TRABAJO FIN DE GRADO

GRADO EN MATEMÁTICAS

Sobre el concepto de elemento de un conjunto difuso

Autor

Celia Cordovilla Sánchez

Tutores

Luis Miguel Merino González

Departamento de Álgebra

Evangelina Santos Aláez

Departamento de Álgebra

Curso académico 2021-2022

Granada, 5 de junio de 2022

SOBRE EL CONCEPTO DE ELEMENTO DE UN CONJUNTO DIFUSO

Celia Cordovilla Sánchez

Celia Cordovilla Sánchez.
Sobre el concepto de elemento de un conjunto difuso.
Trabajo de Fin de Grado. Curso académico 2021-2022.

Responsable de tutorización

Luis Miguel Merino González
Departamento de Álgebra
Evangelina Santos Aláez
Departamento de Álgebra

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D./Dña. Celia Cordovilla Sánchez

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2021-2022, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 5 de junio de 2022

Fdo: Celia Cordovilla Sánchez

Índice general

Summary

The fuzzy sets were introduced by Zadeh in [19]. Despite his proposal has been facing harsh criticism in the previous years, this topic has recently grown exponentially, mainly due to the possibilities of applicability of fields such decision making or pattern recognition to applied science.
Although a great part of the publications related to this topic are focused on its applications, the amount of work that connect fuzzy sets with the mathematics' foundations are important too. For example, this is important for the Goguen's catogories in [8] and for the classical set's theory. This proyect focuses on the proposal to define the element of a fuzzy set that appears in [18].

In the first place, the basic notions in the fuzzy set's theory are defined, where an order relation and the next operations: union (or supreme) and intersection (or infimum) are established, all of them generalize the operations of the universe set and the negation, which is a substitution of the subset's complement concept. Likewise, the morphism definition between fuzzy sets appears. Then, it is considerated a generalization of the concept when, the applications from the unvierse set,, X to $[0, 1]$ are replaced by any bonded lattice L, so the L-fuzzy sets definition is obtained. Some examples of these extensions are widely used, for instance the interval-valued fuzzy sets, where the lattice L is the lattice of all closed interval contained in $[0, 1]$.

In the second place this proyect describes the α-cuts os a fuzzy set, that is, a crisp subsets' family of the universe set that verify some well-known properties which are described in the Proposition 1.5.6. Throughtout these properties introduce us into chapter 2 with the gradual set concept. This chapter starts characterizing those subsets' family of X that determine a fuzzy set uniquelly, in other words, those sets are a family of α-cuts exactly. One of these families can be interpreted such as a map from the interval $[0, 1]$ to the set $\mathcal{P}(X)$, which allows us to state the gradual set definition. In this respect there are several proposal in the literature, on the one hand the first by Dubois and Prade in [2] and on the other hand the Wu's proposal in [18], which will be examined in this proyect.
The diference among the proposes is that Dubois and Prade set up as domain the [0,1] interval in the first proposal, whle Wu admites any $I \subseteq [0, 1]$ subset as domain.

The gradual element notion is defined from the gradual set notion by replacing the $\mathcal{P}(X)$ codomain by the X set, i.e, a gradual element can be indentified with a gradual set which image is a singleton ($\forall\ \alpha \in I$).

Continuedly, it is focused on analysing the fuzzy element proposal that appears in [18]. The study of how the fuzzy sets' operations can be recovered from the fuzzy element notion constitutes the essential part of this proyect. It should be noted that, the fuzzy element definition must be established throughout a gradual element, that is, a map $g : I \subseteq [0,1] \longrightarrow X$ while a fuzzy set is described by a map $\mu : X \longrightarrow [0,1]$. The most essential is to establish the enviroment where both structures can be compared.
It will be understood that the fuzzy set which are determinated by a gradual set is a fuzzy element os a certain fuzzy set (A, μ_A) if each $\alpha \in I_A$ $g(\alpha) \in A_\alpha$, with I_A the interval where the α-cuts of the fuzzy set A aren't empty. To define a fuzzy element intervene the associating a gradual set to each fuzzy set process and the reciprocal process.

The next issue covered is the proofs elabotation about how a gradual element allows to recover the union (or supreme) and the intersectio (or infimus) description of a finite fuzzy sets's family. There are references where some esed results which deviate from the content os this proyect (Theorems 3.1.8 and 3.1.10) considerably can be consulted. In addition, the associativity property, under corresponthing hypotheses, for the union and intersection defined is established.

Lastly, it's appear a problem: the negation definition. A fuzzy set's negation through the fuzzy element concept is developed. In this case, it has been detected that the definition which was proposed by Wu isn't consistent, and it's offered an exam'ple about this cirsumstance.
It should be kept in mind that during all sections development, a special effort has been made to add examples which help to understand and to clarify all the concepts aand results.

The organization os this proyect is as follow.
Chapter 1 presents the basic fuzzy sets' theory definitions. It places special emphasis on results which will be used in the following sections.
Second chapter establishes the relationship between fuzzy and gradual sets. These will be the most important matter in the next chapter.
Finally, third chapter develops the proposal for defining the element of a fuzzy set and its ability to determine operations such as the union and intersection of a finite fuzzy sets' collection. The weaknesses about fuzzy element are analyzed

in a few brief conclusions.

All the objectives set out on the initial proyect's proposal've been developed, even it has been carried out new challengues that had not been considered.

Introducción

Los conjuntos difusos fueron introducidos por Zadeh en [19]. A pesar de las duras críticas que esta propuesta suscitó en los primeros años, este tema ha crecido de modo exponencial en las últimas décadas principalmente por las posibilidades de aplicabilidad de campos como la toma de decisiones (decision making) o el reconocimiento de patrones a ciencias aplicadas.
Aunque gran parte de las publicaciones relacionadas con este tema están centradas en sus aplicaciones, no deja de ser importante la cantidad de trabajos que penetran en los conceptos que conectan los conjuntos difusos con los fundamentos de las matemáticas, por ejemplo con la teoría de categorías [8], o con la teoría de conjuntos clásica. Este trabajo se centra en la propuesta de definición de elemento de un conjunto difuso que aparece en [18].
En primer lugar se ha llevado a cabo una recopilación de las nociones básicas en la teoría de conjuntos difusos, donde se establecen una relación de orden y las operaciones de unión (o supremo) e intersección (o ínfimo), todas ellas generalizando las del conjunto universo de un conjunto y la de negación, que es una sustitución del concepto de complemento de un subconjunto; así mismo se presta atención a la definición de morfismo entre conjuntos difusos. A continuación se considera una generalización del concepto cuando en lugar de considerar las aplicaciones del conjunto universo X en $[0,1]$ se sustituye este último por un retículo acotado cualquiera L, obteniéndose la definición de conjunto L-difuso; algunos ejemplos de estas extensiones son ampliamente utilizados, como los llamados conjuntos difusos intervalo-valuados, donde el retículo L es el de todos los intervalos cerrados contenidos en $[0,1]$.
El siguiente punto de atención de esta memoria es la descripción de los α-cortes de un conjunto difuso, esto es, una familia de subconjuntos nítidos del conjunto universo que verifica unas propiedades bien conocidas que se describen en la Proposición 1.5.6. A través de estas propiedades se enlaza el Capítulo 2 con el concepto de conjunto gradual. Se comienza caracterizando aquellas familias de subconjuntos de X que determinan unívocamente un conjunto difuso, es decir, aquellas que son exactamente una familia de α-cortes. Una de estas familias puede interpretarse en términos de una aplicación del intervalo $[0,1]$ en el conjunto $\mathcal{P}(X)$, lo que permite plantear la definición de conjunto gradual. En este sentido hay varias propuestas en la literatura, por un lado la de Dubois y Prade en [1] y por otro la que propone Wu que será la examinada en este trabajo. La diferencia

entre ellas consiste en que mientras en la primera se fija como dominio el intervalo $(0,1]$, en la segunda se admite como tal cualquier subconjunto $I \subseteq [0,1]$. La noción de elemento gradual se apoya en la de conjunto gradual sustituyendo el codominio por el propio conjunto X, es decir, un elemento gradual puede identificarse con un conjunto gradual para el que la imagen de todo α es un conjunto unitario.
Se analiza a continuación la propuesta de elemento difuso que se plantea en [18]. El estudio de cómo las operaciones de conjuntos difusos pueden ser recuperadas a partir de la noción de elemento difuso constituye la parte esencial de esta memoria. Hay que observar que mientras un conjunto difuso viene descrito mediante una aplicación $\mu : X \longrightarrow [0,1]$ la definición de elemento difuso deberá establecerse a través de un elemento gradual, es decir, una aplicación $g : I \longrightarrow X$ para un cierto $I \subseteq [0,1]$. Se hace imprescindible comenzar por establecer el marco en el que ambas estructuras pueden compararse y este es el de conjuntos graduales; el conjunto difuso determina el conjunto gradual a través de sus α-cortes. Se entenderá entonces que el conjunto difuso que determina un elemento gradual g es *elemento difuso* de un cierto conjunto difuso (A, μ_A) si para cada $\alpha \in I_A$ se tiene que $g(\alpha) \in A_\alpha$, siendo I_A el intervalo para el que los cortes del conjunto difuso son no vacíos. Hay que señalar que en la formalización de esta definición intervienen los procesos de asociar a cada conjunto difuso un conjunto gradual y el recíproco, cómo un conjunto gradual determina un conjunto difuso.
La siguiente tarea que se lleva a cabo es la elaboración de las demostraciones de en qué sentido el concepto de elemento gradual permite la recuperación de la descripción de la unión (o supremo) y la intersección (o ínfimo) de una familia finita de conjuntos difusos. Se ponen de manifiesto los resultados utilizados y las referencias en las que pueden ser consultados aquellos que se separan considerablemente del contenido de este trabajo (Teoremas 3.1.8 y 3.1.10). Además se establece la propiedad de asociatividad, bajo las hipótesis correspondientes, para la unión e intersección definidas.
En último lugar se ataca el problema de la definición de la negación de un conjunto difuso a través del concepto de elemento. En este caso se ha detectado que la definición que propone Wu no es consistente, y se ofrece un ejemplo de tal circunstancia.
Cabe destacar que durante el desarrollo de todas las secciones se ha hecho un esfuerzo especial en añadir ejemplos que ayuden a clarificar y comprender el alcance de los conceptos y de los resultados.
La organización de este texto es la siguiente: en el capítulo 1 se presentan las definiciones básicas de la teoría de conjuntos difusos, haciendo incapié en aquellos resultados que serán utilizados a lo largo de las siguientes secciones; en el capítulo 2 se establece la relación entre conjuntos difusos y conjuntos graduales que será central en el siguiente capítulo. Por último, en el capítulo 3 se desarrolla la propuesta de definición de elemento de un conjunto difuso y su capacidad para

determinar operaciones como la unión y la intersección de una colección finita de conjuntos difusos. Las debilidades de la definición analizada son puestas de manifiesto en unas breves conclusiones.
Todos los objetivos planteados en la propuesta inicial del trabajo han sido alcanzados e incluso se han ejecutado nuevos retos que no habían sido considerados.

Capítulo 1

Conjuntos Difusos

La lógica difusa en contraposición con la lógica dicotómica que tan solo admite dos posibilidades, lo verdadero y lo falso, es una lógica multivaluada que trata de dar valores a la incertidumbre, es decir, ya no todo es blanco o negro, si no que hay una escala de grises intermedia entre ambos colores.
La paradoja del millonario ilustra muy bien esta idea. A una persona se le da un euro cada día, en consecuencia al cabo de un tiempo será rico. La pregunta que surge es, ¿en qué momento se convertirá esta persona en rica? De dar un número de euros exacto, justo antes de ese momento era, ¿*casi* rica?, ¿puede ese euro, entonces dividir a las personas ricas de las que no lo son?

1.1. Representación de Conjuntos Difusos

1.1.1. Función de Pertenencia

Dado un conjunto X y $A \subseteq X$, A está completamente determinado por su aplicación característica

$$\chi_A : X \longrightarrow [0,1]$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$

Es decir, existe una biyección entre $\mathcal{P}(X)$ y el conjunto $Map(X, \{0,1\})$.
Se define $Map(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y \ \backslash \ f$ es aplicación$\}$.

Sea X un conjunto no vacío, que llamaremos conjunto de referencia o universo, se define un subconjunto difuso A de X como la aplicación siguiente

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

que asigna a cada elemento $x \in X$ su grado de pertenencia como sigue,
$\mu_A(x) = 1$ si x pertenece totalmente a A.
$\mu_A(x) = \alpha$ indica mayor o menor grado de pertenencia cuanto mayor o menor sea α.
$\mu_A(x) = 0$ si x no pertenece a A.

Definición 1.1.1. *μ_A es la **función de pertenencia** asociada al subconjunto difuso A.*

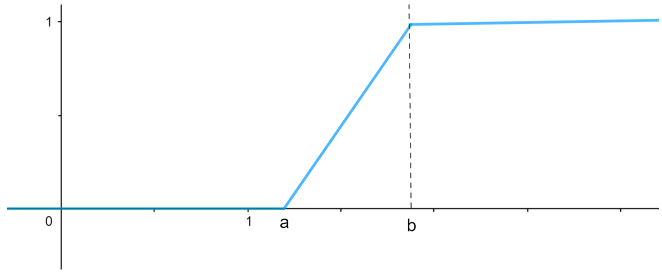
Observación 1.1.2. *Esta definición es una generalización de la función característica, por lo que los conjuntos clásicos, también llamados nítidos, pueden ser vistos como un caso particular de conjuntos difusos, que no admiten pertenencia gradual.*

Ejemplo 1.1.3. Altura
En este caso se considera X el conjunto de hombres, y A el subconjunto de los "hombres altos", que serán los que midan más de un cierto valor, que se puede establecer como 1.80 m por ejemplo. Así todos los hombres con altura inferior a este valor quedarían fuera de este conjuto. La lógica clásica asignaría el grado de pertenencia 1 a todos los hombres cuya altura fuera mayor o igual a 1.80 m y el grado de pertenencia 0 a todos cuya altura fuera inferior a dicho valor.
Entonces se diría que un hombre que mide 1.81 m es alto, pero uno que mide 1.79 m no es alto, algo que no tiene mucho sentido cuando sus alturas tan solo difieren en 2 centímetros.
El enfoque de la teoría difusa en este ejemplo, establece que el conjunto A no tiene una frontera clara para pertenecer o no pertenecer a dicho conjunto. Se define la transición de pertenecer al conjunto A mediante una función (función de pertenencia 1.1.1) con valores entre 0 y 1.
Por tanto el hombre que mide 1.79 m podría pertener al conjunto de "hombres altos" con un grado de pertenencia de 0.8, y uno que mide 1.81 con un grado de 0.85, mientras que otro que mida 1.50 m con un grado de 0.1 por ejemplo.

Ejemplo 1.1.4. Números mucho mayores que 1
Considérese X el conjunto de los números reales, $X = \mathbb{R}$, y A el subconjunto de los números mucho mayores que 1. De esta forma la función de pertenencia $\mu_A(x)$ indicará el grado en que x es mayor que 1. Por tanto se le exigirá a μ_A que cumpla las siguientes hipótesis:

- Es creciente, es decir, si $x \leq y \in \mathbb{R}$, entonces $\mu_A(x) \leq \mu_A(y)$.
- Es nula hasta poco después de 1.

- Que crezca poco hasta un valor conveniente a partir del cual vaya creciendo cada vez más hasta otro valor determinado, b, a partir del cuál siempre valga 1. Por ejemplo la gráfica de μ_A puede corresponderse con la siguiente:



Obsérvese que esta función es nula hasta el punto (a,0) y crece hasta llegar al punto (b,1) a partir del cual vale 1 constantemente.
Por lo tanto esta función se expresa como sigue

$$\mu_A\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad a < x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

De manera que la función de pertenencia se puede ver como una medida de la *proximidad* de x a A, y el grado de pertenencia α será menor cuanto más se *aleje* el elemento x de b.

Definición 1.1.5. *Denotaremos $FS(X)$ a la familia de subconjuntos difusos de X.*

Observación 1.1.6. *$FS(X)$ puede identificarse con $Map(X,[0,1])$.*

A partir de ahora se hará referencia a los subconjuntos difusos llamándolos conjuntos difusos, por simpleza en el lenguaje.

Definición 1.1.7. *El soporte $S(A)$ de un conjunto difuso es el conjunto de todos los elementos de X con grado de pertenencia no nulo, es decir,*

$$S(A) = A_{0^+} = \{x \in X \ \ / \ \ \mu_A(x) > 0\}$$

Definición 1.1.8. *El corazón de un conjunto difuso A denotado $C(A)$ es el conjunto de todos los elementos de X con pertenencia total, esto es*

$$C(A) = A_1 = \{x \in X \ \ / \ \ \mu_A(x) = 1\}$$

Diremos que x es un elemento prototípico o un prototipo de A si $x \in C(A)$.

Definición 1.1.9. *El rango de una función de pertenencia es la imagen de esta. Es denotado por $R(\mu_A)$ y es un subconjunto del intervalo $[0,1]$.*

1.2. Operaciones entre Conjuntos Difusos

En esta sección se definirán las operaciones usuales de conjuntos difusos desde el punto de vista de la teoría difusa. Se considerará el conjunto X como conjunto universo a lo largo de toda la sección.

- **INCLUSIÓN DIFUSA** Sean $A, B \in FS(X)$, entonces

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

  O sea, A está incluido en B si cada elemento de A pertenece a B en al menos el mismo grado en que pertenece a A.

  Lema 1.2.1. *La inclusión difusa es una relación de orden para los conjuntos difusos.*

  Demostración:
  Sean $A, B, C \in FS(X)$.

  * **Reflexiva**
    $\mu_A(x) \leq \mu_A(x) \ \forall x \in X \Rightarrow A \subseteq A$
  * **Antisimétrica**

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \\ B \subseteq A \Rightarrow \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \ \forall x \in X \Rightarrow A = B$$

  * **Transitiva**

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \\ B \subseteq C \Rightarrow \mu_B(x) \leq \mu_C(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_C(x) \ \forall x \in X \Rightarrow A \subseteq C$$

  □

  Además para esta relación de orden se tiene que $FS(X)$ tiene un mayor elemento denotado por $\mathbf{1}$, que se identifica con el conjunto universo X, y tiene un menor elemento denotado por $\mathbf{0}$ que se identifica con el conjunto $\emptyset$.

- **UNIÓN E INTERSECCIÓN DIFUSAS**
  Se define la unión de dos conjuntos nítidos como el menor conjunto que contiene a ambos y la intersección como el mayor contenido en los dos.
  La teoría difusa traduce estos conceptos a través de las funciones de pertenencia, considerando la unión como el supremo de ambos subconjuntos difusos, y la intersección como el ínfimo de ellos, a partir de la relación de orden de la inclusión difusa.

Definición 1.2.2. ***Unión Difusa***
Sean $A, B \in FS(X)$, con funciones de pertencia $\mu_A, \mu_B : X \longrightarrow [0,1]$ respectivamente. $A \cup B$ viene dado por la función de pertenencia $\mu_A \vee \mu_B : X \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$(\mu_A \vee \mu_B)(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Definición 1.2.3. ***Intersección Difusa***
Sean $A, B \in FS(X)$, con funciones de pertenencia $\mu_A, \mu_B : X \longrightarrow [0,1]$ respectivamente. $A \cap B$ viene dado por la función de pertenencia $\mu_A \wedge \mu_B : X \longrightarrow [0,1]$ definida por

$$(\mu_A \wedge \mu_B)(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X.$$

Observación 1.2.4. *Estas operaciones extienden las operaciones en $\mathcal{P}(X)$ con $\cup$ y $\cap$.*

- **NEGACIÓN DIFUSA**
  Ahora se generalizará el concepto de complemento de los conjuntos nítidos para los conjuntos difusos. Para ello se debe tener en cuenta que cuanto más pertenezca un elemento a un conjunto difuso A, menos ha de pertenecer al que sería el conjunto complementario.

Definición 1.2.5. ***Negación difusa***
Sea $A \in FS(X)$, con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ se define la negación difusa de A como el conjunto difuso $N(A)$ cuya función de pertenencia viene dada por,

$$\mu_{N(A)}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X.$$

La negación difusa, viene dada por una aplicación $\mu_{N(A)} : X \longrightarrow [0,1]$ que verifica tres propiedades:

- $\mu_{N(A)}(0) = 1$.
- $\mu_{N(A)}(1) = 0$.
- Si $a \leq b$ entonces $\mu_{N(A)}(b) \leq \mu_{N(A)}(a)$.

Observación 1.2.6. *En la literatura existen otros tipos de negaciones difusas. Véase en [17].*

Observación 1.2.7. $N(A) \neq A^C$.
No se puede establecer el complemento difuso ya que $N(A)$ no cumple las propiedades de conjunto complementario, debido a que no siempre se da que $A \cup N(A) = X$ ni que $A \cap N(A) = \emptyset$.

Ejemplo 1.2.8. Si se considera el conjunto difuso A en $X = \{a, b, c\}$ con función de pertenencia dada por

$$\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$$

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & 0.3 \\ b & \longmapsto & 0.5 \\ c & \longmapsto & 0.8 \end{array}$$

Entonces $N(A)$ tiene como función de pertenencia

$$\mu_{N(A)} : X \longrightarrow [0, 1]$$

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & 0.7 \\ b & \longmapsto & 0.5 \\ c & \longmapsto & 0.2 \end{array}$$

Se tiene entonces que $(\mu_A \vee \mu_{N(A)})(b) = \max\{0.5, 0.5\} = 0.5 \neq 1 \Rightarrow (A \cup N(A)) \neq X$ (0.5 no indica pertenencia total) y
$(\mu_A \wedge \mu_{N(A)})(b) = \min\{0.5, 0.5\} = 0.5 \neq 0 \Rightarrow (A \cap N(A)) \neq \emptyset$ (0.5 indica que hay algún grado de pertenencia, pero en el vacío el grado de pertenencia es nulo).

1.3. Conjuntos L-difusos

Una generalización de los conjuntos difusos se obtiene al sustituir el intervalo $[0, 1]$ por un retículo L.

Definición 1.3.1. *Sean X un conjunto universo y L un retículo completo y acotado. Un conjunto L-difuso A en X está dado por la función de pertenencia $\mu_A \colon X \longrightarrow L$.*

Se denota L-$FS(X)$ a la clase de los L-conjuntos de X.

Lema 1.3.2. *Sean L un retículo completo, X un conjunto universo y $A \in L$-$FS(X)$ con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow L$. Son equivalentes:*

1. *Sean* $\alpha, \beta \in L$ *con* $\alpha > \beta \quad \Rightarrow \quad A_\alpha \subseteq A_\beta$.
2. *Sea* $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subset L$ *tal que* $\sup\{\alpha_i\}_{i\in I} = \alpha$. *Entonces,*

$$A_\alpha = \bigcap_{i\in I} A_{\alpha_i},$$

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Véase en la Proposición 1.5.6.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\alpha > \beta$ entonces $\sup = \{\alpha, \beta\} = \alpha$.
Como $\{\alpha, \beta\} \in L$, por hipótesis $A_\alpha = A_\alpha \cap A_\beta \Rightarrow A_\alpha \subseteq A_\beta$.

□

Se verá ahora qué diferencia hay entre las operaciones difusas según la naturaleza del retículo L.
La unión e intersección difusa se define igual, pero en cuanto a la negación cabe hacer una observación.

Observación 1.3.3. *Si L es un retículo complementado, es decir, existe complemento para cualquier elemento de L, entonces se puede definir el complemento de un conjunto difuso.*
En efecto, sea $A \in FS(X)$ con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow L$, se define $\overline{A}$ el conjunto difuso con función de pertenencia $\mu_{\overline{A}} : X \longrightarrow [0,1]$ como $\mu_{\overline{A}}(x) = \overline{\mu_A(x)}$.

$$\mu_A \vee \overline{\mu_A}(x) = \mu_A(x) \vee \overline{\mu_A}(x) = \mu_A(x) \vee \overline{\mu_A(x)} = 1$$
$$\mu_A \wedge \overline{\mu_A}(x) = \mu_A(x) \wedge \overline{\mu_A}(x) = \mu_A(x) \wedge \overline{\mu_A(x)} = 0$$

Luego, en este caso $FS(X)$ es un retículo complementado.

Sin embargo, si L no es complementado no ocurre lo mismo, ya que no siempre es posible obtener la noción de complemento en conjuntos difusos, como se vió en el Ejemplo 1.2.8, y esto se debe a que $[0,1]$ no es un retículo complementado.
Véase a continuación un retículo que sí sea completado.

Ejemplo 1.3.4. $L = \mathbb{B}^2$, es un retículo completo, acotado y complementado.

$$\begin{tikzcd}
 & (1,1) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(0,1) \arrow[dr, dash] & & (1,0) \arrow[dl, dash] \\
 & (0,0) &
\end{tikzcd}$$

En este caso entonces si se considera un conjunto universo X, cualquier conjunto difuso A dado por la función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow \mathbb{B}^2$ verifica que $\mu_{\overline{A}}(x) = \overline{\mu_A(x)}$, es decir, en este caso la negación difusa define un complemento en L-$FS(X)$.

1.3.1. Conjuntos difusos intervalo-valuados

Un ejemplo interesante de L-conjuntos difusos aparece cuando se considera como retículo $L = \mathcal{I}([0,1])$ que es la clase de los subintervalos cerrados de [0,1]. L es un retículo completo con la relación de orden siguiente

$$[a,b] \leq_I [c,d] \Leftrightarrow a \leq c \;\; y \;\; b \leq d.$$

La unión y la intersección vienen dadas por

- **Unión**

  $$[a,b] \cup_I [c,d] = [a \vee b, c \vee d],$$

  donde

  $$a \vee c = \max\{a,c\} \;\; \forall a,c \in [0,1].$$

- **Intersección**

  $$[a,b] \cap_I [c,d] = [a \wedge c, b \wedge d],$$

  donde

  $$a \wedge c = \min\{a,c\} \;\; \forall a,c \in [0,1].$$

Estos conjuntos L-difusos se conocen como *conjuntos difusos intervalo-valuados* y se denotan por IVFS(X).
Como $([0,1], \vee, \wedge)$ es un retículo completo, $(\mathcal{I}([0,1]), \cup_I, \cap_I)$ lo es también y en consecuencia $(IVFS(X), \sqsubseteq_I, \sqcup_I, \sqcap_I)$ también es un retículo completo con el orden siguiente

$$A \sqsubseteq_I B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq_I \mu_B(x)\ \forall x \in X$$

Y las correspondientes operaciones.

$$(A \sqcup_I B)(x) = \mu_A(x) \cup_I \mu_B(x)\ \forall x \in X$$
$$(A \sqcap_I B)(x) = \mu_A(x) \cap_I \mu_B(x)\ \forall x \in X$$

Este tipo de conjuntos difusos presentan un grado de imprecisión con respecto a la característica medida. En realidad son los más realistas ya que en muchas ocasiones no solo no está claro cuándo un elemento pertenece o no a un conjunto con una determinada propiedad, si no que tampoco está claro el grado de pertenecia a dicho conjunto y por eso se le asigna un intervalo de pertenencia dentro del [0,1].

Ejemplo 1.3.5. Por ejemplo si se considera el conjunto universo $X = \{a = \text{adultos}, b = \text{adolescentes}, c = \text{adultos jóvenes}, d = \text{ancianos}, e = \text{niños}\}$ y el conjunto intervalo-valuado A dado por

$$\mu_A : X \longrightarrow \mathcal{I}([0,1])$$

$$\begin{array}{ccl} a & \longmapsto & [0.8, 0.9] \\ b & \longmapsto & [0.2, 0.4] \\ c & \longmapsto & [0.8, 1] \\ d & \longmapsto & [0.1, 0.2] \\ e & \longmapsto & [0, 0.01] \end{array}$$

Se puede interpretar como que el elemento a, pertenece a A con grado de pertenencia entre 0.8 y 0.9, es decir, si A es la característica de ser buen profesor de natación, entonces un adulto jovén será el mejor profesor, mientras que un niño o un anciano no será buen profesor de natación, ya que no está en forma. Es decir, $\mathcal{I}([0,1])$ contiene los rangos de la bondad de profesor de natación correspondientes a cada grupo de edad. No se le asigna un valor concreto porque en cada grupo influyen más factores aparte de la edad como son la formación, la masa corporal, las enfermedades, el trato con el público...

1.4. Morfismos difusos

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas son las funciones.
Dados dos conjuntos X e Y, una aplicación asigna a cada elemento de X un único elemento de Y. Se presentan a continuación distintas perspectivas para el concepto de morfismo difuso.

Definición 1.4.1. *Sean, X, Y dos conjuntos universos y $A \in FS(X)$, $B \in FS(Y)$, con funciones de pertenencia μ_A, μ_B respectivamente. Un* ***morfismo difuso*** *de A en B, denotado $\tilde{f} : A \longrightarrow B$, viene dado por una aplicación $f : X \longrightarrow Y$, que hace el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mu_A"'] & & Y \arrow[dl, "\mu_B"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

es decir, $\mu_B \circ f = \mu_A$.

Desafortunadamente, esta definición no es adecuada puesto que si se consideran dos subconjuntos nítidos de un conjunto, es decir, si $A, B \subseteq X$, entonces la inclusión canónica de conjuntos nítidos no resulta un morfismo con dicha definición. En efecto, para establecer el morfismo $\tilde{i} : A \longrightarrow B$, debería considerarse el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "Id_X"] \arrow[dr, "\chi_A"'] & & X \arrow[dl, "\chi_B"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

Pero para $b \in X$ tal que $b \in B \setminus A$ se tendría que $\chi_B(Id_X(b)) = \chi_B(b) = 1 \neq \chi_A(b) = 0$. Por tanto el diagrama no es conmutativo.
Lo que si se tiene siempre (considerando subconjuntos nítidos) es que $\chi_A(x) \leq (\chi_B \circ Id_X)(x)$ $\forall x \in X$, lo cuál da pie a una nueva definición.

Definición 1.4.2. *Sean X, Y dos conjuntos universos y sean $A \in FS(X)$, $B \in FS(Y)$, con fuciones de pertenencia μ_A, μ_B respectivamente. Un* ***morfismo difuso*** *de A en B, denotado por $\tilde{f} : A \longrightarrow B$ es una aplicación*

$$f : X \longrightarrow Y$$

satisfaciendo $\mu_B \circ f \geq \mu_A$.

Entonces si $A, B \in X$ son subconjuntos nítidos sí se obtiene que la inlcusión canónica $\tilde{i}$ verifica esta nueva definición ya que $\chi_B \circ i = \chi_B \geq \chi_A$, donde $\tilde{i}, i$ son las dadas arriba.

También se tiene con esta nueva definición un buen comportamiento de la composición de morfismos y de la identidad como se verá a continuación.
Si $C \in FS(Z)$, con μ_C su función de pertenencia y Z un conjunto universo, dados

dos morfismos difusos $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$, entonces la composición $g \circ f$ está dada por

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mu_A"'] & & Y \arrow[dl, "\mu_B"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\mu_B"'] & & Z \arrow[dl, "\mu_C"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "\mu_A"'] & & Z \arrow[dl, "\mu_C"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

y $\mu_B \circ f \geq \mu_A$, $\mu_C \circ g \geq \mu_B \Rightarrow \mu_C \circ (g \circ f) \geq \mu_A$.
Sea $A \in FS(X)$, la identidad $Id_A : A \longrightarrow A$ está definida como sigue

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "Id_X"] \arrow[dr, "\mu_A"'] & & X \arrow[dl, "\mu_A"] \\ & {[0,1]} & \end{tikzcd}$$

En efecto, se tiene que $\mu_A \circ Id_X = \mu_A$, en particular, $\mu_A \circ Id_X \geq \mu_A$.

1.5. Cortes de nivel o α-cortes

A continuación se presenta una representación de los conjuntos difusos como una familia **anidada** de subconjuntos nítidos a través del concepto de cortes de nivel o α-cortes.

Definición 1.5.1. *Sea $A \in FS(X)$, con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$, y $\alpha \in [0,1]$. Se define el α-corte de A como el conjunto nítido*

$$A_\alpha = \{x \in X \ \ / \ \ \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Definición 1.5.2. *Análogamente se define un α-corte estricto de A como*

$$A_{\alpha^+} = \{x \in X \ \ / \ \ \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Observación 1.5.3. *Obsérvese que $R(\mu_A)$ puede ser distinto del intervalo $[0,1]$. En este caso si $\alpha \notin R(\mu_A)$, como $R(\mu_A) \neq [0,1]$, el conjunto A_α puede ser vacío.*

Ejemplo 1.5.4. Sean $X = \{a, b, c, d\}$ y A el conjunto difuso definido a través de la función de pertenencia siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_A : X &\longrightarrow [0,1] \\ a &\longmapsto 0 \\ b &\longmapsto 0.5 \\ c &\longmapsto 0.5 \\ d &\longmapsto 0.6 \end{aligned}$$

Claramente $R(\mu_A) = \{0, 0.5, 0.6\} \neq [0,1]$.
Los α-cortes de A son

$$A_\alpha = \begin{cases} X & si \quad \alpha = 0 \\ \{b,c,d\} & si \quad 0 < \alpha \leq 0.5 \\ \{d\} & si \quad 0.5 < \alpha \leq 0.6 \\ \emptyset & si \quad 0.6 < \alpha \end{cases}$$

Si se toma $\alpha = 0.7 \notin R(\mu_A) \Rightarrow A_{0.7} = \{x \in X : \mu_A(x) \geq 0.7\} = \emptyset$.

La familia $\{A_\alpha \;\; / \;\; 0 \leq \alpha \leq 1\}$ se denomina **representación horizontal** del conjunto difuso A, concepto que hace referencia a la siguiente gráfica

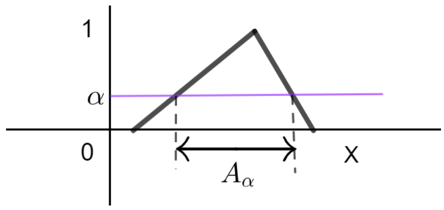


Figura 1.1: Representación horizontal de un α-corte de un conjunto difuso A.

Observación 1.5.5. *De lo contrario, se puede ver la gráfica anterior a través de la función de pertenencia y se obtiene la* ***vista vertical*** *de un conjunto difuso.*

A continuación se verán algunas propiedades de los α-cortes a partir de los siguientes resultados.

Proposición 1.5.6. *Sea $A \in FS(X)$, con X un conjunto universo y cuya función de pertenencia es $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$. Se verifican los siguientes items:*

i) $A_0 = X$.

ii) ***Propiedad del anidamiento***
Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ con $\alpha > \beta \quad \Rightarrow \quad A_\alpha \subseteq A_\beta$.

iii) ***Propiedad de la continuidad superior***
Sea I un conjunto de índices arbitrario y $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subset [0,1]$ tal que $\sup\{\alpha_i\}_{i\in I} = \alpha$. *Entonces,*

$$A_\alpha = \bigcap_{i\in I} A_{\alpha_i},$$

En particular,

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta.$$

Demostración:

i) $A_0 = \{x \in X \ : \ \mu_A(x) \geq 0\} = X$.

ii) Sean α y β en las condiciones del enunciado y A_α y A_β sus respectivos α-cortes.
Sea $x \in A_\alpha \Rightarrow \mu_A(x) \geq \alpha$ y como $\alpha > \beta$ por hipótesis, entonces, $\mu_A(x) \geq \alpha > \beta$. En particular se tiene que, $\mu_A(x) \geq \beta$ lo que implica que $x \in A_\beta$.
De manera que acabamos de probar la inclusión $A_\alpha \subseteq A_\beta$.

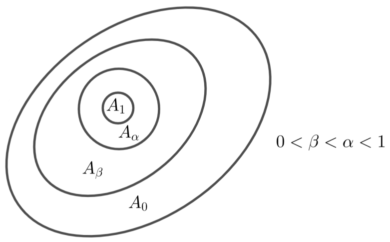


Figura 1.2: Representación del conjunto de α-cortes del conjunto difuso A.

iii) Se probará por doble inclusión.

$\boxed{\subseteq}$ Como $\alpha_i \leq \alpha \ \ \forall i \in I$ entonces por ser conjuntos anidados $A_\alpha \subseteq A_{\alpha_i} \ \ \forall i \in I$. Luego $A_\alpha \subseteq \bigcap_{i\in I} A_{\alpha_i}$.

$\boxed{\supseteq}$ α es el supremo de $\{\alpha_i\}_{i\in I}$, es decir, si β verifica $\alpha_i \leq \beta \ \ \forall i \in I$ entonces $\alpha \leq \beta$.
Sea $x \in \bigcap_{i\in I} A_{\alpha_i} \Rightarrow \mu_A(x) \geq \alpha_i \ \ \forall i \in I$. Así que $\mu_A(x) \geq \alpha$ por tanto $x \in A_\alpha$. $\square$

Se puede entonces afirmar que un conjunto de α-cortes provenientes de un conjunto difuso satisface estas tres propiedades.

Definición 1.5.7. *Sea $A \in FS(X)$ con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$. Se llama intervalo rango de A al intervalo I_A, el cuál viene dado por*

$$I_A = \begin{cases} [0,\alpha^*) & si \quad \nexists \ max \ R(\mu_A) \\ [0,\alpha^*] & si \quad \exists \ max \ R(\mu_A), \end{cases}$$

donde $\alpha^* = \sup R(\mu_A)$.

Teorema 1.5.8. ***Teorema de Representación de Conjuntos Difusos.*** *Sea $A \in FS(X)$. Entonces, para cada $x \in X$,*

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in R(\mu_A)} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) = \max_{\alpha \in R(\mu_A)} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) =$$

$$\sup_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) = \max_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x),$$

donde I_A viene dado en la Definición 1.5.7.

Demostración:
Sea $x \in X$ fijo pero arbitrario y $\alpha_0 = \mu_A(x) \in R(\mu_A) \subseteq I_A$, es decir, $\alpha_0 \in I_A$. Supóngase que $\alpha_0 = 0$.
Se distinguen dos casos:

- Si $x \in A_\alpha \neq \emptyset$ para algún $\alpha \in I_A \setminus \{0\} \Rightarrow \mu_A(x) \geq \alpha > 0$. Lo que es una contradicción, ya que $\mu_A(x) = \alpha_0 = 0$. Por tanto $\chi_{A_\alpha}(x) = 0 \ \forall \alpha > 0$ y $\chi_{A_0}(x) = 1 \Rightarrow \alpha = 0$. De manera que todas las igualdades son nulas y por tanto satisfechas.

- Si $x \in A_0$ y $x \notin A_\alpha \ \ \forall \alpha \in I_A \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) = 0 \ \ \forall \alpha \in I_A$. De nuevo las igualdades se cumplen.

Estos casos demuestran el teorema para $\alpha_0 = 0$.

Supóngase ahora que $\alpha_0 > 0$. Entonces $x \in A_{\alpha_0}$.
Sea $\alpha \in I_A$, para $\alpha > \alpha_0$. Si $x \in A_\alpha \Rightarrow \mu_A(x) \geq \alpha > \alpha_0$, pero $\alpha_0 = \mu_A(x)$. Por tanto $x \notin A_\alpha \ \forall \alpha > \alpha_0$ y $\chi_{A_\alpha}(x) = 0 \ \forall \alpha > \alpha_0$.
Entonces, se tiene que $x \in A_{\alpha_0} \subseteq A_\alpha \ \forall \alpha \leq \alpha_0$ donde se ha usado el apartado 2 de la Proposición 1.5.6, lo cual implica que $x \in A_\alpha \ \ \forall \alpha \leq \alpha_0$. De manera que

$$\sup_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) = \max_{\{\alpha \in I_A \ : \ \alpha \leq \alpha_0\}} \{\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)\} = \sup_{\{\alpha \in I_A \ : \ \alpha_0 < \alpha\}} \{\alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)\}$$

$$= \sup\{ \sup_{\{\alpha \in I_A : \alpha \leq \alpha_0\}} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x), 0\} = \alpha_0 = \mu_A(x).$$

Como $\alpha_0 \in I_A$ se alcanza el supremo anterior, lo cuál significa que $\mu_A(x) = \max_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x)$.
El argumento también es válido cuando I_A se cambia por $R(\mu_A)$. Con lo que se completa la demostración.

$\square$

Capítulo 2

Conjuntos graduales

En la sección anterior se ha pueso de manifiesto que un conjunto difuso define una familia de conjuntos nítidos, sus α-cortes, que se pueden interpretar como una aplicación $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que $\phi(\alpha) = A_\alpha$.
En este capítulo se describirá que condiciones tiene que cumplir una aplicación de $[0,1]$ en $\mathcal{P}(X)$, lo que llamaremos conjunto gradual, para determinar un conjunto difuso.

2.1. Conjuntos graduales

Para introducir este nuevo concepto, se habrá de caracterizar cuando una familia es un conjunto de α-cortes.

Definición 2.1.1. *Sea $I \subseteq [0,1]$ y sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ una aplicación que satisface:*

a) $f(0) = X$.

b) $f(\sup_{i \in I} \alpha_i) = \bigcap_{i \in I} f(\alpha_i),\ \forall \{\alpha_i\}_i \in I \subseteq [0,1]$.

Se denota $L'(X)$ al conjunto definido como

$$L'(X) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(X) : f \text{ cumpliendo } a) \text{ y } b)\}.$$

Teorema 2.1.2. *Dada una familia indizada $\{B_\alpha \ / \ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que*
i) $B_0 = X$
ii) Si $\alpha > \beta \Rightarrow B_\alpha \subseteq B_\beta$.
iii) Sea I un conjunto de índices y $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset [0,1]$ tal que $\sup\{\alpha_i\}_{i \in I} = \alpha$ con

$$B_\alpha = \bigcap_{i \in I} B_{\alpha_i}$$

Entonces existe un único conjunto difuso $A \in FS(X)$ tal que

$$A_\alpha = B_\alpha \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

Demostración:
Probar dicho teorema es equivalente a demostrar que a cada conjunto de α-cortes le corresponde un único conjunto difuso, es decir, que existe un isomorfismo $\varphi : FS(X) \longrightarrow L'(X)$.(Ya que la otra implicación también es cierta trivialmente).
Se define

$$\begin{aligned} \varphi : FS(X) &\longrightarrow L'(X) \\ A \quad &\longmapsto \quad \varphi(A) = f_A \end{aligned}$$

donde a su vez f_A se define como

$$\begin{aligned} f_A : [0,1] &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ \alpha &\longmapsto f_A(\alpha) = A_\alpha \end{aligned}$$

Luego, φ le asocia a cada conjunto difuso $A \in X$ la familia de sus α-cortes, a través de su respectiva función $f_A \in L'(X)$.
Veamos que φ es un isomorfismo.

φ está bien definida:
Para cualquier $A \in FS(X)$, $\varphi(A) \in L'(X) \Leftrightarrow f_A \in L'(X)$, es decir, si f_A satistafe las condiciones a) y b) de la Definición 2.1.1.

- $f_A(0) = A_0 \underset{\text{i) Proposición 1.5.6}}{\underset{\uparrow}{=}} X.$
- $f_A(\sup\limits_{i\in I} \alpha_i) = A_{\sup\limits_{i\in I} \alpha_i} \underset{\text{iii) Proposición 1.5.6}}{\underset{\uparrow}{=}} \bigcap\limits_{i\in I} A_{\alpha_i} = \bigcap\limits_{i\in I} f_A(\alpha_i).$

O sea, que $\varphi(A) \in L'(X) \ \forall A \in FS(X)$.

φ es inyectiva:
Sean $F, G \in FS(X)$ tales que $\varphi(F) = \varphi(G)$.
Entonces $f_F = f_G \Leftrightarrow f_F(\alpha) = f_G(\alpha) \ \forall \alpha \in [0,1] \Leftrightarrow F_\alpha = G_\alpha$
$\forall \alpha \in [0,1] \Leftrightarrow F = G$ (por el Teorema 1.5.8).

φ es sobreyectiva:
Sea $f \in L'(X)$, debería existir $A \in FS(X)$ tal que $\varphi(A) = f$, esto es,
$\forall \beta \in [0,1] \ \varphi(A)(\beta) = f_A(\beta) = A_\beta = f(\beta)$.
En este sentido, se define el conjunto difuso A con la función de pertenencia $\mu_A(x) = \sup\limits_{x\in f(\alpha)} \alpha, \ \forall x \in X$.
Se probará por doble inclusión la igualdad $A_\beta = f(\beta)$.

$\boxed{\subseteq}$ Considérese $\beta \in [0,1]$ si $x \in A_\beta \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta$. Por el apartado ii) de la hipótesis aplicado a $f \in L'(X) \Rightarrow f(\mu_A(x)) \subseteq f(\beta)$. Pero $f(\mu_A(x)) = f(\sup\limits_{x \in f(\alpha)} \alpha) = \bigcap\limits_{x \in f(\alpha)} f(\alpha)$. Por lo tanto, $x \in f(\beta)$.
$\boxed{\supseteq}$ Por otro lado, sea $x \in f(\beta) \Rightarrow \beta \leq \sup\limits_{x \in f(\alpha)} \alpha = \mu_A(x) \Rightarrow x \in A_\beta$.
Así que $\varphi(A) = f_A = f$, porque $f_A(\beta) = A_\beta = f(\beta)\ \forall \beta \in [0,1]$.

$\square$

Observación 2.1.3. *A partir de este teorema y del de representación de conjuntos difusos se deduce que es equivalente conocer la función de pertenencia de un conjunto difuso A que conocer su conjunto de α-cortes $\{A_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$.*

Se está ya en las condiciones para definir un conjunto gradual. Sea X un conjunto universo.

Definición 2.1.4. ***Conjunto gradual-DP***
Un conjunto gradual G viene dado por una aplicación
$\xi_G : (0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$*, que asigna a cada $\alpha \in (0,1]$ un conjunto de elementos de X.*

Esta es la primera definición sobre este nuevo concepto que hicieron Dubois y Prade en [1], sin embargo Wu hace la siguiente en 2019 en [18] y es la que se usará a lo largo de todo el trabajo.

Definición 2.1.5. ***Conjunto gradual-Wu***
Sea $I \subset [0,1]$. Un conjunto gradual G viene dado por una aplicación
$\xi_G : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$*, que asigna a cada $\alpha \in I$ un conjunto de elementos de X no vacío.*

La aplicación ξ_G se llama ***función de asignación****.*

Observación 2.1.6. *Cabe observar que ambos conjuntos graduales se diferencian en el dominio de la función de asignación.*
El conjunto gradual según Dubois y Prade no se define para $\alpha = 0$ ya que el conjunto de elementos de X cuyo grado de pertenencia es mayor o igual que 0 es X por ello no hacen referencia a este valor. Sin embargo Wu incluye en su definición todos los subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ correspondientes a cualquier grado de pertenencia, inclusive el 0. El propósito es obtener una generalización del concepto de conjunto difuso a partir de una cierta familia de conjuntos nítidos. En la definición de Wu el conjunto $I \subseteq [0,1]$ permite excluir los α-cortes vacíos, que son los $\alpha > \alpha^* = \sup R(\mu)$, con μ la función del conjunto difuso que se considere.

Definición 2.1.7. *Sea $I \subset [0,1]$. Diremos que un conjunto gradual G definido en I es anidado, si y solo si $\xi_G(\alpha) \subseteq \xi_G(\beta)$ para todo $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha > \beta$.*

Definición 2.1.8. *Denotaremos por $GS(X)$ al conjunto de conjuntos graduales de X.*

Ejemplo 2.1.9. No todo conjunto gradual es un conjunto de α-cortes.
En efecto, sean $X = \{a, b, c\}$ un conjunto y $G \in GS(X)$ con función de asignación dada por

$$\xi_G : \{0.25, 0.5, 0.75, 1\} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$\begin{array}{ccc} 0.25 & \longmapsto & \{a,b\} \\ 0.5 & \longmapsto & \{b,c\} \\ 0.75 & \longmapsto & \{a\} \\ 1 & \longmapsto & \{a,b\} \end{array}$$

Se tiene que en efecto $R(\xi_G) \subset \mathcal{P}(X)$, por lo que G es un conjunto gradual.

Sin embargo no es un conjunto de α-cortes ya que no verifica de propiedad de ser un conjunto anidado, apartado ii) de la Proposición 1.5.6.
En efecto $\xi_G(0.25) = \{a, b\}$ y $\xi_G(0.5) = \{b, c\}$, y se tiene que $0.25 < 0.5$ pero $\xi_G(0.5) \subsetneq \xi_G(0.25)$ ya que $\{b, c\} \subsetneq \{a, b\}$.

Aunque parezca que la segunda propiedad que deben cumplir los conjuntos graduales para ser un conjunto de α-cortes implica la tercera, no es así. La tercera propiedad es necesaria. Lo veremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.10. Sea $G : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dada por

$$G(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad \alpha = 0 \\ [\alpha - 1, 1 - \alpha] & si \quad 0 < \alpha < 1 \\ \{0\} & si \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

Comprobemos que se dan las dos primeras propiedades de la Proposición 1.5.6, pero no la tercera.

1. $G(0) = \mathbb{R}$.
2. Es una familia anidada

   - $\alpha = 0 \leq \beta \Rightarrow G(\beta) \subseteq \mathbb{R} = G(\alpha) \ \forall \beta \geq 0.$

- $\alpha \leq \beta = 1 \Rightarrow G(\beta) = \{0\} \subseteq G(\alpha) \;\; \forall \alpha \leq 1.$
- $\alpha \leq \beta$ con $\alpha, \beta \neq 0, 1 \Rightarrow G(\beta) \subseteq G(\alpha) \Leftrightarrow [\beta - 1, 1 - \beta] \subseteq [\alpha - 1, 1 - \alpha] \Leftrightarrow$

  $\alpha - 1 \leq \beta - 1 \; y \; 1 - \beta \leq 1 - \alpha \Leftrightarrow \alpha \leq \beta.$

3. Probaremos que $G(\underset{1<\alpha}{\vee} \alpha) \neq \underset{1<\alpha}{\cap} G(\alpha)$.
   $G(\underset{1<\alpha}{\vee} \alpha) = G(\underset{1<\alpha}{\sup} \alpha) = G(1) = \{0\}$.
   $\underset{1<\alpha}{\cap} G(\alpha) = \mathbb{R} \cap (\underset{0<\alpha<1}{\cap} [\alpha - 1, 1 - \alpha]) = \underset{0<\alpha<1}{\cap} [\alpha - 1, 1 - \alpha] = (1 - 1, 1 - 1) = \emptyset.$
   Pero $\{0\} \neq \emptyset$.

   Por tanto G es un conjunto gradual, pero no corresponde al conjunto de α-cortes de ningún conjunto difuso.

2.2. Relación entre Conjuntos Difusos y Conjuntos Graduales

Se relacionarán ahora los conceptos de conjuntos difusos y graduales asociando a cada conjunto difuso uno gradual y viceversa.

Sea A un conjunto difuso con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$ y sea $\alpha^* = sup \; R(\mu_A)$. Este conjunto difuso induce un conjunto gradual G_A con función de asignación dada por

$$\xi_{G_A} : I_A \longrightarrow \mathcal{P}(X), \quad \xi_{G_A}(\alpha) = A_\alpha, \tag{2.1}$$

donde I_A es el intervalo rango dado en la Definición 1.5.7.
Un ejemplo que muestra esta idea es el siguiente.

Ejemplo 2.2.1. Considérese el conjunto difuso A definido en el Ejemplo 1.5.4, donde $R(\mu_A) = \{0, 0.5, 0.6\}$ y $\alpha^* = 0.6$. En este caso $\exists \; \max R(\mu_A) = 0.6$, por tanto dicho conjunto difuso induce el conjunto gradual G_A cuya función de asignación es

$$\xi_{G_A} : [0, 0.6] \longrightarrow \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$$

dada por

$$\xi_{G_A}(\alpha) = A_\alpha = \begin{cases} \{a, b, c, d\} & si \quad \alpha = 0 \\ \{b, c, d\} & si \quad 0 < \alpha \leq 0.5 \\ \{d\} & si \quad \alpha > 0.5. \end{cases}$$

Definición 2.2.2. *Dado un conjunto gradual G con función de asignación $\xi_G : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, este induce un conjunto difuso A^G en X cuya función de pertenencia viene dada por*

$$\mu_{A^G} : X \longrightarrow [0,1], \qquad \mu_{A^G}(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{\xi_G(\alpha)}(x), \tag{2.2}$$

donde $\chi_{\xi_G(\alpha)}$ es la función característica dada por

$$\chi_{\xi_G(\alpha)}(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in \xi_G(\alpha) \\ \\ 0 & si \quad x \notin \xi_G(\alpha) \end{cases}$$

Se ilustrará esta idea con un ejemplo.

Ejemplo 2.2.3. El conjunto gradual G del Ejemplo 2.1.9 induce el conjunto difuso A^G cuya función de pertenencia viene dada por

$$\begin{aligned} \mu_{A^G} : X &\longrightarrow [0,1] \\ a &\longmapsto 1 \\ b &\longmapsto 1 \\ c &\longmapsto 0.5 \end{aligned}$$

Se pueden entonces definir dos aplicaciones:

$$\begin{aligned} \phi : FS(X) &\longrightarrow GS(X) \\ A &\longmapsto G_A \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi : GS(X) &\longrightarrow FS(X) \\ &\longmapsto A^G \end{aligned}$$

donde G_A es el conjunto gradual con función de asignación ξ_{G_A} dada por 2.1 y A^G es el conjunto difuso con función de pertenencia μ_{A^G} dada por 2.2.
Lo interesante ahora es determinar si estas aplicaciones son mutuamente inversas.

- En primer lugar se estudiará si $\phi \circ \varphi = Id_{GS(X)}$, donde $Id_{GS(X)}$ es la identidad de conjuntos graduales.
  Claramente esta igualdad no es cierta, basta considerar un conjunto gradual que no determine una familia de α-cortes.

  Contraejemplo:
  Considerándose el Ejemplo 2.1.9 se tiene un conjunto gradual G que no es anidado, pero cuando se considera $\phi \circ \varphi(G)$ se obtiene uno que sí es anidado. Veámoslo.

$$\begin{aligned} \varphi(G) : X &\longrightarrow [0,1] \\ a &\longmapsto 1 \\ b &\longmapsto 1 \\ c &\longmapsto 0.5 \end{aligned}$$

$$\phi(\varphi(G)) : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$\phi(\varphi(G))(\alpha) = \begin{cases} \{a,b,c\} & si \quad 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \\ \{a,b\} & si \quad 0.5 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Basta observar que $\xi_G(0.5) = X \neq \{b,c\} = \xi_{\phi(\varphi(G))}(0.5)$.
De manera que $G \neq \phi(\varphi(G))$.

- Ahora se estudiará si $\varphi \circ \phi = Id_{FS(X)}$, donde $Id_{FS(X)}$ denota a la identidad en conjuntos difusos del conjunto universo X. En este caso la respuesta es afrimativa. Como consecuencia ϕ es inyectiva y φ es sobreyectiva.
  Demostración:
  Sea $A \in FS(X)$ cualquiera con función de pertenencia

$$\begin{aligned} \mu_A : X &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(A) : I_A &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ \alpha &\longmapsto A_\alpha \end{aligned}$$

Con $\varphi(A)(0) = A_0 = X$.

$$\begin{aligned} \phi(\varphi(A)) : X &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \sup_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{\varphi(A)(\alpha)}(x) \end{aligned}$$

Pero en realidad,

$$\sup_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{\varphi(A)(\alpha)}(x) = \sup_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ Teorema\ 1.5.8}}{=} \mu_A(x).$$

Por tanto $A = \varphi(\phi(A)) \quad \forall A \in FS(X)$. Lo que concluye que

$$\varphi \circ \phi = Id_{FS(X)}.$$

$\square$

2.3. Elementos graduales y difusos

Definición 2.3.1. *Sea I un subconjunto de $[0,1]$. Un* ***elemento gradual*** *g del conjunto universo X es una aplicación*

$$g : I \longrightarrow X$$

Observación 2.3.2. *Una familia de elementos graduales induce un conjunto gradual.*

Sea Λ un conjunto de índices, que puede ser no numerable. Considérese una familia de elementos graduales de X $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ definidos sobre el mismo dominio $I \subseteq [0,1]$. Esta familia de elementos graduales induce un conjunto gradual G en X definido en I como sigue $\xi_G(\alpha) = \{g_\lambda(\alpha) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall \alpha \in I$.

Definición 2.3.3. *Sea G un conjunto gradual. Se dirá que g es un elmento de G, denotado por $g \in G$, si g es un elemento gradual y se cumple que $g(\alpha) \in \xi_G(\alpha)\ \forall \alpha \in I$.*

En este sentido se dirá que **un conjunto gradual está formado por elementos graduales.**

Definición 2.3.4. *Sea G un conjunto gradual, con función de asignación, $\xi_G : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, se llama* ***selector*** *de G a una función $g : I \longrightarrow X$, satisfaciendo $g(\alpha) \in \xi_G(\alpha)\ \forall \alpha \in I$.*

Es claro ver que un selector de un conjunto gradual es un elemento gradual en X. Este será seleccionado a través del axioma de elección, es decir, según el contexto.

La idea de Wu [18], es poder definir los elementos de un conjunto difuso, a los cuales llama **elementos difusos.**
De manera que si $A \in FS(X)$ es un conjunto difuso cualquiera del universo X, con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$, entonces a través de la aplicación ϕ se obtiene el conjunto gradual G_A inducido por A,

$$\xi_{G_A} : I_A \longrightarrow \mathcal{P}(X),\ \ \xi_{G_A}(\alpha) = A_\alpha,$$

para el que se ha establecido el concepto de elemento en la Definición 2.3.3.

Si se toma un elemento g de G_A como selector, es decir, $g(\alpha) \in A_\alpha\ \forall \alpha \in I_A$, que es un elemento gradual $g : I \longrightarrow X$, entonces este se puede ver como un conjunto gradual unitario como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{g} : I_A &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ \alpha &\longmapsto \{g(\alpha)\} \end{aligned}$$

Volviendo a aplicar φ este conjunto gradual se obtiene un conjunto difuso $\varphi(\tilde{g}) = A^{\tilde{g}} := \tilde{a}$, dado por

$$\mu_{\tilde{a}} : X \longrightarrow [0,1],\ \mu_{\tilde{a}}(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{\tilde{g}(\alpha)}(x).$$

Volviendo al conjunto gradual G_A, se sabe por lo razonado en la sección anterior que $\varphi(G_A) = A$, es decir, el conjunto difuso inducido vuelve a ser el conjunto difuso original, ya que $\varphi \circ \phi = Id_{FS(X)}$.
Entonces diremos que $\tilde{a} \in A$, es decir, **que $\tilde{a}$ es un elemento difuso del conjunto difuso A.**

Proposición 2.3.5. *Sean $\tilde{a}, A \in FS(X)$ con $\tilde{a} \in A$, entonces $\mu_{\tilde{a}}(x) \leq \mu_A(x)$ $\forall x \in X$.*

Demostración:
Sea $A \in FS(X)$ para X un conjunto universo y sea $\tilde{a} \in A$.
Si $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ es la función de pertenencia del conjunto difuso A, entonces $\mu_{\tilde{a}} : X \longrightarrow [0,1], \mu_{\tilde{a}}(x) = \sup\limits_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{\tilde{g}(\alpha)}(x)$ es la función de pertenencia de $\tilde{a}$, con $\tilde{g}(\alpha) = \{g(\alpha)\}$ con $g \in G_A$.

Sea $x \in X$ fijo pero arbitrario, tal que $\mu_A(x) = \alpha \Rightarrow x \in A_\alpha \Rightarrow \forall \beta \leq \alpha\ x \in A_\beta$ ya que los α-cortes verifican la propiedad *ii*) de la Proposición 1.5.6. Entonces para cada $\beta \leq \alpha$ se distinguen dos casos:

- Si $g(\beta) = x \Rightarrow \mu_{\tilde{a}}(x) = \beta \leq \alpha = \mu_A(x)$.
- Si $g(\beta) \neq x \Rightarrow \mu_{\tilde{a}}(x) = \sup\limits_{\beta \in I} \beta \cdot \chi_{\tilde{g}(\beta)}(x) = \sup\limits_{\beta \in I} \beta \cdot \chi_{\{g(\beta)\}}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ x \notin \{g(\beta)\}}}{=} 0 \leq \alpha = \mu_A(x)$.

En cualquier caso se tiene que $\mu_{\tilde{a}}(x) \leq \mu_A(x)$ $\forall x \in X$. $\square$
Se ilustrará la idea de elemento gradual y difuso con un ejemplo discreto y otro continuo.

Ejemplo 2.3.6. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y A el conjunto difuso con la siguiente función de pertenencia

$$\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$$

$$\begin{array}{rcl} a & \longmapsto & 0.2 \\ b & \longmapsto & 0.4 \\ c & \longmapsto & 0.8 \\ d & \longmapsto & 0.5 \end{array}$$

Se obtiene el conjunto gradual G_A a partir de A cuya función de asignación viene dada por

$$\xi_{G_A} : [0, 0.8] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$\xi_{G_A}(\alpha) = \begin{cases} X & si \quad 0 \leq \alpha \leq 0.2 \\ \\ \{b, c, d\} & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ \\ \{c, d\} & si \quad 0.4 < \alpha \leq 0.5 \\ \\ \{c\} & si \quad 0.5 < \alpha \leq 0.8 \end{cases}$$

Se toma como selector de G_A el elemento gradual siguiente $g_1 : [0, 0.8] \longrightarrow X$,

$$g_1(\alpha) = \begin{cases} a & si \quad 0 \leq \alpha \leq 0.2 \\ b & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ d & si \quad 0.4 < \alpha \leq 0.5 \\ c & si \quad 0.5 < \alpha \leq 0.8 \end{cases}$$

que se puede ver como conjunto gradual como sigue:

$$\tilde{g}_1 : [0, 0.8] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$\tilde{g}_1(\alpha) = \begin{cases} \{a\} & si \quad 0 \leq \alpha \leq 0.2 \\ \\ \{b\} & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ \\ \{d\} & si \quad 0.4 < \alpha \leq 0.5 \\ \\ \{c\} & si \quad 0.5 < \alpha \leq 0.8 \end{cases}$$

Ahora, $\varphi(\tilde{g}_1) = \tilde{a}_1$ es elemento difuso con función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{a}_1} : X \longrightarrow [0, 1]$$

$$\begin{array}{rcl} a & \longmapsto & 0.2 \\ b & \longmapsto & 0.4 \\ c & \longmapsto & 0.8 \\ d & \longmapsto & 0.5 \end{array}$$

En este caso $\tilde{a} = A$, ya que $\mu_{\tilde{a_1}}(x) = \mu_A(x)\ \forall x \in X$, en particular se verifica la observación.
Si se hubiera tomado como selector la aplicación $g_2 : [0, 0.8] \longrightarrow X$, dada por

$$g_2(\alpha) = \begin{cases} b & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ c & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces el conjunto gradual que induce sería

$$\tilde{g_2} : [0, 0.8] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$\tilde{g_2}(\alpha) = \begin{cases} \{b\} & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ \{c\} & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y por tanto el elemento difuso obtenido sería $\varphi(\tilde{g_2}) = \tilde{a_2}$ con función de pertenencia $\mu_{\tilde{a_2}}$ dada por

$$\mu_{\tilde{a_2}} : X \longrightarrow [0,1],$$

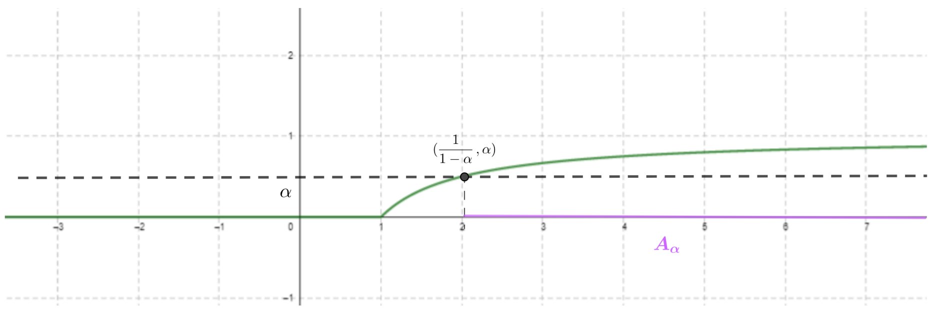
$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & 0 \\ b & \longmapsto & 0.4 \\ c & \longmapsto & 0.8 \\ d & \longmapsto & 0 \end{array}$$

En efecto, también $\tilde{a_2} \in A$, y en este caso $\mu_{\tilde{a_2}}(x) \leq \mu_A(x)\ \forall x \in X$, ya que $\tilde{a_2} \neq A$.

Ejemplo 2.3.7. Sea $A \in FS(\mathbb{R})$ el conjunto difuso dado por $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & si \quad x \geq 1 \\ 0 & si \quad x < 1 \end{cases}$$

El conjunto de los α-cortes de A para construir el conjunto gradual G_A es el siguiente.



$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \mu_A(x) \geq \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad \alpha = 0 \\ [\frac{1}{1-\alpha}, \infty) & si \quad 0 < \alpha < 1 \\ \emptyset & si \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

De manera que G_A es el conjunto gradual definido a partir de la función de asignación $\xi_{G_A} : [0,1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \xi_{G_A}(\alpha) = A_\alpha$.
Se puede tomar como selector el elemento gradual $g : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$g(\alpha) = \begin{cases} 2 & si \quad \alpha = 0 \\ \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha} & si \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

En efecto g es un elemento gradual de G_A ya que $g(\alpha) \in \xi_{G_A}(\alpha)\ \forall \alpha \in [0,1)$.
Este selector induce el conjunto gradual $\tilde{g}$ dado por $\xi_{\tilde{g}} : [0,1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$,
$\xi_{\tilde{g}}(\alpha) = \{g(\alpha)\} \subseteq \xi_{G_A}(\alpha) = A_\alpha$.
De manera que podemos construir un elemento difuso de A a través de φ, es decir, $\varphi(\tilde{g}) = \tilde{a}$ cuya función de pertenencia viene dada por

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1)} \alpha \cdot \chi_{\tilde{g}(\alpha)}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 4 \\ \frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}{2} & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

En efecto, se tiene que $\mu_{\tilde{a}}(x) \leq \mu_A(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

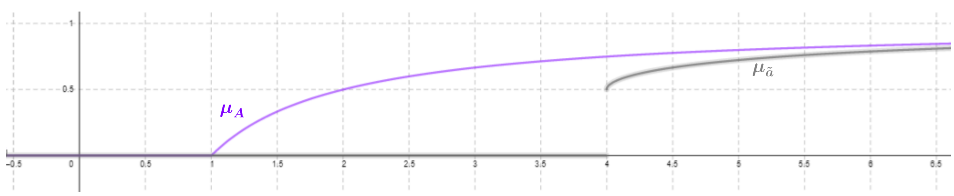
- Para $x < 4$ es claro.
- Para $x \geq 4$

$$\mu_{\tilde{a}}(x) \leq \mu_A(x) \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}{2} \leq 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x}} \leq 2 - \frac{2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1-\frac{4}{x}} \leq 1 - \frac{2}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x} \leq 1 + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} \geq 0\ \forall x \geq 4.$$

  Lo cual siempre es cierto.

Se puede ver gráficamente también.



Se tiene que $\tilde{a}$ es un elemento difuso de A, es decir, $\tilde{a} \in A$.

Capítulo 3

Operaciones difusas a través de elementos difusos

En este capítulo se tratarán de recuperar las operaciones unión, intersección y negación difusa a través de los elementos de conjuntos difusos que, como se ha visto en el capítulo anterior vienen dados por elementos graduales. Todo se hará con las definiciones en el sentido de Wu [18], por tanto se considerarán conjuntos difusos cuyas funciones de pertenencia tienen como intervalo rango $I \subseteq [0,1]$ dado en la Definición 1.5.7.

Sean $A_1, ..., A_n$ conjuntos difusos del conjunto universo X, con funciones de pertenencia $\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}$ respectivamente, donde cada una de ellas viene dada como sigue

$$\mu_{A_i} : X \longrightarrow [0,1],$$

y sea $\alpha_i^* = \sup R(\mu_{A_i})$ para cada $i = 1, ..., n$.

Lema 3.0.1. *En la situación descrita se tiene* $(A_i)_\alpha \neq \emptyset \ \forall \alpha \in I_{A_i}$ *y* $(A_i)_\alpha = \emptyset \ \forall \alpha \notin I_{A_i}$, *donde* I_{A_i} *es el intervalo rango dado en la Definición 1.5.7 del conjunto difuso* A_i, *y* $(A_i)_\alpha$ *son los* α*-cortes del conjunto difuso* A_i, $\forall i = 1, ..., n$.

Demostración:
Para cada $i = 1, ..., n$ se tiene que $(A_i)_\alpha = \{x \in X \text{ tales que } \mu_{A_i}(x) \geq \alpha\}$.
Si $0 \leq \alpha < \alpha_i^*$ entonces $(A_{\alpha_i^*}) \subseteq (A_i)_\alpha \neq \emptyset$ ya que $\alpha \in R(\mu_{A_i})$.
Si $\alpha > \alpha_i^*$, entonces $\alpha \notin R(\mu_{A_i}) \Rightarrow \nexists \ x \in X : \mu_{A_i}(x) = \alpha$, en particular que sea mayor o igual, así que en este caso $(A_i)_\alpha = \emptyset$.
Para $\alpha = \alpha_i^*$, si este valor pertenece al intervalo rango se dará la primera disyunción, y en otro caso se dará la última. En cualquier caso queda demostrado.

$\square$

Para cada $i = 1, ..., n$ como en el capítulo anterior, se afirma que $g_i : I_{A_i} \longrightarrow X$ es un elemento gradual de G_{A_i} satisfaciendo $g_i(\alpha) \in (A_i)_\alpha \neq \emptyset \ \forall \alpha \in I_{A_i}$. Así se

obtienen los elementos difusos de los conjuntos difusos A_i siguientes
$\varphi(\tilde{g}_i) = \tilde{a}_i \in A_i$, con función de pertenencia

$$\mu_{\tilde{a}_i} : X \longrightarrow [0,1],$$

que satistace $\mu_{\tilde{a}_i}(x) \leq \mu_{A_i}(x)\ \forall x \in X$, donde $\tilde{g}_i$ es el conjunto gradual unitario que induce g_i.

3.1. Unión e intersección

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ subconjuntos nítidos de un conjunto X, entonces su unión e intersección vienen dadas respectivamente por

$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = \{x \in X \ : \ x \in X_i, \text{ para algún } i = 1, 2, ..., n\}$$

$$X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n = \{x \in X \ : \ x \in X_i, \ \forall i = 1, 2, ..., n\}.$$

El objetivo es desarrollar una descripción similar para obtener la unión e intersección de conjuntos difusos a partir de sus elemetos difusos.

3.1.1. Unión

Sean X un conjunto universo y $A_1, ..., A_n \in FS(X)$ con funciones de pertenencia $\mu_{A_i} \colon X \longrightarrow [0,1]\ \forall i = 1, ..., n$. Se denotará por $\tilde{a}_i$ los elementos difusos de $A_i,\ i = 1, ..., n$, descritos anteriormente.
Considérese la familia

$$\{\tilde{a}_i \ : \ \tilde{a}_i \in A_i \text{ para algún } i = 1, ..., n\},$$

que está formada por elementos difusos de los conjuntos difusos $A_1, ..., A_n$.
Esta familia induce el conjunto gradual $G^{\cup}$ con función de asignación
$\xi_{G^{\cup}} : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, dada por:

$$\xi_{G^{\cup}}(\alpha) \equiv G^{\cup}(\alpha) = \{g_i(\alpha) \ : \ g_i \in G_i \text{ para algún } i = 1, ..., n\} \text{ para } \alpha \in I,$$

donde $I = \bigcap\limits_{i=1}^{n} I_{A_i}$.
g_i es un elemento gradual del conjunto gradual $\phi(A_i) = G_{A_i} \equiv G_i$, dado por la función de pertenencia $\xi_{G_i} : I \longrightarrow \mathcal{P}(X),\ \xi_{G_i}(\alpha) = (A_i)_\alpha$, qué inducirá un conjunto gradual $\tilde{g}_i$ el cuál a su vez determina el elemento difuso $\tilde{a}_i \in A_i$,
$i = 1, ..., n$.

Basándose en dicho conjunto gradual se obtiene el conjunto difuso $\varphi(G^{\cup}) = A^{G^{\cup}} \equiv A^{\cup}$ cuya función de pertenencia viene dada por

$$\mu_{A^{\cup}} : X \longrightarrow [0,1],\ \mu_{A^{\cup}}(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{G^{\cup}(\alpha)}(x) \tag{3.1}$$

Se puede establecer entonces la siguiente definición.

Definición 3.1.1. *Se define la unión de conjuntos difusos* $A_1, A_2, ...A_n \in FS(X)$ *como*

$$A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n = A^{\cup},$$

con $A^{\cup}$ *dada en 3.1.*

3.1.2. Intersección

De la misma forma, la familia

$$\{\tilde{a}_i \ : \ \tilde{a}_i \in A_i \ \forall i = 1, ..., n\},$$

formada por elementos difusos de los conjuntos difusos $A_1, ..., A_n$, induce el conjunto gradual $G^{\cap}$ con función de asignación $\xi_{G^{\cap}} : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, dada por:

$$\xi_{G^{\cap}}(\alpha) \equiv G^{\cap}(\alpha) = \{g_i(\alpha) \ : \ g_i \in G_i \ \forall i = 1, ..., n\} \text{ para } \alpha \in I,$$

donde $I = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_{A_i}$.
De nuevo g_i son elementos graduales del conjunto gradual $\phi(A_i) = G_{A_i} \equiv G_i$, $i = 1, ..., n$.
Basándose en dicho conjunto gradual se obtiene el conjunto difuso $\varphi(G^{\cap}) = A^{G^{\cap}} \equiv A^{\cap}$ cuya función de pertenencia es

$$\mu_{A^{\cap}} : X \longrightarrow [0,1],\ \mu_{A^{\cap}}(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{G^{\cap}(\alpha)}(x) \tag{3.2}$$

Se puede establecer entonces la siguiente definición.

Definición 3.1.2. *Se define la intersección de conjuntos difusos* $A_1, A_2, ..., A_n \in FS(X)$ *como*

$$A_1 \sqcap A_2 \sqcap \cdots \sqcap A_n = A^{\cap},$$

con $A^{\cap}$ *dada en 3.2.*

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c} A_i \text{ conjunto difuso con} \\ \text{función de pertenencia} \\ \mu_{A_i}\colon X \longrightarrow [0,1] \end{array} \arrow[r, "\phi"] & \begin{array}{c} \phi(A_i) = G_i \text{ conjunto gradual} \\ \text{con función de asignación} \\ \xi_{G_i}\colon I \longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ \alpha \longmapsto (A_i)_\alpha \end{array} \arrow[d] \\
 & \begin{array}{c} g_i\colon I \longrightarrow X \text{ selector de } G_i \\ \alpha \longmapsto g_i(\alpha) \end{array} \arrow[d] \\
\begin{array}{c} \varphi(\tilde{g}_i) = \tilde{a}_i \equiv A_{ig_i} \in A_i \\ \text{elemento difuso con} \\ \text{función de pertenencia} \\ \mu_{\tilde{a}_i}\colon X \longrightarrow [0,1] \\ x \longmapsto \sup\limits_{\alpha\in I} \alpha\cdot\chi_{\tilde{g}_i(\alpha)}(x) \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{g}_i\colon I \longrightarrow \mathcal{P}(X) \text{ conjunto gradual unitario} \\ \alpha \longmapsto \{g_i(\alpha)\} \end{array} \arrow[l, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.1.3. Sean $X = \mathbb{R}$ un conjunto universo y A_1 y $A_2 \in FS(\mathbb{R})$ con funciones de pertenencia
$\mu_{A_1}, \mu_{A_2} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ dadas respectivamente como sigue

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ 4-x & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \qquad \mu_{A_2}(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 < x < 4 \\ 5-x & \text{si} \quad 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El intervalo rango de ambos conjuntos difusos es el mismo $I = [0,1]$, ya que $\max(R\mu_{A_1}) = \max(R\mu_{A_2}) = 1$.
También se pueden calcular los α-cortes de ambos conjuntos difusos fácilmente como se puede observar a continuación a partir de las propias gráficas de las funciones de pertenencia de cada conjunto difuso.
De esta manera se obtienen los dos conjuntos graduales $\phi(A_1) = G_1$ y $\phi(A_2) = G_2$ cuyas funciones de asignación vienen dadas por (1.3) como sigue.

$$\xi_{G_1} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \xi_{G_1}(\alpha) = \begin{cases} [1+\alpha, 4-\alpha] & si \quad \alpha \neq 0 \\ \mathbb{R} & si \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\xi_{G_2} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ \xi_{G_2}(\alpha) = \begin{cases} [2+\alpha, 5-\alpha] & si \quad \alpha \neq 0 \\ \mathbb{R} & si \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

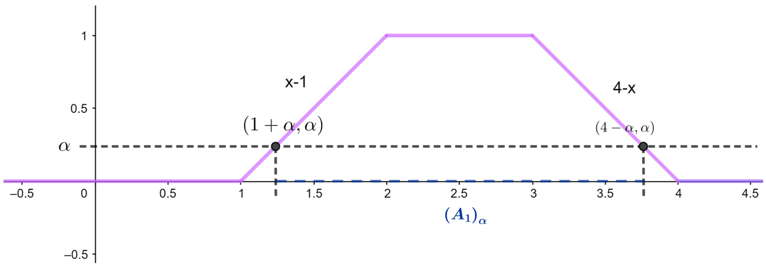


Figura 3.1: $(A_1)_\alpha = [1+\alpha, 4-\alpha]$, α-corte del conjunto difuso A_1.

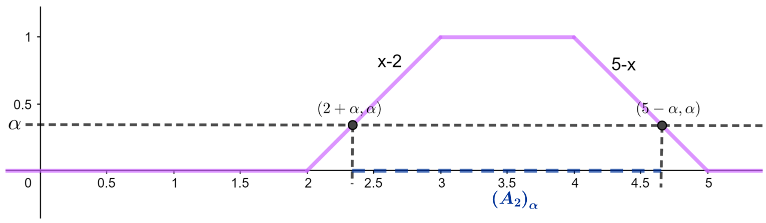


Figura 3.2: $(A_2)_\alpha = [2+\alpha, 5-\alpha]$, α-corte del conjunto difuso A_2.

Tómense como selectores del conjunto gradual G_1

$$g_1^1\colon I \longrightarrow \mathbb{R},\ g_1^1(\alpha) = 1+\alpha$$

$$g_1^2\colon I \longrightarrow X,\ g_1^2(\alpha) = 4-\alpha$$

para cada $\alpha \in [0,1]$. En efecto $\forall \alpha \in [0,1]\ \ g_1^i(\alpha) \in \xi_{G_1}(\alpha) = (A_1)_\alpha,\ \ i = 1,2.$
De igual modo se toman como selectores para el conjunto gradual G_2 los siguientes.

$$g_2^1\colon I \longrightarrow X,\ g_2^1(\alpha) = 2+\alpha$$

$$g_2^2\colon I \longrightarrow X,\ g_2^2(\alpha) = 5-\alpha$$

para cada $\alpha \in [0,1]$. También $\forall \alpha \in [0,1]\ \ g_2^i(\alpha) \in \xi_{G_2}(\alpha) = (A_2)_\alpha,\ \ i = 1,2.$
Estos a su vez inducen los conjuntos graduales unitarios siguientes:

$$g_1^1 \longrightarrow \begin{array}{r}\tilde{g_1^1}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\\ \alpha \longmapsto \{1+\alpha\}\end{array} \qquad g_1^2 \longrightarrow \begin{array}{r}\tilde{g_1^2}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\\ \alpha \longmapsto \{4-\alpha\}\end{array}$$

$$g_2^1 \longrightarrow \begin{array}{r}\tilde{g_2^1}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\\ \alpha \longmapsto \{2+\alpha\}\end{array} \qquad g_2^2 \longrightarrow \begin{array}{r}\tilde{g_2^2}\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\\ \alpha \longmapsto \{5-\alpha\}\end{array}$$

Y de aquí se obtienen respectivos elementos difusos de A_1 y A_2.

$g_1^1 \xrightarrow{\varphi} \varphi(\widetilde{g_1^1}) = \widetilde{a_1^1}$ con función de pertenencia $\mu_{\widetilde{a_1^1}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$ dada por
$\mu_{\widetilde{a_1^1}}(x) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot \chi_{\widetilde{g_1^1(\alpha)}}(x) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot \chi_{\{1+\alpha\}}(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$g_1^2 \xrightarrow{\varphi} \varphi(\widetilde{g_1^2}) = \widetilde{a_1^2}$ con función de pertenencia $\mu_{\widetilde{a_1^2}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$ dada por
$\mu_{\widetilde{a_1^2}}(x) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot \chi_{\widetilde{g_1^2(\alpha)}}(x) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot \chi_{\{4-\alpha\}}(x) = \begin{cases} 4-x & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$g_2^1 \xrightarrow{\varphi} \varphi(\widetilde{g_2^1}) = \widetilde{a_2^1}$ con función de pertenencia $\mu_{\widetilde{a_2^1}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$ dada por
$\mu_{\widetilde{a_2^1}}(x) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot \chi_{\widetilde{g_2^1(\alpha)}}(x) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot \chi_{\{2+\alpha\}}(x) = \begin{cases} x-2 & si \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$g_2^2 \xrightarrow{\varphi} \varphi(\widetilde{g_1^1}) = \widetilde{a_2^2}$ con función de pertenencia $\mu_{\widetilde{a_2^2}} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$ dada por
$\mu_{\widetilde{a_2^2}}(x) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot \chi_{\widetilde{g_2^2(\alpha)}}(x) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} \alpha \cdot \chi_{\{5-\alpha\}}(x) = \begin{cases} 5-x & si \quad 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
Óbservese que en este caso hemos tomado 4 elementos graduales a partir de los cuáles se ha recuperado el conjunto difuso unión total, pero esto no tiene por qué ocurrir al seleccionar otros elementos graduales.

Considérese el conjunto gradual obtenido a partir de todos los elementos graduales, en consecuencia, $\{g_1^1(\alpha), g_1^2(\alpha), g_2^1(\alpha), g_2^2(\alpha)\} \subseteq G^{\cup}(\alpha)\ \ \forall\alpha \in [0,1]$.

$$G^{\cup} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(X),\ \ G^{\cup}(\alpha) = \{g(\alpha) : g \in G_1 \text{ ó } g \in G_2\}$$

para $\alpha \in [0,1]$.
En general, para cada $\alpha \in [0,1]$ se tiene que

$$G^{\cup}(\alpha) = \{g(\alpha) : g \in G_1 \text{ ó } g \in G_2\ \forall\alpha \in I\} =$$

$$\{g(\alpha) : g(\alpha) \in (A_1)_\alpha \text{ ó } g(\alpha) \in (A_2)_\alpha\ \forall\alpha \in I\} =$$

$$\{g(\alpha) : 1+\alpha \leq g(\alpha) \leq 4-\alpha \text{ ó } 2+\alpha \leq g(\alpha) \leq 5-\alpha\ \forall\alpha \in I\} =$$

$$\{g(\alpha) : 1+\alpha \leq g(\alpha) \leq 5-\alpha\ \forall\alpha \in I\} = [1+\alpha, 5-\alpha] = (A_1)_\alpha \cup (A_2)_\alpha.$$

Entonces $A_1 \sqcup A_2$ tiene es el conjunto difuso con función de pertenencia

$$\mu_{A_1\sqcup A_2} : X \longrightarrow [0,1],\ \ \mu_{A_1\sqcup A_2}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \{\alpha \cdot \chi_{[1+\alpha,5-\alpha]}(x)\}.$$

Centrándonos ahora en la intersección, considérese el conjunto gradual

$$G^{\cap} : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(X),\ \ G^{\cap}(\alpha) = \{g(\alpha) : g \in G_1 \text{ y } g \in G_2\}$$

para $\alpha \in [0,1]$.
Es claro, entonces que $\{g_1^2(\alpha), g_2^1(\alpha)\} \subseteq G^{\cap}(\alpha)$ para $\alpha \in [0,1]$.
En general para cada $\alpha \in [0,1]$ se tiene que

$$G^{\cap}(\alpha) = \{g(\alpha) : g \in G_1 \text{ y } g \in G_2 \ \forall \alpha \in I\} =$$

$$\{g(\alpha) : g(\alpha) \in (A_1)_\alpha \text{ y } g(\alpha) \in (A_2)_\alpha \ \forall \alpha \in I\} =$$

$$\{g(\alpha) : 1+\alpha \leq g(\alpha) \leq 4-\alpha \text{ y } 2+\alpha \leq g(\alpha) \leq 5-\alpha \ \forall \alpha \in I\} =$$

$$\{g(\alpha) : 2+\alpha \leq g(\alpha) \leq 4-\alpha \ \forall \alpha \in I\} = [2+\alpha, 4-\alpha] = (A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha.$$

Se tiene entonces el conjunto difuso $A_1 \sqcap A_2$ con función de pertenencia

$$\mu_{A_1 \sqcap A_2} : X \longrightarrow [0,1], \ \ \mu_{A_1 \sqcap A_2}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha \cdot \chi_{[2+\alpha, 4-\alpha]}(x)\}.$$

Proposición 3.1.4. *Sean $A_1, ..., A_n \in FS(X)$ tales que sus intervalos rangos coinciden, es decir, $I_i = I \ \forall i = 1, ...n$. Entonces se cumplen:*

i) $G^{\cup}(\alpha) = (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha \ \ \forall \alpha \in I$ y $G^{\cup}(\beta) \subseteq G^{\cup}(\alpha)$ para $\alpha < \beta$.

ii) Suponiendo que $(A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha \neq \emptyset \ \ \forall \alpha \in I$. Entonces se tiene que

$$G^{\cap}(\alpha) = (A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha \ \ \forall \alpha \in I \ \text{ y } \ G^{\cap}(\beta) \subseteq G^{\cap}(\alpha) \ \text{ para } \alpha < \beta.$$

Demostración:

i) Se probará que $G^{\cup}(\alpha) = (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha$, por doble inclusión.
$\boxed{\subseteq}$ Sea $x \in G^{\cup}(\alpha) \Rightarrow x = g_i(\alpha)$ con g_i elemento gradual de G_i para cierto $i = 1, ..., n$. Como $g_i \in G_i \Rightarrow g_i(\alpha) \in \xi_{G_i}(\alpha) = (A_i)_\alpha \ \forall \alpha \in I$ para cierto $i = 1, ..., n$. Así que, $x \in (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha$.
$\boxed{\supseteq}$ Se toma $\alpha \in I$ fijo pero arbitrario y cualquier $x \in (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha$, se tiene entonces que $x \in (A_i)_\alpha$ para algún $i = 1, ..., n$. Se define $g_x : I \longrightarrow X$ dada como sigue

$$g_x(\beta) = \begin{cases} x & si \quad \beta = \alpha \\ y & si \quad \beta \neq \alpha \quad \text{para algún } y \in (A_i)_\beta \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida ya que por el Lema 3.0.1 $(A_i)_\beta \neq \emptyset \ \forall \beta \in I$.
Se tiene que $g_x(\beta) \in (A_i)_\beta \ \forall \beta \in I$

- Si $\beta \neq \alpha \Rightarrow g_x(\beta) = y \in (A_i)_\beta$ por definición de g_x.
- Si $\beta = \alpha \Rightarrow g_x(\beta) = x \in (A_i)_\alpha = (A_i)_\beta$ por hipótesis.

Por tanto, ya que $x = g_x(\alpha)$ tal que $g_x \in G_i$ para cierto $i = 1, ..., x$. Entonces $x \in G^{\cup}$.
La última parte es trivial por ser $(A_i)_\alpha$ el conjunto α-cortes del conjunto difuso A_i, en el cuál por serlo se cumple la propiedad del anidamiento, propiedad *ii*) de la Proposición 1.5.6. En efecto si $\alpha < \beta \Rightarrow (A_i)_\beta \subseteq (A_i)_\alpha$

$$G^{\cup}(\beta) = (A_1)_\beta \cup \cdots \cup (A_n)_\beta \subseteq (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha = G^{\cup}(\alpha).$$

ii) Se probará $G^{\cap}(\alpha) = (A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha$, de nuevo por doble inclusión.
$\boxed{\subseteq}$ Sea $x \in G^{\cap}(\alpha) \Rightarrow x = g_i(\alpha)$ con g_i elemento gradual de G_i para todo $i = 1, ..., n$. Como $g_i \in G_i \Rightarrow g_i(\alpha) \in \xi_{G_i}(\alpha) = (A_i)_\alpha$ $\forall \alpha \in I$ para todo $i = 1, ..., n$. Así que, $x \in (A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha$.
$\boxed{\supseteq}$ Dado $\alpha \in I$ fijo pero arbitrario y cualquier $x \in (A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha$. Se tiene que $x \in (A_i)_\alpha$ $\forall i = 1, ..., n$. Se define $g_x : I \longrightarrow X$ dada como sigue

$$g_x(\beta) = \begin{cases} x & si \quad \beta = \alpha \\ y & si \quad \beta \neq \alpha \quad \text{para algún } y \in (A_1)_\beta \cap \cdots (A_n)_\beta. \end{cases}$$

Se sabe que $\exists$ y ya que $(A_1)_\beta \cap \cdots (A_n)_\beta \neq \emptyset$, por tanto g_x está bien definida $\forall \beta \in I$.
g_x es un elemento gradual de G_i $\forall i = 1, ..., n$.
En efecto, $g_x(\beta) \in \bigcap_{i=1}^{n} \xi_{G_i}(\beta)$ $\forall \beta \in I$.

- Si $\beta \neq \alpha \Rightarrow g_x(\beta) = y \in (A_1)_\beta \cap \cdots \cap (A_n)_\beta = \xi_{G_1}(\beta) \cap \cdots \cap \xi_{G_n}(\beta)$ por definición de g_x.
- Si $\beta = \alpha \Rightarrow g_x(\beta) = x \in (A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha = \xi_{G_1}(\alpha) \cap \cdots \cap \xi_{G_n}(\alpha)$ por hipótesis.

Lo cual implica que $x = g(\alpha) \in G^{\cap}(\alpha) \Rightarrow (A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha \subseteq G^{\cap}(\alpha)$ $\forall \alpha \in I$. De nuevo la última parte es trivial por la misma razón. Pero ahora

$$G^{\cap}(\beta) = (A_1)_\beta \cap \cdots \cap (A_n)_\beta \subseteq (A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha = G^{\cap}(\alpha).$$

□

3.1.3. α-cortes de la unión e intersección

El objetivo de esta sección es poder conocer cómo son los conjuntos de α-cortes de la unión e intersección de conjuntos difusos que se acaban de definir. Para ello antes se recordará el siguiente resultado.
Sea X un conjunto universo y $A \in FS(X)$ con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow I$ y con intervalo rango I_A.

Sea $\alpha \in I_A, \alpha > 0$ y una sucesión creciente $\{\alpha_m\}_{m\geq 1}$ tal que $\{\alpha_m\} \longrightarrow \alpha$. Entonces por la propiedad de la continuidad superior para conjuntos difusos, apartado *iii*) de la Proposición 1.5.6 se tiene que

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_{\alpha_m} = A_\alpha \tag{3.3}$$

Definición 3.1.5. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}$ y $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in D$. Se dirá que f es* ***semicontinua superiormente*** *en x_0 si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que*

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon \ \ \forall x \in B(x_0, \delta) \cap D,$$

donde $B(x_0, \delta) = \{x \in D \ : \ ||x - x_0|| < \delta\}$.

También se enunciarán dos resultados de los que se puede consultar su demostración en [11].

Teorema 3.1.6. *Sea D un compacto de $\mathbb{R}$ y $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Entonces f alcanza el máximo absoluto en D, es decir, $\exists\ x_0 \in D$ tal que $f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in D$.*

Sea D un compacto en $\mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, se define el conjunto

$$U_a(f) = \{x \in D \ : \ f(x) \geq a\}.$$

Teorema 3.1.7. *Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es semicontinua superiormente sí, y solo si, $U_a(f)$ es cerrado en D para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Teorema 3.1.8. *Sean $A_1, ..., A_n \in FS(X)$, con X un conjunto universo, tales que todos los intervalos rango coinciden, es decir, $I_i = I\ \forall i = 1, ..., n$ y tales que $(A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha \neq \emptyset\ \forall \alpha \in I$ y que $\exists \max I$. Entonces el α-corte de $A^\cap = A_1 \cap \cdots \cap A_n$ viene dado por*

$$A^\cap_\alpha = (A_1 \cap \cdots \cap A_n)_\alpha = \{x \in X \ : \ \mu_{A^\cap}(x) \geq \alpha\} = G^\cap(\alpha) = (A_1)_\alpha \cap \cdots (A_n)_\alpha,$$

para todo $\alpha \in I$ con $\alpha > 0$, y

$$A^\cap_{o^+} = (A_1 \cap \cdots \cap A_n)_{0^+} = \bigcup_{\{\alpha \in I : \alpha > 0\}} (A_1 \cap \cdots \cap A_n)_\alpha = \bigcup_{\{\alpha \in I : \alpha > 0\}} G^\cap(\alpha) =$$

$$\bigcup_{\{\alpha \in I : \alpha > 0\}} ((A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha).$$

Demostración:
Dado cualquier $\alpha \in I, \alpha > 0$, se toma una sucesión creciente $\{\alpha_m\}_{m\geq 1}$, en I tal que $\alpha_m > 0\ \forall m$ y $\{\alpha_m\} \to \alpha$, y usando la propiedad 3.3 se tiene

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} ((A_1)_{\alpha_m} \cap \cdots \cap (A_n)_{\alpha_m}) = (\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_1)_{\alpha_m}) \cap \cdots (\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_n)_{\alpha_m}) = (A_1)_\alpha \cap \cdots \cap (A_n)_\alpha$$

Entonces se deduce por apartado $ii)$ de la Proposición 3.1.4 que
$\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} G^{\cap}(\alpha_m) = G^{\cap}(\alpha)$.
Dado $x \in X$ fijo pero arbitrario, se define el conjunto

$$F_p = \{\alpha \in I : \eta_x(\alpha) = \alpha \cdot \chi_{G^{\cap}(\alpha)}(x) \geq p\}.$$

Como $I_i = I$ $\forall i = 1, ..., n$, entonces $I_{A^{\cap}} = I$ es un intervalo, del que existe el máximo por hipótesis, entonces $I = [0, \alpha^*]$ para algún $\alpha^* \in (0, 1]$, es decir, el intervalo rango de $A^{\cap}$ es un intervalo cerrado.
Por construcción, $p \in [0, \alpha^*]$. Veamos que el conjunto F_p es cerrado para cada $p \in [0, \alpha^*]$.
Se distinguen dos casos:

1. Dado $p \in I$, con $p > 0$, para cada $\alpha \in Cl(F_p)$ $\exists \{\alpha_m\}_{m \geq 1}$ en F_p tal que $\{\alpha_m\} \to \alpha$ en $Cl(F_p)$. Por lo tanto, se tiene que $\alpha_m \in I$ con $\alpha \geq 0$ y $x \in G^{\cap}(\alpha_m)$ $\forall m$, lo cual también implica que $\alpha > 0$, porque
   $\alpha = \lim\limits_{m \to \infty} \alpha_m \geq p > 0$.
   De manera que $\exists$ una subsucesión $\{\alpha_{m_k}\}_{k \geq 1} \subseteq \{\alpha_m\}_{m \geq 1}$ tal que $\{\alpha_{m_k}\} \nearrow \alpha$ ó $\{\alpha_{m_k}\} \searrow \alpha$ cuando $k \to \infty$.

   - Si $\{\alpha_{m_k}\} \searrow \alpha \Rightarrow \alpha_{m_k} \geq \alpha$ $\forall k$. Lo que implica que $x \in G^{\cap}(\alpha_{m_k}) \subseteq G^{\cap}(\alpha)$ porque $G^{\cap}$ es anidado como se vio en la Proposición 3.1.4.
   - Si $\{\alpha_{m_k}\} \nearrow \alpha$. Se tiene que $\alpha_{m_k} \in F_p$ para cada k porque $\alpha \in Cl(F_p)$. Además $F_p \subseteq I$, es decir, $Cl(F_p) \subseteq Cl(I) = I = [0, \alpha^*] \Rightarrow \alpha \in I$. Como $x \in G^{\cap}(\alpha_m)$ para todo k, entonces, por la propiedad de la continuidad superior 3.3 $x \in G^{\cap}(\alpha)$.
     En cualquier caso se tiene $x \in G^{\cap}(\alpha)$, lo cual implica que $\alpha \cdot \chi_{G^{\cap}(\alpha)}(x) \geq p$, es decir, $\alpha \in F_p$. Así que acaba de probarse la inclusión $Cl(F_p) \subseteq F_p$.
     La inclusión $F_p \subseteq Cl(F_p)$ es trivial.
     $\Rightarrow F_p$ es cerrado para todo $p \in I, p > 0$.

2. Si $p = 0 \Rightarrow F_p = I = [0, \alpha^*]$ también es un conjunto cerrado.

Por tanto F_p es cerrado en I para todo $p \in [0, \alpha^*]$, esto implica que la función $\eta_x(\alpha)$ es semicontinua superiormente por el Teorema 3.1.7 .

Como $A^{\cap}_{\alpha} \neq \emptyset$ $\forall \alpha \in I$ por el Lema 3.0.1, se toma $x \in A^{\cap}_{\alpha}$. Dado $0 < \alpha \in I$ fijo pero arbitrario, entonces $\exists$ $\beta_0 \in I, \beta_0 \geq \alpha$ tal que $x \in G^{\cap}(\beta_0)$.
En caso contrario $x \notin G^{\cap}(\beta)$ $\forall \beta \in I$ con $\alpha \leq \beta$. Entonces

$$\beta \cdot \chi_{G^{\cap}(\beta)}(x) = \beta \cdot 0 = 0 < \alpha \;\; \forall \beta \in I \text{ con } \alpha \leq \beta. \tag{3.4}$$

Como $\eta_x(\beta) = \beta \cdot \chi_{G^\cap(\beta)}(x)$ es semicontinua superiormente, en el compacto $I = [0, \alpha^*]$ alcanza el máximo por el Teorema 3.1.6, es decir,

$$\mu_{A^\cap}(x) = \sup_{\beta \in I} \eta_x(\beta) = \sup_{\beta \in I} \beta \cdot \chi_{G^\cap(\beta)}(x) = \max_{\beta \in I} \beta \cdot \chi_{G^\cap(\beta)}(x) = \beta^* \cdot \chi_{G^\cap(\beta^*)}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 3.4}}{<} \alpha$$

para algún $\beta^* \in I$, lo que contradice el hecho de que $x \in (A^\cap)_\alpha$.
De manera que $\exists\ \beta_0 \in I, \beta_0 \geq \alpha$ tal que $x \in G^\cap(\beta_0) \subseteq G^\cap(\alpha) \Rightarrow (A^\cap)_\alpha \subseteq G^\cap(\alpha)$, por el apartado *ii*) de la Proposición 3.1.4.
La otra inclusión se da trivialmente,

$$G^\cap(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ \sup_{\beta \in I} \beta \cdot \chi_{G^\cap(\beta)}(x) \geq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}\ :\ \mu_{A^\cap}(x) \geq \alpha\} = (A^\cap)_\alpha.$$

Así queda demostrado lo que queríamos. □

Ejemplo 3.1.9. Tomando los conjuntos difusos del Ejemplo 3.1.5 se puede calcular $(A_1 \cap A_2)_\alpha$ aplicando el teorema anterior ya que $I_1 = I_2 = [0,1] \Rightarrow \exists \max I = 1$ y $(A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha \neq \emptyset\ \forall \alpha \in [0,1]$.
En efecto,

$$(A_1 \cap A_2)_\alpha = G^\cap(\alpha) = (A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha = [1+\alpha, 4-\alpha] \cap [2+\alpha, 5-\alpha] = [2+\alpha, 4-\alpha].$$

Se verá ahora como son los $\alpha-$cortes de la unión de conjuntos difusos.

Teorema 3.1.10. *Sean X un conjunto universo y $A_1, ..., A_n \in FS(X)$ con funciones de pertenencia $\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}$ respectivamente, tales que $I_i = I$ para cada $i = 1, ..., n$ y tal que $\exists \max I$. Si es satisfecha alguna de las tres condiciones siguientes:*

i) Para cualquier $x \in X$ fijo pero arbitrario, a función $\eta_x(\alpha) = \alpha \cdot \chi_{G^\cup(\alpha)}(x)$ es semicontinua superiormente en I.

ii) Dado cualquier $\alpha \in I, \alpha > 0$ tal que cualquier sucesión creciente y convergente $\{\alpha_m\}_{m \geq 1}$ en I, $\alpha_m > 0$ verifica $\{\alpha_m\} \to \alpha$, la siguiente inclusión es satisfecha

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}((A_1)_{\alpha_m} \cup \cdots \cup (A_n)_{\alpha_m}) \subseteq (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha$$

iii) Dada una sucesión convergente y creciente $\{\alpha_m\}_{m \geq 1}$ en I, $\alpha_m > 0\ \forall m$, la siguiente inclusión es satisfecha

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}((A_1)_{\alpha_m} \cup \cdots \cup (A_n)_{\alpha_m}) \subseteq (\bigcap_{m=1}^{\infty}(A_1)_{\alpha_m}) \cup \cdots \cup (\bigcap_{m=1}^{\infty}(A_n)_{\alpha_m})$$

Entonces el α-corte de $A^{\cup} = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ está dado por

$$(A^{\cup})_\alpha = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)_\alpha = \{x \in X \ : \ \mu_{A^{\cup}}(x \geq \alpha)\} = G^{\cup}(\alpha) = (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha$$

para todo $\alpha \in I, \alpha > 0$, y

$$(A^{\cup})_{0^+} = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)_{0^+} = \bigcup_{\{\alpha \in I : \alpha > 0\}} (A_1 \cup \cdots \cup A_n)_\alpha = \bigcup_{\{\alpha \in I : \alpha > 0\}} G^{\cup}(\alpha) =$$

$$\bigcup_{\{\alpha \in I : \alpha > 0\}} (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha$$

Demostración:
Se distinguirán tres casos:

- Supóngase que se da i). Como $(A^{\cup})_\alpha \neq \emptyset \ \forall \alpha \in I$ por el Lema 3.0.1, entonces se puede probar exactamente igual que el teorema anterior, considerando como función semicontinua superiormente $\eta_x(\alpha) = \alpha \cdot \chi_{G^{\cup}(\alpha)}(x)$.

- Supóngase ahora que se cumple ii).
  Se tiene que $\bigcap_{i=1}^{\infty}((A_1)_{\alpha_m} \cup \cdots \cup (A_n)_{\alpha_m}) \subseteq (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha \Rightarrow$ $\bigcap_{m=1}^{\infty} G^{\cup}(\alpha_m) \subseteq G^{\cup}(\alpha)$ por el apartado ii) de la Proposición 3.1.4. En la demostración del teorema anterior se obtiene el mismo resultado si en vez de tener la igualdad $\bigcap_{m=1}^{\infty} G^{\cup}(\alpha_m) = G^{\cup}(\alpha)$ tenemos la inclusión descrita. Por tanto el mismo argumento de este es válido para demostrar que la función $\eta_x(\alpha) = \alpha \cdot \chi_{G^{\cup}(\alpha)}(x)$ es semicontinua superiormente. Estamos de nuevo en el caso i) que ya ha quedado demostrado.

- Supóngase por último que se satisface iii). De la propiedad de la continuidad superior para conjuntos difusos de la Proposición 1.5.6 se tiene que

  $$\bigcap_{m=1}^{\infty} (A_i)_{\alpha_m} = (A_i)_\alpha \qquad \forall i = 1, ..., n$$

  Por tanto, se obtiene

  $$\bigcap_{i=1}^{\infty}((A_1)_{\alpha_m} \cup \cdots \cup (A_n)_{\alpha_m}) \subseteq (\bigcap_{m=1}^{\infty}(A_1)_{\alpha_m}) \cup \cdots \cup (\bigcap_{m=1}^{\infty}(A_n)_{\alpha_m}) \subseteq (A_1)_\alpha \cup \cdots \cup (A_n)_\alpha$$

  En consecuencia, se satisface ii) y basta reducirse al caso anterior.

$\square$

Ejemplo 3.1.11. Tómese los conjuntos difusos del Ejemplo 3.1.3. Aplicándole el teorema anterior se obtendrá el α-corte del conjunto difuso $A_1 \sqcup A_2$.
Se tiene que el segundo item del teorema es satisfecho.
En efecto, tómese cualquier sucesión $\{\alpha_m\} \nearrow \alpha$ en $I = [0, 1]$.
Se tiene que $(A_1)_{\alpha_m} = [1 + \alpha_m, 4 - \alpha_m]$ y $(A_2)_{\alpha_m} = [2 + \alpha_m, 5 - \alpha_m]$
Obsérvese que se cumple la inclusión

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}([1 + \alpha_m, 4 - \alpha_m] \cup [2 + \alpha_m, 5 - \alpha_m]) \subseteq [1 + \alpha, 4 - \alpha] \cup [2 + \alpha, 5 - \alpha]$$

Esta inclusión es satisfecha si y solo si

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}[1 + \alpha_m, 5 - \alpha_m] \subseteq [1 + \alpha, 5 - \alpha] \Leftrightarrow$$

Dado $x \in I$

$$1 + \alpha_m \leq x \leq 5 - \alpha_m \; \forall m \geq 1$$

Haciendo $m \to \infty \Rightarrow 1 + \alpha \leq x \leq 5 - \alpha$, lo cual prueba dicha inclusión.
En estas condiciones se puede aplicar el teorema anterior, del que se obtiene,

$$(A_1 \cup A_2)_\alpha = G^{\cup}(\alpha) = (A_1)_\alpha \cup (A_2)_\alpha = [1 + \alpha, 5 - \alpha].$$

3.2. Asociatividad de la unión e intersección difusas

El objetivo es probar si es posible que dado un conjunto universo X y $A, B, C \in FS(X)$, se pueda escribir

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

Para ello son necesarios algunos resultados.

Proposición 3.2.1. *Sean X un conjunto universo y $A, B, C \in FS(X)$, con funciones de pertenencia $\mu_A, \mu_B, \mu_C : X \longrightarrow [0, 1]$ respectivamente, con intervalos rangos $I_A = I_B = I_C = I$ tales que $\exists \max I$. Si se cumple alguna de las condiciones siguientes:*

i) Para cada $x \in X$ fijo pero arbitrario, se tiene que $\eta_x^1(\alpha) = \alpha \cdot \chi_{A_\alpha \cup B_\alpha}(x)$ y $\eta_x^2(\alpha) = \alpha \cdot \chi_{B_\alpha \cup C_\alpha}(x)$ son semicontinuas superiormente en I.

ii) Dado cualquier $\alpha \in I, \alpha > 0$ y cualquier sucesión creciente y convergente $\{\alpha_m\}_{m\geq 1}$ en I con $\alpha_m > 0$ $\forall m$ tal que $\{\alpha_m\} \nearrow \alpha$ las siguientes inclusiones son satisfechas

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}(A_{\alpha_m} \cup B_{\alpha_m}) \subseteq A_\alpha \cup B_\alpha \text{ y } \bigcap_{m=1}^{\infty}(B_{\alpha_m} \cup C_{\alpha_m}) \subseteq B_\alpha \cup C_\alpha$$

iii) Dada culaquier sucesión creciente $\{\alpha_m\}_{m\geq 1}$ en I con $\alpha_m > 0$ $\forall m$, las siguientes inclusiones son satisfechas:

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}(A_{\alpha_m} \cup B_{\alpha_m}) \subseteq (\bigcap_{m=1}^{\infty}(A_{\alpha_m}) \cup (\bigcap_{m=1}^{\infty}(B_{\alpha_m}))$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}(B_{\alpha_m} \cup C_{\alpha_m}) \subseteq (\bigcap_{m=1}^{\infty}(B_{\alpha_m}) \cup (\bigcap_{m=1}^{\infty}(C_{\alpha_m}))$$

Entonces se tiene que

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C.$$

Demostración:
Sea $D_1 = A \cup B$ y $D_2 = B \cup C$. Considérese la función η_x^1 y usando el Teorema 3.1.10,

$$(D_1)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha \ \forall \alpha \in I, \alpha > 0 \tag{3.5}$$

De la misma forma considerando η_x^2 se tiene que

$$(D_2)_\alpha = B_\alpha \cup C_\alpha \ \forall \alpha \in I, \alpha > 0. \tag{3.6}$$

Sea $E_1 = D_1 \cup C$ y $E_2 = A \cup D_2$. Entonces las funciones de pertenencia E_1 y E_2 vienen dadas por

$$\mu_{E_1}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 3.1 \\ i)\text{ Proposición } 3.1.4}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha \cdot \chi_{(D_1)_\alpha \cup C_\alpha}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 3.5}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha \cdot \chi_{(A_\alpha \cup B_\alpha)\cup C_\alpha}(x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{asociatividad} \\ \text{cjts. nítidos}}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha \cup B_\alpha \cup C_\alpha}(x)$$

$$\mu_{E_2}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 3.1 \\ i)\text{ Proposición } 3.1.4}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha \cdot \chi_{A\cup(D_2)_\alpha}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 3.6}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha \cup (B_\alpha \cup C_\alpha)}(x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{asociatividad} \\ \text{cjts. nítidos}}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha \cup B_\alpha \cup C_\alpha}(x)$$

Sea $E = A \cup B \cup C$ se sabe que la función de pertenencia de la unión de conjuntos difusos viene dada por 3.1 y por el apartado $i)$ de la Proposición 3.1.4 se tiene que la función de pertenencia del conjunto difuso E viene dada por

$$\mu_E(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{A_\alpha \cup B_\alpha \cup C_\alpha}(x).$$

Por tanto, se tiene que por el Teorema 1.5.8, equivalencia entre conjuntos difusos y funciones de pertenencia, que $E_1 = E_2 = E$, es decir, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$ como se quería demostrar.

□

Ejemplo 3.2.2. Considérense los conjuntos difusos A_1, A_2 del Ejemplo 3.1.3 y además el conjunto difuso $A_3 \in FS(\mathbb{R})$ con función de pertenencia $\mu_{A_3} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$.

$$\mu_{A_3}(x) = \begin{cases} x-3 & si \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 1 & si \quad 4 < x < 5 \\ 6-x & si \quad 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De nuevo $\exists \max(R\mu_{A_3}) = 1 \Rightarrow I_C = [0,1] = I$.
Se calcula $\phi(A_3) = G_3 = (A_3)_\alpha$ como sigue.

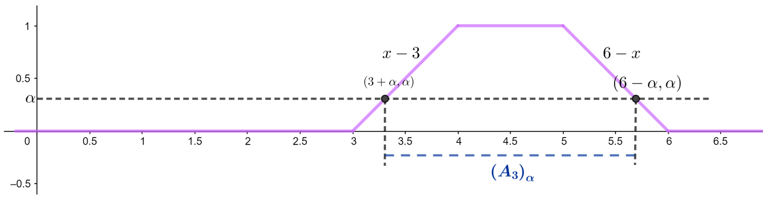


Figura 3.3: $(A_3)_\alpha = [3+\alpha, 6-\alpha]$, α-corte del conjunto difuso A_3.

En este caso se tiene que se cumple el item $ii)$ de la proposición anterior.
En efecto, dado cualquier $\alpha \in [0,1], \alpha > 0$ y cualquier sucesión creciente y convergente $\{\alpha_m\}_{m \geq 1}$ en $[0,1]$ con $\alpha_m > 0 \ \forall m$ tal que $\{\alpha_m\} \nearrow \alpha$, se tiene

$$\bigcap_{m=1} ((A_1)_{\alpha_m} \cup (A_2)_{\alpha_m}) \subseteq (A_1)_\alpha \cup (A_2)_\alpha \Leftrightarrow$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} ([1+\alpha_m, 4-\alpha_m] \cup [2+\alpha_m, 5-\alpha_m]) \subseteq [1+\alpha, 4-\alpha] \cup [2+\alpha, 5-\alpha] \Leftrightarrow$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} [1+\alpha_m, 5-\alpha_m] \subseteq [1+\alpha, 5-\alpha]$$

En efecto dado $x \in \{\alpha_m\}$ tal que $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty}[1+\alpha_m, 5-\alpha_m]$ $\forall m \geq 1 \Rightarrow$
$1+\alpha_m \leq x \leq 5-\alpha_m$ $\forall m \geq 1$. Haciendo $m \to \infty$, $1+\alpha \leq x \leq 5-\alpha \Rightarrow$
$x \in [1+\alpha, 5-\alpha]$.
De igual modo,

$$\bigcap_{m=1}((A_2)_{\alpha_m} \cup (A_3)_{\alpha_m}) \subseteq (A_2)_\alpha \cup (A_3)_\alpha \Leftrightarrow$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}([2+\alpha_m, 5-\alpha_m] \cup [3+\alpha_m, 6-\alpha_m]) \subseteq [2+\alpha, 5-\alpha] \cup [3+\alpha, 6-\alpha] \Leftrightarrow$$

$$\bigcap_{m=1}^{\infty}[2+\alpha_m, 6-\alpha_m] \subseteq [2+\alpha, 6-\alpha]$$

En efecto dado $y \in \{\alpha_m\}$ tal que $y \in \bigcap_{m=1}^{\infty}[2+\alpha_m, 6-\alpha_m]$ $\forall m \geq 1 \Rightarrow$
$2+\alpha_m \leq y \leq 6-\alpha_m$ $\forall m \geq 1$. Haciendo $m \to \infty$, $2+\alpha \leq y \leq 6-\alpha \Rightarrow$
$y \in [2+\alpha, 6-\alpha]$.
Por tanto por la proposición anterior se tiene que la unión es asociativa, es decir, $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, conjunto difuso con función de pertenencia $\mu_{A_1 \cup A_2 \cup A_3} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\mu_{A_1 \cup A_2 \cup A_3}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)_\alpha}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{[1+\alpha, 6-\alpha]}(x)$$

Se ha aplicado el Teorema 3.1.10, por el cuál

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3)_\alpha = (A_1)_\alpha \cup (A_2)_\alpha \cup (A_3)_\alpha.$$

Proposición 3.2.3. *Sean X un conjunto universo y $A, B, C \in FS(X)$, con funciones de pertenencia $\mu_A, \mu_B, \mu_C : X \longrightarrow [0,1]$ respectivamente, con intervalos rango $I_A = I_B = I_C = I$ tales que $\exists \max I$. Si $A_\alpha \cap B_\alpha \cap C_\alpha \neq \emptyset$, entonces*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

Demostración:
Sea $F_1 = A \cap B$ y $F_2 = B \cap C$. Como $A_\alpha \cap B_\alpha \cap C_\alpha \neq \emptyset$ se obtiene por el Teorema 3.1.8 que

$$(F_1)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha \ \forall \alpha \in I, \ \alpha > 0. \tag{3.7}$$

$$(F_2)_\alpha = B_\alpha \cap C_\alpha \ \forall \alpha \in I, \ \alpha > 0. \tag{3.8}$$

Sea $H_1 = F_1 \cap C$ y $H_2 = A \cap F_2$. Entonces las funciones de pertenencia de H_1 y H_2 vienen dadas por

$$\mu_{H_1}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 3.2 \\ ii)\text{ Proposición } 3.1.4}}{=} \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{(F_1)_\alpha \cap C_\alpha}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ 3.7}}{=} \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{(A_\alpha \cap B_\alpha) \cap C_\alpha}(x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{asociatividad}\\ \text{cjts. nítidos}}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha\cdot\chi_{A_\alpha\cap B_\alpha\cap C_\alpha}(x)$$

$$\mu_{H_2}(x) \underset{\substack{\uparrow\\ 3.2\\ ii)\text{ Proposición } 3.1.4}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha\cdot\chi_{A\cap(F_2)_\alpha}(x) \underset{\substack{\uparrow\\ 3.8}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha\cdot\chi_{A_\alpha\cap(B_\alpha\cap C_\alpha)}(x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{asociatividad}\\ \text{cjts. nítidos}}}{=} \sup_{\alpha\in I} \alpha\cdot\chi_{A_\alpha\cap B_\alpha\cap C_\alpha}(x)$$

Sea $F = A\cap B\cap C$, por la ecuación 3.2 y el apartado $ii)$ de la Proposición 3.1.4, se tiene que la función de pertenencia de E, $\mu_E\colon X \longrightarrow I$ viene dada como sigue

$$\mu_E(x) = \sup_{\alpha\in I} \alpha\cdot\chi_{A_\alpha\cap B_\alpha\cap C_\alpha}(x).$$

Por el Teorema 1.5.8 se tiene que $E_1 = E_2 = E$, es decir, $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C$, como se quería demostrar. $\square$

Ejemplo 3.2.4. Considérense los conjuntos difusos del Ejemplo 3.1.3 y el conjunto difuso $B \in FS(\mathbb{R})$ dado por $\mu_B\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ dado por

$$\mu_B(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad 1\le x\le 2\\ 1 & si \quad 2<x<4\\ 5-x & si \quad 4\le x\le 5\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

En este caso se tiene que los intervalos rango de los tres conjuntos difusos coinciden, $I_{A_1} = I_{A_2} = I_B = [0,1]$ y los α-cortes de los conjuntos difusos A_1, A_2, B son respectivamente,

$(A_1)_\alpha = [1+\alpha, 4-\alpha]$, $(A_2)_\alpha = [2+\alpha, 5-\alpha]$ y $B_\alpha = (A_1)_\alpha \cup (A_2)_\alpha = [1+\alpha, 5-\alpha]$

Claramente $(A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$ ya que por ejemplo
$2+\alpha \in (A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha \cap B_\alpha\ \forall\alpha \in [0,1]$.
De manera que se puede aplicar la proposición anterior, de la que se obtiene

$$(A_1\cap A_2)\cap B = A_1\cap(A_2\cap B) = A_1\cap A_2\cap B.$$

Por tanto, $A_1\cap A_2\cap B$ es un conjunto difuso cuya función de pertenencia viene dada por $\mu_{A_1\cap A_2\cap B}\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$,

$$\mu_{A_1\cap A_2\cap B}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\cdot\chi_{(A_1\cap A_2\cap B)_\alpha}(x) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\cdot\chi_{[2+\alpha,4-\alpha]}(x)$$

Se ha aplicado el Teorema 3.1.10, por el cuál

$$(A_1\cap A_2\cap B)_\alpha = (A_1)_\alpha\cap(A_2)_\alpha\cap B_\alpha.$$

Observación 3.2.5. *Las proposiciones anteriores se pueden extender por inducción considerando conjuntos difusos $A_1, ..., A_n$ en un conjunto universo X.*

Ejemplo 3.2.6. Considérese X un conjunto universo y $A_i \in FS(X)$ $i = 1, ...9$. Sea $A = ((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5)) \cap (A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9)$. Se asume que los intervalos rango son iguales, es decir, $I_i = I$ $\forall I = 1, ..., 9$. El objetivo será hallar la función de pertenencia del conjunto difuso A.
Sean $B_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3,\ B_2 = A_4 \cap A_5,\ B_3 = A_6 \cup A_7 \cup A_8 \cup A_9$ *y* $B_4 = B_1 \cup B_2$. Se desarrolla cada operación por partes como sigue.

- Para B_1 aplicando 3.2 y el apartado $ii)$ de la Proposición 3.1.4 se tiene que su función de pertenencia es
$$\mu_{B_1} \colon X \longrightarrow I,\ \mu_{B_1}(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{(A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha \cap (A_3)_\alpha}(x).$$
Y suponiendo que se satisface $(A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha \cap (A_3)_\alpha \neq \emptyset$ por el Teorema 3.1.8 se tiene
$$(B_1)_\alpha = (A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha \cap (A_3)_\alpha\ \forall \alpha \in I,\ \alpha > 0.$$
- Para B_2 usando de nuevo 3.2 y el apartado $ii)$ de la Proposición 3.1.4 se tiene que su función de pertenencia es
$$\mu_{B_2} \colon X \longrightarrow I,\ \mu_{B_2}(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{(A_4)_\alpha \cap (A_5)_\alpha}(x).$$
Y suponiendo que se satisface $(A_4)_\alpha \cap (A_5)_\alpha \neq \emptyset$ por el Teorema 3.1.8 se tiene
$$(B_2)_\alpha = (A_4)_\alpha \cap (A_5)_\alpha\ \forall \alpha \in I,\ \alpha > 0.$$
- Para B_3 aplicando 3.1 y el apartado $i)$ de la Proposición 3.1.4 se tiene que la función de pertenencia de B_3 viene dada por
$$\mu_{B_3} \colon X \longrightarrow I,\ \mu_{B_3}(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{(A_6)_\alpha \cup (A_7)_\alpha \cup (A_8)_\alpha \cup (A_9)_\alpha}(x).$$
Y suponiendo que se da alguna de las condiciones del Teorema 3.1.10 se tiene que
$$(B_3)_\alpha = (A_6)_\alpha \cup (A_7)_\alpha \cup (A_8)_\alpha \cup (A_9)_\alpha\ \forall \alpha \in I,\ \alpha > 0.$$
- Para B_4 de nuevo aplicaremos 3.1 y el apartado $i)$ de la Proposición 3.1.4 se tiene que la función de pertenencia de B_4 viene dada por
$$\mu_{B_4} \colon X \longrightarrow I,\ \mu_{B_4}(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{(B_1)_\alpha \cup (B_2)_\alpha}(x).$$
Y suponiendo que se da alguna de las condiciones del Teorema 3.1.10 se tiene que
$$(B_4)_\alpha = (B_1)_\alpha \cup (B_2)_\alpha\ \forall \alpha \in I,\ \alpha > 0.$$

- Finalmente, usando 3.2 y el apartado *ii*) de la Proposición 3.1.4 se obtiene la función de pertenencia de $B_4 \cap B_5 = A$,

$$\mu_A \colon X \longrightarrow I,\ \mu_A(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{(B_4)_\alpha \cap (B_5)_\alpha}(x).$$

De nuevo suponiendo que se da la condición $B_4 \cap B_5 \neq \emptyset$, por el Teorema 3.1.8 se tiene que

$$A_\alpha = (B_4)_\alpha \cap (B_5)_\alpha \ \forall \alpha \in I,\ \alpha > 0.$$

Si llamamos $E_\alpha = ((A_1)_\alpha \cap (A_2)_\alpha \cap (A_3)_\alpha) \cup ((A_4)_\alpha \cap (A_5)_\alpha) \cap ((A_6)_\alpha \cup (A_7)_\alpha \cup (A_8)_\alpha \cup (A_9)_\alpha)$, entonces la función de pertenencia de A viene dada por $\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in I} \alpha \cdot \chi_{E_\alpha}(x)$.
Si se considerara el conjunto $\tilde{A} = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5) \cap (A_6 \cup A_7 \cup A_8) \cup A_9$, entonces $A \neq \tilde{A}$, excepto si las condiciones de la Proposición 3.2.3 similares son satisfechas, en cuyo caso $A = \tilde{A}$.

3.3. Negación difusa

Se procederá como en el caso de la unión e intersección determinando el conjunto de α-cortes de la negación difusa que será el conjunto gradual inducido por la negación del conjunto difuso.
Sea $A \in FS(X)$ con X un conjunto universo, con función de pertenencia $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ e I_A su intervalo rango. La función de pertenencia del conjunto difuso $N(A)$, conjunto de negación de A, es $\mu_{N(A)} : X \longrightarrow [0,1],\ \mu_{N(A)}(x) = 1 - \mu_A(x)$.
Entonces, $N(A)_\alpha = \{x \in X \ : \ \mu_{N(A)}(x) \geq \alpha\} = \{x \in X \ : \ 1 - \mu_A(x) \geq \alpha\} = \{x \in X \ : \ \mu_A(x) \leq 1 - \alpha\} = X \setminus \{x \in X \ : \ \mu_A(x) > 1 - \alpha\} = X \setminus A_{(1-\alpha)^+} = [A_{(1-\alpha)^+}]^C$.

Ejemplo 3.3.1. El conjunto complementario del α-corte de un conjunto difuso $A \in FS(X)$ es distinto del α-corte de la negación de A, es decir,

$$(A_\alpha)^C \neq N(A)_\alpha.$$

Sea $A \in FS(\mathbb{R})$ con función de pertenencia $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -1 \\ \frac{x+1}{2} & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Se tiene

$$A_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad \alpha = 0 \\ [2\alpha - 1, +\infty) & si \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$N(A)$ es el conjunto difuso dado por la función de pertenencia $\mu_{N(A)} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$\mu_{N(A)}(x) = 1 - \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \leq -1 \\ \frac{1-x}{2} & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Se tiene

$$N(A)_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad \alpha = 0 \\ (-\infty, 1 - 2\alpha] & si \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Es claro que

$$(A_\alpha)^C = \begin{cases} \emptyset & si \quad \alpha = 0 \\ (-\infty, 2\alpha - 1) & si \quad \alpha > 0 \end{cases} \neq N(A)_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad \alpha = 0 \\ (-\infty, 1 - 2\alpha] & si \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Tomando, por ejemplo, $\alpha = 0.3$

$$(A_{0.3})^C = ([-0.4, +\infty))^C = (-\infty, -0.4) \neq (-\infty, -0.4] = N(A)_{0.3}.$$

Considérese la familia $\{g \ : \ g(\alpha) \in [A_{(1-\alpha)^+}]^C \ \forall \alpha \in I_A\}$.
Esta familia induce el conjunto gradual G^C dado por $G^C : I_A \longrightarrow \mathcal{P}(X)$

$$G^C(\alpha) = \{g(\alpha) \ : \ g \in G^C\} = \{g(\alpha) \ : \ g(\alpha) \in [A_{(1-\alpha)^+}]^C \ \forall \alpha \in I_A\},$$

donde g es el elemento gradual del conjunto gradual $\phi(N(A)) = G^C$.
Este conjunto gradual a su vez determina el conjunto difuso $\varphi(G^C) = A^C$, cuya función de pertenencia viene dada por

$$\mu_{A^C} : X \longrightarrow [0,1], \ \mu_{A^C}(x) = \sup_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{G^C(\alpha)}(x). \tag{3.9}$$

A continuación se ofrece la reproducción de un resultado y su demostración que aparece en el artículo [18]. Posteriormente se mosterará un ejemplo que prueba que dicho resultado es falso.

Teorema 3.3.2. *Sea $A \in FS(X)$, con X un conjunto universo. Entonces el conjunto gradual G^C inducido por la familia $\{g \ : \ g(\alpha) \in [A_{(1-\alpha)^+}]^C \ \forall \alpha \in I_A\}$ satisface*

$$G^C(\alpha) = [A_{(1-\alpha)^+}] = N(A)_\alpha \ \forall \alpha \in I_A.$$

Además se tiene que $N(A) = A^C$.

Demostración:
Lo probaremos por doble inclusión.
$\boxed{\subseteq}$ Es clara por la definición de $G^C(\alpha)$.
$\boxed{\supseteq}$ Sea $\alpha \in I_A$ fijo pero arbitrario y cualquier $x \in [A_{(1-\alpha)^+}]^C$, se define el selector $g_x : I_A \longrightarrow X$

$$g_x(\beta) = \begin{cases} x & si \quad \alpha = \beta \\ y & si \quad \alpha \neq \beta \text{ para algún } y \in [A_{(1-\alpha)^+}]^C. \end{cases}$$

Es claro que $g_x(\alpha) = x \in G^C(\alpha)$.
Por otro lado si $\beta \neq \alpha \Rightarrow g_x(\beta) = y \in [A_{(1-\alpha)^+}] = G^C(\alpha)$.
En cualquier caso $g_x(\beta) \in G^C(\beta)\ \forall \beta \in I_A \Rightarrow g_x \in G^C$ y por tanto

$$[A_{(1-\alpha)^+}]^C \subseteq G^C(\alpha).$$

Por otro lado, se tiene que la función de pertenencia del conjunto difuso A^C viene dada por $\mu_{A^C} : X \longrightarrow [0,1],\ \mu_{A^C}(x) = \sup\limits_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{G^C(\alpha)}(x)$.
Y la función de pertenencia del conjunto difuso $N(A)$ viene dada por $\mu_{N(A)} : X \longrightarrow [0,1],\ \mu_{N(A)}(x) = \sup\limits_{\alpha \in I_A} \alpha \cdot \chi_{N(A)_\alpha}(x)$. Ya que $N(A)_\alpha = G^C(\alpha) \Rightarrow \mu_{N(A)} = \mu_{A^C}$ lo que concluye por el Teorema 1.5.8 que $A^C = N(A)$.

$\square$

Como consecuencia de este resultado se puede establecer la siguiente definición.

Definición 3.3.3. *Se define la negación del conjunto difuso $A \in FS(X)$ como $N(A) = A^C$, con A^C dada en 3.9.*

Ejemplo 3.3.4. Considérese el conjunto difuso $A_1 = A$ del Ejemplo 3.1.3. Se calcula la negación de A a través de sus elementos graduales.
Se tiene que

$$A_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R} & si \quad \alpha = 0 \\ [1+\alpha, 4-\alpha] & si \quad \alpha > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [A_{(1-\alpha)}] = \begin{cases} [2-\alpha, 3+\alpha] & si \quad \alpha < 1 \\ \mathbb{R} & si \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [A_{(1-\alpha)^+}]^C = (-\infty, 2-\alpha] \cup [3+\alpha, +\infty)$$

Consideramos entonces el conjunto gradual G^C cuya función de asignación viene dada por $G^C : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$G^C(\alpha) = \{g(\alpha) \ : \ g(\alpha) \in (-\infty, 2-\alpha] \cup [3+\alpha, +\infty)\}$$

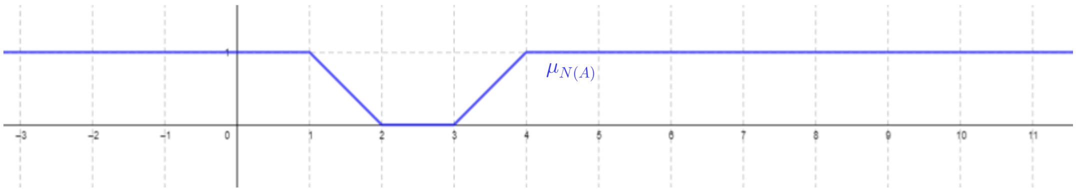
Entonces la negación de A viene dada por $\varphi(G^C) = A^C$, cuya función de pertenencia viene dada por $\mu_{A^C} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$,

$$\mu_{A^C}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{G^C(\alpha)}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{(-\infty, 2-\alpha] \cup [3+\alpha, +\infty)}(x) =$$

$$= \begin{cases} 1 & si \quad x \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty) \\ 0 & si \quad x \in [2, 3] \\ 2 - x & si \quad x \in (1, 2) \\ x - 3 & si \quad x \in (3, 4) \end{cases}$$

En efecto se tiene que A^C es la negación de A como afirma el teorema ya que $\mu_{N(A)} = 1 - \mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$.

$$\mu_{N(A)}(x) = 1 - \mu_A(x) = \begin{cases} 2 - x & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & si \quad 2 < x < 3 \\ x - 3 & si \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases} = \mu_{A^C}(x)$$



Ejemplo 3.3.5. Sea A el conjunto difuso en $X = \{a, b, c, d\}$ dada por $\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$ definida como sigue

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & 0.2 \\ b & \longmapsto & 0.4 \\ c & \longmapsto & 0.6 \\ d & \longmapsto & 0.8 \end{array}$$

En este caso se tiene

$$A_{(1-\alpha)^+} = \begin{cases} \emptyset & si \quad 0 \leq \alpha \leq 0.2 \\ \{d\} & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ \{c, d\} & si \quad 0.4 < \alpha \leq 0.6 \\ \{b, c, d\} & si \quad 0.6 < \alpha \leq 0.8 \\ \{a, b, c, d\} & si \quad 0.8 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [A_{(1-\alpha)^+}]^C = \begin{cases} \{a, b, c, d\} & si \quad 0 \leq \alpha \leq 0.2 \\ \{a, b, c\} & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ \{a, b\} & si \quad 0.4 < \alpha \leq 0.6 \\ \{a\} & si \quad 0.6 < \alpha \leq 0.8 \\ \emptyset & si \quad 0.8 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Entonces $G^C : [0, 0.8] \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $G^C(\alpha) = [A_{(1-\alpha)^+}]^C$ es el conjunto gradual correspondiente a la negación.

De manera que $G^C(0.1) = \{g(0.1) \ : \ g(0.1) \in [A^+_{(0.9)}]^C\} = \{g(0.1) \ : \ g(0.1) \in \emptyset\}$, de manera no hay elementos graduales en este conjunto y por tanto no se pueden obtener elementos difusos. No se puede por tanto obtener el conjunto negación difuso de A a partir del razonamiento de Wu en este caso.

Observación 3.3.6. *Se acaba de observar que la Definición 3.9 no tiene sentido para todos los conjuntos difusos, puesto que hay problemas para los conjuntos difusos que tengan α-cortes vacíos.*

Conclusión

Como acabamos de probar, el trabajo de Wu presenta algunas deficiencias.

En efecto, la negación difusa no está bien definida a través de elementos difusos.

Por otra parte, pueden aducirse otras razones para no compremeterse con la definición de elemento difuso que aparece en dicho trabajo. Si se piensa en los elementos de un conjunto como los átomos del universo, estos son las partículas más pequeñas de las cuáles está formado dicho conjunto. Por lo que siguiendo este discurso los elementos graduales deberían ser minimales, ¿pero lo son los definidos por Wu?
En el Ejemplo 2.3.6 se tenía el conjunto gradual G con función de asignación

$$\xi_G : [0,1] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$\xi_G(\alpha) = \begin{cases} X & si \quad 0 \leq \alpha < 0.2 \\ \\ \{b,c,d\} & si \quad 0.2 \leq \alpha \leq 0.4 \\ \\ \{c,d\} & si \quad 0.4 < \alpha \leq 0.5 \\ \\ \{c\} & si \quad 0.5 < \alpha \leq 0.8 \end{cases}$$

Y se observó como a partir de un solo elemento gradual $g_1 \equiv g$ se recupera el conjunto difuso completo.

$$g : [0, 0.8] \longrightarrow X,$$

$$g(\alpha) = \begin{cases} a & si \quad 0 \leq \alpha \leq 0.2 \\ b & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ d & si \quad 0.4 < \alpha \leq 0.5 \\ c & si \quad 0.5 < \alpha \leq 0.8 \end{cases}$$

Ahora bien, distanciándose de la propuesta de Wu se podrían considerar conjuntos graduales g contenidos en G, o sea, $\xi_g(\alpha) \subseteq \xi_G(\alpha)\ \forall \alpha \in I$, en los cuáles la imagen de cada α sea, bien un conjunto unitario, o bien el conjunto vacío. Por ejemplo

$$g_1 : [0, 0.8] \longrightarrow \mathcal{P}(X) \qquad\qquad g_2 : [0, 0.8] \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$g_1(\alpha) = \begin{cases} \{a\} & si \quad 0 \leq \alpha \leq 0.2 \\ \emptyset & si \quad \alpha > 0.2 \end{cases} \qquad g_2(\alpha) = \begin{cases} \{b\} & si \quad 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$
\begin{array}{ll}
g_3\colon [0,0.8] \longrightarrow \mathcal{P}(X) & g_4\colon [0,0.8] \longrightarrow \mathcal{P}(X) \\
g_3(\alpha) = \begin{cases} \{d\} & si \quad 0.4 < \alpha \leq 0.5 \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases} & g_4(\alpha) = \begin{cases} \{c\} & si \quad 0.5 < \alpha \leq 0.8 \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}
\end{array}
$$

Óbservese que $g_1 \cup g_2 \cup g_3 \cup g_4 = \tilde{g}(= \tilde{g_1})$. Por lo tanto los conjuntos difusos inducidos por los g_i serían *elementos difusos más pequeños*, $\tilde{a}_i$, que los propuestos por Wu.

$$
\begin{array}{ll}
\begin{array}{rcl}
\mu_{\tilde{a_1}}\colon X & \longrightarrow & [0,1] \\
a & \longmapsto & 0.2 \\
b & \longmapsto & 0 \\
c & \longmapsto & 0 \\
d & \longmapsto & 0
\end{array}
&
\begin{array}{rcl}
\mu_{\tilde{a_2}}\colon X & \longrightarrow & [0,1] \\
a & \longmapsto & 0 \\
b & \longmapsto & 0.4 \\
c & \longmapsto & 0 \\
d & \longmapsto & 0
\end{array}
\\
\begin{array}{rcl}
\mu_{\tilde{a_3}}\colon X & \longrightarrow & [0,1] \\
a & \longmapsto & 0 \\
b & \longmapsto & 0 \\
c & \longmapsto & 0 \\
d & \longmapsto & 0.5
\end{array}
&
\begin{array}{rcl}
\mu_{\tilde{a_4}}\colon X & \longrightarrow & [0,1] \\
a & \longmapsto & 0 \\
b & \longmapsto & 0 \\
c & \longmapsto & 0.8 \\
d & \longmapsto & 0
\end{array}
\end{array}
$$

Así se tiene que $\mu_{\tilde{a_1}} \vee \mu_{\tilde{a_2}} \vee \mu_{\tilde{a_3}} \vee \mu_{\tilde{a_4}} = \mu_{\tilde{a}}$.

Pero de nuevo se encuentra una dificultad, y es que para uno de estos supuestos elementos difusos, se puede obtener aún subconjuntos difusos propios suyos, por ejemplo para $\tilde{a}_4$ podría considerarse el subconjunto difuso siguiente

$$
\begin{array}{rcl}
\mu_{\tilde{a_z}}\colon X & \longrightarrow & [0,1] \\
a & \longmapsto & 0 \\
b & \longmapsto & 0 \\
c & \longmapsto & z \\
d & \longmapsto & 0
\end{array}
$$

con $z \in [0, 0.8)$, el cuál claramente verifica $\mu_{\tilde{a_z}}(x) \leq \mu_{\tilde{a_4}}(x)\ \forall x \in X \Rightarrow \tilde{a_z} \subseteq \tilde{a}_4$.

Bibliografía

[1] Didier Dubois y Henri Prade. “Gradual elements in a fuzzy set”. En: *Soft Computing* 12.2 (2008), págs. 165-175.

[2] Didier Dubois y Henri Prade. “Gradualness, uncertainty and bipolarity: making sense of fuzzy sets”. En: *Fuzzy sets and Systems* 192 (2012), págs. 3-24.

[3] Didier Dubois y Henri Prade. *Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty.* Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Carlos Eduardo, Eduardo Luis De Vito y col. “Introducción al razonamiento aproximado: lógica difusa”. En: *Revista Americana de Medicina Respiratoria* 6.3 (2006), págs. 126-136.

[5] Jérôme Fortin, Didier Dubois y Hélene Fargier. “Gradual numbers and their application to fuzzy interval analysis”. En: *IEEE Transactions on fuzzy systems* 16.2 (2008), págs. 388-402.

[6] Robert Fullér y Tibor Keresztfalvi. “On generalization of Nguyen’s theorem”. En: *Fuzzy sets and systems* 41.3 (1991), págs. 371-374.

[7] Roy H Goetschel Jr. “Representations with fuzzy darts”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 89.1 (1997), págs. 77-105.

[8] Joseph A Goguen. “L-fuzzy sets”. En: *Journal of mathematical analysis and applications* 18.1 (1967), págs. 145-174.

[9] Erich Peter Klement. “Operations on fuzzy sets—an axiomatic approach”. En: *Information sciences* 27.3 (1982), págs. 221-232.

[10] George Klir y Bo Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic.* Vol. 4. Prentice hall New Jersey, 1995.

[11] Beatriz Lafferriere, Gerardo Lafferriere y Nguyen Mau Nam. “Introduction to Mathematical Analysis I”. En: (2016).

[12] Antonio Francisco Mundo Pérez-Cea. “Bases de datos relacionales con conjuntos intervalo-valorados difusos”. En: (2018).

[13] CV Negoita y DA Ralescu. “Representation theorems for fuzzy concepts”. En: *Kybernetes* (1975).

[14] Hung T Nguyen. “A note on the extension principle for fuzzy sets”. En: *Journal of mathematical analysis and applications* 64.2 (1978), págs. 369-380.

[15] Dan A Ralescu. “A generalization of the representation theorem”. En: *Fuzzy sets and systems* 51.3 (1992), págs. 309-311.

[16] Daniel Sánchez y col. “On a non-nested level-based representation of fuzziness”. En: *Fuzzy Sets and Systems* 192 (2012), págs. 159-175.

[17] E Trillas. “Sobre funciones de negación en la teoria de conjuntos difusos, Stochastica III (1979) 47–60”. En: *English translation in: S. Barro, A. Bugarin, A. Sobrino (Eds.), Advances in Fuzzy Logic, Public University of Santiago de Compostela, Spain* (1998), págs. 31-45.

[18] Hsien-Chung Wu. “Set operations of fuzzy sets using gradual elements”. En: *Soft Computing* 24.2 (2020), págs. 879-893.

[19] Lotfi A Zadeh. “Fuzzy sets”. En: *Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems: selected papers by Lotfi A Zadeh*. World Scientific, 1996, págs. 394-432.

[20] Lotfi A Zadeh. “Nacimiento y evolución de la lógica borrosa, el soft computing y la computación con palabras: un punto de vista personal”. En: *Psicothema* (1996), págs. 421-429.