	4
	Carece de situaciones de un contexto familiar al estudiante	2
	Faltan situaciones donde el estudiante puede generar, experimentar y simular problemas	9
Lenguajes	Utiliza diferentes registros y representaciones	19
	Los registros lingüísticos son adecuados al nivel educativo al que se dirigen	19
Conceptos	Los conceptos son relativos al nivel educativo de los estudiantes, pero no son claros	4
	Faltan situaciones donde el estudiante pueda generar o negociar definiciones	5
Procedimientos	Algunos pasos no están explicados y justificados	2
	Faltan situaciones en las que el estudiante pueda generar o negociar procedimientos	1
Proposiciones	Utiliza la regla de Laplace, las demás propiedades son insuficientes (no involucran suceso imposible y suceso seguro)	2
	No hay situaciones en las que el estudiante genere proposiciones	4
Argumentos	Hay pocos argumentos que justifiquen las proposiciones y procedimientos	1
Relaciones	Los significados de la probabilidad no se articulan	2
	Los objetos matemáticos se conectan entre sí	1
Conflictos epistémicos	Se presentan algunos errores o conflictos epistémicos	6
	Ausencia de definiciones (suceso probable, imposible)	5

Fuente: elaborado por los autores.

De los 22 FP que se refirieron a indicadores del componente situaciones-problemas, solo cuatro observaron correctamente la ausencia de tareas que relacionen los diferentes significados de la probabilidad. Por ejemplo:

> En las tres unidades de análisis solo se presentan problemas de tipo clásico. No hay problemas de significado frecuencial, a menos que en la UA3 el problema 3 presente un gráfico de sector circular que se puede relacionar con el significado frecuencial. (FP8).

En efecto, la ficha solo propone situaciones-problemas que priorizan el significado clásico frente a lo intuitivo y frecuencial, sin relacionarlos entre sí. Asimismo, la ausencia de situaciones de un contexto próximo al del estudiante en las que se discutan las diferencias entre experimento aleatorio y determinista, fue observado correctamente por dos FP ("las situaciones no necesariamente incluyen contextos reales del estudiante donde se pueda distinguir lo aleatorio de lo determinista", FP21). Otros nueve FP establecieron convenientemente que la ficha carece de situaciones donde el estudiante pueda generar, experimentar y simular problemas.

La mayoría de los FP (19) indicaron que la ficha utiliza diferentes lenguajes precisando lo verbal, simbólico-numérico (desigualdad, igualdad, enteros, decimales, fracciones, porcentajes y escala de probabilidad), gráfico (diagrama de árbol y circulares) y tabular (tabla de doble entrada), considerando su adecuación al nivel educativo al que se dirige el recurso. Sin embargo, no observaron el uso de diagramas de árbol y tabla de doble entrada, que no se contemplan en el programa curricular de primer grado de Educación Secundaria.

Respecto del componente conceptos, 23 FP identificaron su diversidad, vinculándolo a las diferentes situaciones-problemas. Entre los más citados se encuentran: probabilidad, sucesos, suceso simple, suceso compuesto, suceso seguro, probable e imposible, casos favorables y posibles, azar, espacio muestral. De ellos, cuatro refirieron correctamente que los conceptos se adecúan al nivel educativo correspondiente, aunque las nociones de experimento aleatorio simple y compuesto, así como suceso compuesto, no parecen reconocidas en el programa curricular. Además, los FP no lograron reconocer en la ficha la falta de referencias a situación determinista, simulación, ensayos y experimentación que deben ser contempladas en primer grado para garantizar una adecuada idoneidad epistémica.

En la UA2 se presentan tres situaciones resueltas donde se observa la variedad de procedimientos con la habitual prevalencia del significado clásico frente al frecuencial. Al respecto, 23 FP identificaron como procedimientos: listado de sucesos elementales, construcción del espacio muestral, distinción de casos favorables y posibles, cálculo de la probabilidad usando la regla de Laplace. Sin embargo, solo dos de ellos observaron correctamente que algunos procedimientos carecen de explicación y justificación. Ningún FP reflexionó sobre la ausencia de procedimientos importantes para una adecuada enseñanza de la probabilidad. Entre ellos, distinguir fenómenos aleatorios de los deterministas, comparar cualitativamente probabilidades o aquellos característicos del significado frecuencial, como realizar predicciones a partir de observaciones de experimentos o datos, estimar probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio y simular experimentos aleatorios.

La mayoría de FP presentó dificultades para identificar y valorar adecuadamente los indicadores en los componentes proposiciones y argumentos. Si bien 16 FP reconocieron la regla de Laplace, "el espacio muestral es finito", "la probabilidad del éxito seguro es 1" (o "la suma más probable es 7" en UA2) como proposiciones, ningún participante refirió la equiprobabilidad, ni echó en falta las propiedades del significado frecuencial o si lo hacían, era de manera imprecisa. Por otro lado, tres de ellos comentaron de forma incorrecta y sin justificación que la ficha contempla todas las proposiciones y propone situaciones donde el estudiante puede generar o negociar proposiciones.

En la ficha se observan pocos argumentos que justifiquen las proposiciones y procedimientos ("los procedimientos se explican y argumentan de una forma vaga", FP8) aunque estos se apoyan en diversos registros: lenguaje natural, numérico-simbólico, tabular y gráfico (diagrama de árbol). En este sentido, sólo cinco FP mencionaron que los argumentos se basan en tablas o gráficos (refiriéndose a la proposición de la UA2 "la suma más probable es 7") o la regla de Laplace ("Se basa en la aplicación de la regla de Laplace, también otros argumentos se basan en la definición de suceso elemental y compuesto, y en algunos casos no se justifica", FP8).

El indicador relativo al componente relaciones fue valorado por 19 FP. Sin embargo, solo dos identificaron de forma adecuada la falta de articulación entre los diferentes significados ("los diversos significados de la probabilidad no se articulan en las situaciones planteadas de la ficha", FP8), mientras que los demás dieron valoración positiva sin reflexión o de forma vaga.

Por fin, los FP debían valorar si el material curricular presenta conflictos epistémicos, es decir, ambigüedades o errores en las definiciones, procedimientos, proposiciones o enunciados de los problemas. Este fue el único indicador en el que los participantes plantearon alguna consulta a la formadora. De los 28 FP que reflexionaron sobre este indicador, tres identificaron la poca claridad de las definiciones (de suceso, suceso probable, seguro e imposible) y comentaron que la regla de Laplace no ha sido justificada.

Nueve FP reconocieron la ausencia de título en el diagrama circular de la situación-problema que corresponde a la UA3 (ver Figura 5.1 en el Capítulo 5). Por ejemplo, FP21 refiere "En el problema 3 de la UA3, se puede ver que el gráfico circular estadístico no tiene un título, lo cual es un error grave estadístico". Cinco FP observaron la confusión que puede ocasionar el uso de "caso", "resultado" y "suceso" de manera indistinta (ver Figura 7.1).

Figura 7.1

Situación introductoria en UA2

El espacio muestral (Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Por lo tanto, primero determinamos el espacio muestral (Ω), es decir, todos los posibles resultados que se dan al lanzar un dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El suceso es un subconjunto del espacio muestral formado por los resultados del experimento. Entonces, realizamos una lista de las posibilidades de cada suceso:

- Suceso A, que salga par: $A = \{2, 4, 6\}$
- Suceso B, que salga un número compuesto mayor que 4: $B = \{ 6 \}$
- Suceso C, que salga primo mayor que 5: $C = \{ \quad \}$
- Suceso D, que salga menor que 10: $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Luego, calculamos la probabilidad de cada suceso aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables al suceso A}}{\text{N.º de casos posibles}}$$

Fuente: MINEDU (2019a, p. 120).

Al respecto, FP24 reflexiona:

En la UA2, en el primer ejemplo, hasta cierto punto habla de sucesos, suceso A, suceso B, eso está permitido porque según el significado clásico es un concepto que se debería tener de sucesos, pero cuando aplica la regla de Laplace habla de número de casos favorables, ¿no sería ahí poner sucesos favorables? Este sería un conflicto porque no se diferencia qué es un caso y un suceso.

Figura 7.2

Conflicto con la multiplicación por 100%

El suceso A de que salga par es probable porque:

$P(A) = \frac{3}{6}$, entonces $P(A) = 0,5$

Para expresar la probabilidad en porcentajes, multiplicamos por 100 %.

$P(A) = 0,5 \times 100\ \%$, entonces $P(A) = 50\ \%$

Significa que tiene 3 (casos favorables) posibilidades de 6 (casos posibles), el 50 % de probabilidad de que salga un número par al lanzar un dado.

Fuente: MINEDU (2019a, p. 121).

También señalaron frecuentemente que se comete el error de multiplicar por 100 % cuando lo correcto es multiplicar por el número 100, el símbolo % se escribe al final para indicar que se expresa el porcentaje (ver Figura 7.2).

Por otro lado, ocho FP hicieron comentarios poco precisos o incomprensibles, así como otros ocho señalaron que en la ficha no encontraron errores ni ambigüedades (“desde mi punto de vista no encuentro errores ni ambigüedades en la ficha”, FP20).

3.2.2 Faceta cognitiva

En general los participantes no mostraron dudas en la interpretación de los indicadores que debían examinar en esta faceta. Solo FP23 consultó cómo debía valorar el grado de dificultad.

Tabla 7.4

Indicadores de idoneidad cognitiva correctamente identificados por los FP

Componentes	Valoración de indicadores	Frecuencia
Evaluación	La UA3 presenta situaciones de evaluación con distintos niveles de comprensión	16
	Faltan situaciones de autoevaluación	3
Diferencias individuales	Las situaciones responden a diferentes grados de dificultad	11
Conocimientos previos	Faltan situaciones introductorias que lleven a diferenciar experimentos aleatorios de deterministas	3
Conflictos cognitivos	En la UA2 se emplea el error como fuente de aprendizaje	2
	No se prevén los sesgos de equiprobabilidad	3

Fuente: elaborado por los autores.

Como se observa en la Tabla 7.4, la mayoría de los FP identificaron adecuadamente la presencia de situaciones de evaluación con distintos niveles de comprensión, pero no aprecian que dichas situaciones se refieren solamente a la aplicación de la regla de Laplace. También identificaron correctamente que las situaciones propuestas responden a diferentes grados de dificultad, así como que se incluyen situaciones de ampliación y refuerzo. Sin embargo, la valoración de los indicadores sobre conocimientos previos fue más limitada. Solo tres FP reconocieron pertinentemente que la ficha no presenta situaciones introductorias para diferenciar experimentos aleatorios de deterministas, ni situaciones donde se puede reconocer la convergencia de la frecuencia relativa bajo la repetición de un experimento. Por ejemplo, FP24 observa que la ficha: “No indica la definición de probabilidad ni a que se refiere, no presenta un ejemplo de situación determinista de forma explícita para que el estudiante pueda distinguir entre aleatorio y determinista”. Para los demás FP los conocimientos previos quedan contemplados al mostrar la definición de espacio muestral, suceso, casos favorables y posibles, o la regla de Laplace.

De igual forma, los FP tuvieron dificultades para reconocer los indicadores sobre conflictos cognitivos en la ficha. Solo dos participantes identificaron explícitamente que en la UA2 se propone una situación que emplea el error como fuente de reflexión (Figura 7.3) y otros tres FP indicaron que no se proponen situaciones para detectar el sesgo de equiprobabilidad.

Figura 7.3

El error como fuente de aprendizaje en UA2

Aprendemos a partir del error

Resolución

Los mellizos de la profesora podrán resultar:

- Dos hombres: (H; H)
- Dos mujeres: (M; M)
- Un hombre y una mujer: (H; M)
- Una mujer y un hombre: (M; H)

Por lo tanto, el espacio muestral es:

$$\Omega = \{(H; H); (M; M); (H; M); (M; H)\}$$

Se puede observar que hay cuatro posibilidades de que los mellizos de la profesora sean de distinto sexo.

Se puede corroborar aplicando la regla de Laplace, considerando que C representa el suceso de que los bebés sean de distinto sexo:

$$P(C) = \frac{\text{N.º de casos favorables a C}}{\text{N.º de casos posibles}}$$

$P(C) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$P(C) = 0{,}25 \times 100\ \%$

$P(C) = 25\ \%$

Respuesta: La probabilidad de que los mellizos sean de distinto sexo es $\frac{1}{4}$.

1. Revisa el procedimiento. En caso de que hubiera un error, ¿cuál sería su corrección?

Fuente: MINEDU (2019a, p. 124).

Ciertamente en la ficha no se prevén los errores y sesgos más comunes de razonamiento probabilístico, dado que las situaciones propuestas están orientadas a la aplicación de la regla de Laplace, incluso en situaciones donde los sucesos no son equiprobables. Algunos FP no lograron identificar ningún conflicto cognitivo, por ejemplo, FP13 señala “No encuentro ningún conflicto, porque toda la ficha se expresa de manera clara”. Además, 11 FP confundieron los conflictos cognitivos con los epistémicos.

3.2.3 Faceta afectiva

Los resultados en la valoración de esta faceta fueron bastante deficientes. En el componente emociones, si bien, como indicaron 12 FP, la ficha propone situaciones-problemas contextualizados que podrían motivar a los estudiantes y favorecer emociones positivas, estas situaciones no permiten valorar la utilidad real de la probabilidad en la vida cotidiana y socio profesional del estudiante. Al respecto, FP24 reflexiona: “No se da un valor significativo de la matemática, solo el uso de juegos poco comunes en las situaciones”.

Cinco FP consideran las cualidades de estética y precisión de las matemáticas en la ficha, y aunque no justifican su afirmación, posiblemente se refieran a las ilustraciones que acompañan a las situaciones (“En algunas situaciones si se presentan cualidades estéticas”, FP8). Nueve FP indican que la ficha ofrece oportunidades para la resolución creativa de problemas ("hay espacios donde el estudiante tiene que resolver los problemas según su criterio de análisis”, FP27). Sin embargo, la ausencia de situaciones de experimentación y simulación impide la flexibilidad para explorar ideas matemáticas en la resolución de problemas sobre probabilidad. Asimismo, no se considera de forma explícita las emociones, actitudes y creencias del alumnado ante la resolución de problemas. Solo FP4 pudo observar de forma parcial dichos indicadores y FP8 señaló que: “No se toma en cuenta para nada las creencias sobre la probabilidad o algo relacionado a este concepto”.

3.2.4 Faceta interaccional

El indicador del componente interacción entre estudiantes fue valorado correctamente únicamente por nueve FP que señalaron la ausencia de tareas que permitan trabajar en grupo y favorezca el diálogo. El resto de los FP no respondió o hicieron comentarios poco precisos.

Siete FP observaron que la ficha propone cuestiones y situaciones resueltas que permiten que el estudiante asuma la responsabilidad de estudio. Aunque la ficha facilita el trabajo autónomo del estudiante especialmente en las UA1 y UA2 por medio de estas actividades, hay escasas oportunidades de que los estudiantes por sí mismos investiguen sobre cuestiones propuestas.

En el componente interacción material curricular-estudiante, sólo cinco FP señalaron que en la ficha no se destacan algunos conceptos claves de la probabilidad y la presentación no es suficientemente clara. Aunque esto es especialmente importante en lo que se refiere a las condiciones de aplicación del significado clásico y el frecuencial, los participantes no lograron percibir esta carencia en el material, a pesar de disponer de la guía.

3.2.5 Faceta mediacional

En esta faceta diez FP identificaron correctamente que la ficha promueve suficientemente el espacio temporal, incluso dedica mayor extensión a las situaciones que presentan mayor dificultad de comprensión. Respecto a los recursos materiales, solo tres FP señalaron coherentemente que la ficha no prevé el uso de materiales manipulativos ni informáticos. En la ficha, las situaciones se describen verbalmente y es el estudiante quien debe imaginar la situación aleatoria sin indicaciones sobre el uso de recursos para la experimentación o simulación. Sin embargo, 17 FP consideraron erróneamente que el documento incentiva el uso de materiales manipulativos refiriéndose a las ilustraciones (urnas, dados, ruletas) y descripciones que presentan las situaciones. Por ejemplo, FP22 menciona: "En la ficha se muestra ruletas, monedas, dados, lo que incentiva al docente y estudiantes a ser utilizados".

3.2.6 Faceta ecológica

La mayoría de los FP no logra aplicar coherentemente los indicadores de los diversos componentes al material curricular. No obstante, diez de ellos reconocieron y afirmaron que el material curricular no muestra expresiones verbales discriminatorias, tres observaron la ausencia de conexión con otros contenidos de la matemática y dos afirman correctamente que no se incentiva la investigación o el uso de estrategias de innovación tecnológica por medio de las situaciones propuestas. Además, 11 FP reconocen (aunque de forma parcial y sin detalles) que los propósitos de la ficha se corresponden con las normativas curriculares. Aunque como mencionábamos los conceptos de experimento aleatorio simple y compuesto no están previstos en el programa curricular, pero se desarrollan en la ficha, sólo FP8 señaló cierto desajuste entre los significados de la probabilidad y la evaluación con el currículo ("Los significados, conceptos y evaluación planteadas en la ficha, no son suficientemente acordes con el currículo", FP8).

3.3. Juicios de valor y propuestas de gestión sobre el material curricular

Los FP debían tener en cuenta el análisis previo por medio de los componentes e indicadores de idoneidad didáctica para elaborar un juicio razonado sobre la pertinencia de la ficha en cada una de las facetas. Doce FP (de 30) no respondieron a esta consigna y otros siete lo hicieron de forma general, considerando la importancia de que el material cumpla con los indicadores de idoneidad didáctica, pero sin precisar cómo se observan en la ficha o si es igual en todas las facetas. Sólo tres de ellos muestran cierta tendencia a considerarla de alta idoneidad (En la faceta afectiva, si está desarrollada de manera muy presente al igual que las demás facetas", FP20). En la Tabla 7.5 se observan las frecuencias en la valoración de la idoneidad didáctica de los 11 FP que si elaboraron un juicio más preciso.

Tabla 7.5

Valoración de la idoneidad didáctica de la ficha de trabajo por los FP (n=11)

	Facetas					
Categorías	Epistémica	Cognitiva	Afectiva	Interaccional	Mediacional	Ecológica
Alta	6	6	9	4	7	8
Media	5	3	2	6	4	3
Baja	0	2	0	1	0	0

Fuente: elaborado por los autores.

El análisis realizado por el equipo investigador de la idoneidad a través de la aplicación de la guía nos llevó a considerar (en base al número de indicadores que cumplían de manera total, parcial o nula en cada faceta) la idoneidad como media en todas las facetas (tendencia a baja en lo interaccional y mediacional) salvo en la ecológica, considerada como baja. Cuando los FP valoran como alta la idoneidad en cada faceta, se basan en el cumplimiento total de los indicadores asociados. Al valorarla como media o baja (en escasas ocasiones) mencionan las carencias que encuentran en las distintas facetas en base a la parcialidad o nulo cumplimiento de ciertos indicadores. Así, en la faceta epistémica se basan en que la ficha omite o define de manera incompleta conceptos importantes de la probabilidad. Por ejemplo, FP5 menciona: “Debe hacer explícita la definición de casos favorables, no favorables y posibles de manera previa a la introducción de la regla de Laplace. Por ello en esta faceta se encuentra en la parte media de la idoneidad didáctica”.

También consideran la falta de representatividad (“[la idoneidad epistémica]”), que se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados o previstos, respecto de un significado de referencia; en este caso se presentó en media”, FP22). Los demás FP valoran la idoneidad epistémica de la ficha como adecuada o bien hacen comentarios poco precisos al respecto.

Las carencias en la faceta cognitiva se refieren fundamentalmente a que no se tienen en cuenta todos los conocimientos previos o que no se atienden las diferencias individuales. Por ejemplo, FP24 señala: “Cómo se mencionó anteriormente los indicadores a conocimientos previos, diferencias individuales, conflictos cognitivos y evaluación no van de acuerdo con lo que se debe de mostrar al material de idoneidad buena”.

Las carencias indicadas en la faceta afectiva tienen que ver con la falta de imágenes o ilustraciones más motivadoras para acompañar a las situaciones propuestas. En la faceta interaccional los FP echaron en falta situaciones-problemas que se deben plantear para resolver en grupo. Por otro lado, cinco FP valoran de forma positiva la ficha porque consideran que presenta de manera clara y bien organizada las situaciones problemas. Esta valoración no es adecuada pues, como hemos mencionado, la presentación de la ficha en referencia a los diferentes significados de la probabilidad y como se articulan no es suficientemente clara ni completa.

Las debilidades en el aspecto mediacional insistían en la falta de herramientas tecnológicas como medio para resolver o comprobar los resultados de los ejercicios. En el aspecto ecológico, se observan carencias en relación con las conexiones inter e intra disciplinares ("la idoneidad ecológica si cumple con las indicaciones, salvo con las conexiones intra e interdisciplinares", FP7).

Finalmente, los FP debían tomar decisiones sobre el uso de la ficha de trabajo y proponer cambios o mejoras para incrementar su idoneidad didáctica.

Tabla 7.6

Propuestas de mejora indicadas por los FP

Faceta	Descripción de mejora	Frecuencia
Epistémica	- Incluir explicación teórica completa de los conceptos - Abordar los diferentes significados de la probabilidad - Corregir los errores en los enunciados (títulos en los gráficos, eliminar imágenes que confunden) y cuidar el uso de símbolos, tablas, gráficos - Plantear situaciones con múltiples soluciones	11
Interaccional	- Proponer actividades para trabajar en grupo, fomentando el diálogo y la comunicación	5
Mediacional	- Incluir el uso de materiales y recursos físicos o tecnológicos	3
Afectiva	- Destacar la utilidad del contenido - Usar situaciones más próximas al estudiante, motivadoras - Fomentar la reflexión emocional del estudiante sobre las matemáticas	5
Cognitiva	- Considerar o advertir sobre los conocimientos previos requeridos. - Diversos métodos de solución. - Más ejemplos con mayor diversidad, grado de complejidad progresiva. - Emplear soluciones incorrectas para insistir en el error como fuente de aprendizaje. - Rúbrica de autoevaluación	9

Fuente: elaborado por los autores.

Como se observa en la Tabla 7.6, de los 30 FP, ocho no respondieron a esta consigna y cinco lo hicieron de forma no concluyente, indicando que es una ficha aplicable en el aula o que "se puede mejorar en muchos aspectos" (FP25), sin indicar en cuales. Estos FP no habían respondido a la valoración global de la lección o bien lo habían hecho de forma confusa. Los restantes 17 FP plantearon propuestas pertinentes de mejora, en las facetas epistémica, interaccional, cognitiva, afectiva y en menor medida mediacional.

4. CONCLUSIONES

Llevar a cabo un análisis crítico que oriente los modos de uso de materiales curriculares, como pueden ser los cuadernos de trabajo del estudiante, constituye una tarea profesional docente que puede resultar difícil y requiere una formación específica (Beyer y Davis, 2012; Godino et al., 2017). Así, desde la formación de profesores se debe atender al desarrollo de conocimientos y competencias que permitan que los profesores reflexionen críticamente sobre la gestión de los materiales curriculares de matemáticas, empleando criterios específicos que les ayuden a realizar con éxito esta tarea (Beyer y Davis, 2012).

Con este interés, en este capítulo hemos descrito la implementación y resultados de una acción formativa dirigida a desarrollar en futuros profesores peruanos de matemáticas su competencia para el análisis crítico de materiales curriculares en probabilidad. La reflexión a priori de los participantes nos permitió identificar sus conocimientos previos y creencias sobre lo que define un buen material y cómo lo identifican en uno en concreto. En este caso, las facetas que menos mencionan fueron la epistémica (el contenido matemático) y la ecológica (correspondencia con el entorno curricular, académico y social), destacando aspectos parciales de la faceta afectiva (que sea atractivo y motive a los alumnos). Al fijar la atención en la ficha de trabajo para su análisis, salvo uno de ellos que no la consideró adecuada, todos la valoraron como un material adecuado para usar en su aula. En estas valoraciones los aspectos que se destacaron fundamentalmente fueron de tipo epistémico y afectivo, seguidos del interaccional (las dos últimas no mencionadas en las características generales de un buen material, lo que sugiere que disponer de un ejemplo concreto les ayuda a concretar su reflexión).

Tras la formación, facilitar a los FP una guía con los indicadores de idoneidad didáctica para analizar la ficha de trabajo, perseguía dirigir su atención hacia aspectos fundamentales que condicionan los procesos instruccionales. Observamos que, incluso con este instrumento, los participantes tuvieron dificultades para valorar el grado de cumplimiento de indicadores en las diferentes facetas. Esto les llevó a omitir deficiencias importantes en la faceta epistémica (prevalencia del significado clásico frente al frecuencial, omisión de las condiciones de aplicabilidad de la regla de Laplace y las propiedades de la probabilidad, carencia y desarticulación de los diferentes significados de la probabilidad), cognitiva (falta de atención a los conocimientos previos y previsión de sesgos probabilísticos) interaccional (presentación confusa y deficiente del contenido), mediacional (ausencia de actividades para incorporar recursos materiales y tecnológicos) y ecológica (ausencia de conexión con otras disciplinas, contenidos no contemplados en el currículo). Solo la tercera parte de los participantes logró expresar un juicio razonado de la idoneidad didáctica, que fue considerada mayoritariamente alta en todas las facetas, salvo en la interaccional. En este caso, se observa que su discurso se apoya en el grado de cumplimiento de los indicadores y las carencias encontradas.

En la tercera consigna, son más de la mitad de los participantes los que plantean propuestas de mejora pertinentes, lo que supone que algunos de los FP que no respondieron o lo hicieron de forma no concluyente a la emisión del juicio de valor sobre la idoneidad didáctica, sí tuvieron en cuenta los indicadores para presentar propuestas de cambio en base a su grado de cumplimiento. Sin embargo, quedan importantes deficiencias en la ficha por corregir: ampliar el rango de problemas con tareas que conecten los diferentes significados de la probabilidad, experimentaciones y simulaciones; fomentar la experimentación y simulación de experimentos aleatorios, evitar el uso predominante de dispositivos equiprobables (datos, monedas) que lleve los estudiantes a extender la aplicación de la regla de Laplace a todas las situaciones probabilísticas, entre otras. Además, se observa que la faceta ecológica sigue ausente, cuando hay un desajuste entre lo contemplado en la ficha y las directrices curriculares.

No es suficiente ofrecer la oportunidad de reflexionar sobre la práctica docente; los profesores necesitan herramientas para dirigir su atención hacia elementos relevantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Seckel y Font, 2020; Sun y Van Es, 2015). Estas herramientas deben incorporarse a las actividades de formación inicial y continua, donde se puede observar a su vez, otras carencias en los conocimientos del futuro profesor. En nuestro caso, los resultados de la investigación nos llevan a plantear la necesidad de reforzar los conocimientos didáctico-matemáticos en probabilidad desde el punto de vista epistémico (prácticas, objetos y procesos característicos de los diferentes significados de la probabilidad y como se relacionan), cognitivo (factores que influyen en la complejidad de las situaciones de probabilidad y sesgos), así como en las demás facetas, donde se observa una idea confusa de los aspectos afectivos, lo que supone el trabajo autónomo del estudiante, o la importancia de adoptar el currículo en los materiales para garantizar una progresión de aprendizaje sin saltos.

CAPITULO 8.
CONCLUSIONES

En esta tesis se han abordado tres problemas de investigación interdependientes. En primer lugar, la elaboración de instrumentos que orienten el análisis sistemático y la valoración de materiales curriculares (programas curriculares y cuadernos de trabajo del estudiante) de Educación Secundaria, destinadas a la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad. En segundo lugar, el uso de dichas herramientas para analizar la adecuación de los materiales curriculares peruanos de Educación Secundaria, en el contenido de la probabilidad. En tercer lugar, el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas con futuros profesores de Educación Secundaria peruanos para desarrollar su competencia en el análisis crítico y sistemático de dichos materiales curriculares por medio de los instrumentos de análisis construidos de manera previa.

El marco teórico y metodológico seleccionado para fundamentar, orientar y planificar nuestra investigación ha sido el EOS (Godino et al., 2007). El constructo idoneidad didáctica y su estructuración por medio de componentes, subcomponentes e indicadores nos ha permitido generar los instrumentos con los que abordar el primer problema. Además, la ingeniería didáctica propuesta desde el EOS nos provee del enfoque metodológico para planificar, implementar y evaluar las diversas experiencias formativas desarrolladas con los futuros profesores.

La probabilidad es esencial en matemáticas y ha ganado importancia en los últimos currículos (MINEDU, 2017; Pratt y Kazak, 2018). En particular, el sistema educativo peruano incluye el estudio de la probabilidad desde el primer ciclo educativo (MINEDU, 2017). Escasas investigaciones sobre el tratamiento de la probabilidad en el currículo y en los libros de texto, ponen de manifiesto importantes deficiencias que obstaculizan una adecuada alfabetización probabilística. Esencialmente un tratamiento sesgado de la probabilidad, centrada en el significado clásico y que desatiende los enfoques frecuencial y subjetivo motiva que el contexto prioritario sea el de los juegos de azar, las situaciones propuestas no sean suficientemente representativas y equilibradas de otros significados distintos del clásico, y que falten situaciones que impliquen experimentación y simulación con manipulativos o software, entre otros (Inzunsa, 2013; Ortiz y Serrano, 2008; Pepin y Gueudet, 2018; Vásquez y Alsina, 2015, 2019; Zimmermann y Jones, 2002). El análisis de los significados y la valoración de la idoneidad didáctica de los materiales curriculares nos permite conocer cuál es la situación en el contexto de la Educación Secundaria en Perú.

En cuanto a la tercera problemática, el modelo CCDM del profesor desarrollado en el EOS (Godino et al., 2017), constituye el marco que define el tipo de conocimientos y competencias profesionales que requieren los futuros profesores al respecto, o evaluar el que disponen (Godino et al., 2017).

Diversas perspectivas de investigación en educación matemática asumen que el profesor debe tener los conocimientos matemáticos y didácticos para describir, explicar y valorar de manera sistemática los procesos instruccionales, previstos, planificados o efectivamente implementados, así como para aplicar dichos conocimientos de forma competente en su mejora (Giacomone et al., 2018).

Como indican Burgos y Godino (2021) la enseñanza de un contenido matemático puede verse comprometida si los profesores no reconocen la naturaleza y el papel de los objetos implicados en las prácticas matemáticas asociadas al campo de problemas que lo caracterizan: las situaciones-problemas son el origen de la actividad; los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que conectan los conceptos; los lenguajes son la parte ostensiva de los conceptos, proposiciones y procedimientos, a la vez intervienen en la elaboración de los argumentos.

Desde la investigación en formación de profesores se insiste en la importancia de que los profesores adopten una postura crítica y reflexiva sobre el uso efectivo de materiales curriculares (Braga y Belver, 2016). Sin embargo, los profesores en formación o incluso con años de experiencia suelen tener dificultades para analizar críticamente los materiales curriculares (Shawer, 2017; Yang y Liu, 2019). Por tanto, es esencial desarrollar instrumentos específicos que permitan desarrollar su competencia reflexiva sobre dichos recursos (Remillard y Kim, 2017).

La implementación de análisis de normativas curriculares es un aporte significativo en didáctica de la matemática, pues no se limita a un aspecto descriptivo y permite analizar el proceso de contextualización de los currículos en un tema concreto, sin dejar de lado aspectos esenciales como el afectivo, interaccional, mediacional y ecológico. Además, permite diagnosticar conocimientos didáctico-matemáticos con relación al contenido abordado, tomando decisiones de acción que permitan corregir sus carencias.

En este capítulo presentamos las conclusiones que se derivan del desarrollo de la investigación atendiendo al logro de los objetivos propuestos y las principales aportaciones que se derivan en relación con las hipótesis de investigación previamente planteadas. A continuación, se discuten las limitaciones de este estudio y se proponen futuras líneas de investigación, algunas de ellas ya en avance.

1. CONCLUSIONES RELATIVAS A LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

1.1 Conclusiones en relación con el primer objetivo (OE1)

OE1. Analizar la representatividad y articulación de los significados de la probabilidad en los documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria.

Desde la perspectiva del EOS, la representatividad y articulación de los significados parciales en un sistema de referencia orienta el currículo, facilitan la comprensión de los procesos de enseñanza y establecen pautas de mejora. La probabilidad como contenido curricular del área de matemáticas destaca la importancia de abordar de manera articulada y adecuada los significados intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico, considerando la edad de los estudiantes y sus conocimientos previos (Batanero, 2005; Batanero et al., 2005; Batanero y Borovcnik, 2016; Jones, 2005).

En el Capítulo 3 hemos analizado el programa curricular y las fichas de trabajo utilizando las herramientas del EOS, notando una inclinación hacia el significado clásico en detrimento del frecuencial e intuitivo de la probabilidad, respaldando hallazgos previos de investigación (Gómez-Torres, 2014; Sánchez, 2009; Serradó et al., 2005; Vásquez y Alsina, 2015). Al revisar el programa curricular, se evidenció una mayor presencia de objetos matemáticos asociados a los significados clásico y frecuencial, aunque la descripción de algunos desempeños no aclaraba su conexión con algún significado de probabilidad. En contraste, las actividades de probabilidad sugeridas en los materiales curriculares revelaron una preferencia hacia el significado clásico, especialmente en las situaciones-problemas. Además, identificamos la presencia de conflictos semióticos potenciales que podrían generar conflictos de comprensión, y se observó falta de claridad en algunos conceptos no contemplados en el programa curricular.

Esto nos lleva a recomendar a los profesores que utilicen el programa curricular y las fichas de trabajo que reconsideren las actividades, aclaren los conceptos no abordados previamente (experimento aleatorio simple y compuesto, suceso compuesto, suceso seguro e imposible para primer grado y sucesos dependientes e independientes para segundo) y explicar el uso de diferentes representaciones y métodos combinatorios no contemplados en la orientación curricular.

Aunque realizar un análisis ontosemiótico sobre cómo se articulan y conectan los significados de probabilidad entre los marcos normativos oficiales y los materiales curriculares puede resultar complejo, creemos que podría ser un primer paso para comprender los objetos matemáticos que deben ser considerados e incorporados gradualmente por el profesor para construir y comprender el concepto de probabilidad.

1.2. Conclusiones en relación con el segundo objetivo (OE2)

OE2. Proponer un instrumento cuyos criterios e indicadores valoren la idoneidad didáctica de los documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria en el tema de la probabilidad.

Aunque existe una extensa literatura sobre el análisis de libros de texto y otros materiales curriculares, son escasos los trabajos que proponen instrumentos específicos desde la disciplina para evaluar globalmente lecciones de libros de texto de matemáticas (Castillo et al., 2022a). En este sentido, el concepto de idoneidad didáctica desarrollado en el marco del EOS, se presenta como un medio para organizar de manera sistemática la relación entre el significado de referencia y el significado implementado, considerando propiedades y características relacionadas con el contenido matemático, los materiales, el contexto educativo y las necesidades de los estudiantes (Balcaza et al., 2017; Godino et al., 2013; Monje et al., 2018).

En el Capítulo 4, se describe el diseño de un instrumento basado en la idoneidad didáctica para analizar marcos normativos y cuadernos de trabajo del estudiante en el ámbito de la probabilidad, que parte de la guía de idoneidad didáctica de Beltrán-Pellicer et al. (2018), incorporando nuevos indicadores adaptados a las especificidades de los materiales curriculares. Se ejemplifica el uso del instrumento por medio de su aplicación en el contexto curricular de la Educación Secundaria peruana.

La aplicación de esta nueva guía reveló aspectos críticos y áreas de mejora que los profesores de matemáticas deben considerar al utilizar las fichas de los cuadernos de trabajo en la enseñanza y el aprendizaje. En cuanto a la faceta epistémica, se observó que los materiales no presentan situaciones-problema que relacionen los distintos significados de la probabilidad, dando mayor énfasis al significado clásico en detrimento del frecuencial. En el aspecto cognitivo, a pesar de la manejable dificultad de los contenidos, se identificó la falta de previsión de errores comunes de razonamiento probabilístico. Desde la perspectiva afectiva, no se resalta la importancia de los razonamientos probabilísticos en la vida cotidiana y faltan momentos para expresar emociones y actitudes, así como una línea de trabajo para la formación de creencias. En cuanto a la interacción y mediación, los materiales no fomentan espacios para la negociación de significados entre estudiantes o entre profesor y estudiantes, y no se considera el uso de recursos manipulativos para experiencias significativas con los significados de la probabilidad.

El profesor, como con cualquier otro material, debe interpretar, analizar y gestionar los materiales curriculares (programas, fichas de trabajo) adaptándolos según su criterio profesional para desarrollar el currículo en el aula. Esto es crucial, especialmente cuando las directrices normativas y los materiales curriculares muestran ciertas discrepancias. Por ejemplo, en primer grado de Educación Secundaria, algunas definiciones (suceso seguro, probable e imposible, espacio muestral, experimento aleatorio simple y compuesto) y procedimientos (construcción de espacio muestral, el empleo de tablas de doble entrada o diagramas de árbol) no están contemplados en el programa curricular, pero se abordan en la ficha 9 del cuaderno de trabajo. Consideramos que el análisis de la idoneidad didáctica de los materiales curriculares debería formar parte de las competencias generales del profesor de matemáticas en el diseño y planificación de lecciones (Beltrán-Pellicer, 2018; Castillo et al., 2021). Por lo tanto, este análisis se estableció como el marco de referencia (análisis a priori) para la posterior evaluación de los informes de los participantes en las experiencias formativas realizadas en cada caso.

1.3. Conclusiones en relación con el tercer y cuarto objetivo (OE3)

OE3. Describir los significados personales de los futuros profesores de Educación Secundaria sobre la naturaleza de los objetos matemáticos implicados en la probabilidad

El diagnóstico inicial del conocimiento común del contenido de los futuros profesores que participaron en la experiencia (desarrollado en el Capítulo 5) reveló resultados similares a investigaciones previas (Contreras, 2011; Gómez-Torres, 2014; Mohamed, 2011; Vásquez y Alsina, 2015). Su conocimiento matemático con relación a la probabilidad era limitado, mostraron tendencias hacia la equiprobabilidad (Lecoutre, 1992), errores en la enumeración del espacio muestral, uso inadecuado de herramientas de conteo (como el diagrama de árbol) para determinar casos favorables y posibles, confusiones entre probabilidad condicional y compuesta (Contreras, 2011; Estrada y Díaz, 2007), y errores en cálculos. De la exploración inicial de los significados personales que los futuros profesores atribuyen a los objetos matemáticos, así como su habilidad para identificar estos objetos en contextos prácticos, se observa dificultades para distinguir los procedimientos con las mismas practicas matemáticas o su intencionalidad. Asimismo, tienen problemas para diferenciar los argumentos de las proposiciones, así como distinguir los significados intuitivo, clásico y frecuencial en dichas prácticas matemáticas desarrolladas.

A pesar de haber reflexionado previamente sobre los diferentes significados de probabilidad y su caracterización mediante una red de objetos matemáticos emergentes en prácticas asociadas, los futuros profesores aún mostraron falta de claridad en cuanto a la naturaleza de estos objetos y sus significados. No obstante, consideramos que la formación recibida, el intercambio de ideas y las discusiones sobre las respuestas brindadas en cada sesión contribuyeron a mejorar la capacidad de los futuros profesores para diferenciar y organizar las unidades de prácticas matemáticas fundamentales. Así, estos comenzaron a reconocer los conceptos y emplear la terminología, aunque aún tuvieron dificultades para identificar completamente los diversos tipos de significados pragmáticos de la probabilidad implicados en las diferentes tareas planteadas. En cuanto a los procedimientos, a menudo se mezclan con las propias prácticas matemáticas o su propósito, y los participantes mostraron dificultades para distinguir entre argumentos y proposiciones. En ocasiones, esto se refleja en la formulación interrogativa de los enunciados del problema (Burgos y Godino, 2021; Burgos et al., 2018).

1.4. Conclusiones en relación con el cuarto y quinto objetivo (OE4 y OE5)

OE4. Describir la implementación y los resultados de las intervenciones formativas con futuros profesores de matemáticas que desarrollan la competencia de análisis didáctico de materiales curriculares y documentos normativos sobre probabilidad.

OE5. Evaluar y analizar los aprendizajes logrados en las intervenciones formativas con futuros profesores de matemáticas que desarrollan la competencia de análisis didáctico de materiales curriculares y documentos normativos sobre probabilidad.

Ofrecer oportunidades para reflexionar sobre la práctica docente no es suficiente; los maestros requieren herramientas que les orienten hacia los aspectos relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Seckel y Font, 2020; Sun y Van Es, 2015). Realizar un análisis crítico para guiar el uso de materiales curriculares, constituye una labor desafiante para los profesionales de la educación que requiere una formación específica (Beyer y Davis, 2012; Godino et al., 2017). Por tanto, la formación de profesores debe priorizar el desarrollo de conocimientos y habilidades que capaciten a los futuros profesores para reflexionar críticamente sobre la gestión de los materiales curriculares de matemáticas. Esto implica la delimitación, conocimiento y aplicación de criterios específicos y rigurosos que les permitan llevar a cabo esta tarea con éxito (Beyer y Davis, 2012).

Con este compromiso, en los Capítulos 5, 6 y 7 de esta memoria se describe el diseño, implementación y evaluación de experiencias formativas implementadas con futuros profesores de secundaria peruanos, destinadas a desarrollar el análisis didáctico de materiales curriculares. En concreto, hemos centrado la atención en programas curriculares y cuadernos de trabajo de los estudiantes en el tema de probabilidad. Se trata de recursos de gran potencialidad en la planificación de las prácticas de enseñanza y que sin embargo no han recibido la atención que merecen.

Siguiendo las fases propias de las investigaciones de diseño (Kelly et al., 2008), como proponen Godino et al. (2014) desde el EOS, el diseño de las experiencias formativas implicó la elaboración de las guías de análisis (detalladas en el Capítulo 4), el análisis a priori de las fichas del cuaderno de trabajo y los marcos normativos seleccionados para cada intervención y y el análisis didáctico realizado por los futuros profesores.

Las respuestas de los futuros profesores evidencian dificultades para distinguir prácticas matemáticas y reconocer los objetos matemáticos implicados en las tareas del material curricular analizado, en especial las proposiciones y sus respectivos argumentos, tal como se especifica en el Capítulo 5. En el caso de los procedimientos, estos suelen confundirse frecuentemente con las mismas prácticas matemáticas o su intencionalidad (Burgos y Godino, 2021; Burgos et al., 2018). No obstante, consideramos que la formación recibida, la puesta en común y las discusiones de las respuestas dadas en cada clase, contribuyeron a mejorar la competencia de análisis didáctico de los futuros profesores. Estos lograron distinguir y secuenciar las unidades de prácticas matemáticas elementales, comenzaron a reconocer los conceptos y lenguajes y, de forma parcial, los distintos tipos de significados pragmáticos de la probabilidad puestos en juego en diversas tareas planteadas.

Al cotejar el análisis a priori establecido por el equipo de investigación, pudimos identificar los conocimientos previos y las creencias acerca de lo que constituye un material de calidad. En este proceso, como se puede observar en el Capítulo 7, el análisis de las fichas de trabajo, excepto por una opinión negativa, todos los demás participantes consideraron que era un material adecuado para usar en el aula. Las valoraciones de las fichas del cuaderno de trabajo se centraron principalmente en aspectos epistémicos (relacionadas con el contenido matemático) y afectivos (atractivo y motivador para los alumnos), seguidos por los interaccionales (estos dos últimos no mencionados inicialmente como características fundamentales de un buen material, lo que sugiere que tener un ejemplo concreto les ayudó a enfocar su reflexión).

Después de la formación, se proporcionó a los futuros profesores una guía elaborada con indicadores de idoneidad didáctica para analizar las fichas de trabajo como se indica en el Capítulo 7. Este tenía como objetivo dirigir su atención hacia aspectos fundamentales que influyen en los procesos de instrucción. Sin embargo, observamos que, incluso con esta herramienta, los futuros profesores tuvieron dificultades para evaluar el grado de cumplimiento de los indicadores en las diferentes facetas. Esto resultó en deficiencias significativas en distintas facetas:

- Faceta Epistémica: Ausencia o ignorancia de conceptos esenciales para la enseñanza de la probabilidad, así como procedimientos cruciales relacionados con su significado frecuencial.
- Faceta Cognitiva: Falta de consideración de los conocimientos previos y la previsión de sesgos probabilísticos.
- Faceta Interaccional: Presentación confusa y deficiente del contenido.
- Faceta Mediacional: Falta de actividades que integren recursos materiales y tecnológicos.
- Faceta Ecológica: Falta de conexión con otras disciplinas y contenidos no contemplados en el currículo.

La evaluación de la idoneidad didáctica se vio afectada debido a la incorrecta identificación de conceptos matemáticos en los materiales curriculares (Capítulo 7) y los marcos normativos (Capítulo 6). Las dificultades para valorar adecuadamente los indicadores de otras facetas, como la afectiva, interaccional o mediacional, pueden atribuirse tanto a la dificultad para interpretar dichos indicadores como a la falta de precisión en los programas curriculares.

En el Capítulo 7 se observa que, solo el treinta por ciento de los participantes logró realizar una evaluación fundamentada de la idoneidad didáctica, la cual fue mayoritariamente considerada alta en todas las facetas, excepto en la interaccional. En este aspecto, se nota que su discurso se basa más en descripciones que en análisis profundos. Por otro lado, más del cincuenta por ciento de los participantes presentaron propuestas de mejora pertinentes. Esto indica que algunos de los profesionales de la formación profesional que no dieron una respuesta o lo hicieron de manera inconclusa al emitir un juicio sobre la idoneidad didáctica sí tuvieron en cuenta los indicadores al proponer cambios basados en su grado de cumplimiento.

El análisis de materiales curriculares (programas curriculares, libros de texto, libros del profesor, cuadernos de trabajo, etc.) no es sólo una competencia profesional que debe ser desarrollada en los futuros profesores; también permite diagnosticar, valorar y generar conocimientos didáctico-matemáticos que los profesores deben disponer para garantizar una enseñanza adecuada de cada contenido, en particular, de la probabilidad. En nuestro caso, los resultados de la investigación sugieren la necesidad de fortalecer los conocimientos didáctico-matemáticos en probabilidad desde una perspectiva epistémica (prácticas, objetos y procesos característicos de los distintos significados de la probabilidad y sus relaciones), cognitiva (factores que influyen en la complejidad de las situaciones de probabilidad y sesgos), así como en otras facetas donde se observa una comprensión confusa de los aspectos afectivos, tales como la autonomía del estudiante en su trabajo o la importancia de alinear el currículo en los materiales para asegurar una progresión de aprendizaje coherente.

2. LIMITACIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

En cada uno de los capítulos se abordan aspectos relacionados con los objetivos establecidos en este estudio. No obstante, somos conscientes de las diversas limitaciones en términos de alcance y aplicabilidad de la tesis, así como de los aspectos que aún requieren investigación adicional. A continuación, se presentan las limitaciones identificadas y las líneas abiertas que podrían explorarse con el propósito de contribuir y continuar avanzando en el problema de investigación planteado en esta tesis.

2.1 Limitaciones

En primer lugar, la guía de idoneidad didáctica desarrollada se aplicó exclusivamente a cuadernos de trabajo de primer y segundo grado de Educación Secundaria en Perú, los cuales son distribuidos de manera gratuita a todos los estudiantes. La limitación de no extender su aplicación a cuadernos de trabajo de otras editoriales o a sistemas educativos de otros países del mismo nivel educativo podría haber reducido la generalización de nuestros hallazgos. Esta ampliación habría contribuido a mejorar la relevancia práctica de la investigación.

Otra limitación clave es que los futuros profesores participantes no tuvieron suficiente espacio para familiarizarse con las facetas e indicadores de la guía de idoneidad didáctica de la probabilidad. Además, no recibieron formación específica sobre conocimientos didáctico-matemáticos relacionados con la probabilidad. Esta falta de preparación y el conocimiento deficiente de la naturaleza de los objetos y procesos matemáticos, especialmente en el contexto de la probabilidad, se reflejó en el análisis de los materiales curriculares. Se pedía a los futuros profesores la justificación sobre los posibles conflictos o dificultades identificadas durante el proceso de valoración. Sin embargo, se observó una falta de argumentaciones suficientes u observaciones al valorar cada indicador. La ausencia de estas argumentaciones dificultó la identificación precisa de las causas de las discordancias.

Además, la implementación del taller formativo podría haber tenido resultados distintos si se hubiera llevado a cabo con profesores en ejercicio en lugar de profesores en formación. La relación entre las críticas de los profesores a los marcos normativos o materiales curriculares y su experiencia y conocimiento previo sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas podría haber arrojado resultados diferentes en una intervención formativa con profesores en actividad. Sería pertinente investigar los resultados de una intervención similar con profesores en ejercicio, comparando las creencias inferidas de sus críticas, el análisis e identificación de conflictos, la gestión y uso efectivo de los materiales curriculares en el aula.

Asimismo, se destaca la importancia de contar con espacios de comunicación y debate para compartir las deficiencias y fortalezas identificadas por el equipo investigador y los futuros profesores. Aunque, lamentablemente, por limitaciones de tiempo no se pudo llevar a cabo un espacio de reflexión durante la implementación del estudio, se sugiere considerar esta práctica en futuras investigaciones. Se reconoce que la dedicación temporal disponible en las diversas experiencias no fue suficiente para estudiar y fomentar el desarrollo de los conocimientos didáctico-matemáticos y la competencia de análisis didáctico. Para lograr un aprendizaje más efectivo de los futuros profesores, se sugiere dedicar más tiempo y llevar a cabo una progresión gradual en la participación en tareas más complejas, como la gestión y adaptación de los materiales curriculares analizados.

2.2 Futuras líneas de investigación

El diseño de guías para evaluar la idoneidad didáctica, como se exploró en el Capítulo 4, es un tema que viene siendo trabajado por varios investigadores (Beltrán-Pellicer et al., 2018; Castillo et al., 2022a, 2022b; Godino et al., 2013; Rivas, 2014; Ruz et al., 2019; Verón et al., 2024). Esta área de investigación ofrece oportunidades para nuevos estudios, tanto para mejorar los instrumentos existentes como para desarrollar guías específicas para evaluar la idoneidad didáctica en diversos contextos educativos. Estos podrían incluir procesos de estudio instruccional como programas curriculares, unidades didácticas, libros de texto, guías o manuales para profesores, tutoriales en video y plataformas educativas virtuales, así como áreas de matemáticas y niveles educativos distintos. La metodología utilizada en esta investigación para elaborar y analizar las guías puede servir como referencia para investigaciones futuras. La búsqueda sistemática y adaptación de criterios de idoneidad didáctica iniciada aquí a través del análisis de contenido de directrices y materiales curriculares puede complementarse con una nueva fase que involucre el juicio de expertos.

A lo largo de los Capítulos 5, 6 y 7, se ha presentado una serie de intervenciones formativas como el primer paso para iniciar a los futuros profesores de matemáticas de Educación Secundaria en el desarrollo de su competencia de análisis didáctico y reflexión profesional. Sin embargo, es crucial reconocer que estas intervenciones representan solo el inicio de un proceso más amplio. En consonancia con las preocupaciones planteadas por diversos autores (Ball y Cohen, 1996; Batanero, 2022; Beyer y Davis, 2012; Braga y Belver, 2016; Burgos et al., 2022; Castillo, 2023; Giacomone et al., 2018; Godino et al., 2017; Schwarz et al., 2008), se requiere continuar con la implementación de talleres formativos en contextos de formación inicial, tanto en estudios de pregrado como postgrado. Los programas de formación docente, los estudios de maestría en Didáctica de la Matemática y otros contextos formativos pueden ofrecer nuevas oportunidades para mejorar la formación de los futuros profesores de educación secundaria y primaria en matemáticas y su didáctica.

Nuestra investigación se ha centrado en el diseño de talleres formativos para desarrollar la competencia de análisis didáctico de materiales curriculares. Aunque hemos abordado aspectos relacionados con la descripción, explicación y valoración de materiales y marcos normativos, no hemos explorado las normas que condicionan los procesos de estudio instruccional. Por lo tanto, se abre una línea de investigación hacia la posibilidad y utilidad de diseñar acciones formativas para estudiar la dimensión normativa, promoviendo el desarrollo de la competencia de análisis de normas y metanormas desde el EOS.

Dada la importancia de las competencias profesionales y los conocimientos didáctico-matemáticos abordados en esta tesis, se destaca la implicación directa en los programas de formación docente, institutos pedagógicos y universidades. La responsabilidad recae en los formadores, quienes diseñan e implementan talleres formativos. Una línea de investigación abierta se centra en el formador del futuro profesor, sus conocimientos y competencias en la actividad de formación. Diseñar cursos para que el formador del profesor conozca y utilice de manera competente este tipo de herramientas es una tarea relevante en la mejora de la formación docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Australian Curriculum, Assessment and Reporting authority [ACARA] (2014). *Foundation to year 10 curriculum: Statistics and Probability.* ACMSPO24.

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M. y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2021). What Mathematical Knowledge Do Prospective Teachers Reveal When Creating and Solving a Probability Problem? *Mathematics, 9*(24), 3300.

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 12(*48), 41-58.

Alvarado, H. y Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística. *Estudios pedagógicos (Valdivia), 34*(2), 7-28.

American Association for the Advancement of Science (AAAS) (2000). *Middle grades mathematics textbooks: A benchmarks-based evaluation.* http://www.project2061.org/publications/textbook/mgmth/report/part1.htm

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 225-237). La penséesauvage

Artigue, M. (2014). Didactic engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 159–162). Springer.

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. [Tesis doctoral, Universidad de Cádiz].

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. y Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(1), 85-97.

Balcaza, T, Contreras, A. y Font, V. (2017) Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31* (59), 1061-1081.

Ball, D. L., Hill, H. C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29, 14-22.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Ball, D. y Cohen, D. (1996). Reform by the book: what is: or might be: the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher, 25*(9), 6–14.

Bastias, H. Alvarado, H. y Retamal, L. (2017). Explorando el significado intuitivo de probabilidad en profesores de matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-10). Universidad de Granada.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME, 8*(3), 247-263.

Batanero, C. (2022). Training teachers to teach probability: A promising research area. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*(3), 729-734.

Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8

Batanero, C. y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegen y K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education* (pp. 107-127). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71575-9_6

Batanero, C. y Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2021). Prospective mathematics teachers understanding of classical and frequentist probability. *Mathematics*, *9*(19), 2526. https://doi.org/10.3390/math9192526

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability, ICME-13 topical surveys*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3

Batanero, C., Gea, M. M. y Álvarez-Arroyo, R. (2023). La educación del razonamiento probabilístico. *Educação Matemática Pesquisa*, *25*(2), 127-144.

Batanero, C., Gea, M. M., Díaz- Levicoy, D. y Cañadas, G. (2015). Objetos matemáticos ligados a la regresión en los textos españoles de bachillerato. *Educación Matemática, 27*(2), 9-35.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service School Teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* (pp. 1-8). International Commission on Mathematical Instruction.

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Praxis Educativa, 10*(1), 11-34.

Batanero, C., Gómez, E., Serrano, L. y Contreras, J. M. (2013). Reconocimiento de la aleatoriedad por futuros profesores españoles de educación primaria. *Actas de Simposio de matemáticas y educación matemática. III Congreso internacional de matemáticas asistida por computador*. Universidad Antonio Nariño.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G.A. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. y Godino, J.D. (1997). Efecto del modelo combinatorio implícito sobre el razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Estudios educativos en matemáticas*, *32*(2), 181–199.

Begg, A. y Edwards, R. (1999). Teachers' ideas about teaching statistics. *Proceedings of the 1999 combined conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education* (pp. 1-9). Australian Association for Research in Education

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education*, *50*(1), 1-20.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *32*(61), 526-548. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a11

Ben-Peretz, M.; Katz, S. y Silberstein, M. (1982). Curriculum interpretation and its place in teacher education programs. *Interchange*, 13, 47–55.

Beyer, C. J. y Davis, E. A. (2012). Learning to critique and adapt science curriculum materials: Examining the development of preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge. *Science Education, 96*(1), 130–157. https://doi.org/10.1002/sce.20466

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability. En E. J Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (pp. 7–34). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_2

Braga, G. y Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199–218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255-278.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

Brown, M. (2009). The teacher-Tool relationship: theorizing the design and use of curriculum materials. En J.T. Remillard, B. A. Herbel-Eissenmann, y G. M. Lloyd. *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17-36). Routledge.

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: a literature review*. Nuffield Foundation.

Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Assessing the epistemic analysis competence of prospective primary school teachers on proportionality tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Burgos, M. y Tizón-Escamilla,N. (2023) Problem-posing to develop proportional and probabilistic reasoning. *EDULEARN23 Proceedings,* 6931-6937. https://doi.org/10.21125/edulearn.2023.1820

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, 1-22. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844182013

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del Enfoque Ontosemiótico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(66), 40-68.

Burgos, M., Giacomone, B., Godino, J. D. y Neto, T. (2019). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 241-261). Ediciones Universidad Salamanca.

Burgos, M., López-Martín, M. M, Aguayo-Arriagada, C. G. y Albanese, V. (2022) Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia 36* (1), 588-611.

Burgos, M., López-Martín, M. M, Albanese, V. y Aguayo-Arriagada, C. G. (2023) Analysis of primary school students' answers to fair game tasks.An experience with preservice teachers, *BEIO, 39* (3), 48-69.

Bütüner, S. Ö. (2021). Content and Problem Analysis in Turkish and Singaporean Mathematics Textbooks: The Case of Multiplying Fractions. *Journal of Research in Mathematics Education, 10*(2), 117-151.

Cai, J. y Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and US elementary mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(8), 1521-1540.

Cañizares, M. J. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias [Tesis Doctoral, Universidad de Granada].

Cao y., Wu, L. y Dong, L. (2017). Comparing the difficulty level of junior secondary school mathematics textbooks in five nations. En J.W. Son, T. Watanabe y J. J. Lo (Eds.), *What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education* (pp. 63-81). Springer.

Cardeñoso, J. M., Moreno, A., García-González, E. y Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 11,* 145-166.

Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19-43). Sense Publishers

Castillo, M. J. (2023). Análisis didáctico de lecciones de libros de texto sobre proporcionalidad basado en el enfoque ontosemiótico. Implicaciones para la formación de profesores. [Tesis doctoral- Universidad de Granada]

Castillo, M. J. Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la teoría de la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48, e238787, 1-25

Castillo, M. J., Burgos, M. y Godino, J. D. (2022a). Guía de análisis de lecciones de libros de texto de Matemáticas en el tema de proporcionalidad. *Uniciencia, 36*(1), e15399.

Chapman, O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J. J. Lo; K. R. Leatham; L. R. Van Zoest (Eds.) *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Springer International Publishing.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y. y Mesa, V. (2010). *A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. Mathematical thinking and learning, 12*(2), 117-151.

Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(5), 331–353.

Choppin, J., Roth McDuffie, A., Drake, C. y Davis, J. (2020). The role of instructional materials in the relationship between the official curriculum and the enacted curriculum. *Mathematical thinking and learning, 24*(2), 123-148.

Clivaz, S. y Miyakawa, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics, 105*(1), 53-70.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, *22*(1), 5-18.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. https://ugr.es/~batanero/documentos/contreras.pdf

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad Didáctica de Materiales Curriculares Oficiales Peruanos de Educación Secundaria en Probabilidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 36*(73). https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a13

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

Davis, E. A., Krajcik J. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher, 34*(3), 3–14.

Díaz, C., Contreras, J., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de Educación Secundaria. *Bolema. Boletim de Educação Matemática, 26*(44), 1207-1225.

Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2017). Conflictos semióticos potenciales sobre gráficos estadísticos en libros de texto chilenos de Educación Primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Ding, M. y Li, X. (2010). A comparative analysis of the distributive property in U.S. and Chinese elementary mathematics textbooks. *Cognition and Instruction, 28*(2), 146–180.

Dugdale, S. (2001). Pre-service teachers' use of computer simulation to explore probability. *Computers in the Schools, 17*(1-2), 173-182.

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics- challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 175–186). Springer.

Estrada, A. y Batanero, C. (2019). Prospective primary school teachers' attitudes towards probability and its teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(1), em0559.

Estrada, A. y Díaz, C. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO. Didáctica de las Matemáticas, 44*, 48-58.

Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics*, *66*, 61-75.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 45*(5), 633–646.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E. y Hyun, H. H. (2011). *How to design and evaluate research in education*. McGraw-Hill Humanities/Social Sciences/Languages.

Fúneme, C., Linares, L. y Sepúlveda, O. (2021). Análise ontosemiótica de um Livro Didático colombiano da Educação Básica: o caso da Matemática Comprimento do objeto. *Revemop*, 3, e202128. https://doi.org/10.33532/revemop.e202128

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G.A. Jones (Ed.) *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-64). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24530-8_3

Gandhi, H. (2015). Traversing the epistemology of probability in Indian mathematics textbooks. En *Proceedings of Sixth International Conference to review researches in Science, Technology and Mathematics Education* (pp. 195-202).

García, L. M., Henry, S. V., García, J. I. G. y Levicoy, D. D. (2022). Análisis ontosemiótico de tareas que involucran gráficos estadísticos en libros de texto mexicanos de Educación Primaria. *Avances de investigación en educación matemática*, *22*, 111-135

Gea, M., Parraguéz, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 267–276). SEIEM.

Gellert, U., Barbé, J., y Espinoza, L. (2013). Towards a local integration of theories: Codes and praxeologies in the case of computer-based instruction. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 303-321. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9427-5

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 29*(4), 1109-1131. http://dx.doi.org/10.5209/RCED.54880

Ginsburg, A., Leinwand, S., Anstrom, T. y Pollock, E. (2005). *What the United States can learn from Singapore's world-class mathematics system (and what Singapore learn from the United States): An exploratory study*. American Institutes for Research

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En *Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM-IACME*.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132.

Godino, J. D. (2014, 24 de agosto). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas* [presentación de diapositivas]. Repositorio web del EOS https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad*. Editorial Síntesis.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga. P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 8*(1), 46- 74.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Batanero, C. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 47-59.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis ontosemiótico de la lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 9*(especial), 131–155.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de*

Educação Matemática, 31(57), 90-113. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Praxis Educativa, 7* (2), 331-354.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2/3), 167-200.

Godino, J., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A. y Wilhelmi, M. (2013). *La ingeniería didáctica como Investigación Basada en el Diseño*. CERME 8.

Godino, J.D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática*, (20), 13-31.

Gómez, E., Batanero, C. y Contreras. J. M. (2014). Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. *Épsilon, 31*(2), 25-42.

Gómez, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 5, 49-71.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *35*, 75-91.

Gómez-Torres, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389-408.

Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511817557

Han, S. Y., Rosli, R., Capraro, R. M. y Capraro, M. M. (2011). The textbook analysis on probability: The case of Korea, Malaysia and US textbooks. *Research in Mathematical Education*, *15*(2), 127–140.

Heine, S., Krepf, M. y König, J. (2023). Digital resources as an aspect of teacher professional digital competence: One term, different definitions–a systematic review. *Education and Information Technologies*, *28*(4), 3711-3738.

Hoadley, U. y Galant, J. (2016). An analysis of the Grade 3 Department of Basic Education workbooks as curriculum tools. *South African Journal of Childhood Education*, *6*(1), 1-12.

Horvath, J. K. y Lehrer, R. (1998). A model-based perspective on the development of children's understanding of chance and uncertainty. En S. P. LaJoie (Ed.), *Reflections on statistics: Agendas for learning, teaching and assessment in K-12* (pp. 121–148). Lawrence Erlbaum Associates

Huang y., Zhou y., Wijaya, T. T., Kuang, K. y Zhao, M. (2021). A comparative analysis on algebraic questions in Chinese and Indonesian textbook. *Journal of Physics: Conference Series*, 2084, 012024. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2084/1/012024

Illanes, M. K. G. y Breda, A. (2023). Significados de la derivada en los libros de texto de las carreras de Ingeniería Comercial en Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *37*, 271-295.

Ingram, J. (2022). Randomness and probability: exploring student teachers' conceptions. Mathematical. *Thinking and Learning*, 1-19. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2016029

Inzunsa, S. (2013). Simulación y modelos en la enseñanza de la probabilidad: un análisis del potencial de los applets y la hoja de cálculo. *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas*, 9-29.

Inzunsa, S. y Guzmán, M. (2011). Comprensión que muestran profesores de secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio. *Educación Matemática, 23*(1), 63-95.

Ishibashi, I. (2022). Analyzing experimental and theoretical probabilities in Japanese 7th and 8th grade textbooks. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(3), em0690. https://doi.org/10.29333/iejme/12061

Jones, G. A. (2005). *Exploring probability in schools. Challenges for teaching and learning*. Springer. https://doi.org/10.1007/b105829

Kar, T., Guler, G., Sen, C. y Ozdemir, E. (2018). Comparing the development of the multiplication of fractions in Turkish and American textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(2), 200-226. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355993

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (2008). *Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315759593

Kesidou, S. (2001). Aligning curriculum materials with National Science Standards: the role of Project 2061's curriculum-materials analysis procedure in professional development. *Journal of Science Teacher Education, 12*(1), 47–65.

Konic, P. M., Godino, J. D. y Rivas, M. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números. Revista de Didáctica de la Matemática, 74*, 57-74.

Konold. C. (1991). Understanding students’ beliefs about probability. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Kluwer.

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: An introduction to its methodology* (4th ed.). Sage.

Langrall, C. W. y Mooney, E. S. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. *In Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 95-119). Springer US.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(6), 557-568. https://doi.org/10.1007/BF00540060

Leung, F. K. S. (2006). Mathematics education in East Asia and the West: Does culture matter? En F. K. S. Leung (Ed.), *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West* (pp. 22–46). Springer

Li, Y., Chen, X. y An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM, 41*, 809-826.

Liljedahl, P. (2020). *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Corwin press.

López-Mojica, J. M., Ojeda, A. M. y Salcedo, J. (2018). Ideas fundamentales de estocásticos en libros de texto de educación primaria: una alternativa de enseñanza. *IE Revista de Investigación Educativa de La REDIECH, 9*(17), 87–102.

Martin, V., Héroux, S., Homier, M. y Thibault, M. (2021). L’analyse de tâches probabilistes proposées dans des cahiers d’apprentissage destinés à l’enseignement-apprentissage des mathématiques au primaire au Québec: exemplification de tâches inscrites dans l’approche fréquentielle. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 21*(1), 145-165.

Martínez-Bonafé, J. (1992). ¿Cómo analizar los materiales? *Cuadernos de Pedagogía, 203*, 14–18.

Mason, J. (2016). Perception, interpretation and de-cisionmaking: understanding gaps between competence and performance a commentary. *ZDM, 48*(1-2), 219-226.

Mayer, K. K., Sims, V. y Tajika, H. (1995). A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States. *American Educational Research Journal, 32*(2), 443–460

Ministerio de Educación (MINEDU) (2017). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. Lima-Perú.

Ministerio de Educación (MINEDU) (2019a). *Cuaderno de trabajo de Matemática: Resolvamos problemas secundaria 1*. Lima-Perú.

Ministerio de Educación (MINEDU) (2019b). *Cuaderno de trabajo de Matemática: Resolvamos problemas secundaria 2*. Lima-Perú

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD) (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Autor

Miyakawa, T. (2017). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: the cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics, 94*(1), 37-54.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Monje y., Seckel, M.J. y Breda, A. (2018). Tratamiento de la inecuación en el currículum y textos escolares chilenos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 480-502.

Monterrubio, M.C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación, 358*, 471-496.

Morales, L. y Navarro, C. (2021). Idoneidad Epistémica del Significado de Número Natural en Libros de Texto Mexicanos. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *35*(71), 1338–1368. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a06

Morales, L., Navarro, C. y Díaz-Levicoy, D. (2021). Significados del número natural en libros de texto mexicanos: un análisis descriptivo. *Educación Matemática*, *33*(3), 94-120.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

Nicol, C. C. y Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, *62*, 331-355. http://doi.org/10.1007/s10649-006-5423-y

Obczovsky, M., Schubatzky, T. y Haagen-Schützenhöfer, C. (2023). Supporting Preservice Teachers in Analyzing Curriculum Materials. *Education Sciences, 13*(5), 518.

Occelli, M. y Valeiras, N. (2013). Los libros de texto de ciencias como objeto de investigación: Una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(2), 133-152. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n2.761

Ortiz, J. (2015). Los problemas de probabilidad en los libros de texto de bachillerato. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina et al. (Eds.), Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. *Actas de las Segundas Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 371-379). Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J. y Serrano, L. (2008). La simulación de la Estadística y la Probabilidad en los libros de texto de Educación Secundaria. *Publicaciones, 38,* 49-61.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). SEIEM.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(1), 63-91.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma*, *38,* 5-14.

Parraguez, R., Gea, M. M., Díaz-Levicoy, D. y Batanero, C. (2017). ¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *17*(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i2.3077

Peirce, Ch. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. 1931-1935. Harvard UP.

Pepin, B. y Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33,* 158-175.

Pepin, B., Choppin, J., Ruthven, K. y Sinclair, N. (2017). Digital curriculum resources in mathematics education: Foundations for change. *ZDM Mathematics Education, 49*(5), 645–661. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0879-z

Pepin, G. y Gueudet, G. (2018). Curriculum resources and textbooks in mathematics education. In: Lerman, S. (ed.). *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 172-176). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_40

Pérez Echeverría, M. P., Carretero, M. y Pozo, J. I. (1986). Los adolescentes ante las matemáticas: Proporción y probabilidad. *Cuadernos de Pedagogía, 133*, 9-13

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradígma, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education, 21*(1), 63-94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Pino-Fan, L., Parra-Urrea, Y. y Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 11*(23), 201-220.

Pochulu, M.; Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 19*(1), 71-98. https://doi.org/10.12802/relime.13.1913

Polya, G. (1945). *How to Solve It.* Princeton University Press.

Pratt, D. y Kazak, S. (2018) Research on uncertainty. *In:* Ben-Zvi, D., Makar, K. Garfield, J. (Eds) *International handbook of research in statistics education* (p. 193-227). Springer.

Prodromou, T. (2012). Connecting experimental probability and theoretical probability. *ZDM, 44*, 855-868.

Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of educational research, 75*(2), 211-246.

Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska

(Eds.), *Recent advances in research on mathematics teachers' textbooks and resources* (pp. 69–88). Springer.

Remillard, J. T. y Kim, O. K. (2020). *Elementary mathematics curriculum materials: Designs for student learning and teacher enactment.* Springer Nature. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38588-0

Remillard, J. y Heck, D. J. (2014). Conceptualising the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM—International Journal on Mathematics Education, 46*(5), 705–718.

Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada].

Rodríguez, J. (2006). *La investigación sobre los libros de texto y materiales curriculares*. Primer seminario internacional de textos escolares. MINEDUC.

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L., Vásquez, C. y Alsina, Á. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto?, estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *104*, 217-238.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J. y Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970 - 2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(2), 245-276. https://doi.org/10.12802/relime.13.1624

Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2019). Guía de Valorización de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(63), 135-154.

Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación Matemática, 21*(2), 39-77.

Santaolalla, E. (2014). *Análisis de los elementos didácticos en los libros de texto de matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad de Pontificia Comillas].

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers.

Schubring, G. y Fan, L. (2018). Recent advances in mathematics textbook research and development: An overview. *ZDM Mathematics Education, 50*(5), 765–771. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0979-4

Schwarz, C., Gunckel, K., Smith, E., Covitt, B., Enfield, M., Bae, M. y Tsurusaki, B. (2008). Helping elementary pre-service teachers learn to use science curriculum materials for effective science teaching. *Science & Education, 92*(2), 345–377.

Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *MAGIS. Revista Internacional de Investigación en Educación, 12*(25), 127-144.

Serradó, A. y Azcárate, P. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Serradó, A., Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (2005). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: Su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal*, *4*(2), 59-81. http://dx.doi.org/10.13140/2.1.4818.6569

Serrano, L., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10*(01), 7-25.

Shawer, S. F. (2017). Teacher-driven curriculum development at the classroom level: Implications for curriculum, pedagogy and teacher training. *Teaching and Teacher Education, 63*, 296–313. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.12.017

Shield, M. y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 183–199.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 9*(2), 1-30.

Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (pp. 345–366). Springer.

Strauss, A. y Corbin, J. M. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques*. Sage Publications, Inc.

Takeuchi, H. y Shinno y. (2020). Comparing the lower secondary textbooks of Japan and England: A praxeological analysis of symmetry and transformations in geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(4), 791-810.

Thompson, D. (2014). Reasoning-and-proving in the written curriculum: Lessons and implications for teachers, curriculum designers, and researchers. *International Journal of Educational Research, 64*, 141–148. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.013

Tizón-Escamilla, N. y Burgos, M. (2023) Creation of Problems by Prospective Teachers to Develop Proportional and Algebraic Reasonings in a Probabilistic Context. *Educ. Sci. 13*, 1186. https:// doi.org/10.3390/educsci13121186

Tversky, A. y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heurístics and biases. *Science, 185*, 1124-1131.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Kluwer.

Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: Analyses from a psychological perspective. En E, Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking* (pp. 123-126). Springer.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. *Educational studies in mathematics, 53*, 113-138.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática 7*, 27-48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguajes y conceptos sobre probabilidad. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 19*(2), 441-462.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Educación matemática, 29*(3), 79-108.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2017). Proposiciones, procedimientos y argumentos sobre probabilidad en libros de texto chilenos de Educación Primaria. *Profesorado, Revista de currículum y formación del profesorado, 21*(1), 433-457.

Vásquez, C., Pincheira, N. y Díaz-Levicoy, D. (2016) ¿Qué significa enseñar y aprender probabilidad? Un primer análisis desde el currículo de Educación Primaria. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1165-1182.

Verón, M. A., Giacomone, B. y Pino-Fan, L. R. (2024). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de la diferencial. *Uniciencia, 38*(1), 1-22.

Vincent, J. y Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal, 20*(1), 81–106.

Vygotski, L.S. (1934). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica-Grijalbo.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Crítica.

Yaftian, N. y Abbasi, F. (2023). Trend of Presenting Concept of Fractions in the Mathematics Textbooks of the Second to Fourth Grades of Primary Schools in Iran and Japan. *Iranian Journal of Comparative Education, 6*(2), 2466-2495.

Yang, D. C., Tseng y. K. y Wang, T. L. (2017). A comparison of geometry problems in middle-grade mathematics textbooks from Taiwan, Singapore, Finland, and the United States. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, *13*(7), 2841–2857.

Yang, K. y Liu, X. (2019). Exploratory study on Taiwanese secondary teachers' critiques of mathematics textbooks. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(1), em1655. https://doi.org/10.29333/ejmste/99515

Zhu Y. y Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4,* 609-626.

Zimmermann, G. M., y Jones, G. A. (2002). Probability simulation: What meaning does it have for high school students? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*, 221-236.

ANEXOS

ANEXO 1. Planificación de las trayectorias didácticas del taller sobre análisis didáctico

UNIVERSIDAD : NACIONAL DEL ALTIPLANO

FACULTAD : CIENCIAS DE LA EDUCACION

ESCUELA PROFESIONAL : EDUCACION SECUNDARIA

PROGRAMA DE ESTUDIOS : MATEMÁTICA, FÍSICA, COMPUTACIÓN E INFORMÁTICA

I. INFORMACIÓN GENERAL

1.1 Identificación Académica

- Año Académico : 2021 y 2022
- Ciclo de Estudios : IV

1.1 Docente Formadora

- Apellidos y Nombres : Cotrado Mendoza Bethzabe
- Especialidad : Matemática y computación

II. DESCRIPCIÓN DE LA TRAYECTORIA DIDÁCTICA DEL TALLER FORMATIVO

La ruta está organizada en cuatro momentos de intervención formativa. El primer y tercer momento comprende el desarrollo de la competencia de análisis de significado y configuración ontosemiótica de la probabilidad en materiales y documentos normativos curriculares. El segundo y cuarto momento desarrolla la competencia de análisis de idoneidad didáctica de materiales y programas curriculares en probabilidad. Cada uno se organiza en diferentes fases según sus propósitos. Cada fase, a su vez, se desarrolla en dos sesiones: una sincrónica y otra asincrónica. La sesión sincrónica corresponde al encuentro virtual de enseñanza-aprendizaje interactivo en tiempo real con el apoyo de la herramienta *Google Meet*, mientras que la sesión asincrónica permite compartir recursos educativos (lecturas y entrega de tareas) para consulta de los estudiantes en el aula virtual (*Classroom*) en cualquier momento. Así mismo, se contemplan los recursos que serán utilizados en cada sesión del taller, así como el tiempo de duración aproximado para cada sesión.

Propósitos	Actividades/Estrategia	Recursos	Cronograma
	Trayectoria didáctica I		
Exploración inicial de los conocimientos previos y objetos matemáticos que manifiestan los estudiantes al resolver tareas de probabilidad	**Sesión sincrónica 1** - Presentación del taller y sus objetivos (Ver Anexo 2) - Se les entrega un instrumento de diagnóstico inicial (ver Anexo 3) de conocimientos sobre probabilidad (tres situaciones-problemas elegidos del cuaderno de resolución de problemas de primer y segundo grado) - Los estudiantes resuelven las situaciones problemas de forma individual durante la sesión virtual en un tiempo de 15 minutos. - Cada uno reporta en un documento o mediante una foto los problemas resueltos a un espacio creado en *Classroom.* - En seguida se le pide a que describan el procedimiento del problema 1, así como identifiquen y listen los conceptos, símbolos y gráficos implicados en el problema según la consigna del Anexo 2. También se les pide a que mencionen las dificultades que tuvieron durante la resolución del problema. - Luego deben socializar y compartir en clase lo solicitado. - Para la puesta en común de las respuestas dadas por los estudiantes, la profesora presenta la solución del problema 1, la descripción del procedimiento y la identificación de los objetos matemáticos. Se concluye la presentación con la definición de cada objeto matemático.	- Google Meet: https://meet.google.com/mzj-hdhu - PPT (Anexo 2) - Cuestionario de diagnóstico sobre probabilidad (ver Anexo 3) - Ficha 9 de primer grado (Anexo 4) y Ficha 13 de segundo grado (Anexo 5) del cuaderno de trabajo: Resolvemos problemas.	10 de noviembre Hora: 17:00-19:00 (2 horas)
	Sesión asincrónica 1 - Tarea 1: Elabora un cuadro sinóptico para diferenciar los significados de la probabilidad en la Educación Secundaria y añaden un ejemplo de situación-problema en cada significado	Lectura obligatoria 1: Batanero (2005). Significados de la probabilidad en la Educación Secundaria. RELIME *8*(3), 247-263 (Anexo 6)	10, 11 y 12 de noviembre
Reconocimiento de los significados de la probabilidad y puesta en práctica del análisis ontosemiótico	**Sesión sincrónica 2** - Se inicia con la reflexión de los significados de la probabilidad en educación secundaria (lectura obligatoria 1) (Anexo 6) - Se pide a los estudiantes a distinguir los significados de la probabilidad implicados en las situaciones problema de diagnóstico	- Google Meet: https://meet.google.com/mzj-hdhu - PPT (session 2) (Anexo 7) - Tabla de análisis de	12 noviembre Hora: 17:00 a 19:00 (2 horas)

	y en los ejemplos de situaciones que muestra la profesora (ver Anexo 7). - Se les entrega la tabla de análisis de configuración ontosemiótica en probabilidad, para analizar el problema 2 del diagnóstico inicial (Anexo 8) - Los estudiantes de forma individual identifican los significados de la probabilidad y los objetos matemáticos implicados en la situación 2 del diagnóstico inicial (Anexo 3), así como las posibles dificultades. Seguidamente, registran en la guía análisis de la configuración ontosemiótica. - Cada uno comparte y socializa en la sesión virtual la guía de análisis con el registro de los significados y objetos matemáticos identificados. - Se realiza la puesta en común de las respuestas dadas por los estudiantes	ontosemiótica en probabilidad (ver Anexo 8)	
	Sesión asincrónica 2 - Tarea 2. Consigna: Analizar la situación significativa A de la ficha 13 del cuaderno de Resolución de Problemas (Anexo 5). Describe su procedimiento de solución (prácticas matemáticas), identifica los objetos matemáticos primarios (situaciones-problema, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, proposiciones, argumentos) utilizando la tabla de análisis ontosemiótico (Anexo 8) y relaciona con un tipo de significado de la probabilidad. Menciona las dificultades que se observan.	- Ficha 9 de primer grado del cuaderno de trabajo de matemática: Resolvamos problemas. - Tabla de análisis ontosemiótico (Anexo 8)	Noviembre
Puesta en práctica. de los significados de la probabilidad y la configuración ontosemiótica	**Sesión sincrónica 3** - Se inicia con la fase de puesta en práctica, esto implica operativizar las nociones discutidas en la fase 3. - Se toma una situación problema (Situación significativa A de la sección de comprobación) resuelta de la ficha 9 de primer grado (Anexo 4). - Los estudiantes socializan su análisis y se discute sobre el procedimiento de solución y conflictos potenciales que puedan presentar la situación-problema - La profesora formadora orienta e institucionaliza el análisis de configuración ontosemiótica aplicando la tabla de análisis ontosemiótica (Anexo 8) a la situación tratada durante esta sesión (Anexo 9).	- Google Meet: https://meet.google.com/mzj PPT (session 3) Anexo 9 Tabla de análisis ontosemiótica en probabilidad (ver Anexo 8) - Situación significativa A de la ficha 9 del cuaderno de trabajo Resolvemos Problemas de primer grado	18 de noviembre Hora: 17:00 a 19:00 (2 horas)

		de educación secundaria.	
	Sesión asincrónica 3 - Los estudiantes trabajan de forma individual incorporando de manera crítica los elementos teóricos estudiados. - Tarea 3. Entrega de la guía de análisis de configuración ontosemiótica en probabilidad más elaborada que las desarrolladas en clase a partir de un trabajo autónomo. - Consigna: Analiza la situación 3 que resolviste en la sesión y la situación significativa B de la sección de comprobación de la ficha 9 de primer grado (Anexo 4) del cuaderno de trabajo de Matemáticas – Resolvamos Problemas. Describe y enumera las prácticas matemáticas, relaciona con un tipo de significado de la probabilidad, identifica los objetos matemáticos primarios (situaciones-problema, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, proposiciones, argumentos) utilizando la tabla de análisis ontosemiótico (Anexo 9)		25 de noviembre Entrega de la tarea final
Trayectoria didáctica II			
Introducción a una herramienta para la reflexión	**Sesión sincrónica 4** Se inicia haciendo preguntas a los estudiantes sobre según el Anexo 10: - ¿Qué es un material educativo? Menciona ejemplos - ¿Cómo debe ser un buen material educativo de matemáticas? - ¿Podrías valorar si el material educativo es de calidad o no? Justifica tu respuesta. - ¿Qué necesitamos para concluir que un material educativo de matemáticas es muy bueno? - Los estudiantes reflexionan y responden oralmente a las preguntas hechas. - La profesora presenta un Power Point (Anexo 10), donde se define la idoneidad didáctica, así mismo presenta los criterios e indicadores elaborados para el tema de la probabilidad. - La formadora presenta la ficha 13 del cuaderno de trabajo de segundo grado (Anexo 5) donde ejemplifica la	- Google Meet: https://meet.google.com/mzj - PPT (Sesión 4) (Anexo 10) - Ficha 13 del cuaderno de trabajo de segundo grado (Anexo 5).	24 de noviembre 2021 2 horas

	aplicación de los criterios e indicadores de idoneidad en probabilidad.		
	Sesión asincrónica 4 Se les entrega una lectura resumida sobre idoneidad didáctica de materiales curriculares (Autores, 2021) (Anexo 11).	Lectura obligatoria 2: Cotrado, et al. (2022). Criterios e indicadores de Idoneidad didáctica de materiales curriculares (Anexo 11).	24, 25 y 26 de noviembre 2021
Puesta en práctica de la guía de indicadores de idoneidad didáctica de materiales curriculares en probabilidad (ficha 9 del cuaderno de trabajo de primer grado)	**Sesión sincrónica 5** - Se inicia con la discusión y reflexión de la lectura titulada: Criterios e indicadores de idoneidad didáctica de materiales curriculares (Autores, 2021) (Anexo 11). - Se les entrega la guía de indicadores de idoneidad didáctica en probabilidad expresada y organizada en una tabla (Anexo 12). De igual forma se les entrega la ficha 9 del cuaderno de trabajo de primer grado (se divide en tres unidades de análisis: aplicamos, comprobación y análisis) y una consigna donde cada estudiante debe responder de forma individual (ver Anexo 4). - Para hacer seguimiento y apoyar el trabajo que desarrollan los estudiantes se les pide que compartan mediante un drive de forma individual. - Después de responder a las preguntas hechas en la consigna, los estudiantes responden marcando con una x la Guía de indicadores de idoneidad, donde también resumen la valoración dada a la ficha 9 del cuaderno de trabajo de primer grado y formulan algunas opiniones	- Google Meet: https://meet.google.com/mzj - Ficha 9 del cuaderno de trabajo de primer grado (Anexo 4). - Guía de indicadores de idoneidad didáctica para materiales curriculares en probabilidad (Anexo 12) - Consigna para valorar la ficha 9 - Lectura obligatoria (Anexo 11)	03 de diciembre 2021 2 horas

	críticas sobre si los indicadores de la guía son claros y suficientes.		
	Sesión asincrónica 5 Entrega de la consigna completa y valoración hecha a la ficha 9 de primer grado con la aplicación de la guía de indicadores de idoneidad para materiales curriculares en probabilidad (Anexo 10).	Consigna de PPT (Anexo 10)	05 de diciembre de 2021
Trayectoria didáctica III			
Reconocimiento de los significados de la probabilidad y puesta en práctica del análisis ontosemiótico de documentos normativos (Programa Curricular)	**Sesión sincrónica 6** - Se muestra el Programa Curricular de Educación Secundaria (PCES)-Área matemática (Anexo 13). - En el PCES se identifica el bloque de gestión de datos e incertidumbre. - Los estudiantes reconocen y seleccionan los niveles de competencia, las capacidades y desempeños de primer y segundo grado relacionados a la incertidumbre (probabilidades). - Se les facilita un cuadro con el desglose de competencias y desempeños (Anexo 14) de primer y segundo grado previamente categorizados (en DC1, DG1.1, DG1.2, DG1.3, etc) en donde deben completar los objetos y significados asociados de la probabilidad. - La formadora ejemplifica el análisis en una tabla (ver anexo 15) con el desempeño DG1.1 (primer grado) y se les pide a los estudiantes a continuar con el análisis de los desempeños que quedan de primer grado (Anexo 16). - Cada uno reporta y comparte el avance del análisis y se realiza la puesta en común de las respuestas dadas por los estudiantes.	- Google Meet: https://meet.google.com/mzj-hdhu - Programa Curricular de Educación Secundaria, área matemática (Anexo 13) - Cuadro de desempeños de primer y segundo grado (Ver anexo 14) Tabla para ubicar los significados y objetos matemáticos identificados (Ver anexo 15) PPT (sesión 6) (Anexo 16)	06 de diciembre de 2021 2 horas
	Sesión asincrónica 6 - Los estudiantes en esta fase analizan los desempeños de segundo grado de forma individual incorporando críticamente los elementos teóricos estudiados (Anexo 14). - Tarea 4. Entrega del cuadro de análisis ontosemiótico de los desempeños de segundo grado (DG2.1, DG2.2, DG2.3, DG2.4 y DG2.5) en probabilidad (Anexo 16).	- Cuadro de desempeños de primer y segundo grado (Ver anexo 14) - PPT (sesión 6) (Anexo 16)	13 de diciembre de 2021
Trayectoria didáctica IV			

Puesta en práctica de la guía de indicadores de idoneidad didáctica de documentos normativos en probabilidad (Programa Curricular)	**Sesión sincrónica 7** - Se inicia con la reflexión y reiteración de la guía de indicadores de idoneidad en probabilidad para materiales curriculares. - Se les entrega el programa curricular (Anexo 13) y la guía de idoneidad didáctica (Anexo 18) - Se descompone el PCES en unidades de análisis - Se inicia con la fase de puesta en práctica lo que implica aplicar la guía de valoración de la idoneidad didáctica en probabilidad al PCES.	Google Meet: https://meet.google.com/mzj- PPT sesión 7 (Anexo 17) GVID de la probabilidad en un programa curricular (Anexo 18)	07 de enero de 2022 2 horas
	Sesión asincrónica 7 Tarea 3. Entrega de informe sobre la valoración y aplicación de la guía de idoneidad didáctica en probabilidad al PCES	Classroom	15 de enero de 2022

ANEXO 2. Presentación de la sesión 1

Taller de análisis didáctico

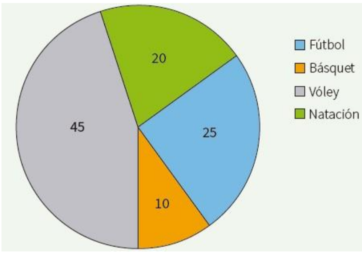
Bethzabe Cotrado Mendoza

Consigna

1. Resuelve los problemas y envía al *clasroom.*
2. Describe en el problema 1, el procedimiento que realizaste desde el inicio hasta llegar a la respuesta.
3. Identifica y lista los conceptos que utilizaste para resolver el problema.
4. Identifica y lista los símbolos, gráficos o tablas que utilizaste en el procedimiento.
5. Menciona las dificultades que tuviste durante la resolución del problema
6. Socializa y comparte en clase la solución del problema, la descripción del procedimiento, la lista de conceptos, símbolos y posibles dificultades.

Situación - problema

El gráfico representa la población de 100 estudiantes de una academia deportiva y las disciplinas que practican. Si un día cualquiera se escoge a un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que no practique básquet.



Solución y descripción del procedimiento

1) Identificamos cuatro sectores en el gráfico circular. Cada sector se relaciona con una disciplina deportiva que practican los estudiantes (futbol, básquet, vóley y natación) y sus respectivas frecuencias absolutas.
2) Representamos una tabla de distribución de frecuencias y sus respectivos cálculos.

Distribución de las disciplinas deportivas que practican los estudiantes

Disciplinas	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Vóley	45	$\frac{45}{100}=\frac{9}{20}=0{,}45$
Futbol	25	$\frac{25}{100}=\frac{1}{4}=0{,}25$
Natación	20	$\frac{20}{100}=\frac{1}{5}=0{,}2$
Básquet	10	$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}1$
Total	100	$\frac{100}{100}=1$

3) Identificamos en la tabla la frecuencia relativa del suceso practica básquet es $\frac{1}{10}$
4) La frecuencia relativa del suceso no practica básquet es la suma de las frecuencias relativas de los sucesos que practican vóley, futbol y natación: $\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$. Por lo tanto, la probabilidad de elegir al azar un estudiante que no practique básquet es $\frac{9}{10}$.

Objetos matemáticos implicados en la situación

Tipos	
Situación-problema	Calcular la probabilidad de un suceso simple
Lenguaje	Verbal
	Simbólico-numérico: enteros, fracciones, decimales, +, =, %
	Tabular: tabla de frecuencias
	Gráfico: diagrama de sector circular
Conceptos-definiciones	Probabilidad
	Espacio muestral
	Suceso
	Frecuencia absoluta
	Frecuencia relativa
	Fracción
	Azar
	Sector circular
Procedimientos	Interpretación e identificación de los datos en el gráfico del sector circula
	Representación y distribución de datos en la tabla de frecuencias
	Suma total de frecuencias absolutas
	Cálculo de frecuencias relativas a partir de los datos.
	Cálculo de la probabilidad a partir de las frecuencias relativas
Proposiciones	P1: La frecuencia relativa del suceso practican básquet es 1/10.
	P2: La frecuencia relativa del suceso no practica básquet es 9/10.
Argumentos	P1 porque, la probabilidad de ocurrencia es la frecuencia relativa de los que practican básquet
	P2 ya que, es el resultado de la suma de las frecuencias relativas de los sucesos que practican vóley, futbol y natación
Dificultades	El gráfico estadístico no tenía un título lo cual me creó cierta confusión.

Actividad asíncrona

Elabora un cuadro sinóptico para diferenciar los significados de la probabilidad en la educación secundaria y añaden un ejemplo de situación-problema en cada significado.

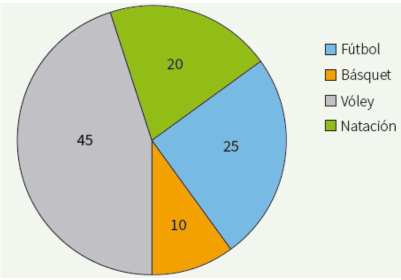
ANEXO 3. Cuestionario de diagnóstico inicial

Propuesta de situaciones problemas para el diagnóstico inicial de conocimientos sobre la probabilidad que tienen los futuros profesores en formación

Apellidos y nombres: ____

Se te propone tres situaciones-problemas resuelve y justifica cada paso hasta llegar a la respuesta.

1. El gráfico representa la población de 100 estudiantes de una academia deportiva y las disciplinas que practican. Si un día cualquiera se escoge a un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que no practique básquet.



2. Se lanza una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener “cara” exactamente dos veces?

3. En una empresa hay 200 trabajadores, de los cuales 100 son hombres y el resto son mujeres. Los que leen la revista “La Estación” son 30 hombres y 35 mujeres. Si se elige un empleado al azar, calcula la probabilidad de que:
   a) Sea hombre y no lea la revista “La Estación”.
   b) Que lea la revista “La Estación”.

ANEXO 4. Ficha 9 del cuaderno de trabajo: Resolvamos problemas secundaria 1.
URI: https://hdl.handle.net/20.500.12799/6862

Ficha
9

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Expresamos la comprensión sobre el valor de la probabilidad como más o menos probable de una situación aleatoria, y empleamos procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos simples mediante la regla de Laplace. Asimismo, justificamos mediante ejemplos la probabilidad de la ocurrencia de sucesos.

Promociones por inauguración de tienda

Una tienda de ropa ofrece a los clientes que efectúan compras mayores a 100 soles la posibilidad de girar la "Ruleta regalona" y obtener un beneficio. Si la flecha de la ruleta cae en la sección con el cartel "Premio", el cliente puede elegir un producto de igual o menor precio al monto de su compra completamente gratis. Si la flecha cae en la sección del caracol, el cliente se hace acreedor a un descuento del 10 % del monto de su compra. Finalmente, si la flecha cae en la sección de la estrella, se le agradece por su visita. Elva hizo una compra de S/120 y giró la ruleta.

Fuente: https://goo.gl/xrkSbL

Ruleta regalona

1. ¿Qué es más probable que reciba Elva: premio, descuento o el agradecimiento por la visita?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que Elva reciba algún beneficio económico?

117

ANEXO 5. Ficha 13 del cuaderno de trabajo: Resolvamos problemas secundaria 2.

URI: https://hdl.handle.net/20.500.12799/6864

Ficha

13

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Empleamos procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace. Asimismo, expresamos con lenguaje matemático nuestra comprensión sobre el valor de la probabilidad en una situación aleatoria.

El que espera desespera

Una empresa de buses tiene salidas a Chimbote solo los fines de semana. Después de revisar el flujo de viajeros en el último año, han podido estimar la probabilidad de tener determinadas cantidades de pasajeros los fines de semana.

Mediante la siguiente tabla, la empresa plantea tener buses operativos en cantidad suficiente para atender la demanda los fines de semana. ¿Cuál es el número de pasajeros que puede esperar la empresa?

Escenario	Cantidad de pasajeros	Probabilidad del escenario
Extraordinario (feriado largo)	600	0,1
Optimista (verano, fin de mes, vacaciones, etc.)	200	0,3
Regular (trabajo)	100	0,4
Pesimista (días de neblina, manifestaciones)	50	0,2

171

ANEXO 6. Lectura del artículo de Batanero (2005).

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *RELIME*, *8*(3), 247-263.

Significados de la probabilidad en la educación secundaria*

Carmen Batanero [1]

RESUMEN

En este trabajo partimos de un modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos, en el que se consideran seis elementos diferenciados y se distingue entre el significado dado al objeto en una cierta institución de enseñanza y el personal, adquirido por un alumno dentro de la institución. Utilizamos estas ideas para analizar los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Dicho modelo también nos permite tener también una visión semiótica del razonamiento matemático e interpretar algunos errores frecuentes al resolver problemas de probabilidad en términos de conflictos semióticos. Finalizamos con algunas recomendaciones para mejorar la enseñanza de la probabilidad.

- **PALABRAS CLAVE**: Significado y comprensión, probabilidad, desarrollo histórico, conflictos semióticos

ABSTRACT

We summarise a model to analyse the meaning of any mathematical concept where we distinguish five interrelated components and also distinguish the meaning that for a given concept has been proposed or fixed in a specific teaching institution, and the meaning given to the concept by a particular student in the institution. These ideas are used to analyse the different historical meanings of probability and how they were taken into account in the teaching of probability at secondary school level. The model also provides a semiotic view of mathematical reasoning and serves to interpret some errors in solving probability problems in terms of semitic conflicts. We conclude with some suggestions to improve the teaching of probability.

- **KEYWORDS**: Meaning and comprehension, probability, historic development, semiotic conflicts

Fecha de recepción: Noviembre de 2004 /Fecha de aceptación: Marzo de 2005

* Este trabajo forma parte de los proyectos HA2002-0069, SEJ2004-00789, Madrid, MCYT y FQM-126, Junta de Andalucía.

[1] Universidad de Granada, España.

ANEXO 7. Presentación de la sesión 2

Taller de análisis didáctico

Bethzabe Cotrado Mendoza

Significados de la probabilidad

- ¿Que han entendido sobre significado?
- ¿Qué tipo de significados de probabilidad propone la lectura?
- Que características debe tener un problema relacionarse con un tipo de significado de la probabilidad?
- Los problemas que resolviste la sesión anterior a que tipo de significado de la probabilidad corresponderán?
- Qué debemos reconocer en los problemas para poder relacionar con algún tipo de significado de la probabilidad?

Cuadro Comparativo de los Objetos matemáticos y los significados de probabilidad

Significado de probabilidad / Objetos matemáticos	Intuitivo	Clásico	Frecuencial	Subjetivo
Situaciones-problemas	Expresión de grados de creencia en la ocurrencia de sucesos.	Valoración de probabilidad en juegos de azar.	Previsión de tendencias en fenómenos aleatorios a partir de datos observados.	Estudio de sucesos donde la probabilidad puede cambiar en función de la información disponible .
Lenguajes	Eexpresiones cotidianas incluido el lenguaje numérico	Numérico - simbólico	Tabular y Gráfico	Verbal
Conceptos	-Azar y variabilidad -Suceso, seguro, posible, imposible -Posibilidad, grado de creencia	-Juego de azar -Casos favorables, casos posibles -Probabilidad -Juego equitativo -Experimento compuesto	-Colectivo (población); atributos -Ensayo; ensayos repetidos -Frecuencia (absoluta, relativa) -Valor estimado de la probabilidad Simulación	-Suceso incierto -Probabilidad como grado de creencia personal -Dependencia, independencia
Propiedades	-Impredecibilidad del resultado posible, cualquier resultado imposible, nunca se verifica, seguro, siempre ocurre, calificable comparando	-N° de resultados finito y numerable -Equiprobabilidad de sucesos elementales -Casos favorables, posibles -Valor objetivo, calculable -Regla de Laplace	-Colectivo -Atributos equiprobables o no -Probabilidad : valor objetivo estimable	-Suceso incierto: impredecible -Probabilidad : condicionada

Angela

Cuadro Comparativo de los Objetos matemáticos y los significados de probabilidad

Significado de probabilidad / Objetos matemáticos	Intuitivo	Clásico	Frecuencial	Subjetivo
Procedimientos	• Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas • Reconocer la impredecibilidad de un resultado • Reconocer tipos de suceso • Valorar cualitativamente posibilidades • Comparar cualitativamente posibilidades	• Analizar juegos de de azar. • Enumerar casos favorables y posibles • Diferenciar casos favorables • Distinguir sucesos equiprobables • Comparar con razonamiento proporcional • Aplicar la regla de Laplace	• Enumerar y discriminar atributos. • Calcular frecuencias relativas • Representar distribución de frecuencias • Leer e interpretar tablas de doble entrada • Estimar la probabilidad a partir de ensayos • Reconocer el carácter aproximado	• Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal
Argumentos	• Uso de ejemplos y contraejemplos • Generalización		• Apoyo gráfico para comprobación de propiedades • Simulación • Inductivo a partir de datos	• Razonamiento inductivo a partir de datos

Actividad

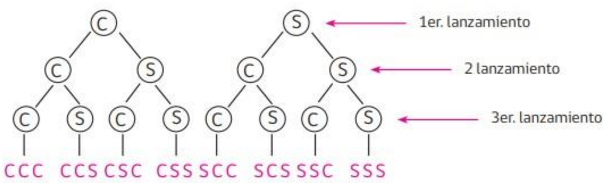
- Analizamos el problema 2 del diagnóstico inicial. Describimos su procedimiento de solución, identificamos los objetos matemáticos primarios (situaciones_problema, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, proposiciones, argumentos) y relacionamos con un tipo de significado de la probabilidad. Menciona las dificultades que se tuvo. Socializamos en clase.

Situación 2

Se lanza una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener “cara” exactamente dos veces?

Solución

•Dibujamos el diagrama de árbol situando las diferentes posibilidades de los casos:

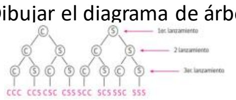


• Construimos el espacio muestral para cada situación propuesta de este grupo:

Ω = {(C; C; C), (C;C;S), (C;S;C), (C;S; S); (S;C;C), (S;C;S); (S;S;C), (S;S; S)}

- En los ocho resultados se observa que hay tres formas de obtener cara exactamente dos veces: (C;C;S), (C;S;C), (S;C;C), para responder al enunciado aplicamos la regla de Laplace por lo que la probabilidad es 3/8.

Problema 2

Intención del procedimiento	Enunciado y Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	Objetos matemáticos
Planteamiento del problema	Calcular la probabilidad de un suceso compuesto	• Significado: Clásico de la probabilidad • Lenguaje: verbal • Conceptos-Definiciones: experimento aleatorio compuesto, probabilidad, suceso compuesto.
Elaboración de una gráfica	Dibujar el diagrama de árbol 	• Lenguaje: gráfico (diagrama de árbol) • Procedimiento: dibujar el diagrama de árbol. • Conceptos-Definiciones: análisis combinatorio.
Hacer el listado del espacio muestral	Construir el espacio muestral Ω = {(C; C; C), (C;C;S), (C;S;C), (C;S; S); (S;C;C), (S;C;S); (S;S;C), (S;S; S)}	• Lenguaje: simbólico • Procedimiento: construir o listar el espacio muestral y los diferentes sucesos que compone. • Conceptos-Definiciones: espacio muestral, sucesos, resultados posibles.
Responder al enunciado aplicando la regla de Laplace	En los ocho resultados hay tres formas de obtener cara exactamente dos veces (C;C;S), (C;S;C), (S;C;C). Entonces: $P(B) = \frac{N° \ de \ resultados \ favorables}{N° \ de \ resultados \ posibles} = \frac{3}{8}$ $= 0{,}375$	• Lenguaje: simbólico-numérico, enteros, fraccionarios y decimales. • Procedimiento: calcular la probabilidad aplicando la regla de Laplace • Conceptos-Definiciones: sucesos, resultados favorables • Proposición: la probabilidad de obtener cara exactamente dos veces es tres. • Argumento: porque en los 8 sucesos del espacio muestral solo tres

Tarea de Classroom

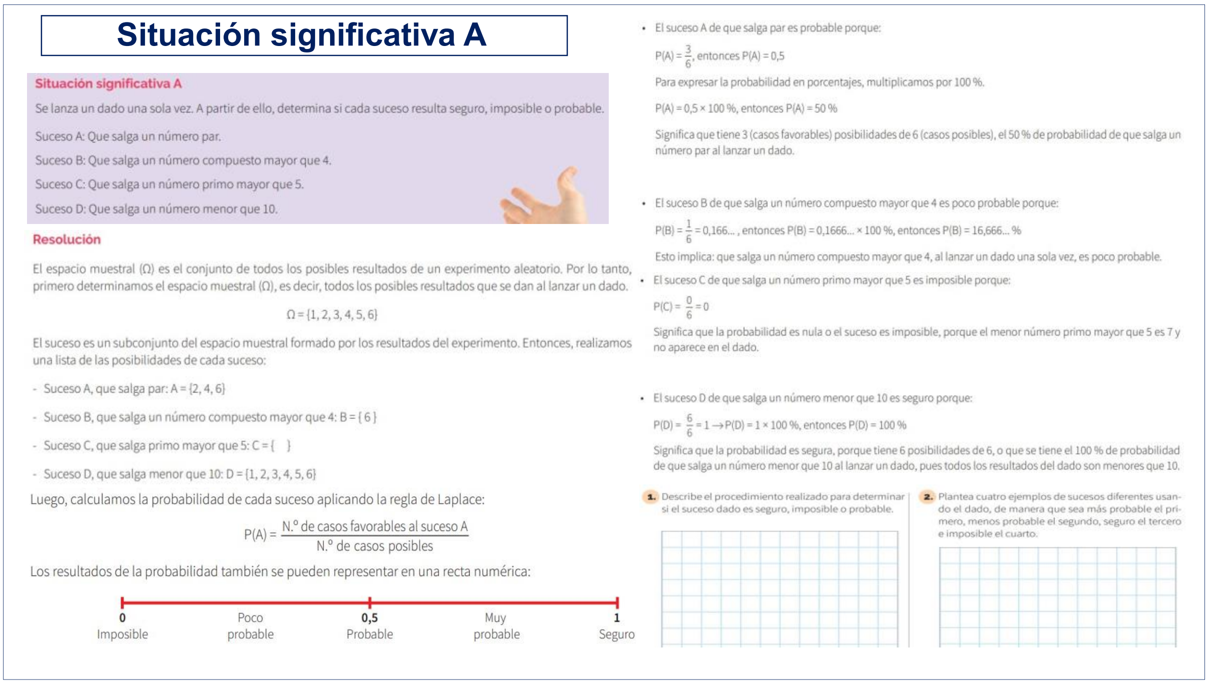
- Analizar la situación significativa A de la ficha 13 del cuaderno de Resolución de Problemas. Describe su procedimiento de solución, identifica los objetos matemáticos primarios (situaciones-problema, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, proposiciones, argumentos) utilizando la tabla de análisis ontosemiótico y relaciona con un tipo de significado de la probabilidad. Menciona las dificultades que se observan.

ANEXO 8. Configuración ontosemiótica

Tabla de configuración ontosemiótica

Uso e intencionalidad de las prácticas	Secuencia de prácticas elementales	Objetos referidos en las prácticas matemáticas
…	…	…
…	…	…
…	…	…
…	…	…
….	…	…

ANEXO 9. Presentación de la sesión 3



Situación significativa A

Situación significativa A

Se lanza un dado una sola vez. A partir de ello, determina si cada suceso resulta seguro, imposible o probable.

Suceso A: Que salga un número par.

Suceso B: Que salga un número compuesto mayor que 4.

Suceso C: Que salga un número primo mayor que 5.

Suceso D: Que salga un número menor que 10.

Resolución

El espacio muestral (Ω) es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Por lo tanto, primero determinamos el espacio muestral (Ω), es decir, todos los posibles resultados que se dan al lanzar un dado.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El suceso es un subconjunto del espacio muestral formado por los resultados del experimento. Entonces, realizamos una lista de las posibilidades de cada suceso:

- Suceso A, que salga par: A = {2, 4, 6}
- Suceso B, que salga un número compuesto mayor que 4: B = { 6 }
- Suceso C, que salga primo mayor que 5: C = {   }
- Suceso D, que salga menor que 10: D = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Luego, calculamos la probabilidad de cada suceso aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{N.° de casos favorables al suceso A}}{\text{N.° de casos posibles}}$$

Los resultados de la probabilidad también se pueden representar en una recta numérica:

- El suceso A de que salga par es probable porque:

  $P(A) = \frac{3}{6}$, entonces $P(A) = 0,5$

  Para expresar la probabilidad en porcentajes, multiplicamos por 100 %.

  $P(A) = 0,5 \times 100\ \%$, entonces $P(A) = 50\ \%$

  Significa que tiene 3 (casos favorables) posibilidades de 6 (casos posibles), el 50 % de probabilidad de que salga un número par al lanzar un dado.

- El suceso B de que salga un número compuesto mayor que 4 es poco probable porque:

  $P(B) = \frac{1}{6} = 0,166...$, entonces $P(B) = 0,1666... \times 100\ \%$, entonces $P(B) = 16,666...\ \%$

  Esto implica: que salga un número compuesto mayor que 4, al lanzar un dado una sola vez, es poco probable.

- El suceso C de que salga un número primo mayor que 5 es imposible porque:

  $P(C) = \frac{0}{6} = 0$

  Significa que la probabilidad es nula o el suceso es imposible, porque el menor número primo mayor que 5 es 7 y no aparece en el dado.

- El suceso D de que salga un número menor que 10 es seguro porque:

  $P(D) = \frac{6}{6} = 1 \rightarrow P(D) = 1 \times 100\ \%$, entonces $P(D) = 100\ \%$

  Significa que la probabilidad es segura, porque tiene 6 posibilidades de 6, o que se tiene el 100 % de probabilidad de que salga un número menor que 10 al lanzar un dado, pues todos los resultados del dado son menores que 10.

1. Describe el procedimiento realizado para determinar si el suceso dado es seguro, imposible o probable.

2. Plantea cuatro ejemplos de sucesos diferentes usando el dado, de manera que sea más probable el primero, menos probable el segundo, seguro el tercero e imposible el cuarto.

Descripción de procedimiento

- Se inicia con la definición del espacio muestral y representación simbólica Ω.
- Se determina el espacio muestral que se da al lanzar un dado: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- Se define un suceso señalando que "es un subconjunto del espacio muestral formado por los resultados del experimento".
- Se realiza una lista de posibilidades para cada suceso solicitado en el enunciado; sin especificar, si estos sucesos son elementales o compuestos.
- Una vez representados los sucesos, señala que para calcular la probabilidad de los sucesos se aplica la regla de Laplace, lo expresa de manera simbólica $P(A) = \frac{N° \ de \ casos \ favorables \ \ al \ suceso \ \ A}{N° \ de \ casos \ posibles}$; sin justificar del porqué de su aplicación.
- Se indica que los resultados de la probabilidad también se pueden representar en una recta numérica. Pero, no justifica su utilidad, ni menciona que se refiere a la escala de la probabilidad, a pesar de su representación simbólica.
- Se aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad de cada suceso.
- Se obtiene un valor fraccionario, se convierte en valor decimal y luego se expresa la probabilidad en porcentajes.

Análisis e identificación de objetos matemáticos

Intención del procedimiento	Enunciado y Secuencia	Objetos matemáticos
Planteamiento del problema	Determinar si cada suceso resulta seguro, imposible o probable. Suceso A: que salga un número par. Suceso B: que salga un número compuesto mayor que 4. Suceso C: que salga un número primo mayor que 5. Suceso D: que salga un número menor que 10.	• Significado: en el problema hay una cierta cuantificación y el espacio muestral consta de un número finito de sucesos elementales y equiprobables, la situación corresponde al significado clásico. • Lenguaje: verbal, simbólico-numérico. • Conceptos-Definiciones: experimento aleatorio simple, probabilidad, suceso simple y compuesto, suceso seguro, imposible y probable.
Definir y representar simbólicamente el espacio muestral	Se inicia con la definición del espacio muestral y representación simbólica Ω.	• Lenguaje: verbal, simbólico-numérico (Ω) • Conceptos-Definiciones: espacio muestral
Representar el espacio muestral simbólicamente	Se determina el espacio muestral que se da al lanzar un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.	• Lenguaje: simbólico, verbal, simbólico-numérico (Ω). • Procedimiento: construir o listar el espacio muestral y los diferentes sucesos que compone. • Conceptos-Definiciones: espacio muestral, sucesos, resultados posibles.

Tarea de Classroom

- Analizar el problema 3 del diagnóstico inicial y la situación significativa B de la ficha 13 del cuaderno de Resolución de Problemas. Describe su procedimiento de solución, identifica los objetos matemáticos primarios (situaciones-problema, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, proposiciones, argumentos) utilizando la tabla de análisis ontosemiótico y relaciona con un tipo de significado de la probabilidad. Menciona las dificultades que se observan en cada situación-problema.

ANEXO 10. Presentación de la sesión 4

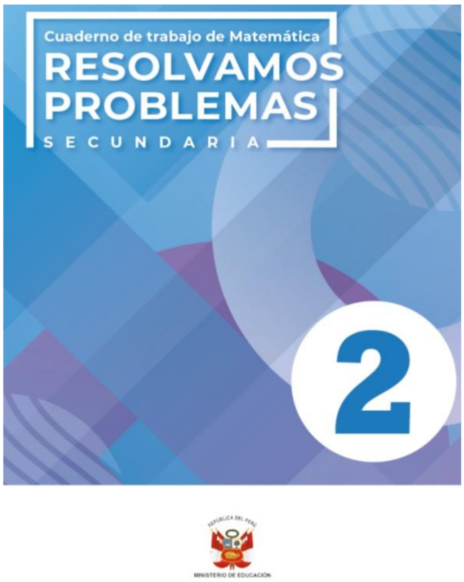
Idoneidad didáctica

Bethzabé Cotrado

Materiales educativos

- ¿Qué es un material educativo? Menciona ejemplos
- ¿Cómo debe ser un buen material educativo de matemáticas?
- Podrías valorar si el material educativo es de calidad o no? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué necesitamos para concluir que un material educativo de matemáticas es muy buena?

Cuaderno de trabajo de matemática “Resolvamos problemas”



CRITERIOS DE IDONEIDAD (CALIDAD)

1) ¿el material educativo muestra unas matemáticas de calidad?
(Idoneidad epistémica)

2) ¿Los alumno aprenden con las tareas propuestas del material educativo?
(Idoneidad cognitiva)

3) ¿el material educativo utiliza recursos manipulativos o TIC, etc. adecuados?
(Idoneidad de medios)

4) ¿Las tareas y su gestión promueven la implicación de los alumnos?
(Idoneidad emocional)

5) ¿el material educativo realiza una gestión adecuada de la interacción entre alumnos?
(Idoneidad interaccional)

6)¿los contenidos se corresponden con el currículum y son útiles para su inserción social y laboral?
(idoneidad ecológica)

Componentes	Indicadores de idoneidad epistémica
Significados	**Situaciones-problemas**
	- Se proponen situaciones -problemas que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica). - Se incluye una muestra representativa de situaciones de contexto real o virtual distinguiendo lo aleatorio de situaciones deterministas. - Se plantean situaciones donde el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias (problematización).
	Lenguajes
	-Se utilizan diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólico-numéricos, gráficos). -El nivel de lenguaje de la probabilidad es adecuado a los estudiantes a quienes se dirige. Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de experimentos aleatorios en los diferentes registros mencionados
	Conceptos-definiciones
	-Los conceptos -definiciones fundamentales de la probabilidad están formuladas de forma clara y correcta adaptados al nivel educativo al que se dirigen. -Se contemplan los conceptos -definiciones de experimento aleatorio y determinista, espacio muestral, suceso, suceso simple y compuesto, suceso seguro e imposible, casos favorables y posibles, frecuencia relativa, convergencia, simulación, experimentación, equiprobabilidad y probabilidad. -Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones.
	Proposiciones
	-Se emplean proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, suceso seguro y del complementario, propiedad de las frecuencias relativas, estabilidad de frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad, regla de Laplace y equiprobabilidad. -Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones.
	Procedimientos
	-Se consideran la comparación cualitativa de probabilidades; construcción del espacio muestral, distinción de casos favorables y posibles, aplicación de la regla de Laplace, empleo de tablas y diagramas de árbol, realización de predicciones a partir de observaciones de experimentos o datos, estimación de probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, cálculo y representación de frecuencias, interpretación de tablas y gráficos, simulación de experimentos aleator. -Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar procedimientos.
	Argumentos
	-Las proposiciones y procedimientos se explican y argumentan (se justifican y demuestran) de forma adecuadas según el nivel educativo al que se dirigen. -Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba. -Se usan simulación de experimentos para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas
Relaciones	-Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. -Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico).
Conflictos epistémicos	-Las situaciones -problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, procedimientos, etc. se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones y ambigüedades.

ANEXO 11. Lectura obligatoria 2: Idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales peruanos de educación secundaria en probabilidad

Extracto de lectura del artículo: Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales peruanos de educación secundaria en probabilidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 36*(73), 888-922.

Idoneidad Didáctica de Materiales Curriculares de Educación Secundaria en Probabilidad

Resumen

Los materiales curriculares constituyen un puente entre el currículo previsto y el implementado en el aula, actuando como mediadores en el aprendizaje de los estudiantes. Por tanto, resulta pertinente que desde la investigación educativa se estudie su grado de adecuación a los procesos de enseñanza y aprendizaje planificados. Valorar la pertinencia de estos materiales requiere desarrollar instrumentos que guíen la reflexión en las diferentes dimensiones de los procesos de estudio de las matemáticas. Presentamos una revisión sistemática de los criterios e indicadores de idoneidad didáctica de probabilidad con la finalidad de elaborar una guía para valorar materiales curriculares peruanos de Educación Secundaria (estudiantes de 12 y 13 años). Dicho instrumento se aplica para analizar cuadernos de trabajo de probabilidad que han sido elaborados por la misma institución de la que emana la normativa curricular.

1. Introducción

Los constantes movimientos de reformas curriculares en los sistemas educativos han venido incorporando contenidos propios del análisis de datos y la probabilidad que los estudiantes deben lograr para responder a las exigencias de la sociedad actual. La inclusión y tratamiento de la probabilidad desde los primeros niveles educativos se justifica tanto a partir de su utilidad para la vida diaria como por su papel instrumental en otras disciplinas. La probabilidad, como parte de la matemática y base de otras disciplinas, es esencial para preparar a los estudiantes de cara a tomar decisiones adecuadas en situaciones aleatorias (GAL, 2005).

El sistema educativo peruano no ha sido ajeno a estos cambios y propuestas curriculares y así, en las últimas décadas, el bloque de estadística y probabilidad se ha integrado y consolidado desde el primer ciclo educativo como base de la competencia de resolver problemas de gestión de datos e incertidumbre (MINEDU, 2017).

Diversas orientaciones curriculares destacan la necesidad de tratar los distintos significados (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico) de la probabilidad de manera articulada y adecuada a la edad de los estudiantes y sus conocimientos previos, e insisten en la importancia de la experimentación, la modelización y la simulación con ayuda de software en el aprendizaje de la probabilidad (BATANERO, 2005; BATANERO Y BOROVCNIK, 2016; INZUNSA, 2013; VÁSQUEZ; ALSINA, 2019; ZIMMERMANN; JONES, 2002).

En ese contexto, surge el interés y la necesidad de analizar aquellos materiales curriculares que condicionan y constituyen el referente para organizar la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Los materiales curriculares son recursos de naturaleza muy diversa que juegan un papel importante en el panorama educativo y constituyen un reflejo del currículo oficial (REMILLARD; KIM, 2020). Entre ellos se distinguen libros de texto, guías o manuales para profesores, cuadernos de trabajo para los estudiantes u otros medios de instrucción basados en la tecnología educativa, como libros electrónicos y software (BROWN, 2009; PEPIN; GUEUDET, 2020; REMILLARD et al., 2014). Constituyen herramientas que apoyan la toma de decisiones educativas por parte de los docentes y actúan como fuente de aprendizaje y vehículo de interacción entre estudiantes. Garantizar el vínculo entre el currículo previsto y el implementado les ha asegurado el reconocimiento como mediadores de las políticas educativas.

Gran parte de la literatura sobre materiales curriculares se ha centrado en los libros de texto, descuidando otros componentes, como son los cuadernos de trabajo para el estudiante. Estos tienen el objetivo de proporcionar a los estudiantes actividades estructuradas y secuenciadas para complementar y reforzar lo desarrollado en clase (HOADLEY; GALANT, 2016) y se erigen como recurso a partir del cual organizar la introducción de los contenidos desde la resolución de problemas. Los cuadernos de trabajo no solo consideran el desarrollo de los contenidos del curso en cuestión, sino que también abordan la conexión con los conocimientos previos que deben poseer los estudiantes, indicaciones u orientaciones y, a veces, elementos motivadores contextualizados a las necesidades, intereses, valores y creencias de los estudiantes. Valorar la adecuación de estos materiales requiere desarrollar instrumentos que guíen la reflexión en las diferentes dimensiones que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La secuencia de prácticas matemáticas y didácticas propuestas en un libro de texto o cuaderno de trabajo determina un proceso instruccional previsto o planificado que el docente que tome la decisión de usarlo debe evaluar y adaptar en base a las necesidades específicas de sus estudiantes, circunstancias contextuales, metas y estándares locales (BROWN, 2009). En esta línea, el constructo idoneidad didáctica, propuesto en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (GODINO; BATANERO; FONT, 2007), puede ser utilizado como una herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre la adecuación de éstos y otros recursos educativos (BALCAZA; CONTRERAS; FONT, 2017; Autores, 2019; Autores, 2021; MONJE; SECKEL; BREDA, 2018).

Ahora bien, la particularidad de cada contenido matemático requiere la elaboración de guías específicas para los distintos contenidos curriculares, en particular, en el caso de la probabilidad (Autores, 2018). Por otro lado, además del contenido en sí, deben tenerse en cuenta las características propias del tipo de material en la elaboración de dichos instrumentos.

Por este motivo, esta investigación se propone elaborar una guía de idoneidad didáctica para valorar materiales curriculares en el contenido de la probabilidad y ejemplificar su aplicación en el contexto curricular de la Educación Secundaria peruana. En este sentido, cabe destacar que los escasos estudios existentes sobre el tratamiento de los contenidos de probabilidad en el currículo y en los libros de texto ponen de manifiesto una mayor presencia de los contenidos ligados al significado clásico en detrimento de los enfoques frecuencial o subjetivo (SÁNCHEZ, 2009; ORTIZ, 2014; VÁSQUEZ; ALSINA; 2015). Esto trae como consecuencia que el contexto privilegiado sea el de los juegos de azar y que las situaciones propuestas no sean suficientemente representativas y equilibradas. El análisis que se presenta en investigaciones como las de Ortiz (2014) o Vásquez y Alsina (2015) va destinado al reconocimiento de objetos y significados, centrado específicamente en el análisis de las situaciones-problemas, elementos lingüísticos y conceptos.

Con el objetivo de validar la operatividad de esta guía, mostraremos los resultados de su aplicación para valorar la idoneidad didáctica de las fichas que tratan la probabilidad en dos cuadernos de trabajo, uno de primer grado y otro de segundo (estudiantes de 12 y 13 años) de Educación Secundaria en Perú. Conviene observar que estos cuadernos de trabajo forman parte de los materiales curriculares oficiales puestos a disposición de los docentes desde la misma administración de la que emana la norma curricular, con lo que la aplicación de la guía de idoneidad abre la posibilidad de matizar la propia norma y evaluar su coherencia. Los cuadernos de trabajo son materiales físicos distribuidos por el Ministerio de Educación peruano a los estudiantes que pueden utilizar tanto en clase como en casa, si bien disponen también de su versión virtual. Además, dado que ni estudiantes ni profesores disponen de libro de texto, el profesor usa los cuadernos de trabajo para planificar la enseñanza sobre cada contenido específico.

El artículo se organiza en los siguientes apartados. En la sección 2 se introducen los elementos del marco teórico que empleamos en este trabajo. La metodología seguida en la investigación se describe en la sección 3. La sección 4 incluye la descripción de la revisión y adecuación de los indicadores de idoneidad didáctica para el estudio de materiales curriculares de probabilidad en Educación Secundaria peruana. En la sección 5 se aplica dicha herramienta al análisis de las fichas de cuadernos de trabajo. El artículo concluye con una síntesis de las conclusiones y cuestiones abiertas del trabajo.

2. Marco teórico

La idoneidad didáctica es una cualidad graduable de los procesos de enseñanza y aprendizaje que supone la articulación sistemática y coherente de seis facetas que interactúan entre sí (GODINO, 2013):

- *Idoneidad epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto a un significado de referencia. El significado de referencia será relativo al nivel educativo correspondiente y deberá ser elaborado considerando los diversos tipos de problemas y contextos, la diversidad y adecuación de las representaciones, definiciones, procedimientos, proposiciones, y argumentos que las sustentan.
- *Idoneidad cognitiva:* grado en que los significados implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, y los significados personales logrados son próximos a los significados pretendidos. Un adecuado grado de idoneidad cognitiva requiere asegurar que los estudiantes dispongan de los conocimientos previos necesarios para comprender el tema, que los contenidos presentados tengan una dificultad manejable para el nivel educativo en cuestión y que las situaciones respondan a distintos niveles de dificultad. Para alcanzar una idoneidad cognitiva alta será importante también planificar una evaluación adecuada que permita medir el aprendizaje.
- *Idoneidad afectiva*: expresa el grado en que la secuencia atiende a los elementos afectivos, buscando la implicación del alumno en el proceso de estudio. Se relaciona tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen del alumno y de su historia escolar previa. Lograr una idoneidad afectiva alta supone identificar y abordar el desarrollo de emociones, actitudes, creencias y valores.
- *Idoneidad interaccional*: grado en que los tipos de configuraciones didácticas implementadas y su articulación permiten identificar y resolver los conflictos semióticos potenciales (disparidades entre significados de referencia, pretendidos e implementados) que se producen durante el proceso de instrucción. Las distintas configuraciones deben ofrecer oportunidades para abordar posibles ambigüedades, plantear tareas que persigan la comunicación y contemplar momentos de reflexión compartida.
- *Idoneidad mediacional*: disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje. En particular, un alto grado de idoneidad mediacional supone reservar espacio suficiente a los contenidos más importantes del tema, dedicando mayor amplitud a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.
- *Idoneidad ecológica*: ajuste pertinente del proceso a la norma curricular, las condiciones de la sociedad y al entorno socio-profesional. Lograr una alta idoneidad ecológica requiere, en particular, que los contenidos se adecuen a las directrices curriculares, se eduque en valores, abordando la diversidad y se establezcan conexiones intra e interdisciplinares.

Los criterios de idoneidad actúan como normas de corrección que establecen cómo debería realizarse un proceso de enseñanza y aprendizaje (BREDA, et al., 2018, p. 264). Tal proceso se considera idóneo cuando se consigue un equilibrio entre los diferentes criterios parciales de idoneidad, teniendo en cuenta que “la idoneidad didáctica es relativa a las circunstancias locales en que tiene lugar el proceso de estudio” (GODINO, 2013, p. 117). Estas normas deben ser consensuadas por la comunidad interesada en la educación matemática o por un sector relevante de ésta. Las mismas son útiles a priori, puesto que orientan cómo se deben hacer las cosas, y a posteriori, dado que permiten valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje implementado. Por este motivo, el uso de los criterios de idoneidad didáctica permite al profesor reflexionar y tomar decisiones tanto en el diseño como en el rediseño de los procesos de instrucción, buscando de manera autónoma y en función del contexto, acciones para conseguir una mejora de sus procesos de enseñanza y aprendizaje (Breda et al., 2018).

Para que estas normas o principios sean operativos es necesario establecer un sistema de componentes e indicadores en cada una de sus dimensiones, que guíen de manera efectiva la reflexión del profesor sobre aspectos concretos de un proceso instruccional (planificado o implementado) o una parte de este (GODINO, 2013), de forma que puede ser comparada con otros colegas en un marco común. Además, los componentes e indicadores de idoneidad deben enriquecerse y particularizarse de acuerdo con el tema específico que se quiere enseñar (BREDA et al., 2018) y con la especificidad del contexto educativo. Esto supone llevar a cabo una revisión sistemática de los resultados de investigación sobre los conocimientos didáctico-matemáticos en cada contenido específico, de cara a concretar los criterios generales en unos criterios específicos (Autores, 2018; BREDA et al., 2018). Así, una vez elaborada una guía de indicadores de idoneidad en un contenido concreto, puede ser utilizada para analizar aspectos parciales de materiales curriculares, como pueden ser libros de texto o manuales escolares en relación con dicho tema.

En Autores (2018) se presenta el proceso de construcción de una guía para la valoración de la idoneidad didáctica en relación con la probabilidad y su aplicación por un profesor como instrumento de reflexión sobre la implementación de una unidad didáctica con un grupo de alumnos de Educación Secundaria. Para la elaboración de dicho instrumento, los autores realizaron un análisis del contenido de investigaciones clave sobre distintos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en Educación Secundaria (BATANERO, 2005;

BATANERO Y GODINO, 2002; GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1987; GAL, 2005; WILLIAMS; CONNOLLY, 2006; SERRANO et al., 1998, entre otras), lo que les permitió extraer indicadores específicos de idoneidad en cada faceta y cada componente propuesta por Godino (2013).

En nuestro trabajo, ponemos el foco de atención en las fichas dedicadas a la probabilidad en los cuadernos de trabajo de primer y segundo grado de Educación Secundaria peruana. La secuencia de prácticas matemáticas y didácticas que se incluye en un determinado material curricular, como puede ser un cuaderno de trabajo, describe un proceso de instrucción previsto o planificado que puede servir de apoyo al profesor para diseñar e implementar un proceso de estudio efectivo. El profesor que toma la decisión de usar un material en concreto como recurso para apoyar su enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, deberá tener en cuenta la calidad y pertinencia del contenido, la "buena matemática" (Breda et al., 2017), y si lo que se pretende enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos ya saben. Sin embargo, los procesos instruccionales no sólo se ven afectados por aspectos epistémicos y cognitivos, por lo que es preciso valorar, teniendo en cuenta las restricciones impuestas por el medio, aspectos de tipo afectivo (por ejemplo, en qué medida las situaciones propuestas pueden ser de interés para los estudiantes), interaccional (por ejemplo, la presentación y secuenciación del contenido es adecuada) o ecológico (adaptación curricular y al proyecto educativo) que finalmente influirán en la idoneidad didáctica del proceso instruccional implementado.

Dado que nuestro objeto de estudio son los materiales curriculares de Educación Secundaria en probabilidad, entendidos como procesos de instrucción planificados sobre dicho contenido, se hace necesario adecuar o reformular algunos de los criterios y componentes de Autores (2018) al nuevo contexto. Esto supone incluir aquellos componentes que estaban ausentes en las facetas epistémica (conflictos epistémicos) y cognitiva (diferencias individuales, conflictos cognitivos y evaluación) de la guía de Autores (2018), así como concretar el instrumento por medio de indicadores observables en las demás facetas, según los componentes contemplados en Autores (2021). Para ello fue necesaria la revisión sistemática de nuevas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, en particular, de trabajos previos sobre análisis de materiales curriculares (fundamentalmente, libros de texto) en dicho tema (BATANERO et al, 2005; AUTORES, 2021; GÓMEZ et al, 2013; GÓMEZ et al., 2014; entre otras), que permitiera fundamentar criterios e indicadores específicos para el análisis de dichos recursos instruccionales.

3. Revisión de indicadores para analizar materiales curriculares en probabilidad

El sistema de indicadores de idoneidad didáctica se puede entender y usar como un instrumento aplicable a la evaluación de procesos de instrucción matemática (GODINO et al., 2012). Sin embargo, para asegurar su validez como instrumento de valoración que propicie la reflexión orientada a la mejora, es necesario adecuar y fundamentar dichos indicadores en base al contenido y la especificidad del proceso instruccional considerados. En nuestro caso, para el análisis de los materiales curriculares partimos de los componentes e indicadores propuestos por Godino (2013) y Godino et al. (2012). Tales criterios se formularon con la intención de "analizar la interacción entre las funciones del profesor y los alumnos a propósito de un contenido matemático específico" (GODINO, 2013, p.17), lo que supone considerar cuestiones, por ejemplo, sobre la interacción profesor-alumno y alumno-alumno, así como aspectos de temporalización y ambiente en el aula. Dado que nuestro objeto de estudio es son fichas de cuadernos de trabajo sobre probabilidad, entendidas como procesos de instrucción planificados, se hace necesario adecuar o reformular algunos de los criterios y componentes de Godino (2013) y Godino et al. (2012) al nuevo contexto.

4.1 Indicadores de idoneidad epistémica

Los indicadores de idoneidad epistémica permiten valorar aspectos que conducen a la representatividad de los significados institucionales pretendidos respecto a un significado de referencia. Como señalan Breda et al. (2018) la lista de indicadores de idoneidad didáctica debe complementarse "a partir del paso previo de reconstrucción del significado de referencia del tema específico que se quiere enseñar" (p. 272).

Los significados de referencia de la probabilidad contemplados en los currículos actuales del nivel educativo correspondiente a secundaria son: intuitivo, subjetivo, frecuencial, clásico y axiomático (BATANERO, 2005; BATANERO; BOROVCNIK, 2016; GODINO; BATANERO; CAÑIZARES, 1987; HENRY; PARZYSZ, 2005; Autores, 2018). Cada uno de estos significados implican diferencias específicas, no solo en la definición de la probabilidad en sí, sino también en los conceptos, propiedades y procedimientos relacionados que han surgido para resolver o modelar varios problemas o fenómenos particulares del mundo real (BATANERO, 2005; BATANERO; BOROVCNIK, 2016).

El significado *intuitivo* se corresponde con las ideas intuitivas que pueden tener los niños acerca de la incertidumbre y el uso cotidiano de términos provenientes de experiencias y contextos ligados a fenómenos aleatorios. El significado *subjetivo* desarrolla esta idea de la probabilidad como grado de creencia basado en el juicio personal que puede revisarse a partir del conocimiento y la experiencia de cada individuo. La primera definición matemática de probabilidad viene asociada al significado *clásico*. Fue dada por De Moivre en 1718 y luego refinada por Laplace en 1814 como "la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables" (BATANERO, 2005). Esta definición, válida solo para espacios muestrales con un número finito de sucesos elementales y equiprobables, dio lugar a la regla de Laplace y al cálculo de la probabilidad en situaciones de juegos de azar, donde se suele aplicar el razonamiento combinatorio (BATANERO Y BOROVCNIK, 2016).

En el significado *frecuencial* que se origina a partir de la publicación por Bernoulli de la primera ley de los grandes números, se define la probabilidad como el valor hipotético hacia el cual tiende a estabilizarse la frecuencia relativa de un suceso al repetir el experimento un número grande de veces. Frente al enfoque clásico, tiene el inconveniente de que nunca se llega a calcular el valor verdadero de la probabilidad: sólo se estima mediante la frecuencia relativa, lo que lleva a confundirla con la probabilidad (BATANERO, 2005). Sin embargo, tiene la ventaja de poder aplicarse a experimentos con sucesos no equiprobables.

Finalmente, la *teoría axiomática* resuelve el problema de organización y estructuración de los restantes significados parciales de la probabilidad y permite desarrollar todos los resultados conocidos en el momento sobre cálculo de probabilidades. No obstante, aunque algunos textos, al final de la secundaria, incorporan los axiomas de Kolmogorov, el significado axiomático es demasiado formal y solo aconsejable en niveles universitarios (BATANERO; BOROVCNIK, 2016; GODINO et al., 1987).

Cada significado comporta sistemas de prácticas (operativas y discursivas) y objetos matemáticos (situaciones-problemas, lenguajes, reglas, argumentos y relaciones) diferentes, que deben ser considerados de manera conjunta e integrada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad (BATANERO, 2005; Autores, 2018). Así, las situaciones-problemas propuestas en el material curricular deben, por un lado, ser representativas de los significados de referencia y, por otro lado, permitir contextualizar, ejercitar y aplicar los conocimientos pretendidos. Para ser valoradas de forma positiva deben permitir que el estudiante genere modelos para representar y relacionar los diferentes significados de la probabilidad (Autores, 2018).

El material curricular debe reflejar el uso adecuado y diferenciado de diversas representaciones lingüísticas de la probabilidad como son: las expresiones verbales, simbólico-numéricos, tabulares y gráficas (GÓMEZ; ORTIZ; BATANERO; CONTRERAS, 2013). Así mismo, debe prestar atención a las definiciones (explícitas o no), las proposiciones y los procedimientos vinculados a los distintos significados de la probabilidad, que deben estar adaptados al nivel educativo al que se dirigen. Por ejemplo, debe hacer explícita la definición de casos favorables, no favorables y posibles de manera previa a la introducción de la regla de Laplace, introducir la noción de juego equitativo, diferenciar entre probabilidad y su valor estimado por medio de frecuencias relativas (GÓMEZ; ORTIZ; GEA, 2014). Igualmente se debe precisar la finitud del número de resultados que permita la asignación de probabilidades según el significado clásico, así como garantizar la equiprobabilidad de los sucesos elementales, de manera que se pueda aplicar la regla de Laplace (GÓMEZ et al, 2014).

En relación con el significado frecuencial, se debe insistir en el aumento en la fiabilidad de la estimación con el tamaño de muestra, propiedad básica en la comprensión de la ley de los grandes números y las nociones de variabilidad y precisión. Es importe enfatizar que la estabilidad de las frecuencias requiere la realización de ensayos repetidos con diferentes tamaños de muestra, así como explicar la diferencia entre "calcular la probabilidad", del significado clásico, y "estimar la probabilidad", del frecuencial (GÓMEZ; BATANERO; CONTRERAS, 2014). El material debe contemplar momentos en los que se generen y negocien las reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos) que se adaptan a las circunstancias. Estas deben ser validadas mediante argumentos pertinentes y diversos tipos de razonamientos.

Dentro del componente de relaciones se valora si el material curricular presenta los objetos matemáticos característicos de cada significado[1] (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico), pero también que estos significados aparezcan conectados y articulados.

[1] Una descripción de los objetos característicos de cada significado de la probabilidad en educación secundaria puede consultarse en la Tabla 1 de Batanero (2005) o en Autores (2018), secciones 3.1.1. a 3.1.4.

Por otro lado, se incluye el componente relativo a conflictos epistémicos para valorar si el material curricular presenta desajustes con el significado de referencia que pueden venir dados por medio de carencias, ambigüedades o errores en las definiciones, problemas con enunciados incomprensibles, soluciones incorrectas a los ejemplos, procedimientos incorrectos o no justificados. Es importante tener en cuenta algunos conflictos de tipo epistémico identificados previamente en el análisis de libros de texto tales como no hacer explícita la equiprobabilidad de sucesos elementales (lo que puede derivar en el sesgo de equiprobabilidad), no reconocer el carácter aproximado de la estimación del valor de probabilidad (diferenciar el valor teórico de la probabilidad y su estimación) u obviar que la fiabilidad de la estimación aumenta con el tamaño de la muestra, lo que puede conducir a sesgos relativos a la heurística de representatividad (GÓMEZ et al., 2014).

Partiendo de los indicadores para la idoneidad epistémica en probabilidad propuestos en Autores (2018) y teniendo en cuenta las características propias de los materiales curriculares, incluimos en el Cuadro 1 una nueva versión de dichos indicadores para cada componente y subcomponente de esta.

Componentes	**Indicadores**
Significados	Situaciones-problemas
	- Se proponen situaciones-problemas que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica). - Se incluye una muestra representativa de situaciones de contexto real o virtual distinguiendo lo aleatorio de situaciones deterministas. - Se plantean situaciones donde el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias (problematización).
	Lenguajes
	- Se utilizan diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólico-numéricos, gráficos), señalando las relaciones entre las mismas. - El nivel de lenguaje de la probabilidad es adecuado a los estudiantes a quienes se dirige. - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de experimentos aleatorios en los diferentes registros mencionados
	Conceptos-definiciones
	- Los conceptos-definiciones fundamentales de la probabilidad están formuladas de forma clara y correcta adaptados al nivel educativo al que se dirigen. - Se contemplan los conceptos-definiciones de experimento aleatorio y determinista, espacio muestral, suceso, suceso simple y compuesto, suceso seguro e imposible, casos favorables y posibles, frecuencia, frecuencia relativa, convergencia, simulación, experimentación, equiprobabilidad y probabilidad. - Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones.
	Proposiciones
	- Se emplean proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, suceso seguro y del complementario, propiedad de las frecuencias relativas, estabilidad de frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad, regla de Laplace y equiprobabilidad. - Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones.
	Procedimientos
	- Se consideran la comparación cualitativa de probabilidades; construcción del espacio muestral, distinción de casos favorables y posibles, aplicación de la regla de Laplace, empleo de tablas y diagramas de árbol, realización de predicciones a partir de observaciones de experimentos o datos, estimación de probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, cálculo y representación de frecuencias, interpretación de tablas y gráficos, simulación de experimentos aleatorios. - Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar procedimientos.
	Argumentos
	- Las proposiciones y procedimientos se explican y argumentan (se justifican y demuestran) de forma adecuadas según el nivel educativo al que se dirigen. - Se favorece la justificación de los enunciados y proposiciones matemáticas mediante diversos tipos de razonamientos y métodos de prueba.

	- Se usan simulación de experimentos para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico).
Conflictos epistémicos	- Las situaciones-problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, procedimientos, etc. se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones y ambigüedades.

Cuadro 1 - Componentes, subcomponentes e indicadores de idoneidad epistémica (Fuente: elaborado por los autores).

4.2 Indicadores de idoneidad cognitiva

Los indicadores de idoneidad cognitiva consideran aquellos factores que permiten lograr una adaptación progresiva de los significados institucionales pretendidos a los significados personales logrados de los estudiantes (GODINO, 2013). Para valorar la idoneidad cognitiva de un proceso de instrucción sobre probabilidad para educación secundaria, en Autores (2018) se establecen indicadores relativos a los conocimientos previos. Sin embargo, hemos considerado adecuado incluir además las componentes diferencias individuales, conflictos cognitivos y evaluación, según la propuesta de Godino (2013).

En relación a los conocimientos previos se valora que el material curricular tenga en cuenta o inicie la secuencia didáctica a partir de contenidos conocidos por los estudiantes: situaciones-problema en las que se conjetura sobre experimentos aleatorios sencillos, distinción entre lo aleatorio y lo determinista, empleo de la frecuencia relativa; uso de registros para representación de la información con los que los estudiantes están familiarizados (por ejemplo, diagramas de barras y tablas), la regla de Laplace comienza a usarse en casos sencillos, etc. Así, se garantiza que el estudio de la probabilidad se logre de manera progresiva e integral desde sus diversos significados. Al respecto, los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000), así como las investigaciones de Batanero (2005) y Autores (2018) sugieren comenzar con ideas intuitivas de azar y probabilidad centradas en el contexto y las propias experiencias de los estudiantes, con algunos matices vinculados al significado subjetivo de la probabilidad como un grado de creencia. En este proceso se puede contemplar cómo es percibido el azar y la aleatoriedad por los estudiantes, y si son capaces de diferenciar experimentos aleatorios de deterministas (BATANERO; GODINO, 2002), lo que permitirá después que puedan estimar la probabilidad en una serie larga de experimentos aleatorios y simulaciones de azar. Las simulaciones y los experimentos preparan para comprender la ley de los grandes números y las conexiones entre las nociones de frecuencia relativa y probabilidad.

Conforme se progresa en el aprendizaje de la probabilidad hasta la rigurosidad matemática asociada al formalismo axiomático y se articulan los diferentes significados, también van surgiendo errores y sesgos usuales de razonamiento probabilístico. Estos sesgos, como los de representatividad y equiprobabilidad, pueden dificultar la asimilación de conceptos y la interpretación incorrecta de las situaciones en probabilidad (LECOUTRE, 1992). En este sentido, los materiales curriculares deben contemplar los errores y sesgos de razonamiento probabilístico como oportunidades de aprendizaje.

Por otro lado, para valorar el progreso y las dificultades de los aprendizajes en los diferentes significados de la probabilidad, los materiales curriculares deben incluir diversos instrumentos de evaluación, coevaluación y autoevaluación que permitan valorar las competencias logradas por los estudiantes (AUTORES, 2021). Partiendo de estas consideraciones se organizan los indicadores de la faceta cognitiva según el Cuadro 2.

Componentes	**Indicadores**
Conocimientos previos	- Se prevén situaciones-problemas en las que se conjetura sobre experimentos aleatorios sencillos, distinguiendo lo aleatorio de lo determinista y el empleo de la frecuencia relativa. - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en los diversos significados de la probabilidad.
Diferencias individuales	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes.
Conflictos cognitivos	- Se valora el error como fuente de aprendizaje. - Se proponen situaciones donde puedan ponerse de manifiesto conflictos cognitivos, como los sesgos de razonamiento probabilístico (p. ej.: sesgos de representatividad y equiprobabilidad).

Evaluación	- Se proponen instrumentos de evaluación y autoevaluación. - Los diversos modos de evaluación incluidos en el texto son adecuados para evaluar que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia de modelización y generalización, competencia metacognitiva). - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.

Cuadro 2 - Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva (Fuente: elaborado por los autores)

4.3 Indicadores de idoneidad afectiva

En este caso, se trata de analizar en qué manera los materiales curriculares contemplan el desarrollo de los componentes del dominio afectivo, es decir, emociones, actitudes, creencias y valores, así como la interrelación de estos con el resto de las facetas (Autores, 2020). En primer lugar, merece la pena mencionar la importancia de atender al lenguaje, en especial al no verbal, ya que, además de transmitir significado en sí mismo, es capaz de generar cercanía, favoreciendo la interacción.

En cuanto a las emociones, se evalúa si en la secuencia de actividades se planifican momentos en los que se manifiestan las emociones ante las situaciones propuestas. Por un lado, se deben reservar espacios para explicitar estados emocionales ante la resolución de problemas: bloqueos, curiosidad, satisfacción, desesperación, etc. Por otro, se ha de procurar incluir situaciones que resalten las cualidades de estética y precisión de las matemáticas, así como situaciones contextualizadas y elementos que puedan resultar motivadores, como el humor o juegos. De esta manera, la secuencia será idónea en tanto que promueva emociones positivas hacia los contenidos de probabilidad, así como facilite la superación de emociones negativas.

Un tratamiento continuo a nivel emocional permite desarrollar el componente actitudinal. Específicamente, para las actitudes se valora la consideración de situaciones que motiven al estudiante a participar activamente y le ofrezca seguridad para explorar ideas, formular hipótesis y plantear diferentes estrategias de solución de forma flexible. Todo esto se ve facilitado si la secuencia promueve la argumentación en situaciones de igualdad y se fomenta la autoestima, evitando el rechazo o miedo a plantear o abordar situaciones problemas de probabilidad o participar en experimentos aleatorios y simulaciones. Por ejemplo, algún alumno puede considerar tediosa la repetición de un mismo experimento. Sin embargo, el docente debe empoderar este tipo de actividades, señalando la importancia de los resultados obtenidos. En definitiva, se debe promover la participación, la perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática.

Las creencias son un componente afectivo más estable que emociones y actitudes. Un trabajo constante en estas dos últimas componentes permite plantear, a medio y largo plazo, la modificación de creencias, siempre y cuando las situaciones impliquen la metacognición de los estudiantes y el contexto social en donde se desarrolla el aprendizaje (AUTORES, 2021). Este contexto puede enriquecerse ofreciendo una gama amplia de aplicaciones en donde se ponga de manifiesto la importancia de razonamientos probabilísticos, por ejemplo, la medicina, el análisis de riesgos, la educación, la gestión, el clima o las votaciones, que contribuirán y darán sentido a los diferentes significados de probabilidad (BATANERO; GODINO, 2002). En esta misma línea, se debe destacar el valor y la utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional de los estudiantes con el objetivo de enfatizar el papel del azar y la probabilidad.

Conviene observar que, si bien ninguna faceta de la idoneidad ha de verse de forma aislada, el condicionamiento que ejerce lo afectivo en el plano cognitivo o interaccional justifica una atención especial. Un trabajo coherente en este apartado puede favorecer el desarrollo de un clima de interacción adecuado, así como progresar desde concepciones erróneas y sesgos de probabilidad hacia modos adecuados de pensamiento. Estos indicadores se ven en el Cuadro 3.

Componentes	**Indicadores**
Lenguajes	- Se presta atención al lenguaje no verbal para fomentar cercanía (*inmediacy*).
Emociones	- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas. - Se planifican momentos en los que se manifiestan las emociones ante las situaciones propuestas.

	- Se proponen situaciones contextualizados y elementos que pueden resultar motivadores: humor o juegos.
Actitudes	- Se fomenta la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a plantear o abordar situaciones problemas de probabilidad o participar en experimentos aleatorias y simulaciones. - Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática. - Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas. - Se promueve la argumentación en situaciones de igualdad.
Creencias	- Se consideran las creencias sobre la probabilidad, sobre la metacognición de los estudiantes y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje. - Se ofrece una gama amplia de aplicaciones de probabilidad, por ejemplo, la medicina, el análisis de riesgos, la educación, la gestión, el clima o las votaciones.
Valores	- Se considera el valor y la utilidad de las matemáticas atribuidas por los estudiantes en la vida diaria y profesional.
Interrelación otras facetas	- Se planifica el componente afectivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje - Se relacionan las emociones positivas con las actitudes matemáticas y con la resolución exitosa de tareas, fomentando la reflexión emocional del alumnado en este sentido.

Cuadro 3 - Componentes e indicadores de idoneidad afectiva. (Fuente: elaborado por los autores)

4.4 Indicadores de idoneidad interaccional

Los indicadores en esta componente guían la reflexión sobre las formas de interacción previstas entre el material curricular y el estudiante o entre estudiantes. Conviene observar que, en todo momento, los indicadores deben contemplar el carácter unidireccional de los materiales. Es decir, la interacción real depende de la gestión que haga el docente de esos materiales. No obstante, se puede valorar, en primer lugar, si se hace una presentación clara y bien organizada de las situaciones-problemas, que enfatice los conceptos claves de la probabilidad y facilite la interacción por medio de tareas adecuadas y preguntas que exijan reflexión compartida. Igualmente, también se puede observar si el vocabulario utilizado es comprensible, si las ilustraciones son adecuadas, pertinentes y no invasivas y si se presentan situaciones variadas y claras a lo largo de todo el material curricular (AUTORES, 2021). Estas situaciones, por medio de agrupaciones flexibles deben promover el diálogo y la comunicación entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor. En ese sentido, los indicadores contemplan una componente de autonomía, para evaluar si el material curricular plantea cuestiones, presenta soluciones, propone ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar, con la finalidad de que los estudiantes asuman la responsabilidad del estudio.

Las formas de interacción que tienen lugar en una secuencia instruccional sobre probabilidad son variadas. La premisa básica parte de que los estudiantes expresen primero su idea acerca del resultado de un experimento aleatorio o sobre el desarrollo de situaciones diversas, tales como juegos en donde el azar juega un papel clave (GODINO et al., 1987). Conforme se experimenta y se simula, surgen oportunidades para elaborar conjeturas y matizar las ideas de partida. Finalmente, se organiza lo aprendido y se institucionaliza haciendo referencia a las interacciones que han tenido lugar. Los indicadores de esta faceta se muestran en el Cuadro 4.

Componentes	**Indicadores**
Interacción material curricular-estudiante	- El material curricular tiene una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada) enfatizando los conceptos-definiciones claves de la probabilidad. - Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención del estudiante.
Interacción entre estudiantes	- Se propone situaciones-problemas que favorecen el dialogo y comunicación entre estudiantes. - Se proponen situaciones para plantear o resolver en grupo.
Autonomía	- Se contempla momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (el material curricular plantea cuestiones, presenta soluciones, propone ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar)

Cuadro 4 - Componentes e indicadores de idoneidad interaccional (Fuente: elaborado por los autores)

4.5 Indicadores de idoneidad mediacional

En este caso, los materiales curriculares deben promover el uso pertinente y oportuno de recursos como dados, monedas, barajas de carta, ruletas, tablas de números aleatorios, calculadoras, etc. (BATANERO; GODINO, 2002), así como prever la gestión del tiempo para desarrollar las actividades planteadas. Por otro lado, cobran importancia los recursos virtuales o applet interactivos. Estas herramientas permiten usos que varían desde la exploración de conceptos básicos de probabilidad hasta la producción de representaciones gráficas de mayor nivel de formalidad y abstracción (INZUNSA, 2013). Respecto a las condiciones temporales, se ha de considerar si la temporalización de actividades es factible, previendo cierta flexibilidad y reservando suficiente espacio para cubrir los contenidos de mayor complejidad (AUTORES, 2021). Los dos componentes e indicadores de esta faceta se organizan en el Cuadro 5.

Componentes	Indicadores
Recursos materiales	- Se promueve el uso de materiales manipulativos (dados, monedas, cartas, bolas) audiovisuales e informáticos (software) que permiten aportar experiencias válidas para progresar en los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetivo, frecuencial y clásico). - Se propone la contextualización de las definiciones y propiedades, a partir de situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Tiempo (de enseñanza - aprendizaje)	- El espacio temporal previsto es suficiente para las situaciones que presentan mayor dificultad de comprensión.

Cuadro 5 - Componentes e indicadores de idoneidad mediacional (Fuente: elaborado por los autores)

4.6 Indicadores de idoneidad ecológica

En esta dimensión se valora el grado de concordancia del material con las normas curriculares en relación con el azar y probabilidad y si los contenidos tratados contribuyen a la formación social y laboral del estudiante. De igual forma, se analiza si las actividades se abren nuevos campos de conocimiento y estrategias de innovación tecnológica para dar soluciones a los problemas en el contexto de la probabilidad.

En cuanto a la educación en valores el material curricular debe evitar cualquier tipo de expresión gráfica o verbal que promueva estereotipos, discriminación, racismo y exclusión social. Por otro lado, favorecer la alfabetización probabilística requiere la conexión con otros contenidos tanto intra como interdisciplinares, considerando diversos contextos como el mundo natural, físico, tecnológico, medicina, salud pública, justicia y delincuencia, finanzas y negocios, investigación y estadística, juegos de azar y apuestas, decisiones personales, etc. (GAL, 2005, p.59) Los indicadores de esta faceta se recogen en el Cuadro 6.

Componentes	Indicadores
Adaptación al currículo	- Los propósitos, significados, conceptos-definiciones su desarrollo y evaluación de la probabilidad se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura a la innovación	- Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.
Adaptación socio-profesional	- Los contenidos de probabilidad contribuyen a la formación socio-profesional del estudiante.
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos, inclusivos y con iguales oportunidades para realizar cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico).
Conexiones intra e interdisciplinares	- Los contenidos de la probabilidad se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares - Se contemplan diversos contextos para la alfabetización probabilística

Cuadro 6 - Componentes e indicadores de idoneidad ecológica. Fuente: elaborado por los autores

Agradecimientos

XXX

Referencias

BALCAZA, T; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de libros de texto sobre la optimización en el bachillerato. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro: UNESP, v. 31, n. 59, p. 1061 - 1081, 2017.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME**, v. 8, n. 3, p. 247 - 263, 2005.

BATANERO, C.; HENRY, M.; PARZYSZ, B. The nature of chance and probability. In: JONES, G. (ed.). **Exploring probability in school**. Springer, 2005. p. 15 -37.

BATANERO, C.; BOROVCNIK, M. **Statistics and probability in high school**. Rotterdam: Sense Publishers, 2016.

BATANERO, C.; GODINO, J. D. **Estocástica y su didáctica para maestros**. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 2002.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 32, n. 60, p. 255-278, 2018.

BREDA, A.; PINO-FAN, L. R.; FONT, V. Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 13, n. 6, p. 1893-1918, 2017.

BROWN, M. The teacher-Tool relationship: theorizing the design and use of curriculum materials. In: REMILLARD, J.T.; HERBEL-EISSENMANN, B.A.; LLOYD, G.M. **Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction**. New York: Routledge, 2009, p. 17-36.

GAL, I. Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En JONES, G.A. (ed.) **Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning**. New York: Springer, 2005. p. 39 – 64.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En: **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil., 2011.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, p. 111-132, 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad.** Madrid: Editorial Síntesis, 1987.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM Mathematics Education**, v. 39, n. 1, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. **Práxis Educativa**, v. 7, n. 2, p. 331-354, 2012.

GÓMEZ, E.; BATANERO, C.; CONTRERAS. J. M. Procedimientos probabilísticos en libros de texto de matemáticas para educación primaria en España. **Épsilon**, v. 31, n. 2, p. 25 - 42, 2014.

GÓMEZ, E.; ORTIZ, J. J.; BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M. El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. **UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 35, p. 75 – 91, 2013.

GÓMEZ, E.; ORTIZ, J. J.; GEA, M. Conceptos y propiedades de probabilidad en textos españoles de educación primaria. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 5, p. 49-71, 2014.

HOADLEY, U.; GALANT, J. An analysis of the Grade 3 Department of Basic Education workbooks as curriculum tools. **South African Journal of Childhood Education**, v. 6, n. 1, p. 1 – 12, 2016.

INZUNSA, S. Simulación y modelos en la enseñanza de la probabilidad: un análisis del potencial de los applets y la hoja de cálculo. En: SALCEDO, A. (ed.). **Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas**. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2013, p. 9 – 29.

KRIPPENDORFF, K. **Content analysis: An introduction to its methodology**. Los Angeles, CA: Sage, 2013.

LECOUTRE, M. P. Cognitive models and problem spaces in “purely random” situations. **Educational Studies in Mathematics**, v. 23, n. 6, p. 557 – 568, 1992.

MONJE, Y.; SECKEL, M.J.; BREDA, A. Tratamiento de la inecuación en el currículum y textos escolares chilenos. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 32, n. 61, p. 480-502, 2018.

MUÑIZ-RODRÍGUEZ, L.; AGUILAR-GONZÁLEZ, Á.; RODRÍGUEZ-MUÑIZ, L. J. Perfiles del futuro profesorado de matemáticas a partir de sus competencias profesionales. **Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**, v. 38, n. 2, p. 141-161, 2020.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics.** Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

REMILLARD, J. T.; KIM, O. K. **Elementary mathematics curriculum materials: Designs for student learning and teacher enactment**. Springer Nature, 2020.

RIVAS, H. **Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria**. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Granada, 2014. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_HRivas.pdf

SERRANO, L.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. **Educación Matemática**, v. 10, n.1, p. 7-25., 1998.

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, A. El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 7, p. 27 – 48, 2015.

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, A. Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. **Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado**, v. 23, n. 1, p. 393-419, 2019.

WILLIAMS, R. J.; CONNOLLY, D. Does learning about the mathematics of gambling change gambling behavior? **Psychology of Addictive Behaviors**, v. 20, n. 1, p. 62-68, 2006.

ZIMMERMANN, G.M.; JONES, G.A. Probability Simulation: What Meaning Does It Have for High School Students? **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, v. 2, p. 221–236, 2002.

ANEXO 12. Consigna. Uso de la guía de idoneidad didáctica para materiales curriculares

Nombres y apellidos:

1. Cada estudiante responderá a las siguientes consignas:

   Faceta epistémica
   En cada una de las unidades de análisis en que se ha descompuesto la ficha:
   a) Identifica y describe situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos relacionados a los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica).
   b) Describe si existe relación entre objetos matemáticos y los diversos significados de la probabilidad en la ficha.
   c) Identifica si existe situaciones-problemas, conceptos, proposiciones o procedimientos, etc. que presentan errores, contradicciones y ambigüedades.

   Faceta cognitiva
   En cada una de las unidades de análisis en que se ha descompuesto la ficha:
   d) Identifica y describe los conocimientos previos y las diferencias individuales que prevé la ficha.
   e) Identifica y describe los posibles conflictos que contiene la ficha.
   e) Identifica los tipos de evaluación y autoevaluación que propone la ficha.

   Faceta afectiva
   En cada una de las unidades de análisis en que se ha descompuesto la ficha:
   f) Identifica y describe aspectos de la ficha que tengan relación con los lenguajes, emociones, actitudes, creencias, valores e interrelación con otras facetas.

   Faceta interaccional
   En cada una de las unidades de análisis en que se ha descompuesto la ficha:
   g) Identifica y describe aspectos de la ficha que tengan relación con la interacción material curricular-estudiante, interacción entre estudiantes y autonomía.

   Faceta mediacional
   En cada una de las unidades de análisis en que se ha descompuesto la ficha:
   h) Identifica y describe aspectos de la ficha que promuevan el uso de los recursos materiales y el tiempo o espacio previsto para las tareas.

   Faceta ecológica
   En cada una de las unidades de análisis en que se ha descompuesto la ficha:
   h) Identifica y describe si la ficha considera los criterios de adaptación curricular, apertura a la innovación, adaptación socio-profesional, educación en valores y conexiones intra e interdisciplinares.

2. Elabora un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la ficha en cada una de las facetas.

3. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso de la ficha para incrementar su idoneidad didáctica? Describe los cambios o mejoras que podrías introducir para cada vacío o conflicto que identificaste en la sección.

4. Marca con un aspa los indicadores que cumple la ficha según la tabla siguiente:

Tabla de Indicadores de idoneidad para analizar materiales curriculares en probabilidad

Componentes	Indicadores de idoneidad epistémica	Si	Parcialmente	No
Significados	Situaciones-problemas			
	- Se proponen situaciones-problemas que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica).	-		
	- Se incluye una muestra representativa de situaciones de contexto real o cotidiano del estudiante distinguiendo lo aleatorio de situaciones deterministas.	-		
	- Se plantean situaciones donde el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias (problematización)	-		
	Lenguajes			
	- Se utilizan y conectan diferentes registros y representaciones (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólico-numéricos, gráficos).			
	- El nivel de lenguaje utilizado en las situaciones propuestas es adecuado a quienes se dirige.			
	- Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de experimentos aleatorios en los diferentes registros mencionados			
	Conceptos-definiciones			
	- Los conceptos-definiciones implicados en las situaciones propuestas son claros y adecuados al nivel educativo al que se dirigen.			
	- En las situaciones propuestas, aparecen involucrados los conceptos de experimento aleatorio y determinista, espacio muestral, suceso, suceso simple y compuesto, suceso seguro e imposible, casos favorables y posibles, frecuencia, frecuencia relativa, convergencia, simulación, experimentación, variabilidad, equiprobabilidad y probabilidad.			
	- Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones.			
	Proposiciones			
	- En las situaciones resueltas y propuestas se emplean proposiciones fundamentales como la probabilidad del suceso imposible, suceso seguro y del complementario, propiedad de las frecuencias relativas, estabilidad de frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad, regla de Laplace y equiprobabilidad.			
	- Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar proposiciones.			
	Procedimientos			
	- Aparecen implicadas la comparación cualitativa de probabilidades; construcción del espacio muestral, distinción de casos favorables y posibles, aplicación de la regla de Laplace, empleo de tablas y diagramas de árbol, realización de predicciones a partir de observaciones de experimentos o datos, estimación de probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, cálculo y representación de frecuencias, interpretación de tablas y gráficos, simulación de experimentos aleatorios.			
	- Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar procedimientos.	-		
	Argumentos			
	- Las proposiciones y procedimientos involucradas en los ejemplos resueltos se justifican de forma adecuada según el nivel educativo al que se dirigen.	-	-	-

	- Se propone situaciones en la que los estudiantes deben explicar y argumentar de forma adecuada los procedimientos o proposiciones empleadas. - Se usan simulación de experimentos para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas	-	-	-
Relaciones	- Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí, tanto en la propuesta como ejemplificación de situaciones.	-		
	- En las situaciones propuestas se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico).	-		
Conflictos epistémicos	- Los enunciados de las situaciones-problemas y sus soluciones, conceptos, proposiciones, procedimientos, etc. se presentan de forma correcta sin errores, contradicciones y ambigüedades.	-		

Componentes	**Indicadores de idoneidad cognitiva**	**Si**	**Parcialmente**	**No**
Conocimientos previos	- Se prevén situaciones-problemas en las que se conjetura sobre experimentos aleatorios sencillos, se distingue lo aleatorio de lo determinista y se emplea de la frecuencia relativa.			
	- Los contenidos pretendidos con las situaciones propuestas contemplan los diversos significados de la probabilidad con un grado de dificultad manejable.			
Diferencias individuales	- Las situaciones-problema responden a diferentes grados de complejidad.			
	- Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo			
Conflictos cognitivos	- Se emplea el error como fuente de aprendizaje.	-		
	- Se proponen situaciones donde puedan ponerse de manifiesto conflictos cognitivos, como los sesgos de razonamiento probabilístico (p. ej.: sesgos de representatividad y equiprobabilidad).	-		
Evaluación	- Se proponen instrumentos de evaluación y autoevaluación.	-		
	- Los diversos modos de evaluación incluidos en el material curricular son adecuados para valorar la apropiación de los conocimientos y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia de modelización y generalización, competencia metacognitiva).	-		
	- La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia.	-	-	-

Componentes	**Indicadores de idoneidad afectiva**	**Si**	**Parcialmente**	**No**
Lenguajes	- En las situaciones propuestas se presta atención al lenguaje no verbal para fomentar cercanía.			
Emociones	- Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.			
	- Se reserva espacio para que los estudiantes manifiesten las emociones ante las situaciones propuestas.	-	-	-
	- Se proponen situaciones contextualizadas y elementos que pueden resultar motivadores (humor o juegos)	-	-	-
Actitudes	- Las situaciones propuestas fomentan la actitud matemática (perseverancia, responsabilidad, etc.)	-	-	-

	- Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos en la resolución de problemas.	-	-	-
Creencias	- Las situaciones implican la metacognición de los estudiantes y las creencias sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje.	-	-	-
	- Se ofrece una gama amplia de aplicaciones de probabilidad, por ejemplo, la medicina, el análisis de riesgos, la educación, la gestión, el clima o las votaciones.	-	-	-
Valores	- Se tiene en cuenta y destaca el valor y la utilidad de las situaciones de azar y probabilidad planteadas para la vida diaria de los estudiantes.	-	-	-
Interrelación otras facetas	- Se relacionan las emociones positivas con las actitudes matemáticas y con la resolución exitosa de las tareas propuestas, fomentando la reflexión emocional del alumnado en este sentido.	-	-	-

Componentes	**Indicadores de idoneidad interaccional**	**Si**	**Parcialmente**	**No**
Interacción material curricular-estudiante	- Se hace una presentación clara y bien organizada de las situaciones-problemas que destaque los conceptos y propiedades fundamentales de la probabilidad por medio de tareas adecuadas.			
	- Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención del estudiante.			
Interacción entre estudiantes	- Se proponen situaciones para plantear o resolver en grupo con consignas o roles que faciliten diálogo y comunicación entre estudiantes.			
Autonomía	- El material curricular plantea cuestiones, presenta soluciones, propone ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar, permitiendo a los estudiantes asumir la responsabilidad del estudio.			

Componentes	**Indicadores de idoneidad mediacional**	**Si**	**Parcialmente**	**No**
Recursos materiales	- Se promueve el uso de materiales manipulativos (dados, monedas, cartas, bolas) audiovisuales e informáticos (software) que permiten aportar experiencias válidas para progresar en los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetivo, frecuencial y clásico).			-
	- Los modelos y visualizaciones empleados o propuestos en las tareas permiten contextualizar las definiciones y propiedades fundamentales de la probabilidad.			-
Tiempo (de enseñanza - aprendizaje)	- El espacio previsto por medio de las tareas es suficiente para aquellos contenidos que presentan mayor dificultad de comprensión.			-

Componentes	**Indicadores de idoneidad ecológica**	**Si**	**Parcialmente**	**No**
Adaptación al currículo	- Los propósitos, significados de la probabilidad, su desarrollo y evaluación prevista en el material se corresponden con las directrices curriculares.			
Apertura a la innovación	- Las actividades se abren a la innovación y la práctica reflexiva.			

Adaptación socio-profesional	- Los contenidos de probabilidad tratados a la formación socio-profesional del estudiante.			
Educación en valores	- Se contempla la formación en valores democráticos, evitando expresiones gráficas o verbales discriminatorias.			
Conexiones intra e interdisciplinares	- Las tareas permiten relacionar los contenidos de la probabilidad se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares			
	- Se contemplan diversos contextos para la alfabetización probabilística			

5. ¿Qué valoración le corresponde a la ficha según la tabla de indicadores en cada faceta?

6. Formula una opinión crítica sobre si los indicadores de la guía son claros y suficientes.

ANEXO 13. Programa Curricular Educación Secundaria del área de matemática

URI: https://hdl.handle.net/20.500.12799/4550

6.8. Área de Matemática

La matemática es una actividad humana y ocupa un lugar relevante en el desarrollo del conocimiento y de la cultura de nuestras sociedades. Se encuentra en constante desarrollo y reajuste, y, por ello, sustenta una creciente variedad de investigaciones en las ciencias y en las tecnologías modernas, las cuales son fundamentales para el desarrollo integral del país.

El aprendizaje de la matemática contribuye a formar ciudadanos capaces de buscar, organizar, sistematizar y analizar información para entender e interpretar el mundo que los rodea, desenvolverse en él, tomar decisiones pertinentes, y resolver problemas en distintas situaciones usando, de manera flexible, estrategias y conocimientos matemáticos.

El logro del Perfil de egreso de los estudiantes de la Educación Básica requiere el desarrollo de diversas competencias. A través del **enfoque Centrado en la Resolución de Problemas**, el área de Matemática promueve y facilita que los estudiantes desarrollen las siguientes competencias:

- Resuelve problemas de cantidad.
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambios.
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

6.8.1. Enfoque que sustenta el desarrollo de las competencias en el área de Matemática

En esta área, el marco teórico y metodológico que orienta la enseñanza y el aprendizaje corresponde al enfoque Centrado en la Resolución de Problemas[38], el cual tiene las siguientes características:

- La matemática es un producto cultural dinámico, cambiante, en constante desarrollo y reajuste.
- Toda actividad matemática tiene como escenario la resolución de problemas planteados a partir de situaciones, las cuales se conciben como acontecimientos significativos que se dan en diversos contextos. Las situaciones se organizan en cuatro grupos: situaciones de cantidad; situaciones de regularidad, equivalencia y cambio; situaciones de forma, movimiento y localización; y situaciones de gestión de datos e incertidumbre.
- Al plantear y resolver problemas, los estudiantes se enfrentan a retos para los cuales no conocen de antemano las estrategias de solución. Esta situación les demanda desarrollar un proceso de indagación y reflexión social e individual que les permita superar las dificultades u obstáculos que surjan en la búsqueda de la solución. En este proceso, el estudiante construye y reconstruye sus conocimientos al relacionar, y reorganizar ideas y conceptos matemáticos que emergen como solución óptima a los problemas, que irán aumentando en grado de complejidad.
- Los problemas que resuelven los estudiantes pueden ser planteados por ellos mismos o por el docente para promover, así, la creatividad y la interpretación de nuevas y diversas situaciones.
- Las emociones, actitudes y creencias actúan como fuerzas impulsadoras del aprendizaje.
- Los estudiantes aprenden por sí mismos cuando son capaces de autorregular su proceso de aprendizaje y de reflexionar sobre sus aciertos, errores, avances y dificultades, que surgieron durante el proceso de resolución de problemas.

---

[38] Dicho enfoque se ha construido tomando como referencia los siguientes marcos teóricos: La Teoría de Situaciones didácticas descrita en Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Trabajos de Matemática NO 19.; La Educación Matemática Realista descrita por Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. (2004). *La educación matemática realista: Principios en que se sustenta*. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática, 1-13; y la Teoría sobre la Resolución de Problemas descrita por Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press; y por Trigo, L. (2008). *La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. Investigación en educación matemática XII* (p. 8). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Competencia RESUELVE PROBLEMAS DE GESTIÓN DE DATOS E INCERTIDUMBRE. Consiste en que el estudiante analice datos sobre un tema de interés o estudio o de situaciones aleatorias, que le permitan tomar decisiones, elaborar predicciones razonables y conclusiones respaldadas en la información producida. Para ello, el estudiante recopila, organiza y representa datos que le dan insumos para el análisis, interpretación e inferencia del comportamiento determinista o aleatorio de la situación usando medidas estadísticas y probabilísticas.

Esta competencia implica la combinación de las siguientes capacidades:

- **Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas:** es representar el comportamiento de un conjunto de datos, seleccionando tablas o gráficos estadísticos, medidas de tendencia central, de localización o dispersión. Reconocer variables de la población o la muestra al plantear un tema de estudio. Así también implica el análisis de situaciones aleatorias y representar la ocurrencia de sucesos mediante el valor de la probabilidad.
- **Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos:** es comunicar su comprensión de conceptos estadísticos y probabilísticos en relación a la situación. Leer, describir e interpretar información estadística contenida en gráficos o tablas provenientes de diferentes fuentes.
- **Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos:** es seleccionar, adaptar, combinar o crear una variedad de procedimientos, estrategias y recursos para recopilar, procesar y analizar datos, así como el uso de técnicas de muestreo y el cálculo de las medidas estadísticas y probabilísticas.
- **Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida:** es tomar decisiones, hacer predicciones o elaborar conclusiones y sustentarlas con base en la información obtenida del procesamiento y análisis de datos, así como de la revisión o valoración de los procesos.

Estándares de aprendizaje de la competencia "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre"

Nivel	Descripción de los niveles del desarrollo de la competencia
Nivel destacado	Resuelve problemas referidos a situaciones aleatorias y situaciones referidas a caracterizar una población basado en una muestra representativa. Emplea técnicas de muestreo estratificado y recolecta datos, usando diversas estrategias y procedimientos; determina el quintil. Representa el comportamiento de los datos usando gráficos y tablas pertinentes, estadísticos, relaciones entre medidas de tendencia central y el coeficiente de variación, identificando lo más óptimo. Interpreta la información sobre el comportamiento de los datos y la probabilidad condicional. Contrasta conclusiones sobre la relación entre variables.
Nivel esperado al final del ciclo VII	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, caracterizando la población y la muestra e identificando las variables a estudiar; empleando el muestreo aleatorio para determinar una muestra representativa. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas, determina terciles, cuartiles y quintiles; la desviación estándar, y el rango de un conjunto de datos; representa el comportamiento de estos usando gráficos y medidas estadísticas más apropiadas a las variables en estudio. Interpreta la información contenida en estos, o la información relacionada a su tema de estudio proveniente de diversas fuentes, haciendo uso del significado de la desviación estándar, las medidas de localización estudiadas y el lenguaje estadístico; basado en esto contrasta y justifica conclusiones sobre las características de la población. Expresa la ocurrencia de sucesos dependientes, independientes, simples o compuestos de una situación aleatoria mediante la probabilidad, y determina su espacio muestral; interpreta las propiedades básicas de la probabilidad de acuerdo a las condiciones de la situación; justifica sus predicciones con base a los resultados de su experimento o propiedades.
Nivel esperado al final del ciclo VI	Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continúas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. Basado en ello, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población. Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.
Nivel esperado al final del ciclo V	Resuelve problemas relacionados con temas de estudio, en los que reconoce variables cualitativas o cuantitativas discretas, recolecta datos a través de encuestas y de diversas fuentes de información. Selecciona tablas de doble entrada, gráficos de barras dobles y gráficos de líneas, seleccionando el más adecuado para representar los datos. Usa el significado de la moda para interpretar información contenida en gráficos y en diversas fuentes de información. Realiza experimentos aleatorios, reconoce sus posibles resultados y expresa la probabilidad de un evento relacionando el número de casos favorables y el total de casos posibles. Elabora y justifica predicciones, decisiones y conclusiones, basándose en la información obtenida en el análisis de datos o en la probabilidad de un evento.
Nivel esperado al final del ciclo IV	Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos o cuantitativos (discretos) sobre un tema de estudio, recolecta datos a través de encuestas y entrevistas sencillas, registra en tablas de frecuencia simples y los representa en pictogramas, gráficos de barra simple con escala (múltiplos de diez). Interpreta información contenida en gráficos de barras simples y dobles y tablas de doble entrada, comparando frecuencias y usando el significado de la moda de un conjunto de datos; a partir de esta información, elabora algunas conclusiones y toma decisiones. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de seguro, más probable, menos probable, y justifica su respuesta.
Nivel esperado al final del ciclo III	Resuelve problemas relacionados con datos cualitativos en situaciones de su interés, recolecta datos a través de preguntas sencillas, los registra en listas o tablas de conteo simple (frecuencia) y los organiza en pictogramas horizontales y gráficos de barras simples. Lee la información contenida en estas tablas o gráficos identificando el dato o datos que tuvieron mayor o menor frecuencia y explica sus decisiones basándose en la información producida. Expresa la ocurrencia de sucesos cotidianos usando las nociones de posible o imposible y justifica su respuesta.
Nivel esperado al final del ciclo II	*Este nivel tiene como base el nivel 2 de la competencia "Resuelve problemas de cantidad".*
Nivel esperado al final del ciclo I	*Este nivel tiene como base el nivel 1 de la competencia "Resuelve problemas de cantidad".*

Dirección General de Educación Básica Regular
VISACIÓN

Desempeños por grado

<table>
<tr><td colspan="2">Competencia "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre" CICLO VI</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cuando el estudiante resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, combina las siguientes capacidades:
• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.
• Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
• Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.
• Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo VI
Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continúas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. Basado en ello, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población. Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.</td></tr>
<tr><td>DESEMPEÑOS PRIMER GRADO DE SECUNDARIA</td><td>DESEMPEÑOS SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA</td></tr>
<tr><td>Cuando el estudiante resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, y se encuentra en proceso hacia el nivel esperado del ciclo VI, realiza desempeños como los siguientes:
• Representa las características de una población en estudio asociándolas a variables cualitativas nominales y ordinales, o cuantitativas discretas, y expresa el comportamiento de los datos de la población a través de gráficos de barras, gráficos circulares y medidas de tendencia central.
• Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es más o menos probable que otro.
• Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre la media, la mediana y la moda para datos no agrupados, según el contexto de la población en estudio, así como sobre el valor de la probabilidad para caracterizar como más o menos probable la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.
• Lee tablas y gráficos de barras o circulares, así como diversos textos que contengan valores de medida de tendencia central, o descripciones de situaciones aleatorias, para comparar e interpretar la información que contienen. A partir de ello, produce nueva información.
Ejemplo: El estudiante compara datos contenidos en una misma gráfica señalando: "Hay más niñas que gustan del fútbol en primero de secundaria que en tercero de secundaria".
• Recopila datos de variables cualitativas o cuantitativas discretas mediante encuestas, seleccionando y empleando procedimientos y</td><td>Cuando el estudiante resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, y logra el nivel esperado del ciclo VI, realiza desempeños como los siguientes:
• Representa las características de una población en estudio asociándolas a variables cualitativas nominales y ordinales, o cuantitativas discretas y continuas. Expresa el comportamiento de los datos de la población a través de histogramas, polígonos de frecuencia y medidas de tendencia central.
• Determina las condiciones y el espacio muestral de una situación aleatoria, y compara la frecuencia de sus sucesos. Representa la probabilidad de un suceso a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia relativa expresada como decimal o porcentaje. A partir de este valor determina si un suceso es seguro, probable o imposible de suceder.
• Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre la pertinencia de usar la media, la mediana o la moda (datos no agrupados) para representar un conjunto de datos según el contexto de la población en estudio, así como sobre el significado del valor de la probabilidad para caracterizar como segura o imposible la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.
• Lee tablas y gráficos como histogramas, polígonos de frecuencia, así como diversos textos que contengan valores de medidas de tendencia central o descripciones de situaciones aleatorias, para comparar e interpretar la información que contienen y deducir nuevos datos. A partir de ello, produce nueva información.
• Recopila datos de variables cualitativas nominales u ordinales, y cuantitativas discretas o continuas mediante encuestas, o seleccionando y empleando procedimientos, estrategias y recursos adecuados al tipo de estudio. Los procesa y organiza en tablas con</td></tr>
</table>

recursos. Los procesa y organiza en tablas con el propósito de analizarlos y producir información. • Selecciona y emplea procedimientos para determinar la mediana y la moda de datos discretos, la probabilidad de sucesos simples de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada en porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados. • Plantea afirmaciones o conclusiones sobre la información cualitativa y cuantitativa de una población, o la probabilidad de ocurrencia de sucesos. Las justifica usando la información obtenida y sus conocimientos estadísticos. Reconoce errores en sus justificaciones y los corrige.	el propósito de analizarlos y producir información. Revisa los procedimientos utilizados y los adecúa a otros contextos de estudio. • Selecciona y emplea procedimientos para determinar la mediana, la moda y la media de datos discretos, la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada como porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados. • Plantea afirmaciones o conclusiones sobre las características, tendencias de los datos de una población o la probabilidad de ocurrencia de sucesos en estudio. Las justifica usando la información obtenida, y sus conocimientos estadísticos y probabilísticos. Reconoce errores en sus justificaciones y en las de otros, y los corrige.

ANEXO 14. Desempeños del ciclo VI de Educación Secundaria

Desempeños del ciclo VI de Educación Secundaria

Desempeños de primer grado de secundaria	Desempeños de segundo grado de secundaria
DG1.1 Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es más o menos probable que otro.	**DG2.1** Determina las condiciones y el espacio muestral de una situación aleatoria, y compara la frecuencia de sus sucesos. Representa la probabilidad de un suceso a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia relativa expresada como decimal o porcentaje. A partir de este valor determina si un suceso es seguro, probable o imposible de suceder.
DG1.2 Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre (…) el valor de la probabilidad para caracterizar como más o menos probable la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.	**DG2.2** Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre (…) el significado del valor de la probabilidad para caracterizar como segura o imposible la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria
DG1.3 Lee tablas y gráficos de barras o circulares, así como diversos textos que contengan valores (…), o descripciones de situaciones aleatorias, para comparar e interpretar la información que contienen. A partir de ello, produce nueva información	**DG2.3** Lee tablas y gráficos como histogramas, polígonos de frecuencia, así como diversos textos que contengan valores (…) de situaciones aleatorias, para comparar e interpretar la información que contienen y deducir nuevos datos. A partir de ello, produce nueva información.
DG1.4 Selecciona y emplea procedimientos para determinar (…) la probabilidad de sucesos simples de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada en porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados.	**DG2.4** Selecciona y emplea procedimientos para determinar (…) la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada como porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados
DG1.5 Plantea afirmaciones o conclusiones sobre (…) la probabilidad de ocurrencia de sucesos. Reconoce errores en sus justificaciones y los corrige.	**DG2.5** Plantea afirmaciones o conclusiones sobre (…) la probabilidad de ocurrencia de sucesos en estudio. Las justifica usando la información obtenida, y sus conocimientos estadísticos y probabilísticos. Reconoce errores en sus justificaciones y en las de otros, y los corrige.

ANEXO 15. Instrumento. Significados de probabilidad y objetos matemáticos

COMPETENCIA “RESUELVE PROBLEMAS DE GESTIÓN DE DATOS E INCERTIDUMBRE”

Nivel de competencia esperada al final del VI ciclo que corresponde a primero y segundo grado de secundaria

Descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo VI	Significados de la probabilidad	Lenguajes	Proposiciones	Argumentos	Conceptos
NC6: Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica	-	-	-	-	-

Selección y codificación de desempeños relacionados a incertidumbre de VI ciclo (12 y 13 años) de nivel educativo secundaria (primero y segundo grado)

Grados	Capacidades	Desempeños	Signfic.	Situación-probl.	Lenguajes	Procedimientos	Proposic.	Argumentos	Conceptos-definición
Primero	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas y probabilísticas	**DG1.1** Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es más o menos probable que otro.		-	-	-	-	-	-
	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos	**DG1.2** Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre (…) el valor de la probabilidad para caracterizar como más o menos probable la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.		-	-	-	-		-
		DG1.3 Lee tablas y gráficos de barras o circulares, así como diversos		-	-	-		-	-

		textos que contengan valores (…), o descripciones de situaciones aleatorias, para comparar e interpretar la información que contienen. A partir de ello, produce nueva información							
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos	**DG1.4** Selecciona y emplea procedimientos para determinar (…) la probabilidad de sucesos simples de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada en porcentaje. Revisa sus procedimientos y resultados.		-	-	-			-
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida	**DG1.5** Plantea afirmaciones o conclusiones sobre (…) la probabilidad de ocurrencia de sucesos. Reconoce errores en sus justificaciones y los corrige.			-	-		-	
Segundo	Representa datos con gráficos y medidas probabilísticas	**DG2.1** Determina las condiciones y el espacio muestral de una situación aleatoria, y compara la frecuencia de sus sucesos. Representa la probabilidad de un suceso a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia relativa expresada		-	-	-		-	-

		como decimal o porcentaje. A partir de este valor determina si un suceso es seguro, probable o imposible de suceder.							
	Comunica su comprensión de los conceptos probabilísticos	**DG2.2** Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión (…) sobre el significado del valor de la probabilidad para caracterizar como segura o imposible la ocurrencia de sucesos de una situación aleatoria.		-	-			-	-
		DG2.3 Lee tablas y gráficos como histogramas, polígonos de frecuencia, así como diversos textos que contengan valores (…) de situaciones aleatorias, para comparar e interpretar la información que contienen y deducir nuevos datos. A partir de ello, produce nueva información.		-	-	-			-
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos	**DG2.4** Selecciona y emplea procedimientos para determinar (…) la probabilidad de sucesos de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace o el cálculo de su frecuencia relativa expresada como porcentaje.		-	-	-			-

		Revisa sus procedimientos y resultados.							
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida	**DG2.5** Plantea afirmaciones o conclusiones sobre (…) la probabilidad de ocurrencia de sucesos en estudio. Las justifica usando la información obtenida, y sus conocimientos estadísticos y probabilísticos. Reconoce errores en sus justificaciones y en las de otros, y los corrige.		-	-	-		-	-

ANEXO 16. Presentación de la sesión 6

Análisis del Programa Curricular de Educación Secundaria

Bethzabé Cotrado

En el siguiente párrafo identifica los significados de la probabilidad y objetos matemáticos siguientes: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos:

“Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es más o menos probable que otro”

5

Tabla para ubicar los significados y objetos matemáticos

Párrafo	Significados	Objetos matemáticos	
Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es más o menos probable que otro.		Situaciones-problemas	
		Lenguajes	
		Procedimientos	
		Conceptos-definiciones	
		Proposiciones	

Análisis del programa curricular en probabilidad – Ciclo VI

UA: Nivel de competencia	Significados	Objetos matemáticos	
NC6: Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica	Clásico Frecuencial Intuitivo	Lenguajes	• Verbal • Simbólico – numérico (fracciones, decimales, enteros)
		Conceptos - definiciones	• Probabilidad; evento aleatorio; espacio muestral; suceso seguro, probable e imposible; decimal y fracción
		Proposiciones	• “el suceso seguro siempre ocurre” • “el suceso imposible nunca se verifica” • “la probabilidad de un suceso se asocia a un número entre 0 y 1”
		Argumentos	• Demuestra y justifica la ocurrencia de eventos, así como la asignación de valores entre 0 y 1 a un suceso seguro, probable e imposible

Análisis del programa curricular en probabilidad – Ciclo VI

UA: Desempeños 1 °	Significados	Objetos matemáticos	
DG1.1: Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad mediante su frecuencia dada en porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es más o menos probable que otro.	Clásico Frecuencial	Situaciones-problemas	• Reconocer las condiciones que definen una situación aleatoria. • Expresar el valor de la probabilidad como más o menos probable. • Determinar la probabilidad de sucesos con regla de Laplace o cálculo de su frecuencia relativa
		Lenguajes	• Verbal • Simbólico – numérico (decimales, enteros y porcentajes)
		Procedimientos	• Identificación de las condiciones de una situación aleatoria. • Aplicación de la regla de Laplace • Cálculo de frecuencia en porcentajes • Comparación del valor de la probabilidad expresada en decimales o porcentajes
		Conceptos-definiciones	• Situación aleatoria, sucesos, probabilidad, frecuencia, decimales y porcentajes
		Proposiciones	• Regla de Laplace • La probabilidad de un suceso es un valor calculable

Actividad

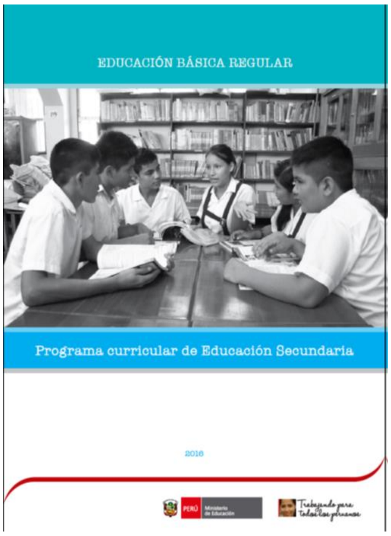
- Ahora tú continuaras con el análisis de los desempeños de segundo grado

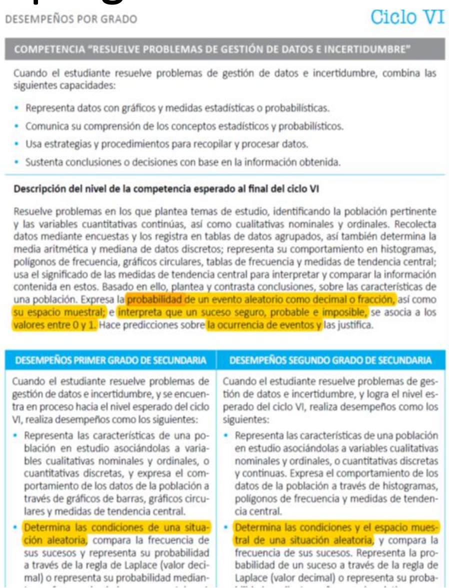
ANEXO 17. Presentación de la sesión 7

Análisis de Idoneidad Didáctica del Programa Curricular de Educación Secundaria

Bethzabé Cotrado

La estadística y probabilidad en el programa curricular





DESEMPEÑOS POR GRADO

Ciclo VI

COMPETENCIA "RESUELVE PROBLEMAS DE GESTIÓN DE DATOS E INCERTIDUMBRE"

Cuando el estudiante resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, combina las siguientes capacidades:

- Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.
- Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
- Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.
- Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

Descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo VI

Resuelve problemas en los que plantea temas de estudio, identificando la población pertinente y las variables cuantitativas continúas, así como cualitativas nominales y ordinales. Recolecta datos mediante encuestas y los registra en tablas de datos agrupados, así también determina la media aritmética y mediana de datos discretos; representa su comportamiento en histogramas, polígonos de frecuencia, gráficos circulares, tablas de frecuencia y medidas de tendencia central; usa el significado de las medidas de tendencia central para interpretar y comparar la información contenida en estos. Basado en ello, plantea y contrasta conclusiones, sobre las características de una población. Expresa la probabilidad de un evento aleatorio como decimal o fracción, así como su espacio muestral; e interpreta que un suceso seguro, probable e imposible, se asocia a los valores entre 0 y 1. Hace predicciones sobre la ocurrencia de eventos y las justifica.

DESEMPEÑOS PRIMER GRADO DE SECUNDARIA	DESEMPEÑOS SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA
Cuando el estudiante resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, y se encuentra en proceso hacia el nivel esperado del ciclo VI, realiza desempeños como los siguientes: • Representa las características de una población en estudio asociándolas a variables cualitativas nominales y ordinales, o cuantitativas discretas, y expresa el comportamiento de los datos de la población a través de gráficos de barras, gráficos circulares y medidas de tendencia central. • Determina las condiciones de una situación aleatoria, compara la frecuencia de sus sucesos y representa su probabilidad a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su probabilidad median-	Cuando el estudiante resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre, y logra el nivel esperado del ciclo VI, realiza desempeños como los siguientes: • Representa las características de una población en estudio asociándolas a variables cualitativas nominales y ordinales, o cuantitativas discretas y continuas. Expresa el comportamiento de los datos de la población a través de histogramas, polígonos de frecuencia y medidas de tendencia central. • Determina las condiciones y el espacio muestral de una situación aleatoria, y compara la frecuencia de sus sucesos. Representa la probabilidad de un suceso a través de la regla de Laplace (valor decimal) o representa su proba-

Actividad

CONSIGNA: Se te entrega una guía de indicadores de idoneidad didáctica y un texto normativo extracto del PCES correspondiente al área de la matemática. Divide el texto del PCES en unidades de análisis y codifica. Utiliza los indicadores de la guía y marca con una letra "X" cualquiera de las tres alternativas (SI, Parcialmente y No). Después de marcar, justifica o relaciona tu respuesta con la unidad de análisis y código que se corresponden.

ANEXO 18. Guía de idoneidad didáctica para evaluar el Programa Curricular de Educación Secundaria en probabilidad

CONSIGNA: Se te entrega una guía de indicadores de idoneidad didáctica y un texto normativo extracto del PCES correspondiente al área de la matemática. Divide el texto del PCES en unidades de análisis y codifica. Utiliza los indicadores de la guía y marca con una letra "X" cualquiera de las tres alternativas (SI, Parcialmente y No). Después de marcar, justifica o relaciona tu respuesta con la unidad de análisis y código que se corresponden.

Guía de análisis de Idoneidad Didáctica del PCES

1. Indicadores de idoneidad epistémica

Componentes	Indicadores	Siempre	A veces	Nunca	Unidad de análisis
Significados	**Situaciones-problemas**				
	Propone el uso y el planteo de situaciones-problemas que muestran y relacionan diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetiva, frecuencial y clásica).				
	Propone el planteo de situaciones donde el estudiante genere, experimente y simule problemas sobre experiencias aleatorias (problematización).				
	Lenguajes				
	Propone el uso de los diferentes registros lingüísticos y representaciones específicas de la probabilidad como son las expresiones verbales, simbólico-numéricas, tabulares y gráficas.				
	Propone un nivel lingüístico adecuado al alumnado que se dirige.				
	Conceptos-definiciones				
	Se contemplan los conceptos-definiciones de experimento aleatorio y determinista, espacio muestral, suceso, suceso simple y compuesto, suceso seguro e imposible, casos favorables y posibles, frecuencia, frecuencia relativa, convergencia, simulación, experimentación, variabilidad, equiprobabilidad y probabilidad.				
	Proposiciones				
	Se emplean proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, suceso seguro y del complementario, propiedad de las frecuencias relativas, estabilidad de frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad, regla de Laplace y equiprobabilidad				
	Procedimientos				

	Se consideran la comparación cualitativa de probabilidades; construcción de espacio muestral, distinción de casos favorables y posibles, aplicación de la regla de Laplace, empleo de tablas y diagramas de árbol, realizar predicciones a partir de observaciones de experimentos o datos, estimar probabilidades a partir de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, calcular y representar frecuencias, interpretar tablas y gráficos, simular experimentos aleatorios.				
	Argumentos				
	Reconoce la importancia de la argumentación como medio para demostrar o justificar las proposiciones y procedimientos de solución en el que puede o no manifestarse un razonamiento inductivo o deductivo.				
Relaciones	Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.				
	Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (intuitivo, subjetivo, frecuencial y clásico).				

2. Indicadores de idoneidad cognitiva

Componentes	Indicadores	Siempre	A veces	Nunca	Unidad de análisis
Conocimientos previos	Se contempla las maneras progresivas de conocer y comprender la probabilidad.				
	Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en los diversos significados de la probabilidad.				
	Se propone el tratamiento de los errores y sesgos de razonamiento más comunes para el estudio de la probabilidad: la representatividad y el sesgo de la equiprobabilidad.				
Diferencias individuales	Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes.				
Evaluación	Propone el uso de diversos modos de evaluación para que los alumnos logren la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas (comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional;				

	competencia de modelización y generalización, competencia metacognitiva).				
	Se propone la difusión de resultados de la evaluación para tomar decisiones.				

Cuadro 2 - Componentes e indicadores de idoneidad cognitiva (Fuente: elaborado por los autores)

3. Indicadores de idoneidad afectiva

Componentes	**Indicadores**	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**	**Unidad de análisis**
Lenguajes	Propone prestar atención al lenguaje no verbal para fomentar cercanía (*inmediacy*).				
Emociones	Propone resaltar las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.				
	Propone planificar momentos en los que se manifiestan las emociones ante las situaciones propuestas.				
	Propone plantear situaciones contextualizados y elementos que pueden resultar motivadores				
Actitudes	Promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a plantear o abordar situaciones problemas de probabilidad o participar en experimentos aleatorias y simulaciones.				
	Promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. para fomentar una actitud matemática.				
	Promueve la argumentación en situaciones de igualdad.				
Creencias	Se consideran las creencias sobre la probabilidad, sobre la metacognición de los estudiantes y sobre el contexto social en el que desarrollan el aprendizaje.				
Valores	Considera el valor y la utilidad de las matemáticas atribuidas por los estudiantes en la vida diaria y profesional.				

4. Indicadores de idoneidad interaccional

Componentes	Indicadores	Siempre	A veces	Nunca	Unidad de análisis
Interacción docente – discente	Propone capacidades comunicativas adecuadas al lenguaje de la probabilidad.				
	Propone los diversos tipos de dialogo para guiar la interacción comunicativa en el aula.				
Interacción entre estudiantes	Propone momentos que favorecen el dialogo y comunicación entre estudiantes.				
	Propone la inclusión en el grupo y evita la exclusión.				
Autonomía	Propone el trabajo autónomo de los estudiantes en la resolución de situaciones aleatorias				

5. Indicadores de idoneidad mediacional

Componentes	Indicadores	Siempre	A veces	Nunca	Unidad de análisis
Recursos materiales	Promueve el uso de materiales manipulativos (dados, monedas, cartas, bolas) audiovisuales e informáticos (software) que permiten aportar experiencias válidas para progresar en los diferentes significados de la probabilidad (intuitiva, subjetivo, frecuencial y clásico).				
	Propone la contextualización de las definiciones y propiedades, a partir de situaciones y modelos concretos y visualizaciones.				
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	Propone emplear un horario apropiado para tratar temas de probabilidad.				
	Propone el uso adecuado del espacio, equipamiento y recursos del aula.				

Tiempo (de enseñanza - aprendizaje)	Propone gestión eficaz del tiempo a favor del logro de los objetivos propuestos para enseñar la probabilidad.				

6. Indicadores de idoneidad ecológica

Componentes	**Indicadores**	**Siempre**	**A veces**	**Nunca**	**Unidad de análisis**
Adaptación al currículo	Los significados, su implementación y evaluación de la probabilidad se corresponden con las directrices curriculares internacionales e investigaciones				
Apertura a la innovación	Se propone innovaciones didácticas basadas en la investigación y la práctica reflexiva.				
Adaptación socio-profesional	Se evitan formalismos innecesarios (teorías axiomáticas) y los contenidos se centran en la formación de creencias e intuiciones correctas que sirvan para la toma de decisiones en contextos reales.				
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos, inclusivos y con iguales oportunidades para realizar cuestionamientos a lo aparentemente evidente o dado como natural (pensamiento crítico).				
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos de la probabilidad se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares				

Juicio crítico - reflexivo

Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la ficha en cada una de las facetas (epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interacciona y ecológica).

En este espacio debes proponer algunas alternativas de mejora para incrementar la idoneidad del Programa Curricular

Formular una opinión crítica sobre la guía y los indicadores, incluyendo la perspectiva sobre si los indicadores son suficientes y claros. Si se considera oportuno agregar algún otro indicador; en dicho caso incluir una justificación

ANEXO 19. Carta de consentimiento informado para estudiantes

Consentimiento informado para estudiantes de la Universidad Nacional del Altiplano - puno

Estimados estudiantes:

Soy estudiante de Doctorado en Educación de la Universidad de Granada - España y en este momento estamos llevando a cabo una investigación Titulada: Idoneidad didáctica de la probabilidad en documentos normativos y materiales curriculares de Educación Secundaria. Implicaciones para la formación de profesores. Uno de nuestros objetivos de investigación es implementar el uso de la guía de idoneidad didáctica del contenido de la probabilidad de los documentos normativos y materiales curriculares para desarrollar la competencia de análisis de idoneidad didáctica en la formación de futuros profesores de Educación Secundaria. Con ese propósito, mediante este documento queremos informarle sobre algunos aspectos éticos, antes de que usted confirme su disposición a colaborar con la investigación:

Primero: Enfatizar que su participación es totalmente voluntaria, por lo que no está obligado/a de ninguna manera a participar en este estudio.

Segundo: Es importante que usted sepa que su anonimato será garantizado. Se mantendrá total confidencialidad con respecto a cualquier información obtenida en este estudio, ya que su nombre no aparecerá en ningún documento. Los datos utilizados serán exclusivamente para los fines de la presente investigación.

Tercero: El estudio no conlleva ningún riesgo ni recibe ningún beneficio. Pero, si tiene alguna pregunta durante su participación, se puede comunicar mediante el siguiente correo beerathy@hotmail.com, para aclarar sus dudas, las que serán tratadas con todo respeto.

Autor de la investigación: Bethzabe Cotrado Mendoza.

Directores de investigación: María Burgos y Pablo Beltrán.

ANEXO 20. Publicaciones durante el desarrollo de la tesis

Artículos en revistas

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Análisis ontosemiótico de los contenidos de probabilidad en los documentos curriculares de Perú. *Educación Matemática, 34*(3), 97-131

SJR 0.21 Q3 (Education), SCOPUS 0.7 Q3 (Mathematics, Miscellaneus)

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales peruanos de educación secundaria en probabilidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 36*(73), 888-922.

SJR 0.3 Q3 (Education), SCOPUS 0.7 Q3 (Mathematics, Miscellaneus)

Cotrado, B., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Castro, A. (2023). Análisis didáctico de materiales curriculares por futuros profesores. *Cadernos de Pesquisa, 53*, e10031.

SJR 0.3 Q1 (Cultural Studies), Q3 (Education)

SCOPUS 0.8 Q2 (Cultural Studies), 0.8 Q4 (Education)

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2024). Análisis didáctico curricular: una experiencia con futuros profesores. *Educação & Realidade*. (En prensa)

SJR 0.22 Q2 (Arts and Humanities, Miscellaneuous), 0.22 Q3 (Education)

SCOPUS 0.5 Q3 (Social sciences, Miscellaneous), 0.5 Q4 (Education)

Cotrado, B., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Castro, A. (2023). Desarrollo de la competencia de análisis didáctico en futuros profesores de matemáticas. (Sometido a publicación).

Actas y comunicaciones en congresos científicos

Cotrado, B., Burgos, M y Beltrán-Pellicer, P. (2021) Analizando la idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales de educación secundaria en probabilidad. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIV. Valencia: SEIEM

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2021). Análisis de la idoneidad didáctica de la probabilidad en el Programa Curricular de Educación Secundaria peruana. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 34*(2), 547-558.

Cotrado, B., Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Castro, A. (2022). Competencia de análisis ontosemiótico de tareas de probabilidad en futuros profesores de matemáticas. Un estudio de caso. *I Congreso Internacional de Investigación Científica. Perspectivas, desafíos y políticas educativas*. Puno, Perú.

Burgos, M., Cotrado, B. y Beltrán-Pellicer, P. (2023). Didactic suitability analysis of curricular materials in probability: implications for teacher training. *INTED2023, 17th annual International Technology, Education and Development Conference*. Valencia, IATED. ISBN: 978-84-09-49026-4 ISSN: 2340-1079

Cotrado, B., Burgos, M. y Beltrán-Pellicer, P. (2023). Análisis didáctico de materiales curriculares sobre probabilidad. Un estudio de caso. *I Congreso Internacional de investigación*. Puno, Perú.