UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

GENERALIZACIÓN Y MEDIACIÓN EN PRIMEROS CURSOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UN CONTEXTO DE PENSAMIENTO FUNCIONAL COMO APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Presentado por:

Dª Romina Angélica Narváez Orellana

Granada, 2024.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis Doctoral

GENERALIZACIÓN Y MEDIACIÓN EN PRIMEROS CURSOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN UN CONTEXTO DE PENSAMIENTO FUNCIONAL COMO APROXIMACIÓN AL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Romina Angélica Narváez Orellana

2024

Memoria de Tesis Doctoral realizada con la dirección de la Doctora Dña. María C. Cañadas, Catedrática del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta Dña. Romina Angélica Narváez Orellana, para optar al grado de Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada, con Mención Internacional.

Fdo: Dña. Romina Angélica Narváez Orellana.

V°B° de la Directora

Fdo: Dra. Dña. María C. Cañadas

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Romina Angélica Narváez Orellana
ISBN: 978-84-1195-227-9
URI: https://hdl.handle.net/10481/90414

Esta Tesis Doctoral ha sido realizada dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU201675771-P y PID2020-113601GB-I00 financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Asimismo, esta tesis fue llevada a cabo en el seno del grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

Su autora ha sido becaria del Programa "Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile" de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), mediante su Programa de Formación de Capital Humano Avanzado, Folio 72210075. A su vez, la autora fue beneficiada de dos becas de movilidad. La primera de ellas fue una beca de Movilidad Internacional para Estudiantes de Programas de Doctorado de la Universidad de Granada, para la realización de una estancia de tres meses en Tufts University, Boston, Estados Unidos. La segunda beca fue una Beca AUIP/ Programa de Becas de Movilidad entre Universidades Andaluzas e Iberoamericanas 2023, para realizar una estancia de 21 días en el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile, Santiago, Chile.

“Cuando decimos que amar educa, lo que decimos es que el amar como espacio que acogemos al otro, que lo dejamos aparecer, en el que escuchamos lo que dice sin negarlo desde un prejuicio, supuesto, o teoría, se va a transformar en la educación que nosotros queremos. Como una persona que reflexiona, pregunta, que es autónoma, que decide por sí misma.

Amar educa. Si creamos un espacio que acoge, que escucha, en el cual decimos la verdad y contestamos las preguntas y nos damos tiempo para estar allí con el niño o niña, ese niño se transformará en una persona reflexiva, seria, responsable que va a escoger desde sí. El poder escoger lo que se hace, el poder escoger si uno quiere lo que escogió o no, ¿quiero hacer lo que digo que quiero hacer?, ¿me gusta estar donde estoy?”, son algunas de las preguntas que aparecen.

Para que el amar eduque hay que amar y tener ternura. El amar es dejar aparecer. Darle espacio al otro para que tengan presencia nuestros niños, amigos y nuestros mayores”.

Humberto Maturana, 2017.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi directora de Tesis, María C. Cañadas, cuya guía y apoyo constante fueron fundamentales en mi proceso doctoral. Gracias María por tu paciencia, confianza y cariño, porque no dudaste en enseñarme y prepararme de la mejor forma para enfrentar este desafío. Gracias porque siempre me apoyaste en mis ideas y entendiste mi hiperactividad.

Agradezco a todos los integrantes de los proyectos EDU2016-75771-P y PID2020-113601GB-I00, "PENFU". La participación de cada uno ha sido fundamental en el desarrollo de esta tesis. En particular, quiero agradecer a mis compañeras Sandra, Maricarmen, Lourdes, Estefanía y María Eugenia, muchas gracias por la amistad y afecto que me han entregado durante este tiempo.

Quiero agradecer a Bárbara Brizuela por permitirme realizar mi estancia internacional en la Universidad de Tufts. Durante el tiempo compartido pude conocer y compartir con una gran persona, quien no dudó en enseñarme y compartir su conocimiento. Fue una experiencia sumamente enriquecedora, que aportó mucho a mi formación académica.

Agradezco a Natividad Adamuz por participar en uno de los estudios realizados en esta tesis doctoral. Gracias por compartir tu tiempo y conocimiento conmigo.

A Mariloli, por acompañarme durante mi estancia doctoral. Gracias por tu constante apoyo y cariño durante todo este tiempo.

A Luz por ser una gran amiga, quien me ha acompañado durante muchos años en esta aventura. A Maria José por su gran cariño y amistad.

Finalmente agradezco a Francisco y Trinidad, mi familia, el motor de mi vida. Les agradezco infinitamente por ser mi fuente de inspiración y apoyo incondicional. A mis padres, quienes me enseñaron a perseverar en la búsqueda de mis metas, brindándome amor constante. A mis hermanas, que, a pesar de la distancia, siempre han estado pendiente de mi felicidad. A mis sobrinos y cuñado, por su cariño inmenso. A Dios, porque siempre me ha sorprendido, dándome oportunidades que nunca imaginé vivir.

ÍNDICE

ÍNICE DE FIGURAS

ÍNICE DE TABLAS

RESUMEN

Este documento constituye la Tesis Doctoral de la autora, con el objetivo de obtener el grado de Doctora con Mención Internacional en el Programa de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, curso 2023/2024. Esta investigación se inició durante el curso 2020/2021 tras finalizar el Máster en Didáctica de la Matemática y se enmarca en dos proyectos de investigación I+D, financiados por la Agencia Estatal de Investigación de España.

En este trabajo abordamos el pensamiento algebraico, que ha sido un tema relevante de investigación para la Didáctica de la Matemática en las últimas décadas. Específicamente nos enfocamos en el pensamiento funcional, componente clave del pensamiento algebraico.

El pensamiento funcional es considerado una opción apropiada para abordar el pensamiento algebraico debido a su relevancia en la aplicación de prácticas fundamentales del ámbito algebraico (Blanton et al., 2015). El pensamiento funcional se centra en la relación entre dos variables, siendo fundamental el estudio de regularidades y, en particular, la generalización (Blanton, 2008). Sin embargo, trabajar con este componente algebraico puede ser desafiante, especialmente cuando los estudiantes no han trabajado previamente la generalización. La mediación del docente o investigador-docente ha demostrado ser una estrategia efectiva para abordar estas dificultades y facilitar el proceso de generalización.

El objetivo general de investigación de esta Tesis Doctoral es analizar y describir el proceso de generalización en estudiantes de educación primaria y examinar las mediaciones empleadas durante su trabajo en este contexto. Para dar cumplimiento a este objetivo, planteamos cuatro objetivos específicos: (a) caracterizar el proceso de generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria; (b) describir las relaciones entre las generalizaciones de los estudiantes y las mediaciones realizadas por un investigador-docente; (c) caracterizar las justificaciones de los estudiantes al resolver una tarea de generalización y (d) describir el razonamiento de los estudiantes al resolver una tarea de generalización.

Nuestra Tesis Doctoral se compone de cuatro estudios de investigación. El primero de ellos es una revisión bibliométrica sobre pensamiento algebraico, permitiéndonos caracterizar la producción científica sobre este tema. Los otros tres estudios se enfocaron en dar respuesta a los objetivos específicos de investigación, utilizando datos obtenidos de un experimento de enseñanza en un colegio de Granada, con estudiantes de segundo y cuarto de educación primaria.

Los resultados obtenidos en relación con nuestros objetivos específicos fueron significativos. En el primer objetivo específico, al caracterizar el proceso de generalización, observamos que independientemente del nivel, los estudiantes mostraban generalizaban para cantidades indeterminadas y casos generales, incluso sin conocimientos previos de simbología algebraica o conceptos de indeterminación (infinito, muchos, etc.). Este hallazgo destaca la capacidad innata de los estudiantes para establecer relaciones entre cantidades y descubrir patrones más allá de casos concretos, ampliando nuestra comprensión de sus capacidades de generalización. En el segundo objetivo, identificamos mediaciones específicas que resultaron efectivas para apoyar este proceso. Evidenciando cómo la interacción investigador-profesor influyó en la calidad de las generalizaciones. Respecto al tercer objetivo, exploramos las justificaciones de los estudiantes durante la generalización, destacando su importancia en la formulación de argumentos y la relación entre las justificaciones de los estudiantes y el proceso de generalización. Por último, en el cuarto objetivo, al describir el razonamiento de los estudiantes en tareas de generalización, centrándonos en las fases de abducción, inducción y generalización, identificamos la importancia de las respuestas colectivas en la formulación y confirmación de la estructura de la tarea, facilitando el proceso de generalización. Además de patrones comunes en el razonamiento de los estudiantes, en particular la formulación y el mantenimiento de conjeturas iniciales durante la abducción y el posterior refinamiento mediante la inducción.

En nuestras conclusiones, destacamos la capacidad de generalización de los estudiantes de primaria, donde la mediación del investigador-docente tuvo un rol destacable dentro del proceso de generalización. Además, resaltamos la importancia de las justificaciones en el pensamiento funcional, así como la relevancia de las fases de abducción, inducción y generalización en el proceso de generalización.

EXTENDED SUMMARY

This document constitutes the author's Doctoral Thesis, with the aim of obtaining the Doctoral degree with international mention in the Program of Educational Sciences at the University of Granada, academic year 2023/2024. This research was initiated during the 2020/2021 academic year after completing the master's degree in mathematics education.

The focus of this Doctoral Thesis is to explore the functional thinking of early primary education students when solving tasks that involve generalization as an approach to algebraic thinking and its practices. This topic is of great relevance in the educational field as it provides evidence on how to develop fundamental mathematical skills in its early learning stages. The general objective of this thesis was to analyze and describe the generalization of students in the early years of primary education and the mediations used during their work.

Various investigations have shown the challenges faced by students when they encounter algebraic concepts at higher grade levels. To address this, the *early algebra* proposal emerged, focusing on integrating algebraic thinking into primary education. Rather than directly teaching advanced algebraic content, it emphasizes introducing algebraic components and tasks to develop essential mathematical skills. Functional thinking, a component of algebraic thinking, has been explored to enhance mathematical skills among early primary students. However, teaching functional thinking can be challenging, especially when students lack prior instruction in its practices. The active role of teachers, or research-teachers, in guiding students through the generalization process has been recognized as valuable in overcoming these challenges. Research has shown that teacher mediation through various strategies can significantly aid students in grasping algebraic concepts.

Research Objectives

For our Doctoral Thesis we have considered the following general objective, which is to analyze and describe the generalization of students in the first years of primary education in a functional context of algebraic thinking and the mediations that are used. The specific objectives we set ourselves are the following:

- O.E.1. To characterize the generalization process of students in the first years of primary education.
- O.E.2. To describe the relationships between students' generalizations and the mediations carried out by a researcher-teacher.
- O.E.3. Characterize students' justifications when solving a generalization task.
- O.E.4. Describe students' reasoning when solving a generalization task.

Algebraic Thinking

Defining algebraic thinking is not straightforward, with no consensus on the usage and meaning of different terms and the nature and significance of early algebra (Cañadas et al., 2012; Kaput, 2008). Various authors have proposed different definitions of this type of mathematical thinking. Blanton and Kaput (2004) define algebraic thinking as "a mental habit that permeates all of mathematics and involves students' ability to build, justify, and express conjectures about mathematical structure and relationships" (p. 142). Additionally, algebraic thinking is defined as "a process in which students generalize mathematical ideas from a set of particular cases, establish these generalizations through argumentation discourse, and express them in increasingly formal and age-appropriate ways" (Blanton & Kaput, 2005, p. 99). Finally, algebraic thinking is understood as A perspective on quantitative scenarios that underscores elements of general relationships using expressions that may not be strictly tied to algebraic symbolism (Kieran, 1996). Algebraic thinking, as expressed by Kieran (2004), encompasses the development of cognitive skills applicable in a variety of contexts. This enables students to analyze relationships between quantities, identify underlying mathematical structures, address changes in quantitative situations, generalize based on patterns and regularities, solve mathematical problems, model real-world situations, support arguments with strong justifications, demonstrate mathematical concepts, and, anticipate future results.

Algebraic Practices

Mathematical practices are often considered modes of thinking that extend beyond specific subjects and educational stages (Brizuela, 2023). Blanton et al. (2019) assert that these practices are socially mediated processes that refine the scope of generalization. In relation to algebraic thinking, four essential practices are identified: (a) generalizing; (b) representing; (c) justifying; and (d) reasoning with mathematical structures and relationships (Blanton et al., 2011; 2018; 2019; Kaput, 2008). These four practices are embedded in various approaches to algebraic thinking.

a) Generalization involves moving from the observation of particular cases to the formulation of conjectures that cover a broad class of cases. It requires connecting situations with prior knowledge and formulating conclusions in the form of generalized statements. It is the movement from the particular to the general and the perception of the general in the, focusing on patterns, structures, and relationships between them (Mason et al., 2010; Brizuela, 2023; Mason, 1996; Kaput, 1999).
b) Representations in mathematics encompass tools that make mathematical concepts and procedures tangible, being essential for the understanding of mathematical knowledge (Rico, 2009). In this thesis, we refer specifically to external representations, defined as symbolic or graphic notations specific to each mathematical notion (Castro & Castro, 1997). These representations are fundamental in algebraic thinking and are not limited only to algebraic symbology, which influences the sophistication of the expression of generalization (Brizuela & Blanton, 2014; Pinto et al., 2023).
c) Justification in mathematics involves constructing arguments that support the validity of a statement, using accepted forms of mathematical reasoning (Staples et al., 2012). It is a social process that clarifies, authenticates, and systematizes mathematical knowledge (Ayala-Altamirano & Molina, 2021a). It stands out as a fundamental practice in mathematical learning, since it not only helps to improve understanding, but also fosters the application and advancement of knowledge (Staples et al., 2012). Its practice is not only crucial in mathematics,

but also enhances reasoning and discussion in the classroom (Thanheiser & Sugimoto, 2022). Thus, justification not only improves mathematical skills, but also strengthens reasoning progressively as students actively engage in this practice.

d) Reasoning in mathematics involves organizing ideas to reach conclusions, being an integral aspect of algebraic thinking (Cañadas & Castro, 2005; Cañadas, 2007; Salgado & Salinas, 2012). It is fundamental to understand and apply generalizations in different mathematical contexts (Blanton et al., 2018). This practice stands out as possibly the most complex in algebraic thinking, since it involves manipulating and reasoning with generalizations as autonomous entities (Brizuela, 2023).

Functional Thinking

In the context of our Doctoral Thesis, we center our attention on a pivotal facet of algebraic thinking: functional thinking. This section meticulously delves into the intricacies of this component, underscoring its significance and indispensable attributes in students' mathematical development. Functional thinking, as articulated by Pinto (2019), involves a form of cognition centered on generalizing relationships that covary, whether generalizable or not, and expressing these relationships through diverse representations. Essentially, it's a cognitive process encompassing the construction, description, and reasoning about functions, with a specific focus on relationships between two or more variables, extending from specific relationships to broader generalizations (Kaput, 2008). Cañadas and Molina (2016) define it as an integral element of algebraic thinking, concentrating on the construction, description, and reasoning about functions and their constituent elements. Similarly, Cañadas et al. (2016) characterize functional thinking as "a cognitive activity initiated and developed through working on relationships between quantities, specifically when particular concepts are operationalized to address specific questions" (p. 418).

According to Blanton (2008), functional thinking, within the realm of early algebra, revolves around the relationship between two variables, with the exploration of regularities and, notably, their generalization being paramount (p. 30). Blanton and

Kaput (2011) elucidate that functional thinking encompasses the construction and generalization of patterns and relationships utilizing various representations, considering generalized relationships or functions as outcomes of valuable mathematical objects. Smith (2008) also underscores relationships between two or more variables, spanning from specific to general relationships. We conceptualize functional thinking as "thinking in terms of relationships" (Rico 2007, p. 56). This component of algebraic thinking encapsulates the ability to generalize relationships between covariant quantities, express these relationships in diverse forms such as words, symbols, tables, or graphs, and employ multiple representations to analyze the behavior of the function, as posited by Blanton et al. (2011).

Mediation

Educational mediation emerges as a fundamental element in the pedagogical process of teaching and learning. According to Escobar (2011) mediation is characterized as a pedagogical interaction-social, dialogical, playful, conscious, intentional, and systematic-aimed at fostering positive learning experiences (p. 60). This dynamic and evaluative process involves a teacher guiding students through various instructional supports, including information, materials, verbal instructions, and questions. These resources function as tools, both cognitive and physical, facilitating student problem-solving and contributing to the realization of educational objectives (Alzate et al., 2005).

Learning mediation is a deliberate and systematic pedagogical process marked by social and dialogical interactions, not merely for knowledge transmission but also for the cultivation of human capacities and the transmission of values and norms. It involves collaborative efforts among teachers, peers, and adults, all with the conscious intent of generating enriching learning experiences. This process considers factors such as prior knowledge, learning styles, educational objectives, and the learning context (Escobar, 2011). Ferreiro and Calderón (2001) conceptualize mediation as a pedagogical process wherein a mediator, whether a person or an instructional resource, facilitates the learning of a subject initially in a state of ignorance, incapacity, or uncertainty. The mediator stimulates the development of the subject's capabilities, corrects cognitive deficiencies, and guides them toward a qualitatively superior state of knowledge, skills, and personal development. This active and interactive process involves direct engagement between the subjects participating in a specific task. In essence, mediation serves to propel learning, unleash potentialities, and propel individuals towards more advanced states of knowledge and skills.

Methodology

This study employs a mixed-methods approach, encompassing processes for collecting, analyzing, and integrating both quantitative and qualitative data within the same research framework (Hernández-Sampieri et al., 2014). The thesis is part of a broader research focused on algebraic thinking. The overarching goals of this project are twofold: (a) to delineate the components of algebraic thinking exhibited by kindergarten and elementary school students, and (b) to create materials, tasks, and strategies fostering the development of algebraic thinking while addressing challenges students encounter with algebra in later grades. The research adopts a descriptive, exploratory, and explanatory scope to comprehensively investigate the nuances of algebraic thinking in the targeted student population.

To conduct this research, we worked with two primary school classes from a charter school situated in the northern region of Granada. This educational institution is distinguished by its socio-economic and cultural profile, falling within the low-middle category. Furthermore, the school adheres to the learning community’s approach. The sample selection was deliberate, considering the center's availability and the cooperation of the teachers. One of the groups involved in this Doctoral Thesis comprised second-grade students (7-8 years old), totaling 24 students. The second group consisted of fourth-grade students (9-10 years old), totaling 25 students.

Studies carried out in the Doctoral Thesis

The Doctoral Thesis comprises four studies. One of these is a bibliometric analysis study with the aim of characterizing scientific production related to algebraic thinking, providing essential background knowledge for the development of this thesis. The remaining three studies result from analyses conducted during the teaching experiment at the second and fourth-grade levels. Below is a description of each study, including the title and the names of the authors involved:

- Study 1: Narváez, R., Adamuz-Povedano, N., & Cañadas, M. C. (under review). Análisis Bibliométrico de la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria en Scopus.
- Study 2: Narváez, R., & Cañadas, M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en un contexto de generalización. *PNA 17*(3), 239-264. https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153
    - Indication of quality: SJR (2022), Q3.
- Study 3: Narváez, R., Brizuela, B. M., & Cañadas, M. C. (under review). Justifications and mediations in the generalization process among fourth grade students.
- Study 4: Narváez, R., Cañadas, M. C., & Torres, M.D. (under development). From the concrete to the abstract: analysis of the generalization process.

Results

As for the results obtained in our research, we highlight the following. When addressing the first specific objective (S.O.1), we characterized the process of generalization. This analysis was conducted across studies 2, 3, and 4 of our Doctoral Thesis. Analyzing and characterizing the generalization process in second and fourth grades, we noticed that regardless of the level, students exhibited the ability to generalize for indeterminate quantities and general cases, even without prior knowledge of algebraic symbolism or concepts of indeterminacy (infinity, many, etc.). These finding underscores students' innate ability to establish relationships between quantities and discover patterns beyond specific cases, expanding our understanding of their generalization capacities. Considering generalization as both a process and a product (Ellis, 2007) allowed for a deeper understanding of the students' generalizations, providing a more comprehensive analysis of their progress.

In relation to S.O.2. we have identified specific mediations that have proven effective in helping the generalization process in students. Among these mediations were the posing of reflective questions and the presentation of specific mathematical challenges (inviting and challenging mediations). Our research highlighted how researcher-teacher interaction with the students have a direct influence on the quality and nature of students' generalizations. These findings evidenced specific links between teacher actions and student responses, demonstrating how mediations directly impact student strategies and responses.

With respect to the third specific objective (S.O.3), focused on understanding how students justify their reasoning during generalization tasks, recognizing the fundamental role of justifications in mathematical thinking. Our thesis highlighted the crucial link between students' justifications and the generalization process, emphasizing that justifications provide the basis for robust deductive arguments essential in formulating generalizations across various mathematical scenarios.

Objective 4 (S.O.4) aimed to describe students' reasoning in generalization tasks, emphasizing the phases of abduction, induction, and generalization. This analysis outlined the crucial role of collective responses in shaping and confirming the task structure, facilitating the generalization process. Individual interviews revealed common patterns in students' reasoning, particularly the formulation and maintenance of initial conjectures during abduction and the subsequent refinement through induction. Despite challenges in expressing generalization using algebraic symbols, students showcased an innate ability to identify regularities, providing answers to various cases.

Conclusions

In our Doctoral Thesis we have analyzed and described how elementary school students carry out the generalization process in a functional context of algebraic thinking, considering the mediations used and actions such as justification and reasoning. In this analysis, we evaluate the strategies and difficulties students face when approaching tasks that require the application of functional thinking and generalization ability. In addition, we examine how researcher-teacher mediations influence this process, identifying how pedagogical guidance impacts how students' approach and understand these generalization tasks.

In conclusion, this study made it possible to visualize the progression in the development of algebraic thinking in the first years of elementary education. The identification of levels of sophistication, based on the work of Blanton et al. (2015), offered a clear perspective on students' generalization ability, highlighting their innate ability to establish relationships between quantities beyond specific cases. Highlighting the crucial role of mediation in the development of these skills and observing how students extend their conjectures as they explore more instances evidenced a dynamic progression in their ability to cope with the indeterminate through interaction and reasoning.

The significant influence of mediations on generalization tasks was a central point in our study. We highlighted the key role of intentional mediator-student interactions, underscoring their impact on the generalization process. Specifically, mediating actions, such as posing reflective questions and presenting mathematical challenges, were revealed to be effective in guiding students in this process. In addition, we evidenced how teacher interventions directly influence the quality and nature of student generalizations, demonstrating the close relationship between teacher actions and student responses. Likewise, we identified the adaptability of mediations to students' individual needs and their direct connection with students' confidence and attitude towards generalization tasks, highlighting the relevance of the relationship between mediation and mathematical self-efficacy in our study. Regarding justifications, they were crucial to identify and distinguish between simple and complex generalizations, being essential to validate students' conjectures and answers. In addition, we highlight the impact of the researcher-teacher mediation in the improvement of these justifications, promoting clarity and substantiation. Both justifications and mediations are positioned as key pedagogical tools for the development of functional thinking, guiding students toward a deeper understanding of mathematical regularities and fostering the creation of sophisticated generalizations. Students' reasoning vis-à-vis generalization tasks, considering the phases of abduction, induction, and generalization. This analysis revealed the strategies employed by the students, highlighting the importance of these phases in the generalizing process, supported by previous research. Despite difficulties with algebraic symbolism, students identified regularities and provided answers, demonstrating their ability to generalize. This detailed analysis provides a comprehensive view of the cognitive process of generalization, highlighting the importance of the reasoning phases and their contribution to the development of students' generalizing skills.

This study contributes to the educational field and Didactics of Mathematics by delving into generalization in elementary students, offering a detailed vision applicable in classrooms on how students develop this cognitive process. It highlights the relevance of integrating functional thinking in teaching, focusing on strategies such as mediations, justifications and active discussions that promote the evidence of proposed generalizations. The research underlines the importance of activities based on students' close experiences, facilitating understanding and application. It reveals the value of a collaborative environment where the constant explanation of reasoning among peers stimulates the generalization process. In addition, it points out the need to improve teacher training in algebraic thinking, connecting classroom experiences with the continuous mathematical development of students. In summary, this work offers concrete pedagogical strategies, allowing to understand and effectively promote mathematical generalization in elementary school students, being a valuable tool for educators.

PRESENTACIÓN

¿Qué significa "pensar algebraicamente"? ¿Puede desarrollarse esta habilidad en niños demasiado pequeños para el álgebra formal? Si es así, ¿los niños que pueden generalizar y percibir la estructura matemática estarán mejor preparados para las exigencias del álgebra en la escuela secundaria?

(Pinnock, 2021, p. 1)

La presente memoria constituye la Tesis Doctoral de la autora, con el propósito de obtener el grado de Doctora con mención internacional en el Programa de Doctorado de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, en el curso académico 2023/2024. Esta investigación se inició durante el curso 2020/2021, después de realizar el Máster en Didáctica de la Matemática.

El propósito de esta memoria de investigación es indagar en el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria al abordar tareas de generalización como una aproximación al pensamiento algebraico. Nuestro objetivo es analizar y describir la generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria en un contexto funcional del pensamiento algebraico y las mediaciones que se emplean. La relevancia de este trabajo se fundamenta en distintos focos. En primer lugar, queremos explorar cómo los estudiantes[1] de educación primaria abordan la generalización a través del pensamiento funcional considerando la justificación, la generalización y el razonamiento como prácticas algebraicas. En segundo lugar, analizaremos cómo las mediaciones del investigador-docente influyen en el proceso de generalización de los estudiantes. Por último, entregaremos información que ayudará a diseñar estrategias

[1] Utilizaremos en el escrito de esta Tesis Doctoral los términos “los estudiantes”, “los investigadores o investigadores-docentes”, “los docentes” para expresar tanto a hombres como mujeres.

para el trabajo con pensamiento funcional en el aula, desde tareas hasta acciones docentes que pueden implementarse en la práctica pedagógica.

Esta Tesis Doctoral está conformada por cuatro estudios. Uno de los cuatro estudios está publicado en la Revista PNA (https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153) artículo que cumple con los requisitos solicitados por la Escuela Internacional de Posgrado de la Universidad de Granada[2] Los otros estudios se encuentran en proceso de revisión en distintas revistas de impacto, incluidas en Scopus y/o JCR y uno de ellos se encuentra en la etapa final de elaboración.

Estructura de la Tesis Doctoral

La presente Tesis Doctoral esta organiza en siete capítulos, seguidos por las secciones de referencias y anexos. Con el fin de cumplir con los requisitos para optar a la Mención Internacional de la Universidad de Granada, hemos redactado un resumen extenso y las conclusiones de esta tesis en inglés, como se indica en las directrices correspondientes (https://escuelaposgrado.ugr.es/pages/internacional/mencioninternacional/mencion). A continuación, proporcionamos una descripción detallada de cada uno de los capítulos:

En el primer capítulo abordamos el problema de investigación donde exponemos las razones que motivaron esta investigación, incluyendo justificaciones de carácter curricular, investigador y personal. También presentamos las preguntas de investigación, de donde emerge esta investigación, así como el objetivo general que perseguimos.

El segundo capítulo contiene el marco conceptual que hemos adoptado para sustentar nuestro trabajo de investigación. Los apartados abordados incluyen elementos destacados para el pensamiento algebraico, entre los que se encuentran el pensamiento

[2] Publicación original de la que sea autor el doctorando y que incluya parte de los resultados de las tesis en una revista indexada en Scopus y con índice de impacto en SCImago Journal Rank (SJR). Ver en https://doctorados.ugr.es/cienciaseducacion/pages/normativa

funcional, las prácticas algebraicas, el proceso de generalización y, por último, las mediaciones que intervienen en el proceso de aprendizaje. En estos elementos se centra este trabajo.

En el tercer capítulo, presentamos los antecedentes más relevantes relacionados con nuestro tema de investigación. Este capítulo también incluye una revisión bibliométrica que contribuye a la revisión de literatura realizada. Por último, detallamos los objetivos específicos de investigación.

El cuarto capítulo se centra en la metodología empleada en esta investigación. Describimos la investigación de diseño y los experimentos de enseñanza realizados en los proyectos de investigación en los que se enmarca este trabajo. Presentamos información sobre los participantes, así como los procedimientos de recolección de datos, incluyendo una explicación de las sesiones realizadas y los instrumentos utilizados. Además, describimos la metodología de análisis de datos para los estudios 2, 3 y 4.

En el quinto capítulo recogemos los resultados obtenidos a lo largo de nuestra Tesis Doctoral, ofreciendo una descripción de los estudios 2, 3 y 4, los cuales abordan directamente nuestros objetivos de investigación.

Para finalizar, en los capítulos 6 y 7 presentamos las conclusiones de este trabajo. El capítulo 6 contiene las conclusiones en español, mientras que el capítulo 7 las presentamos en inglés. En estos capítulos, detallamos las principales conclusiones derivadas de los estudios realizados, resaltando las contribuciones de nuestra tesis y las implicaciones para la enseñanza. Por último, caracterizamos las limitaciones de nuestro trabajo, señalando posibles líneas abiertas para futuras investigaciones.

Contexto de la Investigación

En Andalucía existe un grupo de investigación consolidado desde 1988, llamado "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" (https://fqm193.ugr.es/), en el marco del Plan Andaluz de Investigación y Desarrollo. En este grupo se inicia una línea de investigación centrada en patrones y generalización en 1995. Esta línea se ha continuado hasta nuestros días a través de diferentes investigadores y liderada desde el año 2014 por las doctoras María C. Cañadas y Marta Molina. Desde ese año, se han adjudicado tres proyectos sobre pensamiento algebraico (Cañadas, 2023) I+D (EDU2013-41632-P; EDU201675771-P; PID2020-113601GB-I00) financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER). Estos proyectos se enmarcan en la propuesta *early algebra* para educación infantil y educación primaria. La investigadora principal de estos proyectos es María C. Cañadas Santiago, quien además es la directora de esta Tesis Doctoral. Esta línea cuenta con una página web (https://pensamientoalgebraico.es/es/) donde se pueden encontrar las contribuciones realizadas como artículos, comunicaciones y, además, las tareas utilizadas en nuestras investigaciones. Esta página web proporciona una valiosa fuente de información y recursos relacionados con resultados de investigación y con la integración del pensamiento algebraico en la educación infantil y primaria.

Esta Tesis Doctoral se ha desarrollado en el seno de dos de los proyectos de investigación mencionados. El primer proyecto con referencia EDU201675771-P titulado "Pensamiento funcional en educación primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización" tenía como objetivos:

- O.G.1. Profundizar en la descripción del pensamiento funcional que pone de manifiesto estudiantes de educación primaria en España.
- O.G.2. Desarrollar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo del pensamiento funcional y la superación de los obstáculos que lo limitan.

Además, consideraba los siguientes objetivos específicos:

- O.E.1. Describir el pensamiento funcional que ponen de manifiesto estudiantes españoles de los diferentes cursos de educación primaria.
- O.E.2. Establecer comparaciones entre el pensamiento funcional de estudiantes españoles de distintos cursos de educación primaria.
- O.E.3. Establecer comparaciones entre el pensamiento funcional de estudiantes españoles de distintos centros educativos.

- O.E.4. Diseñar materiales didácticos y tareas útiles para la introducción y desarrollo del pensamiento funcional en educación primaria.
- O.E.5. Identificar dificultades que encuentran estudiantes españoles de educación primaria de diferentes niveles en el proceso de pensamiento funcional y formas para ayudarlos a superarlas.

Posteriormente, en el segundo proyecto de investigación, titulado "Pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria" (PID2020-113601GB-I00), se amplió el rango de investigación a educación infantil (desde 3 a 5 años). Además, consideró diversos componentes del pensamiento algebraico (aritmética generalizada, ecuaciones, pensamiento funcional y patrones). Sus objetivos de investigación son:

- O.G.1. Describir los componentes del pensamiento algebraico evidenciados por los estudiantes de infantil y primaria.
- O.G.2. Generar materiales, tareas y estrategias que favorezcan el desarrollo del pensamiento algebraico y que contribuyan a eliminar los obstáculos que lo limitan.

Los objetivos específicos para este proyecto son:

- O.E.1. Describir la generalización expresada por los estudiantes a través de diferentes aproximaciones al álgebra escolar.
- O.E.2. Analizar las estructuras identificadas por los estudiantes a través de diferentes aproximaciones al álgebra escolar.
- O.E.3. Describir las representaciones utilizadas por los estudiantes cuando trabajan con tareas de generalización a través de diferentes aproximaciones álgebra escolar.
- O.E.4. Identificar errores y dificultades que encuentran los estudiantes cuando trabajan tareas relacionadas con diferentes aproximaciones del álgebra escolar.
- O.E.5. Describir prácticas que pueden ayudar a los estudiantes a corregir sus errores y superar dificultades cuando trabajan tareas relativas a diferentes aproximaciones del álgebra escolar.

- O.E.6. Presentar materiales y tareas que favorezcan el desarrollo de nociones relacionas con el pensamiento algebraico

Con parte de la información obtenida en el marco de estos proyectos, hemos realizado los cuatro estudios que conforman este trabajo. Estos proyectos se centraron en el pensamiento algebraico y en el pensamiento funcional. Actualmente estos temas son de gran importancia puesto que el sentido algebraico forma parte del currículo español de educación primaria en la actualidad (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). Asimismo, con esta Tesis Doctoral buscamos aportar nueva información sobre estos temas de investigación.

Estudios que conforman la Tesis Doctoral

La Tesis Doctoral que presentamos se compone de cuatro estudios. Uno de ellos es un análisis bibliométrico cuyo objetivo fue caracterizar la producción científica sobre pensamiento algebraico. Este estudio ofrece información relevante para la elaboración de esta tesis dado que sienta las bases de nuestros principales antecedentes. Los otros tres estudios son el resultado de los análisis realizados a partir del experimento de enseñanza llevado a cabo en segundo y cuarto de primaria. A continuación, presentamos una descripción general de estos estudios, incluyendo las referencias y los indicios de calidad de las revistas en que se han publicado o están en proceso de revisión.

- Estudio 1. Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (en revisión). Análisis bibliométrico de la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus.
    - *Indicio de calidad: SJR (2022), Q3.*

  Estudio 2. Narváez, R. y Cañadas, M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en un contexto de generalización. *PNA 17*(3), 239-264. https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153
    - *Indicio de calidad: SJR (2022), Q3.*
- Estudio 3. Narváez, R., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C (en revisión). Justifications and mediations in the generalization process among fourth grade students.

- *Indicio de calidad: JCR (2022) Q3; SJR (2022) Q1*

- Estudio 4. Narváez, R., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (en elaboración). De lo concreto a lo abstracto: análisis del proceso de generalización.
    - *Indicio de calidad: JCR (2022) Q4; SJR (2022), Q2.*

El orden de los estudios realizados sigue una progresión que va desde la revisión de la literatura al análisis de los datos obtenidos en las sesiones realizadas. El primer estudio sobre el análisis bibliométrico, lo presentamos en el capítulo 3, "Antecedentes". En este estudio entregamos una visión general de la producción científica en el campo del pensamiento algebraico en educación infantil y primaria. Los estudios 2, 3 y 4 los detallamos en el quinto capítulo, "Resultados". En el estudio 2, titulado "Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización", nos enfocamos en la interacción pedagógica entre estudiantes y el investigador-docente y su impacto en la generalización de los estudiantes de segundo de primaria. En el estudio 3 “Justifications and mediations in the generalization process among fourth-Grade students”, nos centramos en las justificaciones y mediaciones realizadas en el proceso de generalización de estudiantes de cuarto de primaria. Por último, en el estudio 4, titulado "De lo concreto a lo abstracto: análisis del proceso de generalización", realizamos un análisis más profundo del proceso de generalización, considerando las distintas fases de razonamiento involucradas (abducción, inducción y generalización).

Formación de la Investigadora

En esta memoria describimos el trabajo de investigación desarrollado durante tres años. En este periodo, paralelamente a la realización de la Tesis Doctoral, participamos en distintos eventos destacados a nivel nacional e internacional en Didáctica de la Matemática. Además de la redacción de esta memoria de investigación, la doctoranda ha realizado dos estancias en centros de reconocido prestigio internacionales: en Tufts University (Estados Unidos) y en el Centro de Modelamiento Matemático (Chile). Con estas actividades dimos visibilidad y divulgación a la investigación realizada. A continuación, en la Tabla 0 detallamos lo relacionado con estas actividades y las contribuciones obtenidas de ellas:

Tabla 0

Participación en Actividades Científicas

Curso	Actividad científica	Estudio
2020/2021	• Presentación de comunicación y publicación en las actas del XXIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Valencia, España. Narváez, R y Cañadas, M.C. (2021). Mediaciones utilizadas con estudiantes de segundo y cuarto de primaria al realizar una tarea de generalización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp.465-472). Valencia: SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/23864/	1 y 2
2021/2022	• Estancia internacional de investigación para optar a la mención internacional del doctorado. Estancia realizada en la Universidad de Tufts, Massachusetts, Boston, EE. UU. (3 meses), desde el 1 de febrero hasta el 30 de abril. • Presentación de comunicación y publicación en las actas del XXV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Santiago de Compostela, España. Narváez, R., Brizuela, B. M., Torres, M. D. y Cañadas, M. C. (2022). Niveles de generalización entre estudiantes de cuarto de primaria durante una sesión de clases. En T. F. Blanco, C. Núñez-	1 y 3

Curso	Actividad científica	Estudio
	García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 411-419). SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/31568/	
2022/2023	• Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA), de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Madrid, España. • Presentación de taller en XVIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada, España. Anglada, M. L., Fuentes, S., Narváez, R., Pérez-Martos, M. C., Reyes-Escobar, M. y Pacheco, E. (2023). Enseñar matemáticas con sentido: Un viaje apasionante. CEAM. • Estancia internacional de investigación. Estancia realizada en la Universidad de Chile, Centro de Modelamiento Matemático, Santiago, Chile. 3 semanas, desde el 17 de julio hasta el 6 de agosto. • Presentación de comunicación y publicación de memoria de la VI Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM). Comunicación titulada De lo concreto a lo indeterminado. Un estudio de caso sobre el proceso de generalización en un contexto funcional. Lima, Perú. Narváez, R., Torres, M. D. y Cañadas, M. C. (2023). De lo concreto a lo indeterminado. Un estudio de caso sobre el proceso de generalización en un contexto funcional. En P. Scott, Y.	1 y 4

Curso	Actividad científica	Estudio
	Morales y Á. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas 2023* (pp. 406-412). CIAEM. http://funes.uniandes.edu.co/32663/ • Presentación de comunicación y publicación en las actas del XXVI Simposio de la Sociedad Española d Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Logroño, España. Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (2023). Análisis de la producción científica sobre pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 411-418). SEIEM. http://funes.uniandes.edu.co/32662/	

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

How early is too early for thinking algebraically?

(Mason, 2018, p. 329)

En este capítulo, presentamos los fundamentos de nuestra Tesis Doctoral, abordando desde el problema de investigación, justificaciones, preguntas y objetivo general. En un primer momento describimos el problema de investigación, detallando como surge el interés por el tema y el vacío que nos gustaría abordar desde esta investigación. Luego caracterizamos la justificación a través de tres perspectivas: (a) investigadora, (b) curricular y (c) personal. Finalmente, detallamos las preguntas de investigación y el objetivo general que guían nuestro trabajo.

1.1. Problema de Investigación

A lo largo de la historia, diversas investigaciones han mostrado las dificultades que los estudiantes encuentran al abordar conceptos algebraicos en secundaria (Ursini y Triguero, 2006; Usiskin, 1998). Como respuesta a este desafío, emergió la propuesta *early algebra*, una corriente curricular y un área de investigación que persigue la integración del pensamiento algebraico en el currículo de educación primaria, definido por Kaput (2000) como una "algebrización del currículo". Molina (2009) expresó que "esta propuesta persigue fomentar un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, en especial, facilitar el aprendizaje del álgebra" (p. 136). Esta integración del pensamiento algebraico en el currículo implica la introducción de enfoques algebraicos que abarcan desde la aritmética generalizada, el pensamiento funcional hasta el trabajo con patrones y ecuaciones (Kaput, 2000). Estos componentes del pensamiento algebraico ofrecen a los estudiantes una base sólida para abordar conceptos relacionados con el álgebra a lo largo de su formación académica, dándoles la posibilidad de tener éxito en sus experiencias matemáticas posteriores (Blanton et al., 2011). Esto no implica introducir de manera directa el contenido algebraico de la misma manera que en cursos superiores, sino utilizarlos como herramientas que ayuden a promover el pensamiento algebraico (Cañadas y Molina, 2016).

El pensamiento algebraico ha ocupado un lugar destacado en la investigación en Didáctica de la Matemática en las últimas décadas (Narváez et al., 2023) generando un valioso conocimiento sobre su integración en el entorno educativo. Distintos trabajos han mostrado que integrar el contenido y las prácticas algebraicas en primaria es beneficioso para los estudiantes (Blanton et al., 2015; Brizuela et al., 2013; Torres et al., 2021a). Además, las investigaciones realizadas han evidenciado que los estudiantes de los primeros cursos de educación primaria pueden abordar tareas que involucran funciones y llegar a generalizar (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2021b; Pinto y Cañadas, 2021). La generalización, una de las prácticas esenciales del pensamiento algebraico, se considera crucial en el contexto de las matemáticas y, en particular, en el pensamiento algebraico. Se trata de un proceso matemático fundamental que permite identificar patrones y regularidades en una situación y aplicarlos en nuevas situaciones (Cañadas et al., 2012; Mason, 1999). La generalización, definida como un medio ideal para observar y expresar una afirmación general (Mason et al., 1985) involucra la identificación de elementos comunes, la expansión del razonamiento más allá de casos particulares y la aplicación de lo aprendido en nuevas situaciones (Ellis, 2007; Kaput, 1999).

Sin embargo, sabemos que trabajar con pensamiento algebraico, específicamente con generalizaciones puede resultar desafiante, especialmente cuando los estudiantes carecen de instrucción previa sobre este tema matemático (Narváez y Cañadas, 2023). Como lo expresaron Chrysostomou y Christou (2019) aprender álgebra y trabajar el pensamiento algebraico es una tarea muy compleja. Aun cuando en currículos de diferentes países se ha incluido el pensamiento algebraico, siguen existiendo desafíos sobre cómo introducir este tipo de pensamiento en las aulas de educación primaria (Ayala-Altamirano et al., 2022b). De hecho, algunas investigaciones han evidenciado las dificultades que encuentran los estudiantes al abordar tareas relacionadas con el pensamiento funcional, particularmente en los primeros cursos de educación primaria cuando trabajan tareas de generalización (e.g., Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020). Para abordar estos desafíos, se propone la intervención activa del docente a través de procesos de mediación (Ureña et al., 2019). La importancia de la mediación se ha evidenciado en investigaciones previas, resaltando el papel crucial del docente o investigador-docente en guiar a los estudiantes hacia la generalización (Blanton et al., 2015; Hidalgo-Moncada, 2020; Narváez y Cañadas, 2023; Ureña et al., 2019).

Consideramos que, a pesar de los avances logrados en la comprensión de cómo los estudiantes de educación primaria generalizan, se requiere una mayor profundización en el análisis de este proceso, analizando el papel que tiene la mediación de los investigadores-docentes. Por este motivo, nuestra Tesis Doctoral se centra en analizar el proceso de generalización, considerando las fases de razonamiento involucradas, las justificaciones que se realizan al abordar tareas de generalización y el impacto que tienen las mediaciones en este proceso.

1.2. Justificación

Los alumnos suelen tener dificultades con algunos aspectos del pensamiento algebraico, no porque sean incapaces de hacerlo, sino porque necesitan experiencias frecuentes y tiempo para desarrollar importantes destrezas de pensamiento

(Blanton et al., 2011, p. 1)

En este apartado, presentamos una justificación que abarca tanto aspectos personales como curriculares, respaldados por la investigación existente en el campo. Con esta descripción buscamos establecer por qué la investigación que proponemos es necesaria y cómo contribuirá al conocimiento existente en el área de estudio.

1.2.1. Justificación Personal

Mi motivación para llevar a cabo esta Tesis Doctoral proviene de mi experiencia como Profesora de Educación General Básica en Chile. Durante seis años, enseñé matemáticas a estudiantes de primero hasta sexto básico (6-12 años). Durante este período, trabajé con el eje de patrones y álgebra, lo que me entregó una visión sobre las fortalezas y dificultades que mis estudiantes enfrentaban en esta área de aprendizaje.

Mi primer encuentro con el pensamiento algebraico se produjo mientras realizaba el Máster en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Específicamente, en la asignatura Pensamiento Numérico y Algebraico II donde tuve la oportunidad de conocer a las docentes María Cañadas (mi actual directora) y a Marta Molina. Durante este período, adquirí algunos conocimientos sobre el *early algebra* y pude observar el potencial de los estudiantes de primaria al trabajar con el pensamiento algebraico, incluso cuando no habían recibido instrucción formal sobre él. Observar cómo los estudiantes podían abordar conceptos destinados a cursos superiores me impulsó a profundizar en esta área de investigación.

Mi Trabajo Fin de Máster (Narváez, 2020) se centró en la generalización de estudiantes de segundo de primaria y las mediaciones realizadas por un investigador-docente que interactuó con ellos. Este trabajo incrementó mi interés por profundizar en este aspecto, siendo un punto de partida para mi Tesis Doctoral. Creo que seguir investigando y ahondar en el proceso de generalización en estudiantes de primaria tiene un potencial significativo para enriquecer la enseñanza de las matemáticas. Este trabajo puede servir como base para guiar el proceso de aprendizaje, especialmente en un momento en el que el sentido algebraico es un componente clave en los planes de estudio de distintos países.

1.2.2. Justificación Curricular

En la actualidad, diversos países han experimentado cambios significativos en sus currículos educativos con el fin de promover el desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras etapas de educación, abarcando la educación infantil y/o la educación primaria. Esta tendencia se ha reflejado en países como Australia, Chile, Estados Unidos (Merino, et al., 2013; Ministerio de Educación de Chile, 2012; Pincheira y Alsina, 2021). Más recientemente, en España, también se ha incorporado, a través del sentido algebraico (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022).

La evolución de los currículos en estos países se ha caracterizado por una introducción progresiva de contenidos de naturaleza algebraica en los programas de estudio durante las últimas dos décadas (Pincheira y Alsina, 2021). Este cambio curricular responde a la creciente consideración de la importancia del pensamiento algebraico como fundamento para el éxito en matemáticas en niveles superiores (Blanton et al. 2011).

Como referente internacional, Estados Unidos realizó la integración del pensamiento algebraico en su currículo desde la educación infantil en adelante (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Este documento destacó la necesidad de construir una base sólida de aprendizaje en el pensamiento algebraico desde edades tempranas, como preparación para el estudio del álgebra en niveles educativos superiores. Chile, país de origen de la investigadora, adoptó un enfoque similar al incorporar el eje de patrones y álgebra en su currículo educativo a partir del año 2012, un enfoque que se inicia desde la educación parvularia (4-6 años). Esta implementación se fundamenta en las Bases Curriculares para la Educación Básica (6 a 12 años) (MINEDUC, 2012). El eje de patrones y álgebra pretende que los estudiantes expliquen y describan relaciones de diversas naturalezas, ya sea entre números, formas, objetos o conceptos. Este enfoque se desarrolla a lo largo del currículo escolar en Chile, representando un 30.8% de los contenidos (Pincheira y Alsina, 2021). En cuanto a España, país en el que se desarrolla esta investigación, el currículo de educación primaria incluyó el sentido algebraico, incorporando contenidos relacionados con el "reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas" (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p. 116). Este reconocimiento marca un hito, ya que hasta el año 2022 no existía una mención explícita a la introducción de elementos algebraicos antes de la educación secundaria en el currículo español.

Los cambios curriculares han respondido a la creciente consideración de la importancia del pensamiento algebraico como fundamento para la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Por ello, esta Tesis Doctoral se centra en indagar y describir las acciones y respuestas de estudiantes de educación primaria ante tareas relacionadas con el pensamiento funcional. Específicamente, nos centraremos en estudiantes de segundo y cuarto de primaria. Buscamos aportar contribuciones significativas a la investigación actual sobre pensamiento algebraico y su enseñanza en educación primaria, aportando conocimientos que puedan apoyar a los educadores en esta transición curricular, entregándoles herramientas que puedan implementar en sus aulas.

1.2.3. Justificación Investigadora

El interés en investigar sobre el pensamiento algebraico en educación primaria ha experimentado un notable aumento en las últimas décadas, especialmente en relación con temas sobre pensamiento funcional (Cañadas et al. 2019; Chrysostomou y Christou, 2019; Narváez et al., 2023). En particular, las investigaciones que se centran en la generalización han ganado relevancia. Esto se refleja en los recientes trabajos que se han realizado sobre generalización en un contexto funcional con estudiantes de primaria (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2021b; Morales et al. 2018; Narváez y Cañadas, 2023; Pinto y Cañadas, 2021; Strachota, 2020; Torres et al., 2021b). Estos trabajos han proporcionado una visión detallada de cómo y en qué medida los estudiantes de distintos cursos de primaria generalizan en diferentes niveles de sofisticación a través de tareas con contextos funcionales.

La generalización es esencial para el pensamiento algebraico (e.g., Cooper y Warren, 2011; Kieran et al., 2016) siendo un proceso matemático fundamental que permite identificar patrones y regularidades en una situación y aplicarlos a nuevas situaciones (Cañadas et al., 2012a; Mason, 1999). Esta práctica algebraica es definida por Kaput (1999) como "elevar y comunicar el razonamiento a un nivel en el que el foco ya no está en un caso particular, sino más bien en los patrones y relaciones de esos casos particulares" (p. 137).

Se han realizado distintas investigaciones sobre la generalización de estudiantes de primaria, algunas de las cuales han planteado interrogantes y líneas abiertas que consideramos pertinentes explorar en nuestra investigación. Un ejemplo es lo planteado por Chrysostomou y Christou (2019) quienes resaltaron la importancia de analizar el impacto que las intervenciones de álgebra temprana pueden tener en los estudiantes de diferentes niveles educativos, así como los tipos de intervenciones más adecuadas para trabajar con estudiantes de niveles inferiores. Ureña et al. (2019) sugirieron la necesidad de investigar cómo los estudiantes de primaria generalizan y progresan en la formulación de representaciones de generalizaciones en el contexto de una clase, lo que contribuiría a mejorar la comprensión de la relación entre la mediación y la generalización. Por su parte Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) al observar la intervención del entrevistador en el proceso de generalización de los estudiantes, considerando que una investigación futura podría incluir preguntas relacionadas tanto con la forma directa como inversa de la función, lo cual permitiría una comparación de resultados en términos de errores y estrategias de intervención. Strachota (2020) formuló la pregunta sobre cómo los estudiantes pueden promover la generalización entre ellos. Además, sugirió que los investigadores podrían investigar sobre las estrategias que los profesores emplean al formular preguntas y guiar a los estudiantes en actividades que fortalezcan y fomenten la participación en las tareas de generalización. En el trabajo realizado por Chimoni et al. (2021) señalaron la necesidad de investigar con mayor profundidad el papel de los docentes en la implementación de tareas que involucraban funciones y las características cualitativas del comportamiento de los estudiantes durante su participación en este tipo de intervenciones. Finalmente, Torres et al. (2021b) expresaron que sería valioso analizar las diferentes fases de razonamiento (abducción, inducción y generalización) en estudiantes de distintos cursos de educación primaria en un contexto de generalización.

Estos antecedentes nos han llevado a considerar la importancia de la mediación docente, el impacto de las intervenciones de álgebra temprana en estudiantes de distintos niveles educativos y la relación entre las distintas fases de razonamiento, como la abducción, inducción y generalización, en el proceso de generalización. Por lo tanto, nuestro interés desde la investigación se centra en describir lo que ocurre con estudiantes de primaria que no han tenido experiencia previa con tareas de generalización. Queremos ofrecer una mirada social del proceso de generalización, destacando la influencia de la mediación y justificación en el desarrollo del pensamiento funcional. Por último, una de las motivaciones fundamentales que impulsan nuestra investigación se originó a partir de una de las líneas de investigación abiertas en la Tesis Doctoral de Ureña (2021). En dicha tesis, se planteaba la necesidad de ampliar la investigación sobre la mediación docente en contextos funcionales, cuestionando cómo las mediaciones identificadas pueden transformarse en acciones docentes para situaciones reales de enseñanza y cuáles podrían ser sus implicaciones en el proceso de generalización.

1.3. Preguntas y Objetivo General de Investigación

Como hemos descrito en los apartados anteriores, existe un creciente interés en la investigación sobre el pensamiento algebraico en educación primaria, especialmente en lo que respecta al pensamiento funcional. Sin embargo, este interés ha dejado una serie de interrogantes y líneas de investigación abiertas que merecen una atención más detallada. Nos enfrentamos a cuestionamientos sobre el impacto de las intervenciones en álgebra temprana con estudiantes de diferentes niveles educativos, la evolución de las fases de razonamiento durante tareas de generalización, el papel de los docentes en la implementación de tareas funcionales y la influencia de la interacción en el proceso de generalización. Estas inquietudes nos impulsan a plantear preguntas de investigación, que nos permitirán explorar y comprender en profundidad el proceso de generalización en estudiantes de educación primaria y las mediaciones que pueden influir en dicho proceso.

- ¿De qué manera los estudiantes de los primeros cursos[3] de educación primaria llevan a cabo el proceso de generalización al abordar tareas relacionadas con el pensamiento funcional?
- ¿Qué mediaciones por parte del investigador-docente ayudan en el proceso de generalización?
- ¿Cuál es la relación entre las mediaciones del investigador-docente y la generalización de los estudiantes?
- ¿Los estudiantes justifican al resolver tareas de generalización en un contexto funcional? En tal caso, ¿cómo se relacionan estas justificaciones con su proceso de generalización?

[3] Cuando hablamos de los primeros cursos de educación primaria, nos referimos a los dos primeros ciclos (desde primero a cuarto de primaria).

- ¿Por qué fases de razonamiento (abducción, inducción y generalización) pasan los estudiantes de primaria al trabajar con tareas de generalización que involucran funciones?
- ¿Cómo influyen las intervenciones sobre pensamiento algebraico en estudiantes de educación primaria en su capacidad de generalización?

Por lo expuesto, para esta Tesis Doctoral planteamos el siguiente objetivo general de investigación “Analizar y describir la generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria en un contexto funcional del pensamiento algebraico y las mediaciones que se emplean”.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo, exploramos los fundamentos teóricos que sustentan este trabajo. Iniciamos con una descripción sobre el pensamiento algebraico, incluyendo sus prácticas y componentes. Posteriormente, describimos lo relacionado con pensamiento funcional, componente del pensamiento algebraico en el que centramos nuestra investigación. Por último, caracterizamos la noción de mediación como un elemento esencial en nuestra investigación.

2.1. Pensamiento Algebraico

En el trabajo realizado por Carraher y Schliemann (2019) plantearon la interrogante ¿por qué integrar el algebra en el currículum de educación primaria? A primera vista, esta inclusión puede sorprender, dado que los estudiantes a menudo se encuentran con dificultades al abordar conceptos algebraicos en cursos superiores. Sin embargo, esta cuestión ha sido objeto de debate durante décadas, llegando un consenso en la incorporación temprana del álgebra, a través de la propuesta conocida como *early algebra*. Esta propuesta promueve la introducción de modos de pensamiento algebraico en las etapas iniciales de la educación. Esto se conoce como la "algebrización del currículo" a través de la reestructuración curricular, cambios en la práctica y evaluación en el aula y cambios en la formación docente (Kaput, 2000; 2008). El objetivo de esta propuesta es fomentar un mayor nivel de abstracción en el pensamiento de los estudiantes y una comprensión más profunda de las matemáticas en etapas posteriores de su educación. Este enfoque se alinea con la idea de integrar el pensamiento algebraico de manera continua a lo largo de la escolaridad, lo que facilitaría una comprensión más sólida de las matemáticas en general (Cai y Knuth, 2011; Kaput, 2000, 2008; Molina, 2008).

Definir pensamiento algebraico no es sencillo, es más, no existen acuerdos sobre el uso y significado de diferentes términos y la naturaleza e importancia del *early algebra* (Cañadas et al., 2012b; Kaput, 2008). Algunos autores han propuesto distintas definiciones de este tipo de pensamiento matemático. Blanton y Kaput (2004) definieron el pensamiento algebraico como "un hábito mental que impregna todas las matemáticas y que implica la capacidad de los estudiantes para construir, justificar y expresar conjeturas sobre la estructura y las relaciones matemáticas” (p. 142). Blanton y Kaput (2005) lo han definido como “un proceso en el que los estudiantes generalizan ideas matemáticas a partir de un conjunto de casos particulares establece esas generalizaciones a través del discurso de la argumentación y las expresan de maneras cada vez más formales y apropiadas para su edad” (p. 99). Por su parte, Kieran (1996) expresó que el pensamiento se entiende como “una aproximación a situaciones cuantitativas que enfatiza los aspectos de la relación general con expresiones que no son necesariamente propias del simbolismo algebraico” (p. 275).

El pensamiento algebraico, tal como lo expresó Kieran (2004) engloba el desarrollo de habilidades cognitivas aplicables en una variedad de contextos, permitiendo a los estudiantes analizar relaciones entre cantidades, identificar estructuras matemáticas subyacentes, abordar cambios en situaciones cuantitativas, realizar generalizaciones basadas en patrones y regularidades, resolver problemas matemáticos, modelar situaciones del mundo real, respaldar argumentos con justificaciones sólidas, demostrar conceptos matemáticos y prever resultados futuros. Carraher y Schliemann (2019) expresaron que el pensamiento algebraico también suele implicar la reflexión sobre variables, posiblemente de forma implícita. Para Radford (2011) “el pensamiento algebraico temprano se basa en las posibilidades del alumnado de comprender patrones en formas co-variantes desarrolladas culturalmente y utilizarlos para tratar cuestiones de términos remotos y no específicos” (p. 23). Además, este autor expresó que “el pensamiento algebraico no se trata de usar o no notaciones, sino de razonar de ciertas maneras. Lo que caracteriza al pensamiento como algebraico es que se ocupa de cantidades indeterminadas concebidas de forma analítica” (p. 310). Con base en lo anterior, consideramos que el pensamiento algebraico se fundamenta en la capacidad de analizar relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar cambios, generalizar, resolver problemas, justificar, demostrar y predecir en una variedad de contextos matemáticos. Los estudiantes pueden trabajar con cantidades desconocidas como si estas fueran conocidas, lo que les permite explorar y comprender conceptos matemáticos en profundidad. Es importante destacar que el uso de simbolismo algebraico no es un requisito esencial para hablar de pensamiento algebraico, ya que este proceso puede manifestarse sin notación algebraica (Kieran 2006).

Kaput (2008) describió que los estudiantes identifican y expresan generalizaciones usando medios propios, aunque luego son guiados al uso de representaciones convencionales (por ejemplo, tablas, gráficos, lenguaje natural, etc.). Por lo mismo, como lo expresaron Pinto et al. (2023) “la expresión de la generalización tendrá distintos grados de sofisticación según las representaciones empleadas” (p. 151). Cañadas (2016) sostuvo que el pensamiento algebraico abarca las formas de actuar, razonar y comunicar conceptos relacionados con el álgebra, lo que facilita el desarrollo de diversas habilidades en los estudiantes, lo que, a su vez, mejora su comprensión de los componentes algebraicos.

Kaput (2008) destacó que el corazón del pensamiento algebraico se basa en procesos de simbolización complejos que son esenciales para llevar a cabo la generalización y el razonamiento basado en generalizaciones. Este autor expresó que existen dos aspectos centrales del pensamiento algebraico: (a) hacer y expresar generalizaciones en sistemas de símbolos cada vez más formales y convencionales, y (b) razonar con formas simbólicas. Así mismo, este autor indicó que estos aspectos abarcan al álgebra como el estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones; como estudio de funciones, relaciones y variación articular; y como la aplicación de un grupo de lenguajes para expresar y el razonamiento sobre situaciones que están siendo modeladas. Según Radford (2014) existen tres condiciones básicas que caracterizan el pensamiento algebraico: (a) la indeterminación, que implica trabajar con cantidades desconocidas; (b) la denotación, que significa que las cantidades desconocidas no se limitan únicamente a símbolos alfanuméricos; y (c) la analiticidad, que conlleva la realización de operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación, división) con cantidades desconocidas como si fueran conocidas. Estas condiciones fundamentales contribuyen a la esencia del pensamiento algebraico. Por ello consideramos que el pensamiento algebraico implica identificar patrones o reglas matemáticas más amplias a partir de casos específicos y razonar sobre estas generalizaciones, lo que permite comprender y aplicar estas reglas en diversas situaciones matemáticas.

2.2. Prácticas Algebraicas

Las prácticas matemáticas suelen considerarse como modos de pensamiento que van más allá de las materias específicas y las etapas educativas (Brizuela, 2023). Blanton et al. (2019) expresaron que estas prácticas son procesos mediados socialmente que refinan el alcance de la generalización. En relación con el pensamiento algebraico se identifican cuatro prácticas esenciales (a) generalizar; (b) representar; (c) justificar y (d) razonar con estructuras y relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011; 2018; 2019; Kaput, 2008). Estas cuatro prácticas están incorporadas en los diferentes componentes del pensamiento algebraico.

2.2.1. Generalización

"La generalización es el corazón de las matemáticas y aparece de muchas formas. Si los profesores no son conscientes de su presencia y no tienen la costumbre de hacer que los estudiantes trabajen para expresar sus propias generalizaciones, entonces el pensamiento matemático no está teniendo lugar (Mason, 1996, p. 65)

La generalización desempeña un papel esencial en el pensamiento algebraico. Se considera una habilidad cognitiva fundamental desde las edades más tempranas (Kaput, 2008; Mason, 2008, 2018; Pólya, 1945; Torres et al., 2021b). Es el corazón del razonamiento algebraico (Cooper y Warren, 2011; Kaput, 2008) y el núcleo mismo de la actividad matemática (Mason, 1996).

La generalización es un proceso mediante el cual se transita desde la observación de casos particulares hacia la formulación de conjeturas que abarcan una amplia clase de casos. En otras palabras, la generalización implica reconocer patrones subyacentes, incluso si no se pueden expresar verbalmente de inmediato (Mason et al., 2010). "Es una forma crítica de razonamiento y sentido debido a que requiere que los estudiantes comprendan una situación, la conecten con su conocimiento existente y saquen conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas" (Brizuela, 2023, p. 44). Es pasar de lo particular a lo general y ver lo general en lo particular (Mason, 1996).

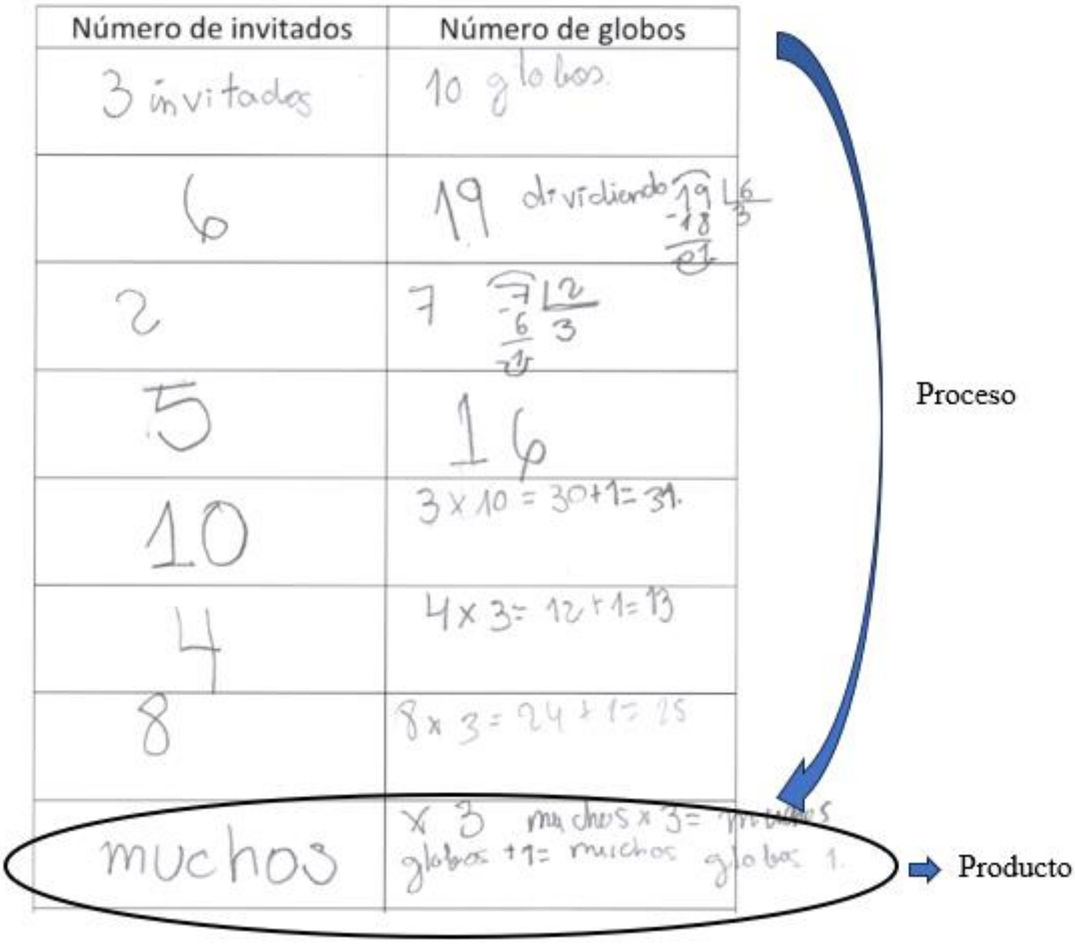
Kaput (1999) describió la generalización como "elevar el razonamiento o la comunicación a un nivel en el que el foco ya no está en los casos o situaciones en sí mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y las relaciones a través y entre ellos" (p. 137). Ureña et al. (2023) describieron que generalizar consiste en reconocer y representar regularidades y generar nuevos casos particulares. "La generalización implica la extensión, a otros casos, de la regularidad reconocida en una tarea que implica el establecimiento de una relación entre cantidades, integrando la representación externa de esa regularidad a través de una regla general" (p. 3). Generalizar no se limita a una mera identificación de patrones, sino que también involucra la capacidad de reconocer qué aspectos de una situación matemática pueden variar y cuáles permanecen constantes (Mason, 2017).

La generalización implica distintos aspectos fundamentales, como identificar similitudes entre casos específicos, extender el razonamiento más allá del conjunto inicial y realizar conclusiones más amplias a partir de situaciones particulares (Kaput, 1999; Stephens et al., 2017). Para Cañadas y Castro (2007) la generalización se produce cuando se expresan conjeturas que abarcan todos los casos de una clase específica, implicando así el razonamiento más allá de situaciones particulares para alcanzar conclusiones más amplias y generales. En el contexto del pensamiento funcional y algebraico, la generalización se convierte en una herramienta poderosa que permitir a los estudiantes trascender las particularidades asociadas a cálculos aritméticos y enfocarse en identificar la estructura y las relaciones matemáticas subyacentes en diversas situaciones (Blanton et al., 2011).

Consideramos la generalización como proceso y como producto (Ellis, 2007). Mason et al. (2010) describió que el proceso de generalización en el pensamiento matemático es una habilidad esencial que involucra varios pasos fundamentales. Cañadas y Castro (2007) describieron que el proceso de generalización comienza con la observación de múltiples ejemplos particulares y la búsqueda de características comunes entre ellos. En este punto, se trata de articular la sensación de un patrón subyacente, es decir, se intenta detectar una regularidad en los datos observados. Esta detección del patrón lleva a la formulación de una conjetura, que representa lo que parece probable que sea cierto en función de las observaciones realizadas. Respecto al producto de la generalización, es entendida como la forma en que se expresa la generalidad, es decir, es el resultado del proceso de generalización (Ellis, 2007). A continuación, presentamos un ejemplo que ilustra tanto el proceso como el producto de la generalización. En la Figura 2-1 mostramos las respuestas de un estudiante durante una entrevista individual donde la tarea abordaba la función *y=3x+1*. En esta instancia, observamos el avance del estudiante al responder a diferentes casos (proceso), culminando en una respuesta general para la tarea planteada (producto). Para confirmar esta generalización, la investigadora-docente le preguntó al estudiante cómo podría determinar la cantidad necesaria para el caso de infinitos invitados, a lo que el estudiante respondió “pues multiplicando por tres infinitos por tres es igual a infinito…entonces infinito globos, más uno, infinitos globos uno”.

Figura 2-1

Ejemplo de Generalización como Proceso y Producto



La generalización no se limita a identificar una conjetura; también implica comprender por qué esta conjetura es probable que sea cierta. Esto se logra al justificar la conjetura, es decir, al proporcionar razones o argumentos que respalden la idea de que el patrón observado realmente existe y se aplica de manera consistente en una variedad de situaciones. La justificación es un paso crucial para validar la generalización y demostrar su fiabilidad y aplicabilidad. Además de la conjetura y la justificación, la generalización también conlleva la exploración de dónde es probable que la conjetura sea cierta. Esto significa que, a medida que se generaliza, surgen nuevas preguntas y se buscan configuraciones más generales en las que la conjetura pueda aplicarse. En este sentido, la generalización conduce a la formulación de otras preguntas matemáticas que permiten extender el alcance de la conjetura y explorar sus límites. Cuando hablamos de conjetura nos referimos a "una afirmación que parece razonable, pero cuya verdad no ha sido establecida" (Mason et al., 2010). En otras palabras, una conjetura es una proposición que se formula basada en observaciones o razonamientos, pero que aún no ha sido respaldada de manera convincente ni se ha demostrado de manera definitiva. Aunque no se puede afirmar con certeza que una conjetura sea verdadera, tampoco se ha encontrado evidencia que la refute o contradiga mediante ejemplos específicos o consecuencias falsas. Por lo tanto, una conjetura representa una suposición inicial que requiere una mayor investigación, análisis o pruebas para determinar su validez. Sin embargo, "las conjeturas a pequeña escala son el núcleo del pensamiento matemático" (Mason et al., 2010, p. 59). Las generalizaciones matemáticas resultan de actividades constructivas que apuntan a pasar una relación matemática de un conjunto dado a un nuevo conjunto del cual el conjunto original es un subconjunto, quizás ajustando la relación para acomodar el conjunto más grande (Yao, 2022).

En la literatura existente se han distinguido distintos tipos de generalización. Dörfler (1991) describió la generalización empírica, que implica identificar cualidades o propiedades comunes entre objetos y verificar su presencia en dichos objetos. Mason (1996) propuso la noción de generalización en acto, que se evidencia cuando se percibe una regularidad, pero no se logra expresar. Radford (2010) propuso dos tipos de generalizaciones; la generalización algebraica y la generalización aritmética. La generalización aritmética se relaciona con la representación numérica, donde el patrón identificado proporciona respuestas a casos particulares, pero no se extiende a lo indeterminado. La generalización algebraica consiste en obtener una expresión que se aplique a cualquier caso, permitiendo la construcción de expresiones que abarquen lo indeterminado e identifiquen los términos de una secuencia. Además caracterizó tres niveles en la generalización algebraica: el nivel factual, que implica generalizar las acciones numéricas mediante un esquema numérico y deducir lo indeterminado a partir de las acciones de los estudiantes; el nivel contextual, que generaliza tanto las acciones numéricas como los objetos de las acciones, explicando la regularidad para cualquier término dentro de la secuencia; y el nivel simbólico, que trasciende los objetos o números específicos en un contexto dado y se expresa en términos generales (alfanuméricos), abarcando todos los elementos de la secuencia o patrón. Además, Mason et al. (2010) distinguieron dos tipos de generalización: la empírica y la estructural. La generalización empírica se materializa al analizar múltiples casos o instancias y buscar similitudes entre ellos, lo que conduce a una conjetura sobre una propiedad general. Sin embargo, esta conjetura requiere una justificación posterior en función de la estructura subyacente. Por otro lado, la generalización estructural se origina al reconocer relaciones en uno o muy pocos casos y tratar estas relaciones como propiedades generales, lo que también resulta en una conjetura que necesita ser respaldada por la estructura subyacente. La generalización empírica guarda similitudes con la inducción científica, pero en matemáticas, la generalización estructural va más allá y permite la justificación de conjeturas mediante razonamiento lógico basado en propiedades acordadas. Por último, Pinto y Cañadas (2017) distinguieron entre la generalización espontanea e inducida. La generalización espontánea se refiere a la capacidad de los estudiantes para hacer inferencias generales o encontrar patrones sin una instrucción explícita para hacerlo y suelen darse cuando se plantean casos particulares. Por otro lado, la generalización inducida ocurre cuando se solicita específicamente a los estudiantes que realicen generalizaciones.

2.2.2. Justificación

Los términos argumentación y justificación son utilizados en muchas ocasiones de forma similar. La argumentación matemática es el proceso de hacer afirmaciones matemáticas y proporcionar evidencia que las respalde (Bieda et al., 2022). La justificación matemática es un proceso más específico dentro de la argumentación, en el cual se respaldan las afirmaciones y elecciones matemáticas al resolver problemas o explicar por qué una afirmación o respuesta tiene sentido. En este sentido, la justificación matemática se relaciona con buscar y explicar el porqué de un fenómeno o una afirmación. Cuando se justifica una afirmación matemática, se busca identificar las razones subyacentes que respaldan la veracidad de las conjeturas realizadas (Bieda et al., 2022; Mason et al. 2010). En nuestra Tesis Doctoral utilizamos el concepto de justificación, puesto que los argumentos forman parte del proceso de justificación (Pinto et al., 2023). Además, la justificación es una práctica algebraica y una componente del razonamiento matemático (Blanton et al., 2011; Thanheiser y Sugimoto, 2022).

La justificación se define como "un argumento que demuestra (o refuta) la verdad de una afirmación que utiliza declaraciones aceptadas y formas matemáticas de razonamiento" (Staples et al., 2012, p. 448). Para Ayala-Altamirano y Molina (2021a) la justificación es "un proceso social en el que se explica, verifica y sistematiza el conocimiento matemático a partir de ideas, definiciones y propiedades matemáticas" (p. 361). La justificación en el contexto matemático es un proceso fundamental que involucra respaldar y explicar las afirmaciones y elecciones matemáticas realizadas durante la resolución de problemas o la formulación de conjeturas (Bieda y Staples, 2020; Staples et al., 2012). La justificación es una práctica fundamental en las matemáticas que desempeña un papel esencial en el aprendizaje y la competencia de los estudiantes en esta disciplina (Staples et al., 2012). Se trata de un medio mediante el cual los estudiantes no solo mejoran su comprensión de las matemáticas, sino también su capacidad para aplicar y desarrollar conocimientos matemáticos, convirtiéndose en una herramienta clave tanto para el aprendizaje como para la práctica de las matemáticas.

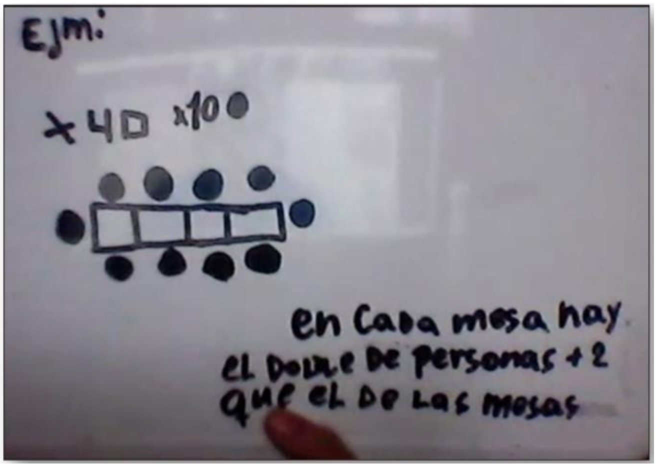
La justificación no solo es una práctica matemática esencial, sino que también tiene numerosos beneficios en el desarrollo de habilidades matemáticas. Thanheiser y Sugimoto (2022) destacaron que la justificación permite a los estudiantes explicar su razonamiento de manera pública, lo que fomenta el análisis y la discusión en el aula. A medida que los estudiantes practican la justificación, mejoran sus habilidades de razonamiento matemático con el tiempo. Además, la justificación contribuye a una mayor comprensión conceptual y procedimental de los estudiantes, lo que enriquece su comprensión global de las matemáticas. "Un enfoque en la justificación puede ayudar a los estudiantes no solo a establecer una mejor convicción en sus generalizaciones, sino también a desarrollar generalizaciones posteriores más poderosas" (Ellis, 2007, p. 149).

Por esta razón, la justificación se considera tanto un proceso cognitivo como social (Chua, 2017). Determinar la verdad a través de la justificación se presenta como un proceso cognitivo, mientras que persuadir a otros acerca de esa verdad se configura como un proceso social.

Justificar en el contexto del pensamiento algebraico implica un proceso de interacción social en el aula que facilita el desarrollo de la comprensión y el conocimiento de los contenidos matemáticos por parte de los niños. Además, constituye una herramienta fundamental para acceder a diversas formas de razonamiento matemático (Thanheiser y Sugimoto, 2022), lo que permite una mejor comprensión del problema, las estructura y las relaciones (Pinto et al., 2023). En otras palabras, cuando se trata de justificar generalizaciones, los estudiantes deben analizar y explicar la veracidad de una conjetura o afirmación matemática. Esta actividad no solo les ayuda a profundizar en su comprensión, sino que también promueve un razonamiento más sólido y una mayor capacidad para respaldar sus argumentos de manera lógica y coherente. En la Figura 2-2 presentamos un ejemplo de justificación en el que el estudiante, al abordar una tarea funcional (*y=2x+2*), no solo determina la cantidad de invitados para el caso de cuatro mesas, sino que también justifica que "en cada mesa hay el doble de personas más dos".

Figura 2-3

Ejemplo de Justificación



Nota. Figura extraída de Pinto et al. (2023, p. 164)

Como lo expresó Lannin (2005) “la justificación se convierte en un componente crítico del proceso de generalización” (p. 232). Las justificaciones de los estudiantes brindan una ventana para ver el grado en que ven la naturaleza amplia de sus generalizaciones y su visión de lo que consideran. considerarse una justificación socialmente aceptada (Lins, 2001). Staples (2014) abordó la justificación desde una doble perspectiva: como un proceso y como un producto. En este sentido, la justificación se entiende como el proceso de construir un argumento respaldado por herramientas disciplinarias que demuestran la validez o falsedad de una afirmación. Este proceso se entiende como esencial para el pensamiento matemático y está vinculado a la generalización (Lannin, 2005). La justificación abarca la necesidad de probar o refutar y, lo que es más importante, explicar “por qué” una afirmación o respuesta es válida en el contexto matemático. De acuerdo con Bieda y Staples (2020) la justificación matemática se puede definir como “el proceso de respaldar sus afirmaciones y elecciones matemáticas al resolver problemas o explicar por qué su afirmación o respuesta tiene sentido” (p. 103). Esto implica no solo respaldar respuestas correctas, sino también explicar de manera coherente las decisiones tomadas en la resolución de los problemas matemáticos. “La generalización no puede separarse de la justificación” (Lannin, 2005, p. 235).

La justificación es un vehículo para mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes y para apoyarlos a explorar por qué las cosas funcionan en matemáticas y explicar sus desacuerdos de manera significativa Al justificar un modelo algebraico, un argumento se considera aceptable cuando conecta la generalización con una relación general que existe en el contexto del problema (Hanna, 2000; Lennin, 2005).

Lannin (2005) describió distintos niveles de justificación que pueden ser observados y analizados de las respuestas que entregan los estudiantes:

- Nivel 0: Sin justificación Las respuestas no abordan la justificación.
- Nivel 1: Apelación a una autoridad externa Se hace referencia a la exactitud declarada por algún otro individuo o material de referencia.
- Nivel 2: Evidencia empírica La justificación se proporciona a través de la exactitud de ejemplos particulares.

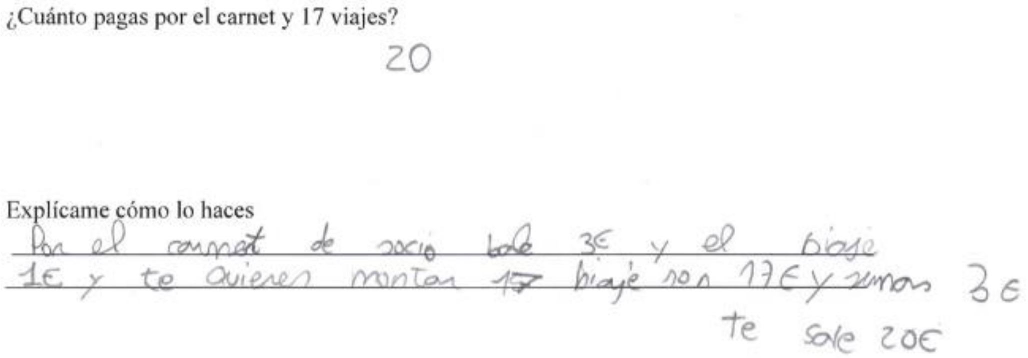
- Nivel 3: Ejemplo genérico La justificación deductiva se expresa en un caso particular.
- Nivel 4: Justificación deductiva La validez se da a través de un argumento deductivo que es independiente de casos particulares.

Por su parte, Thanheiser y Sugimoto (2022) describieron tres tipos de justificación:

- Justificaciones de validación: Estas justificaciones se emplean cuando se solicita a los estudiantes que proporcionen evidencia que respalde o refute una afirmación específica. En la Figura 2-3, presentamos un ejemplo en el que un estudiante, al abordar una tarea relacionada con un contexto relacionado a un parque de atracciones (*y=x+3*), justificó su respuesta expresando que al sumar los valores del carnet de socio y los viajes obtenía el total a pagar.

Figura 2-3

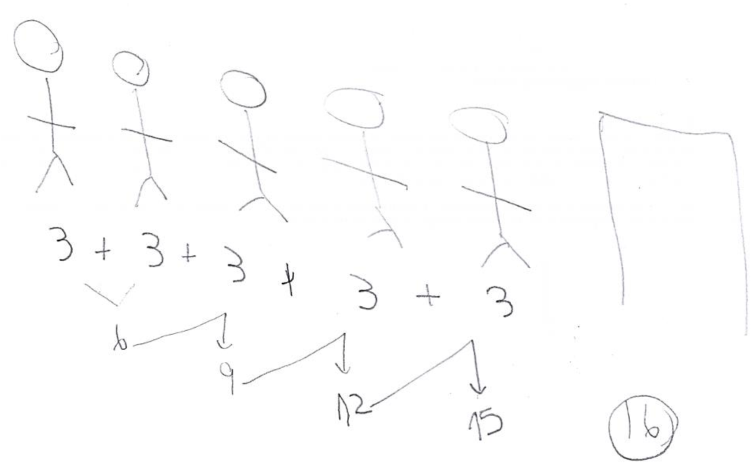
Ejemplo de Justificación por Validación



- Justificaciones experimentales: Las justificaciones experienciales a menudo se utilizan para explicar afirmaciones matemáticas mediante el uso de ejemplos concretos o elementos visuales específicos. En la Figura 2-4, presentamos un ejemplo que caracteriza esta forma de justificación. En este caso un estudiante debía responder sobre la cantidad de globos necesarios para cinco invitados (*y=3x+1*). Para justificar su respuesta, utilizó dibujos de los invitados y la puerta, asignando a cada uno la cantidad de globos correspondiente. Además, detalló la operación matemática empleada para obtener el total.

Figura 2-4

Ejemplo de Justificación Experimental

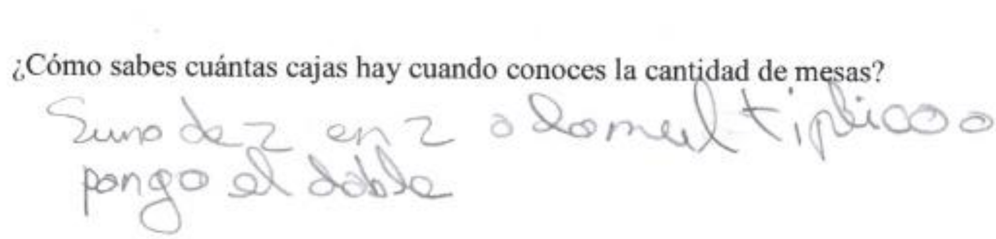


Nota. Figura extraída de Ayala-Altamirano y Molina (2021b, p. 15)

- Justificaciones de elaboración: En el caso de las justificaciones de elaboración, los estudiantes explican de manera clara la estrategia o método que han empleado al construir una afirmación matemática. Este enfoque se centra en el proceso de construcción de la afirmación y cómo los estudiantes llegaron a su respuesta. En la figura 2-5 detallamos una justificación realizada por un estudiante, donde al trabajar con una tarea que abordaba la función *y=2x*, expresó que para saber la cantidad de cajas que se necesitaba podía sumar de dos en dos o multiplicar, o poner el doble.

Figura 2-5

Ejemplo de Justificación por Elaboración



2.2.3. Razonamiento

El razonamiento se refiere a la acción de ordenar y relacionar ideas para llegar a una conclusión (Real Academia Española, 2023, definición 2). En el contexto matemático, implica dar razones para explicar un hecho o fenómeno matemático, lo que constituye una parte fundamental del pensamiento algebraico (Cañadas, 2007; Salgado y Salinas, 2012). El razonamiento es intrínseco al pensamiento humano, se manifiesta a través de procesos de inferencia explícita, así como en actos de exploración y descubrimiento (Cañadas y Castro, 2004).

En el pensamiento algebraico, razonar significa abordar las generalizaciones como objetos independientes y aplicarlas en diversas situaciones matemáticas (Blanton et al., 2018). Este proceso no solo implica comprender la lógica detrás de una generalización, sino también ser capaz de transferir ese conocimiento y aplicarlo de manera efectiva en situaciones diversas. Esta práctica del pensamiento algebraico quizás es la más compleja de las cuatro prácticas, la cual implica actuar sobre, o razonar con generalizaciones como objetos en sí mismos (Brizuela, 2023).

El razonamiento como práctica algebraica es esencial para la resolución de problemas y la toma de decisiones basadas en relaciones y estructuras matemáticas, lo que lo convierte en una habilidad fundamental en matemática. A medida que los estudiantes avanzan en su educación matemática, desarrollan gradualmente el razonamiento algebraico, abordando generalizaciones como objetos matemáticos en nuevas situaciones y demostrando su capacidad de razonar inductivamente (Blanton et al., 2019; Gaita y Wilhelmi, 2019). Este proceso se considera un camino de acceso al conocimiento matemático (Castro et al., 2010).

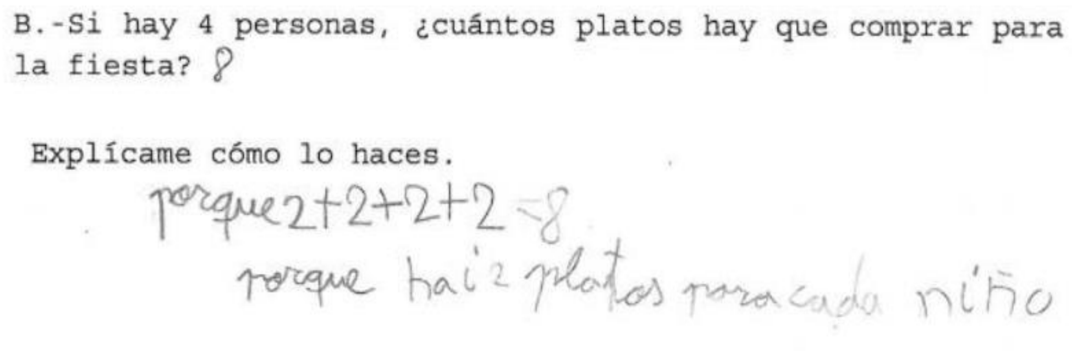
2.2.3.1. Fases de Razonamiento

Las fases de razonamiento (abductivo, inductivo y deductivo) desempeñan un papel fundamental en la investigación de patrones y en la resolución de problemas (Ellis, 2007; Mata-Pereira y Da Ponte, 2017). Estos enfoques de razonamiento contribuyen a la comprensión de las regularidades y estructuras matemáticas subyacentes en una variedad de contextos algebraicos. En relación con el concepto de estructura, podemos decir que se relaciona con la organización de los valores de las variables involucradas y la expresión de la regularidad (Pinto y Cañadas, 2017). Para Molina (2010) la estructura es el conjunto de términos que componen la expresión, los signos que la componen y las relaciones que existen entre ellos.

El razonamiento abductivo, según Peirce (1958), desempeña un papel fundamental en la formulación de hipótesis y en la explicación de observaciones iniciales. Esta etapa de abducción involucra tanto la creación como la selección de hipótesis plausibles, como señala Aliseda (2000). En este proceso, se exploran reglas y explicaciones posibles que pueden arrojar luz sobre los fenómenos observados (Rivera, 2010). En esta fase abductiva, previa a la generalización, se van descubriendo las primeras regularidades, tomando como válida una estructura, que deberá validarse (Torres, 2022). En el siguiente ejemplo (ver Figura 2-6) observamos como un estudiante al trabajar con los primeros casos particulares de la tarea ($y=2x$), expresó una conjetura para el caso de cuatro personas, expresando que hay que sumar cuatro veces dos, "porque hay dos platos por cada niño".

Figura 2-6

Ejemplo de Respuesta en Fase Abductiva


B.-Si hay 4 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? 8

Explícame cómo lo haces.

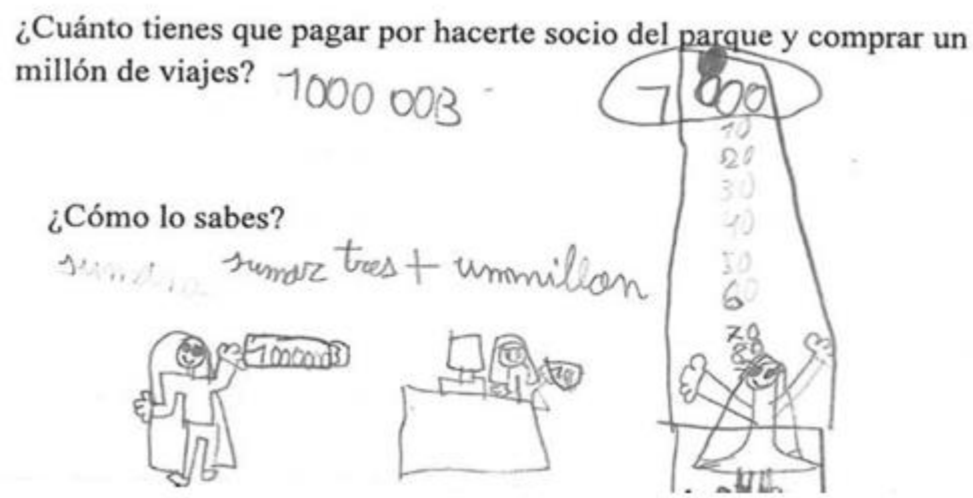
porque 2+2+2+2 = 8
porque hai 2 platos para cada niño

Nota. Figura extraída de Torres et al. (2019, p. 579).

La inducción se enfoca en confirmar la validez de estas reglas y extender los patrones establecidos para comprender lo desconocido. Cuando hablamos de inducción, nos referimos a un proceso de prueba de hipótesis que se basa en la selección de pruebas adecuadas y la comprobación de predicciones para evaluar la validez de una hipótesis (Peirce, 1958). El razonamiento inductivo se caracteriza por la producción de generalizaciones a partir de casos iniciales (Cañadas et al., 2009). Además, el razonamiento inductivo fomenta la generación de nuevas hipótesis, lo que ayuda a la verificación de hipótesis (Rivera y Becker, 2007). La inducción se considera una herramienta poderosa para la construcción de conocimiento, y su potencial radica en la presencia de la generalización como uno de sus componentes. Esta forma de razonamiento se introduce tempranamente en la educación para ayudar a los niños a adquirir conocimientos (Torres et al., 2021b). En la Figura 2-7 detallamos un ejemplo donde un estudiante da una respuesta a un caso lejano (1.000.000 de viajes) para la tarea funcional ($y=x+3$). El estudiante expresó que "porque siempre tengo que sumar 3 más un número" (Torres et al. 2019, p. 579). En este ejemplo observamos que el estudiante validó y confirmó su conjetura, dando respuesta al caso planteado.

Figura 2-7

Ejemplo de Respuesta en Fase Inductiva



Nota. Figura extraída de Torres et al. (2019, p. 579).

En el proceso de generalización, el razonamiento inductivo desempeña un papel crucial al comenzar a trabajar con casos particulares y derivar generalizaciones a partir de ellos (Cañadas y Castro, 2007). Pólya (1967) describió cuatro etapas de un proceso de razonamiento inductivo: (a) observación de casos particulares, (b) formulación de conjeturas basadas en casos particulares anteriores, (c) generalización y (d) verificación de conjeturas con nuevos casos particulares. Por su parte, Cañadas y Castro (2007) basándose en la idea de Pólya, identificaron siete pasos que permitieron describir, de forma detallada, el razonamiento inductivo de los estudiantes: (a) Trabajo sobre casos particulares, (b) organización de casos particulares, (c) búsqueda y predicción de patrón, (d) formulación de la conjetura, (e) justificación (validación de la conjetura basada en casos particulares), (f) generalización y (g) demostración, a través de la justificación de la generalización (prueba formal). En un trabajo realizado posteriormente por Pinto y Cañadas (2018a) hicieron una adaptación de los pasos anteriores al contexto del pensamiento funcional en educación primaria, modificando la noción de patrón, la cual está más asociada a la recurrencia, por la noción de estructura que permite resaltar el rol que tiene la relación entre las variables del problema. Estos autores llevaron a cabo un estudio de caso que describió el proceso de generalización de una estudiante. Esta estudiante siguió una secuencia que involucró la organización de casos particulares, la identificación de estructuras, la validación de conjeturas y finalmente la generalización. En la Figura 2-8 mostramos un extracto de lo expresado por la estudiante, para el caso indeterminado de Z paradas, evidenciando su generalización.

Figura 2-8

Respuesta de Estudiante para el caso Z Paradas

E: (…) Si Z es cualquier número de paradas. ¿Cómo podrías explicar tú, en general, cómo calcular el número de personas?

S: Pues multiplicaría ese 3 por este *Z* y le sumaría siempre 1.

E: Vale. ¿Y sabrías escribir eso que me acabas de decir?

S: Creo que sí [la estudiante escribe las expresiones de la Figura 8].

a. 

b. 

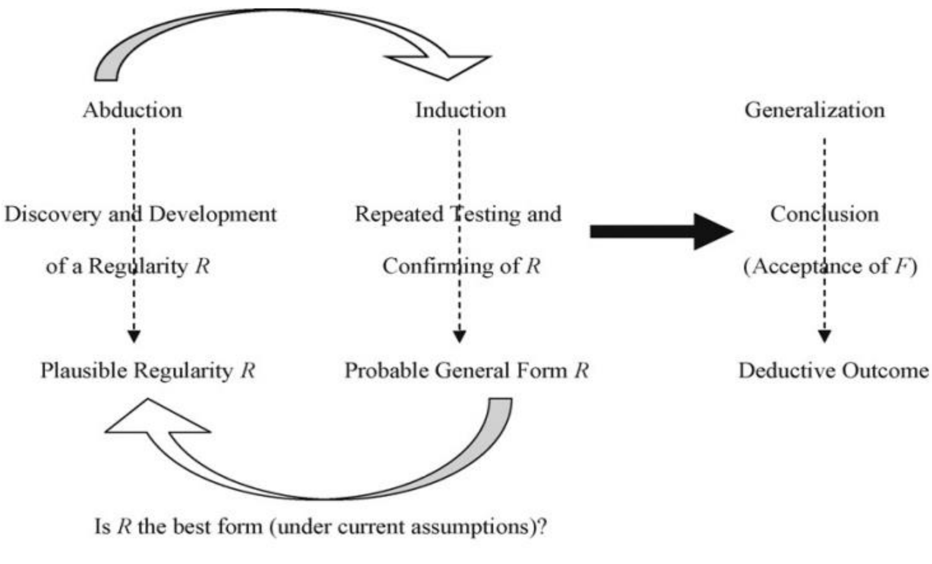
Nota. Figura extraída de Pinto y Cañadas (2018, p. 464).

2.2.3.2. Fases de Razonamiento en el Proceso de Generalización

El razonamiento algebraico involucra diversas fases, como la abducción, la inducción y la generalización, todas fundamentales en la resolución de problemas y la comprensión matemática (Torres et al., 2022). Durante el proceso de generalización, las conjeturas juegan un papel crucial, ya que representan afirmaciones razonables que aún no han sido plenamente justificadas o refutadas (Mason et al., 2010). A medida que los estudiantes trabajan con casos particulares cercanos, desarrollan hipótesis de manera inductiva, las cuales se confirman al trabajar con casos más distantes, culminando en una generalización (Torres et al., 2022). Esta generalización es una afirmación respaldada por evidencia matemática sólida y válida para una amplia gama de situaciones (Mason et al., 2010). Rivera y Becker (2007) explicaron la relación entre las fases de razonamiento consideradas en el proceso de generalización (ver Figura 2-9). Estos autores describieron que en la fase de abducción se realiza el descubrimiento y desarrollo de las primeras regularidades, donde los individuos formulan sus primeras conjeturas. Posteriormente, en la inducción se confirman estas conjeturas. Es tras esta confirmación que se acepta la regularidad, permitiendo al sujeto llevar a cabo la generalización. Así, la generalización se concibe como el resultado de un proceso que integra abducción e inducción.

Figura 2-9

Relación entre las Fases de Abducción, Inducción y Generalización



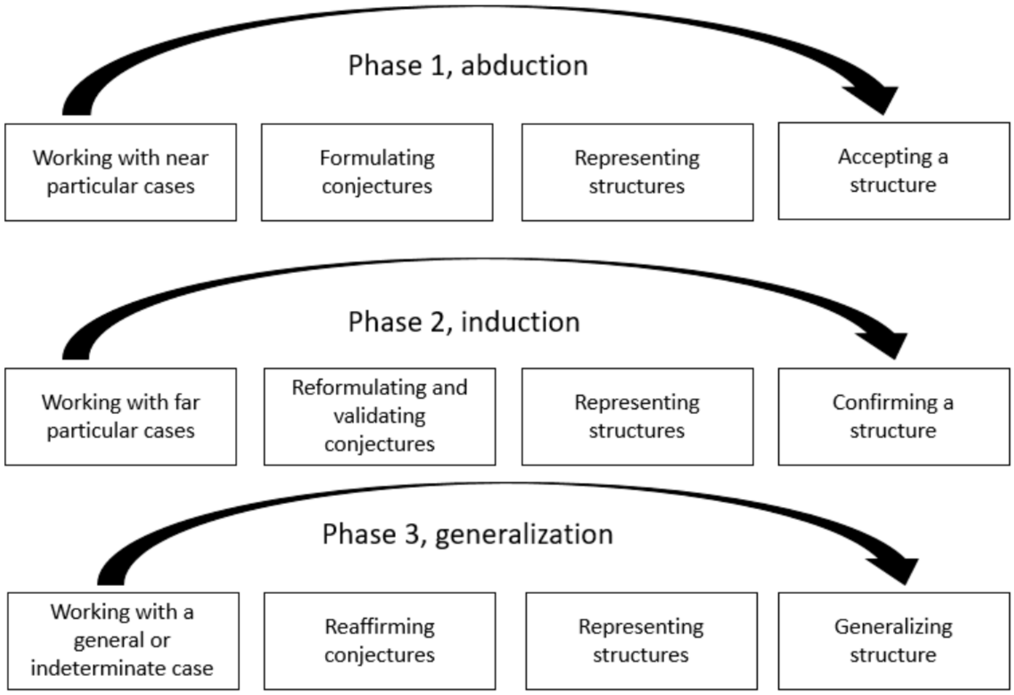
Nota. Figura extraída de Rivera y Becker (2007), p. 153.

Estos dos tipos de razonamiento desempeñan un papel fundamental en la identificación de patrones, la obtención de generalizaciones y el avance en la resolución de problemas algebraicos, como lo destacó Ellis (2007). Tanto la abducción como la inducción persiguen el objetivo de inferir hipótesis a partir de observaciones específicas (Lachiche, 2000).

En el estudio realizado por Torres et al. (2021b) propusieron un modelo de tres fases para el proceso de generalización, que implicaba trabajar con diversos tipos de casos. En la fase de abducción, los estudiantes comienzan con casos particulares cercanos para generar hipótesis sobre la relación entre variables, aunque estas hipótesis no se confirman de inmediato. En la fase de inducción, los estudiantes trabajan con casos particulares lejanos identificando relaciones entre las variables y confirmando las conjeturas previamente generadas en la fase de abducción. Una conjetura se considera confirmada cuando se observa la misma estructura en más de dos ocasiones al trabajar con casos particulares lejanos. Finalmente, en la fase de generalización, la conjetura confirmada se reafirma mediante casos indeterminados o el caso general, lo que evidencia una comprensión de la regularidad subyacente y la estructura en las relaciones entre variables. Estas fases implican trabajar con casos particulares cercanos, formular y validar conjeturas, y generalizar a casos indeterminados o generales. (ver Figura 2-10).

Figura 2-10

Fases consideradas en el Proceso de Generalización



Nota. Figura extraída de Torres et al., 2021b, p. 15

2.2.4. Representación

Las representaciones son signos o configuraciones de signos, caracteres o elementos con la capacidad de simbolizar o codificar algo distinto de sí mismas (Goldin y Shteingold, 2001). Es la acción de sustituir, de hacer visible algo que no está presente, confirmándola como una herramienta esencial en el análisis de los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas (Rico, 2006, 2009). Selling (2016) planteó que la representación es una relación abstracta entre dos cantidades, pero puede representarse mediante palabras, símbolos algebraicos, tablas o gráficos.

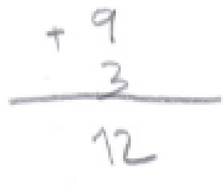
Las representaciones desempeñan "un papel crucial en la gestión y comunicación del conocimiento, especialmente en contextos matemáticos" (Castro et al., 2021, p. 594). En el ámbito de las matemáticas, las representaciones abarcan todas las herramientas, ya sean signos o gráficos, que hacen que los conceptos y procedimientos matemáticos estén presentes, permitiendo a las personas abordar y relacionarse con el conocimiento matemático (Rico, 2009). Trabajar con representaciones permite a las personas asignar significados y comprender las estructuras matemáticas. Los niños emplean múltiples medios, desde gestos hasta el lenguaje hablado, para expresar sus ideas matemáticas generales (Radford, 2018). Utilizamos diferentes representaciones para comunicar ideas y como herramientas para el razonamiento. Debido a su importancia en matemáticas, los estudiantes deben tener oportunidades para aprender a participar en ella. Una de las principales responsabilidades de los docentes es crear un entorno de aprendizaje que el que fomente el uso de múltiples representaciones por parte de los estudiantes (NCTM, 2000). Además, según Brizuela y Earnest (2008) pasar por distintas representaciones al resolver una tarea algebraica genera un pensamiento más flexible en los estudiantes.

En esta Tesis Doctoral nos referiremos a las representaciones externas, las cuales distinguimos como aquellas realizadas con lápiz y papel o habladas, las cuales son intencionales (Pinto, 2019) además de los gestos. Estas representaciones externas se "manifiestan como notaciones simbólicas o gráficas específicas para cada noción matemática, a través de las cuales se expresan los conceptos, procedimientos y propiedades más relevantes en el contexto de las matemáticas" (Castro y Castro, 1997, p. 96).

Existen diversas formas de representación matemática. Para Scheuer et al. (2000) la representación numérica (ver Figura 2-11) implica la creación de una expresión utilizando un conjunto limitado de formas (numerales del 1 al 9). Por su carácter simbólico, surgen símbolos aritméticos (+, -, x, ÷) que pueden representar acciones (Pinto, 2019).

Figura 2-11

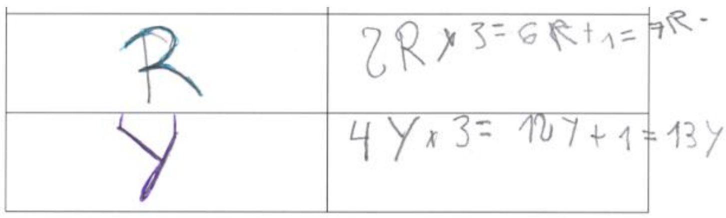
Ejemplo de Representación Numérica



La representación simbólica o notación algebraica, según Molina (2014) se define como un sistema de representación que utiliza elementos como números, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra, como los signos operacionales o el signo igual (ver Figura 2-12).

Figura 2-12

Ejemplo de Representación Simbólica o Notación Algebraica



Nota. Figura extraída de Ayala-Altamirano et al. (2022a, p. 1388)

Las representaciones tabulares implican el uso de tablas para estructurar la información. Estas tablas se emplean para registrar y organizar los pares de valores que se investigan en relación con una función específica (ver Figura 2-13). Además, desempeñan un papel fundamental en respaldar la exploración de la función que subyace a todos estos pares de valores (Blanton y Brizuela, 2014; Martí, 2009).

Figura 2-13

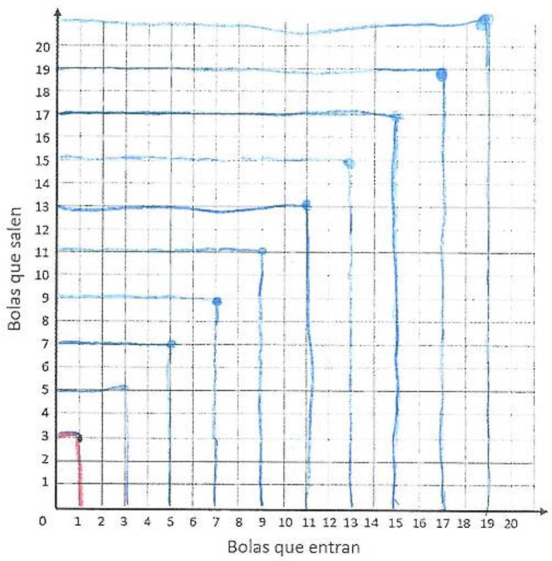
Ejemplo de Uso de Representación Tabular

Número de invitados	Número de globos
5	16
10	31

Las representaciones gráficas "están formadas por un conjunto de puntos en el plano a través de ejes cartesianos” (Pinto, 2019, p. 82). En la figura 2-14 detallamos un ejemplo de este tipo de representación.

Figura 2-14

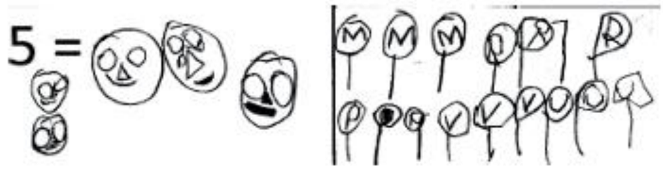
Ejemplo de Uso de Representación Gráfica



Las representaciones pictóricas son imágenes de los elementos representados (Palmer y Bommel, 2016). Detallamos un ejemplo en la Figura 2-15

Figura 2-15

Ejemplo de Uso de Representación Pictórica

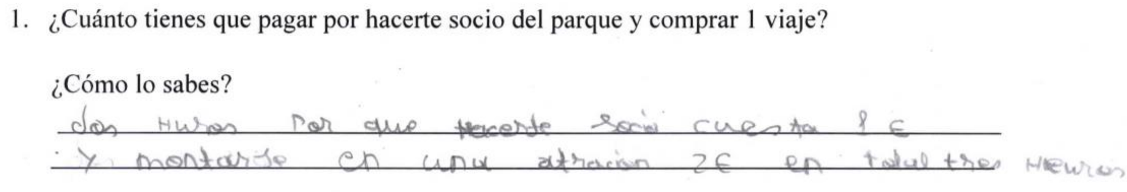


Nota. Figura extraída de Fuentes y Cañadas (2022, p. 273)

Las representaciones verbales según Molina (2014) "se refieren al lenguaje cotidiano, ya sea en forma oral o escrita, incluyendo terminología específica tal como la propia del lenguaje matemático académico (ej. Poliedro, ecuación)" (p. 561). En la figura 2-16 detallamos un ejemplo.

Figura 2-16

Ejemplo de Uso de Representación Verbal (de forma escrita)



1. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 1 viaje?

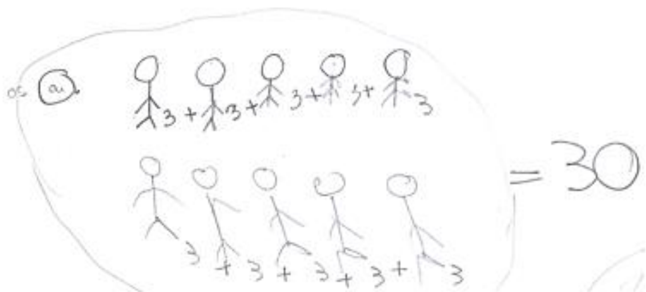
¿Cómo lo sabes?

dos Huros por que hacerte soci cuesta 1 € y montarse en una atracion 2 € en total tres Heuros

Por último, están las representaciones múltiples, donde se utilizan más de dos tipos de representaciones (Brizuela y Earnest, 2008; Carraher y Schliemann, 2007). En la Figura 2-17 detallamos un ejemplo de este tipo de representación, donde el estudiante utiliza la representación pictórica y numérica para organizar los datos obtenidos,

Figura 2-17

Ejemplo de Uso de Representación Múltiple



Nota. Figura extraída de Ayala-Altamirano y Molina (2021b, p. 229)

En cuanto a la representación como una práctica del pensamiento algebraico, no se puede concebir como complementaria o independiente del pensamiento algebraico (Brizuela y Blanton, 2014). Este aspecto adquiere gran relevancia en la resolución de problemas de funciones lineales. Los estudiantes de primaria utilizan diversos tipos de representaciones, como palabras, tablas, imágenes o gráficos, para expresar y razonar con generalizaciones matemáticas, siendo estas representaciones fundamentales para comprender conceptos matemáticos (Blanton et al., 2011). Los distintos tipos de representaciones en el álgebra escolar facilita la visualización de objetos matemáticos abstractos para los estudiantes (Ramírez et al., 2021). En la resolución de problemas con funciones lineales, los estudiantes de primaria emplean diversas representaciones, como las verbales, pictóricas, numéricas, algebraicas, tabulares y gráficas (Carraher et al., 2008). La representación no solo constituye una actividad, sino también una práctica esencial que los estudiantes deben realizar en su proceso de aprendizaje y al abordar tareas matemáticas, especialmente en el ámbito del pensamiento algebraico y en las matemáticas en general. Su relevancia se evidencia al observar cómo los estudiantes aplican el pensamiento algebraico al representar generalizaciones matemáticas a través de diversas formas. Brizuela (2023) expresa que "estas representaciones no solo demuestran las generalizaciones en problemas matemáticos, sino que también influyen en cómo desarrollan su razonamiento". (p. 45). Dentro del ámbito del pensamiento algebraico, se emplean diversos tipos de representaciones que contribuyen a concretar los objetos matemáticos abstractos (Molina, 2014). Las representaciones "más utilizadas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra incluyen el lenguaje (oral y escrito), las tablas, los gráficos de coordenadas cartesianos y las letras" (Brizuela y Blanton, 2014, p. 42). Es importante destacar que las generalizaciones pueden manifestarse sin la necesidad de recurrir al simbolismo algebraico; por lo tanto, la expresión de la generalización puede variar en su sofisticación según las representaciones utilizadas (Pinto et al., 2023).

2.3. Aproximaciones al Pensamiento Algebraico

El pensamiento algebraico está conformado por distintos componentes que son relevantes dentro del aprendizaje de la matemática. Kaput (2008, p. 11) consideró las siguientes características del pensamiento algebraico que dan lugar a los distintos componentes que lo conforman:

(a) Álgebra como estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones, incluidos los que surgen en aritmética (álgebra como aritmética generalizada) y en razonamiento cuantitativo.

(b) Álgebra como estudio de funciones, relaciones y variación conjunta.

(c) El álgebra como aplicación de un conjunto de lenguajes de modelización tanto dentro como fuera de las matemáticas.

Blanton et al. (2018) organizó los contenidos centrales del pensamiento algebraico en torno a tres áreas: (a) aritmética generalizada; (b) equivalencia, expresiones, ecuaciones y desigualdades; y (c) pensamiento funcional. Chimoni et al. (2018) entregaron una perspectiva integral del pensamiento algebraico que abarca cuatro dimensiones fundamentales (a) el pensamiento algebraico centrado en el estudio de la estructura y las relaciones en tres áreas clave del álgebra, que incluyen la aritmética generalizada, el pensamiento funcional y el modelado, según la conceptualización de Kaput (2008); (b) la comprensión de conceptos algebraicos fundamentales, como igualdad, ecuaciones, propiedades de los números, propiedades de las operaciones, variables, cantidades desconocidas, símbolos, covariación y correspondencia; (c) la aplicación de procesos orientados a la búsqueda de similitudes y diferencias, así como la validación de estructuras y relaciones, que abarcan actividades como notar, conjeturar, representar, generalizar, justificar y validar y (d) el uso de diversas formas de razonamiento, como el razonamiento abductivo, inductivo y deductivo, que guían el proceso de extracción de conclusiones en el pensamiento algebraico. Por último, Brizuela (2023) continuando con la idea de Kaput (2008) y Blanton et al. (2011) describió que los componentes del pensamiento algebraico son: (a) la aritmética generalizada; (b) la equivalencia, las expresiones, las ecuaciones y las desigualdades (o simplemente las ecuaciones); (c) el razonamiento cuantitativo y (d) el pensamiento funcional.

A partir de lo expuesto, distinguimos los distintos componentes del pensamiento algebraico:

Aritmética generalizada. Este componente se centra en la generalización de las relaciones aritméticas, incluyendo propiedades numéricas y operaciones, y en el razonamiento explícito basado en estas generalizaciones (Brizuela, 2023). Para Chimoni et al. (2018) la aritmética generalizada se refiere a la identificación de "relaciones entre números, la manipulación de operaciones y sus propiedades, y la transformación y solución de ecuaciones" (p. 59). La aritmética generalizada involucra los conceptos de números, operaciones, signo igual, expresiones y variables. Además, permite construir generalizaciones sobre propiedades y relaciones numéricas específicas, lo que lleva a la idea fundamental de que se pueden reemplazar expresiones por equivalentes (Kaput, 2008).

Patrones. El razonamiento cuantitativo involucra la descripción de relaciones entre cantidades generalizadas, que pueden o no ser equivalentes. Un patrón "es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro et al., 2010, p. 57). Para Morales et al. (2017) la idea de patrón incluye términos como secuencia, serie, orden, predecible, regularidad o estructura, entre otras (p. 4). Por último, un patrón matemático se refiere a una regularidad predecible que típicamente involucra números o el espacio, y en el cual los elementos se disponen de manera sistemática. La organización de un patrón se conoce como su estructura, que puede manifestarse en términos numéricos o espaciales. la abstracción de patrones se considera fundamental, ya que implica identificar regularidades predecibles en número, forma y medida, constituyendo la base del conocimiento estructural (Mulligan et al., 2008; 2020).

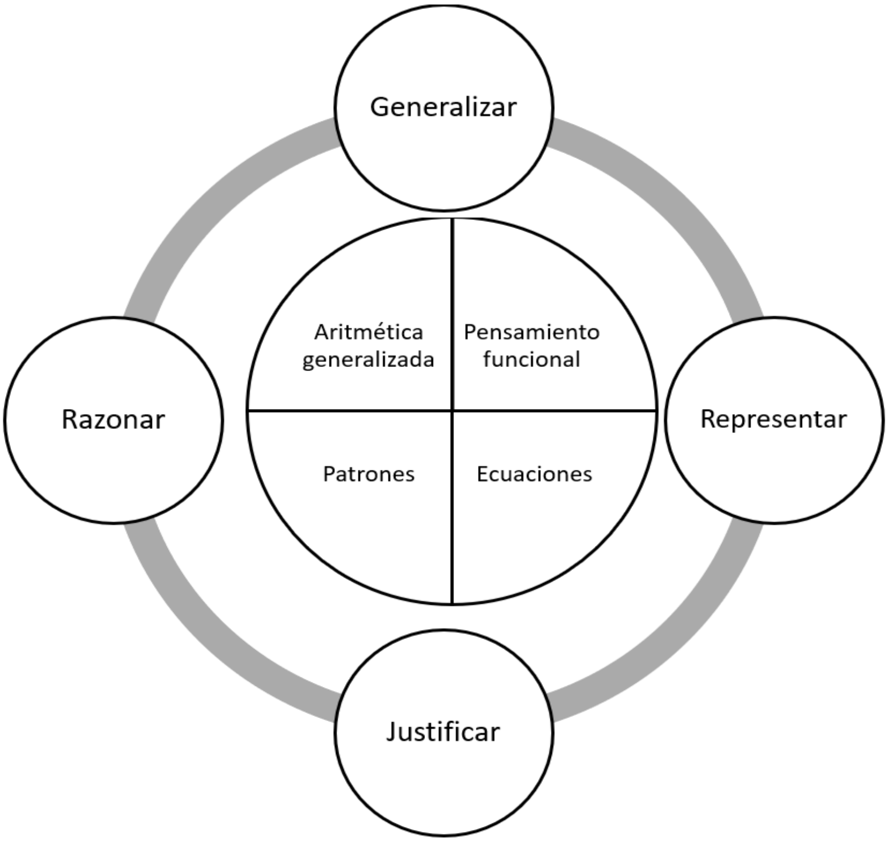
Pensamiento funcional. Este componente se enfoca en la construcción, descripción y razonamiento sobre funciones. Implica la generalización de relaciones entre cantidades covariantes y la representación de estas relaciones de múltiples maneras, utilizando lenguaje natural, notación algebraica, tablas y gráficos. Además, de razonar con estas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de la función (Brizuela, 2023; Chimoni et al., 2018). Los conceptos de variable, expresión y ecuación son centrales en este dominio, aunque con interpretaciones distintas a las de la aritmética generalizada. También se incorporan conceptos como covarianza, correspondencia y cambio en el pensamiento funcional (Chimoni et al., 2018).

Ecuaciones. En este componente del pensamiento algebraico, se exploran conceptos relacionados con las ecuaciones. Esto implica comprender la igualdad de manera relacional, permitiendo interpretar las ecuaciones como expresiones matemáticas que indican la equivalencia entre dos cantidades o expresiones. Además, involucra la representación y el razonamiento con expresiones y ecuaciones en su forma simbólica (Brizuela, 2023). Para Otten et al. (2019) "la principal característica de una ecuación es que las expresiones a ambos lados del signo representan el mismo valor. En este sentido, ambos lados de la ecuación son equivalentes, aunque pueden parecer distintos" (p. 638). En otras palabras, una ecuación es una expresión matemática que establece una igualdad entre dos cantidades o expresiones, donde una o ambas de estas cantidades pueden contener una o más incógnitas. Su función principal es describir una relación entre cantidades desconocidas que deben satisfacer ciertas condiciones para que la igualdad sea verdadera.

Como hemos mencionado, Blanton et al., (2011) identificaron cuatro prácticas claves del pensamiento algebraico (ver apartado 2.2). La propuesta es que estas prácticas se aborden en el tratamiento de los diferentes componentes. En la Figura 2-18 resumimos los componentes y prácticas que hacen parte del pensamiento algebraico.

Figura 2-18

Componentes y Prácticas del Pensamiento Algebraico



2.4. Pensamiento Funcional

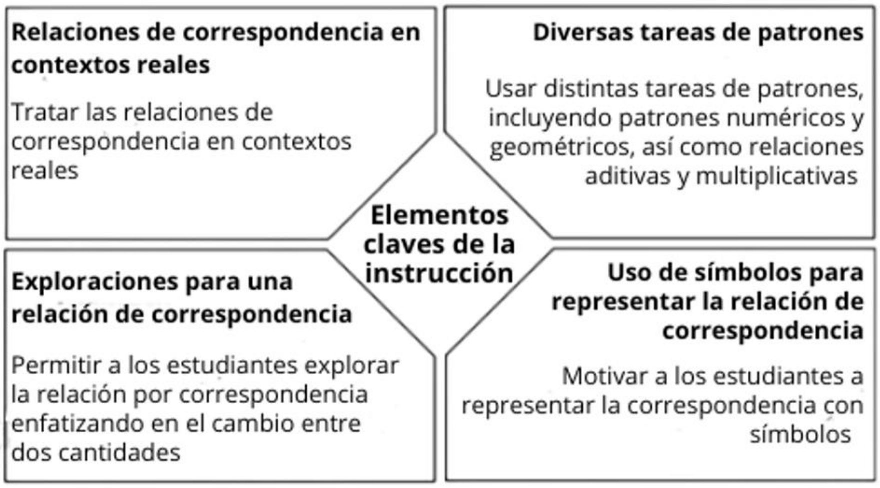
En nuestra Tesis Doctoral, nos centramos en el pensamiento funcional. A lo largo de este apartado, exploraremos en detalle este componente del pensamiento algebraico, resaltando su importancia y sus atributos esenciales en la formación matemática de los estudiantes.

Para Blanton (2008) "el pensamiento funcional, en el contexto del *early algebra*, se centra en la relación entre dos variables, siendo fundamental el estudio de regularidades y, en particular, su generalización" (p. 30). Blanton y Kaput (2011) expresaron que el pensamiento funcional implica la construcción y generalización de patrones y relaciones, utilizando diversas representaciones y considerando las relaciones generalizadas o funciones como resultados de objetos matemáticos útiles. Por su parte Smith (2008) expresó que el pensamiento funcional se centra en las relaciones entre dos o más variables, abarcando desde relaciones específicas hasta generales. Es por ello que entendemos el pensamiento funcional como "pensar en términos de relaciones" (Rico 2007, p. 56). Este componente del pensamiento algebraico comprende la capacidad de generalizar relaciones entre cantidades covariantes, expresar estas relaciones en diferentes formas, como palabras, símbolos, tablas o gráficos, y razonar utilizando estas múltiples representaciones para analizar el comportamiento de la función (Blanton et al., 2011). En esencia, se trata de un proceso cognitivo que implica la construcción, descripción y razonamiento acerca de las funciones, centrándose en las relaciones entre dos o más variables, abarcando desde relaciones específicas hasta generalizaciones más amplias (Kaput, 2008). Las autoras Cañadas y Molina (2016) definieron el pensamiento funcional como un componente del pensamiento algebraico que se enfoca en la construcción, descripción y razonamiento con respecto a las funciones y sus elementos constituyentes. Así también Cañadas et al. (2016) caracterizaron el pensamiento funcional como "una actividad cognitiva que se inicia y desarrolla al trabajar sobre las relaciones entre cantidades, específicamente cuando se ponen en funcionamiento conceptos determinados para responder a cuestiones específicas" (p. 418).

El pensamiento funcional es una opción apropiada para abordar el pensamiento algebraico debido a su relevancia en la aplicación de prácticas fundamentales en el ámbito algebraico. Por tanto, resulta importante enseñar a los estudiantes a desarrollar el pensamiento funcional desde las etapas tempranas de la educación primaria (Blanton et al., 2015; Pang y Sunwoo, 2022). Para desarrollar el pensamiento funcional es esencial que los niños observen de manera detallada la estructura presente en los patrones, prestando atención tanto a los aspectos figurativos como a las cantidades numéricas que componen estos patrones (Twohill, 2018). Cuando se considera la generalización en una situación con una relación funcional subyacente entre dos conjuntos de valores, implica identificar y representar la regla que relaciona ambas cantidades desde lo particular a casos más generales (Ureña et al., 2019). En este contexto, Pang y Sunwoo (2022) detallaron elementos instructivos clave que pueden ser utilizados para promover el pensamiento funcional de manera efectiva en el aula (ver Figura 2-19).

Figura 2-19

Elementos que promueven el Pensamiento Funcional



Nota. Figura extraída y traducida de Pang y Sunwoo (2022, p. 1317).

El pensamiento funcional involucra tres modos diferentes de explorar la relación entre dos cantidades (Smith, 2003; 2008; Stephens et al., 2017). El primero de estos modos es la relación recursiva, que se centra en describir la variación observada en una única secuencia de valores (una variable de las implicadas en la relación). El segundo modo, es a través de la relación de correspondencia. Esta relación se construye mediante pares de valores, uno para la variable independiente y otro para la variable dependiente. Esto ayuda a predecir cómo cambia una variable en función de la otra, sin necesidad de conocer todos los valores posibles de la función. A partir de un valor de la variable independiente, se puede determinar un valor específico de la variable dependiente. El tercer modo es mediante la relación por covariación, que se refiere a la capacidad de percibir que los valores de dos cantidades varían simultáneamente y a la descripción de cómo una cantidad cambia en relación con la otra.

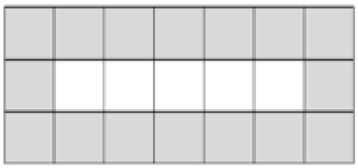
El concepto de función desempeña un papel fundamental en el pensamiento funcional, como destacan Carraher y Schliemann (2019). Las funciones, según Brizuela y Blanton (2014) son “una relación matemática especial entre dos conjuntos, donde cada elemento de un conjunto, que llamamos el dominio, está relacionado de manera única con un elemento del segundo conjunto, que llamamos codominio” (p. 39). Una función se define como una relación entre dos variables donde a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente, siendo la variable un elemento fundamental en esta relación (Brizuela y Blanton, 2014; Larson y Hostetler, 2008).

Una forma para trabajar con pensamiento funcional es a través de tareas contextualizadas centradas en funciones lineales (Cañadas, 2016; Torres et al., 2021a). Un ejemplo es el problema de las baldosas (ver Figura 2-20) que abordaba la función *y=2x+6*.

Figura 2-20

Problemas de las Baldosas

Un colegio quiere repavimentar sus pasillos porque están en mal estado. El colegio decide utilizar una combinación de baldosas blancas y grises, todas cuadradas y del mismo tamaño. Se colocan como en el dibujo.



El colegio contrata a una empresa para que repavimente los pasillos de las tres plantas. Queremos que ayudes a los trabajadores a responder algunas preguntas antes de que empiecen.

1. ¿Cuántas baldosas grises necesitarán para un pasillo con 5 baldosas blancas?
2. Algunos pasillos son más largos que otros. Así que los trabajadores necesitarán un número diferente de baldosas para cada pasillo.
3. ¿Cuántas baldosas grises necesitarán para un pasillo con 8 baldosas blancas?
4. ¿Cuántas baldosas grises necesitarán para un pasillo con 10 baldosas blancas?
5. ¿Cuántas baldosas grises necesitarán para un pasillo con 100 baldosas blancas?
6. Los trabajadores siempre colocan primero las baldosas blancas y después las grises. ¿Cómo pueden saber cuántas baldosas grises necesitan si ya han colocado las blancas?

Nota. Figura extraída y traducida de Pinto y Cañadas (2018, p. 177).

En este caso, las baldosas blancas son la variable independiente y las baldosas grises son la variable dependiente. Al trabajar con una tarea de pensamiento funcional, los estudiantes tienen diferentes maneras de interpretar y construir cómo las variables dependientes e independientes se relacionan entre sí (recurrencia, correspondencia y covariación).

2.5. Mediación

La mediación pedagógica es un componente esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Escobar (2011) definió la mediación como “un proceso de interacción pedagógica; social, dialógica, lúdica, consciente, intencional, sistemática, destinada a generar experiencias de buen aprendizaje” (p. 60). El proceso de mediación se da en la interacción “cara a cara” de dos o más sujetos interesados en una tarea que hay que llevar a cabo (Ferreiro y Calderón, 2005, p. 112). La mediación se conceptualiza como un proceso dinámico y valorativo en el cual un docente guía a los estudiantes mediante diversos apoyos instruccionales. Estos apoyos, que pueden incluir información, materiales, textos escolares, instrucciones verbales y preguntas, sirven como recursos que facilitan la resolución de problemas por parte del estudiante. En este contexto, la mediación se entiende como un conjunto integral de herramientas, tanto cognitivas como físicas e instrumentales, que posibilitan el desarrollo de la actividad cognitiva y la consecución de las metas educativas propuestas (Alzate et al., 2005).

La mediación es un proceso pedagógico que implica interacciones sociales y dialógicas intencionadas y sistemáticas. Su objetivo es transmitir conocimientos y permitir el desarrollo de las capacidades humanas y la transmisión de valores y normas. Involucra la acción conjunta de docentes, compañeros y adultos, y es consciente y destinada a generar experiencias de "buen aprendizaje". Este proceso considera factores como los conocimientos previos, los estilos de aprendizaje, los objetivos educativos y el contexto del aprendizaje. (Escobar, 2011). Para Ferreiro y Calderón (2001) la mediación es un proceso pedagógico en el cual el mediador, facilita el aprendizaje de un sujeto que inicialmente se encuentra en un estado de no saber, poder o ser. El mediador estimula el desarrollo de las capacidades del sujeto, corrige deficiencias cognitivas y lo guía hacia un estado cualitativamente superior de conocimiento, habilidades y desarrollo personal. Este proceso implica la participación activa del sujeto que aprende y se lleva a cabo a través de interacciones directas entre los sujetos interesados en una tarea específica. En resumen, la mediación promueve el aprendizaje, el desarrollo de potencialidades y el avance hacia estados de conocimiento y habilidades más avanzados.

La mediación es un “verdadero accionar didáctico que coloque en el centro de las reflexiones docente-aprendizaje-estudiantes el acto comunicativo como principal propósito en el ejercicio de la formación” (Alzate-Ortiz y Castañeda-Patiño, 2020, p. 3). El rol del docente, entonces, “se puede ver como una intervención, no para transmitir conocimientos, ya que se trata de motivar y orientar al estudiantado a que lidere su propio proceso de aprendizaje” (Obando-Arias, 2021, p. 8). A través de esta mediación, los docentes pueden ayudar a los estudiantes a representar, interpretar, razonar y evaluar, guiándolos hacia respuestas correctas, desafiándolos a ir más allá de su conocimiento previo y fomentando su desarrollo cognitivo y habilidades de pensamiento (Mata-Pereira y Da Ponte, 2017; Ureña, Ramírez y Molina, 2019). “El objetivo docente es orientar al estudiantado para que construya su conocimiento” (Obando-Arias, 2021, p. 5). Los docentes desempeñan un papel crucial al crear espacios de debate y fomentar el intercambio de ideas. Esto que es fundamental para la adquisición del conocimiento matemático y para involucrar activamente a todos los niños en el proceso de aprendizaje (Pinto et al., 2023). La mediación, como proceso intencionado y recíproco(docente-estudiantes) implica que los docentes exploren y fomenten las potencialidades de los estudiantes en diversas áreas de desarrollo, negocien el aprendizaje significativo y brinden apoyo en situaciones de dificultad. Además, los docentes deben permitir la libertad responsable y comprometida en el proceso de aprendizaje, alentar la autorregulación y respetar los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje (Ferreiro y Calderón, 2005). El docente debe asumir un papel integral que trascienda la enseñanza centrada en el contenido (ver Figura 2-21). Se espera que posea un dominio de la disciplina, habilidades para crear y aplicar estrategias pertinentes, disposición para democratizar los procesos educativos, capacidad para valorar y utilizar las experiencias de los estudiantes, fomentar la metacognición, y estimular la autogestión, autorregulación y autoevaluación (Alzate-Ortiz y Castañeda-Patiño, 2020).

Figura 2-21

Retos del Docente desde la Mediación Pedagógica

Nota. Figura extraída de Alzate-Ortiz y Castañeda-Patiño (2019, p. 6)

En relación con la mediación en el pensamiento algebraico, distintas investigaciones han resaltado el papel fundamental del docente o investigador-docente en el proceso de ayudar a los estudiantes desde la detección de patrones hacia la generalización (Blanton et al., 2018; Hunter y Miller, 2022; Twohill, 2018). La mediación es fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje. A través de estas acciones de apoyo y orientación, los docentes desempeñan un papel activo en la formación de una base sólida de conocimiento matemático en los estudiantes (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Sarduy, 2008). Dentro de un contexto del pensamiento algebraico, los autores Hunter y Miller (2022) expresaron que los profesores pueden ayudar a los estudiantes a explorar relaciones en patrones mediante el uso de preguntas para posicionarlos de manera que puedan participar en observaciones multifacéticas de la estructura. Por lo mismo se destaca que las mediaciones ayudan a los estudiantes a generalizar (Narváez y Cañadas, 2023; Ureña et al., 2019).

Sabemos que mediar no es un proceso fácil de realizar. El docente debe saber cómo ayudar a los estudiantes y cómo guiarlos hacia el aprendizaje. Mata-Pereira y Da Ponte (2017) señalan que no se deben facilitar las respuestas a los estudiantes inmediatamente ya que esto impediría que los estudiantes trabajen a través del descubrimiento guiado, el cual dará lugar a un aprendizaje más significativo. En cambio, el docente no debe dar demasiadas indicaciones y sugerencias; o si no, la tarea se simplificaría y resolverla se convertiría en un ejercicio simple, que no requiere mucho razonamiento. Así mismo, si el maestro no presta atención a las acciones de sus estudiantes, estos pueden equivocarse o formular mal un concepto matemático. Estos autores establecieron las acciones que el maestro puede realizar en el proceso de mediación:

- Monitorear a los estudiantes mientras resuelven la tarea, con el objetivo de no reducir su nivel de desafío.
- Pedir a los estudiantes que expliquen “por qué” y presentar justificaciones alternativas.
- Pedir a los estudiantes que identifiquen válido e inválido algunas justificaciones, destacando lo que puede validarlas.
- Fomentar el intercambio de ideas.
- Aceptar y valorar las contribuciones incorrectas o parciales deconstruyéndolas, complementándolas o clarificándolas.
- Apoyar o informar a los estudiantes para resaltar procesos de razonamiento tales como generalizar y justificar.
- Desafiar a los estudiantes a ir más allá de la tarea formulando nuevas preguntas, generalizando o justificando.

Ferreiro y Calderón (2001) describieron ideas para llevar a cabo una mediación efectiva:

- Brindar ayuda cuando se detecten dificultades evidentes, sin adelantarse a suponer las necesidades de los estudiantes y proporcionando la asistencia necesaria en el momento adecuado.
- Enseñar a los estudiantes a procesar la información, ofreciendo las herramientas necesarias para comprender y utilizar el contenido de enseñanza.

- Permitir y utilizar los errores como oportunidades de aprendizaje, fomentando la corrección, aclaración para completar el conocimiento.
- Respetar los estilos y ritmos de aprendizaje individuales de cada estudiante, reconociendo que cada uno tiene una forma única de aprender.
- Estimular la expresión a través de diversas vías, permitiendo a los estudiantes comunicar y demostrar su comprensión de múltiples maneras.

Por último, Da Ponte, et al. (2017) describieron distintas acciones que puede realizar el docente para facilitar el aprendizaje de los estudiantes:

- Invitar, acción dirigida a iniciar una discusión.
- Apoyar / guiar, acciones destinadas a guiar a los estudiantes a resolver una tarea a través de preguntas u observaciones, de manera explícita o implícita.
- Informar / sugerir, acciones en las que el maestro introduce información, da sugerencias, presenta argumentos o valida las respuestas de los estudiantes.
- Desafiar, acción en las que el docente busca que los estudiantes asuman el papel de producir nuevas representaciones, interpreten una declaración, establezcan conexiones o formulen un razonamiento o una evaluación.

CAPÍTULO 3. ANTECEDENTES

Diversos estudios en el ámbito del pensamiento algebraico han evidenciado la capacidad de los estudiantes de educación primaria en relación con conceptos algebraicos. Estas investigaciones han destacado la importancia de trabajar el pensamiento algebraico en educación primaria, sugiriendo que los estudiantes pueden participar en sesiones y actividades que fomenten el pensamiento algebraico en diversas áreas de contenido de forma exitosa.

En este capítulo presentamos los principales antecedentes de esta Tesis Doctoral. En la primera parte de este capítulo mostramos una revisión bibliométrica que hemos realizado sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria. Este trabajo nos llevó a hacer un primer estudio, donde caracterizamos la producción global existente hasta el año 2022 sobre este tema. En la segunda parte, describimos algunos estudios relevantes que han abordado el pensamiento algebraico, destacando trabajos que reflejan los avances y líneas abiertas de este tema, específicamente de trabajos que han abordado el pensamiento funcional en la educación primaria. Este conjunto de antecedentes proporciona una base para comprender la evolución y el estado actual de la investigación en este campo.

3.1. ESTUDIO 1: Análisis Bibliométrico sobre Pensamiento Algebraico en Educación Infantil y Primaria en Scopus

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (en revisión). Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus.

Resumen

En este trabajo presentamos un análisis bibliométrico cuyo objetivo es cuantificar y describir la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria. Desarrollamos este análisis dentro de la base de datos Scopus, por ser una de las de mayor cobertura a nivel de revistas y volumen de citación en el ámbito internacional. Los resultados muestran un creciente interés de la comunidad investigadora en la Didáctica de la Matemática por el pensamiento algebraico en estos niveles educativos. Identificamos autores que han producido una gran cantidad de investigaciones en este tema, como a grupos de autores que han colaborado en distintos trabajos. Además de los términos clave como *early algebra*, pensamiento funcional y generalización que destacan como temas prominentes en esta área de estudio.

Palabras clave*:* Bibliometría; matemáticas; pensamiento algebraico; producción científica; revisión de literatura.

Introducción

El pensamiento algebraico es un tema de interés en la investigación de Didáctica de la Matemática, tanto a nivel nacional como internacional. Esto tiene que ver, por un lado, con las dificultades que evidencian los estudiantes de secundaria con el álgebra; y, por otro lado, con los beneficios que se le asocian tanto para matemáticas como para otras áreas en diferentes niveles educativos. Ejemplos del interés por este tema son dos monográficos en revistas como Journal for the Study of Education and Development/Infancia y Aprendizaje del año 2019 (volumen 42, número 3) y ZDM—Mathematics Education de 2022 (volumen 54, número 6). Como referente nacional, en los últimos simposios organizados por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), simposio español de referencia para los investigadores del área, el pensamiento algebraico ha sido un tema que ha estado presente, tanto en los seminarios como en las comunicaciones publicadas en las actas (e.g., Burgos et al., 2018; Cañadas, 2023; Molina, 2007; Torres et al., 2019).

En la actualidad, distintos países han realizado cambios en sus currículos para promover el pensamiento algebraico en educación infantil y primaria. Entre ellos están Australia, Chile y Estados Unidos (Merino, et al., 2013; MINEDUC, 2012). Como referente internacional, Estados Unidos elaboró el primer documento curricular que incluyó el trabajo con pensamiento algebraico en el currículo desde educación infantil en adelante (National Council of Teachers of Matematics [NCTM], 2000). Este documento reconoce la importancia de construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para el álgebra de los cursos superiores. En el caso de Chile, el Ministerio de Educación (MINEDUC) incorporó en su currículo, desde el año 2012, el eje de patrones y álgebra desde la educación parvularia (4-6 años). Actualmente, el currículo español de educación primaria recoge la importancia del sentido algebraico considerando los saberes relacionados con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022, p. 116).

Los estudios realizados sobre pensamiento algebraico han abordado diferentes aspectos. Algunos investigadores han descrito las características y componentes del pensamiento algebraico (e.g., Blanton y Kaput, 2004; Blanton et al., 2015; Cañadas, 2016; Kieran, 1996). Otros autores han evidenciado las capacidades de los estudiantes de diferentes edades al trabajar con tareas relacionadas con el pensamiento algebraico (e.g., Blanton et al., 2015; Callejo et al., 2016; Kaput 2008; Kieran 2004), las dificultades a las que se enfrentan en su proceso de aprendizaje (e.g., Castro 2012; Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020) o las ayudas del docente para fomentar el pensamiento algebraico (Narváez y Cañadas, 2023).

Por otro lado, desde los años noventa, se viene prestando atención al análisis de la producción científica en Educación Matemática a nivel internacional (Bracho-López et al., 2014). Estas revisiones han tenido como objetivo caracterizar la disciplina y evidenciar las producciones científicas que se han hecho a lo largo de los años, poniendo el foco en distintos aspectos como: (a) programas de doctorado (Reys y Kilpatrick, 2001), (b) tesis doctorales (Vallejo-Ruíz, 2005), (c) programas de grado (Donoghue, 2001) o (d) artículos publicados en bases de datos (Jiménez-Fanjul et al., 2011). Centrándonos en el pensamiento algebraico, se han desarrollado algunas revisiones sistemáticas. Un ejemplo es el trabajo de Andini y Prabawanto (2021) quienes realizaron una revisión sistemática sobre el pensamiento relacional en el aprendizaje temprano del álgebra. Analizaron 26 artículos publicados en 20 revistas. Destacaron distintos diseños de sesiones que pretendían desarrollar el pensamiento relacional, contribuyendo a solventar diversas dificultades asociadas al aprendizaje temprano del álgebra. Sibgatullin et al. (2022) realizaron una revisión sistemática donde analizaron distintas investigaciones empíricas sobre el pensamiento algebraico. En su revisión incluyeron 36 estudios. Estas investigaciones sistemáticas han abordado un número limitado de estudios sobre pensamiento algebraico, centrándose en responder preguntas específicas, considerando un rango específico de años por considerar. Por ello, orientamos este estudio hacia un análisis cuantitativo de la producción científica sobre el pensamiento algebraico. Esta revisión bibliométrica tiene como objetivo llenar ese vacío y ofrecer una visión más completa y detallada del panorama de investigación en este campo, un método de análisis útil para guiar a la comunidad investigadora hacia los trabajos más influyentes en el campo de la investigación en cuestión, sin sesgos subjetivos (Zupic y Čater, 2015).

Nuestro objetivo general de investigación es analizar las métricas básicas descriptivas de la producción científica sobre pensamiento algebraico en Scopus centrada en las etapas de educación infantil y educación primaria. Abordamos este objetivo a través de los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterizar la evolución temporal de la producción científica sobre pensamiento algebraico en Scopus, cuantificando el número de publicaciones por año.
2. Cuantificar la producción científica relacionada con el pensamiento algebraico según tipos de publicación (artículos, conferencias, revisiones, etc.) y áreas temáticas específicas abordadas en la educación infantil y primaria.
3. Identificar y analizar la red de colaboración entre autores, co-autores e instituciones que han contribuido a la investigación en pensamiento algebraico.
4. Identificar los documentos más citados centrados en el pensamiento algebraico.

5. Identificar los principales conceptos abordados en los estudios relacionados con el pensamiento algebraico.

Marco conceptual

Distintos autores han realizado diversas aproximaciones para definir el pensamiento algebraico. Kieran (1996) lo definió como "una aproximación a situaciones cuantitativas que enfatiza los aspectos de la relación general con expresiones que no son necesariamente propias del simbolismo algebraico" (p. 275). Para Blanton y Kaput (2004) el pensamiento algebraico lo definieron como "un hábito mental que impregna todas las matemáticas y que implica la capacidad de los estudiantes para construir, justificar y expresar conjeturas sobre la estructura y las relaciones matemáticas" (p. 142). Este tipo de pensamiento matemático se evidencia cuando se hacen y expresan relaciones y se realizan generalizaciones entre cantidades o símbolos (Carraher y Schliemann, 2018; Kaput, 2008). El pensamiento algebraico se observa cuando los estudiantes identifican relaciones o estructuras, generalizan, resuelven problemas, modelan, justifican, demuestran y predicen (Cai y Knuth, 2011; Stephens et al., 2015).

El pensamiento algebraico se caracteriza por "considera las formas de hacer, de pensar y de hablar sobre el álgebra y, en particular, el álgebra escolar" (Cañadas, 2016, p. 8). Esto permite que los estudiantes trabajen con cantidades indeterminadas. "El corazón del pensamiento algebraico está compuesto de un proceso de simbolización complejo que tiene como propósito la generalización y el razonamiento con dichas generalizaciones" (Kaput, 2008, p. 9). Este autor destacó dos aspectos centrales del pensamiento algebraico: (a) hacer y expresar generalizaciones en sistemas de símbolos cada vez más formales y convencionales y (b) razonar con formas simbólicas.

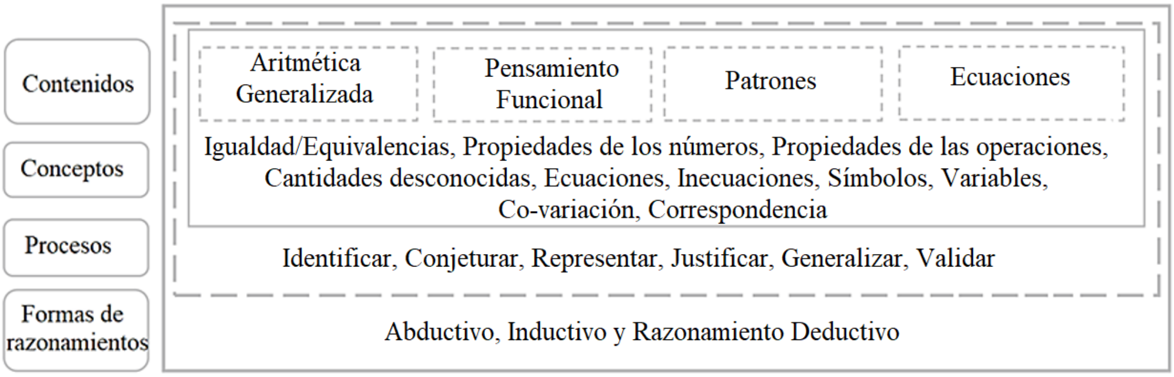
La introducción del pensamiento algebraico en los primeros cursos de escolarización no significa impartir un curso específico de álgebra, sino más bien "capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad" (Lins y Kaput, 2004, p. 58). La finalidad es desarrollar en los estudiantes modos de pensamiento que les permitan alcanzar una comprensión internalizada de las matemáticas escolares, de modo que los estudiantes puedan realizar análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, la justificación, el ensayo y error y la predicción (Kieran, 2004; Pincheira y Alsina, 2021). En particular, unas matemáticas elementales "algebrizadas" ayudarán a los alumnos, promoviendo un mayor grado de generalidad en su pensamiento, aumentando su capacidad de expresar generalidad (Molina, 2007). Esto ayudará a dotar a los estudiantes con las habilidades de pensamiento crítico y así tener experiencias exitosas en álgebra (Kriegler, 2007).

El trabajo del pensamiento algebraico con estudiantes de primaria ayuda a promover un pensamiento analítico, donde las cantidades indeterminadas, incógnitas o variables se tratan junto con las cantidades conocidas (Ventura et al., 2021). El principal objetivo de trabajar el pensamiento algebraico es hacer que "los niños piensen, describan y justifiquen lo que sucede en general con respecto a alguna situación matemática. Es decir, queremos que los niños desarrollen una generalización, una afirmación que describa una verdad matemática general sobre algún conjunto de datos" (Blanton, 2008, p. 105). Respecto al trabajo en educación infantil con pensamiento algebraico, este permite explorar las nociones intuitivas que tienen sobre este tema, así como la observación de patrones, regularidades y la argumentación de los hallazgos. Todo esto se sugiere hacerlo a través del juego y de la enseñanza globalizada de los contenidos (Fuentes y Cañadas, 2022).

Blanton et al. (2018) organizaron las áreas centrales del pensamiento algebraico en (a) aritmética generalizada; (b) equivalencia y expresiones matemáticas, incluyendo ecuaciones e inecuaciones; y (c) pensamiento funcional. Por su parte Chimoni et al. (2018) detallaron cuatro dimensiones esenciales del pensamiento algebraico (a) la exploración de estructuras y relaciones en áreas claves como aritmética generalizada, pensamiento funcional y modelado (Kaput, 2008); (b) la comprensión de conceptos algebraicos fundamentales; (c) la aplicación de procesos de búsqueda de similitudes, diferencias y validación de estructuras y relaciones; y (d) el uso de formas de razonamiento, incluyendo lo abductivo, inductivo y deductivo para extraer conclusiones en contextos algebraicos. Con los antecedentes expuestos, identificamos distintos elementos que componen el pensamiento algebraico (ver figura 3-1).

Figura 3-1

Componentes del Pensamiento Algebraico



Nota. Figura adaptada de Chimoni et al. (2018)

Estos componentes son nuestra primera línea de búsqueda para identificar los elementos claves necesarios para realizar una búsqueda de la producción científica relacionada al pensamiento algebraico.

Método

Realizamos un estudio bibliométrico que permite evaluar y analizar el resultado sobre un tema de investigación académica, brindando información importante sobre la producción científica (Becerra, 2014).

El flujo de trabajo de Zupic y Čater (2015) nos llevó a organizar nuestro trabajo a través de cinco pasos:

1. Definición de la(s) pregunta(s) de investigación y elección de los métodos bibliométricos apropiados que puedan responder esta(s) pregunta(s).
2. Selección de la base de datos que contienen datos bibliométricos, filtrado del conjunto de documentos básicos y exportación de los datos de la base de datos seleccionada.
3. Uso del software bibliométrico para el análisis.
4. Decisión sobre el método de visualización que se utilizará en los resultados del tercer paso y uso del software adecuado para preparar la visualización.
5. Interpretación y descripción de resultados.

En este estudio hemos contemplado la producción científica relacionada con pensamiento algebraico publicada hasta diciembre 2022. Para la búsqueda de la documentación, utilizamos la base de datos Scopus. La elección de Scopus en nuestra revisión bibliométrica se sustenta en varias razones. En primer lugar, Scopus es ampliamente reconocida por su extensa cobertura de revistas científicas a nivel mundial, lo que nos permite tener acceso a una amplia variedad de publicaciones. El prestigio de Scopus en la comunidad académica queda respaldado por investigaciones recientes que destacan su calidad y relevancia en el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Falagas et al., 2008; Martín-Martín et al., 2021; Singh et al., 2021). En comparación con otras bases de datos, Falagas et al. (2008) expresaron que “para el análisis de citas, Scopus ofrece aproximadamente un 20% más de cobertura que Web of Science, mientras que Google Scholar ofrece resultados de precisión inconsistente” (p. 338).

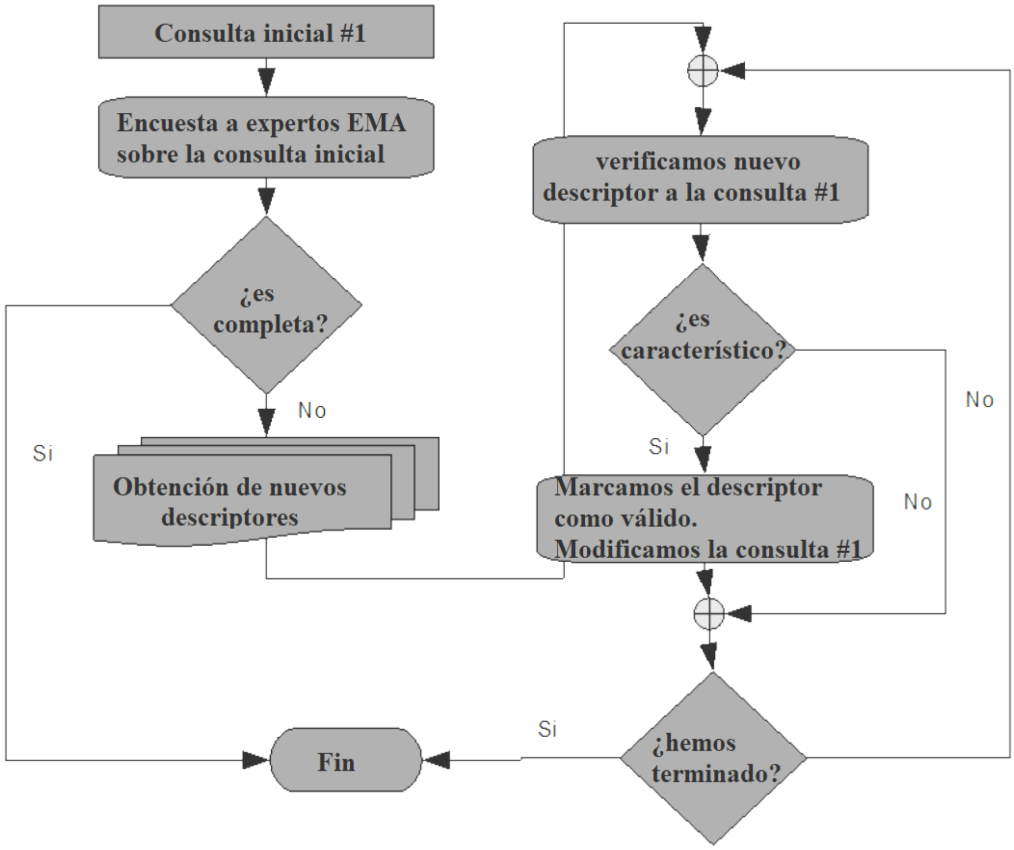
Con base en el marco teórico de este trabajo, realizamos una primera búsqueda con una fórmula que incluía los elementos clave sobre pensamiento algebraico recogidos en la figura 1. Utilizamos términos en inglés, por ser considerado el idioma universal en la literatura de investigación. Además, los requisitos de indexación en Scopus requieren que el título, resumen y palabras clave estén en inglés. Los términos de nuestra primera búsqueda fueron los siguientes:

"Algebraic thinking" OR "functional thinking" OR "early algebra" OR "generalized arithmetic" OR "pattern generalization" OR "algebraic reasoning".

Para la obtención y validación de los conceptos descriptores utilizados para nuestra búsqueda, seguimos los pasos establecidos en el trabajo de Adamuz-Povedano et al. (2013) los cuales detallamos en la figura 3-2.

Figura 3-2

Proceso de Elaboración del Listado de Descriptores



Nota. Figura extraída de Adamuz-Povedano et al. (2013).

Realizamos una primera búsqueda utilizando los términos iniciales, seguida por un proceso de consulta a expertos en pensamiento algebraico, quienes aportaron conceptos adicionales relevantes. Tras la evaluación colectiva de estos conceptos, llevamos a cabo una simulación de búsqueda para verificar su pertinencia. Algunos términos generaron una gran cantidad de documentos no pertinentes, como fue el caso de los términos "variables" o "ecuaciones". En la tabla 3-1 detallamos los términos clave sugeridos por los expertos, así como aquellos descartados con explicaciones sobre las decisiones tomadas.

Tabla 3-1

Términos Sugeridos por Expertos

Experto	Términos sugeridos	Términos descartados	Comentario
1	Arithmetic thinking; analytic;	Analytic	Descartamos el término "analytic" debido a que su inclusión incrementaba la muestra a más de 400.000 documentos.
2	Algebraic representations; variables; variable notation; symbolic notation; algebraic notation.	Variable	Descartamos el término "variable" debido a que su inclusión incrementaba la muestra a más de 2.000.000 documentos.
3	School algebra; Algebraic structure sense;	-	Los dos términos sugeridos fueron incluidos en nuestra búsqueda debido a que su integración no alteraba la muestra ni la cantidad de documentos obtenidos.
4	Pre-algebra; Algebraic skills; Algebraic problem solving; algebraic achievement	-	Los cuatro términos sugeridos fueron incluidos en nuestra búsqueda debido a que su integración no alteraba la muestra ni la cantidad de documentos obtenidos.
5	Algebra; equations; variable; algebraic symbolism; algebraic language;	Algebra; equations; variable y function.	Descartamos los términos “algebra”; “equations”; “variable” y “function " debido a que su inclusión incrementaba

Experto	Términos sugeridos	Términos descartados	Comentario
	function; arithmetic structure.		la muestra a más de 7.000.000 documentos.

Tras considerar la revisión de expertos y llevar a cabo un análisis adicional, hemos refinado nuestra fórmula de búsqueda inicial, lo que ha dado como resultado la siguiente:

"Algebraic thinking" OR "functional thinking" OR "early algebra" OR "generalized arithmetic" OR "pattern generalization" OR "algebraic reasoning" OR "Arithmetic thinking" OR "algebraic representations" OR "variable notation" OR "symbolic notation" OR "algebraic notation" OR "School algebra" OR "Algebraic structure sense" OR "pre-algebra OR "Algebraic skills OR "Algebraic problem solving" OR "Algebraic achievement" OR "Algebraic symbolism" OR "Algebraic language" OR "arithmetic structure"

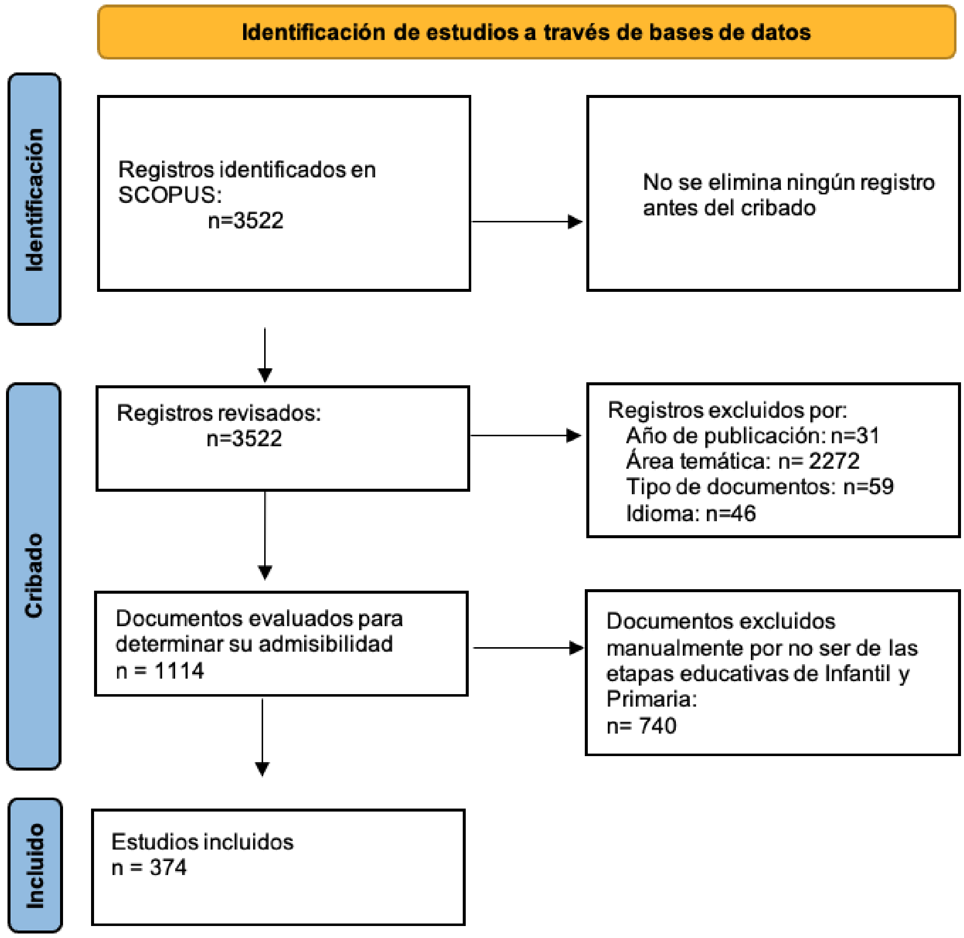
Para hacer la búsqueda de documentos en Scopus establecimos los criterios de inclusión que presentamos a continuación:

a) Año de publicación inicial abierto y final hasta diciembre de 2022.
b) Áreas temáticas: Matemáticas, Ciencias Sociales y Psicología.
c) Tipos de documentos: artículos, capítulos de libros y libros.
d) Idiomas: inglés y español.

En la figura 3-3 presentamos el diagrama de flujo realizado para llegar a nuestra muestra final, descargada el 21 de abril de 2023.

Figura 3-3

Identificación de la Muestra de Estudio



Para analizar los datos se han utilizado las herramientas que ofrecen Scopus y Bibliometrix (Aria y Cuccurullo, 2017).

Resultados

Como hemos mostrado en el apartado anterior, la muestra definitiva la componen 374 documentos centrados en el pensamiento algebraico en educación infantil y/o educación primaria. Resumimos a continuación los datos obtenidos de nuestra búsqueda:

a) Existen 656 autores que han publicado sobre pensamiento algebraico, de los cuales 84 han realizado algún trabajo de forma individual.
b) El promedio de documentos por año hasta diciembre de 2022 es de 7.9.
c) La media de citaciones por documento es de 16.85 aproximadamente.

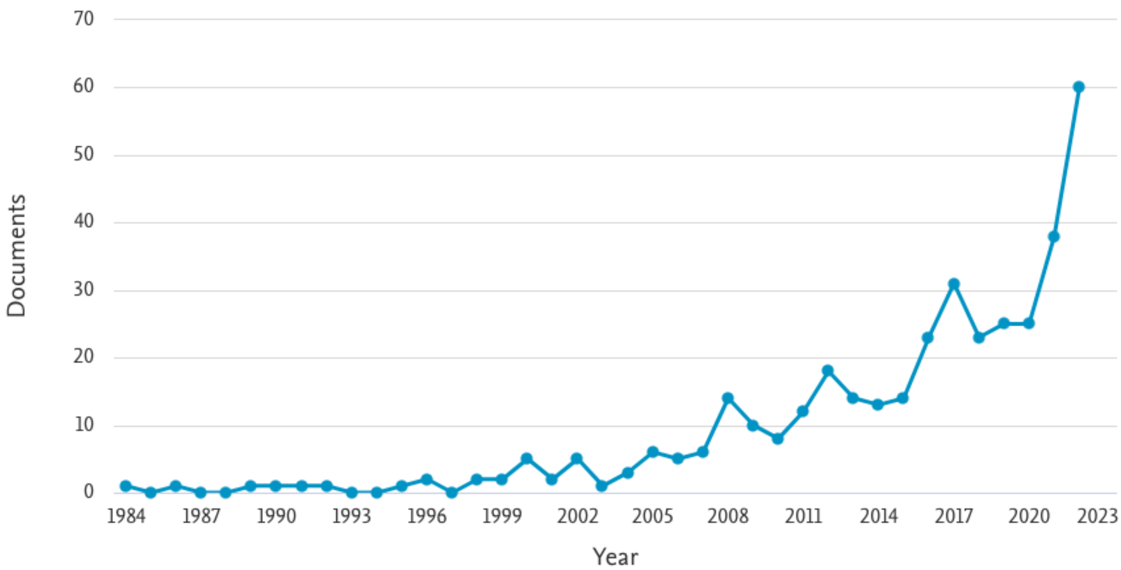
d) Existen 115 fuentes donde se han publicado los distintos trabajos.

e) La tasa de crecimiento anual de publicación es del 11.38%.

Mostramos la evolución diacrónica en la figura 3-4. El aumento interanual de las publicaciones indica la naturaleza creciente del campo de análisis. Se observa que la primera publicación indexada data de 1984. Hasta el año 1996 la producción oscila entre 0 y 1 publicaciones al año. Esto indica que en la década de los 90 el pensamiento algebraico en los niveles educativos considerados no era una temática en la que la comunidad investigadora en Educación Matemática estuviera especialmente interesada. A partir del año 2005 se manifiesta un crecimiento de las publicaciones, llegando al máximo en 2022, con 60 documentos.

Figura 3-4

Producción Diacrónica



Nota. Figura extraída de Scopus

En lo que respecta a la tipología de documentos publicados en esos años el 85,29% corresponde a artículos, el 11,50% se refiere a capítulos de libros y el 3,21% restante son libros. Los documentos se distribuyen en las tres áreas seleccionadas: 51.9% en Ciencias Sociales, 36.5% en Matemáticas y 11.5% en Psicología.

En la tabla 3-2, presentamos el listado de autores más prolíficos en pensamiento algebraico en educación infantil y primaria, considerando aquellos que cuentan con hasta siete trabajos relacionados. Esta selección se justifica no solo por la limitación de espacio en el documento, sino también por la intención de resaltar a los autores más relevantes dentro de este rango de publicaciones. Además, al limitar la selección a diez autores, hubo un empate en el número de citas entre dos de ellos, lo que resultó con once autores en la lista final. Observamos que la autora más productiva es María Blanton con 25 documentos en los años en los que hemos centrado el análisis, seguida de Bárbara Brizuela con 15 y Angela Gardiner con 14. En este listado global, pertenecientes a universidades españolas, se encuentran María C. Cañadas (Universidad de Granada) con 13 publicaciones; y Marta Molina (Universidad de Salamanca) con ocho documentos.

Tabla 3-2

Listado de Documentos por Autor

Autor	Número de documentos
Blanton, Maria	25
Brizuela, Bárbara M.	15
Gardiner, Angela M.	14
Cañadas, María	13
Knuth, Eric	11
Stephens, Anne	10
Kaput, James J.	8
Molina, Marta	8
Radford, Luis	8
Stroud, Rena	7
Wilkie, Karina J.	7

Existen dos formas de analizar los documentos más citados. Los más citados a nivel global son los documentos que se han citado en áreas más amplias como lo es la Didáctica de la Matemática. Al hablar de documentos citados de forma local nos referimos a aquellos documentos que han recibido un alto número de citas dentro de un contexto o ámbito particular, en este caso en pensamiento algebraico.

En relación con los documentos más citados globalmente, el trabajo realizado por Jacobs et al. (2007) es el más citado con un total de 185 citaciones. Le siguen los trabajos de

Mulligan y Mitchelmore (2009) con 150 citas y el trabajo de Kaput (2008) con 145 citaciones. En la tabla 3-3 recogemos los diez trabajos más citados, ordenados de mayor a menor número de citaciones.

Tabla 3-3

Documentos más Citados de Forma Global

Total citas	Autor	Año	Título
185	Jacobs et al.	2007	Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school
150	Mulligan y Mitchelmore	2009	Awareness of pattern and structure in early mathematical development
145	Kaput	2008	What is algebra? What is algebraic reasoning?
135	Mason y Pimm	1984	Generic examples: Seeing the general in the particular
133	Vukovic y Lesaux.	2013	The language of mathematics: Investigating the ways language counts for children's mathematical
130	Radford	2000	Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis
114	Carraher et al.	2008	Early algebra and mathematical generalization
112	Papic et al.	2011	Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning

Total citas	Autor	Año	Título
111	Blanton y Kaput	2005	Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning
105	Lee et al.	2009	The contributions of working memory and executive functioning to problem representation and solution generation in algebraic word problems

En relación con los documentos más citados de forma local, obtenemos la siguiente información (ver tabla 3-4):

Tabla 3-4

Documentos más Citados a Nivel Local

Total citas	Autor	Año	Título
41	Carraher et al.	2008	Early algebra and mathematical generalization
33	Blanton y Kaput	2005	Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning
27	Radford	2008	Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts
24	Jacobs et al.	2007	Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school
23	Brizuela et al.	2015	Children’s Use of Variables and Variable Notation to Represent Their Algebraic Ideas

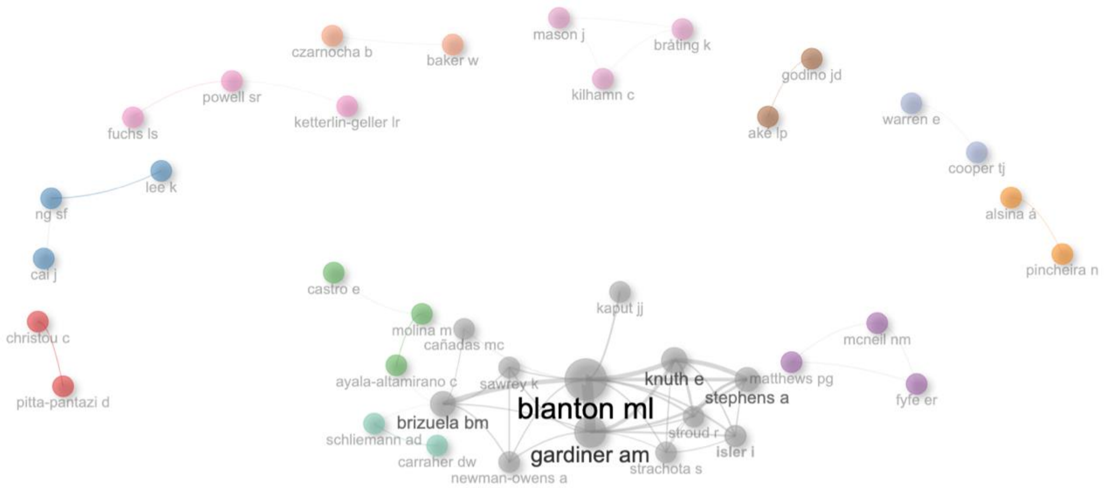
Total citas	Autor	Año	Título
22	Radford	2014	The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking
20	Blanton et al.	2015	A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships
19	Warren y Cooper	2008	Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8-year olds' thinking
19	Blanton et al.	2017	A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships
17	Mulligan y Mitchelmore	2009	Awareness of pattern and structure in early mathematical development

En el análisis de los documentos más citados en las investigaciones sobre pensamiento algebraico, destacan los trabajos de Carraher et al. (2008) y de Blanton y Kaput (2005). Sin embargo, los trabajos de Jacobs et al. (2007) y Mulligan y Mitchelmore (2009) también figuran entre los más citados de forma local, aunque no se encuentran en las primeras posiciones.

Desde la perspectiva de la autoría de documentos, un enfoque muy interesante es el análisis de las redes de colaboración entre los autores en una muestra. Una red de colaboración científica se representa como un conjunto de conexiones donde los participantes son los investigadores y los vínculos entre ellos representan sus colaboraciones como coautores. Este método de estudio se considera uno de los más sólidos en la investigación de colaboración científica (Glänzel y Schubert, 2004). Para graficar esta red, usamos el diseño Kamada-Kawai, teniendo en cuenta 50 nodos, con una fuerza de repulsión de 0,1 y un mínimo de 3 vértices (figura 3-5).

Figura 3-5

Red de Colaboración entre Autores con 3 trabajos o más



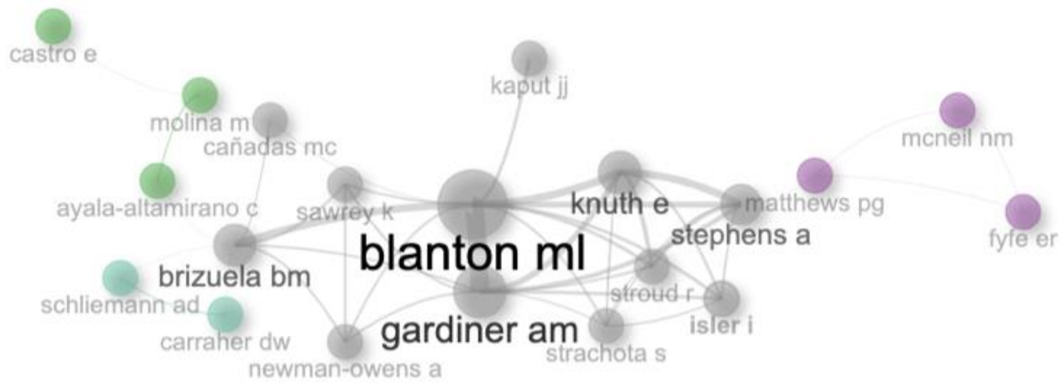
Nota. Figura extraída del programa Bibliometrix

En la figura 3-5 observamos que la autora que más destaca es Maria Blanton, seguida por Angela Gardiner, Bárbara Brizuela y Anne Stephens. Los clusters en la tabla representan grupos de autores que han colaborado en múltiples trabajos, lo que refleja una colaboración sólida entre estos investigadores. Por ejemplo, el cluster 8 incluye autores como Blanton, Brizuela, Gardiner, Cañadas y otros, indicando que estos autores tienen un vínculo de colaboración muy fuerte.

Focalizando nuestra atención en la red central, por ser el conjunto más grande de autores conectados, observamos en la figura 3-6 que en ella están relacionados 29 autores, repartidos en nueve clústeres, siendo Maria Blanton el nodo principal de la red con una fuerza de enlace de 26,87. Entendiendo por fuerza de enlace como un valor “proporcional a la relación entre, por un lado, el número observado de co-ocurrencias de los objetos i y j y, por otro, el número esperado de co-ocurrencias de los objetos i y j bajo el supuesto de que las ocurrencias de i y j son estadísticamente independientes” (Eck y Waltman, 2009, p. 1637). El hecho de que esta autora sea el nodo central de la red implica que es la que más conexiones tiene con los otros autores en la red, en consecuencia, es una de las autoras más activas en términos de colaboración.

Figura 3-6

Red principal de Co-autoría

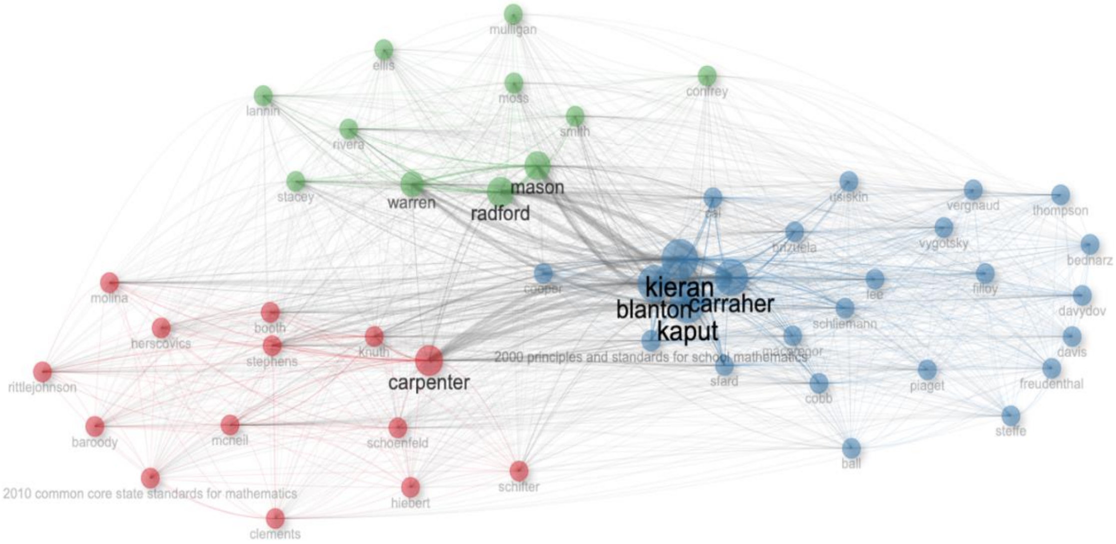


Nota. Figura extraída del programa Bibliometrix

A continuación, analizamos la estructura intelectual de la muestra de estudio a través de la red de co-citación, en la que los nodos representan los documentos científicos, y los enlaces entre los nodos indican la co-citación de esos documentos. Esto implica que si dos documentos son co-citados con frecuencia en la literatura científica, sus nodos estarán más cerca en la red. Así, en la figura 3-7 vemos que Blanton, Kieran, Kaput y Carraher son autores co-citados frecuentemente. Por otro lado, vemos que Radford y Mason también son autores bastante co-citados. Esta proximidad en la red refleja la interconexión de sus investigaciones y la influencia mutua que ejercen en sus respectivos campos de estudio. Sus contribuciones han sido fundamentales en el campo de investigación sobre el pensamiento algebraico en la educación primaria.

Figura 3-7

Red principal de Co-Citación

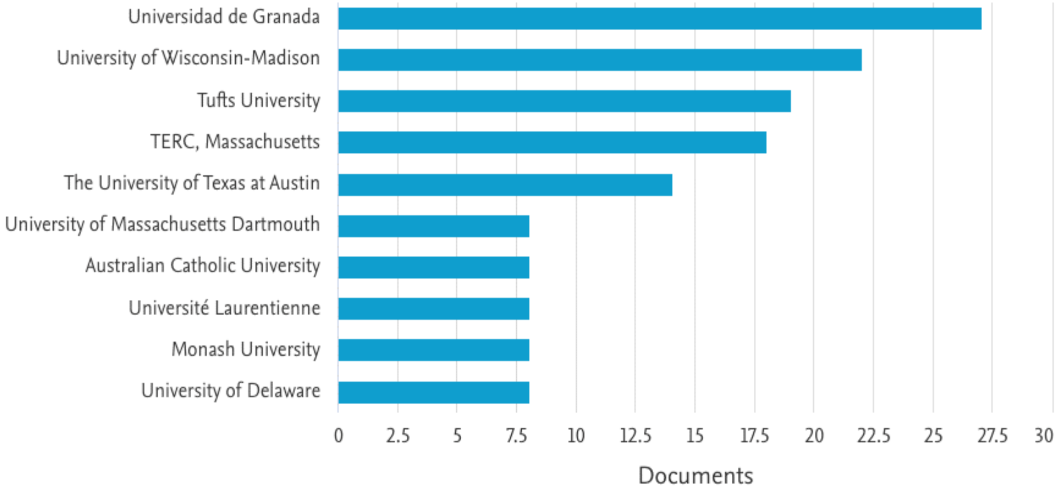


Nota. Figura extraída del programa Bibliometrix

Respecto a los países que más producciones han realizado sobre el tema en Scopus, destaca Estados Unidos con 158 documentos incluidos en Scopus. Le siguen España, con 43 documentos y Australia con 31. Independientemente del número de investigadores en el área en cada país, si centramos el análisis de la producción en las instituciones a las que pertenecen los autores firmantes de las publicaciones, en la figura 3-8 observamos que la Universidad de Granada (España) es la más prolífera en la publicación de trabajos relacionados con el pensamiento algebraico en las etapas de infantil y primaria (27). En Estados Unidos sobresale la Universidad de Wisconsin-Madison con 22 documentos.

Figura 3-8

Producción por Instituciones

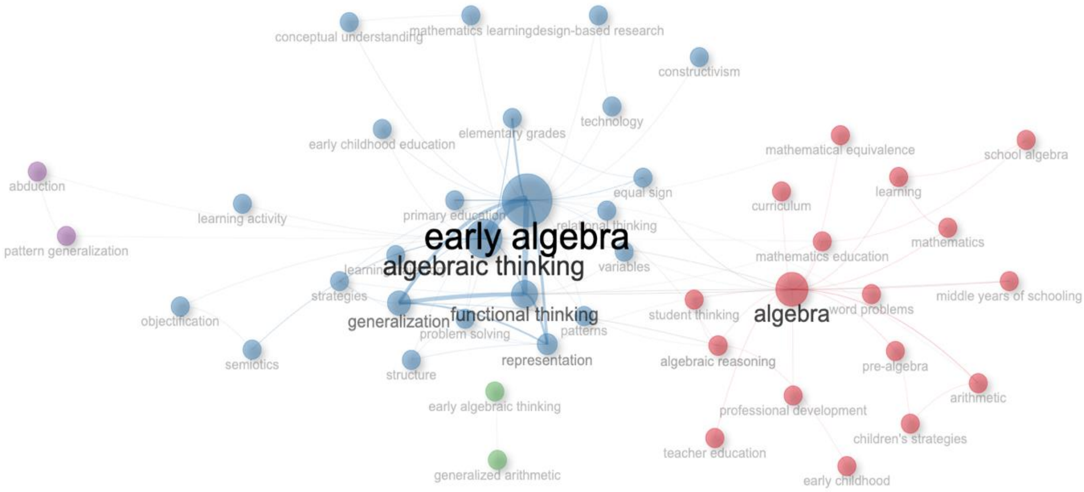


Nota. Figura extraída de Scopus

En la figura 3-9 mostramos el grafo realizado a partir de las palabras clave dadas por los autores de los trabajos de la muestra analizada. Se ha generado una red de 50 nodos con una fuerza de repulsión de 0,1. En ella se observa que los términos *early algebra*, pensamiento algebraico y algebra son los que se han utilizado con mayor frecuencia dentro de los trabajos publicados sobre pensamiento algebraico en Scopus. Además, destacan los términos pensamiento funcional, generalización, patrones y generalización, que coinciden con las distintas aproximaciones para abordar el pensamiento algebraico.

Figura 3-9

Red de Co-ocurrencia de Términos Claves

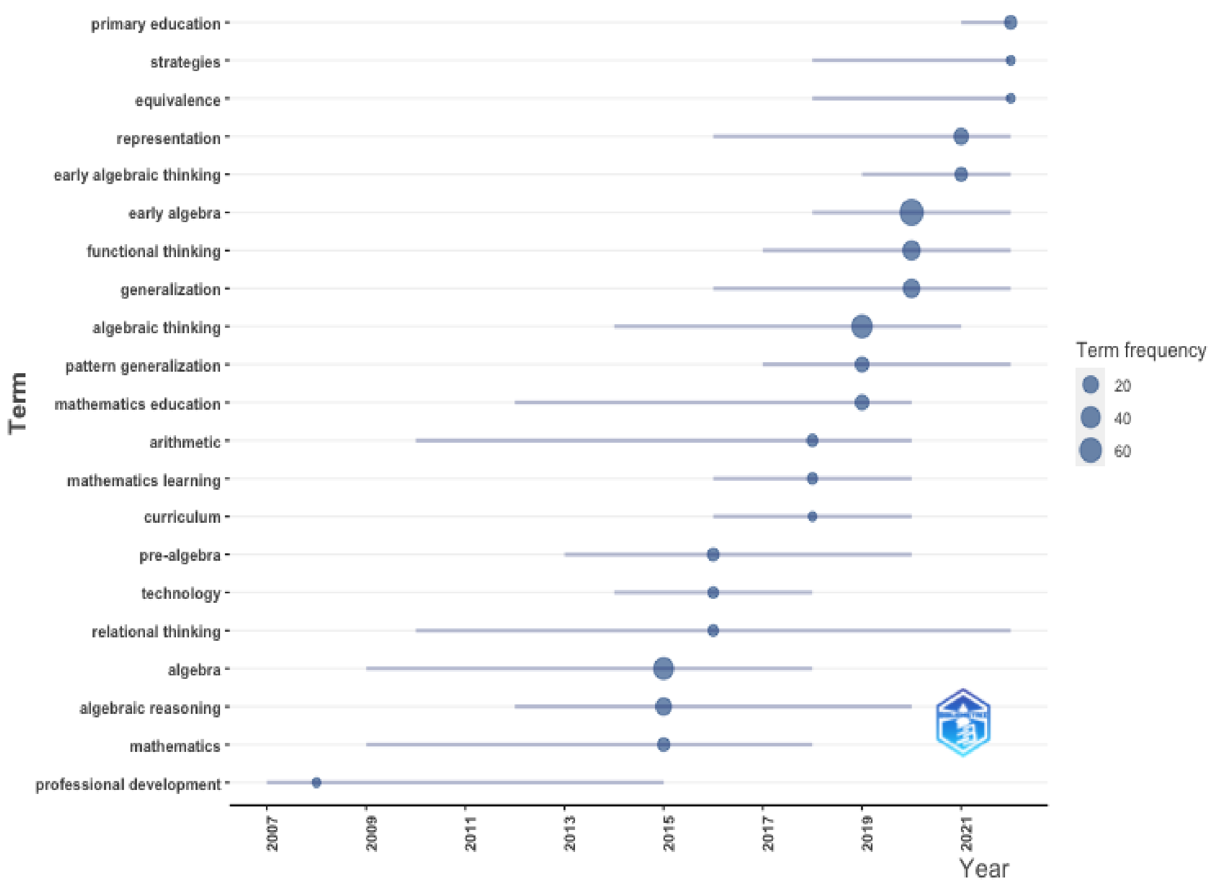


Nota. Figura extraída del programa Bibliometrix

En la figura 3-10, presentamos el análisis de tendencias temáticas (trend topics) relacionadas con los términos clave utilizados en diversas investigaciones sobre el pensamiento algebraico.

Figura 3-10

Tendencias Temáticas



Nota. Figura extraída del programa Bibliometrix

En esta figura, observamos cómo ciertos temas o conceptos experimentan un aumento significativo durante un período de tiempo específico. Esto se refleja en el incremento de la cantidad de publicaciones, citas y otras métricas bibliométricas asociadas con temas particulares. Destacan algunas palabras clave, como *early algebra*, algebraic thinking y algebra, que muestran un aumento gradual en su frecuencia a lo largo de los años, señalando un creciente interés en este campo de investigación. Destacamos que entre 2019 al 2022 el interés se ha enfocado en estudios sobre pensamiento funcional, patrones y equivalencias, componentes del pensamiento algebraico. Además de investigaciones sobre generalización y representación, dos de las prácticas algebraicas. También se ha evidenciado un aumento en las investigaciones relacionadas a estrategias.

En relación con términos que no se encuentran en las tendencias temáticas observadas, destacamos el término justificaciones que es parte de las prácticas algebraicas. El hecho de que no se esté abordando ampliamente este tema en los estudios mencionados podría representar una oportunidad interesante para profundizar en futuras investigaciones.

Discusión y conclusiones

Este trabajo analiza la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus, abarcando desde 1984 hasta diciembre de 2022. Identificamos autores relevantes, fuentes de publicación predominantes, países líderes en producción científica y las palabras clave más empleadas en esta área.

Al cuantificar la producción científica observamos que los documentos obtenidos son un tercio del total de los documentos filtrados. Obtuvimos 374 documentos sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria. Observamos un crecimiento en la investigación desde el año 2000, con un aumento significativo a partir de 2016, publicándose más de 20 estudios anuales. Esto demuestra un creciente interés en la comunidad investigadora en Didáctica de la Matemática. Molina (2009) destacó que este interés es por el potencial temprano de los niños en el pensamiento algebraico.

La diversidad en las áreas de publicación resalta la amplitud del aprendizaje matemático. Aunque la mayoría de los estudios se localizan en revistas especializadas, es relevante señalar que más del 50 % de las investigaciones en pensamiento algebraico se publican en el ámbito de las Ciencias sociales. Esta distribución destaca la multidimensionalidad del aprendizaje matemático y su significativa aplicación en el contexto social.

Estados Unidos se destaca por su notable cantidad de publicaciones sobre pensamiento algebraico en Scopus. España, como el segundo país más productivo en este tema, muestra a la Universidad de Granada como un referente internacional en la producción de trabajos relacionados con este ámbito.

Las colaboraciones en el ámbito de la investigación son pilares fundamentales para el desarrollo y la amplitud del conocimiento. El análisis realizado para las investigaciones sobre pensamiento algebraico en este trabajo da una visión global sobre la situación estudiada, además destaca la importancia de la colaboración entre investigadores. En ese sentido, destacamos a Maria Blanton y Bárbara M. Brizuela, quienes, además de ser de las autoras que mayor producción tienen en esta temática, son las que tienen un mayor trabajo colaborativo con otros autores, como ha podido verse en las redes de colaboración mostradas en los resultados. Las investigaciones de autores destacados en el campo del pensamiento algebraico, como Maria Blanton y las colaboraciones con Carolyn Kieran, James J. Kaput, y David W. Carraher han tenido un impacto significativo en Educación Matemática y, más específicamente, en el estudio del *early algebra*. Esta forma de trabajo colaborativo ha enriquecido este campo de investigación, fomentando avances relevantes y contribuyendo al progreso de esta área de estudio.

Estas investigaciones han proporcionado valiosas contribuciones a la comprensión y promoción del pensamiento algebraico en estudiantes de educación primaria e infantil. Sus trabajos se han centrado en la identificación de conceptos clave y prácticas pedagógicas efectivas que fomentan la adquisición temprana de habilidades algebraicas, destacando la importancia de introducir elementos algebraicos desde edades tempranas para mejorar la comprensión y el rendimiento matemático de los estudiantes. Asimismo, han promovido enfoques pedagógicos innovadores para trabajar el pensamiento algebraico en contextos de educación infantil y primaria, lo que ha influido en la modificación de programas curriculares de distintos países.

En relación con el objetivo de identificar los principales conceptos abordados en los estudios relacionados con el pensamiento algebraico, observamos que álgebra, *early algebra* y pensamiento algebraico, son los más usados y han sido consistentemente utilizados a lo largo de los años en la literatura académica sobre pensamiento algebraico. Este hecho refleja la importancia de estos conceptos como pilares fundamentales de la investigación en el campo. También observamos que los términos pensamiento funcional y generalización se utilizan con frecuencia desde el año 2016 en adelante. Esto lo relacionamos con el gran interés por saber y ayudar a los estudiantes a desarrollar las herramientas necesarias para afrontar con mayor éxito el álgebra en cursos superiores. Estudios como los de Goñi-Cervera et al. (2022) examinaron estrategias y generalizaciones en estudiantes con TEA, señalando la relación entre el pensamiento funcional y el espectro autista. Kieran (2022) contextualizó la evolución histórica y teórica del pensamiento algebraico temprano, resaltando su multidimensionalidad. Mientras tanto, Pinto et al. (2022) exploraron cómo estudiantes de tercero de primaria abordaban problemas de pensamiento funcional, evidenciando diferentes niveles de capacidad para generalizar entre ellos. Estos trabajos destacan la importancia de desarrollar habilidades algebraicas desde edades tempranas.

El término profesional development es un tema que ha dejado de usarse. Hemos observado que este tema en un comienzo se centraba en la mejora de habilidades específicas de los docentes, evolucionado a un cambio más específico, como el desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes de primaria. Actualmente no solo de investiga en mejorar las habilidades y prácticas de los profesores, sino de cómo esas mejoras se traducen en el aprendizaje de los estudiantes. La ausencia del término justificación en las tendencias temáticas observadas revela la necesidad de una mayor atención investigativa hacia esta práctica algebraica. Estas justificaciones no solo validan el proceso algebraico para resolver problemas, sino que también contribuyen a una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Esta carencia en los estudios mencionados señala una oportunidad interesante para futuras investigaciones, ya que explorar este aspecto podría enriquecer significativamente nuestra comprensión del pensamiento algebraico y su aplicación en entornos educativos y prácticos.

Por último, nuestros datos revelan que, además de los conceptos como pensamiento funcional, patrones, equivalencias, y otros elementos relacionados con el pensamiento algebraico están ganando importancia en la literatura actual. Esto refleja una expansión en las áreas de estudio y la diversificación de enfoques en la investigación.

Con los resultados obtenidos, concluimos que las investigaciones sobre pensamiento algebraico son un tema de interés en Educación Matemática. Esto ha sido un motivo para que distintos países hayan realizado cambios en sus currículos, identificando los beneficios que otorga para el aprendizaje de los estudiantes. La importancia de este tipo de estudio nos ayuda a comprender la actual situación en la producción de pensamiento algebraico, un tema de gran relevancia presente en los ajustes curriculares de diversas naciones. Como señalan Maz et al. (2009) este enfoque proporciona elementos objetivos para identificar las figuras clave en la Educación Matemática, delineando los centros de investigación y el grado de actualidad y colaboración en este campo.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033, Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y una Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075. Así mismo, agradecemos a Ángel Alsina, Bárbara M. Brizuela, Juan Godino; Marta Molina, y Rodolfo Vergel por participar como expertos en la validación de los términos claves utilizados para este estudio.

Referencias

Adamuz-Povedano, N., Jiménez-Fanjul, N. y Maz-Machado, A. (2013). Búsqueda de descriptores que caractericen una disciplina emergente en WoS y SCOPUS: el caso de la Educación Matemática. *Biblios: Revista Electrónica de Ciencias de la Información*, *50*, 1-15. https://doi.org/10.5195/BIBLIOS.2013.80

Aria, M. y Cuccurullo, C. (2017). Bibliometrix: An R-tool for comprehensive science mapping analysis. *Journal of Informetrics*, *11*(4), 959-975. https://doi.org/10.1016/j.joi.2017.08.007

Andini, M. y Prabawanto, S. (2021). Relational thinking in early algebra learning: A systematic literature review. *En Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1806, No. 1, p. 012086). IOP Publishing. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1806/1/012086

Becerra, L. D. A. (2014). Estudio bibliométrico sobre uso de métodos y técnicas cualitativas en investigación publicada en bases de datos de uso común entre el 2011-2013. *Revista Iberoamericana de Psicología*, *7*(2), 67-76.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grade students' capacity for functional thinking. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 135-42). PME.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En Cai, J. y Knuth, E. (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspective*. (pp. 5-23). Springer https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. y Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(1), 39-87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Bracho-López, R., Torralbo-Rodríguez, M., Maz-Machado, A. y Adamuz-Povedano, N. (2014). Thematic research trends in mathematics education in Spain. *Bolema - Mathematics Education Bulletin, 28*(50), 1077-1094. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a04

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 181-190). SEIEM.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Callejo, M. L., García-Reche, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (10), 5–25. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Cañadas, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 73*, 7-13.

Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E.

Badillo, y P. Ivars. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3–9). SEIEM.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2018). Cultivating early algebraic thinking. En *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5-to 12-Year-Olds* (pp. 107-138). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). SEIEM.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, *98*, 57-76. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x

Donoghue, E. F. (2001). Mathematics education in the United States: Origins of the field and the development of early graduate programs. En R. Reys y J. Kilpatrick (Eds.), *One field, many paths: U.S Doctoral programs in Mathematics Education*. American Mathematical Association. https://doi.org/10.1090/cbmath/009/01

Eck, N. J. V. y Waltman, L. (2009). How to normalize cooccurrence data? An analysis of some well-known similarity measures. *Journal of the American society for information science and technology*, *60*(8), 1635-1651. https://doi.org/10.1002/asi.21075

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA*, *14*(3), 204-225. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.11378

Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., Maz-Machado, A., Bracho-López, R., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2011). Producción científica internacional en educación matemática en SSCI y SCOPUS (1980-2009): construcción de descriptores. En J. L.

Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2011* (pp. 325-335). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *Proceedings of 8th international congress on mathematical education: Selected lectures* (pp. 271-290). SAEM Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151.

Kriegler, S. (2007). Just what is algebraic thinking? *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 430-435.

Lins, R. y Kaput, J. J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (pp. 47-70). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_4

Martín-Martín, A., Thelwall, M., Orduna-Malea, E. y Delgado López-Cózar, E. (2021). Google Scholar, Microsoft Academic, Scopus, Dimensions, Web of Science, and OpenCitations' COCI: a multidisciplinary comparison of coverage via citations. *Scientometrics*, *126*(1), 871-906. https://doi.org/10.1007/s11192-020-03690-4

Maz, A., Torralbo, M., Hidalgo, M. y Bracho-López, R. (2009). Los simposios de la sociedad española de investigación en educación matemática: una revisión bibliométrica. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 323-331). SEIEM.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6:*

Educación Matemática en la Infancia, *2*(1), 24-40. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.24-40

Ministerio de Educación. (2012). *Bases curriculares Primero a Sexto Básico. Chile.*

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, 52, 24386-24504.

Molina, M. (2007). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 53-70). SEIEM.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Narváez, R. y Cañadas. M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. *PNA*, *17*(3), 239-264. https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación matemática*, *33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(6), 1183-1202.

Reys, R. E. y Kilpatrick, J. (2001). *One field, many paths: U.S Doctoral programs in Mathematics Education* (Vol. 9). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/009

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V. y Chauzova, V. (2022). A systematic review on algebraic thinking in education.

Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18(1), em2065. https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Singh, V. K., Singh, P., Karmakar, M., Leta, J. y Mayr, P. (2021). The journal coverage of Web of Science, Scopus and Dimensions: A comparative analysis. *Scientometrics, 126*(6), 5113-5142. https://doi.org/10.1007/s11192-021-03948-5

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching children mathematics, 22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM

Vallejo-Ruiz, M. (2005). *Estudio longitudinal de la producción española de tesis doctorales en Educación Matemática (1975-2002)*. Tesis doctoral sin publicar. Universidad de Granada.

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior, 62*, 100866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866

Zupic, I. y Čater, T. (2015). Bibliometric methods in management and organization. *Organizational research methods, 18*(3), 429-472. https://doi.org/10.1177/1094428114562629

3.2. Antecedentes Relacionados con la Tesis Doctoral

En este segundo apartado de antecedentes, describiremos distintas investigaciones relacionadas con nuestro tema de investigación. Estos trabajos no solo han sido fundamentales para nuestros estudios, sino que también nos han permitido contextualizar y comprender los avances en este campo.

Hemos identificado distintos trabajos que abordaron temas como la generalización, representación de relaciones funcionales, la utilización de diversas estrategias en contextos algebraicos, etc. Un hallazgo destacado es la participación activa del investigador-docente en este proceso matemático. Dado que nuestro objetivo de investigación es analizar la generalización en estudiantes de los primeros cursos de educación primaria en un contexto funcional del pensamiento algebraico y las mediaciones empleadas, es crucial comprender cómo se han abordado estos temas en investigaciones previas.

3.2.1. Pensamiento Algebraico

En el último tiempo se han realizado diversas investigaciones sobre pensamiento algebraico que han analizado distintos temas relacionados con esta temática. Algunos trabajos nos ofrecen una mirada sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de primaria, destacando la capacidad que tienen para abordar tareas relacionadas a este tipo de pensamiento matemático. Carraher y Schliemann (2019) realizaron una investigación sobre el pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en educación primaria (6-12 años) en Estados Unidos. Los autores destacaron el prometedor potencial de los estudiantes de educación primaria para desarrollar habilidades de pensamiento algebraico. También resaltaron los desafíos relacionados con la implementación de actividades de pensamiento algebraico en el aula y la formación del profesorado como áreas clave a abordar. En el estudio realizado por Otten et al. (2019) quienes trabajaron con estudiantes de quinto curso, investigaron cómo las experiencias motoras y sensoriales de los estudiantes con la balanza influyó en el desarrollo de su razonamiento relacionado con la resolución de ecuaciones lineales. En los resultados obtenidos, destacaron un avance en el nivel de razonamiento algebraico de los estudiantes. Durante su trabajo con la balanza, los estudiantes aplicaron estrategias algebraicas como reestructuración, aislamiento y sustitución, y luego las utilizaron para resolver ecuaciones lineales en contextos nuevos. Afonso et al. (2019) trabajaron con estudiantes de tercer curso de dos escuelas primarias de Sudáfrica. Analizaron el impacto del trabajo con patrones en el desarrollo del pensamiento algebraico de los niños. En sus resultados indicaron que los estudiantes tienen el potencial para desarrollar pensamiento algebraico, especialmente en términos de pensamiento recursivo y funcional al abordar problemas de patrones. Chimoni et al. (2022) trabajaron con estudiantes de quinto curso, donde investigaron el papel de las aplicaciones en línea (applets) en lecciones de álgebra temprana, comparando el efecto de dos tipos diferentes de módulos de intervención en el desarrollo de las habilidades de pensamiento algebraico temprano de los estudiantes. El primer módulo de intervención utilizó applets abiertos en contextos de la vida real, mientras que el segundo módulo de intervención utilizó applets cerrados en contextos de matemáticas puras. Sus resultados mostraron que los estudiantes que participaron en el módulo "abierto/real" experimentaron una mejora estadísticamente significativa en el pensamiento funcional en comparación con los estudiantes que participaron en el módulo "cerrado/puro". Sus hallazgos sugieren implicaciones pedagógicas importantes para el diseño de lecciones de álgebra temprana que aprovechen la tecnología educativa disponible, destacando la eficacia de los applets abiertos en contextos de la vida real para mejorar el pensamiento funcional de los estudiantes. Strachota et al. (2023) realizaron un estudio con estudiantes de educación infantil, primero y segundo curso (5-8 años). Su trabajo se centró en investigar cómo las herramientas (cubos, tarjetas y los dedos de los estudiantes) ayudaron a los estudiantes a razonar sobre los números pares e impares. Los participantes formaron parte de una intervención de álgebra que duró un año y se les pidió generalizar, representar, justificar y razonar con estructuras y relaciones matemáticas, específicamente relacionadas con la paridad de números. En sus resultados destacaron las posibilidades y limitaciones en el uso de estas herramientas en el razonamiento sobre las propiedades de los números pares e impares. Además, esta investigación proporcionó evidencia de que los estudiantes son capaces de realizar tareas sobre pensamiento algebraico.

Existen estudios que han descrito cómo la labor del docente fue relevante para trabajar con el pensamiento algebraico. Blanton y Kaput (2005) presentaron los resultados de un estudio de caso donde exploraron de qué manera y en qué medida un docente pudo construir un aula que apoyara el desarrollo de las habilidades de pensamiento algebraico de los estudiantes. Los resultados indicaron que el docente pudo integrar el pensamiento algebraico en la instrucción de manera planificada y espontánea, lo que condujo a cambios positivos en las habilidades de razonamiento algebraico de los estudiantes. Jacobs et al. (2007) realizaron una investigación con 19 centros de educación primaria en California, enfocándose en el pensamiento algebraico y el estudio de relaciones. Los profesores participantes desarrollaron más estrategias matemáticas, especialmente aquellas relacionadas con el pensamiento relacional, en comparación con los no participantes. Los estudiantes de las clases participantes demostraron una comprensión mayor del signo igual y emplearon más estrategias relacionadas con el pensamiento relacional durante las entrevistas en comparación con los estudiantes de clases no participantes.

Finalmente, se han desarrollado investigaciones que han considerado la planificación y ejecución de diversas sesiones, con el propósito de analizar el pensamiento algebraico para contrastar acontecimientos a lo largo de un periodo de tiempo, diferentes cursos o contextos culturales. En el estudio realizado por Chrysostomou y Christou (2019) quienes trabajaron con estudiantes entre los 10 y 13 años, analizaron el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. Los autores destacaron que el pensamiento algebraico es una habilidad multifacética que consta de tres aspectos principales: (a) razonamiento sobre la covariación, (b) generalización de propiedades aritméticas y (c) capacidades relacionadas con la sintaxis algebraica. Estos aspectos involucraban habilidades específicas como la formulación de relaciones utilizando símbolos algebraicos. Los autores identificaron cuatro grupos de estudiantes con diferentes perfiles de pensamiento algebraico: pensamiento pre-algebraico, pensamiento protoalgebraico-procedimental, pensamiento algebraico simbólico-relacional y pensamiento algebraico global-estructural. En sus resultados también revelaron una tendencia constante en el nivel de dificultad en todas las capacidades de pensamiento algebraico, indicando un desarrollo específico desde una perspectiva más procedimental hacia una más estructural en el pensamiento algebraico. Chimoni et al. (2021) trabajaron con estudiantes de quinto curso, para los que diseñaron dos tipos de cursos instructivos con el objetivo de respaldar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de primaria. Ambos cursos abordaron tres áreas fundamentales del álgebra: aritmética generalizada, pensamiento funcional y lenguajes de modelización La diferencia clave entre los cursos radicó en las tareas utilizadas. El primer curso se basó en investigaciones guiadas matemáticamente puras, poniendo énfasis en el andamiaje de pasos en contextos puramente matemáticos. Por otro lado, el segundo curso se centró en exploraciones abiertas aplicadas, destacando preguntas más abiertas en contextos cotidianos aplicados. En sus resultados indicaron que el segundo curso tuvo mejores resultados de aprendizaje que el primero. La contribución más importante fue la validación del impacto de los diferentes tipos de tareas matemáticas en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes basado en datos empíricos. Ventura et al. (2021) realizaron un trabajo con el objetivo de comprender cómo los estudiantes de educación infantil y primer curso entendían y utilizaban las variables y el simbolismo algebraico en el contexto de las expresiones algebraicas. En sus resultados revelaron cambios cualitativos en el pensamiento sobre cantidades indeterminadas en la mayoría de los estudiantes participantes. A medida que avanzaban en el experimento de enseñanza, pasaron de un nivel de pensamiento pre-variable, donde los estudiantes no percibían una cantidad variable en un contexto matemático, ni utilizan símbolo para representar dicha cantidad, a un nivel donde podían representar cantidades indeterminadas como operaciones explícitas con cantidades indeterminadas. Destacaron que estas trayectorias de aprendizaje ofrecieron valiosas perspectivas para el diseño de intervenciones que respalden el desarrollo del pensamiento algebraico en niños pequeños. Hunter y Miller (2022) trabajaron con estudiantes de segundo curso. Este trabajo se enfocó en cómo estudiantes culturalmente diversos identificaban estructuras matemáticas en patrones de crecimiento contextuales y las estrategias de enseñanza que los ayudaban en este proceso. Revelaron que las tareas contextuales llevaron a los estudiantes a reconocer diversas estructuras matemáticas. Se utilizaron estrategias pedagógicas específicas, como el uso de diferentes representaciones (pictóricas, numéricas, tabulares y de lenguaje natural), discusiones en el aula, respuesta al pensamiento de los estudiantes y fomento de la identificación de patrones distantes. En los resultados obtenidos, destacaron que la incorporación de patrones indígenas y acciones pedagógicas basadas en valores culturales lograron involucrar a los estudiantes en el razonamiento algebraico temprano. Esto demuestra la importancia de la inclusión de la cultura en la enseñanza de las matemáticas para promover la comprensión y el rendimiento de los estudiantes diversos. En la investigación realizada por Schifter y Russell (2022) trabajaron con datos recopilados de cinco proyectos realizados entre 1993 y 2022. Indagaron cómo los estudiantes generaron representaciones que respaldan su pensamiento algebraico temprano en el contexto de la aritmética generalizada. Entre sus hallazgos destacaron que las representaciones en forma de imágenes, diagramas, disposiciones de objetos manipulables o contextos de historias pueden ayudar a los estudiantes a distinguir entre diferentes operaciones. Estos estudiantes pudieron utilizar estas representaciones para ilustrar relaciones en casos específicos y extenderlas a clases de números, lo que les permite probar afirmaciones generales. Por último, Chimoni et al. (2023) trabajaron con estudiantes de cuarto, quinto, sexto y séptimo curso (9-12 años). Investigaron sobre la relación entre el pensamiento algebraico y las habilidades cognitivas de dominio general. Se evaluaron las habilidades de los estudiantes en pensamiento algebraico a través de tres categorías de tareas: aritmética generalizada, pensamiento funcional y lenguajes de modelado. Además, se evaluaron sus habilidades cognitivas generales, incluyendo razonamiento analógico, serial, espacial y deductivo. En sus resultados indicaron que el razonamiento analógico y serial estaban relacionados con las habilidades en aritmética generalizada, mientras que el razonamiento espacial se asociaba con el pensamiento funcional y los lenguajes de modelado. El razonamiento deductivo se correlacionó con las tres categorías de tareas. También se analizaron las diferencias entre estudiantes de diferentes cursos.

Estos antecedentes en general nos entregan una comprensión integral del desarrollo y las influencias del pensamiento algebraico en estudiantes de primaria, destacando la diversidad de componentes y estrategias que pueden impactar positivamente en este proceso cognitivo.

3.2.2. Pensamiento Funcional

En nuestra Tesis Doctoral nos enfocamos en el pensamiento funcional, uno de los componentes del pensamiento algebraico. Sobre este tema se han realizado diversas investigaciones que han estudiado y abordado distintas aproximaciones. Algunos estudios han evidenciado las capacidades que tienen los estudiantes de primaria para trabajar con pensamiento funcional. Es el caso de Blanton y Kaput (2004) quienes realizaron un trabajo donde mostraron cómo los estudiantes de cursos elementales desarrollaron y expresaron funciones. Los datos se analizaron según las representaciones que utilizaron los estudiantes, la progresión en su lenguaje matemático y las operaciones que emplearon, y cómo prestaron atención a una o más cantidades variables. Los autores destacaron en sus resultados que los estudiantes son capaces de desarrollar un pensamiento funcional en cursos más tempranos de lo que tal vez se pensaba. En particular, los datos sugieren que los estudiantes pueden avanzar en el pensamiento covariacional, desde educación infantil y son capaces de describir cómo se corresponden las cantidades desde el primer curso.

Existen otros antecedentes que muestran las estrategias que utilizan los estudiantes al resolver tareas sobre pensamiento funcional. Es el caso del trabajo realizado por Morales et al. (2018) quienes trabajaron con estudiantes de primero de educación primaria (6 años). Se centraron en las relaciones funcionales y las estrategias que empleaban estos estudiantes en la resolución de problemas que involucran funciones. Encontraron que la relación funcional más frecuentemente identificada fue la correspondencia. Algunos también identificaron la relación de covariación. Además, evidenciaron un vínculo entre ambas relaciones funcionales y las estrategias de operatoria y/o conteo al resolver tareas de generalización que involucraban funciones. Ramírez et al. (2022) trabajaron con estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años) donde su objetivo principal fue examinar cómo las características de los problemas de palabras se relacionan con el pensamiento funcional de los estudiantes y su capacidad para generalizar funciones. Los estudiantes mostraron potencial para el pensamiento funcional antes de aprender sobre variables, evidenciándose de mejor forma cuando trabajaron con problemas que involucran una función aditiva. Cuando generalizaban relaciones funcionales, tendían a hacerlo verbalmente o con ejemplos genéricos en lugar de representaciones simbólicas. En el trabajo realizado por Pinto et al. (2022) trabajaron con estudiantes de tercero de primaria (8-9 años) analizando cómo un grupo de estudiantes abordaron un problema de pensamiento funcional, centrándose en cómo relacionaron y representaron las relaciones entre variables. A pesar de no estar acostumbrados a este tipo de problemas, once estudiantes lograron ir más allá de los cálculos aritméticos, encontrando relaciones entre las variables. Además, tres estudiantes lograron generalizar utilizando el lenguaje natural como herramienta efectiva. Sin embargo, algunos estudiantes identificaron regularidades para diferentes valores específicos, pero no representaron la generalización de manera clara. Estos hallazgos destacan la capacidad de los estudiantes para comprender y aplicar conceptos funcionales, incluso si no están familiarizados con ellos previamente. Finalmente, Torres et al. (2022a) realizaron un estudio con estudiantes de segundo de primaria (7-8 años) analizando cómo los estudiantes trabajaron con tablas al abordar funciones. Los resultados mostraron que los estudiantes organizaron los valores de las variables en columnas y etiquetaron los títulos para identificar las variables involucradas. Además, se observaron estructuras o patrones que los estudiantes identificaron como regularidades entre las variables en las funciones. Posteriormente en otro trabajo realizado por Torres et al. (2022b) trabajaron con estudiantes de segundo de primaria (7-8 años) identificando las estructuras (regularidades identificadas) y las representaciones que aparecían cuando los estudiantes trabajaron con tareas de generalización. Los resultados mostraron que tanto el número de estructuras identificadas como la forma en que se realizaban la generalización dependía de las tareas planteadas y de la función involucrada en cada caso. Los estudiantes expresaron generalizaciones mediante representaciones verbales y numéricas.

3.2.3. Generalización

La generalización, como proceso cognitivo central en el campo de las matemáticas, ha sido objeto de exploración y análisis en numerosas investigaciones. Mason y Pimm (1984) exploraron algunas de las ambigüedades inherentes a las nociones de generalidad y genericidad, estableciendo paralelismos entre el lenguaje natural y las matemáticas y, por lo tanto, atacando indirectamente la visión arraigada de que las matemáticas no son ambiguas. Radford (2000) investigó sobre el uso y significado de los signos en estudiantes al enfrentarse a la generalización algebraica de patrones, con un enfoque en el pensamiento algebraico emergente, utilizando un marco teórico semiótico-cultural. Ellis (2007) presentó un sistema de categorización que diferencia los tipos de generalizaciones que los estudiantes construyen cuando razonan matemáticamente. Analizó cómo generalizan, o acciones de generalización, y las declaraciones finales de generalización de los estudiantes, o generalizaciones de reflexión. Las tres principales categorías de acciones generalizadoras que surgieron del análisis son (a) la relación, en la que se forma una asociación entre dos o más problemas u objetos, (b) búsqueda, en la que se repite una acción para localizar un elemento similar, y (c) la ampliación, en la que se expande un patrón o relación a una estructura más general.

Dentro de las investigaciones realizadas sobre generalización, algunas han estudiado sobre las capacidades, estrategias y dificultades de los estudiantes. En relación con el análisis de la capacidad de generalización de estudiantes de distintas edades, los autores Pinto y Cañadas (2018b) analizaron la capacidad de generalización de 24 estudiantes de quinto de primaria (10-11 años) al resolver un problema que involucra una función lineal. En sus resultados indicaron que algunos estudiantes generalizaron de manera más efectiva que otros al enfrentar problemas de funciones lineales, y que la forma en que se plantearon las preguntas y se presentaron las representaciones desempeñó un papel importante en la capacidad de los estudiantes para generalizar. Blanton et al. (2019) trabajaron con estudiantes de tercero y quinto curso. En este estudio cuasiexperimental evaluaron el crecimiento en las prácticas de pensamiento algebraico, específicamente en la generalización y representación de generalizaciones utilizando notación variable, como resultado de una secuencia de instrucción temprana de álgebra. Estos estudiantes superaron significativamente a los estudiantes del grupo de control en las evaluaciones posteriores de los cursos de tercero a quinto. A medida que avanzaron en los cursos, los estudiantes del grupo experimental demostraron una mejora constante en su capacidad para generalizar y representar generalizaciones. Los estudiantes del grupo experimental mostraron una mayor flexibilidad en la interpretación de variables en diferentes roles y pudieron utilizar de manera más efectiva la notación de variables para representar propiedades aritméticas, expresiones, ecuaciones y relaciones funcionales. Sus resultados sugieren que la introducción temprana de conceptos y prácticas algebraicas es beneficiosa para los estudiantes, ya que les permite desarrollar habilidades de pensamiento algebraico desde una edad temprana.

Existen estudios que han analizado cómo generalizan los estudiantes. Un ejemplo es la investigación realizada por Callejo et al. (2019) quienes trabajaron con estudiantes de 5º y 6º curso (10-12 años). El objetivo fue identificar las formas de aprehensión cognitiva[4]. Los resultados mostraron que los estudiantes emplearon diferentes enfoques cognitivos al abordar los problemas, y estos enfoques variaron según la disposición de las figuras en la secuencia. Strachota (2020) trabajó con trece aulas diferentes de tercer curso. Su objetivo fue comprender las interacciones que ocurren durante la enseñanza que fomentan la generalización por parte de los estudiantes. Tras analizar las clases donde se implementó una intervención algebraica temprana, se identificaron actividades relacionadas con la generalización y las actividades de generalización de los estudiantes. Además, se exploró cómo estas actividades interactúan entre sí. Los resultados de esta investigación proporcionaron nuevas perspectivas sobre el diseño de la enseñanza para fomentar la generalización y contribuir al debate actual sobre el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes.

Respecto con las dificultades, en un estudio realizado por Carraher et al. (2008) examinaron las dificultades que tienen los estudiantes cuando expresan generalizaciones sobre figuras geométricas a medida que se les presentan las funciones lineales. Su objetivo fue comprender el papel que juega la generalización empírica y las conjeturas en el pensamiento de los estudiantes. Se centraron en los conceptos de patrones, función y generalización de 15 estudiantes de tercer curso (9 años) analizando cómo llegaron a

---

[4] Callejo et al. (2019) describen que la aprehensión cognitiva es el resultado de una transferencia que realiza el sujeto entre el dibujo y el objeto mental creado (un enunciado matemático, una representación, etc.), como respuesta a un estímulo visual, utilizadas por los estudiantes para responder a preguntas de generalización lejana en dos problemas de generalización de patrones visuales.

producir y representar generalizaciones durante la implementación de dos lecciones de un estudio longitudinal de álgebra temprana. En sus conclusiones expresaron que los estudiantes estaban más inclinados a pensar en funciones lineales de forma recursiva (a veces incluso como secuencias recursivas). Por ello, estos autores destacaron que es importante fomentar una transición desde generalizaciones empíricas, basadas en conjeturas sobre casos concretos, a generalizaciones teóricas que se derivan de operaciones sobre enunciados explícitos sobre relaciones matemáticas.

Por último, existen investigaciones que han estudiado las estrategias que utilizan los estudiantes al trabajar con tareas sobre generalización. Ayala-Altamirano et al. (2022a) llevaron a cabo una investigación con un grupo de estudiantes de 9 a 10 años, explorando su razonamiento al resolver problemas de palabras centrados en relaciones funcionales. Su objetivo fue determinar cómo los estudiantes generalizaban a través de preguntas formuladas, utilizando lenguaje natural, dibujos, figuras o la palabra clave 'muchos. Los resultados indicaron que formular preguntas sobre el caso general en diferentes modalidades de enseñanza alentó a los estudiantes a utilizar convenciones algebraicas más efectivamente. Además, se observó que representar cantidades indeterminadas con la palabra clave "muchos" llevó a una generalización más exitosa que hacerlo mediante letras, ya que el uso de letras llevaba a los estudiantes a buscar significados convencionales o desconocidos para ellas. Ureña et al. (2022) trabajaron con estudiantes de sexto año de escuela primaria, analizando la capacidad de generalización y las estrategias utilizadas por estudiantes de sexto de primaria sin formación algebraica previa en tareas que involucraban una relación funcional. Los principales resultados fueron que los estudiantes utilizaron estrategias diferentes dependiendo de si estaban trabajando con casos específicos o generales. Para responder a preguntas sobre casos específicos, recurrieron a estrategias de conteo u operaciones aditivas. A medida que los valores aumentaban o se trataba de cantidades indeterminadas, las estrategias diversificaban. La estrategia de correspondencia fue la más utilizada. Los estudiantes fueron capaces de generalizar tanto verbalmente como simbólicamente y variaron sus estrategias de manera flexible al cambiar de casos específicos a generales, mostrando una clara preferencia por un enfoque funcional en este último caso. Goñi-Cervera et al. (2022) trabajaron con 26 niños de 6 a 12 años (edad media: 9,08 años) con diagnóstico de TEA. Este trabajo se centró en identificar y describir las estrategias y representaciones observadas en 26 estudiantes al realizar una tarea que involucraba una función lineal, así como describir las generalizaciones que realizaron. Las estrategias identificadas incluyeron responder de manera directa, modelar con manipulativos, dibujar, contar y operar. La estrategia más observada fue la operación, representada verbal o simbólicamente, seguida del dibujo. Solo tres estudiantes generalizaron, pero no alcanzaron el nivel más alto de pensamiento funcional, es decir, funciones como objetos. En el estudio realizado por Cetina-Vázquez y Cabañas-Sánchez (2022) quienes trabajaron con estudiantes de quinto de primaria, analizaron las estrategias utilizadas por niños de quinto de primaria, junto con las diferentes formas de uso en la resolución de tres problemas de generalización de patrones lineales. Los resultados resaltaron que las estrategias de contar y recursivas fueron útiles para los estudiantes al utilizar estrategias como diferencia, objeto-entero, fragmentación, funcional y otras. Finalmente, en un estudio realizado por Ureña et al. (2023) trabajaron con estudiantes de sexto a octavo curso. Analizaron las respuestas a un problema escrito con diagramas que requería generalización en un contexto algebraico funcional. Los objetivos principales fueron determinar las estrategias que utilizaron los estudiantes para generalizar y los tipos de representación que emplearon para expresar sus generalizaciones. Se analizó cómo las regularidades se producían, se manifestaban en las estructuras y se representaban por parte de los estudiantes. Uno de los hallazgos destacados fue que la mayoría de los estudiantes que generalizaron utilizaron la estrategia funcional y expresaron sus generalizaciones de diversas maneras, ya sea verbalmente, mediante símbolos o en múltiples representaciones. Además, se observó que los estudiantes de séptimo y octavo fueron capaces de representar relaciones más variadas y estructuralmente complejas, aunque no se encontraron diferencias significativas en las estrategias de generalización entre estudiantes de diferentes edades, independientemente de su formación algebraica previa.

3.2.4. Justificaciones en un Contexto Funcional

El análisis de las justificaciones en el contexto funcional ha sido abordado en distintos estudios, revelando la importancia de la validación en el proceso de generalización. Lannin (2005) describió las justificaciones realizadas por estudiantes de sexto curso mientras realizaban una tarea de creación de patrones en las que se les pedía que desarrollaran y justificaran generalizaciones. La autora destacó que los estudiantes generalmente proporcionaban generalizaciones apropiadas y realizaban justificaciones utilizando ejemplos genéricos. Los estudiantes que utilizaron esquemas geométricos tuvieron más éxito al proporcionar argumentos generales y justificaciones válidas. Sin embargo, durante las discusiones en grupos pequeños, los estudiantes rara vez justificaron sus generalizaciones, y algunos estudiantes se centraron más en valores particulares que en relaciones generales. Ayala-Altamirano y Molina (2021a) trabajaron con estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años). Su objetivo fue investigar sus justificaciones en tareas relacionadas con una relación funcional. Además, buscaron relacionar esas justificaciones escritas con las características de la tarea, que involucran múltiples representaciones (verbal, numérico y algebraico) evaluando el impacto de la discusión en clase en la expresión de la relación funcional en términos más sofisticados. Los resultados mostraron que las justificaciones escritas de los estudiantes variaban según la representación usada en la tarea. La discusión oral ayudó a generalizar en términos más sofisticados que en sus justificaciones escritas, en las que omitían información o utilizaban un lenguaje menos preciso. Por último, Pinto et al. (2023) trabajaron con estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años). El objetivo de su trabajo fue describir una propuesta de enseñanza que promovía el pensamiento algebraico a través de la expresión y justificación de ideas matemáticas al resolver tareas relacionadas con tres componentes distintos del pensamiento algebraico. Los estudiantes, progresivamente, comunicaron y respaldaron ideas algebraicas de mayor complejidad, lo que implicó que, gradualmente, adoptaron un lenguaje matemático más preciso y abstracto.

3.2.5. Fases de Razonamiento en el Proceso de Generalización

Las fases de razonamiento han sido objeto de análisis en diversos estudios, destacando su importancia en el proceso de generalización. En el estudio realizado por Cañadas y Castro (2007) presentaron un análisis del razonamiento inductivo de doce estudiantes de educación secundaria en un contexto de resolución de problemas matemáticos. Mostraron una categorización de siete pasos para describir el proceso de razonamiento inductivo. En sus resultados destacaron que este tipo de razonamiento apareció de forma implícita o explícita en el trabajo de todos los estudiantes entrevistados. Además, los estudiantes recurrían a los casos particulares cuando intentaban obtener un patrón general. En el trabajo realizado por Rivera y Becker (2007) investigaron sobre el razonamiento abductivo-inductivo de 42 estudiantes universitarios inscritos en un curso introductorio para profesores de matemáticas de primaria. En su trabajo describieron cómo los estudiantes desarrollaban generalizaciones sobre clases de objetos abstractos; cómo exhibían procesos abductivos que apoyaban su inducción y conducían a una generalización; las formas en que justificaban sus generalizaciones en la etapa abductiva, y; los efectos de las señales figurativas y numéricas en la forma en que construían una generalización abductiva plausible. En sus conclusiones realizaron una propuesta de proceso de razonamiento abductivo-inductivo para secuencias de patrones.

Pinto y Cañadas (2018a) describieron cómo una estudiante de cuarto de primaria (9 años) siguió los pasos de un modelo de razonamiento inductivo, al trabajar con un problema de generalización que involucra una función lineal. La estudiante organizó los casos particulares dados y estableció una conjetura con base en ellos. Luego, al aumentar el tamaño de los casos particulares, modificó sus conjeturas las que luego validó con nuevos casos particulares, para finalmente generalizar. Torres et al. (2021b) describieron la generalización entre estudiantes de segundo de primaria (8 años) prestando atención a las estructuras reconocidas y al tipo de generalización expresada por estos estudiantes mientras razonaban. Para ello observaron tres fases de razonamiento (abductivo, inductivo y generalización). En sus resultados destacaron la importancia de la identificación de estructuras para generalizar. Además, destacaron que la abducción, la inducción y la generalización son fases que forman parte del proceso de generalización.

3.2.6. Mediaciones Realizadas en un Contexto Funcional

Existen investigaciones que han mostrado el papel fundamental que tienen las mediaciones docentes en el proceso de generalización de estudiantes de diferentes niveles educativos. Estos estudios han analizado su impacto en el desarrollo del pensamiento algebraico, explorando cómo estas mediaciones influyen en los estudiantes para generalizar y representar relaciones funcionales. Warren (2006) investigó sobre la forma en que un grupo de estudiantes (10 años) expresaban generalizaciones, identificando, además, las acciones docentes realizadas. En sus resultados la autora describió que estas acciones ayudaron a los estudiantes a identificar la generalización. Mata-Pereira y Da Ponte (2017) realizaron un estudio donde analizaron cómo las acciones de los docentes pueden promover el razonamiento matemático de los estudiantes de una clase de séptimo curso. Identificaron que las acciones de los docentes (invitar, informar/sugerir, apoyar/orientar y desafiar) pueden identificarse en discusiones con toda la clase. En sus conclusiones destacaron que las acciones docentes ayudaron a los estudiantes a generalizar y justificar. Además, que las generalizaciones pueden surgir de una acción desafiante central o de varias acciones orientadoras. Posteriormente Mata-Pereira y Da Ponte (2019) analizaron cómo las acciones del docente conducían a la generalización de los estudiantes. En este estudio se centraron en una generalización abductiva hecha por un estudiante de séptimo curso. En sus resultados mostraron un recorrido de actuación docente, con una acción central desafiante, que permitió una generalización abductiva ampliada, y también una generalización deductiva posterior. En el estudio realizado por Ureña et al. (2019) trabajaron con estudiantes de cuarto de primaria. Analizaron la capacidad de generalizar y de representar generalizaciones exhibida por los estudiantes. Además, se centraron en el papel del mediador, destacando cómo las acciones del entrevistador mejoraron la capacidad de los estudiantes para reconocer y representar relaciones funcionales. En sus resultados destacaron la importancia de la mediación para ayudar a los estudiantes a mejorar su capacidad para reconocer, representar y generalizar relaciones funcionales. Por último, el trabajo realizado por Hidalgo-Moncada y Cañadas (2020) con estudiantes de sexto de educación primaria, describieron las intervenciones de un entrevistador ante los errores en los que incurrían los estudiantes durante el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función afín. Entre sus resultados, presentaron diferentes tipos de errores en los que incurrían los estudiantes y las intervenciones del entrevistador ante dichos errores. El error más frecuente se produjo en el patrón expresado. La intervención más frecuente del entrevistador fue proponer al estudiante volver a un caso particular.

3.3. Objetivos Específicos de Investigación

A partir de los fundamentos teóricos y conceptuales expuestos, así como los antecedentes descritos, es que surgen nuestros objetivos específicos, los cuales buscan responder a nuestro objetivo general de investigación (ver apartado 1.3). Los objetivos específicos que nos planteamos son los siguientes:

O.E.1. Caracterizar el proceso de generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria.

O.E.2. Describir las relaciones entre las generalizaciones de los estudiantes y las mediaciones realizadas por un investigador-docente.

O.E.3. Caracterizar las justificaciones de los estudiantes al resolver una tarea de generalización.

O.E.4. Describir el razonamiento de los estudiantes al resolver una tarea de generalización.

En la Tabla 3-5 presentamos los estudios que realizamos en nuestra Tesis Doctoral que dan respuesta a los diferentes objetivos de investigación presentados.

Tabla 3-5

Relación entre los Objetivos Específicos de Investigación y los Estudios Realizados

Estudio	Título	Objetivos del estudio	Relación con objetivos Tesis
1	Análisis bibliométrico sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria en Scopus	1. Analizar las métricas básicas descriptivas de la producción científica sobre pensamiento algebraico en Scopus centrada en las etapas de educación infantil y primaria	Estado del arte sobre pensamiento algebraico
2	Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización	1. Caracterizar la generalización de los estudiantes antes y después de la mediación. 2. Describir las mediaciones realizadas por un investigador-docente a seis estudiantes de 3segundo de primaria dentro de un contexto de generalización.	O.E.1. Caracterizar el proceso de generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria. O.E.2. Describir las relaciones entre las generalizaciones de los estudiantes y las mediaciones realizadas por un investigador-docente.

Estudio	Título	Objetivos del estudio	Relación con objetivos Tesis
3	Justifications and mediations in the generalization process among fourth grade students	1. Identificar y caracterizar los niveles de generalización utilizados por los estudiantes de 4º curso. 2. Identificar y caracterizar las justificaciones utilizadas por estos estudiantes al generalizar. 3. Identificar y caracterizar las mediaciones realizadas durante una clase. 4. Analizar las posibles relaciones entre niveles de generalización, justificaciones y mediaciones durante el proceso de generalización.	O.E.1. Caracterizar el proceso de generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria. O.E.2. Describir las relaciones entre las generalizaciones de los estudiantes y las mediaciones realizadas por un investigador-docente. O.E.3. Caracterizar las justificaciones de los estudiantes al resolver una tarea de generalización.
4	De lo concreto a lo abstracto: análisis del proceso de generalización	1. Identificar y describir las fases de razonamiento (abducción, inducción y generalización) en el trabajo de estudiantes de cuarto de educación primaria en tareas de generalización que involucran funciones.	O.E.1. Caracterizar el proceso de generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria.

Estudio	Título	Objetivos del estudio	Relación con objetivos Tesis
		2. Identificar y caracterizar las acciones realizadas dentro del proceso de generalización.	O.E.4. Describir el razonamiento de los estudiantes al resolver una tarea de generalización.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

En este capítulo, presentamos el marco metodológico que ha guiado nuestra investigación. A lo largo de este capítulo, entregamos una descripción global de nuestro trabajo y cómo se llevaron a cabo todas las etapas del proceso de investigación.

En primer lugar, describimos nuestro paradigma de investigación, siguiendo la investigación de diseño (e.g., Molina et al., 2011) y, más concretamente, los experimentos de enseñanza. En segundo lugar, presentamos las características de los participantes de esta Tesis Doctoral. Posteriormente, describimos el procedimiento de recolección de información, detallando las sesiones realizadas en el marco del experimento de enseñanza. Proporcionamos también, una descripción completa de los instrumentos utilizados para recopilar la información necesaria. Finalmente, exponemos cómo llevamos a cabo el análisis de datos, presentando las categorías de análisis empleadas en nuestros estudios. Estas categorías son esenciales para estructurar y evaluar la información recopilada.

4.1. Diseño de Investigación

Esta investigación tiene un enfoque mixto el cual implica un conjunto de procesos de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos en un mismo trabajo (Hernández-Sampieri et al., 2014).

Nuestra investigación es de carácter descriptivo, exploratorio y explicativo. Como lo expresaron Hernández-Sampieri et al. (2014) los trabajos descriptivos por lo general fundamentan las investigaciones correlacionales, las cuales a su vez proporcionan información para llevar a cabo estudios explicativos que generan un sentido de entendimiento. Esto permite evaluar la relación que existe entre dos o más conceptos, categorías o variables. En nuestro caso, relacionar y analizar la generalización, mediación y las prácticas algebraicas. Esta metodología se centra en la exploración profunda de conceptos, contextos o situaciones, y en la interpretación de significados y patrones emergentes.

Para llevar a cabo esta Tesis Doctoral, adoptamos un enfoque de investigación de diseño, centrándonos en los experimentos de enseñanza. Nuestro objetivo principal fue explorar las habilidades de los estudiantes en el contexto del pensamiento algebraico, específicamente en tareas relacionadas con el pensamiento funcional. Además de esto, aplicamos técnicas complementarias que incluyeron la observación participante, entrevistas semiestructuradas y cuestionarios. Este enfoque metodológico requirió la utilización de una variedad de instrumentos de recopilación de datos, como grabaciones en video de las sesiones en el aula y en las entrevistas, documentos de trabajo de los estudiantes y registros de las observaciones detalladas de las sesiones y las entrevistas.

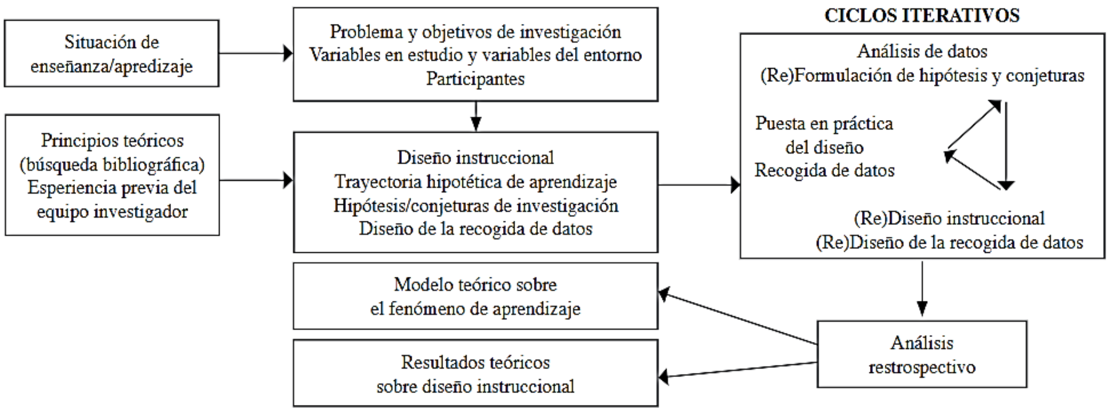
4.1.1. Investigación de Diseño

La investigación de diseño se destaca por su enfoque en la comprensión y mejora de la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales, al mismo tiempo que involucra el desarrollo y análisis de un diseño instruccional específico. Este enfoque se centra en la resolución de problemas y desafíos educativos a través de un enfoque práctico, orientado hacia la acción, principalmente de naturaleza cualitativa. Su propósito principal es analizar el aprendizaje en contextos reales mediante la planificación y el estudio sistemático de enfoques de aprendizaje particulares, estrategias de enseñanza y herramientas, teniendo en cuenta la interconexión intrínseca entre el proceso de aprendizaje, la enseñanza y la evaluación (Molina et al., 2011).

La investigación de diseño es un paradigma metodológico altamente eficaz en el ámbito de la investigación sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje. Según Swan (2020) esto se realiza a través de ciclos de diseño, implementación, observación, análisis y, si es necesario, el rediseño. Confrey (2006) expresó que a través de la investigación de diseño se busca documentar los recursos y conocimiento de los estudiantes, además de sus interacciones, concepciones, recursos y enseñanza a través de observaciones y evaluaciones. Sus objetivos consisten en proporcionar un conocimiento sistemático y fiable sobre el proceso de aprendizaje, ofreciendo una visión que facilite la toma de decisiones para su mejora (Cobb, 2000; Sawn, 2020). Molina et al. (2011) propusieron una estructura general para la investigación de diseño (ver Figura 4-1), donde consideraron distintas fases, desde la preparación, considerando la situación de enseñanza/aprendizaje, como los objetivos de investigación, el diseño para la recogida de datos, su posterior puesta en práctica y, por último, un análisis de lo realizado.

Figura 4-1

Estructura General de una Investigación de Diseño



Nota. Figura extraída de Molina et al. (2011, p.76).

La investigación de diseño permite acercar la práctica educativa y los análisis teóricos (Molina et al., 2011). Para nuestra investigación esto es fundamental, permitiéndonos explorar y obtener resultados actuales y reales de lo que sucede con los estudiantes al trabajar con tareas que aborden el pensamiento funcional. Además, este tipo de metodología ofrece a los docentes conocer las secuencias de enseñanza realizadas, dándoles la posibilidad de aplicarlas, adaptarlas, y modificarlas, según sea su realidad educativa y necesidades.

4.1.2. Experimento de Enseñanza

Los experimentos de enseñanza se enmarcan en la investigación de diseño (Molina et al. 2011). Steffe y Thompson (2000) expresaron que un experimento de enseñanza es una secuencia de sesiones en los que los participantes son normalmente uno o más investigadores-docentes, con uno o varios estudiantes. “Este tipo de investigaciones destacan por su potencial para desarrollar teorías sobre el proceso de enseñanza/aprendizaje, de contenidos específicos, de una forma sensible a la complejidad y naturaleza sistémica de dicho proceso” (Molina et al., 2011, p. 34). Los experimentos de enseñanza ayudan a comprender cómo, cuándo y porqué las innovaciones educativas pueden funcionar en el aula (Ayala-Altamirano, 2021). Uno de los propósitos de utilizar los experimentos de enseñanza, es que los investigadores experimenten, de primera mano, las experiencias de los estudiantes (Steffe y Thompson, 2000). Tal como indicaron Engelhardt et al. (2004) el núcleo esencial del experimento de enseñanza se centra en la modelación de las respuestas de los estudiantes para forjar una comprensión continua de su progreso a lo largo del tiempo. El propósito principal es construir un modelo del proceso de aprendizaje y desarrollo de los estudiantes, en relación con un contenido específico. Se considera que este aprendizaje es el resultado de las estrategias y situaciones diseñadas e implementadas por el investigador-docente, como expresaron Molina et al. (2011).

Es importante destacar el rol del investigador o investigadores al llevar a cabo el experimento de enseñanza. El investigador asume dos roles fundamentales: el de docente y el de entrevistador. El entrevistador recopila las ideas y perspectivas de los estudiantes en relación con los objetivos de investigación, en su rol como entrevistador (Engelhardt et al., 2004). El rol de investigador-docente consiste en crear situaciones y establecer formas de interacción con los estudiantes que los motiven a modificar su pensamiento actual (Steffe y Thompson, 2000). Esto permite que puedan experimentar en primera persona lo que va sucediendo en el aula.

El experimento de enseñanza también está relacionado con el ciclo de aprendizaje. Un ciclo de aprendizaje típico consta de tres fases: exploración, introducción de conceptos y aplicación de conceptos (Engelhardt et al., 2004). Cobb y Gravemeijer (2008) expresaron que para realizar un experimento de enseñanza se deben realizar tres fases: la preparación del experimento de enseñanza, la experimentación y por último el análisis retrospectivo de los datos obtenidos.

Molina et al. (2011) describieron las acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza. En la figura 4-2 detallamos algunas de estas acciones a considerar:

Figura 4-2

Acciones a Realizar en cada una de las Fases de un Experimento de Enseñanza

Preparación del experiemento

- Definir el problema y objetivos de investigación.
- Evaluar conocimiento inicial de alumnos.
- Seleccionar metodologías de enseñanza adecuadas.
- Diseñar secuencia de intervenciones en el aula y temporalización.
- Diseñar la recogida de datos.

Experimentación (antes, durante y después)

- Obtener información sobre trabajo previo en el aula.
- Ultimar el diseño de la intervención.
- Modificar el diseño de la intervención si es necesario.
- Recoger datos de lo que ocurre en el aula.
- Analizar los datos recogidos en la intervención.
- Revisar y reformular hipótesis/conjeturas de investigación.

Análisis retrospectivo de los datos

- Recopilar y organizar la información recogida.
- Analizar los datos para comprender la situación de enseñanza y aprendizaje en su totalidad.

Nota. Figura modificada que resume la información de tabla 1 de Molina et al. (2011, p. 80).

Para llevar a cabo los experimentos de enseñanza, podemos considerar las ideas planteadas por Llinares (2014) quien enfatizó sobre la relevancia de elegir, diseñar y secuenciar actividades matemáticamente significativas que contribuyan al proceso de aprendizaje de los estudiantes (ver Figura 4-3).

Figura 4-3

Sistema de Actividad que Articulan la Enseñanza de las Matemáticas como una Práctica

Nota. Figura extraída de Llinares et al. (2008, p. 62).

4.2. Participantes

Para llevar a cabo esta investigación, trabajamos con dos cursos de primaria pertenecientes a un colegio concertado de Granada. Este centro educativo se caracterizaba por su perfil socioeconómico y cultural, de categoría bajo-medio. Además, este colegio opera bajo el enfoque de comunidades de aprendizaje. La selección de la muestra se realizó de manera intencional, considerando la disponibilidad del centro y los docentes.

Uno de los cursos involucrado en esta Tesis Doctoral corresponde a un grupo de estudiantes de segundo de primaria (7-8 años). Este grupo estaba compuesto por 24 estudiantes. En relación con sus conocimientos previos, estaban familiarizados con números en el rango de 0 a 399, así como la comparación de números, valor posicional y habían trabajado la suma y la resta. Además, este curso no había tenido experiencia previa con problemas que involucraran funciones lineales o generalización.

El otro curso estaba conformado por un grupo de estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años) de 25 estudiantes. En cuanto a sus conocimientos previos, habían abordado las cuatro operaciones aritméticas fundamentales (suma, resta, multiplicación y división). No obstante, al igual que el grupo anterior, no tenían experiencia con tareas que implicaran funciones lineales o generalización.

Hemos elegido trabajar con dos cursos diferentes para nuestra Tesis Doctoral con el objetivo de explorar el pensamiento funcional en estudiantes de distintas edades, considerando que tienen diferentes niveles de conocimiento y diferentes formas de abordar el trabajo con el pensamiento funcional. En la etapa inicial de la investigación, optamos por utilizar cuestionarios individuales. Por esta razón, seleccionamos a segundo de educación primaria, donde los estudiantes ya tienen un nivel de lectoescritura aceptable. A esta edad, los niños están desarrollando habilidades matemáticas fundamentales. Por otro lado, los estudiantes de cuarto curso han avanzado en su aprendizaje matemático, lo que nos permite abordar actividades más complejas, tanto en términos de operaciones presentadas como en el rango numérico. Esta diversidad entre los dos cursos nos brindó la oportunidad de analizar cómo se manifiesta el pensamiento funcional en distintas etapas del proceso educativo.

En nuestra investigación, otorgamos importancia al papel desempeñado por los investigadores-docentes (Narváez y Cañadas, 2023), quienes forman parte del proyecto de investigación. En ambos grupos de estudiantes contamos con la presencia de investigadores-docentes que dirigían las sesiones, encargándose estos de la introducción de las tareas, así como de fomentar la participación activa de todos los estudiantes. Además, en las sesiones se contó con el apoyo de otros integrantes del proyecto que contribuyeron tanto en la grabación de las sesiones como en su desarrollo. En cada sesión participaron entre 2 o 3 miembros del proyecto en el aula. Las docentes a cargo de los cursos estuvieron presentes, aunque no intervinieron directamente, limitándose únicamente a acciones relacionadas con la gestión del aula.

4.3. Procedimiento de Recolección de Información

Los datos que analizamos en esta Tesis Doctoral provienen de los experimentos de enseñanza realizados en el proyecto de investigación en el que está inserta este trabajo. En este trabajo nos centramos en los desarrollados durante el curso 2017/2018 en un colegio concertado de la ciudad de Granada. Destacamos que, para la realización de las sesiones correspondientes contamos con los permisos pertinentes, tanto de los tutores legales de los estudiantes, como del centro educativo con el que colaboramos.

En cada curso realizamos una sesión diagnóstica (sesión 0), donde aplicamos un cuestionario inicial. Posteriormente implementamos tres sesiones en segundo y cuatro sesiones en cuarto de primaria. En estas sesiones trabajaron tareas de generalización contextualizados que involucraban funciones lineales. Cada sesión tuvo una duración de 60 minutos aproximadamente y se desarrollaron en sus aulas de clases habituales. Los estudiantes de ambos cursos se ubicaban habitualmente en grupos en el aula. Mantuvimos esta organización durante la recogida de información para no modificar su práctica en el centro. La participación fue activa y constante en ambos cursos. En la figura 4-4 mostramos una imagen donde se ve la distribución de uno de los cursos en su aula habitual.

Figura 4-4

Distribución habitual de la Clase de Cuarto de Primaria

Las sesiones fueron videograbadas, ubicando una cámara al final del aula. Esto no interfirió en la organización y distribución de los espacios de trabajo de los estudiantes. Además, contamos con una cámara móvil con la que los investigadores registramos el trabajo individual de los estudiantes.

Las sesiones del experimento de enseñanza fueron planificadas considerando tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. Lo mostramos en la Figura 4-5.

Figura 4-5

Estructura de las Sesiones de Clases

Inicio:

Presentación de la tarea funcional, utilizando distintas representaciones (tablas, imágenes, etc.). Además de la realización de distintas preguntas sobre casos relacionados a la tarea.

Desarrollo:

Presentación y entrega de la hoja de trabajo. Las realizaban de forma individual o en pequeños grupos. En ocasiones se realizada una revisión de lo hecho y se continuaba con otra actividad.

Cierre:

Revisión de las actividades realizadas, puesta en común y discusiones de las respuestas.

El propósito de las sesiones fue investigar las relaciones que los estudiantes establecían entre las variables presentes en las tareas y las generalizaciones que manifestaban. Además, examinamos el impacto de las mediaciones llevadas a cabo por los investigadores-docentes y evaluamos las justificaciones proporcionadas por los estudiantes.

En la planificación de las sesiones, tuvimos en cuenta distintos elementos: (a) los objetivos de investigación, (b) las funciones involucradas, (c) el contexto en el que se enmarca la tarea, asegurando que fuese relevante y motivador para los estudiantes, (d) las preguntas que se les plantearían, considerando un lenguaje claro, y (e) los casos particulares de las funciones (parejas de valores) que se les presentarían, considerando que no fuesen consecutivos, pero que fueran de menor a mayor complejidad. Si notábamos que el grupo no avanzaba en las tareas, podíamos considerar retroceder a casos con cantidades implicadas menores. Además, para una planificación efectiva, nos basamos en el modelo de razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007) quienes describieron el proceso inductivo, trabajando desde casos particulares hasta llegar a la generalización.

En nuestra investigación destacamos la importancia del discurso y la acción mediada en la realización de las sesiones y su posterior análisis (Ayala-Altamirano, 2021). Es por ello que, durante las sesiones motivamos constantemente la participación de todos los estudiantes. Además, las justificaciones tuvieron un rol importante en el desarrollo de las sesiones, considerándolas como un conjunto de respuestas que los estudiantes ofrecían cuando se les solicitaba proporcionar evidencia matemática para respaldar un resultado (Simon y Blume,1996).

Adicionalmente a las sesiones realizadas, aplicamos en distintos momentos del experimento de enseñanza entrevistas individuales. En el caso de segundo de primaria se realizaron tres entrevistas, una posterior a la sesión 0, las otras dos al finalizar el experimento de enseñanza. En cuarto de primaria se aplicaron dos entrevistas. La primera fue posterior a la sesión 0 y la otra al finalizar las sesiones de trabajo. En ambos cursos realizamos entrevistas individuales a seis estudiantes de distintos rendimientos académicos. Esta diversidad nos permitió observar a estudiantes que presentaban dificultades en matemáticas, como aquellos que tenían más habilidades. Esta selección además consideró que los estudiantes fuesen participativos, lo que nos ayudó para que expresaran sus respuestas. En el apartado 4.4 de esta tesis detallaremos más sobre este instrumento.

Las tareas cumplieron un rol central al momento de trabajar en las sesiones y las entrevistas realizadas. Estas fueron presentadas, considerando distintos contextos cercanos a los estudiantes (cumpleaños, super héroes, etc.). Algunas tareas fueron replicadas de trabajos previos y otras fueron elaboradas por el grupo de investigación. A continuación, en las tablas 4-1 y 4-2 presentamos el detalle de las sesiones realizadas, incluyendo las fechas de aplicación, contextos de la tarea planteada y funciones implicadas en segundo y cuarto de primaria

Tabla 4-1

Sesiones y Entrevistas realizadas para Segundo de Primaria

Curso	Sesión	Entrevista	Fecha	Tarea	Enunciado de la tarea	Función	Variables	Estructura
2° Primaria	0		04/12/2017	Máquinas de bolas	En una máquina de bolas entra una cantidad de bolas y salen tres bolas más.	$y=x+3$	Bolas que entran y total de bolas que salen	Aditiva
		Inicial/individual	15/12/2017	Máquinas de bolas (revisión de cuestionario)	En una máquina de bolas entra una cantidad de bolas y salen tres bolas más.	$y=x+3$	Bolas que entran y total de bolas que salen	Aditiva

Curso	Sesión	Entrevista	Fecha	Tarea	Enunciado de la tarea	Función	Variables	Estructura
	1		19/01/2018	Parque de atracciones 1	Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro.	$y=x+3$	Número de viajes y cantidad de euros gastados	Aditiva
	2		02/02/2018	Parque de atracciones 2	A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.	$y=2x+1$	Número de viajes y cantidad de euros gastados	Multiplicativa y aditiva

Curso	Sesión	Entrevista	Fecha	Tarea	Enunciado de la tarea	Función	Variables	Estructura
	3		23/02/2018	Cumpleaños	Lucía cumple años y sus padres quieren invitar a sus amigos a la fiesta. Hay que poner bocadillos y tartas, así que cada persona tendrá dos platos.	$y=2x$	Número de invitados y número de platos	Multiplicativa o aditiva
		Final/grupal	04/05/2018	Paradas de tren	Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vaya a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas puede llevar el tren si en cada parada suben 2 personas?	$y=2x$	Número de paradas y número total de personas	Multiplicativa o aditiva

Curso	Sesión	Entrevista	Fecha	Tarea	Enunciado de la tarea	Función	Variables	Estructura
		Final/individual	18/08/2018	Superhéroes	Dos superhéroes, Iron Man y Capitán América cumplen años el mismo día. Cuando Iron Man cumplió 5 años, el Capitán América cumplió 9.	$y=x+4$	Edad de Iron Man y edad de Capitán América	Aditiva

Nota. Están sombreadas las sesiones que hemos analizado en esta Tesis Doctoral.

Tabla 4-2

Sesiones y Entrevistas realizadas para Cuarto de Primaria

Curso	Sesión	Entrevista	Fecha	Tarea	Enunciado de la tarea	Función	Variables	Estructura
4° Primaria	0		24/11/2017	Máquina de bolas	Hoy os planteamos un juego. Os presentamos una máquina que transforma números. Vuestro trabajo es averiguar cómo funciona.	$y=2x+1$	Bolas que entran y total de bolas que salen	Multiplicativa y aditiva
		Inicial/individual	15/12/2017	Máquinas de bolas (revisión de cuestionario)	Hoy os planteamos un juego. Os presentamos una máquina que transforma números. Vuestro trabajo es averiguar cómo funciona.	$y=2x+1$	Bolas que entran y total de bolas que salen	Multiplicativa y aditiva

Curso	Sesión	Entrevista	Fecha	Tarea	Enunciado de la tarea	Función	Variables	Estructura
	1		19/01/2018	Parque de atracciones 1	Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 2 euros.	$y=2x+1$	Número de viajes y cantidad de euros gastados	Multiplicativa y aditiva
	2		02/02/2018	Parque de atracciones 2	A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que cuesta 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada Viaje en una atracción vale 1 euro.	$y=x+3$	Número de viajes y cantidad de euros gastados	Multiplicativa y aditiva

Curso	Sesión	Entrevista	Fecha	Tarea	Enunciado de la tarea	Función	Variables	Estructura
	3 y 4		23/02/2018 06/04/2018	Cumpleaños	Isabel está preparando su fiesta de cumpleaños. Comienza organizando las mesas y las cajas de sorpresas para sus invitados. Ella junta algunas mesas formando una fila y coloca una caja a cada lado de la mesa, tal como se muestra en la imagen.	$y=2x$	Número de mesas y número de cajas	Multiplicativa o aditiva
		Final/individual	04/05/2018	Cumpleaños	En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños.	$y=3x+1$	Número de invitados y número de globos	Multiplicativa y aditiva

Nota. Están sombreadas las sesiones que hemos analizado en esta Tesis Doctoral.

Para esta Tesis Doctoral, analizamos algunas de las sesiones que formaban parte del experimento de enseñanza para segundo y cuarto de primaria. A continuación, describimos cada una de ellas.

4.3.1. Sesiones de Segundo de Primaria

En esta Tesis Doctoral nos centramos en la sesión 0 y la entrevista inicial realizadas en segundo de educación primaria para evaluar la capacidad de generalización de los estudiantes sin la influencia de las sesiones posteriores. Además, la comparación con las entrevistas iniciales, realizadas posteriormente a esta sesión, nos dio información sobre el impacto de las mediaciones en la generalización de los estudiantes. A continuación, describimos cada una de las sesiones.

4.3.1.1. Sesión Máquina de Bolas (Sesión 0)

Durante esta sesión, presentamos una tarea de generalización basada en la función $y=x+3$. La variable independiente se asociaba con la cantidad de bolas introducidas en una máquina, mientras que la variable dependiente hacía referencia al número de bolas que salían de la máquina. Consideramos este contexto como punto de partida, ya que investigaciones previas han explorado el pensamiento funcional en educación primaria, introduciéndolo a través del estudio de máquinas funcionales. Esta tarea se centra en la relación entre las entradas y las salidas, así como en la regla que respalda un conjunto específico de entradas y salidas (Pittalis et al., 2020).

Esta sesión tuvo una duración de 50 minutos y contó con la participación de 21 estudiantes. La disposición en el aula consistía en grupos de 4 o 5 estudiantes.

La sesión comenzó con la presentación de la tarea, donde el investigador-docente les presentó el contexto (ver Tabla 4-1). Con ayuda de representaciones pictóricas, les presentó distintos ejemplos con casos particulares (ver Figura 4-6). Es importante destacar que en ningún momento el entrevistador reveló la relación funcional.

Figura 4-6

Ejemplos de Casos Presentados

Posteriormente a la explicación e interacción con los estudiantes del curso, les entregamos un cuestionario individual (ver Anexo A). En el apartado 4.4.1. describiremos en mayor profundidad este instrumento de recogida de información.

Esta sesión para el grupo de investigación fue relevante, puesto que nos permitió seleccionar a los seis estudiantes que realizaron la entrevista. Esta selección se basó en los resultados obtenidos de las respuestas del cuestionario, atendiendo si habían o no generalizado.

4.3.1.2. Entrevista Inicial

La entrevista se realizó dos semanas después de la primera sesión y tuvo una duración aproximada de 20 minutos máximo, no siendo el tiempo una limitación para el trabajo en la tarea. El espacio físico donde se realizaron las entrevistas fue en un aula del mismo colegio, distinta a la sala de clases habitual de los estudiantes (ver Figura 4-7).

Figura 4-7

Entrevista realizada a Estudiante de Segundo de Primaria

Durante la entrevista revisamos el cuestionario realizado la sesión anterior. En esta oportunidad, preguntamos a los estudiantes el porqué de sus respuestas, además de dar la posibilidad de corregir algunas respuestas donde observamos errores. Adicionalmente, se les realizó distintas preguntas del cuestionario, que podía ir desde casos cercanos, lejanos o indeterminados, que ayudaron a los estudiantes a comprender la tarea. La entrevista dio oportunidad para que los estudiantes explicarán la regularidad.

4.3.2. Sesiones de Cuarto de Primaria

En cuarto de primaria nos centramos en la sesión 1, sesión 3 y entrevista final (ver Tabla 4-2). La elección de analizar la primera sesión fue con la intención de examinar el proceso de generalización desde un punto inicial, evaluando las fases de razonamiento involucradas, permitiéndonos comprender cómo los estudiantes abordaban los problemas relacionados con la generalización, realizando un análisis comparativo con la entrevista final. Por otro lado, la elección de la tercera sesión buscó explorar las generalizaciones realizadas, poniendo énfasis en la justificación de las respuestas. Esta sesión, se destacó por la gran cantidad de justificaciones realizadas por los estudiantes. A continuación, describimos cada una de ellas:

4.3.2.1. Sesión Parque de Atracciones (Sesión 1)

En esta sesión, presentamos una tarea de generalización que implicaba la función $y=2x+1$. Pedimos que imaginaran que ellos estaban en el parque y que compartieran cuáles atracciones les gustaría montar. Después de eso, la investigadora-docente presentó diferentes casos a los estudiantes.

- ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 2 viajes?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 10 viajes?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 5 viajes?, ¿cómo lo sabes?

A continuación, se les entregó un cuestionario individual a los estudiantes, el cual resolvieron de forma individual. En la Figura 4-8 presentamos un ejemplo de preguntas realizadas en el cuestionario.

Figura 4-8

Pregunta de Cuestionario de Cuarto de Primaria

3. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 20 viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

Posteriormente, llevamos a cabo una revisión en la que los animamos a exponer sus respuestas y a salir a la pizarra para mostrar cómo habían llegado a sus resultados. Es relevante subrayar que promovimos activamente la participación de todos los estudiantes durante toda la sesión. En la puesta en común salían a la pizarra dos estudiantes por cada pregunta, donde explicaban sus respuestas (ver Figura 4-9).

Figura 4-9

Puesta en Común de Cuarto de Primaria

4.3.2.2. Sesión Cumpleaños (Sesión 3)

En esta sesión, presentamos una tarea de generalización que implicaba la función $y= 2x$. El contexto era sobre las mesas y cajas de chucherías que usarían para la fiesta de cumpleaños. La presentación de la tarea se acompañó de la representación concreta y manipulativa (ver Figura 4-10). Esto ayudó a los estudiantes a observar cómo se organizaban las mesas y cajas. La investigadora-docente les mostró lo que sucedía cuando tenían una mesa, dos mesas y tres mesas.

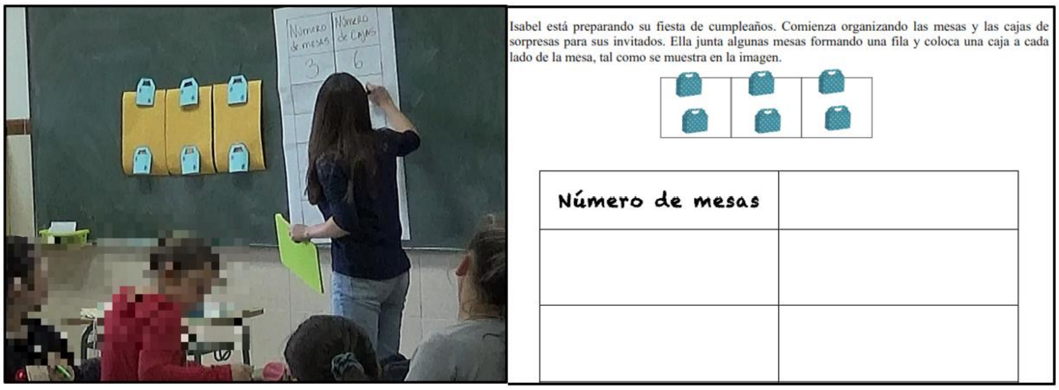
Figura 4-10

Presentación de la Tarea

Después de la introducción, entregamos a cada estudiante una hoja que incluía una tabla, la cual completaron en conjunto con la investigadora-docente (ver Figura 4-11).

Figura 4-11

Extracto de la Sesión y Tabla que completaron los Estudiantes



Los casos que les presentamos en esta parte inicial de la sesión fueron casos particulares no consecutivos (3 mesas, 8 mesas, 2 mesas y 6 mesas). Después les entregamos el cuestionario, que debían resolver de forma individual (ver Anexo C). Debían completar una tabla que incluía algunos valores. En algunos casos se les entregó la cantidad de mesas (relación directa) y en otros se les entregó la cantidad de cajas (relación inversa). Esta tabla la debían completar con la cantidad correspondiente para cada caso y, además, debían explicar cómo habían llegado a ese resultado (ver Anexo E). El cuestionario además incluía dos preguntas con cantidades indeterminadas:

- ¿Cómo sabes cuántas mesas hay cuando conoces la cantidad de cajas?
- ¿Cómo sabes cuántas cajas hay cuando conoces la cantidad de mesas?

Para terminar la sesión, realizamos una puesta en común, donde revisaron los resultados para cada caso presentados el cuestionario. La investigadora-docente completó en la pizarra la tabla con las respuestas que entregaban los estudiantes.

4.3.2.3. Entrevista Final

La entrevista final se realizó cuatro semanas después de la última sesión y tuvo una duración aproximada de 20 minutos máximo, no siendo el tiempo una limitación para el trabajo en la tarea. El espacio físico donde se realizaron las entrevistas fue un aula del mismo colegio, distinta a la sala de clases habitual de los estudiantes. En la entrevista se presentó una nueva tarea sobre generalización. En el apartado 4.4.2 describimos esta entrevista.

4.4. Instrumentos de Recolección de Información

Los instrumentos de recogida de información utilizados en esta Tesis Doctoral fueron cuestionarios individuales cumplimentados por los estudiantes y las entrevistas semiestructuradas individuales. El cuestionario y la entrevista semiestructurada utilizada fueron validadas a través de la triangulación de expertos. Tanto el cuestionario como el protocolo de entrevista fueron diseñados y validados por miembros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, pertenecientes al proyecto de investigación.

4.4.1. Cuestionarios

Un cuestionario es un "instrumento o formulario impreso, destinado a obtener respuestas sobre el problema en estudio y que el investigado o consultado llena por sí mismo (Canales et al., 1994, p. 132). Como lo expresaron Hernández-Sampieri et al. (2014) "un cuestionario consiste en un conjunto de preguntas respecto a una o más variables a medir" (p. 315).

Para la elaboración de los cuestionarios utilizados, nos basamos en el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Estos cuestionarios se entregaban a los estudiantes después de haberles presentado la tarea y de haber trabajado con los primeros casos particulares. Para garantizar su efectividad, redactamos las preguntas de manera clara y precisa considerando el nivel de los estudiantes. Además, para diseñarlos, tuvimos en cuenta el orden de las preguntas, desde casos particulares (cercanos y lejanos) hasta casos generales e indeterminados. Esto permitía que los estudiantes identificaran la regularidad de la tarea. La mayoría de las preguntas fueron abiertas, permitiéndoles una respuesta escrita libre y no delimitada. También había algunas preguntas cerradas donde les proporcionábamos opciones de respuesta predefinidas y delimitadas (Hernández-Sampieri et al., 2014). La extensión de cada cuestionario consideró el tiempo de trabajo que tendrían los estudiantes para resolverlo en el aula.

A continuación, presentamos las principales características de los cuestionarios utilizados para segundo y cuarto de primaria (ver Tablas 4-3 y Tabla 4-4):

Tabla 4-3

Principales Características de los Cuestionarios Utilizados en las Sesiones de Trabajo para Segundo de Primaria

Sesión	Contexto y función	Ejemplos de preguntas por tipo de casos		
		Cercanos	Lejanos	Indeterminados
0	Máquina de bolas ($y= x+3$)	¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas?	Pon el número de bolas que tú quieras al principio de la máquina. ¿Cuántas bolas salen?	Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?
1	Parque de atracciones ($y= x+3$)	¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 7 viajes ?, ¿Cómo lo sabes?	¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 Viajes?, ¿Cómo lo sabes?	Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado
2	Parque de atracciones ($y= x+1$)	¿Cuánto pagas por el carnet y 10 viajes?, Explícame cómo lo haces	¿Cuánto pagas por el carnet y un millón viajes?, Explícame cómo lo haces.	Isabel paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga
3	Cumpleaños ($y= 2x$)	Si hay dos personas en el cumpleaños, ¿Cuántos platos hay que comprar para la fiesta?	Si van 120 personas a la fiesta, ¿cuántos platos hay que comprar?	Los padres de Lucía han recibido una carta de su amigo extraterrestre. Marsian les ha dicho (en su idioma) que van a ir Ω extraterrestres a la

Sesión	Contexto y función	Ejemplos de preguntas por tipo de casos		
		Cercanos	Lejanos	Indeterminados
				fiesta. Puedes escribir los platos que se necesitan.

Tabla 4-4

Principales Características de los Cuestionarios utilizados en las Sesiones de trabajo para Cuarto de Primaria

<table>
<tr><th rowspan="2">Sesión</th><th rowspan="2">Contexto y función</th><th colspan="3">Ejemplos de preguntas por tipo de casos</th></tr>
<tr><th>Cercanos</th><th>Lejanos</th><th>Indeterminados</th></tr>
<tr><td>0</td><td>Máquina de bolas
($y= 2x+1$)</td><td>¿Qué número saldrá si metemos el número 20?</td><td>Mete el número que tú quieras en la máquina. ¿Qué número saldrá?</td><td>6. Si ? es un número que no conocemos, ¿cómo indicarías el número que sale de la máquina?</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Parque de atracciones
($y= 2x+1$)</td><td>¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 4 viajes?, ¿Cómo lo sabes?</td><td>¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 Viajes?, ¿Cómo lo sabes?</td><td>Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Parque de atracciones
($y= x+3$)</td><td>¿Cuánto pagas por el carnet y 17 viajes? Explícame cómo lo haces</td><td>¿Cuánto pagas por el carnet y un millón viajes?, Explícame cómo lo haces.</td><td>Encarna paga por el carnet y  viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Cumpleaños
($y= 2x$)</td><td><table><tr><th>Número de mesas</th><th>Números de cajas</th></tr><tr><td>6</td><td></td></tr></table>Explica cómo lo sabes</td><td><table><tr><th>Número de mesas</th><th>Números de cajas</th></tr><tr><td>2000</td><td></td></tr></table>Explica cómo lo sabes</td><td>¿Cómo sabes cuántas mesas hay cuando conoces la cantidad de cajas?</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Sesión</th><th rowspan="2">Contexto y función</th><th colspan="3">Ejemplos de preguntas por tipo de casos</th></tr>
<tr><th>Cercanos</th><th>Lejanos</th><th>Indeterminados</th></tr>
<tr><td>4</td><td>Cumpleaños
($y= 2x$)</td><td>Cuando Isabel utiliza 11 mesas necesita 21 cajas. Verdadero(V) o falso (F).</td><td><table><tr><th>Número de mesas</th><th>Números de cajas</th></tr><tr><td>1000</td><td>El doble de 1000</td></tr></table>Verdadero (V) o falso (F). Explica cómo lo sabes.</td><td>Cuando Isabel utiliza Z mesas necesita Z+Z cajas. Verdadero(V) o falso (F).</td></tr>
</table>

A continuación, describimos los cuestionarios correspondientes para cada una de las sesiones analizadas por curso.

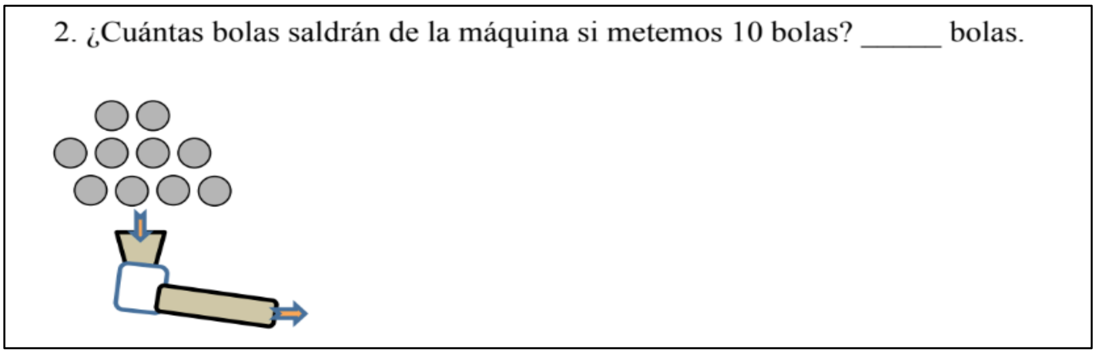
4.4.1.1. Cuestionario de Segundo de Primaria

Para la sesión “máquina de bolas” utilizamos un cuestionario (ver Anexo A) que incluía siete preguntas. Estas preguntas estaban divididas en preguntas abiertas y otras de doble opción (verdadero o falso) que abordaban casos particulares (cercanos y lejanos) y casos generales e indeterminados.

Las primeras cuatro preguntas eran abiertas. Con estas preguntas abordamos casos particulares (cercanos y lejanos). En la figura 4-12 presentamos un ejemplo este tipo de pregunta.

Figura 4-12

Ejemplo de Pregunta Abierta sobre un Caso Particular Cercano



Las dos preguntas siguientes eran abiertas y abordaban la generalización (ver Figura 4-13):

Figura 4-13

Ejemplo de Pregunta Abierta sobre un Caso Indeterminado

5. Pon el número de bolas que crees que saldrán de la máquina en la siguiente situación. _______ bolas.

La pregunta 7 (verdadero o falso), estaba dividida en dos grupos. Este apartado contenía tres preguntas sobre casos particulares (7.a, 7.b y 7c) y cuatro sobre generalización (7.d, 7.e, 7.f y 7g). En la Figura 4-14 mostramos un ejemplo de este tipo de pregunta.

Figura 4-14

Ejemplo de Preguntas Cerradas (Verdadero o Falso)

(c) En la máquina siempre salen tres bolas más que las bolas que has metido.

Verdadera   Falsa

(d) En la máquina siempre sale el doble del número de bolas que de bolas que has metido.

Verdadera   Falsa

Para su aplicación, el investigador-docente les explicó que en las preguntas abiertas podían responder como quisieran (para dar oportunidad al uso de diferentes representaciones como dibujos o palabras). Para las preguntas de verdadero y falso debían rodear la opción que ellos consideraran correcta.

4.4.1.2. Cuestionarios de Cuarto de Primaria

Describiremos los dos cuestionarios utilizados para cuarto de primaria, uno para cada sesión analizada. En la sesión 1 "parque de atracciones" utilizamos un cuestionario de ocho preguntas abiertas (ver Anexo C). Las preguntas las organizamos desde casos particulares cercanos, lejanos, hasta llegar a los casos generales e indeterminados.

Las primeras cinco preguntas estaban destinadas a casos particulares cercanos. A continuación, en la Figura 4-15 presentamos un ejemplo:

Figura 4-15

Ejemplo de Pregunta sobre un Caso Particular Cercano

2. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 4 viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

Las preguntas 6 y 7 del cuestionario eran sobre casos particulares lejanos (ver Figura 4-16):

Figura 4-16

Ejemplo de Pregunta sobre un Caso Particular Lejano

7. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar un millón de viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

La última pregunta, era sobre la generalización de la tarea. En ella les pediamos que explicaran a un amigo lo que gastaría en el parque.

Respecto a la sesión 3 “cumpleaños”, utilizamos un cuestionario el cuál incluía un tabla que debían completar con los valores faltantes (Ver Anexo E). Los valores no eran correlativos y estaban organizados desde casos cercanos y lejanos. Además, por cada una de las filas, debían explicar como habían obtenido el resultado. Esta tabla consideraba la relación directa e inversa. Este cuestionario incluía además dos preguntas finales donde les solicitamos generalizar para la relación directa e inversa de la tarea trabajada. Las preguntas eran: “¿Cómo sabes cuántas mesas hay cuando conoces la cantidad de cajas?” y “¿Cómo sabes cuántas cajas hay cuando conoces la cantidad de mesas?”.

4.4.2. Entrevistas

Para Cortés y León (2004) “la entrevista es un instrumento fundamental en las investigaciones sociales, pues a través de ella se puede recoger información de muy diversos ámbitos relacionados con un problema que se investiga” (p. 37). “Es la comunicación interpersonal establecida entre el investigador y el sujeto de estudio a fin de obtener respuestas verbales a las interrogantes planteadas sobre el problema propuesto” (Canales et al., 1994, p. 129). Para Hernández-Sampieri et al. (2014, p. 403) la entrevista “se define como una reunión para conversar e intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado) u otras(entrevistados)”.

La entrevista es un instrumento flexible para obtener información que permite explorar cómo un sujeto o vario sujetos establecen conexiones e ideas sobre un tema (Cohen et al., 2018). Es decir, la entrevista es un método versátil y valioso para recopilar información, ya que permite explorar a fondo la experiencia, las opiniones y las perspectivas de las personas. Para nuestra investigación, las entrevistas cumplieron un papel fundamental para la recopilación de datos cualitativos, lo que nos permitió profundizar en el análisis del proceso de generalización de los estudiantes. En el caso de segundo de primaria, la entrevista inicial tenía como objetivo corroborar la generalización de los estudiantes, además de analizar las mediaciones realizadas por el investigador-docente. En el caso de cuarto de primaria, el objetivo de las entrevistas estaba centrado en comparar el proceso de generalización de los estudiantes en relación con la primera sesión. Para ambos cursos, las entrevistas nos ayudaron a analizar en profundidad cómo los estudiantes generalizan, ofreciendo una visión su progreso y desarrollo conceptual.

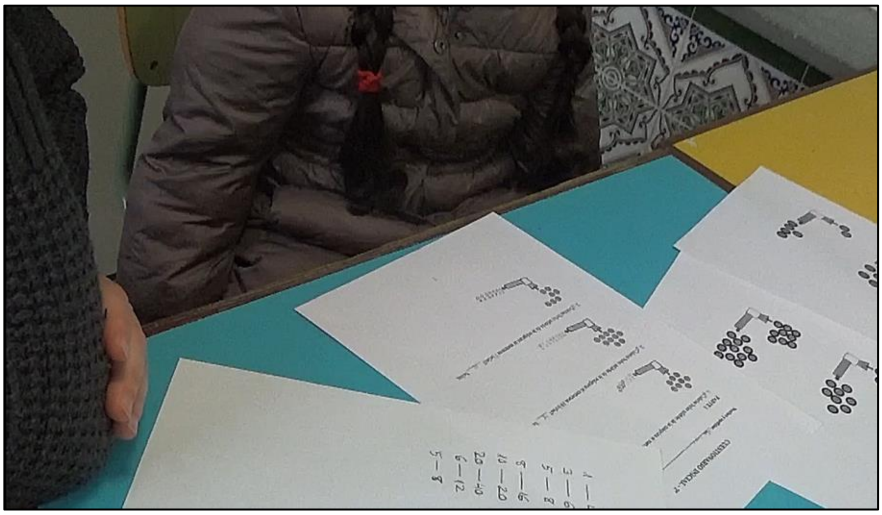
Diseñamos las entrevistas considerando los objetivos de investigación planteados. La intención de las entrevistas fue profundizar en el proceso de generalización de los estudiantes. Estas entrevistas eran semiestructuradas, consideradas como “una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información” (Hernández et al. 2014, p. 403). Este tipo de entrevista, en comparación a una estructurada, es más abierta y flexible (Canales et al., 1994) lo que permitió que el entrevistador modificara las preguntas o el orden en el que las presentaba. Las entrevistas realizadas fueron videograbadas y transcritas para su posterior análisis.

Del grupo de segundo de primaria, en el que participaron 24 estudiantes, seleccionamos a seis para realizar las entrevistas individuales. Los criterios de selección de los estudiantes fueron sus resultados en el cuestionario inicial, su rendimiento académico y su disposición a participar. Realizamos la entrevista en un aula de su centro educativo, distinta a su sala habitual. En esa aula estaba el estudiante entrevistado y un investigador del proyecto.

En la entrevista revisamos las respuestas escritas de los estudiantes en sus cuestionarios iniciales (ver Figura 4-17)

Figura 4-17

Entrevista Realizada a Estudiante de Segundo de Primaria



Para el desarrollo de la entrevista, el entrevistador utilizó un guion de preguntas predefinidas como punto de partida. “¿Recuerdas cómo funcionaba esta máquina?; ¿me darías dos ejemplos?; por ejemplo, si entran 4 bolas) ¿qué hiciste para obtener esa respuesta?”

En cada entrevista, partimos del trabajo previo de cada estudiante para identificar en qué podíamos profundizar según nuestros objetivos de investigación. En las entrevistas les preguntamos sobre distintos casos particulares, partiendo por casos cercanos. Según como avanzaba cada estudiante, se iba aumentando el tamaño de los números, hasta proponer casos con valores indeterminados. Utilizamos un protocolo de entrevista que ayudaba a guiar el trabajo con los estudiantes (ver Anexo B).

Respecto a los 25 estudiantes que conformaban el grupo de cuarto de primaria, entrevistamos a 6. La elección de estos estudiantes se basó en criterios específicos, habían realizado la entrevista inicial y su disposición para participar activamente.

Durante la entrevista trabajamos con una tarea funcional cuyo contexto era una fiesta de cumpleaños $(y=3x+1)$. El objetivo de la tarea planteada era descubrir la regularidad a partir de casos particulares, generalizar relación funcional y aplicar relación funcional en casos en los que la cantidad fuera indeterminada. La entrevista comenzaba con el caso “Cuando hay 3 invitados, se necesitan 10 globos” (ver Figura 4-18). Posteriormente se presentaban los casos “cuando hay 6 invitados, se necesitan 19 globos; cuando hay 2 invitados, se necesitan 7 globos”. Los estudiantes contaban con imágenes y material concreto (globos de papel) para resolver los casos, si lo consideraban necesario.

Figura 4-18

Representación Pictórica del Caso con 3 Invitados

Luego de presentarles los casos, les proponiamos la situación “cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita?”. En este caso no se le indicaba la cantidad de globos total. Durante la entrevista se realizaban tantos casos particulares fuesen necesarios antes de pasar a las preguntas relacionadas con cantidades indeterminadas: “si invita a “muchos” invitados, ¿cuántos globos necesita?”; “si invita a “infinitos” invitados, ¿cuántos globos necesita?”.

El protocolo de la entrevista para segundo y cuarto de primaria (ver Anexos B y D) estaba constituido por los pasos que detallamos en la Figura 4-19

Figura 4-19

Protocolo de Entrevista

Recordar el problema presentado

- ¿Recuerdas cómo funcionaba esta máquina?
- Si la respuesta era positiva se preguntaba: ¿Me darías dos ejemplos?, ¿qué hiciste para obtener la respuesta?
- Si la respuesta era negativa se procedía a recordar y mostrar los ejemplos y se preguntaba: ¿Qué relación existen entre las bolas que entran y salen? Posteriormente se preguntaba por ejemplos concretos que habían aparecido.

Aplicar la regularidad en casos particulares

- Casos particulares dados
- Casos particulares del estudiante
- Casos particulares de un tercero

Identificar las ideas de los estudiantes sobre las letras y su uso

- Interpretación de lo indeterminado. Se les preguntaba: ¿qué podemos usar al principio de la máquina para indicar que entra un número de bolas?
- Generalización: ¿cómo puedes saber cómo funciona la máquina?

Uso de letras:

- ¿Para qué crees que se usan las letras? ¿qué puede significar A bolas?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A bolas?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A+1 bolas?
- ¿Si meto A bolas en la máquina salen A+3 bolas?
- Si entran α bolas ¿cuántas bolas salen?

Además, establecimos para ambos cursos acciones que guiaran a los estudiantes en el desarrollo de la entrevista como: (a) repetición de la pregunta, la cual podía ser igual, variando o destacando algunos elementos; (b) repetición de la respuesta o una síntesis de la última respuesta; (c) estímulo con expresiones de interés, ya sea de forma verbal o gestual; (d) pausas; (e) solicitar profundizar y (f) aclaraciones de lenguaje (Hidalgo-Moncada, 2018).

4.5. Análisis de Datos

Para llevar a cabo el análisis de los datos recopilados en nuestra tesis y cumplir con los objetivos de investigación, empleamos diversas estrategias y herramientas. Primero, escaneamos y revisamos las respuestas proporcionadas por los estudiantes en sus cuestionarios. Complementábamos la información obtenida con las imágenes de los videos cuando resultaba pertinente, para clarificar respuestas o acciones. Además, realizamos las transcripciones de las sesiones, lo que nos permitió tener un registro real de todo lo acontecido.

Para cada uno de los estudios realizados, diseñamos un sistema de categorías específicas con base en los antecedentes sobre generalización y mediaciones. Cada análisis fue sometido a una revisión exhaustiva y discusión por parte de los autores de la investigación.

Sobre las transcripciones, utilizamos hojas de Excel, donde identificamos a los hablantes y registrábamos sus expresiones orales, línea por línea. El uso de Excel también facilitó la codificación de datos de acuerdo con las categorías predefinidas en cada estudio.

En lo que respecta a los cuestionarios, ingresamos las respuestas de los estudiantes en hojas de Excel, categorizando si eran respuestas correctas, parcialmente correctas o incorrectas. Además, analizamos las respuestas escritas abiertas, donde los estudiantes expresaban sus reflexiones sobre la generalización. Esta metodología nos permitió identificar patrones de generalización, las mediaciones que se llevaron a cabo, las justificaciones proporcionadas por los estudiantes y las acciones que fomentaron la generalización.

Sobre el análisis, llevamos a cabo un análisis mixto para los estudios 1 y 2, realizando la integración de análisis de datos cuantitativos y cualitativos en una misma investigación para abordar nuestras preguntas de investigación (Hernández-Sampieri et al., 2014). Para los estudios 3 y 4, optamos por un análisis cualitativo, que involucró una sistematización de la selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación de datos, lo que nos permitió profundizar en el fenómeno de interés (McMillan y Schumacher, 2005).

En todos los estudios, aplicamos el análisis de discurso como enfoque metodológico. Esto no solo implicó el análisis del discurso en sí, sino también un enfoque ético que nos llevó a estudiar a los sujetos y sus prácticas. El análisis de discurso nos proporcionó una comprensión más profunda de las prácticas discursivas que se dan en diversas esferas de la vida social, considerando la producción, distribución e interpretación de los discursos en un contexto procesual. Este enfoque metodológico nos brindó herramientas teóricas y prácticas para desentrañar el significado y el impacto de los discursos en nuestra investigación (Haidar, 2003; Karam, 2005).

Para realizar el análisis de los datos, inicialmente nos basamos en las categorías establecidas en investigaciones previas relacionadas con el tema que estábamos investigando. Sin embargo, también incorporamos categorías adicionales que se adaptaron a nuestro contexto de estudio y a los objetivos de investigación específicos.

En particular, para identificar la generalización, nos centramos en las expresiones y respuestas verbales o escritas. En nuestro estudio, consideramos que un estudiante generalizaba cuando respondía correctamente las preguntas relacionadas con la generalización y/o expresaba la regularidad de la tarea planteada en más de dos ocasiones. Un ejemplo de esta situación lo observamos en la sesión de Cumpleaños de cuarto de primaria:

I: *E5.*
E5: *Multiplicando.*
I: *¿Por cuánto?*
E5 *Por dos.*
I: *¿Qué cosa?*
E5 *Pues 500 millones por dos serían 100 millones.*
I: *Entonces cuando sabes el número de mesas para saber el número de cajas, ¿qué haces?*
E5 *Se multiplica, pues multiplicar.*

I: *¿Cuándo sabes el número de mesas para saber el número de cajas que dices?*

E5: *Multiplico por dos que son las cajas que hay en cada mesa.*

Dentro de la categoría de generalización, identificamos la subcategoría de "generalizar incorrectamente o generalizar de forma incompleta". Esta situación se presentaba cuando el estudiante reconocía parte de la regularidad en la tarea planteada, aunque no era la correcta. Por ejemplo, en el caso de la máquina de bolas, los estudiantes podían indicar que la cantidad de bolas que salían de la máquina era mayor, pero no especificaban la cantidad adecuada. En otras palabras, aunque sus respuestas fueran incorrectas, demostraban la capacidad de identificar un patrón o pauta en la situación.

La regularidad, en este contexto, se entendía como un patrón o pauta que se repetía con cierta regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se preveía que podía volver a repetirse (Cañadas y Castro, 2007).

Este sistema de categorías nos permitió clasificar y analizar de manera precisa las respuestas de los estudiantes en relación con la generalización, identificando no solo las respuestas correctas, sino también aquellas en las que se evidenciaba un intento de comprender y aplicar la regularidad, incluso si este no era completamente preciso. Esta metodología enriqueció nuestra comprensión del proceso de generalización en el contexto de nuestro estudio.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

En este capítulo detallamos los resultados obtenidos en esta Tesis Doctoral los cuales están organizados en cuatro estudios. Los estudios se centran en dar respuesta a nuestros objetivos de estudio. El estudio 1 se encuentra en el apartado 3.1. de este documento. Los otros tres estudios están en este capítulo. A continuación, detallamos el orden de cada uno de ellos.

- Estudio 1: Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M. C. (en revisión). Análisis Bibliométrico de la producción científica sobre pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria en Scopus.
- Estudio 2: Narváez, R. y Cañadas, M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en un contexto de generalización. *PNA 17*(3), 239-264. https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153
- Estudio 3: Narváez, R., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (en revisión). Justifications and mediations in the generalization process among fourth grade students.
- Estudio 4: Narváez, R., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (en elaboración). De lo concreto a lo abstracto: Análisis del proceso de generalización.

5.1. Estudio de Investigación 2: Mediaciones Realizadas a Estudiantes de Segundo de Primaria en una Tarea de Generalización

Narváez, R. y Cañadas, M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en un contexto de generalización. *PNA 17*(3), 239-264.
https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153

Resumen

Este estudio se desarrolla dentro del ámbito del pensamiento algebraico en educación primaria. Durante la realización de entrevistas individuales, en las que propusimos a seis estudiantes de segundo de educación primaria (7- 8 años) una tarea de generalización, centrándonos en las mediaciones del investigador-docente, quien guió dichas entrevistas. El objetivo de investigación es describir la generalización de los estudiantes antes y después de las mediaciones realizadas. Entre los resultados, destacamos que, al finalizar las entrevistas, los seis estudiantes generalizaron, algunos de forma correcta y otros de forma incompleta. Identificamos, además, que las mediaciones tuvieron un rol fundamental para la identificación de la regularidad de la tarea planteada, permitiendo a los estudiantes corregir errores y justificar, lo que les ayudó a generalizar.

Palabras claves. Educación primaria; generalización; mediación; pensamiento algebraico; pensamiento funcional.

Mediations carried out with second graders in a generalization context.

Abstract

This study is developed within the field of algebraic thinking in elementary school. During individual interviews, in which we proposed to six students in the second year of elementary school (7-8 years old) a generalization task, focusing on the mediations of the researcher-teacher, who guided these interviews. The research objective is to describe the generalization of the students before and after the mediations. Among the results, we highlight that, at the end of the interviews, all six students generalized, some of them correctly and others incompletely. We also identified that the mediations played a fundamental role in identifying the regularity of the task, allowing the students to correct errors and justify, what helped them to generalize.

Keywords. Algebraic thinking; elementary education; functional thinking; generalization; mediation.

Mediações realizadas com estudantes do segundo ano num contexto de generalização

Resumoc

Este estudo é desenvolvido no campo do pensamento algébrico no ensino primário. Durante entrevistas individuais, nas quais propusemos uma tarefa de generalização a seis estudantes no segundo ano do ensino primário (7-8 anos de idade), centrando-se nas mediações do investigador-professor, que orientou as entrevistas. O objectivo da investigação é describir a generalização dos estudantes antes e depois das mediações realizadas. Entre os resultados, salientamos que, no final das entrevistas, os seis estudantes generalizaram, alguns correctamente e outros de forma incompleta. Identificámos também que as mediações desempenharam um papel fundamental na identificação da regularidade da tarefa, permitindo aos estudantes corrigir erros e justificar, o que os ajudou a generalizar.

Palavras-chave. Ensino primário; generalização; mediação; pensamento algébrico; pensamento funcional.

Introducción

Investigaciones relacionadas con el *early algebra* han descrito que los estudiantes de los primeros cursos pueden desarrollar tareas que aborden funciones y que más de los estudiantes esperados generalizan (e.g., Carraher et al., 2008; Pinto y Cañadas, 2021). Trabajar con pensamiento funcional puede ayudar a los niños a desarrollar distintas habilidades matemáticas que le permitirán aprender y comprender el álgebra de mejor forma. La percepción y generalización de patrones y relaciones son algunas de esas habilidades que facilitan herramientas para alcanzar el conocimiento matemático. (Castro et al., 2010; Kaput, 2008; Molina y Cañadas, 2018).

En el trabajo con el enfoque funcional, el estudiante puede utilizar "diversas herramientas lingüísticas y de representación, tratando relaciones o funciones generalizadas que resultan como objetos matemáticos útiles por derecho propio" (Blanton y Kaput, 2004, p. 35). Una forma de abordar la generalización con estudiantes de primaria es a través de actividades o situaciones que involucren una función lineal (Cañadas, 2016; Torres et al., 2021). Pero, para trabajar el pensamiento funcional con los primeros cursos, es necesario adaptarlo al nivel educativo donde se trabajará, planteando actividades que incentiven el razonamiento matemático (Cañadas y Molina, 2016).

Trabajar el pensamiento funcional no es una tarea sencilla. Debemos considerar las distintas actuaciones que ayuden a los estudiantes a resolver dudas, corregir errores y motivarlos a lograr el objetivo matemático. Una forma de apoyar a los estudiantes en este proceso es la mediación, considerada un proceso de interacción social, donde se trabaja de forma conjunta para producir conocimiento (Rodríguez et al., 2008).

Existen investigaciones que han analizado la generalización y las mediaciones o acciones, por parte de un docente o investigador-docente, con estudiantes de los últimos cursos de educación primaria y de secundaria (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Mata-Pereira y Da Ponte, 2017; Ureña et al., 2019). En estos estudios han mostrado que las acciones de interacción o mediaciones han favorecido el avance de los estudiantes hacia la generalización.

Para este estudio describimos las mediaciones realizadas por parte de un investigador-docente durante el desarrollo de entrevistas semiestructuradas a seis estudiantes de segundo de primaria, identificando los tipos de mediaciones y cuál fue el resultado de las mismas. Para ello, describimos la generalización de los estudiantes antes y después de las mediaciones realizadas por el investigador docente, caracterizando a la vez las mediaciones utilizadas por parte del investigador-docente.

Pensamiento Algebraico y Pensamiento Funcional

"El pensamiento algebraico considera las formas de hacer, pensar y hablar sobre el álgebra" (Cañadas, 2016, p. 8). Esto permite desarrollar habilidades que ayudan a los estudiantes a comprender de mejor forma los componentes que lo conforman, como las relaciones funcionales y la generalización, trabajando a su vez con cantidades indeterminadas, a través del análisis de las situaciones presentadas (Butto y Rojano, 2010; Radford, 2011)

El trabajo con pensamiento algebraico en educación primaria ayuda a desarrollar concepciones matemáticas más profundas y complejas (Blanton y Kaput, 2005). Este tipo de pensamiento matemático ocurre cuando los estudiantes identifican relaciones en operaciones aritméticas, expresiones, ecuaciones o datos de funciones que pueden generalizar más allá de los casos dados. Su uso en cursos educación primaria puede mejorar las dificultades que los estudiantes de cursos superiores han enfrentado por mucho tiempo (Stephens et al., 2015).

En este trabajo nos centramos en el pensamiento funcional, uno de los componentes del pensamiento algebraico, a través del cual se puede trabajar la generalidad (Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Blanton, 2014). Este tipo de pensamiento está "basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que la constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 210).

Distintos autores han caracterizado el pensamiento funcional, indicando que se basa en la forma de pensar en términos de y acerca de relaciones, siendo una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que covarían (Rico, 2007; Smith 2008).

El pensamiento funcional permite que los estudiantes se familiaricen con conceptos y procedimientos como la representación y generalización de relaciones entre cantidades, razonar con fluidez con estas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de la función (Stephens et al., 2017). Abordar el pensamiento funcional implica (a) generalizar las relaciones entre cantidades covariables; (b) representar y justificar estas relaciones de múltiples maneras utilizando lenguaje natural, notación variable, tablas, y gráficas; y (c) razonar con fluidez con estas representaciones generalizadas para comprender y predecir el comportamiento funcional (Blanton et al., 2015). Por ello, autoras como Cañadas y Fuentes (2015) indican que se puede identificar el pensamiento funcional cuando "el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos, y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia una regla general o generalización" (p. 213).

Generalización

La generalización se considera el núcleo central del álgebra, en el conocimiento matemático y en el conocimiento en general (Mason, 1996). La generalización, como proceso, permite analizar las particularidades de una situación matemática y sacar una conclusión de ellas. Como describen Cañadas y Castro (2007), la generalización se produce cuando "una conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada" (p. 57). Es un proceso que involucra reconocer distintos tipos de patrones, relaciones de variables entre diferentes términos y la forma breve de expresarlo (Villa, 2006). Para Radford (2010) la generalización se basa en captar una característica común sobre algunos elementos de la secuencia y que este elemento en común aplique para todos los casos. Este autor expresa que esta característica común identificada, sirve para construir expresiones de elementos de la secuencia que quedan más allá del campo perceptivo.

La generalización nos permite analizar relaciones entre cantidades y extraer una regularidad ante una situación dada, donde se identifican propiedades que van más allá de una instancia particular (Kaput, 2008; Mata-Pereira y Da Ponte, 2019). Como lo expresa Kaput (1999) la generalización implica llevar el razonamiento a un nivel en el que la atención ya no se centra en los casos en sí mismos, sino en los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones existentes entre ellos.

Dentro de un contexto funcional, la generalización implica identificar y representar la regla que relaciona ambas cantidades desde lo particular a casos más generales, permitiendo que los estudiantes identifiquen y expresen la regularidad que existe entre variables (Ureña, et al., 2019).

Mediaciones

Dentro del enfoque sociocultural, la mediación es una interacción educativa significativa y trascendente. Su intención es acompañar y ayudar, llevando al sujeto que aprende a su zona de desarrollo potencial, considerada como zona de construcción social del conocimiento (Ferreiro y Calderón, 2005).

Esta interacción en el proceso de aprendizaje estimula y activa distintos procesos mentales que surgen de la relación con otras personas (Carrera y Mazzarella, 2001). El sentido de la mediación es promover una interacción dialógica y lúdica que ayude a tener un conocimiento, considerando los distintos estilos de aprendizaje (Escobar, 2011). En este sentido, el docente o persona que ejerce como mediador juega un rol importante en el proceso de aprendizaje, siendo el que orienta al estudiante en la conformación del andamiaje. Desde esta perspectiva social, Ferreiro y Calderón (2005) describen que:

> El mediador es la persona que, al relacionarse con otra u otras, propicia el paso del sujeto que aprende de un estado inicial de no saber, poder o ser, a otro cualitativamente superior de saber, saber hacer y lo que es más importante, ser. (p. 112)

El mediador ayuda para que la persona que está en un estado inicial de aprendizaje pueda pasar a un estado potencial, es decir, que haya aprendido. Esto se consigue con la utilización de distintas estrategias, considerando el estilo de aprendizaje. Por tanto, el mediador favorece, estimula y corrige (Ferreiro y Calderón, 2005). El mediador puede explorar los desacuerdos o errores a través del apoyo y guía, incentivando a los estudiantes a justificar sus respuestas (Da Ponte et al., 2017).

Los objetivos de investigación que planteamos en este trabajo son:

1. Caracterizar la generalización de los estudiantes antes y después de la mediación.
2. Describir las mediaciones realizadas por un investigador-docente a seis estudiantes de segundo de primaria dentro de un contexto de generalización.

Metodología

En este trabajo seguimos un enfoque mixto, realizando un análisis de datos que combina lo cualitativo y lo cuantitativo, teniendo, además, un carácter exploratorio y descriptivo (Hernández-Sampieri et al., 2014). Este estudio es parte de una investigación más amplia, donde diseñamos e implementamos experimentos de enseñanza con sesiones de trabajo (Molina et al., 2011).

El experimento de enseñanza, realizado con los estudiantes de segundo de primaria, incluyó dos entrevistas y cinco sesiones de trabajo, donde propusimos a los estudiantes distintas tareas que involucraban funciones. En la Tabla 5-1 detallamos las funciones trabajadas en cada una de las sesiones.

Tabla 5-1

Tareas Propuestas a los Estudiantes

Sesión	Contexto	Función
1	Cuestionario inicial "máquina funcional"	$y = x + 3$
2	Parque de atracciones	$y = x + 3$
3	Parque de atracciones	$y = 2x+1$
4	Cumpleaños	$y = 2x \,/\, x + x$
5	Paradas de Tren	$y = 2x \,/\, x + x$

En este estudio analizamos la información recogida a través del cuestionario inicial y de las entrevistas iniciales individuales realizadas a los estudiantes. Además, realizamos un estudio de casos, definido como "la descripción y el examen o análisis en profundidad de una o varias unidades y su contexto de manera sistémica y holística" (Hernández et al, 2014, p. 2).

Este trabajo lo realizamos con seis estudiantes de segundo de primaria (7-8 años) pertenecientes a un colegio concertado de Granada (España). Los seis estudiantes fueron seleccionados por la maestra de la clase, quien consideró que ese grupo de estudiantes tuviesen buena disposición para trabajar y expresar sus respuestas. Además, consideró que estos seis estudiantes fueran de distintos niveles académicos (bajo, intermedio y alto), según era su rendimiento en matemáticas.

Respecto a los conocimientos previos de los estudiantes, tuvimos en cuenta el currículo vigente para los números involucrados en las tareas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014). Además, no habían trabajado con tareas sobre generalización.

El investigador-docente es un integrante del proyecto en el que se encuentra inmerso este trabajo. Participó en la sesión del cuestionario inicial y posteriormente en la realización de las entrevistas individuales. Su función, como investigador-docente, fue mediar cuando los estudiantes presentaban dificultades, cuando incurrían en un error al responder o no sabían seguir en el desarrollo de la tarea.

En la recolección de información, usamos la observación participante, entrevistas semiestructuradas y cuestionarios individuales de los estudiantes. Grabamos las entrevistas y escaneamos las producciones escritas de los cuestionarios.

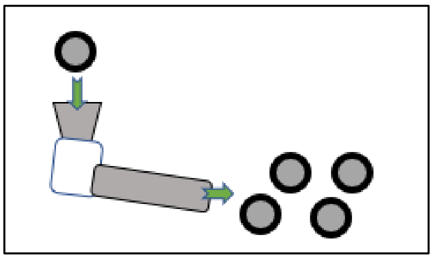
Respecto al cuestionario y las entrevistas, fueron elaboradas considerando el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Utilizamos la idea de function machines (e.g., Torres et al., 2018) para presentar la tarea de generalización, siendo adaptada a una situación más familiar para ellos. Los dos instrumentos fueron validados por miembros del proyecto, mediante una triangulación de expertos

En la sesión del cuestionario inicial, presentamos una tarea de generalización que involucra la función $f(x)= x+3$. Trabajamos con esta función porque en trabajos previos se observa que niños de estas edades pueden abordarlas, pero a la vez supone un rato para ellos en la generalización (e.g., Cañadas, 2016).

El contexto empleado para la tarea fue una máquina donde la variable independiente era el número de bolas que entraba en la máquina y la variable dependiente, el número de bolas que salen En el enunciado se empleó un dibujo de la máquina y las bolas que entraban y salían (ver Figura 5-1).

Figura 5-1

Representación Pictórica de la Máquina



Una vez introducida la tarea, les planteamos distintos casos particulares a los estudiantes, los que resolvimos conjuntamente. Posterior a esto, trabajaron individualmente el cuestionario. Este instrumento tenía como objetivo indagar la situación inicial de los estudiantes respecto a la generalización. El cuestionario tenía 13 preguntas, sobre casos particulares y sobre la generalización. Seis de ellas eran abiertas y las otras siete de verdadero y falso. En la Tabla 5-2 presentamos las preguntas realizadas en el cuestionario.

Tabla 5-2

Preguntas Presentadas en el Cuestionario Inicial

Pregunta	Descripción	Tipo de pregunta
P.1	¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas?	Abierta
P.2	¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 10 bolas?	Abierta
P.3	¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 7 bolas?	Abierta
P.4	Pon el número de bolas que tú quieras al principio de la máquina ¿cuántas bolas salen?	Abierta
P.5	Pon el número de bolas que crees que saldrán de la máquina en la siguiente situación	Abierta
P.6	Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quién averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?	Abierta
P.7a	Si en la máquina metes 4 bolas, salen 7 bolas.	V/F
P.7b	En la máquina siempre salen 2 bolas más que las bolas que has metido.	V/F
P.7c	En la máquina siempre salen 3 bolas más que las bolas que has metido.	V/F
P.7d	En la máquina siempre sale el doble del número de bolas que has metido.	V/F
P.7e	Si meto A bolas en la máquina, salen A bolas.	V/F
P.7f	Si meto A bolas en la máquina, salen A+ 1 bolas.	V/F

Pregunta	Descripción	Tipo de pregunta
P.7g	Si meto A bolas en la máquina, salen A+ 3 bolas.	V/F

Nota. V/F = verdadero o falso.

En la siguiente sesión realizamos una entrevista semiestructurada individual a seis estudiantes. Cada entrevista tuvo una duración de 20 a 25 minutos. El objetivo fue revisar el cuestionario al que ellos mismos habían respondido. Todos los estudiantes tuvieron el tiempo necesario para responder.

Diseñamos la entrevista con base en las preguntas del cuestionario y los objetivos planteados, produciendo en primer lugar un protocolo de entrevista. El propósito de este instrumento fue obtener información sobre el proceso de generalización de los estudiantes y las mediaciones realizadas con ellos. Al ser una entrevista semiestructurada, nos permitía tener "la libertad de introducir preguntas adicionales" (Hernández et al., 2014, p. 403).

Durante la realización de las entrevistas, los estudiantes tenían a su disposición los cuestionarios iniciales, con el fin de revisar sus respuestas. Esto daba la libertar de guiar las entrevistas según las necesidades de cada estudiante.

Para analizar los datos obtenidos, detallamos a continuación las categorías referentes a las mediaciones y a la generalización. Estas categorías fueron elaboradas con base en nuestros antecedentes y la realización de una triangulación de expertos en el tema. Describimos a continuación cada una de ellas:

- Generalización: consideramos que los estudiantes generalizaban de forma correcta, cuando respondían adecuadamente las preguntas del cuestionario, expresando a su vez la regularidad de la tarea planteada. A su vez, identificamos un tipo de generalización incompleta. Esta se producía cuando los estudiantes reconocían una regularidad (que la cantidad de bolas que salía era mayor o que aumentaba) pero no aludían a la cantidad concreta.
- Mediación: utilizamos las categorías Mata-Pereira y Da Ponte (2017), Da Ponte et al., (2013; 2017) y Ureña et al., (2019). En estos estudios se detallan las siguientes mediaciones:

- Invitar, donde el mediador anima a los estudiantes expresar sus respuestas a través de la justificación o el intercambio de idea.
- Apoyar/guiar, mediación donde se le proporcionaban diversas ayudas y orientaciones para que los estudiantes realizaran con éxito la tarea. No se les entregaba la información directamente. Para ello, se les repetían informaciones o datos que podían ser de ayudar para que el estudiante contextualizara la tarea o aclarara dudas.
- Informar/sugerir, mediación donde se le sugerían procedimientos para ordenar la información o datos de la tarea. El mediador de forma explícita le sugería un proceso para resolver la tarea. Además, validaba las respuestas de los estudiantes.
- Desafiar, mediación donde se buscaba alentar a los estudiantes a ir más allá de los ejercicios propuestos, aumentando la dificultad de los ejercicios planteados.
- Cuestionar, mediación donde se cuestionaban las respuestas erróneas de los estudiantes con el fin de que identificaran y analizaran el error.

Análisis de Datos y Resultados

A continuación, presentamos el análisis de datos y los resultados. Recogimos la información de manera general para los seis estudiantes, mostrando ejemplos de algunas respuestas, tanto del cuestionario como de las entrevistas. Para resguardar la identidad de los estudiantes que participaron en esta investigación, nos referimos a ellos con una codificación alfanumérica formada por una E y un número del uno al seis (E1, E2, E3, etc.). Para referirnos al investigador-docente, utilizamos la letra I, quien además toma el rol de mediador en el desarrollo de las sesiones.

Comparación del Proceso de Generalización de los Estudiantes sin y con Mediación

En la Tabla 5-3 resumimos las respuestas de los estudiantes al responder el cuestionario inicial, antes y después de la realización de las mediaciones.

Para cada estudiante y cada pregunta del cuestionario, identificamos si respondían correctamente, incorrectamente o de forma incompleta. Al referirnos a una respuesta incompleta, hemos consideramos a aquellas en donde el estudiante presentaba un error de cálculo, pero identificaba parte de la regularidad (identificaba que la cantidad de bolas que salían de la máquina era mayor pero la cantidad era incorrecta).

Tabla 5-3

Comparación del Proceso de Generalización Antes y Después de la Mediación

	Casos particulares							Generalización					
	P1	P2	P3	P4	P7a	P7b	P7c	P5	P6	P7d	P7e	P7f	P7g
							E1						
S	1*	1*	1	1*	1	1	1	1*	1	1	0	1	1
C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
							E2						
S	1*	1*	1*	1*	0	1	0	0	1*	0	0	0	0
C	1*	1*	1*	1*	0	1	1	1*	1*	0	0	1	1
							E3						
S	1*	1*	1*	1*	0	0	0	0	0	0	1	1	0
C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
							E4						
S	1	1*	1*	1*	0	0	1	0	1*	1	1	0	0
C	1*	1*	1*	1*	0	0	0	1*	1*	0	0	0	0
							E5						
S	1*	1*	1*	1	1	1	1	0	1*	0	1	0	0
C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
							E6						
S	1	1*	1	1	1	1	1	1	1*	1	0	1	1
C	1	1*	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Nota. S = sin mediación; C = con mediación; 0 = respuesta incorrecta; 1 = respuesta correcta; 1* = respuesta incompleta; S= sin mediación; C= con mediación.

En la Tabla 5-3 se observa que todos los estudiantes respondieron a todas las preguntas del cuestionario.

Sin Mediación

Antes de las mediaciones, podemos ver que los estudiantes respondieron de manera variada. En la mayoría de las preguntas sobre casos particulares, lo hicieron de forma correcta o incompleta, identificando que existe un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina. Un ejemplo es el caso de E2, quien respondió una pregunta correcta, cuatro respuestas incompletas y dos de forma incorrecta. Este estudiante identificó el aumento de bolas, pero lo hace de forma incorrecta, sumando uno a la cantidad de bolas que salen de la máquina.

Los estudiantes respondieron a la mayoría de las preguntas sobre generalización de forma incorrecta. En P6, pregunta referida a la generalización, los estudiantes debían explicar el funcionamiento de la máquina, indicando cómo podían saber el número de bolas que salían de ella. Hubo un estudiante que respondió correctamente (E1), cuatro que respondieron de forma incompleta (E2, E4, E5 y E6) y uno que respondió de forma incorrecta (E3). Presentamos algunos ejemplos a continuación.

- Respuesta correcta: E1 explicó que "*en el primero y una bola nos salen cuatro. En la segunda hay dos bolas salen cinco. En la tercera hay tres bolas salen seis. En la cuarta hay cuatro bolas salen siete*". Este estudiante no expresó la regularidad y utilizó ejemplos de casos particulares para explicarlo.
- Respuesta incompleta: E4 escribió que "*es porque se tiene que sumar*". Identificó que aumentan las bolas que salen de la máquina, sumando, pero no indicó en que cantidad.
- Respuesta incorrecta: E3 expresó "*que parten la mitad*". El estudiante respondió de forma incorrecta e incompleta, indicando que la cantidad que sale es menor.

Al analizar las respuestas de los estudiantes del cuestionario individual, identificamos que E6 generalizó en el cuestionario inicial. Los otros cinco estudiantes (E1, E2, E3, E4 y E5) generalizaron de forma incompleta.

Con Mediación

En relación con la generalización de los estudiantes después de las mediaciones, analizamos que en la mayoría de las preguntas existe una mejora en sus respuestas. Cuatro de los seis estudiantes corrigieron sus errores, pasando de respuestas incompletas a correctas o de respuestas incorrectas a respuestas incompletas o correctas.

En las preguntas sobre casos particulares E1, E3, E5 y E6 respondieron correctamente a estas preguntas. Los estudiantes E2 y E4 continuaron respondiendo de forma incompleta. En sus respuestas expresaban que aumentaba la cantidad de bolas que salían de la máquina, pero presentaban errores en determinar la regularidad. Un ejemplo es cuando E2 explica: "creo que algunos números son los que se suman dos y otros los que se les suma más de dos".

En cuanto a las preguntas P5 y P6, relacionadas a la generalización, existe un cambio positivo en sus respuestas, generalizando.

En el caso de E1, E3, E5 y E6 generalizaron correctamente y E2 y E4 generalizaron de forma incompleta. Al preguntar a los estudiantes sobre el funcionamiento de la máquina, E1, E3, E5 y E6 expresaron que la máquina funcionaba sumándole tres bolas. Los otros dos estudiantes (E2 y E4), expresaron que se sumaba, pero no determinaron la constante que se correspondía con el número de bolas que ingresaban a la máquina.

En las preguntas sobre generalización con simbolismo algebraico (P7d, P7e, P7f y P7g) del cuestionario, los seis estudiantes presentaron mayor cantidad de respuestas incorrectas. En el siguiente fragmento evidenciamos cómo E1 evidencia no reconocer las letras en matemáticas.

I *¿Qué representará esa A?*
E1: *No tengo nada.*
I: *No tienes ni idea, ¿Alguna vez habías visto letras en matemáticas?*
E1: *No.*

Otros estudiantes, como E2, atribuyó un número a la letra, según el orden alfabético de la letra en el abecedario.

I: *Y después dice: si meto A bolas en la máquina sale A bolas y tu pusiste verdadero ¿Sigues pensando qué es verdadero?*

E2: *Sí.*

I: *¿Y qué significa esa A, si meto A bolas?*

E2: *Yo creo que significa algún número.*

I: *¿Y esa A qué representará? ¿A de "algún número"?*

E2: *A de… como el abecedario, que esto te da una pista. Yo creo que la A significa uno.*

I: *¿Por qué uno, y no dos ponte tú?*

E2: *Porque dos sería el A, B… El B.*

I: *O sea, tú me dices que la letra A significa uno.*

E2: *Sí como que el A es una parte del abecedario y haciendo A B C D E F G pues ya vas sabiendo.*

I: *¿Entonces por ejemplo A?*

E2: *A es el uno porque va primero, segundo B*

I: *¿El número tres?*

E2: *La C.*

I: *¿El número cuatro?*

E2: *La D.*

Después de la mediación, E1, E3, E5 y E6 generalizaron. Dos de ellos (E2 y E4) generalizaron de forma incompleta.

Mediaciones

En la Tabla 5-4 resumimos los resultados relacionados a las mediaciones realizadas por el investigador-docente durante las entrevistas. Mostramos el tipo de mediación realizada con cada estudiante y la frecuencia con la que se hizo. Posteriormente describimos en que momentos se utilizaban y el efecto que produjo cada una de ellas.

Tabla 5-4

Mediaciones Realizadas por el Investigador-Docente

Estudiante	Invitar	Apoyar /guiar	Informar /sugerir	Desafiar	Cuestionar	Total
E1	6	2	1	6	3	18
E2	7	1	1	4	3	16
E3	6	2	0	5	5	18
E4	6	2	4	2	2	16
E5	5	2	0	6	1	14
E6	6	4	1	3	3	17
Total	36	13	7	26	17	99

Identificamos cinco mediaciones, (a) invitar, (b) apoyar/guiar, (c) informar/sugerir, (d) desafiar y (e) cuestionar. La frecuencia de mediaciones utilizadas por estudiante fue similar y constante. La mediación informar/sugerir no se utilizó con todos, a diferencia de las otras cuatro mediaciones, que se usaron durante las entrevistas.

La mediación *invitar* permitió a los estudiantes justificar sus respuestas, dándoles el espacio para que describieran la forma y método utilizado para llegar a ella. Esta mediación ayudó a los estudiantes a generalizar. En las entrevistas, el investigador-docente les pidió a los estudiantes que explicaran su razonamiento sobre la tarea. Un ejemplo lo mostramos a través del siguiente fragmento de entrevista con E1.

I: *¿Me podrías volver a contar como lo encontraste?*

E1: *Pues si hay uno nos salen cuatro. Le tenemos que sumar tres más.*

En este ejemplo observamos cómo el investigador-docente invitó al estudiante a justificar su respuesta y este así lo hizo.

Otro ejemplo de la mediación *invitar* lo encontramos en el siguiente fragmento de entrevista con E2.

I: *¿Seis? ¿Sí? ¿Por qué?*

E2: *Porque como en esta son cinco pues sumando uno serían seis.*

I: *Veamos, o sea si entran tres, tú te preocupaste de la cantidad anterior*

E2: *Sí.*

I: *¿Y qué hiciste aquí para saber ésta? ¿Cuántas salían aquí?*

E2: *Seis.*

I: *¿Le agregaste uno o le restaste uno?*

E2: *Le sumé uno.*

La mediación *desafiar* promovió a los estudiantes a ir más allá de sus conocimientos. Se les planteaban situaciones más complejas, donde los estudiantes requerían de un mayor esfuerzo para responderlas. Para verificar si comprendían la regularidad con cualquier caso particular planteado, el investigador-docente les planteó preguntas con números más elevados o situaciones donde debían dar su opinión respecto a una expresión. A continuación, detallamos algunos ejemplos:

En la primera situación, el investigador-docente aumentó la complejidad de la tarea planteada, indicando ejemplos con números mayores a los usados en el cuestionario:

I: *Vale, eso está muy bien. ¿Si metieras…? Venga, dime un número más grande.*

E5: *20.*

I: *Vale.*

E5: *Nos saldrían 23.*

I: *Vale, vamos bien. ¿Otro número más grande todavía?*

E5: *¿52?*

I: *Bueno, tú verás.*

E5: *Nos saldría 55.*

I: *Vale, vale, vale. Ahora me voy a inventar uno más grande, ¿vale? El 100.*

E5: *Nos saldría 103.*

En el ejemplo anterior observamos que el estudiante respondió correctamente a casos con cantidades mayores.

Otro ejemplo es la situación que se refleja en la entrevista con E3, donde el investigador-docente le planteó una situación y el estudiante debía evaluarla y justificarla.

I: *Te quiero contar que un niño de la clase, no te voy a decir quién, me dijo que si entraban 25 bolas en la máquina debieran salir 27. ¿Estás de acuerdo con él?*

E3: *No, porque tienen que salir tres más no dos.*

I: *¿Y cuánto debería salir entonces?*

E3: *28.*

La mediación *cuestionar* permitió a los estudiantes identificar errores en sus respuestas. En la mayoría de las situaciones, al realizar esta mediación, los estudiantes evidenciaban en qué se habían equivocado y modificaban su respuesta. Detallamos a continuación parte de la entrevista con E4, donde se observa esta mediación.

I: *Y ¿aquí cuántas bolas estas metiendo en la máquina?*

E4: *Cinco.*

I: *Cinco. ¿Y cuántas salen?*

E4: *Ocho.*

I: *¿Cuántas estás sumando entonces?*

E4: *Cinco y cinco.*

I: *¿Cinco y cinco son ocho?*

E4: *No.*

I: *Piénsalo bien, no me respondas rápido, piénsalo que no tenemos prisa.*

En la mediación *guiar/apoyar*, el investigador-docente reiteró información a los estudiantes, ayudándoles a recordar datos que se habían presentado. Esto permitió que ellos contextualizaran la tarea o recordarán algún dato que les permitía entender la situación planteada. En el siguiente extracto de la entrevista con E3 detallamos un ejemplo sobre el uso de esta mediación:

I: *Veamos estos ejemplos para recordarlo. Era una máquina en la cual entraban y salían bolas. Este fue el primer ejemplo que os mostré: si entraba una bola salía esa cantidad de bolas. Si quieres puedes ir registrando o rayando en tu hoja que no hay problema. Si entraban esa cantidad de bolas salía esa cantidad de bolas. Ahora bien, tenemos más ejemplos. Fíjate ahora entra otra cantidad de bolas y sale esa cantidad de bolas. ¿Cuántas entraron aquí?*

E3: *Pues ahí son cinco.*

I: *¿Y cuántas salieron?*

E3: *Ocho.*

La mediación *informar/sugerir* se utilizó cuando el investigador-docente a través de sugerencia, ayudaba al estudiante a buscar una forma para obtener la respuesta. Esto lo hacía a través de sugerencia cómo organizar datos a través de una tabla de datos. Un ejemplo es lo evidenciado en la entrevista con E2.

I: *¿Y tú quieres un boli para anotar el numerito para que no se te olvide?*

E2: *Vale sí. Ahora aquí seis, ¿no?*

I: *No sé. Por lo que tú me dijiste eran seis.*

E2: *Ocho. Aquí no lo sé, voy a contarlas: uno, dos tres… nueve.*

I: *Nueve. ¿Y salen?*

E2: *Yo creo que 12.*

I: *Pero cuéntalas, puedes ir marcando las bolas que ya contaste.*

E2: *Yo creo que 12, uno, dos, tres … 12.*

I: *12, vale. Regístralo ahí.*

E2: *12 (apunta el número)*

I: *Entonces ¿tú ves que hay una relación entre, por ejemplo, aquí la cantidad de bolas que entran y la cantidad de bolas que salen? ¿habrá alguna relación?*

E2: *Yo creo que no tanto porque en verdad esto es un tres y esto es más de un tres.*

I: *O sea, salen más de las que entran.*

E2: *Sí.*

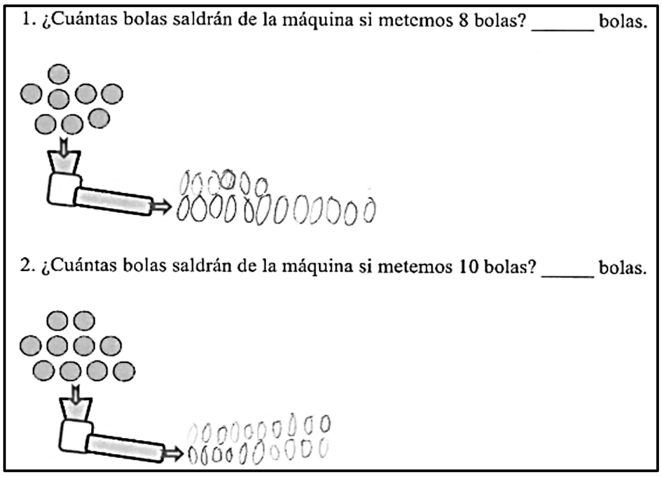
Estudio de Caso

A continuación, presentamos un estudio de caso de E5, caracterizando la generalización antes y después de las mediaciones. Además, describimos los tipos de mediaciones utilizadas y el efecto que tuvo cada una de ellas en el desarrollo de su trabajo, dando respuesta a los objetivos planteados para esta investigación. Nos hemos centrado en este estudiante porque pasó de generalizar de forma incompleta a generalizar correctamente después de las mediaciones.

Al revisar las respuestas de E5 en su cuestionario inicial, observamos que el estudiante identificó un aumento en la cantidad de bolas que salen de la máquina, pero no una cantidad concreta. En la Figura 5-2 mostramos parte de sus respuestas, donde apreciamos que en el primer caso dibujó 10 bolas más de las que había en la cantidad inicial. En el segundo caso, dibujó el doble.

Figura 5-2

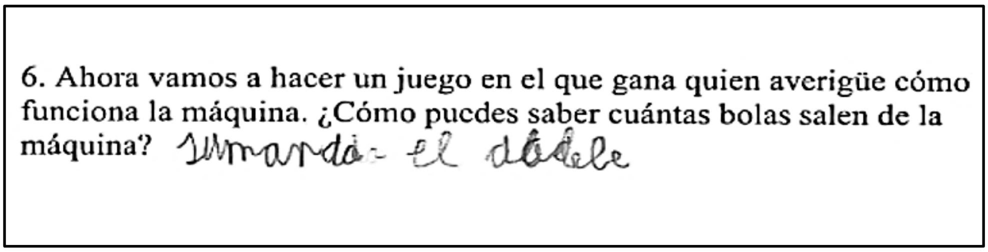
Respuestas de E5 en P1 y P2 del Cuestionario Inicial



En P6 debía escribir el funcionamiento de la máquina y así saber cuántas bolas salen de ella. En este caso E5 escribe “sumando el doble” (ver Figura 5-3).

Figura 5-3

Respuesta de E5 en P6 del Cuestionario Inicial



En este caso el estudiante responde de forma incompleta, identificando que la cantidad de bolas que salen de la máquina es mayor, pero se equivoca al indicar en qué cantidad.

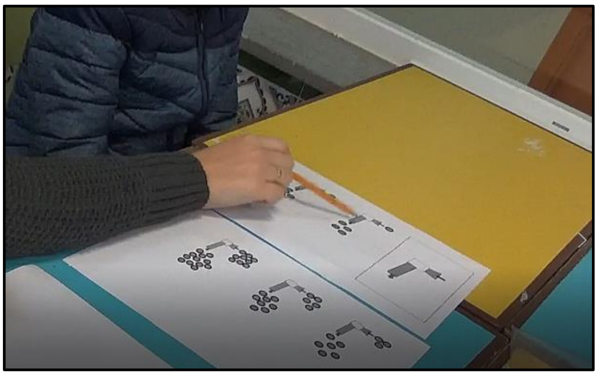
Al analizar las respuestas del estudiante E5, identificamos que en este primer momento generalizó de forma incompleta.

Durante la entrevista con E5, utilizamos las mediaciones guiar/apoyar, cuestionar, invitar y desafiar. Con este estudiante no se utilizó la mediación informar/sugerir. Las mediaciones más utilizadas en su entrevista fueron invitar y desafiar. Cada mediación fue clave en su proceso de generalización, desde el inicio hasta el final de la entrevista. Cada una de ellas se realizó en distintos momentos, cumpliendo el rol de ayudar al estudiante cuando presentaba errores o no sabía cómo continuar.

La mediación *guiar/apoyar* fue utilizada con E5 para recordar información y aclarar preguntas. Para el estudiante fue clave recordar lo trabajado en la sesión inicial para comprender la tarea planteada (ver Figura 5-4).

Figura 5-4

Realización de Mediación Guiar/Apoyar a E5



A continuación, detallamos parte de la entrevista donde sucede esta situación:

I: *¿Te acuerdas de que llevamos a la clase unos posters grandes de una máquina? La máquina siempre funciona de la misma manera, entonces os decía: ¿si metes 1 bola cuantas salen?*

E5: *Cuatro, triplete.*

I: *Eso es. ¿Si metes dos?*

E5: *Cinco, ¿no?*

En relación con la mediación cuestionar, permitió al estudiante corregir errores de cálculo, a través de los cuestionamientos realizados por el investigador-docente. En el ejemplo que detallamos a continuación, E5 presenta un error:

I: *Vale. ¿Si metes…? ¿Cuántas hay aquí?*

E5: *Cinco.*

I: *Vale. ¿Cuántas salen?*

E5: *Siete.*

I: *¿Seguro?*

E5: *No, ocho, ocho.*

I: *No sé.*

E5: *Ocho.*

La mediación invitar ayudó a E5 a explicar sus resultados. Además, a través de esta mediación, el estudiante describió el funcionamiento de la máquina, como se observa en el siguiente fragmento de su entrevista.

I: *¿Tú me sabrías decir cómo funciona la máquina?*

E5: *Pues que metes una bola y te sale un triplete, te salen cuatro.*

I: *Pero ¿triplete que significa?*

E5: *Pues tres más.*

I: *Ah, entonces, ¿si yo metiera por ejemplo 10 bolas?*

E5: *Pues 13 tendrías.*

Finalmente, desafiar, que es la mediación donde se le plantearon preguntas con números mayores y símbolos, fue de gran ayuda para que el estudiante expresara que siempre se cumplía la misma regularidad, sumar tres. Cómo se observa a continuación, el investigador-docente utilizó cantidades indeterminadas para desafiar al estudiante, utilizando N y alfa.

I: *Mira ¿sabes lo que ha pasado? Que un niño de otra clase nos ha dicho que si metemos N bolas pues que luego saldrían (escribe) a N le sumamos 3. ¿tú qué opinas de eso? ¿estás de acuerdo o no, o no lo sabes? Piénsalo un poco a ver.*

E5: *Uf, yo creo que estaría un poquillo de acuerdo, no sé.*

I: *Piénsalo a ver.*

E5: *No, no estaría de acuerdo, bueno sí, sí, sí estaría.*

I: *No tengas prisa, si no tenemos prisa. Tú piénsalo y luego me dices si estarías de acuerdo o no.*

E5: *Porque sería nada de número, pero más tres.*

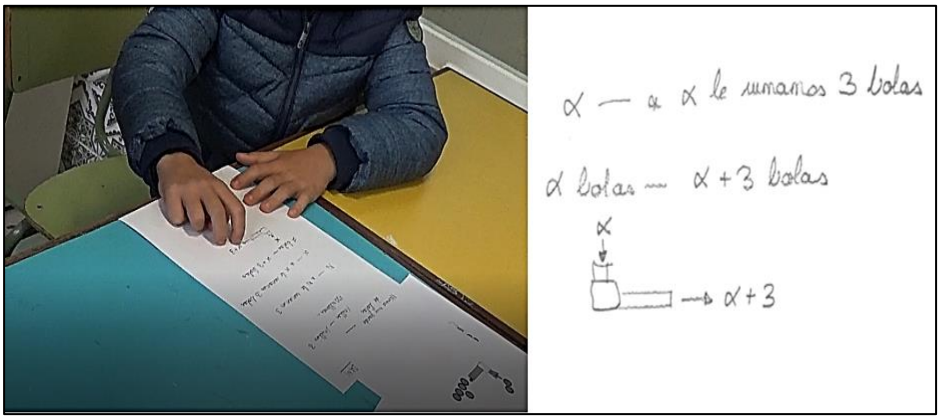
I: *Porque a la N le estas diciendo nada ¿no?*

E5: *Sí.*

En este caso expresa que N es "nada de números", pero identificó que siempre saldrían más tres bolas. Lo mismo sucede cuando se le presenta el caso con alfa (ver Figura 5-5):

Figura 5-5

Realización de Mediación Desafiar con E5



Nota. En la imagen se ve el desafío planteado y E5 explicando la regularidad.

A continuación, detallamos parte de la entrevista donde sucede esta situación:

I: *Vale, o sea que parece que sí podría ser, ¿no? Y ahora ¿si en vez de la N, tuviéramos este símbolo? (Escribe) Esto es alfa, es una letra del alfabeto griego. ¿Lo has visto alguna vez?*

E5: *No.*

I: *Pues es la alfa pero da igual, es un símbolo. Si metiéramos eso, ese número de bolas en la máquina… hay otro niño que nos ha dicho esto: a alfa, ese número, le sumamos tres, ¿Tú que crees?*

E5: *Yo…*

I: *¿Se te ocurre algo? Es que es muy difícil E5, yo lo sé. Esta pregunta es de los niños mayores, pero como lo has hecho muy bien en el resto quería, ver como hacías este.*

E5: *Uf, esto pues le metemos esto, un símbolo, te saldría tres bolas más.*

I: *Sí.*

E5: *¿Sí?*

I: *Sí.*

E5: *¡Toma!*

I: *Entonces ¿podría ser esto: a alfa le sumamos tres? ¿Estás de acuerdo? A alfa le sumamos tres bolas (escribe) ¿Con esto estarías de acuerdo?*

E5: *Sí.*

Después de analizar la entrevista realizada a E5, identificamos que el estudiante generaliza correctamente, identificando y expresando la regularidad, como se detalla en el siguiente fragmento de la entrevista:

I: *Vale. ¿Lo estás haciendo todo el rato es igual no?*

E5: *Yo sí, yo pienso más tres.*

Conclusiones

Con este estudio hacemos una descripción de la generalización de estudiantes de primero de educación primaria en España al resolver una tarea que involucra una función lineal a través de números naturales. Observamos que en un momento inicial los estudiantes presentaron dificultades para trabajar esta, evidenciando en sus respuestas que no identificaron la regularidad. Estas dificultades corroboran lo observado en cursos superiores (e.g., Castro, 2012; Doorman y Drijvers, 2011), donde se evidencia que los estudiantes tienen dificultades para trabajar con nociones algebraicas.

Una vez se llevaron a cabo mediaciones con los estudiantes que presentaron dificultades, identificamos que los estudiantes trabajaron de mejor forma con la tarea propuesta, llegando a generalizar. Las mediaciones invitar, cuestionar, informar/sugerir, desafiar y apoyar/guiar ayudaron a los estudiantes a recordar información, corregir errores y justificar respuestas, permitiéndoles generalizar. Por tanto, coincidimos con las ideas de Ureña et al. (2019), al destacar los beneficios que tiene la mediación al abordar la generalización. Esta herramienta pedagógica, donde el mediador ayuda en el proceso de resolución al estudiante, permite que se alcance su objetivo de aprendizaje, permitiéndole analizar cada situación, hasta generalizar.

A través de la mediación invitar, podemos dar espacios a la justificación, donde los estudiantes expresen su forma de pensar y razonar sobre la tarea propuesta y respuestas entregadas. Preguntas cómo ¿por qué?, ¿cómo lo pensaste?, ¿me puedes explicar cómo lo hiciste?, son una guía para que los estudiantes tengan el espacio para expresar la regularidad, justificándola. Es por ello que destacamos a la justificación como un proceso necesario para la generalización.

En relación con la mediación desafiar, esta tuvo un papel clave durante el desarrollo de las entrevistas. Fue un puente de confirmación sobre la regularidad que expresaban los estudiantes, permitiéndoles ver que esa regularidad, servía para cualquier caso (números "grandes" o letras). Empatizamos con lo expuesto por Da Ponte et al. (2017) quienes expresan que el desafío presentado a los estudiantes debe ser armonioso (ni fácil o ni difícil). Por lo mismo creemos que al utilizar la mediación desafiar, debemos tener claro que será un medio para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. El desafío planteado al momento de desarrollar una actividad o tarea matemática no debe generar estrés o desmotivación a los estudiantes. Por ello es importante que el docente sea consciente de las capacidades de sus estudiantes y trabaje entorno a ello.

Respecto al estudio de caso presentado, este nos ha permitido profundizar en nuestro análisis, ejemplificando lo sucedido con este estudiante. Observamos un ejemplo en el que, después de las mediaciones, el estudiante pasa de generalizar de forma incompleta a generalizar correctamente.

Si comparamos la cantidad de mediaciones realizadas con el estudiante con el que hicimos el estudio de caso y los demás estudiantes, observamos que es el estudiante que menos mediaciones se le realizaron. Con esto planteamos que la cantidad de mediaciones no es un factor para que el estudiante generalice. La cantidad y el tipo de mediaciones se realizan según las necesidades de cada estudiante, por ello son tan diversas para cada uno.

Preguntas claves como: "*¿Tú me sabrías decir cómo funciona la máquina?*", "*¿Tú me puedes explicar cómo lo estás haciendo?*" o "*¿Tú qué opinas de eso?*", ayudaron al estudiante a explicar la regularidad. Entendemos que, por su nivel educativo, las justificaciones utilizadas no son muy sofisticadas, desde el punto de vista matemático.

Sin embargo, al expresar que es siempre "más tres", como en el ejemplo detallado en el estudio de caso con N, nos muestra que ha asumido que, independiente al número de bolas que metan en la máquina, siempre será más tres.

En conclusión, destacamos que una sola mediación o un único tipo de mediación no es suficiente para guiar a un estudiante a la generalización si presenta dificultades. Las mediaciones motivan a los estudiantes a responder, justificar, corregir un error y superar una dificultad en el contexto de tareas de generalización en el ámbito del pensamiento funcional (Ureña et al., 2019; Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020). Estas mediaciones deben dar respuesta a las necesidades de los estudiantes para que avancen en su camino hacia la generalización. Por ello, sugerimos contar con acciones que ayuden a los estudiantes a generalizar, más aún, si no han tenido una instrucción previa sobre este proceso matemático. La oportunidad de experiencias pedagógicas permite que abordemos las distintas formas y logros de aprendizaje que presentan los estudiantes. Es por ello que, a través de esta investigación, motivamos a los docentes a dar espacios en el aula para mediar con los estudiantes a través de preguntas, desafíos o intercambio de ideas. Esto ayudará a los estudiantes a ser partícipes de su proceso de aprendizaje y, en particular, a alcanzar la generalización.

Agradecimientos

Proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU201675771-P y PID2020-113601GB-I00, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. Beca Iniciación a la Investigación para estudiantes de Másteres Oficiales del Plan Propio de Investigación 2019 otorgada por el Vicerrectorado de Investigación y Transferencia UGR. Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075.

Referencias

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elemntary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional reltionships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP), 14*, 37-57.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática, 22*(3), 55-86.

Cañadas, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 73*, 7-13.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69-81. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carrera, B. y Mazzarella, C. (2001). Vygotsky: Enfoque sociocultural. *Educere, 5*(13),41-44.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). SEIEM.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 54*, 55-67.

Da Ponte, J. P., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae*, *1*, 45-59.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education: Revisiting topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119-135). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-334-1_6

Escobar, N. (2011). La mediación del aprendizaje en la escuela. *Acción Pedagógica, 20*, 58-73.

Ferreiro, R. y Calderón, E. (2005). *ABC del aprendizaje cooperativo*. *Trabajo en equipo para enseñar y aprender*. Trillas

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). McGraw-Hill.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA, 14*(3), 204-225. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.11378

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence

Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mata-Pereira, J. y Da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Mata-Pereira, J. y da Ponte, J. P. (2019). Enhancing students' generalizations: a case of abductive reasoning. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 598-605). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*, 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, *52*, 19349-19420. https://www.boe.es/buscar/pdf/2014/BOE-A-2014-2222-consolidado.pdf

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Rodríguez, A., Sánchez Álvarez, M. S. y Rojas de Chirinos, B. (2008). La mediación, el acompañamiento y el aprendizaje individual. *Investigación y Postgrado*, *23*(2), 349-381.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-163). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-6

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *19*(3), 143-166. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM

Torres, M., Cañadas, M., Moreno, A. y Gómez, P. (2021). Estructuras en forma directa e inversa de una función evidenciada por estudiantes de 7-8 años. *Uniciencia, 35* (2), 1-16. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.16

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 570-614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020

Villa, J. (2006). El proceso de generalización matemática: algunas reflexiones en torno a su validación. *Tecnológicas, 16*,139-151. https://doi.org/10.22430/22565337.525

5.2. Estudio de Investigación 3: Justifications and Mediations in the Generalization Process among Fourth Grade Students

Narváez, R., Brizuela, B. M. y Cañadas, M. C. (en revisión). Justifications and mediations in the generalization process among fourth grade students.

Abstract

Research related to generalizations in primary education is a topic of interest in the area of mathematics education. In this paper we address the following research questions: How do fourth graders generalize the functional relation $y = 2x$? What associations exist between generalizations, justifications and mediations that occur during a lesson? In this study we analyze the generalization process among 22 4th grade students (9-10 years old) when working with a functional relation. To do so, we identified and characterized the generalizations and justifications made by the students. In addition, we identify and describe the mediations carried out by the teacher-researcher during the class. Finally, we analyze the possible relationships that may exist between the levels of generalization, justifications, and mediations during the generalization process. Among our results, we found that students generalized with different levels of sophistication throughout the session. Moreover, these generalizations were accompanied by both justifications and mediations. The role of the justifications was to validate and explain the generalizations evidenced by the students. The mediations, on the other hand, were constant throughout the lesson, accompanying the expression of the generalizations, but also helping the students to constantly participate in the task presented during the session. We conclude that justification and mediation are part of the generalization process, which is an active and social process. We insist on the idea of encouraging discussion and active participation of the students, motivating them to explain their conjectures with their peers.

Keywords**:** Algebraic thinking, functional thinking, generalizations, justifications, mediations.

Introduction

The introduction of algebraic thinking in elementary education is endorsed by various countries, such as Chile, Spain, and the United States (e.g., Merino et al., 2013; Ministerio de Educación de Chile, 2012; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). At present, the Spanish elementary education curriculum includes both algebraic and functional thinking (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). The importance of generalization in learning has long been recognised (Zazkis et al., 2008). In addition, different studies have provided evidence regarding the benefits of working on algebraic thinking and functional thinking in elementary education (e.g. Ayala-Altamirano & Molina, 2019; El Mouhayar, 2022; Pinto et al., 2022).

Working on algebraic thinking with elementary students helps promote their analytical thinking, where indeterminate, unknown, or variable quantities are addressed along with known quantities (Ventura et al., 2021). The main objective of working with algebraic thinking is making "children think, describe, and justify what is happening in general regarding a mathematical situation. That is, we want children to develop a generalization, a statement that describes a general mathematical truth about a set of data" (Blanton, 2008, p. 105). Furthermore, it allows students to successfully participate in a variety of algebraic contents that are often reserved for secondary education (Stephens et al., 2015).

We understand generalization as a process developed jointly by students and teachers, where students may be supported to explore their answers through questions or actions that help them to justify. One way of doing this is through mediation, considered as a set of interventions carried out with students and that contribute to their generalization process (Ureña et al., 2019).

A precedent to this study is the work of Narváez y Cañadas (2023) that deals with mediation and generalization with six 2nd grade students. Among their results, they highlighted that, after mediations, all six students in their study generalized. These authors expressed that those mediations played a fundamental role in supporting students' identification of the regularity of the task posed, allowing students to correct errors and justify, which helped them to generalize.

Despite previous research on generalizations and mediation, we found that possible relationships among these two processes and justification had not been previously studied. Therefore, our study aims to meet this gap by describing and detailing what happens in and across each one of these processes when a group of 4th grade students works with functions. This study analyzes the generalization process among 4th grade students, with the following specific objectives:

- To identify and characterize the generalization levels used by 4th grade students.
- Identify and characterize the justifications used by these pupils when generalizing.
- To identify and characterize the mediations carried out during a lesson.
- To analyze possible relationships among levels of generalization, justifications, and mediations during the generalization process.

Theoretical Framework

Generalization and Generalization Process

Generalization is considered a key element of algebra, which allows establishing of relationships between quantities and inferring regularities in each situation. It involves going from the particular to the general and seeing the general in the particular (Kaput, 2008; Mason, 1996). This mathematical process plays an important role in mathematics performance and learning (Amit & Neira, 2008). Kaput (1999) defines generalization as:

> "Generalization involves deliberately extending the range of reasoning or communication beyond the case or cases considered, explicitly identifying and exposing commonality across cases, or lifting the reasoning or communication to a level where the focus is no longer on the cases or situations themselves but rather on the patterns, procedures, structures, and the relations across and among them" (p. 136).

Carraher et al. (2008) expressed that mathematical generalization "involves a claim that some property or technique holds for a large set of mathematical objects or conditions" (p. 4). Generalization plays a crucial role in mathematics, as it allows us to recognize patterns and regularities within a given situation and apply them to new situations. It is considered an optimal way to observe and express a general statement (Cañadas and Castro (2007); Mason et al., 1985; Mason, 1999). For Radford (2008), the algebraic generalization of a pattern is based on the ability to identify a common element observed in a series of concrete details and then extend this property to the set of subsequent terms. That is, generalizing allows us to provide an expression that gives an answer for any term of the sequence, identifying the relationship established between the elements and their position in the sequence.

Different authors have described the generalization process. The study developed by Cañadas y Castro (2007) described the generalization process through inductive reasoning. This process is constituted by steps that go from particular cases to the general case and its demonstration. The first part of the process begins with observation and organization of particular cases. This is followed by a search and prediction of patterns, leading to the formulation of conjectures, which are validated by new particular cases. Starting from a conjecture that is true for particular cases and having validated this conjecture for new cases, students can hypothesize that their conjecture is true in general. But this is not enough to justify a generalization. A formal proof can provide a justification to demonstrate the truth of the conjecture. These steps were adapted by Pinto et al. (2018) for the functional approach to algebraic thinking. In the study developed by Blanton (2008) she stated that the development of generalization by students takes place when they are presented with a mathematical situation that they can explore. They then formulate a conjecture, which can be correct or incorrect. If the conjecture is incorrect, they can formulate a new one. If the conjecture is correct and confirmed, it becomes a generalization. Another study related to generalization was developed by Radford (2008), who described that generalizations of algebraic patterns are not characterized by the use of notations, but by the way in which the general is treated. In his work he stated that in order to generalize, a common element of the sequence must be identified, then this common element must be expanded to all the terms of the sequence and, finally, a rule or scheme must be formulated to determine any term of the sequence. Ellis (2011) distinguished the following actions reflected in the generalization process: (a) identify points in common among the cases, (b) extend the reasoning of one of them beyond the range where it originated, and (c) derive broader results in specific cases. This author emphasized that generalization is a dynamic process that can evolve through interaction. Lastly, the study by Authors distinguished abduction, induction, and generalization as part of the generalization process. These authors described that abduction (initial phase) allowed students, by work with near particular cases, to formulate initial conjectures. Then, in the induction phase, students considered conjectures they would validate, and they generalized when the confirmed conjecture was reaffirmed for indeterminate or general cases.

Justification

Justification is the "support for more productive generalization which, in turn, can promote development of appropriate deductive arguments" (Ellis, 2011, p. 7). It is described as a set of arguments which help show whether a conjecture is true. If the conjecture is true, it can be called generalization (Blanton, 2008). For Staples et al. (2012) justification is "an argument that proves (or refutes) the truth of an assertion that uses accepted statements and mathematical forms of reasoning" (p. 448). Mathematical justification is the "process to support affirmations and mathematical choices when solving problems or explaining why an affirmation or answer makes sense" (Bieda & Staples, 2020, p. 103); that is, justification is a process based on sense making.

Staples et al. (2012) characterized justification as a learning practice in the sense that "it promotes understanding among those participating in the justification, both the individual providing justification and the audience receiving it" (p. 449). Justification is an action which is present in mathematical practice. It is used to validate assertions, give an idea about results, and systematize knowledge, among others. It is a way that helps students improve their understanding of mathematics and their mathematical competencies; it is a way to learn and do mathematics (Staples et al., 2012). It is a practice used to obtain, develop, and evaluate students' understandings of mathematical concepts and learning. Students do not only develop understandings, they also show their current understandings, which gives an idea of what they have learned (Lesseig & Lepak, 2022).

Regarding justification in the context of generalization, we consider Radford’s (2008) idea that the fundamental key to explaining generalization lies in understanding how we perceive similarities and differences in a situation.

Mediation

According to Da Ponte and Quaresma (2016) helping and motivating students to mobilize their knowledge, to explain and justify their solutions, thus developing their communicative and argumentative skills, depends on the interventions or mediations made by teachers. Mediations are a bridge that favors working with generalizations, encouraging students to achieve their learning objectives, motivating them to answer, having a considerable impact on students’ ability to generalize (Ureña et al., 2019). Mediations can be defined as “a process of pedagogical, social, dialogic, ludic, conscious, intentional, systematic interaction, aimed at generating good learning experiences” (Escobar, 2011, p. 60). From a sociocultural perspective, mediation is considered an education interaction which is deliberate, conscious, significant, and transcendent. It is an action among people within a learning context and where one of them (mediator) accompanies and helps the learner go from the initial status of not knowing, being able to, or being, to another qualitatively higher one of knowing, knowing how to, and, more importantly, being (Ferreiro & Calderon, 2005). This pedagogical tool, in which the mediator helps the student in their learning process, allows them to reach their learning objective, allowing them to analyze each situation until they are able to generalize (Narváez y Cañadas, 2023).

Method

This study is part of a research project aimed at exploring student skills in the first grades of elementary education with tasks that address algebraic thinking, specifically, functional thinking. We used design research to design and implement a teaching experiment consisting of five lessons (Steffe &Thompson, 2000) carried out with 4th grade students (aged 9-10).

Participants

The study focused on a lesson carried out with 22 4th grade students in a charter school of low socioeconomic context in Spain. The selection of the school and grade was based on school and teacher availability. Students were familiar with writing numbers up to one million, as well as basic operations (addition, subtraction, multiplication, and division). Students had received no prior instruction on generalization or functions. To identify each of the 22 participating students, we coded them with alphanumeric symbols, using the letter E and a number (E1, E2…E22). To conduct this study, we had informed consent from the parents/legal guardians of the participating children. The teacher-researcher who carried out the lessons is a member of the research team. Her role was to introduce the task and guide the unfolding of the lessons. We use the letter "I" to identify the teacher-researcher.

Data Collection

The teaching experiment conducted with 4th grade students included an initial questionnaire that was used to identify the students' prior knowledge and two individual interviews, one at the beginning and one at the end of the teaching experiment. After the initial interview, we implemented four lessons that included various functional tasks. Each lesson lasted about one hour. During the lessons, we presented different tasks involving linear functions in contexts that were familiar and interesting to students. Table 5-5 details the functions included in each lesson.

Table 5-5

Functional Tasks for each Lesson

Lesson	Context	Function
1	Amusement Park	$y = 2x + 1$
2	Amusement Park	$y = x+3$
3	Birthday: tables and boxes of candy	$y = 2x / x + x$
4	Birthday: tables and boxes of candy	$y = 2x / x + x$

During the four lessons, questions were posed in different formats: open-ended questions, true-false questions, and the construction or completion of function tables.

The questions asked in the lessons were designed following the inductive reasoning model described by Cañadas and Castro (2007), which includes questions that promote generalization starting from particular cases.

We used the same function in the questionnaire and in the interview so that there would be continuity and the functional relationship would not be an added difficulty. When introducing the function $y= x+3$ in lesson 2, we noticed that some students had difficulties. To address this situation, we decided to use a less complex function (i.e. y = 2x) in the next two sessions. This allowed us to provide a more accessible and less intimidating learning environment for those students who had difficulties with previous questions. Therefore, for this study, we focused specifically on lesson 3, where the task involved the function $y = 2x$. We chose this lesson because we observed generalization more frequent than in other lessons and students' participation was usual. In addition, we found this function interesting because students could express their generalizations using different verbal expressions, such as doubling the number or adding the same number twice.

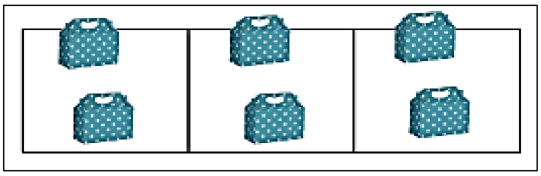
During the lesson we worked on various particular cases. Stacey (1989) classified generalizations into (a) *near*, used to describe a question that can be solved with a drawing or counting step by step; and (b) *far*, which describes a question that goes beyond the reasonable practical limits of said step by step. The study by Torres et al. (2021) was based on these categories and introduced a third category of *indeterminate* or specific cases in which the answer depends on recognizing a relationship. In our study, using students' prior knowledge, we defined the cases as follows: (a) *near* or when a number lower than 50 was used; (b) *far* or when a number 50 or higher was used, up to 500,000,000; and (c) *indeterminate* or cases where phrases such as "any number" were used.

The Teaching Experiment

Each lesson was divided into three moments. At the beginning of the lesson, which lasted approximately 15 minutes, the teacher-researcher introduced the context of the task: "Isabel is preparing her birthday party. She has started organizing the tables and boxes of party gifts for her guests" (see Figure 5-6).

Figure 5-6

Picture of the Proposed Task



The teacher-researcher presented the context with pictures of the tables and the boxes, which she placed on the board. She then presented different cases that were included in a table. The following cases were introduced through different questions:

- How many gift boxes are needed for 3, 8, 2, and 5 tables?
- How many tables are needed for 14, 8, and 12 gift boxes?

During the central moment of the lesson, which lasted about 25 minutes, individual worksheets were given to each student. The worksheet had a section in which the students had to fill in a function table with the missing information. Also, students had to explain how they knew what the missing quantity was. Finally, they had to answer two questions: “How do you know how many tables there are when you know the quantity of boxes?” And: “How do you know how many boxes there are when you know the quantity of tables?”

In the final part of the lesson, which lasted approximately 17 minutes, a group review of the worksheets was carried out. They were asked “How many gift boxes are needed for 6, 20, 9, and 2,000 tables?” And “How many tables are needed for 2, 44, 30, and 10.000 gift boxes?” The students then were proposed to pose a “large” quantity of tables and boxes. Finally, they were asked about any number of tables (undetermined quantity).

The lesson was video recorded with a fixed camera placed at the end of the classroom, to capture all students’ participation. We later transcribed the lesson recording for analysis using the software Inqscribe (Version 2.2.5).

Data Analysis

In order to meet our research objectives, our units of analysis were the speaking turns of both students and the teacher-researcher. These speaking turns were identified during transcription, identifying each speaker and what they said. We then carried out a line-by-line coding. This allowed us to identify generalizations, justifications, and mediations. By using emergent categories, we coded each speaking turn when generalizations, justifications, and mediations were identified. We also took into account the students written responses on their individual worksheets. We scanned these worksheets for analysis.

Initial coding was carried out by the first author of the article. To ensure the reliability of the analysis, we carried out a subsequent discussion and consensus process among the three authors until we agreed on the coding presented.

Generalization Categories

To analyze students' generalizations, we have regrouped the levels of generalization sophistication provided by Blanton et al. (2015) into five categories. We describe each of them as follows:

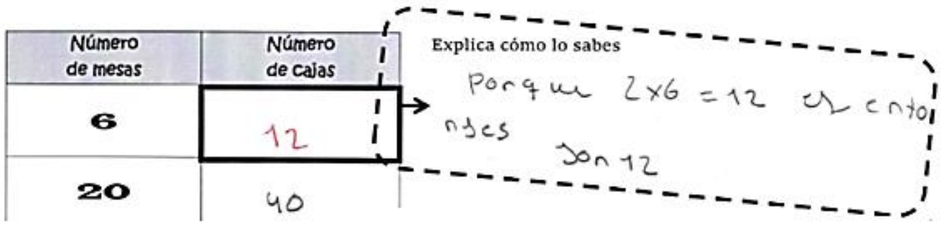
- Does not generalize: Students do not describe or implicitly use any type of mathematical relationship when talking about the problem data.
- Recursive generalization: Students conceptualize a recursive pattern as a sequence of particular instances or conceptualize a recursive pattern as a generalized rule between successive arbitrary values with no reference to particular instances. For example:

  I: *How many boxes did we have here?*
  E6: *Six.*
  I: *Six, and here I have 10 more to complete the 16.*
  E6: *There are eight tables.*
  I: *You say there are eight, why?*
  E6: *Because you count those three more, until you reach 16.*

- Generalization with specific cases: Students conceptualize a functional relationship as a set of particular relationships between specific corresponding values (see Figure 5-7).

Figure 5-7

Example of Generalization with Specific Cases in a Student's Response

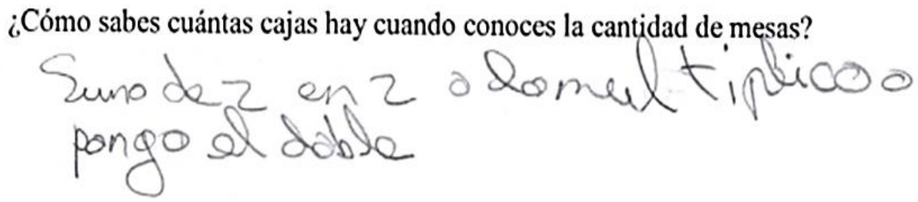


Note. Translation. Question: *Explain how you know*. Answer: *because 2x6=12 then 12*.

- Generalization with indeterminate cases: Students conceptualize a general relationship between two quantities through a set of cases, with primitive representations and an incomplete representation of the relationship (see Figure 5-8).

Figure 5-8

Example of Generalization with Indeterminate Case in a Student's Response



Note. Translation. Question: *How do you know how many boxes there are when you know the number of tables?* Answer: *I add 2 by 2 or multiply or double it*.

- Generalization with algebraic symbolism, students conceptualize functions as a generalized relationship between two arbitrary, explicitly referenced quantities, using algebraic symbolism to express regularity.

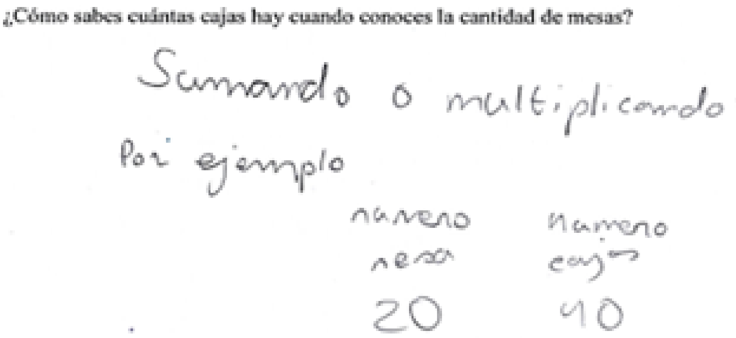
We renamed Blanton et al. (2015) pre-structural level as does not generalize. Blanton et al. (2015) levels recursive particular and recursive general were reclassified as recursive generalization. Blanton et al. (2015) level particular functional was reclassified as generalization with specific cases. Blanton et al. (2015) levels primitive functional general and emergent functional general was reclassified as generalization with indeterminate cases. Finally, Blanton et al. (2015) levels condensed functional general and function as an object were reclassified as generalization with algebraic symbolism.

Justification

Justification is the explanation given by the student orally or in writing. In this explanation, they describe their assertion or strategy used through verbal or written expressions, concrete examples, images, or various representations. Through this justification, we can understand how students' reason about a specific assertion (see Figure 5-9). In our analysis, we only tracked whether a student justified or not.

Figure 5-9

Example of Justification in a Student's Response



Note. Translation. Question: *How do you know how many boxes there are when you know the number of tables?* Answer: *Adding or multiplying, for example number of tables 20, number of boxes 40*.

Mediation

By mediations we understand the actions carried out by the teacher-researcher, such as questions, corrections, challenges, and orientations, aimed at helping and guiding students' learning. For example, in this mediation, the teacher-researcher, through questions, helps students to explain their answers and correct their wrong answers:

I: *How would I know how many tables I had if I had two boxes? E21*

E21: *One*

I: *Why? (mediation)*

E21: *Because twice as many as two is one*

I: *Twice two is one?* (mediation)

E8: *No*

I: *What do you mean no E8, how come?* (mediation)

E8: *Because she said double, right? and it would be four?*

I: *And how would it be then?* (mediation)

E8: *It would be, it would be half of two.*

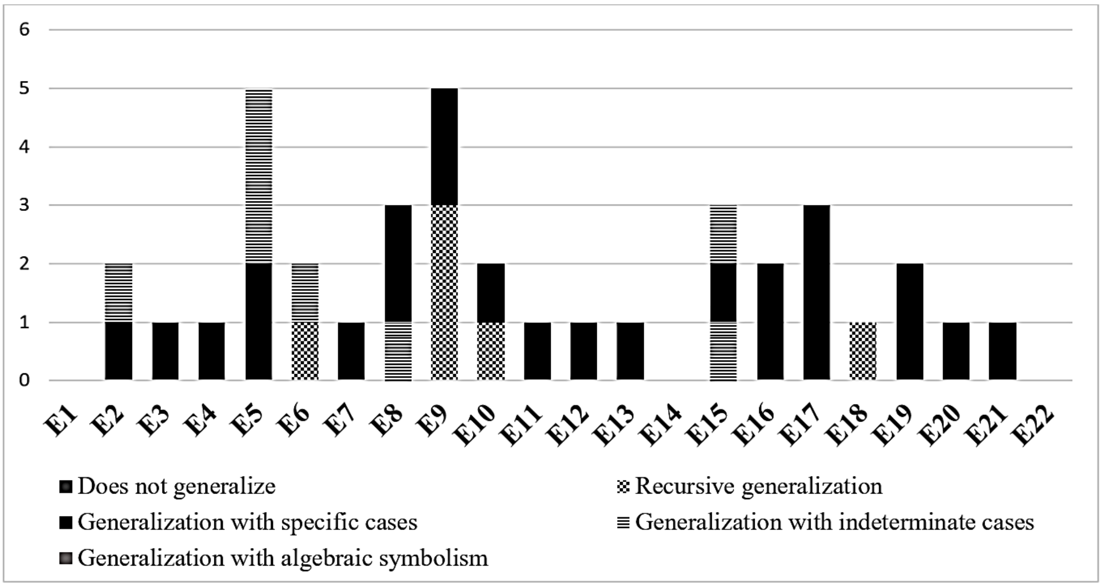
Results

Generalization

Throughout the lesson implemented, we observed different levels of generalization. Students who generalized did so at the level's Recursive generalization, Generalization with specific cases, and Generalization with indeterminate cases. The levels Does not generalize and Generalization with algebraic symbolism were not observed during this lesson. Examples of each level of generalization observed are shown below. In the Figure 5-10, we show the order in which students used each of the levels of generalization during the lesson. Below, these levels are described with examples.

Figure 5-10

Levels of Generalization Exhibited by Students



Out of the 22 students, 19 provided evidence of generalization, while three did not (E1, E14, and E22). The total number of generalizations displayed by students throughout the lesson was 38. The most frequently level of generalization employed was the generalization with specific cases. Twelve students exclusively utilized a single type of generalization throughout the entire lesson (recursive generalization and generalization with specific cases).

E6, E9, and E10 began using the recursive generalization level, switching to the generalization level with specific cases or the generalization level with indeterminate cases. E2 and E5 began by generalizing with specific cases level and gradually transitioned to the generalization with indeterminate cases level. Moreover, we observed that students E8 and E15 exhibited a decrease in generalization sophistication over time. E8 commenced at a higher level (generalization with indeterminate cases) and later employed a less sophisticated form of generalization, namely the generalization with specific cases. E15 started by generalizing at the generalization with indeterminate level, then shifted to the generalization with specific cases level, and eventually returned to generalizing at the indeterminate cases level. The following are examples of the levels of generalization:

In the recursive generalization level, the students identified a regularity between successive values. The following excerpt illustrates this level of generalization.

I: *If now I have… Listen, I want you to think this out by yourselves… gifts, 12 gifts, 12 boxes, how many tables do I have?*

E18: *I wrote eight.*

I: *Why?*

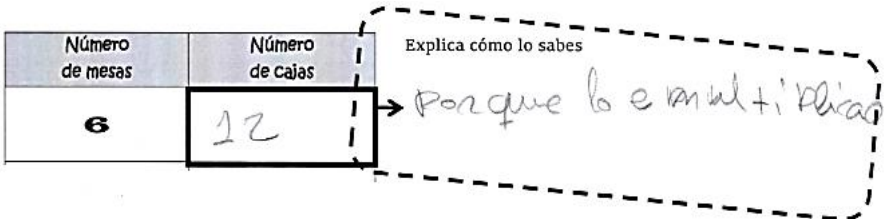
E18: *Because I added the boxes.*

In this case, to identify the quantity of tables, E18 added the quantity of boxes for each case until they reached the total of 12.

In the generalization with specific cases level, the students identified a relationship with specific particular cases. For example, the following excerpt illustrates this level of generalization. In Figure 5-11 we see the student's response on his worksheet. We then detail the answer he gives during the lesson.

Figure 5-11

Example of E17 Response



Note. Translation. Question: *Explain how you know*. Answer: *because I multiplied it*.

I: *If now, I have… Listen again, 12 gifts, 12 boxes, how many tables do I have?*

E17: *Teacher, I have a multiplication answer.*

I: *So, how would that be?*

E17: *Because I have multiplied the two tables by six.*

I: *The two boxes?*

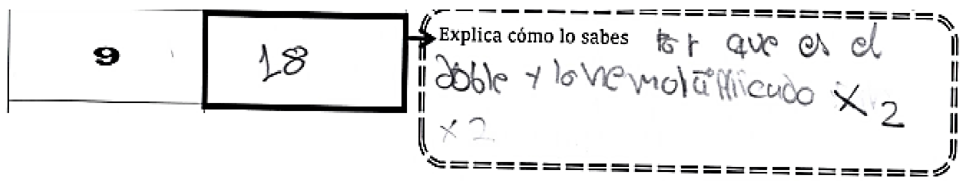
E17: *Yes.*

In E17's case, he identified that the regularity for this particular case was multiplying two by six to obtain the result of 12. Even when they identified a regularity, they did it incompletely; that is, they did not express that they needed to multiply the quantity of tables by two boxes to know the total.

Another example where we observed this level of generalization is when students explained on their worksheets how they knew the amount to write in the table. In Figure 5-12, E5 responded as follows:

Figure 5-12

Example of E13 Response



Note. Translation. Question: *Explain how you know*. Answer: *because it is twice as much and I have multiplied it by 2.*

The students that generalized with indeterminate case identified a general relationship between two quantities through various data. Here is an example of this level of generalization for E6.

I: *If now I have 12 gifts, 12 boxes, how many tables do I have?*

E6: *It's twice as much, twice as much.*

I: *You say it is twice as much, how is that? Explain it to your classmates.*

E6: *That if you have 12 boxes.*

I: *How many tables do I have?*

E6: *Six.*

I: *And how much is twice as much?*

E6: *Two times six.*

In this case, E6 identified that the numbers of boxes are double the number of tables, saying there are 6 tables.

In other cases, the students identified the regularity using more sophisticated expressions. Below is an excerpt from the lesson where we identified this level of generalization.

I: *So, when you know the number of tables, what do you do to know the number of boxes?*

E5: *You multiply, so multiply.*

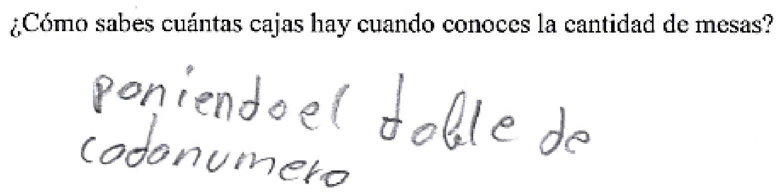
I: *When you know the number of tables to know the number of boxes, what do you say?*

E5: *Oh, I multiply by two which are the boxes on each table.*

Another example was seen in the answer sheets, when we asked, “How do you know how many boxes there are when you know the number of tables?” This question, that included an indeterminate quantity, allowed us to observe this level of generalization. An example is given by E8 (see Figure 5-13).

Figure 5-13

Example of E8 Response


¿Cómo sabes cuántas cajas hay cuando conoces la cantidad de mesas?

poniendoel doble de codonumero

Note. Translation. Question: *How do you know how many boxes there are when you know the number of tables?* Answer: *doubling each number*.

During the lesson, the teacher-researcher presented various cases, with different quantities (near, far, and indeterminate). We found that depending on the case presented, various types and numbers of generalizations were displayed. When working with close quantities, there was a greater variety of levels of generalization, with case-specific generalization being the most used. In addition, recursive levels of generalizations, generalization with specific and indeterminate cases were used in this case. As for the work with distant and indeterminate cases, there were no cases of recursive generalizations. We did find generalizations with specific and indeterminate cases. The number of generalizations was smaller, but they were more sophisticated.

Justifications Made During the Lesson.

During the lesson, the students justified along with the generalizations. These justifications were made with the support of mediations by the teacher-researcher. Of the 38 generalizations evidenced, 37 were accompanied by a justification. During the lesson, one student did not justify when she generalized. As shown in the following example, E15 stated that the reason he did not justify was because he did not know how to explain his answer.

I: *And when they were 30 years old?* (Write in the number column in the box).

E15: *15.*

I: *Why?*

E15: *Because I subtracted.*

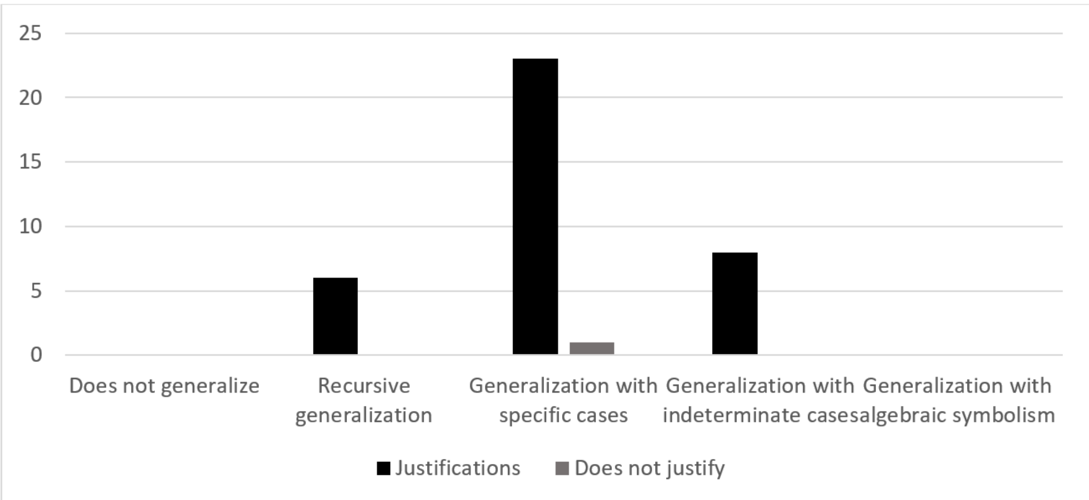
I: *What do you mean, subtracted?*

E15: *Out of 30, I... I don't know how to explain it.*

Below, we detail the number of justifications made for each level of generalization evidenced during the session (see Figure 5-14).

Figure 5-14

Number of Justifications Made for the Different Levels of Generalization



When expressing generalizations, students justified to validate their answers. Some students explained their answers precisely and clearly, justifying at different times during the lesson. In the following excerpt, E5 indicated precisely that to calculate the number of tables he needed to calculate half the number of boxes.

I: *But if you are told the number of boxes, what do you quickly think, what do you do to figure out the number of tables?*

E5: *Well… half, you figure out half the number of boxes* (justification).

This way of justifying is observed in the worksheets, where the students simply explained how they had obtained the answer. They used expressions such as “you must multiply by two”, “add twice”, etc.

Another form of justification was through gestures to explain their answer. E9 counted on his fingers, in twos, to show their classmates and the teacher-researcher the validity of their answer. The following example details a part of the lesson where E9 used this justification.

I: *Now in this other one, 44 boxes.*

E9: *That one is mine, teacher.*

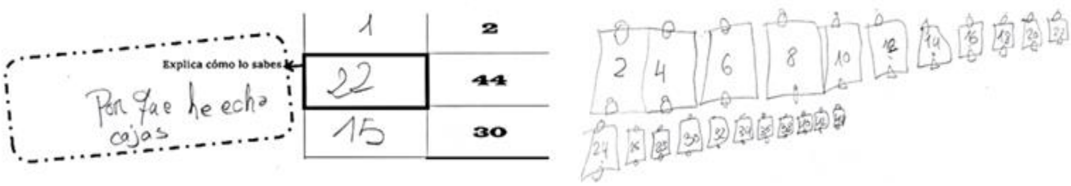
I: *E9 so that one is yours, you tell me.*

E9: *I did two, four, six, eight, ten (counting on fingers) until I got to 44 and I counted and it was 22* (justification).

Another student (E1) drew pictures of the tables and boxes to justify his answer (see Figure 5-15).

Figure 5-15

Answer of E1



Note. Translation of the figure. Question: Explain how you know, answer: because I made the boxes.

Some students, when justifying, gave more details when explaining their answers. These details were related to the description of how they had arrived at the given result. Below is an excerpt from the lesson in which this form of justification can be seen.

I: *If I have 12 boxes, how many tables are there?*

E8: *Teacher, I added the tables and boxes.*

I: *E8.*

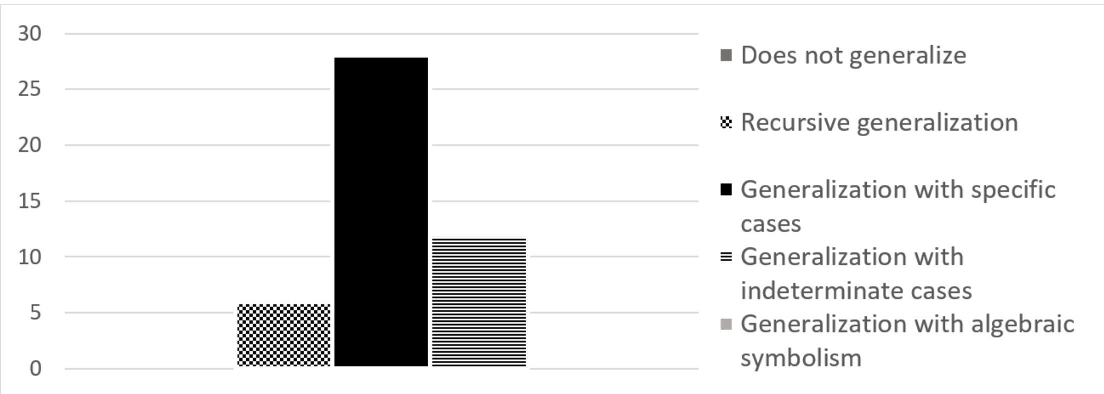
E8: *Well, six times two, six from six tables, and two from two boxes, and there on each table it is six times two are twelve* (justification).

Mediations Carried out During the Lesson

Mediations were actions that guided and motivated learners to generalize. These actions were carried out to help students correct mistakes when they did not know how to continue with the task or when they had to justify their answers. Throughout the lesson we identified different moments when the teacher-researcher carried out mediations, which were continuous and diverse. A total of 104 mediations were used during the lesson. Of the 104 mediations carried out, 46 accompanied the generalization, helping the students to express it. Below is a breakdown of the number of mediations carried out by level of generalization (see Figure 5-16).

Figure 5-16

Number of Mediations Made for the Different levels of Generalization



During the lesson the teacher-researcher used several questions to encourage students to participate during the lesson in order to express generalizations and justifications. The main ones were: "Why?", "What did you think?", "Can you explain it?", etc. In the following extract we note that the teacher-researcher asked one student to explain his answer, but also invited other students to start a discussion to indicate whether they agreed or disagreed with their classmate's answer.

E9: *If we have six here and it starts from the beginning, you get eight…*

I: *Why?* (mediation)

E9: *Two, four, six, eight, ten, twelve, fourteen, and sixteen (counting on their fingers to show their classmates), you get eight.*

I: *Do you agree with E9's explanation?* (mediation)

Other mediation the teacher-researcher increased the difficulty of the exercises with far or indeterminate quantities. As detailed in the following example, she asked students to indicate a very large quantity “500 million tables... and when we had 500 million tables, how many boxes did we need?”. Moreover, when students had mistaken in their answers, the teacher-researcher made mediations that allowed the students to correct their answers. We emphasize that the teacher-researcher did not tell them where they had made a mistake, but she did ask a question such as “Are you sure?” or “Does the result of this operation give this result?”. This allowed the students to check their answers and correct their errors. The following is an illustrative instance of this mediations:

I: *How would I know how many tables I had if I had two boxes? E21*

E21: *One.*

I: *Why?* (mediation)

E21: *Because twice as many as two is one.*

I: *Twice two is one?* (mediation)

E8: *No.*

I: *What do you mean no E8, how come?* (mediation)

E8: *Because she said double, right? and it would be four?*

I: *And how would it be then?* (mediation)

E8: *It would be, it would be half of two.*

In the example above, we observe that the teacher-researcher performs two mediations. The first is a question to explain the student's answer. The next mediation consists of questioning the student's incorrect answer. This motivates another student to indicate the correct answer and to justify it.

Another mediation by the teacher-researcher was carried out when students were unsure how to proceed with the task or showed confusion with the information. For example, in the development of the lesson, he indicated how they should complete a functional table, where they could record the cases presented (see Figure 5-17).

Figure 5-17

Mediation Carried out by the Teacher-Researcher to Guide Students

Relationships between Generalization, Justification, and Mediation

In this section, we describe the relationships between the levels of generalization, the justifications and the mediations used.

During the lesson, justifications were used together with generalizations. The justifications were constant, co-occurring with the different levels of generalization. The justifications played a very important role during the lesson, as they allowed us to check whether the students generalized, i.e., without justification it was impossible to know whether they identified the regularity of the task. In this sense, we agree with Amit and Neira (2008) who stated that no generalization is definitive without a solid mathematical proof. For our study, we did not need a proof or demonstration of the reason for the students' answers, but if this answer was accompanied by a justification, it gave us an understanding that the student understood the situation.

We emphasize that this link between justifications and generalizations was produced thanks to the mediations carried out by the researcher-teacher. Mediations were used throughout the lesson. Some of them were used while the students were expressing generalizations and justifications and others helped to maintain the active participation of the whole group throughout the lesson. We assume that, due to the age of the students, justifying automatically after giving an answer is a bit more difficult for them. But this situation was overcome with the help of mediations. As the Narváez y Cañadas (2023) express, key questions like: "Can you explain to me how you do it?" or "What do you think?" help the pupils to explain the regularity.

By analyzing the three elements described —generalization, justification, and mediation—, we found a relationship among them, which supports the generalization process. There is no specific relationship between the levels of generalization and the number of justifications and mediations that can be made. But we highlight that these actions accompany and complement the students' expression of generalization. In order for students to generalize, we found it is necessary to carry out mediations, motivating them to justify their answers. As proof of the relationship between the three components, below is part of the transcript of the session analyzed, where we observe this relationship.

I: *If I give you any number of tables, what would you do to find the number of boxes… E5?* (mediation)

E5: *Multiplying.*

I: *How much?* (mediation)

E5: *By two.*

I: *What?* (mediation)

E5: *Well 500 million by two would be 100 million.*

I: *So, when you know the number of tables, what do you do to know the number of boxes?* (mediation)

E5: *You multiply, so multiply.*

I: *When you know the number of tables, what do you do to know the number of boxes?* (mediation)

E5: *Oh, I multiply by two which is the boxes on each table.* (justification)

As learning is a social act, the constant participation of all participants is necessary for its development. In this case, the generalization process takes place together with the learners' justifications and mediations made during this process. We understand that, due to their educational level, the justifications used are not very sophisticated from a mathematical point of view, but that with the help of mediations they can give a better argumentation about their generalization.

Discussion

The general objective of this study was to analyze the generalization process among 4th grade students. To this end, we analyzed the generalization levels used by students during a lesson. We found that the generalization levels were not used in a growing or linear order. Some students progressed in their generalization sophistication levels while others regressed. These results coincide with those of Blanton et al. (2015) who described the case of a student whose thinking switched bidirectionally between levels (at times regressing to a previous level). We also found that most students generalized with specific cases level. This could be because during most of the lesson, students worked on particular cases, avoiding consecutive cases to avoid recursive generalization. This could explain why recursive generalization level were not seen much during the lesson. Therefore, in this group of students the level of generalization was more specific cases than recursive, coinciding with what was shown in Authors, who pointed out in their results that children could avoid recursive thinking and reason about functional relationships. Regarding higher generalization level (generalization with algebraic symbolism), these were not seen during the lesson. This might be because the students had no prior experiences with algebraic lessons, generalizations, and symbolism and, therefore, had limited resources to express generalizations in a more sophisticated manner. Thus, aside from corroborating some of the results from Blanton et al. (2015) study, we have contributed by providing evidence that these generalization levels were seen among students of different ages, in our case, 4th grade students.

It appeared easier for students to generalize based on questions about near cases, where we identified a greater number of generalization levels. Yet, in turn, working with far and indeterminate cases allowed student's generalization levels to be more sophisticated. Torres et al. (2021) stated that students would generalize when the confirmed conjecture was reaffirmed for indeterminate or general cases. We believe students can generalize with near cases, but with a lower level of sophistication than when working with indeterminate cases, where students are allowed to advance in their expression and sophistication of generalization.

Regarding the justifications used by students, they played an important role during the lesson, as they accompanied generalizations. This result is confirmed by Bieda and Staples (2020) study, who highlighted that justifications create opportunities to access significant mathematical ideas. This is noteworthy as we position justifications as supports for students to express generalizations. In the work by Ellis (2011) justifications are also characterized as supports for more productive generalization. Providing the opportunity for students to explain the reasoning for their answers helps understand the mathematical process. Therefore, it is important for students to be able to justify which generalizations are valid and which are not (Mata Pereira & Da Ponte, 2017).

With regard to justifications used during the lesson, Thanheiser and Sugimoto (2022) described that teachers encouraged students to mostly justify a certain way, excluding other types of reasoning, thus limiting students. This is why we highlight the importance of providing spaces for students to have the freedom to justify how they deem best. This allows students to consider justification as an algebraic practice (Lesseig & Lepak, 2022).

Finally, during the lesson, mediations were used and played a key role in the students' learning. Ureña et al. (2019) argued that mediations favor working with generalizations. In our study, we observed this same feature. We provide evidence that the mediations used supported students' generalizations. Therefore, we highlight the importance of fostering students' participation and encouraging them to share their answers through justifications. In our study, mediation proved to be a key element in helping students to justify their reasoning, also helping to ensure that student participation was constant throughout the lesson.

We also highlighted the relevance of working with distant and indeterminate cases, as this helped students to reach more sophisticated levels of generalization. Da Ponte et al. (2017) stated that intertwining challenging and guiding actions seems fundamental to develop exploratory environments. In our research, mediations played the role of providing guidance and motivation to students, which helped them to express their generalizations effectively.

Conclusion

After analyzing our results, we express that it is evident that generalization is a dynamic and collaborative process that engages all key stakeholders in education, including teachers and students, present in the class. The active interaction among these individuals, through questioning and responding, facilitates a continuous flow of the learning process. This interactive approach offers diverse opportunities for every student to actively participate in the learning experience. Social and cooperative work in the classroom, through mediations and justifications, supports students with algebraic thinking. Discussion supports construction of more and more sophisticated generalization levels. Therefore, it is necessary to provide spaces in the class for all students to come up with various conjectures, allowing them to justify their reasoning, in order to generalize. Working with near cases initially helps students to be introduced to the task and identify regularities. However, we consider it is relevant to work and present students with far and indeterminate cases as a driver to reach more sophisticated levels of generalization. That is, activities should be gradual, considering they must facilitate learning.

We would recommend that to help students generalize, it is important for teachers to ask questions such as: “Can you explain the reason for your answer?”, “How did you think about this?”, “Why?”, etc., to help students think algebraically. This will foster discussion and allow students to listen to justifications, leading to deeper understanding of the task. In addition to providing opportunities for students to create their own conjectures, they can help to also develop their algebraic thinking further.

References

Amit, M., & Neria, D. (2008). "Rising to the challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 111-129. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0069-5

Ayala-Altamirano, C., & Molina, M. (2019). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Bieda, K. N., & Staples, M. (2020). Justification as an equity practice. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, *113*(2), 102-108. https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0148

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, Transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Cañadas, M. C., & Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 69-81. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Da Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 51-66. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z

Da Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. Quadrante, *XXII* (2), 55-81. (2013).

Da Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae, 1*, 45-59.

El Mouhayar, R. (2022). The role of languages in the process of objectification in pattern generalization in a multilingual mathematics classroom. *International journal of science and mathematics education, 20*(5),999-1020 https://doi.org/10.1007/s10763-021-10174-1

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.42.4.0308

Escobar, N. (2011). La mediación del aprendizaje en la escuela. *Acción Pedagógica, 20*, 58-73.

Ferreiro, R., & Calderón, E. (2005). ABC del Aprendizaje Cooperativo. *Trabajo en Equipo para Enseñar y Aprender*. Trillas.

Hidalgo-Moncada, D., & Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA, 14*(3), 204-225. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.11378

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Erlbaum

Lesseig, K., & Lepak, J. (2022). Justification in the context of middle grades: A process of verification and sense-making. In K. Bieda, A. Conner, K. Kosko, & M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 95-107). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-69

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA 4*(3), 232-246.

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press.

Mata-Pereira, J., & Da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 169-186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Merino, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por estudiantes de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. In A. Berciano, A. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). SEIEM.

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares de matemática, educación básica.* Autor.

Narváez, R.& Cañadas. M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. *PNA*, *17*(3), 239-264. https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018a). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. In L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457- 466). SEIEM.

Pinto, E., Cañadas, M. C., &Moreno, A. (2022). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(6), 1183-1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 83-96 https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la educación primaria. *BOE*, *52*, 24.386-24.504. https://www.boe.es/buscar/pdf/2022/BOE-A-2022-3296-consolidado.pdf

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164. https://doi.org/10.1007/BF00579460

Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 447-462. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Erlbaum.

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., & Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics*, *22*(2), 92-101. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092

Thanheiser, E., & Sugimoto, A. (2022). Justification in the context of elementary grades: justification to develop and provide access to mathematical reasoning. In K. Bieda, A. Conner, K. Kosko, & M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 35-48). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-64

Torres, M. D., Moreno, A., & Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics 9*,1109. https://doi.org/10.3390/math9101109

Ureña, J., Ramírez, R., & Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570-614.https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M., &Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *62*, 100866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2008). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 131-141. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0065-9

5.3. Estudio de Investigación 4: De lo Concreto a lo Abstracto: Un análisis del Proceso de Generalización

Narváez, R., Cañadas, M. C. y Torres, M. D. (en elaboración). De lo concreto a lo abstracto: Un análisis del proceso de generalización.

Resumen

Analizamos el proceso de generalización de estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años) al trabajar con tareas que involucran funciones lineales. Caracterizamos las fases de razonamiento (abducción, inducción y generalización) y las acciones para generalizar. Diseñamos una sesión que contemplaba una tarea de generalización seguida de entrevistas individuales. Los resultados revelaron que en la abducción los estudiantes formularon conjeturas, en la inducción validaron dichas conjeturas con casos particulares, y en la generalización tuvieron dificultades con casos indeterminados, pero mostraron regularidades en sus respuestas. Las acciones de exploración, organización, identificación de estructuras y justificación ayudaron a generalizar. Sugerimos planificar sesiones considerando estas fases de razonamiento, proporcionado espacios para realizar distintas acciones que ayuden a generalizar.

Palabras clave: Abducción, inducción, generalización, pensamiento funcional, proceso de generalización.

Introducción

La investigación sobre el pensamiento algebraico y sus componentes es un tema de gran interés a nivel internacional, como lo evidencian monográficos específicos sobre revistas de investigación especializadas reconocidas en el área (Cañadas et al., 2019; Kieran, 2022). Como resultado de los esfuerzos realizados desde la investigación y de los beneficios observados con la inclusión del pensamiento algebraico desde los primeros cursos, distintos países, incluido España, han realizado ajustes curriculares para incorporar el pensamiento algebraico desde etapas tempranas de la escolaridad (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022; Pincheira y Alsina, 2021). En España, se introdujo el sentido algebraico en el currículo descrito como la capacidad de reconocer patrones y relaciones de dependencia entre variables, expresando estas regularidades mediante diferentes representaciones (Moreno y Sánchez-Matamoros, 2022). Este sentido se describe como «los saberes relacionados con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones algebraicas» (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2022, p. 93). En el caso concreto de España, actualmente, y debido a la llegada del sentido algebraico al currículum, tanto investigadores, maestros como educadores matemáticos, se han visto inmersos en la necesidad de diseñar tareas y formular problemas que favorezcan el pensamiento algebraico desde la educación primaria. De esta manera la investigación y las instrucciones sobre qué hacer para favorecer el sentido matemático han sido tema de interés en el último tiempo (Torres et al., 2023).

El pensamiento algebraico se centra en expandir el lenguaje matemático más allá de los números, permitiendo la inclusión de términos no numéricos para expresar relaciones. Esta práctica no solo generaliza resultados específicos, sino que también ofrece herramientas para representar conexiones entre magnitudes, siendo fundamental en la educación matemática. Facilita el desarrollo del razonamiento lógico, la resolución de problemas y el pensamiento crítico, habilidades esenciales para el éxito académico y personal en cualquier campo. Desde la educación primaria, cultivar el razonamiento algebraico fomenta la capacidad de generalización (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2022). Esta perspectiva implica una visión integral de la enseñanza de las matemáticas desde edades tempranas, fomentando el desarrollo de habilidades algebraicas fundamentales en los estudiantes. En el contexto de nuestra investigación, nos centramos en explorar uno de los componentes del pensamiento algebraico: el pensamiento funcional. Según Blanton et al. (2011), el pensamiento funcional involucra generalizaciones relacionadas con las cantidades que varían juntas, así como la representación de estas relaciones y la aplicación del razonamiento para predecir el comportamiento funcional.

La generalización, una de las prácticas del pensamiento algebraico, es considerada clave en matemáticas y, en particular, en el pensamiento algebraico temprano y, por ende, en el funcional. Se trata de un proceso matemático fundamental que permite identificar patrones y regularidades en una situación y aplicarlos a nuevas situaciones (Cañadas et al., 2012; Mason, 1999). La generalización como producto se refiere a la forma en que se expresa la generalidad resultante de este proceso cognitivo (Ellis, 2007; Stephens et al., 2017). Diversas investigaciones han resaltado el uso de diferentes acciones como explorar, formular conjeturas y validarlas, que se realizan durante el proceso de generalización a lo largo de distintas etapas, como la abducción y la inducción (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Ellis, 2007; Rivera y Rossi, 2007; Torres et al., 2021a).

A pesar de la existencia de investigaciones previas que se centran en el proceso de generalización, aún persisten interrogantes en cómo se realiza este proceso en la sala de clases y qué acciones realizadas por los estudiantes ayudan a generalizar. Consideramos que realizar este análisis del proceso de generalización, considerando las fases de razonamiento involucradas en dicho proceso y las acciones realizadas durante este proceso, contribuirá significativamente a nuestra comprensión de cómo apoyar mejor a los estudiantes en su capacidad para generar sentido algebraico y generalizar. Además, en este trabajo buscamos complementar el estudio de Torres et al. (2021a) quienes, al haber realizado su investigación con estudiantes de segundo de primaria, expresaron su interés en profundizar en la comprensión de cómo las fases de razonamiento varían en función de los diferentes niveles educativos o cursos. Con base en los antecedentes mencionados, el objetivo de esta investigación es analizar el proceso de generalización en estudiantes de cuarto de primaria al trabajar con una tarea funcional. Para lograr este objetivo, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar y describir las fases de razonamiento (abducción, inducción y generalización) en el trabajo de estudiantes de cuarto de educación primaria en tareas de generalización que involucran funciones.
- Identificar y caracterizar las acciones realizadas dentro del proceso de generalización

Marco Conceptual

En este apartado describiremos los elementos conceptuales centrales de nuestro trabajo de investigación, considerando la generalización, el proceso de generalización y las fases de razonamiento, y las acciones para generalizar.

Generalización

Existen distintas investigaciones que han abordado la generalización desde una dualidad de significado, describiéndola como producto y como proceso (Ellis, 2007; Harel y Tall, 1991; Stephens et al., 2017). La generalización como proceso implica identificar elementos comunes, ampliar el razonamiento más allá de los casos particulares y aplicar lo aprendido a nuevas situaciones (Ellis, 2007; Kaput, 1999). La generalización dentro del pensamiento algebraico es considerada el núcleo de la actividad matemática (Dörfler, 1991; Kaput, 2008; Mason, 1999). El proceso básico de generalización consiste en identificar cualidades o propiedades comunes entre varios objetos o situaciones y registrarlas como características generales (Dörfler, 1991). La generalización se produce cuando se identifica y expone la regularidad entre casos particulares, extendiendo y validando esa regularidad a los casos generales (Kaput, 1999; Pólya, 1966). Generalizar implica ampliar intencionadamente el alcance del razonamiento o la comunicación más allá de casos específicos, destacando explícitamente las similitudes entre ellos, y elevar el enfoque hacia patrones y relaciones entre situaciones en lugar de centrarse únicamente en casos individuales (Kaput, 2000). Para Harel y Tall (1991) la generalización es el proceso de aplicar un argumento a una situación más amplia y general. Blanton et al. (2011) describieron que generalizar se produce cuando identificamos una estructura y la relacionamos a esa situación matemática, por ejemplo “el número de patas de una silla es cuatro veces el número de sillas” (p. 9). Establecer esta relación, más allá de una situación particular, es generalizar. Según Cañadas et al. (2012) los estudiantes logran generalizar cuando son capaces de identificar un patrón común que se observa en algunos casos particulares y aplicar esta característica común a otros casos particulares. Para lograr generalizar, es necesario identificar las regularidades en el comportamiento de una tarea funcional (Torres et al., 2021a). Desde una perspectiva funcional, la generalización es la capacidad de percibir y expresar cómo una cantidad varía en relación con otra en general (Blanton, 2008). Como señalaron Torres et al. (2023), para obtener una expresión general dentro de un contexto funcional, es necesario identificar dos variables que también pueden detectarse a través de casos particulares. En este sentido, la comprensión de relaciones y patrones entre variables en un contexto funcional facilita la generalización a partir de casos específicos.

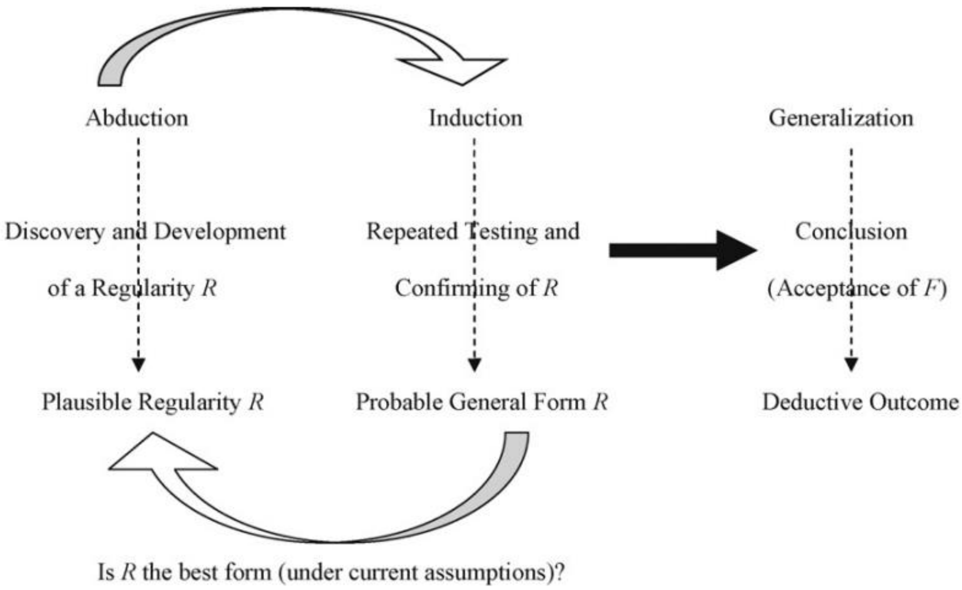
Proceso de Generalización y Fases de Razonamiento

El proceso de generalización ha sido descrito por diversos autores, quienes han analizado los pasos y fases involucrados en este proceso (e.g., Blanton, 2008; Cañadas y Castro, 2007; Narváez y Cañadas, 2023; Pinto y Cañadas, 2018; Torres et al., 2021a). El proceso de generalización implica relacionar variables a través de la estructura identificada lo que ayuda a comprender cómo perciben, organizan y relacionan regularidades. El proceso de generalización implica establecer la estructura general existente entre cantidades que covarían (Torres et al. 2022).

Existen investigaciones que han abordado el proceso de generalización considerando distintos elementos. En el estudio realizado por Cañadas y Castro (2007) propusieron un proceso de generalización basado en el razonamiento inductivo, que consideraba siete pasos. Estos pasos incluían trabajar con casos particulares, organizar los datos, identificar patrones, formular conjeturas, justificarlas, generalizar y demostrar. Sin embargo, señalaron que no todos estos pasos son necesarios en todos los casos, destacando la importancia del paso de generalización como generador de conocimiento. En un trabajo realizado posteriormente por Pinto y Cañadas (2018) realizaron una adaptación de los pasos anteriores al contexto del pensamiento funcional en educación primaria, modificando la noción de patrón, la cual está más asociada a la recurrencia, por la noción de estructura que permite resaltar el rol que tiene la relación entre las variables del problema. Por su parte, Blanton (2008) describió el proceso de generalización, destacando que la construcción de la generalización se llevaba a cabo cuando los estudiantes exploraban una situación matemática, formulaban conjeturas y las ponían a prueba a través de la justificación. Si la conjetura era válida, se convertía en una generalización. Rivera y Becker (2007) describieron que la abducción e inducción son cruciales para generalizar a partir de una clase limitada de instancias particulares (ver Figura 5-18).

Figura 5-18

Proceso de Generalización

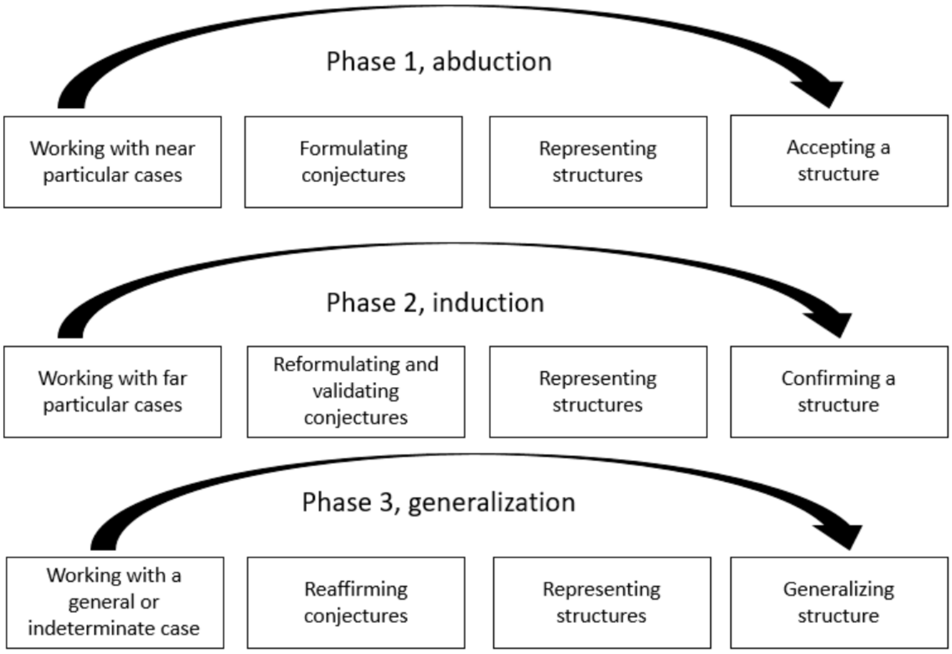


Nota. Figura extraída de Rivera y Becker, 2007, p. 153.

Para Rivera (2010) el proceso de generalización considera las fases de abducción-inducción y la acción simbólica. Describió que la abducción involucraba explorar reglas plausibles, mientras que la inducción confirmaba la validez de esas reglas. La abducción es vista como la primera etapa en la construcción del conocimiento, y la inducción se refiere a extender un patrón para crear algo desconocido. Por su parte la acción simbólica implicaba traducir las acciones realizadas en las fases anteriores para realizar una generalización algebraica. Por último, Torres et al. (2021a) propusieron un modelo de tres fases para analizar el proceso de generalización, el cual involucraba trabajar con diferentes tipos de casos. En la fase de abducción, los estudiantes, trabajan con casos particulares cercanos, generando las primeras hipótesis sobre la relación entre variables. La fase de inducción se produce cuando trabajan con casos particulares lejanos. Los estudiantes identificaban una relación entre variables, pudiendo confirmar las conjeturas generadas en la fase de abducción. Finalmente, en la fase de generalización, la conjetura confirmada se reafirmaba mediante casos indeterminados o el caso general, lo que evidenciaba una comprensión de la regularidad subyacente y la estructura en las relaciones entre variables. En sus fases incluyen trabajar con casos particulares cercanos, formular y validar conjeturas, y generalizar a casos indeterminados o generales (ver Figura 5-19).

Figura 5-19

Modelo de Proceso de Generalización



Nota. Figura extraída de Torres et al. (2021, p. 15).

En el proceso de generalización, las nociones de estructura y generalización están intrínsecamente relacionadas (Torres et al. 2022). Esto se debe a que, en dicho proceso, la estructura puede identificarse a partir de casos particulares. La estructura se define como la forma en que se organiza la regularidad entre valores específicos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Torres et al., 2021a).

Acciones para Generalizar

En distintas investigaciones se han identificado diferentes acciones y pasos que se realizan durante el proceso de generalización (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2021; Cañadas y Castro, 2007); Ellis, 2007; Torres et al., 2021a). En el caso de Cañadas et al. (2008) hablaron de pasos al referirse a los diferentes elementos individuales que se podían diferenciar en todo el proceso de razonamiento inductivo (Cañadas et al., 2008). Ellis (2007) describió que las acciones generalizadoras son los actos mentales que los estudiantes realizan. Estos se pueden inferir a través de su actividad y habla. Estas acciones implican observar cómo los estudiantes resuelven problemas, su enfoque en una materia, las estrategias que utilizan y a qué prestan atención. No son las conductas en sí mismas, sino las acciones mentales detrás de esas conductas. Estas acciones se dividen en tres categorías principales: relacionar, buscar y ampliar, y son una manera de entender los procesos mentales que podrían llevar a comportamientos específicos. Estas acciones pueden incluir el establecimiento de relaciones entre problemas u objetos, la búsqueda de similitudes y la extensión de patrones o relaciones a estructuras más generales. A medida que los estudiantes desarrollan habilidades de generalización, sus generalizaciones se vuelven más sofisticadas.

En un estudio de Ayala-Altamirano y Molina (2021), las autoras identificaron diversas acciones en el proceso de generalización, que abarcaban la exploración, la organización de datos, la identificación de estructuras, la conjetura, la validación, la extensión de la acción/generalización y la revisión de la acción/conjetura. Las acciones para generalizar ayudaban a los estudiantes a desarrollar su proceso de generalización y a avanzar en su comprensión de conceptos matemáticos, promoviendo el razonamiento crítico y la reflexión. Como lo expresaron Ayala-Altamirano y Molina (2021) “estas acciones podrían llevar a los estudiantes a plantear conclusiones por medio de razonamientos de abducción, inducción o deducción” (p. 214).

Metodología

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación que tiene como objetivo analizar el pensamiento algebraico de un grupo de estudiantes de cuarto de primaria, específicamente el pensamiento funcional. La investigación es descriptiva, exploratoria y explicativa (Hernández-Sampieri et al., 2004) lo que permite analizar la relación entre las fases de razonamiento, el proceso de generalización y las acciones realizadas para generalizar.

Este estudio lo llevamos a cabo en un colegio de nivel socioeconómico y cultural bajos en la ciudad de Granada, España, con la participación de 25 estudiantes de cuarto de primaria (9-10 años). Los estudiantes tenían conocimientos previos en numeración hasta el millón y operaciones básicas, pero no habían trabajado la generalización. El trabajo se realizó con el permiso de los padres o tutores legales de los estudiantes y contó con investigadores-docentes que guiaron el desarrollo de las sesiones y las entrevistas individuales.

Recogida de Información

Diseñamos e implementamos una sesión centrada en una tarea de generalización abordando la función $f(n)=2n+1$. Contextualizamos la tarea en un parque de atracciones de Granada, donde los visitantes adquirían un carnet de socio por 1 euro. Cada viaje a las distintas atracciones tenía un costo de 2 euros.

En el primer momento de la sesión describimos a los estudiantes la tarea, explicando el funcionamiento del parque. Luego, introdujimos distintos casos a los estudiantes "¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 2 viajes?"; "¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 10 viajes?", etc. Para nuestro estudio, hemos definido los casos presentados considerando la numeración trabajada con los estudiantes en sus clases de matemáticas: (a) cercano, aquellos en los que utilizábamos una numeración inferior a 50; (b) lejano, aquellos en los que utilizábamos una numeración entre 100 y 1.000.000 de viajes; y (c) general o indeterminado, casos en los que utilizábamos conceptos como "cualquier número de viajes" o usando letras como B viajes y Z viajes.

Durante el desarrollo de la sesión, entregamos a los estudiantes un cuestionario individual de ocho preguntas abiertas. Cinco preguntas eran sobre casos cercanos (1 viaje, 2 viajes 20 viajes, 11 viajes y 35 viajes); dos sobre casos lejanos (100 viajes y 1.000.000 de viajes) y, por último, una pregunta de caso general. En la última pregunta se les pedía que explicaran a un amigo cómo saber cuánto pagar en el parque.

Llevamos a cabo una puesta en común donde los estudiantes compartieron sus respuestas y explicaron sus procedimientos. Fomentamos la participación activa de toda la clase durante el desarrollo de toda la sesión. Videograbamos lo sucedido con una cámara fija en el aula, utilizando la observación participante como método cualitativo descriptivo que nos permitió obtener una comprensión más profunda del desarrollo de la sesión (Bernard, 2006).

Posteriormente pasada algunas semanas de la ejecución de la sesión descrita, realizamos entrevistas individuales semiestructuradas a seis estudiantes del grupo participante, seleccionados por su disposición para participar según la maestra. Realizamos las entrevistas en las semanas siguientes posterior a la sesión descrita. Las llevamos a cabo en un aula diferente al aula habitual de los estudiantes. En estas entrevistas, trabajamos con una tarea distinta a la trabajada en la sesión que considerada un contexto de cumpleaños ($f(n)=3n+1$). La tarea trataba sobre un cumpleaños donde Isabel les regalaría la misma cantidad de globos a cada invitado, colocando, además, un globo en su puerta para señalar su casa. En la figura 5-20 detallamos el material utilizado con los estudiantes para presentarles la tarea.

Figura 5-20

Materiales utilizados con los Estudiantes

Análisis de datos

Nuestra unidad de análisis se centró en las expresiones (verbales y escritas) de los s estudiantes e investigadores-docentes. Identificamos sus expresiones y diálogos a partir de la grabación de la sesión, registrando quién hablaba y lo que expresaban. La transcripción la realizamos frase por frase, asignando códigos a cada participante. Utilizamos el software Inqscribe (Versión 2.2.5) para detallar los interlocutores, sus tiempos de habla y sus expresiones. Identificamos a los 25 estudiantes con símbolos alfanuméricos (E1, E2... E25) y a los investigadores-docentes como I1 e I2.

En este trabajo asumimos que la abducción, inducción y generalización son procesos fundamentales del pensamiento algebraico y son parte del proceso de generalización (Cañadas y Castro, 2007; Rivera y Becker, 2007; Rivera, 2010 y Torres et al. 2021a). A continuación, describimos lo que definimos por cada una de ellas para analizar nuestros datos:

- Abducción: En esta fase, los estudiantes exploraban casos particulares cercanos y formulando las primeras conjeturas basadas en datos empíricos. Se buscaba una explicación plausible para los patrones y relaciones en una secuencia de números (Rivera y Becker, 2007; Torres et al. 2021a).
- Inducción: Durante la fase de inducción, se validaba una suposición y se reconocía la posibilidad de extender un patrón para construir algo desconocido (Rivera, 2010). Los estudiantes trabajaron con casos que podían variar en proximidad o similitud, desarrollando generalizaciones, a menudo de naturaleza aritmética, a partir de situaciones específicas. El razonamiento inductivo se destacó como un componente esencial en el camino hacia la generalización. Además, facilitó la confirmación de una hipótesis mediante el análisis de casos específicos (Pólya, 1945). Para nuestro trabajo, una conjetura se consideraba confirmada cuando observábamos la misma estructura en más de dos ocasiones durante el trabajo con casos particulares lejanos.
- Generalización: La generalización implicó expresar una conjetura que se aplicaba a todos los casos de una clase específica. En esta fase, se extendió el razonamiento más allá de los casos particulares, estableciendo una regla o patrón que abarcara una clase más amplia de situaciones (Cañadas y Castro, 2007). En el álgebra, esto se utilizaba para establecer reglas que permitían calcular cualquier término de una secuencia o para extender fórmulas a un conjunto más amplio de números.

En relación con las acciones para generalizar, las hemos definido considerando las ideas de los trabajos de Ayala-Altamirano y Molina (2021); Blanton (2008); Cañadas y Castro (2007), Ellis (2007) y Ureña et al. (2019).

1. Explorar: los estudiantes buscaban posibles soluciones a los casos presentados.

2. Organizar datos: a través de distintos usos de representaciones (tablas, dibujos, etc.) los estudiantes organizaban la información que iban obteniendo a medida que trabajaban con la tarea.
3. Conjeturar: Afirmación que entregaban los estudiantes y daba respuesta a todos los casos, la cual debía ser validada. Para Blanton (2008) la conjetura es una afirmación matemática general que puede ser verdadera o falsa en un dominio determinado (Blanton, 2008).
4. Identificar una estructura: a través de la regularidad observada, definida por las relaciones existentes entre las variables de la función (Torres et al., 2021b) expresándola de forma oral o escrita. Para Molina (2009) una estructura es un conjunto de términos que componen la expresión, los signos que la componen y las relaciones que existen entre ellos.
5. Justificar: respuesta entregada por los estudiantes para validar su conjetura. La justificación es definida como un argumento que valida o refuta la verdad de una afirmación utilizando declaraciones aceptadas y formas matemáticas de razonamiento (Staples et al., 2012). Para Thanheiser y Sugimoto (2022) la justificación permite a los estudiantes explicar su razonamiento de manera pública, lo que fomenta el análisis y la discusión en el aula.

Resultados

En este apartado presentamos los resultados de esta investigación, los cuales dan respuesta a los objetivos establecidos. Describiremos lo observado en relación con las fases de razonamiento y acciones identificadas en el proceso de generalización de los estudiantes, durante la sesión grupal y en las entrevistas individuales.

Sesión grupal de trabajo

Durante la sesión de trabajo, observamos las tres fases del razonamiento: abducción, inducción y generalización, en las cuales los estudiantes participaron activamente, contribuyendo con sus respuestas y justificaciones.

Fase de Abducción

Al inicio de la sesión comenzamos presentando y trabajando con casos cercanos. En esta fase, los estudiantes plantearon diferentes conjeturas e identificaron diversas estructuras. Por ejemplo, al calcular el costo de hacerse socio del parque y comprar dos viajes, algunos estudiantes expresaron que debían pagar 4 euros, mientras que otros argumentaron que eran 5 euros. Estas respuestas reflejaron la identificación de estructuras diferentes ($2n$; $2n+1$). Como lo expresaron Torres et al. (2021a) en la fase de abducción, los estudiantes descubren las primeras estructuras a partir de casos específicos. Trabajar con cantidades cercanas en esta fase permitió a los estudiantes a establecer relaciones iniciales y calcular el total a pagar para situaciones concretas. Como señaló Rivera y Becker (2007) la abducción es primaria en el proceso constructivo.

En la Figura 5-21, observamos estas primeras aproximaciones a la regularidad, donde E2 explicó a sus compañeros, utilizando el conteo con sus dedos, por qué se debían pagar 5 euros por 2 viajes en este parque de atracciones.

Figura 5-21

Explicación de E2 para el Caso de dos Viajes

En esta primera fase, los estudiantes realizaron acciones de exploración, identificación de estructuras y justificación. Durante la exploración, los estudiantes buscaron soluciones a preguntas sobre los casos cercanos (1, 2, 10 y 5 viajes). Algunas de estas soluciones fueron correctas, mientras que otras no. Paralelamente a la acción de explorar, los estudiantes llevaron a cabo la identificación de estructuras. Fue en esta etapa donde se evidenciaron distintas estructuras en sus respuestas ($2n$; $2n+1$). En la sesión, los estudiantes no expresaron la regularidad utilizando simbolismo algebraico. En su lugar, observamos estas regularidades y estructuras a través de sus respuestas y expresiones. Las justificaciones proporcionadas se relacionaron con la explicación de sus procedimientos, “porque para hacerte socio tienes que pagar un euro y para los viajes tienes que pagar dos euros y le sumas eso; porque si compras dos atracciones son cuatro más el carnet de socio”. Esta fase abductiva observamos que es anterior a la inducción (Rivera y Becker, 2007) caracterizada por acciones que llevan a la predicción, seguimiento y confirmación de conjeturas.

Fase de Inducción

Los estudiantes pasaron a la fase de inducción cuando trabajaron con casos lejanos, lo que les permitió validar y confirmar la regularidad de la tarea. Por ejemplo, E10 respondió al caso de 100 viajes expresando que son 201 euros “porque 100 por 2 son 200 y por el socio, 1”. En el caso de E9 respondió para el caso un millón que “multipliqué un millón por dos y me salió dos millones y sumé el uno del socio”. En la fase de inducción se fomenta la generación de nuevas hipótesis, lo que ayuda a la verificación de hipótesis (Rivera y Becker, 2007). Durante esta etapa, los estudiantes validaron y confirmaron la regularidad previamente identificada por el grupo curso.

En esta fase se realizaron diversas acciones: exploración, organización de datos, identificación de estructuras, la formulación de conjeturas y justificación. Los estudiantes abordaron una amplia variedad de casos, que consideró hasta 1.000.000 viajes. En la búsqueda de soluciones, registraron sus procedimientos, que mayormente implicaban sumar las cantidades correspondientes. Durante la discusión en clase, un grupo de estudiantes presentaron sus resultados en la pizarra, describiendo sus procedimientos.

Algunas de las expresiones que nos permitieron observar que habían validado y confirmado su conjetura fueron “si te haces socio te vale un euro y si se quiere montar en una atracción que vale dos, pues tiene que sumarlo; si tú quieres hacerte socio deber pagar un euro y los viajes te cuestan dos euros y calculando el socio y los viajes; sumé y multipliqué un millón por dos y me salió dos millones y sumé el uno del socio”.

Fase de Generalización

En la última fase los estudiantes trabajaron con casos indeterminados, extendiendo las conjeturas realizadas de tal forma que daban respuesta a casos generales e indeterminados. Les preguntamos "¿Qué se les ocurre si yo les digo que I2 fue a ese parque y se subió a B atracciones y se hizo socio?". Detallamos parte de este extracto de la sesión:

E7: *Veinte atracciones*

I1: *¿Cuánto dinero va a pagar I2? ¿Cómo podemos saber cuánto dinero se gasta I2?*

E10: *Que I2 tiene que multiplicar.*

I1: *¿Qué va a multiplicar si se subió a B atracciones y se hizo socio?*

E10: *Multiplicar.*

E9: *B por B.*

I1: *¿E9 cuál es tu idea?*

E9: *Hay que multiplicar B por B.*

Luego les presentamos el caso con Z viajes. En esta situación E4 escribe Z por A=B donde expresó que "la Z no puede otra vez, no puede empezar por atrás, tiene que empezar otra vez" (ver Figura 5-22).

Figura 5-22

Respuesta de E4 para caso Indeterminado Z Viajes

En relación con las acciones para generalizar, observamos que los estudiantes exploraron distintas respuestas con los casos de B viajes y Z viajes. Para la organización de datos, escribieron sus procedimientos y resultados en la pizarra. La estructura evidenciada con los casos indeterminados fue *2n y 2n+1*. Al justificar expresaron "debe multiplicar o hay que multiplicar B por B" y "la B como es la segunda en el orden alfabético son dos viajes y la A es uno o el carnet y te sale mucho".

Entrevistas individuales

Al analizar las entrevistas individuales de los seis estudiantes, observamos que, de los seis estudiantes entrevistados, únicamente E1 no completó la fase de generalización. En cambio, los otros cinco estudiantes avanzaron a través de las tres fases. Un estudiante (E6) mantuvo la misma estructura a lo largo de las tres fases de razonamiento, mientras que los demás experimentaron con estructuras diversas. Cabe destacar que los cinco estudiantes que lograron generalizar lo hicieron de manera correcta.

Entrevista realizada a E1

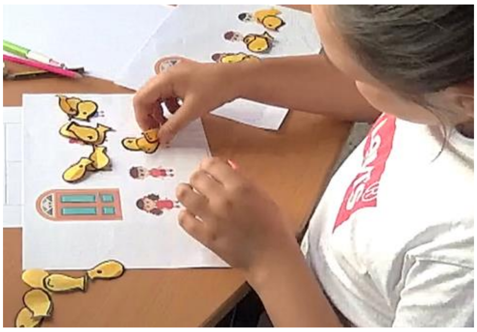
E1 pasó por las fases de abducción e inducción trabajando solo con casos cercanos. En estas fases logró identificar la regularidad de la tarea para los casos particulares.

Durante la fase de abducción, E1 formuló una conjetura basada en la observación de la cantidad de globos que se le daba a los invitados y el globo de la puerta. Identificó una estructura que implicaba dar tres globos a cada invitado y agregar uno en la puerta. Esta estructura fue validada en la fase de inducción, al trabajar con diferentes casos.

Para resolver los casos que se le presentaron, utilizó los globos e imágenes de niños, además de dibujar los invitados para contar cuántos globos necesitaba. E1 llegó a la conclusión de que debía entregar 3 globos a cada invitado y agregar un globo adicional, el cual representaba el de la puerta. En la fase de inducción aceptó y validó la estructura correcta expresando "tenía que darle tres, tres, tres, tres, tres y tres a sus compañeros. La misma cantidad a cada niño, le sobraba uno, pero se lo pusimos en la puerta" (ver Figura 7).

Figura 5-23

Respuesta de E1 para Caso con 6 Invitados



E1 no trabajó con casos indeterminados, no obstante, evidenció que identificaba la regularidad de la tarea al mantener una estructura consistente en su razonamiento.

Entrevista realizada a E2

E2 realizó pasó por las fases de abducción, inducción y generalización, trabajando con casos cercanos, lejanos e indeterminados. En la fase de abducción, exploró diversas conjeturas, ajustando la cantidad de globos según el caso presentado. Sin embargo, en algunos casos, cometió el error de calcular solo la cantidad de globos por niño, olvidando agregar el globo de la puerta. Tras trabajar con varios casos, finalmente aceptó la estructura $3x+1$ avanzando a la fase de inducción.

En la fase de inducción trabajó con casos cercanos y lejanos, permitiéndole confirmar la estructura correcta en más de dos ocasiones. Después de esta confirmación, la estudiante trabajó con los casos generales e indeterminados. Con el caso "muchos" invitados, E2 le asignó un valor específico expresando que "s*i, por ejemplo, hay mil, los tendríamos que multiplicar por tres... y luego sumarle uno".* Finalmente, con los casos indeterminados que utilizaban letras, logró generalizar la regularidad correspondiente, aunque continuó asignando un valor a la letra, en este caso cero. La estudiante expresó "porque si yo invito a cero invitados y está cero por tres que son cero, más uno, da un globo".

Durante la entrevista, la estudiante utilizó el material concreto y los recursos pictóricos para ayudarse en su proceso de generalización, además organizó la información en una tabla. Además, exploró con los distintos casos, realizó conjeturas, identificó estructuras y justificó.

Entrevista realizada a E3

E3 pasó por las tres fases de razonamiento. En la fase de abducción, trabajó con distintos casos cercanos, aceptando una conjetura. En la fase de inducción, al trabajar con nuevos casos E3 generó una nueva conjetura expresando que le daría "cinco, pues uno en la puerta y tres... uno para cada uno". Al intentar validar esta nueva, corrige su respuesta volviendo y reafirmando la conjetura original.

En la fase de generalización, expresó la regularidad para casos indeterminados, aunque para justificar su respuesta, proporcionó ejemplos con cantidades.

I: *Explícame, qué pasaba cuando invitaba a B invitados.*

E3: *Pues como la B es la segunda letra, pues sumaría dos veces tres, porque tres más tres, son seis, entonces el número que habría pensado son seis, le sumo uno, que el uno es de la puerta. Son siete.*

Durante todo el proceso, utilizó material concreto para responder preguntas relacionadas con casos particulares, y para los demás casos, realizó cálculos correspondientes. E3, además realizó las acciones de explorar, identificar estructuras y justificar.

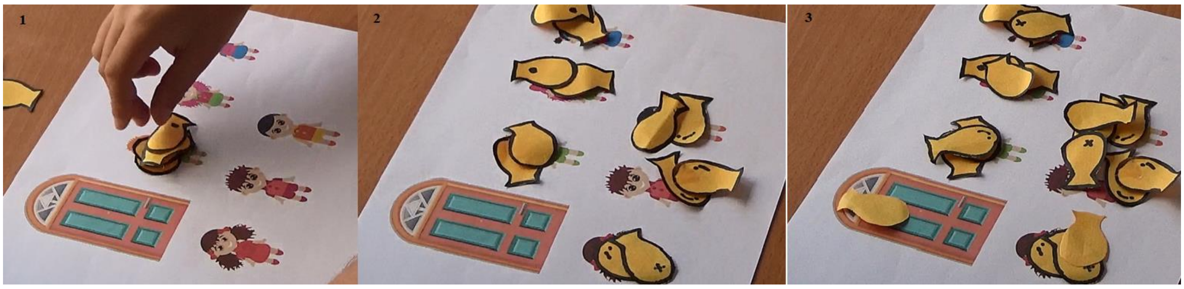
Entrevista realizada a E4

E4 pasó por las tres fases de razonamiento. Durante la primera fase, formuló y aceptó una conjetura (ver Figura 5-24), explorando otras conjeturas antes de llegar a la correcta

(*4x*, *2x*, y *3x+1*). Durante esta fase, al preguntarle por el caso con seis invitados y 19 globos, inicialmente intentó asignar cuatro globos a cada uno. Luego comprobó esa conjetura y se dio cuenta que esto no sumaba 19 globos. Posteriormente, probó con dos globos por invitado, resultándole una cantidad insuficiente de globos. A través de una serie de intentos y ajustes, finalmente llegó a la conjetura correcta de *3x+1* para representar la relación entre el número de invitados y la cantidad de globos.

Figura 5-24

Recursos de Apoyo utilizados por E4

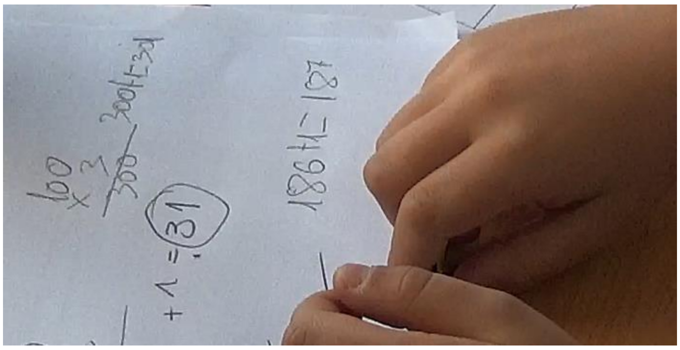


Note. Imagen 1 muestra la estructura *4x*; imagen 2 muestra la estructura *2x* e imagen 3 muestra la estructura *3x+1*.

Durante la fase de inducción, validó su conjetura para varios casos diferentes, lo que reflejaba un proceso de confirmación y refinamiento de su comprensión. Sin embargo, en la fase de generalización, aunque confirmó la conjetura, expresó dificultades al enfrentar casos indeterminados con letras. E4 expresó que no se podían calcular estos casos por ser letras. Para los casos generales (muchos invitados) E4 asignó una cantidad a la palabra muchos (100 invitados) expresando que “porque tres por cero, cero, tres por cero, cero, tres por una, tres. Trescientos globos. (escribe suma) son trescientos uno” (ver Figura 5-25).

Figura 5-25

Respuesta de E4 para el Caso de Muchos Invitados



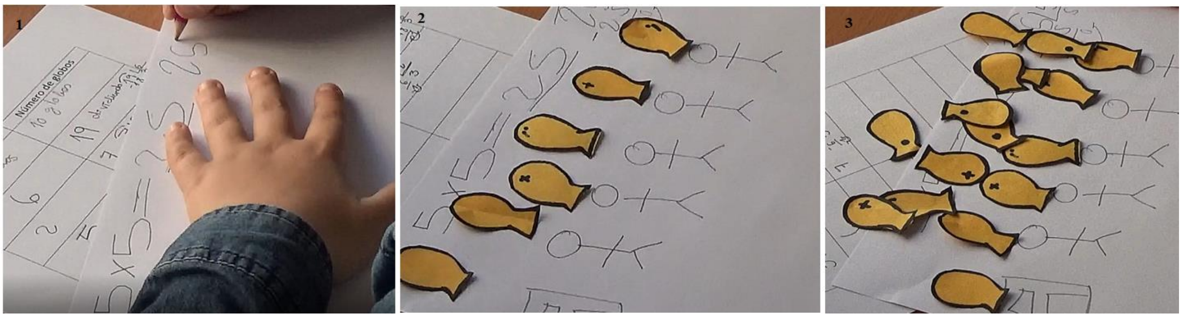
En el caso de infinitos invitados, E4 propone 60.000 globos expresando que se necesitaban "sesenta mil uno". E4 en la fase de generalización reflejó su comprensión con la regularidad de la tarea, aplicándola a situaciones más complejas. Para realizar algunos cálculos E4 se ayudó al contar con sus dedos, además realizó representaciones pictóricas y tabulares para organizar la información de la tarea. En general, su proceso de generalización mostró la evolución de la formulación de conjeturas iniciales hacia una comprensión más sólida.

Entrevista realizada a E5

E5 pasó por las tres fases de razonamiento, trabajando con casos cercanos e indeterminados. En la fase de abducción, E5 inicialmente formuló una conjetura indicando que cada invitado recibía tres globos, agregando uno para la puerta. En la fase de inducción, E5 confirmó su conjetura anterior trabajar con más casos, calculando la cantidad de globos necesarios en función de su estructura de $3x+1$. Sin embargo, cuando le presentamos el caso con cinco invitados, donde él debía indicar la cantidad de globos que se necesitaban, E5 cambió su conjetura explorando otras posibilidades ($5x$; $x+1$). Posteriormente, y luego de comprobar que las conjeturas que estaba proponiendo eran incorrectas, retomó la conjetura inicial, confirmándola (ver Figura 5-26).

Figura 5-26

Estructuras Evidenciadas por E5



Nota. Imagen 1 muestra la estructura *5x*; imagen 2 muestra la estructura *x+1* e imagen 3 muestra la estructura *3x+1*.

En la fase de generalización, E5 evidenció la estructura 3x+1 para situaciones indeterminadas. Para muchos invitados, E5 propuso multiplicar este muchos por tres y luego agregar uno para la puerta. Para infinitos invitados, E5 también respondió que en esta situación se necesitarían *infinitos globos* debido a la naturaleza sin fin de los invitados. Luego, menciona que para calcularlo debería multiplicar infinito por tres, lo que resultaría "infinito además sí, la puerta también vale, entonces infinito globos, más uno, infinitos globos uno".

Para llevar a cabo su razonamiento, E5 organizó los datos obtenidos a través de representaciones pictóricas y tablas para visualizar y resolver los problemas. Además del uso del material concreto (globos). Además, realizó las acciones de conjeturar, identificar la estructura de la terea y justificar.

Entrevista realizada a E6

Por último, E6 pasó por las tres fases de razonamiento, mostrando su capacidad para trabajar tanto con casos cercanos como indeterminados. En la fase de abducción E6 identificó una regularidad al trabajar con casos concretos y formuló una conjetura de la estructura *3x+1*, donde expresaba que daba tres globos a cada invitado y uno a la puerta. En la fase de inducción el estudiante confirmó y validó su conjetura a medida que trabajaba con casos adicionales. E6 demostró su capacidad para contar los globos de tres en tres y considerar el globo de la puerta en cada caso, lo que indicó una comprensión más profunda de la estructura. Por último, en la fase de generalización, cuando se presentó la palabra mucho, E6 respondió que la cantidad de globos necesarios se obtiene "repartiendo de tres en tres y sumándole uno de la puerta". Es importante destacar que E6 no utilizó materiales concretos para resolver los problemas, y en su lugar, la investigadora-docente intervino para guiarlo y avanzar en sus respuestas.

Discusión y Conclusión

Dado el tamaño de la muestra, destacamos que nuestra intención no es generalizar los resultados. Nuestro objetivo principal fue analizar el proceso de generalización en estudiantes de cuarto de primaria, identificando y caracterizando las fases de razonamiento y las acciones para generalizar tanto de forma grupal (sesión de trabajo) como individual (entrevistas). A pesar de esta limitación, hemos obtenido valiosos hallazgos que ofrecen una comprensión más profunda del proceso de generalización en estudiantes de esta etapa.

En relación con el proceso de generalización analizado en la sesión, el cual fue construido y desarrollado por todos los estudiantes presentes, observamos como las respuestas de los pares fueron fundamental para identificar, validar y confirmar la estructura correcta de la tarea. En esta situación los estudiantes a través de sus respuestas y justificaciones avanzaban en el proceso de generalización. Por su parte, al analizar las entrevistas individuales identificamos patrones comunes en el proceso de razonamiento de los estudiantes. En general, cinco de los seis estudiantes pasaron por las fases de abducción, inducción y generalización. Todos ellos formularon una conjetura en la fase de abducción, que implicaba dar tres globos a cada invitado y uno a la puerta. Esta conjetura se mantuvo constante a lo largo del proceso. Por lo mismo, destacamos que la abducción, inducción y generalización son fases esenciales en el proceso de generalización, tal como se ha descrito en investigaciones previas (Cañadas y Castro, 2007; Rivera, 2010; Rivera y Becker, 2007; Torres et al. 2021).

Tanto en el análisis de la sesión y de las entrevistas individuales pudimos observar que, la abducción permitió a los estudiantes realizar las primeras aproximaciones con la tarea, explorando y descubriendo las primeras conjeturas que daban respuesta a los casos presentados, siendo fundamental para el proceso de generalización. En esta primera fase los estudiantes realizaron las primeras aproximaciones en la tarea, a través de la exploración, identificando estructuras que daban respuesta a los primeros casos. Como describieron Rivera y Becker (2007) esta fase es vista como primaria en el proceso, donde se comienzan a construir y establecer generalizaciones. En relación con la fase de inducción, esta permitió que los estudiantes identificaran y validaran la regularidad de la tarea para cualquier caso particular (cercanos y lejanos), ajustando sus conjeturas al comprobarlas con otros casos específicos. Al igual a como lo expresaron Torres et al. (2021) la inducción implicó la confirmación de las conjeturas iniciales. Por último, en la fase de generalización, observamos que, aun cuando presentaron dificultades para expresar la generalización de la situación, debido al desconocimiento del trabajo con letras como variables, identificaron la regularidad, dando respuestas a los casos. El proceso de generalización se convirtió en un proceso dinámico, que les permitió avanzar y retroceder en estas fases a medida que desarrollaban sus conjeturas. Al igual que Torres et al. (2021) destacamos que el proceso de generalización es dinámico, permitiendo a los estudiantes avanzar y retroceder en las diferentes fases a medida que desarrollan sus conjeturas y estructuras de pensamiento. Durante la generalización, los estudiantes utilizaron esta estructura para abordar los casos indeterminados. Algunos expresaron la regularidad en términos generales, mientras que otros asignaron valores específicos a lo indeterminado para explicar sus respuestas.

Abordar la generalización como proceso y como producto nos permitió analizarlo con mayor profundidad. Pinto y Cañadas (2018) lo expresaron en sus resultados, la ventaja de considerar la generalización de este modo ayuda a comprender cómo los estudiantes generalizan. La generalización como proceso permitió entender lo que realizaba los estudiantes para generalizar (producto). Cuando generalizaban, era capaces de comprobar que su conjetura daba respuesta a cualquier situación. Además, observamos que este proceso fue dinámico y permitió que los estudiantes pudieran ir y volver por las distintas fases para generalizar. Sobre este punto, Blanton (2008) expresó que, si una conjetura no resultaba verdadera, se planteaba una nueva. En nuestro estudio, observamos un resultado similar, distintos estudiantes conjeturaban, pero al observar que esta conjetura no daba respuesta a todos los casos, volvían a plantearse una nueva.

Así mismo, destacamos el uso del simbolismo algebraico por parte de los estudiantes. Al no tener instrucción en este contenido y en cómo abordado los casos indeterminados y generales, es una evidencia de las capacidades que tienen los estudiantes de primaria para generalizar. Al expresar que se debe “multiplicar B por B” nos da un indicio de generalización algebraica. Además, observamos que abordar casos indeterminados presenta variaciones en la forma en que los estudiantes trabajan con ellos. Algunos asignan valores específicos, mientras que otros las trabajan como una cantidad abstracta. Esta variabilidad refleja la diversidad de enfoques y estrategias que los estudiantes pueden aplicar en situaciones de generalización.

En relación con las acciones generalizadoras, no necesariamente se realizaron todas y en el orden establecido, al igual que lo detallaron en su estudio Cañadas y Castro (2007). Observamos que para nuestro estudio la exploración, organización de datos, identificación de estructuras y justificaciones se realizaron de forma conjunta, lo que permitió que los estudiantes conjeturaran y posteriormente generalizaran. Estas acciones les ayudaron a formular, validar y corregir sus conjeturas, lo que destaca la importancia de incorporar estos elementos en la enseñanza del pensamiento algebraico. La mayoría de las acciones identificadas se realizaron en todas las fases. Por lo mismo, consideramos relevante destacar que la manera en que aparecieron las acciones generalizadoras en nuestro estudio tuvo que ver con las características de la tarea, es decir, creemos que distintos contextos o funciones podrían mostrar otros resultados.

En el ámbito pedagógico, estos hallazgos sugieren la importancia de planificar las sesiones de trabajo considerando las fases de razonamiento, entendiendo que el proceso de generalización es gradual. Proponemos trabajar con casos cercanos para que los estudiantes comprendan la tarea y posteriormente puedan conjeturar, validar, extendiendo así la regularidad encontrada para generalizar. Además de dar espacios dentro de las sesiones donde los estudiantes puedan realizar las acciones generalizadoras necesarias que los ayude a generalizar. También destacamos las acciones de organizar datos y justificar como elementos clave para ayudar a los estudiantes a validar sus conjeturas o corregirlas. Los educadores pueden utilizar estos hallazgos para adaptar su enfoque pedagógico y promover de manera más efectiva las habilidades de generalización en sus estudiantes. Este estudio proporciona evidencia concreta del proceso de generalización llevado a cabo por estudiantes de cuarto de primaria, ofreciendo una descripción detallada tanto de su realización en una sesión grupal de trabajo como de su desarrollo de manera individual. Estos hallazgos subrayan la importancia de fomentar el razonamiento matemático y la generalización en la educación matemática.

En nuestro estudio, la falta de instrucción previa en simbolismo algebraico resultó un desafío para los estudiantes. Para futuras investigaciones, se podría plantear la posibilidad de explorar más a fondo el proceso de generalización con estudiantes que reciban una instrucción específica sobre cantidades indeterminadas, centrándose especialmente en el uso del simbolismo algebraico o cantidades indeterminadas. Además, basándonos en nuestras investigaciones anteriores, subrayamos la importancia de considerar que el proceso matemático se desarrolla de manera social (Narváez y Cañadas, 2023). Por lo tanto, recomendamos un análisis más detenido del papel de las mediaciones proporcionadas por investigadores-docentes en este tipo de intervenciones.

Al caracterizar las distintas fases del proceso de generalización y las acciones que contribuyen a su desarrollo, este estudio ofrece información valiosa para el diseño de estrategias para la enseñanza del pensamiento algebraico.

Agradecimiento

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España MCIN/AEI/10.13039/501100011033. Además de la Beca de Doctorado en el extranjero, Becas Chile, Folio 72210075.

Referencias

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA, 15*(3), 211-241. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, Transforming Practice*. Heinemann.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5. NCTM.

Bernard, H. R. (2006). *Research methods in anthropology: Qualitative and Quantitative approaches*. AltaMira Press.

Cañadas, M. C., Blanton, M. y Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking/Número especial sobre el pensamiento algebraico temprano. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 469-478. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638569

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 15*, 561-573.

Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. En A.J. Bishop, S. Mellin-Olsen, J. Van Dormolen. (Eds), *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching. Mathematics education library* (pp. 63-85). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2195-0_4

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(2), 221-262. https://doi.org/10.1080/10508400701193705

Harel, G. y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-42.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kieran, C. (2022) The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education 54*, 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA 4*(3), 232-246.

Mason, J., Grahamn, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of algebra*. The Open University Press.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 24386-24504.

Moreno, A. y Sánchez-Matamoros, G. (2022) Sentido matemático escolar. En L. Blanco; N. Climent; M. T. González; A. Moreno; G. Sánchez-Matamoros; C. de Castro y C. Jimenez (Eds). *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática.* (pp 104-106). Universidad de Granada.

Narváez, R. y Cañadas, M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en un contexto de generalización. *PNA*.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457-466). SEIEM.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Rivera, F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 297–328. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9222-0

Rivera, F. D. y Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 140-155. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.05.001

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Flores, P. (2022). Sentido matemático escolar. En L. Blanco; N. Climent; M. T. González; A. Moreno; G. Sánchez-Matamoros; C. de Castro y C. Jimenez (Eds). *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática.* (pp 55-79). Universidad de Granada.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386-420). NCTM.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics 9*,1109. https://doi.org/10.3390/math910119

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA*, *16*(3), 215-236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637

Torres, M. D., Moreno, A., Vergel, R. y Cañadas, M. C. (2023). The Evolution from "I think it plus three" Towards "I think it is always plus three." Transition from Arithmetic Generalization to Algebraic Generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10414-6

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En este apartado describimos las conclusiones obtenidas en este trabajo de investigación, respondiendo a los objetivos de investigación previamente establecidos. En primer lugar, presentamos cómo y en qué medida hemos dado respuesta a los objetivos de investigación a lo largo de los estudios descritos en la sección anterior. Las conclusiones de esta tesis doctoral ofrecen un análisis y descripción del proceso de generalización en estudiantes de educación primaria, específicamente en el contexto funcional del pensamiento algebraico.

En segundo lugar, detallaremos las principales contribuciones de nuestra investigación doctoral, describiendo, además, las implicancias en la docencia. Finalmente, abordaremos las limitaciones inherentes a nuestro estudio y delinearemos posibles líneas de investigación futuras que se desprenden de nuestro trabajo.

6.1. Respuestas a los objetivos de Investigación

En nuestra Tesis Doctoral hemos analizado y descrito cómo los estudiantes de educación primaria llevan a cabo el proceso de generalización en un contexto funcional del pensamiento algebraico, considerando las mediaciones realizadas por un investigador-docente. En este análisis, evaluamos las estrategias y dificultades que los estudiantes enfrentan al abordar tareas que requieren la aplicación del pensamiento funcional y la capacidad de generalización. Además, examinamos cómo las mediaciones del investigador-docente influyen en este proceso, identificando cómo la guía pedagógica impacta en la forma en que los estudiantes abordan y comprenden estas tareas de generalización.

Nuestro objetivo general de investigación lo hemos abordado en los cuatros estudios realizados para esta memoria. En el primero de ellos realizamos un análisis bibliométrico, en el que hacemos una revisión del estado del arte de nuestro tema de investigación. En los tres estudios posteriores analizamos el proceso de generalización. En los estudios tuvimos la oportunidad de analizar este proceso de generalización desde distintas miradas. En el estudio 2 analizamos y describimos la generalización de los estudiantes antes y después de las mediaciones realizadas por el investigador-docente, caracterizando a la vez las mediaciones utilizadas. En el estudio 3 analizamos el proceso de generalización identificando y caracterizando los niveles de generalización evidenciados por los estudiantes, las mediaciones realizadas durante una sesión, las justificaciones y las posibles relaciones entre niveles de generalización, justificaciones y mediaciones realizadas durante el proceso de generalización. Finalmente, en el estudio 4 analizamos el proceso de generalización al desarrollar una tarea relacionada con el pensamiento funcional, identificando y describiendo las fases de razonamiento (abducción, inducción y generalización), así como las acciones específicas que conducen a los estudiantes hacia la generalización.

A continuación, presentamos las principales conclusiones para los objetivos específicos establecidos en esta memoria de investigación.

Objetivo específico 1: *Caracterizar el proceso de generalización de estudiantes de los primeros cursos de educación primaria*

Al abordar el primer objetivo específico (O.E.1) hemos caracterizado cómo los estudiantes llevan a cabo el proceso de generalización, destacando desafíos y estrategias utilizadas en diversas situaciones matemáticas. Este análisis lo hemos realizado a través de los estudios 2, 3 y 4 de nuestra Tesis Doctoral.

Esta investigación permitió analizar el pensamiento algebraico en los primeros cursos de educación primaria. Identificamos los niveles de sofisticación, los cuales fueron reorganizados del trabajo realizado por Blanton et al. (2015). Esto nos entregó una visión de la capacidad de generalización de los estudiantes, lo que contribuye a comprender cómo evoluciona esta habilidad a lo largo de estos primeros años educativos. Al analizar y caracterizar el proceso de generalización en segundo y cuarto curso, observamos que, independientemente del nivel, los estudiantes tienen la habilidad de generalizar para cantidades indeterminadas, incluso sin tener conocimiento previo del simbolismo algebraico o conceptos de lo indeterminado (infinito, muchos, etc.). Este hallazgo subraya la habilidad innata de los estudiantes para establecer relaciones entre cantidades y descubrir patrones más allá de casos específicos, lo que amplía nuestra comprensión sobre sus capacidades de generalización.

Considerar la generalización como un proceso y un producto (Ellis, 2007) permitió tener una mayor comprensión de las generalizaciones realizadas por los estudiantes, teniendo así un análisis más completo de su progreso. Esta construcción de generalizaciones se apoyó en la exploración de los estudiantes, quienes formulaban y validaban sus conjeturas mediante la justificación de sus observaciones y razonamientos. Esta caracterización permitió, además, identificar errores comunes y áreas de apoyo como el incentivar a la explicación de sus respuestas, acciones necesarias para el desarrollo de habilidades de generalización en contextos funcionales, resaltando así la relevancia de la mediación en este proceso.

Este análisis del proceso de generalización ayudó a observar que los estudiantes cuando trabajaban con casos cercanos podían establecer sus primeras conjeturas que van validando y extendiendo a medida que exploran más instancias, tal como describe Ellis (2011). Este proceso dinámico evoluciona a través de la interacción y el razonamiento, permitiéndoles enfrentar lo indeterminado de manera progresiva y sólida.

Objetivo específico 2: *Describir las relaciones entre las generalizaciones de los estudiantes y las mediaciones realizadas por un investigador-docente.*

En relación con el segundo objetivo específico (O.E.2), donde debíamos describir la relación entre las generalizaciones y las mediaciones, observamos la influencia significativa de las mediaciones y la forma en que los estudiantes abordaban las tareas de generalización, destacando la importancia de una guía pedagógica efectiva en este proceso. Consideramos la mediación como una interacción educativa consciente y significativa que busca facilitar el desarrollo cognitivo y afectivo del estudiante (Ferreiro y Calderón, 2005). Esta interacción intencionada entre el mediador y el estudiante influyó en el proceso de generalización.

Las mediaciones desempeñaron un rol fundamental en el estímulo y corrección de los estudiantes frente a las tareas de generalización en el ámbito del pensamiento funcional (Hidalgo-Moncada y Cañadas, 2020; Ureña et al., 2019). Ayudar a los estudiantes a movilizar sus conocimientos y explicar sus soluciones dependió en gran medida de las intervenciones o mediaciones realizadas por los docentes (Da Ponte y Quaresma, 2016). Hemos destacado que esas acciones mediadoras son un puente que favorece el trabajo con generalizaciones y tienen un impacto considerable en la capacidad de generalización de los estudiantes (Ureña et al., 2019).

Hemos identificado mediaciones específicas que han resultado efectivas para ayudar en el proceso de generalización en los estudiantes. Entre estas mediaciones se encuentran el planteamiento de preguntas reflexivas y la presentación de desafíos matemáticos específicos (mediaciones invitar y desafiar). Nuestra investigación destaca cómo las instrucciones y las intervenciones del investigador-docente tienen una influencia directa en la calidad y naturaleza de las generalizaciones de los estudiantes. Estos hallazgos evidenciaron vínculos específicos entre las acciones del docente y las respuestas de los estudiantes, demostrando cómo las mediaciones impactan directamente en las estrategias y respuestas de los estudiantes.

Observamos la adaptabilidad que tienen las mediaciones con las necesidades individuales de los estudiantes, ajustándose a las respuestas y el nivel de comprensión de cada estudiante. Además, ciertas formas de mediación se relacionaron directamente con la confianza y la actitud de los estudiantes hacia las tareas de generalización. La relación entre la mediación y la autoeficacia matemática fue un aspecto relevante detectado en nuestra investigación.

Objetivo específico 3: *Caracterizar las justificaciones de los estudiantes al resolver una tarea de generalización.*

Con respecto al tercer objetivo específico (O.E.3), hemos hecho una caracterización de las justificaciones realizadas por los estudiantes al enfrentarse a tareas de generalización. Nos centramos en generalizaciones y justificaciones porque estas prácticas son fundamentales para el pensamiento matemático (Dörfler, 2008; Kaput, 1999). Este análisis proporcionó una visión de cómo los estudiantes fundamentan sus respuestas. En el desarrollo de nuestro trabajo observamos esta relación existente entre las justificaciones de los estudiantes con el proceso de generalización. Esta idea la relacionamos con lo expresado por (Carraher et al., 2008) quien expresó que la generalización implica afirmar que alguna propiedad o técnica se mantiene para un gran conjunto de objetos o condiciones matemáticas La justificación actúa como soporte para una generalización más productiva que, a su vez, promueve el desarrollo de argumentos deductivos apropiados (Blanton, 2008; Ellis, 2011). Es el conjunto de argumentos que validan una conjetura y es crucial para la formulación de generalizaciones (Staples et al., 2012).

Identificamos similitudes en las justificaciones de los estudiantes, que abarcaban desde la mera reproducción de reglas o conjeturas hasta la presentación de argumentos más elaborados en torno a las relaciones descubiertas. Observamos una variación en la sofisticación de estas justificaciones, desde aquellas basadas en ejemplos con casos específicos hasta aquellas que expresaban regularidades aplicables a cualquier caso, es decir, justificaciones que sustentaban las generalizaciones.

Observamos una conexión entre la calidad de las justificaciones y la comprensión conceptual, observando que las justificaciones sólidas se vinculan con un mejor entendimiento. Las justificaciones para nuestra Tesis Doctoral representaron un papel fundamental en el proceso de generalización de los estudiantes. Sin ellas, nos hubiese resultado complicado identificar y comprender las generalizaciones que emergían al resolver las tareas que les presentábamos. Este aspecto se convirtió en un componente clave que no solo validaba las conjeturas y respuestas de los estudiantes, sino que también permitió distinguir entre las generalizaciones simples y otras más complejas.

En este objetivo, además, destacamos el impacto de la mediación del investigador-docente en las justificaciones, promoviendo mayor claridad y fundamentación. Las mediaciones realizadas por los docentes o investigadores, en combinación con estas justificaciones, desempeñaron un papel esencial en el desarrollo y la comprensión del pensamiento funcional.

Estas herramientas pedagógicas, tanto las justificaciones como las mediaciones, trabajan de la mano para guiar a los estudiantes hacia un entendimiento más profundo de las regularidades matemáticas, lo que les permitirá avanzar hacia generalizaciones sofisticadas.

Objetivo específico 4: *Describir el razonamiento de los estudiantes al resolver una tarea de generalización*

En relación con el cuarto objetivo específico (O.E.4), hemos logrado ofrecer una descripción del razonamiento de los estudiantes al enfrentar tareas de generalización, considerando las fases de razonamiento (abducción, inducción y generalización). A través de este análisis hemos descrito las estrategias empleadas por los estudiantes, proporcionando una visión sobre cómo desarrollan y aplican el proceso de generalización.

Durante este proceso, identificamos y caracterizamos las fases de razonamiento y las acciones generalizadoras llevadas a cabo por los estudiantes, tanto en sesiones grupales como en entrevistas individuales. Destacamos que la abducción, inducción y generalización son fases esenciales en el proceso de generalización, tal como se ha descrito en investigaciones previas (Cañadas y Castro, 2007; Rivera, 2010; Rivera y Becker, 2007; Torres et al. 2021).

Observamos cómo las respuestas colectivas se convirtieron en un factor fundamental para identificar, validar y confirmar la estructura correcta de la tarea, avanzando así en el proceso de generalización. Asimismo, al examinar las entrevistas individuales, notamos patrones comunes en el razonamiento de los estudiantes: la formulación de una conjetura inicial en la fase de abducción, seguida de su mantenimiento a lo largo del proceso de generalización. Además, evidenciamos que la abducción fue crucial en este proceso, permitiendo a los estudiantes explorar y descubrir primeras estructuras que respondían a los casos presentados. La fase de inducción les brindó la oportunidad de identificar la regularidad de la tarea y ajustar sus conjeturas a través de la comprobación con otros casos específicos. Por último, aunque enfrentaron dificultades para expresar la generalización debido a la falta de familiaridad con el simbolismo algebraico, lograron identificar la regularidad, dando respuestas a los casos, lo que sugiere sus capacidades para generalizar.

6.2. Aportes de la Investigación

El propósito de nuestra investigación era contribuir al entendimiento sobre el desarrollo del pensamiento funcional en educación primaria. Al explorar cómo diferentes situaciones matemáticas influyen en la generalización, hemos intentado dar una mirada más social, que incluye la interacción, la mediación y las justificaciones, en el proceso de generalización y de cómo poder integrar una progresión de enseñanza sobre pensamiento funcional en el aula. Además, consideramos que nuestra investigación ofrece valiosos aportes para diseñar tareas y actividades que promuevan una comprensión más significativa de la generalización en este contexto específico.

Nuestros hallazgos resaltan el papel crucial de las mediaciones y las justificaciones en el proceso de generalización, evidenciando su impacto en la construcción del pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria. Las mediaciones identificadas, como invitar y desafiar, proveen herramientas prácticas para los docentes, permitiéndoles guiar de manera efectiva la intervención pedagógica. Además, hemos evidenciado que la mediación puede ser esencial para que estudiantes sin experiencia previa en generalización desarrollen habilidades de justificación y razonamiento matemático. Destacamos a la medicación en el proceso de generalización como una acción social intrínseca en el aprendizaje matemático, que fortalece la comprensión de la interacción entre estudiantes y docentes, facilitando una comunicación efectiva.

Asimismo, nuestra investigación confirma la relevancia de las fases de razonamiento durante el proceso de generalización estudiado en otros antecedentes (Cañadas y Castro, 2007; Rivera y Becker, 2010; Torre et al., 2021), ofreciendo una visión de cómo se va generando la generalización en los estudiantes. Estas fases permiten una secuenciación efectiva de tareas matemáticas, progresando desde actividades menos complejas hacia desafíos más profundos. Estos hallazgos, en la misma línea que investigaciones anteriores, subrayan la importancia de considerar la generalización como una construcción social que se nutre de la mediación, las justificaciones y el razonamiento progresivo para facilitar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes de educación primaria.

6.3. Implicaciones para la Docencia

El estudio desarrollado en esta memoria de investigación ofrece una contribución al ámbito educativo y la Didáctica de la Matemáticas, al profundizar en el proceso de generalización en estudiantes de educación primaria. Este aporte es significativo en la medida en que brinda una visión detallada y aplicable en las aulas, abordando cómo los estudiantes desarrollan este proceso cognitivo.

Una de las implicaciones directas para la enseñanza es la oportunidad de ofrecer a los docentes una visión clara sobre cómo integrar el pensamiento funcional en sus prácticas pedagógicas. Esto se puede logra al enfatizar metodologías como las mediaciones, acciones que puedan fomentar la justificación y la realización de discusiones activas, instancias que ayudarán a evidenciar las generalizaciones propuestas. Además de otorgar espacios durante las sesiones, donde los estudiantes puedan explorar y compartir conjeturas. Así mismo, consideramos esencial que se planifiquen actividades basadas en casos cercanos a los estudiantes, ya que esto les permite no solo explorar, sino también generalizar desde sus propias experiencias, facilitando así el proceso de comprensión y aplicación. Pero, además, llevarlos a casos con cantidades que les permita extender la regularidad que han identificado. Integrar las prácticas algebraicas en el desarrollo de las sesiones relacionadas al pensamiento algebraico, otorgará beneficios en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

La investigación revela que la construcción social del aprendizaje es clave en el desarrollo del pensamiento algebraico en etapas tempranas. Nuestros hallazgos apuntan a la necesidad de que los estudiantes constantemente expliquen sus razonamientos a sus compañeros, promoviendo así un entorno colaborativo donde la justificación y el intercambio de ideas son fundamentales para el proceso de generalización.

Los estudios previos, citados en este informe de investigación, resaltan las carencias en la formación de los docentes en cuanto al pensamiento algebraico y la desconexión entre las experiencias en el aula sobre patrones y el desarrollo matemático continuo de los estudiantes. Por lo tanto, este trabajo doctoral ofrece un puente esencial entre la teoría y la práctica, proporcionando a los educadores herramientas concretas para abordar estas deficiencias. En resumen, nuestro trabajo representa una ayuda en el entendimiento del proceso de generalización en estudiantes de primaria y, sobre todo, brinda un conjunto de estrategias y enfoques pedagógicos aplicables directamente en el aula (Kaput, 2005; Smith, 2003). Los resultados de nuestra investigación permiten a los docentes no solo comprender mejor el desarrollo del pensamiento funcional en sus estudiantes, sino también implementar prácticas más efectivas y enriquecedoras para fomentar la generalización matemática desde edades tempranas.

6.4. Limitaciones de la Investigación y Líneas Abiertas

Al realizar el análisis de los datos de nuestra investigación, observamos que teníamos algunas limitaciones. Si bien los resultados presentados suponen un aporte al campo de la investigación en Didáctica de la Matemática, las limitaciones en cuanto a la cantidad de participantes y el enfoque exploratorio sugieren precaución al generalizar los resultados.

Otra limitante fue no considerar en nuestro análisis la representación. La generalización y la representación están intrínsecamente ligadas en el pensamiento algebraico, como mencionan Cooper y Warren (2011). En nuestros estudios observamos cómo el uso de representaciones en diferentes enunciados podía influir de alguna manera en la generalización de los estudiantes. Este aspecto destaca la importancia de considerar las representaciones como una herramienta clave en el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas. Una de nuestras aspiraciones futuras es examinar más a fondo el pensamiento funcional integrando las cuatro prácticas algebraicas (justificación, representación, razonamiento y generalización) lo que puede ampliar aún más nuestra comprensión sobre cómo los estudiantes desarrollan su capacidad de generalización.

En este trabajo nos hemos centrado en la medicación como proceso entre el estudiante y el investigador-docente. Para una futura investigación, nos interesaría indagar en la mediación entre compañeros en el proceso de generalización y cómo esta interacción entre estudiantes impacta en la resolución de ciertas tareas de generalización. También, nos planteamos la investigación sobre cómo aspectos afectivos como la confianza, la motivación y los antecedentes socioculturales de los estudiantes pueden influir en la capacidad de generalización.

CHAPTER 7. CONCLUSIONS

In this section we describe the conclusions obtained in this research work, responding to the previously established research objectives. First, we present how and to what extent we have responded to the research objectives throughout the studies described in the previous section. The conclusions of this doctoral thesis offer an analysis and description of the generalization process in elementary school students, specifically in the functional context of algebraic thinking.

Secondly, we will detail the main contributions of our doctoral research, describing, in addition, the implications for teaching. Finally, we will address the limitations inherent to our study and outline possible lines of future research arising from our work.

7.1. Research Objectives

In our Doctoral Thesis we have analyzed and described how elementary school students carry out the generalization process in a functional context of algebraic thinking, considering the mediations performed by a researcher-teacher. In this analysis, we evaluated the strategies and difficulties that students face when approaching tasks that require the application of functional thinking and generalization ability. In addition, we examine how the researcher-teacher mediations influence this process, identifying how pedagogical guide impacts how students' approach and understand these generalization tasks.

Our overall research objective has been addressed in the four studies conducted for this report. In the first of these, we conducted a bibliometric analysis, in which we reviewed the state of the art of our research topic. In the three subsequent studies we analyzed the generalization process. In the studies we had the opportunity to analyze this generalization process from different perspectives. In study 2 we analyzed and described the generalization of the students before and after the mediations carried out by the researcher-teacher, characterizing at the same time the mediations used. In study 3 we analyze the generalization process by identifying and characterizing the levels of generalization evidenced by the students, the mediations performed during a session, the justifications, and the possible relationships between levels of generalization, justifications and mediations performed during the generalization process. Finally, in study 4 we analyze the generalization process when developing a task related to functional thinking, identifying, and describing the reasoning phases (abduction, induction, and generalization), as well as the specific actions that lead students towards generalization.

In the following, we present the main findings for the specific objectives established in this research report.

Specific Objective 1: *To characterize the generalization process of students in the first years of primary education.*

In addressing the first specific objective (S.O.1) we have characterized how students carry out the generalization process, highlighting challenges and strategies used in various mathematical situations. This analysis was carried out through studies 2, 3 and 4 of our Doctoral Thesis.

This research allowed us to analyze algebraic thinking in the first grades of elementary school. We identified the levels of sophistication, which were reorganized from the work done by Blanton et al. (2015). This gave us insight into students' generalization ability, which contributes to understanding how this skill evolves throughout these early educational years. By analyzing and characterizing the generalization process in second and fourth grade, we observed that, regardless of the level, students have the ability to generalize for indeterminate quantities, even without prior knowledge of algebraic symbolism or concepts of the indeterminate (infinity, many, etc.). These finding underscores students' innate ability to establish relationships between quantities and discover patterns beyond specific cases, which broadens our understanding of their generalization abilities.

Considering generalization as a process and a product (Ellis, 2007) allowed us to have a greater understanding of the generalizations made by the students, thus having a more complete analysis of their progress. This construction of generalizations was supported by the exploration of the students, who formulated and validated their conjectures through the justification of their observations and reasoning. This characterization also made it possible to identify common errors and areas of support such as encouraging them to explain their answers, actions necessary for the development of generalization skills in functional contexts, thus highlighting the relevance of mediation in this process.

This analysis of the generalization process helped to observe that students when working with close cases could establish their first conjectures that they validate and extend as they explore more instances, as described by Ellis (2011). This dynamic process evolves through interaction and reasoning, allowing them to confront the indeterminate in a progressive and robust manner.

Specific Objective 2: *To describe the relationships between students' generalizations and the mediations performed by a researcher-teacher.*

In relation to the second specific objective (S.O.2), where we had to describe the relationship between generalizations and mediations, we observed the significant influence of mediations and the way students approached generalization tasks, highlighting the importance of effective pedagogical guidance in this process. We consider mediation as a conscious and meaningful educational interaction that seeks to facilitate the cognitive and affective development of the student (Ferreiro & Calderón, 2005). This intentional interaction between the mediator and the student influenced the generalization process.

Mediations played a fundamental role in stimulating and correcting students in front of generalization tasks in the domain of functional thinking (Hidalgo-Moncada & Cañadas, 2020; Ureña et al., 2019). Helping students to mobilize their knowledge and explain their solutions depended largely on the interventions or mediations performed by teachers (Da Ponte & Quaresma, 2016). We have highlighted that these mediating actions are a bridge that favors working with generalizations and have a considerable impact on students' generalization ability (Ureña et al., 2019).

We have identified specific mediations that have proven effective in aiding the generalization process in students. Among these mediations are the posing of reflective questions and the presentation of specific mathematical challenges (inviting and challenging mediations) are some mediations. Our research highlights how researcher-teacher instructions and interventions have a direct influence on the quality and nature of students' generalizations. These findings evidenced specific links between teacher actions and student responses, demonstrating how mediations directly impact student strategies and responses.

We observed the adaptability that mediations have with individual student needs, adjusting to each student's responses and level of understanding. In addition, certain forms of mediation were directly related to students' confidence and attitude toward generalization tasks. The relationship between mediation and mathematical self-efficacy was a relevant aspect detected in our research.

Specific Objective 3: *To characterize students' justifications when solving a generalization task.*

With respect to the third specific objective (S.O.3), we have made a characterization of the justifications made by students when facing generalization tasks. We focused on generalizations and justifications because these practices are fundamental to mathematical thinking (Dörfler, 2008; Kaput, 1999). This analysis provided insight into how students ground their answers. In the development of our work, we observed this existing relationship between students' justifications with the generalization process. We relate this idea to what was expressed by (Carraher et al., 2008) who expressed that generalization involves asserting that some property or technique holds for a large set of mathematical objects or conditions justification acts as a support for more productive generalization which, in turn, promotes the development of appropriate deductive arguments (Blanton, 2008; Ellis, 2011). It is the set of arguments that validate a conjecture and is crucial for the formulation of generalizations (Staples et al., 2012).

We identified similarities in the students' justifications, which ranged from the mere reproduction of rules or conjectures to the presentation of more elaborate arguments around the discovered relationships. We observed a variation in the sophistication of these justifications, from those based on examples with specific cases to those that expressed regularities applicable to any case, i.e., justifications that supported generalizations.

We observed a connection between the quality of justifications and conceptual understanding, noting that strong justifications are linked to better understanding. Justifications for our dissertation played a critical role in the students' generalization process. Without them, it would have been difficult for us to identify and understand the generalizations that emerged when solving the tasks, we presented to them. This aspect became a key component that not only validated the students' conjectures and answers, but also allowed us to distinguish between simple generalizations and more complex ones.

In this objective, moreover, we highlighted the impact of the researcher-teacher mediation on the justifications, promoting greater clarity and substantiation. The mediations performed by teachers or researchers, in combination with these justifications, played an essential role in the development and understanding of functional thinking.

These pedagogical tools, both justifications and mediations, work hand in hand to guide students toward a deeper understanding of mathematical regularities, which will allow them to move toward sophisticated generalizations.

Specific Objective 4: *To describe students' reasoning when solving a generalization task.*

In relation to the fourth specific objective (S.O.4), we have managed to provide a description of students' reasoning when facing generalization tasks, considering the phases of reasoning (abduction, induction, and generalization). Through this analysis we have described the strategies employed by students, providing insight into how they develop and apply the generalization process.

During this process, we identified and characterized the reasoning phases and generalizing actions carried out by the students, both in group sessions and in individual interviews. We highlight that abduction, induction and generalization are essential phases in the generalization process, as described in previous research (Cañadas & Castro, 2007; Rivera, 2010; Rivera & Becker, 2007; Torres et al. 2021).

We observed how collective responses became a fundamental factor in identifying, validating, and confirming the correct structure of the task, thus advancing the generalization process. Likewise, when examining the individual interviews, we noticed common patterns in the students' reasoning: the formulation of an initial conjecture in the abduction phase, followed by its maintenance throughout the generalization process. Furthermore, we evidenced that abduction was crucial in this process, allowing students to explore and discover first structures that responded to the cases presented. The induction phase provided them with the opportunity to identify the regularity of the task and adjust their conjectures through testing with other specific cases. Finally, although they faced difficulties in expressing generalization due to unfamiliarity with algebraic symbolism, they managed to identify the regularity, giving answers to the cases, suggesting their abilities to generalize.

7.2. Research Contributions

The purpose of our research was to contribute to the understanding of the development of functional thinking in elementary education. By exploring how different mathematical situations influence generalization, we have attempted to provide a more social view, including interaction, mediation, and justifications, on the process of generalization and how to integrate a teaching progression on functional thinking in the classroom. In addition, we believe that our research provides valuable input for designing tasks and activities that promote a more meaningful understanding of generalization in this specific context.

Our findings highlight the crucial role of mediations and justifications in the generalization process, evidencing their impact on the construction of functional thinking in elementary school students. The identified mediations, such as inviting and challenging, provide practical tools for teachers, allowing them to effectively guide the pedagogical intervention. In addition, we have shown that mediation can be essential for students with no previous experience in generalization to develop justification and mathematical reasoning skills. We emphasize mediation in the generalization process as an intrinsic social action in mathematical learning, which strengthens the understanding of the interaction between students and teachers, facilitating effective communication.

Likewise, our research confirms the relevance of the phases of reasoning during the generalization process studied in other antecedents (Cañadas & Castro, 2007; Rivera and Becker, 2010; Torre et al., 2021), offering a vision of how generalization is generated in students. These phases allow an effective sequencing of mathematical tasks, progressing from less complex activities to deeper challenges. These findings, in the same line as previous research, underline the importance of considering generalization as a social construction that is nurtured by mediation, justifications and progressive reasoning to facilitate the development of algebraic thinking in elementary school students.

7.3. Implications for Teaching

The study developed in this research report offers a contribution to the educational field and the Didactics of Mathematics, by delving into the process of generalization in elementary school students. This contribution is significant to the extent that it provides a detailed and applicable vision in the classroom, addressing how students develop this cognitive process.

One of the direct implications for teaching is the opportunity to provide teachers with a clear vision on how to integrate functional thinking into their pedagogical practices. This can be achieved by emphasizing methodologies such as mediations, actions that can encourage justification and active discussions, instances that will help to evidence the proposed generalizations. In addition to providing spaces during the sessions where students can explore and share conjectures. Likewise, we consider it essential to plan activities based on cases close to the students, since this allows them not only to explore, but also to generalize from their own experiences, thus facilitating the process of understanding and application. But, in addition, to take them to cases with quantities that allow them to extend the regularity they have identified. Integrating algebraic practices in the development of sessions related to algebraic thinking will benefit the teaching and learning process of students.

The research reveals that the social construction of learning is key in the development of algebraic thinking in early stages. Our findings point to the need for students to constantly explain their reasoning to their peers, thus promoting a collaborative environment where justification and exchange of ideas are fundamental to the generalization process.

Previous studies, cited in this research report, highlight the gaps in teacher training in algebraic thinking and the disconnect between classroom experiences on patterns and students' ongoing mathematical development. Therefore, this doctoral work offers an essential bridge between theory and practice, providing educators with concrete tools to address these deficiencies.

In summary, our work represents an aid in understanding the generalization process in elementary students and, above all, provides a set of pedagogical strategies and approaches directly applicable in the classroom (Kaput, 2005; Smith, 2003). The results of our research allow teachers not only to better understand the development of functional thinking in their students, but also to implement more effective and enriching practices to foster mathematical generalization from an early age.

7.4. Research Limitations and Open Lines

When analyzing the data from our research, we observed that we had some limitations. Although the results presented represent a contribution to the field of research in Didactics of Mathematics, the limitations in terms of the number of participants and the exploratory approach suggest caution when generalizing the results.

Another limitation was not considering representation in our analysis. Generalization and representation are intrinsically linked in algebraic thinking, as mentioned by Cooper and Warren (2011). In our studies we observed how the use of representations in different statements could somehow influence students' generalization. This aspect highlights the importance of considering representations as a key tool in the development of algebraic thinking at early ages. One of our future aspirations is to further examine functional thinking by integrating the four algebraic practices (justification, representation, reasoning, and generalization) which may further extend our understanding of how students develop their generalization ability.

In this paper we have focused on medication as a process between the student and the researcher-teacher. For future research, we would be interested in investigating peer mediation in the generalization process and how this interaction between students impacts the resolution of certain generalization tasks. Also, we consider investigating how affective aspects such as confidence, motivation, and students' sociocultural background may influence generalization ability.

REFERENCIAS

Afonso, D. y Mc Auliffe, S. (2019). Children's capacity for algebraic thinking in the early grades. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *23*(2), 219-232. https://doi.org/10.1080/18117295.2019.1661661

Aliseda, A. (2000). Abduction as epistemic change: A Peircean model in artificial intelligence. En P. A. Flach y A. C. Kakas. *Abduction and induction: Essays on their relation and integration* (Vol. 18, pp. 45-58). Springer Science y Business Media. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0606-3_3

Alzate, M. V., Arbelaez, M. C., Gómez, M. Á., Romero, F. y Gallón, H. (2005). Intervención, mediación pedagógica y los usos del texto escolar. *Revista iberoamericana de educación*, *37*(3),1-15. https://doi.org/10.35362/rie3732709

Alzate-Ortiz, F. A. y Castañeda-Patiño, J. C. (2020). Mediación pedagógica: Clave de una educación humanizante y transformadora. Una mirada desde la estética y la comunicación. *Revista Electrónica Educare*, *24*(1), 411-424. https://doi.org/10.15359/ree.24-1.21

Ayala-Altamirano, C. (2021). *Concepción y representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(7), 1271-1291. https://dx.doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021a). Fourth graders' justifications in early algebra tasks involving a functional relationship. *Educational Studies in Mathematics*, *107*(2), 359-382. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10036-1

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2021b). El proceso de generalización y la generalización en acto. Un estudio de casos. *PNA*, *15*(3), 211-241. https://doi.org/10.30827/pna.v15i3.18109

Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Ambrose, R. (2022a). Fourth graders' expression of the general case. *ZDM Mathematics Education*, *54*(6), 1377-1392. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01398-8

Ayala-Altamirano, C., Pinto, E., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2022b). Interacting with indeterminate quantities through arithmetic word problems: Tasks to promote algebraic thinking at Elementary School. *Mathematics 10*(1), 2229. https://doi.org/10.3390/math10132229

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas* [Testing processes in mathematics students]. Una Empresa Docente.

Becker, J. y Rivera, F. (2009). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 9-16). PME

Bieda, K., Conner, A., Kosko, K. W. y Staples, M. (Eds.). (2022). *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Bieda, K. N. y Staples, M. (2020). Justification as an equity practice. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12, 113*(2), 102-108. https://doi.org/10.5951/MTLT.2019.0148

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511-558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M. Rena Stroud, Fonger, N. L. y Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.) *Teaching and learning algebraic thinking with*

5- to 12-year-olds. ICME-13 Monographs (pp. 27–49). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_2

Blanton, M., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E. y Gardiner, A. M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics*, *102*, 193-219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2004) Elementary grades students 'capacity for functional thinking. En A. Berit y M. Johnsen (Eds.), *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen University College.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elemntary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.

Brizuela, B. M. (2023). Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 43-57). SEIEM.

Brizuela, B. M. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología-Segunda época*, *14*, 37-57.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton, *Algebra in the early grades* (pp. 273-302). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-13

Brizuela, B. M., Martinez, M. V. y Cayton-Hodges, G. A. (2013). The impact of early algebra: Results from a longitudinal intervention. *Journal of Research in Mathematics Education/ Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (REDIMAT), 2*(2), 209-241. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.28

Brizuela, B. M. y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds), *Proceedings of the 27th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th conference of Psychology of Mathematics Education North America*, (Vol. 2, pp. 137-144). College of Education, University of Hawaii.

Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, *22*(3), 55-86.

Callejo, M. L., Fernández, C. y García-Reche, Á. (2019). Cognitive apprehension in visual pattern generalization problems/Aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones visuales. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje*, *42*(4), 783-828. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1652447

Canales, F. H. D., Alvarado, E. L. D. y Pineda, E. B. (1994). *Metodología de la investigación: Manual para el desarrollo de personal de salud*. Organización panamericana para la salud.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañadas, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 73*, 7-13.

Cañadas, M. C. (2023). Una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, y P. Ivars. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 3-9). SEIEM.

Cañadas, M. C., Blanton, M. y Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking/Número especial sobre el pensamiento algebraico temprano. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 469-478. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638569

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2004). Razonamiento inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 1-12). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA*, *1*(2), 69-81. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6213

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2009). Utilización de un modelo para describir el razonamiento inductivo de los estudiantes en la resolución de problemas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 261-278.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2012a). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *15*, 561-573.

Cañadas, M. C., Dooley, T., Hodgen, J. y Oldenburg, R (2012b). CERME7 Working Group 3: Algebraic thinking, *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 189-190. http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2012.694284

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D., Martinez, M. y Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 479-522. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570

Carrera, B. y Mazzarella, C. (2001). Vygotsky: Enfoque sociocultural. *Educere*, *5*(13), 41-44.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *54*, 55-67.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *6*(2), 1-13. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13

Castro, E., Cañadas, M. C., Molina, M. y Rodríguez-Domingo, S. (2021). Dificultties in semantically congruent translation of verbally and symbolically represented algebraic statements. *Educational Studies in Mathematics*, *109*, 593-609. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10088-3

Cetina-Vázquez, M. y Cabañas-Sánchez, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias*, *40*(1), 65-86. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3096

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics*, *98*, 57-76. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9803-x

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2021). The impact of two different types of instructional tasks on students’ development of early algebraic thinking. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje*, *44*(3), 503-552.https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1778280

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2023). Unfolding algebraic thinking from a cognitive perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 1-20. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10218-z

Chrysostomou, M. B. y Christou, C. (2019). Analysing the notion of algebraic thinking based on empirical evidence. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 721-781. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604022

Chua, B. L. (2017). A framework for classifying mathematical justification tasks. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 115-122). DCU Institute of Education & ERME.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). Research methods in education (eight edition). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.). *The Cambridge handbook of the learning sciences* (pp. 135-152). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511816833.010

Cooper, T. y Warren, E. (2011). Year 2 to Year 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187–214). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_12

Corbin, J. M. y Strauss, A. (1990). A tierra la teoría de la investigación: procedimiento, cánones y criterios de evaluación. *Sociología Cualitativa, 13*(1), 3-21.

Cortés, M. E. C. y León, M. I. (2004). *Generalidades sobre metodología de la investigación*. Universidad Autónoma del Carmen.

Da Ponte, J. P., Mata-Pereira, J. y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, XXII* (2), 55-81.

Da Ponte, J. P., Quaresma, M. y Mata-Pereira, J. (2017). The challenge of mathematical discussions in teacher's professional practice. *Didacticae, 1*, 45-59.

Dörfler, W. (2008). En ruta de los patrones al álgebra: Comentarios y reflexiones. *ZDM-Mathematics Education*, *40*, 143-160. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0071-y

Driscoll, M. J. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Heinemann.

Ellis, A. B. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics education*, *38*(3), 194-229.

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G., Ozimek, D. J. y Rebello, N. S. (2004). The Teaching Experiment-What it is and what it isn’t. En J. Marx, S. Franklin y K. Cummings AIP conference proceedings (pp. 157-160). American Institute of Physics. https://doi.org/10.1063/1.1807278

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los errores en el aprendizaje de matemática. *Revista Premisa*, *6*(23), 23-32.

Escobar, N. (2011). La mediación del aprendizaje en la escuela. *Acción Pedagógica*, *20*, 58-73.

Ferreiro, R. y Calderón, E. (2005). ABC del aprendizaje cooperativo. *Trabajo en Equipo para enseñar y aprender*. Trillas

Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Pirámide

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Gaita, R. y Wilhelmi, M. R. (2019). Desarrollo del razonamiento algebraico elemental mediante tareas de recuento con patrones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*, 269-289. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a13

Goldin, G. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *Roles of* *representations in school mathematics, 2001 Yearbook* (pp. 1-23). National Council of Teachers of Mathematics.

Goñi-Cervera, J., Cañadas, M. C. y Polo-Blanco, I. (2022). Generalisation in students with autism spectrum disorder: an exploratory study of strategies. *ZDM-Mathematics Education*, *54*(6), 1333-1347. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01415-w

Haidar, J. (2003). El campo del discurso. Reflexiones epistemológicas, teóricas y metodológicas. En C. Thomsen (Coord.) *Horizontes de comunicación y cultura* (pp. 79-110). Universidad Intercontinental.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Education Studies in Mathematics*, *44*, 5-23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). McGraw-Hill.

Hidalgo-Moncada, D. (2018). *Proceso de generalización de estudiantes de 6° de educación primaria: respuestas inadecuadas, intervenciones y efectos*. Trabajo Fin de máster. Universidad de Granada.

Hidalgo-Moncada, D. y Cañadas, M. C. (2020). Intervenciones en el trabajo con una tarea de generalización que involucra las formas directa e inversa de una función en sexto de primaria. *PNA*, *14*(3), 204-225. https://doi.org/10.30827/pna.v14i3.11378

Hunter, J. y Miller, J. (2022a). The use of cultural contexts for patterning tasks: Supporting young diverse students to identify structures and generalise. *ZDM – Mathematics Education*, *54*(6), 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Hunter, J. y Miller, J. (2022b). Using a culturally responsive approach to develop early algebraic reasoning with young diverse learners. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1-21.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput. J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kaput, J. J. (2017). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Routledge.

Karam, T. (2005). Una introducción al estudio del discurso y al análisis del discurso. *Global Media Journal México, 2*(3), 0.

Keila N y Parra F. (2014). El docente y el uso de la mediación en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Revista de Investigación, 83*(38), 155-180.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *Proceedings of 8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271-290). SAEM Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139-151.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching* (pp. 3-32). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Kilpatrick, J. (2011). Commentary on Part I. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 125-130). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_8

Lachiche, N. (2000). Abduction and induction from a non-monotonic reasoning perspective. En P. A. Flach y A. C. Kakas (Eds.), *Abduction and induction: Essays on their relation and integration* (Vol. 18, pp. 107-116). Springer Science y Business Media. https://doi.org/10.1007/978-94-017-0606-3_7

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, *7*(3), 231-258. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0703_3

Lin, P. J. y Tsai, W. H. (2016). Enhancing students' mathematical conjecturing and justification in third-Grade classrooms: The sum of even/odd numbers. *Journal of Mathematics Education*, *9*(1), 1-15.

Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación matemática*, *26*, 31-51.

Llinares, S., Valls, J. y Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 59-82.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in Primary Education. En C. Anderson, N. Scheuer, P. Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools in different fields of learning* (pp. 133-148). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087905286_009

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja. *Revista EMA 4*(3), 232-246.

Mason, J. (2017). Overcoming the algebra barrier: being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (Ed). *And the rest is just algebra* (pp. 97-117). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Mason, J. (2018). How early is too early for thinking algebraically? En C. Kieran (Ed), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*, 329-350. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2° edición). Pearson Education Limited.

Mason, J. y Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289. https://doi.org/10.1007/BF00312078

Mata-Pereira, J. y Da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 169-186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4

Mata-Pereira, J. y da Ponte, J. P. (2019). Enhancing students' generalizations: A case of abductive reasoning. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 598-605). Freudenthal Group y Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://www.mathematik.tu-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME11_Proceedings_2019.pdf

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). Investigación educativa: Una introducción conceptual. (5ª edición). Pearson Educación S.A.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por estudiantes de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, A. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). SEIEM.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE, 56*, 2438624504.

Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Autor.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, J. Da Ponte, (Eds.), *EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra*. Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matemática (pp. 27-51). EIEM.

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 17*(3), 559-579.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 75-88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa. Guía didáctica*. Universidad Surcolombiana.

Morales, R. y Cañadas, M. C. (2017). *Acciones que ayudan a estudiantes de segundo de educación primaria cuando incurren en errores en una tarea de pensamiento funcional*. Trabajo presentado en grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM. En XXI Simposio de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Zaragoza, España.

Morales, R., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de 6-7 años en tareas de seriaciones. *PNA*, *11*(4), 233-252. https://doi.org/10.30827/pna.v11i4.6241

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de estudiantes de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Moreno, A., Pinto, E. y Molina, M. (2017). Introduciendo las funciones en primaria. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 641-648). Madrid, España: FES.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., Kemp, C., Marston, J. y Highfield, K. (2008). Encouraging mathematical thinking through pattern and structure: An intervention in the first year of schooling. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *13*(3), 10-15.

Mulligan, J., Oslington, G. y English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM-Mathematics Education*, *52*(4), 663-676. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01147-9

Narváez, R. (2020). *Mediación en el proceso de generalización de estudiantes de segundo de educación primaria*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

Narváez, R. y Cañadas, M. C. (2021). Mediaciones utilizadas con estudiantes de segundo y cuarto de primaria al realizar una tarea de generalización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez., M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 465-472). SEIEM.

Narváez, R. y Cañadas. M. C. (2023). Mediaciones realizadas a estudiantes de segundo de primaria en una tarea de generalización. *PNA*, *17*(3), 239-264. https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24153

Narváez, R., Adamuz-Povedano, N. y Cañadas, M.C. (2023). Análisis de la producción científica sobre pensamiento algebraico. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 411–418). SEIEM.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Obando-Arias, M. (2021). Mediación pedagógica del aprendizaje a partir de la pregunta generadora en la educación media: Aprendizaje basado en proyectos. *Revista Electrónica Educare*, *25*(2), 383-403. https://doi.org/10.15359/ree.25-2.21

Otten, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M. y Heinze, A. (2019). Developing algebraic reasoning in primary school using a hanging mobile as a learning supportive tool. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 615-663. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1612137

Palmer, H. y Bommel, J. (2016). Exploring the role of representations when young children solve a combinatorial task. En J. Häggström, E. Norén, J. Bommel, J. Sayers, O. Helenius y Y. Liljekvist (Eds.), *Proceedings of MADIF 10 The Tenth Research Seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education* (pp. 47-55). Swedish Society for Research in Mathematics Education.

Pang, J. y Sunwoo, J. (2022). Design of a pattern and correspondence unit to foster functional thinking in an elementary mathematics textbook. *ZDM-Mathematics Education*, *54*(6), 1315-1331. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01411-0

Pang, J., SunWoo, J. y Kim, E. (2017). An analysis of'patterns and correspondence'in the elementary mathematics textbooks aligned to the 2007 and 2009 revised curriculum. *School Mathematics*, *19*(1), 117-135. https://doi.org/10.7468/jksmec.2016.19.1.1

Parra F. y Keila N. (2014). El docente y el uso de la mediación en los procesos de enseñanza y aprendizaje. *Revista de Investigación*, *38*(83), 155-180.

Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pinnock, E. (2021). Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds: The global evolution of and emerging field of research and practice. *Research in Mathematics Education*, *23*(2), 226-230. https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1725613

Pinto, E. (2019). *Generalización de estudiantes de 3° a 6° de educación primaria en un contexto funcional del álgebra escolar*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Pinto, E. y Ayala-Altamirano, C. (2021). Álgebra más allá de letras y números: Oportunidades para desarrollar el pensamiento algebraico en la Educación Primaria. *Tangram–Revista de Educação Matemática*, *4*(4), 35-48. https://doi.org/10.30612/tangram.v4i4.15415

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(1), 0149-173. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: Un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018a). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 457- 466). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2018b). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, *12*(3), 173-184. https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6643

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2019). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Journal of Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. L. González, P. Hernández, A. Jiménez, J. A. Macías, F. J. Ruiz y M. T. Sánchez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Universidad de Málaga.

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(6), 1183-1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariation thinking and correspondence relation. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(5), 631-674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics, 42*, 237-268. https://doi.org/10.1023/A:1017530828058

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62. https://doi.org/10.30827/pna.v4i2.6169

Radford, L. (2011). Grade 2 students´ non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. y Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. *In Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education, North American chapter* 1, pp. 2-21).

Ramírez, R., Brizuela, B. M. y Ayala-Altamirano, C. (2022). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal*, *34*(2), 317-341. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Ramírez, R., Cañadas, M. C. y Damián, A. (2022). Structures and representations used by 6th graders when working with quadratic functions. *ZDM Mathematics Education*, *54*, 1393-1406 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01423-w

Real Academia Española (2023). Razonar. *En Diccionario de la lengua española*. Recuperado en 08 de noviembre de 2023, de https://dle.rae.es/razonar

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA [Mathematical competence in PISA]. *PNA*, *1*(2), 47–66. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6215

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14 https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172

Rodríguez, A., Sánchez-Álvarez, M. y Rojas de Chirinos, B. (2008). La mediación, el acompañamiento y el aprendizaje individual. *Investigación y Postgrado*, *23*(2), 349-381.

Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, *9*(4), 273-293. https://doi.org/10.30827/pna.v9i4.6099

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En A. P. Gallego (Ed.), *Memorias del 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 760-766). Universidad Distrital.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por estudiantes de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2*(2), 61-74. https://doi.org/10.30827/pna.v2i2.6201

Salgado, M. y Salinas, M. J. (2012). El razonamiento inductivo como generador de la construcción del número en 5 años. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 119-125). SEIEM.

Sarduy, A. (2008). Bases conceptuales de la mediación y su importancia actual en la práctica pedagógica. *Summa Psicológica UST*, *5*(2), 87-96. https://doi.org/10.18774/448x.2008.5.214

Scheuer, N., Sinclair, A., de Rivas, S. M. y Christinat, C. T. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Journal for the Study of Education and Development/Infancia y Aprendizaje*, 23(90), 31-50. https://doi.org/10.1174/021037000760087955

Schifter, D. y Russell, S. J. (2022). The centrality of student-generated representation in investigating generalizations about the operations. *ZDM-Mathematics Education*, *54*(6), 1289-1302. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01379-x

Selling, S. K. (2016). Learning to represent, representing to learn. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 191-209 https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.003

Simon, M. A. y Blume, G. W. (1996). Justification in the Mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematics Behavior, 15*(1), 3-31. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90036-X

Staples, M. (2014). *Supporting student justification in middle school mathematics classrooms: Teachers' work to create a context for justifications*. CERME Publications.

Staples, M. E., Bartlo, J. y Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(4), 447-462. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.07.001

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Erlbaum.

Strachota, S. (2015). Conceptualizing generalization. *IMVI Open Mathematical Education Notes*, 6, 41-55.

Strachota, S. (2020). Generalizing in the context of an early algebra intervention. *Journal for the Study of Education and Development*, *43*(2), 347-394. https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1732611

Strachota, S., Stephens, A., Morton, K., Veltri-Torres, R., Blanton, M., Gardiner, A. M., Sung, Y., Stroud, R. y Knuth, E. (2023). How tools mediate elementary students' algebraic reasoning about evens and odds. *Mathematics Education Research Journal*, 1-26. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00457-x

Stylianou, D. A., Stroud, R., Cassidy, M., Knuth, E. J., Stephens, A. C., Gardiner, A. M. y Demers, L. (2019). Putting early algebra in the hands of elementary school teachers: examining fidelity of implementation and its relation to student performance. *Journal for the Study of Education and Development*/*Infancia y Aprendizaje*, *42*(3), 545-569. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604021

Swan (2020). Design research in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 192-195). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_180

Thanheiser, E. y Sugimoto, A. (2022). Justification in the context of Elementary Grades: Justification to Develop and provide access to mathematical reasoning. En K.N. Biedan, A. Conner, K.W. Kosko y M. Staples (Eds.), *Conceptions and consequences of mathematical argumentation, justification, and proof* (pp. 35-48). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6_4

Torres, M. D. (2022). *Generalización, estructura y representaciones de estudiantes de segundo de primaria desde un enfoque funcional del early algebra.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM.

Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021b). Generalization process by second grade students. *Mathematics 9*,1109. https://doi.org/10.3390/math9101109

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: Estructuras y representaciones. *PNA, 16*(3), 215-236. https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637

Torres, M. D., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Gómez, P. (2021a). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años. *Uniciencia, 35*(2), 237-252. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.16

Twohill, A. (2018). Observations of structure within shape patterns. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 213-236). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_9

Ureña, J. (2021). *Representaciones de generalización y estrategias empleadas en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales. Una investigación con estudiantes de primaria y secundaria.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation. *Journal for the Study of Education and Development, Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 570-614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020

Ureña, J., Ramírez, R., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2022). Generalization strategies and representations used by final-year elementary school students. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-21. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2058429

Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2023). Generalization: Strategies and representations used by sixth to eighth graders in a functional context. *Mathematics Education Research Journal*, 1-27. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00458-w

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática 18*(3), 5-38.

Usiskin, Z. (1998). Conceptions of school algebra and uses of variables. *Algebraic Thinking, Grades K–12, 8*, 7-13.

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior, 62*, 100866. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377-384). PME.

Warren, E. y Cooper, T. J. (2005). Introducing functional thinking in year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162. https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students functional thinking. *PNA*, *7*(2), 75-84. https://doi.org/10.30827/pna.v7i2.6131

Wijns, N., Torbeyns, J., De Smedt, B. y Verschaffel, L. (2019). Young children's patterning competencies and mathematical development: A review. *Mathematical learning and cognition in early childhood: Integrating interdisciplinary research into practice*, 139-161. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12895-1_9

Wijns, N., Verschafel, L., De Smedt, B., De Keyser, L. y Torbeyns, J. (2021). Stimulating preschoolers' focus on structure in repeating and growing patterns. *Learning and Instruction*, *74*, 101444. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2021.101444

Wilkie, K. J. y Ayalon, M. (2018). Investigating Years 7 to 12 students' knowledge of linear relationships through different contexts and representations. *Mathematics Education Research Journal*, *30*, 499-523. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0236-8

Yao, X. (2022). Representation transformations in transition from empirical to structural generalization. *The Journal of Mathematical Behavior*, *66*, 100964. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100964

ANEXOS

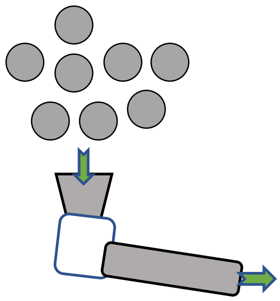
Anexo A: Cuestionario segundo de primaria, sesión 0.

CUESTIONARIO INICIAL - 2º

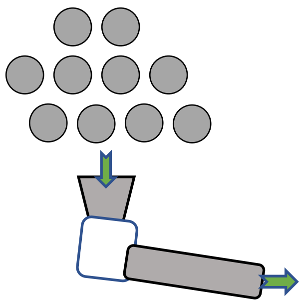
Nombre y apellidos:____

PARTE 1

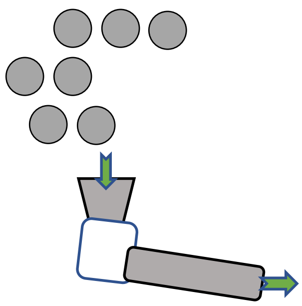
1. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 8 bolas? _______ bolas.



2. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 10 bolas? ______ bolas.



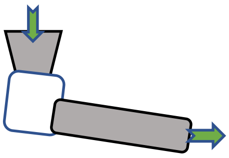
3. ¿Cuántas bolas saldrán de la máquina si metemos 7 bolas? _______ bolas.



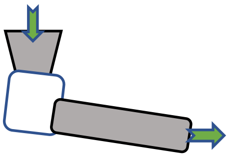
CUESTIONARIO INICIAL - 2º

Nombre y apellidos:____

4. Pon el número de bolas que tú quieras al principio de la máquina. ¿Cuántas bolas salen?



5. Pon el número de bolas que crees que saldrán de la máquina en la siguiente situación. _______ bolas.



6. Ahora vamos a hacer un juego en el que gana quien averigüe cómo funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuántas bolas salen de la máquina?

CUESTIONARIO INICIAL - 2º

Nombre y apellidos:____

PARTE 2

7. Rodea con lápiz si las siguientes frases son verdaderas o falsas.

(a) Si en la máquina metes cuatro bolas, salen 7 bolas.

Verdadera Falsa

(b) En la máquina siempre salen dos bolas más que las bolas que has metido.

Verdadera Falsa

(c) En la máquina siempre salen tres bolas más que las bolas que has metido.

Verdadera Falsa

(d) En la máquina siempre sale el doble del número de bolas que de bolas que has metido.

Verdadera Falsa

(e) Si meto A bolas en la máquina, salen A bolas.

Verdadera Falsa

(f) Si meto A bolas en la máquina, salen A+1 bolas.

Verdadera Falsa

(g) Si meto A bolas en la máquina, salen A+3 bolas.

Verdadera Falsa

Anexo B: Protocolo de entrevista inicial para segundo de primaria

Protocolo entrevista – 2º de primaria

I. Identificación

Nombre del entrevistado: ____ Clase: _______________ Fecha: _________________

Nombre del entrevistador: ____

Hora de inicio: _________________________ Hora de finalización: _________________________

Justificación del estudiante seleccionado: ____

II. Focos de entrevista

A partir de las respuestas al cuestionario escrito, marcar con una **X** qué elementos se sugiere profundizar.

- [ ] **Función directa** (Preguntas 1-4, parte 1)
- [ ] **Interpretación de lo indeterminado** (Pregunta 5, parte 1)
- [ ] **Proceso de generalización** (Pregunta 6, parte 1)
- [ ] **Función inversa** (preguntas b, c, y d, parte 2)
- [ ] **Uso de letras** (Preguntas e, f y g, parte 2)

Acciones "sin ayuda"

- Repetición de la pregunta.
  - Igual
  - Variando
  - Destacando algunos elementos
- Repetición de la respuesta o una síntesis de la última respuesta.
  - Acción eco.
  - Resumen.
- Estímulo con expresiones de interés.
  - Verbal
  - Gestos
- Pausa
- Solicitar profundizar
- Aclaración de lenguaje

III. Protocolo y registro.

Mencione lo siguiente "[***nombre del estudiante***] **A continuación, te realizaré algunas preguntas que tienen relación con las respuestas que nos entregaste al problema de las bolas y la máquina que trabajamos hace unos días. Las preguntas que te realizaré son solo para conocer tu pensamiento y comprender qué realizaste en cada pregunta. Si tienes alguna pregunta, puedes hacerla cuando quieras. Al finalizar, te pediremos que no las compartas con tus compañeros para que todos puedan responder según sus propias ideas.**

Función directa			
1. INTRODUCCIÓN *Objetivo: Recordar la regla funcional del problema presentado.*			
	Guión	Observaciones sobre la pregunta	Acciones para ayudar
	Presentar la máquina. **¿Recuerdas cómo funcionaba esta máquina.**		
a. Sí	- ¿me darías dos ejemplos? (por ejemplo, si entran 4 bolas). - ¿qué hiciste para obtener esa respuesta? Explícame tu pensamiento.	Ejemplos correctos: ir a 2.b; 2.a; 2.c. Ejemplo incorrecto: ir a 1.b	
b. No	- Recordar y mostrar los ejemplos (C.P. 1, 2, 3 y 4). - ¿qué relación existe entre las bolas que entran y salen? - Preguntar. Si entran 4 bolas, ¿cuántas saldrían? - ¿Qué hiciste para obtener esa respuesta? Explícame tu pensamiento	Si lo hace bien: ir a 2a; 2b; 2c) Incorrecto: fin	- Reformular la pregunta. ¿Qué operaciones realizas para conocer la cantidad de bolas que salen? - Organizar los datos en una tabla de T. ¿Qué relación observas entre las cantidades?
2. REGLA FUNCIONAL EN CASOS PARTICULARES			

Acciones "sin ayuda"

- Repetición de la pregunta.
  - Igual
  - Variando
  - Destacando algunos elementos
- Repetición de la respuesta o una síntesis de la última respuesta.
  - Acción eco.
  - Resumen.
- Estímulo con expresiones de interés.
  - Verbal
  - Gestos
- Pausa
- Solicitar profundizar
- Aclaración de lenguaje

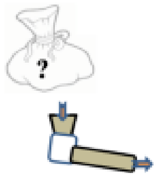
<table>
<tr><td colspan="6">Objetivo: Aplicar regla funcional en casos particulares diferentes.</td></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Guión</td><td>Observaciones sobre la pregunta</td><td>Acciones para ayudar</td></tr>
<tr><td></td><td>Menor 20</td><td>Entre 20 y 100</td><td>Mayor 100</td><td rowspan="7">Corroborar que responda bien planteando ejemplo de los tres rangos numéricos.</td><td rowspan="7">- Cambiar el ámbito numérico
- Cambiar la forma de preguntas por caso particular (número dado, pregunta de evaluación, número inventado por el estudiante).</td></tr>
<tr><td colspan="4">Casos particulares dados.</td></tr>
<tr><td>- Si entran (____)bolas, ¿cuántas debieran salir?/ Si entran (____), ¿qué número sale?
- ¿Qué hiciste para obtener esa respuesta? Explícame tu pensamiento.</td><td>(Aquí proponer números)</td><td>(Aquí proponer números)</td><td>(Aquí proponer números)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Casos particulares del estudiante.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Dime un número (______). Si colocas ese <u>número de bolas</u>, ¿cuántas bolas debieran salir? ¿Qué número debería salir? Explícame tu pensamiento.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Caso particular de un tercero.</td></tr>
<tr><td>- Otro niño de la clase dice “si entran XX bolitas, debieran salir YY”. ¿Estás de acuerdo con él?
- ¿Qué hiciste para obtener esa respuesta? Explícame tu pensamiento.</td><td>(Aquí proponer números)</td><td>(Aquí proponer números)</td><td>(Aquí proponer números)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Observaciones generales</td></tr>
</table>

Acciones “sin ayuda”

- Repetición de la pregunta.
  - Igual
  - Variando
  - Destacando algunos elementos
- Repetición de la respuesta una síntesis de la última respuesta.
  - Acción eco.
  - Resumen.
- Estímulo con expresiones de interés.
  - Verbal
  - Gestos
- Pausa
- Solicitar profundizar
- Aclaración de lenguaje

3. LO INDETERMINADO Y USO DE LA LETRA – Función directa

Objetivo: Identificar las ideas de los estudiantes sobre las letras y su uso en contextos funcionales.

Guión	Observaciones sobre la pregunta	Acciones para ayudar
a. Cantidades indeterminadas **(Volver a plantear pregunta 5 cuestionario 2º)** 5. Pon el número de bolas que crees que saldrán de la máq siguiente situación. ______ bolas. 	- Ver preguntas → - Si no se le ocurre nada → fin.	- Si el niño no sabe usar el signo de ¿? preguntar: - **¿qué podemos usar al principio de la máquina para indicar que entra un número de bolas?** - **¿qué podemos usar al final para indicar que lo que sale?** - Si es solo verbal → incitarlo al uso de una representación recordar preguntas de cuestionario.
b. Generalización **(Volver a plantear pregunta 6 cuestionario 2º)** 6. Ahora vamos a hacer un juego en el que gan- funciona la máquina. ¿Cómo puedes saber cuár máquina?	- Tanteo libre → si llega al simbolismo, OK. Si no se le ocurre nada → fin.	- Si es solo verbal → incitarlo al uso de una representación recordar preguntas de cuestionario. **INDAGAR EN PREGUNTAS A PARTE OPCIONAL (VERDADEROS Y FALSOS)** **Otras preguntas:** ¿Habías visto o usado las letras antes en matemáticas? ¿Para qué crees que se usan las letras?

Acciones "sin ayuda"

- Repetición de la pregunta.
  - Igual
  - Variando
  - Destacando algunos elementos
- Repetición de la respuesta o una síntesis de la última respuesta.
  - Acción eco.
  - Resumen.
- Estímulo con expresiones de interés.
  - Verbal
  - Gestos
- Pausa
- Solicitar profundizar
- Aclaración de lenguaje

Anexo C: Cuestionario cuarto de primaria, sesión 1

Nombre y apellidos:____

Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras.
En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 2 euros.

1. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 1 viaje?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

2. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 4 viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

3. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 20 viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

4. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 11 viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

5. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 35 viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

6. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

7. ¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar un millón de viajes?

   ¿Cómo lo sabes?

   ____

   ____

8. Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado.

   ____

   ____

   ____

   ____

Anexo D: Protocolo de entrevista final para cuarto de primaria

Protocolo de entrevista final

I. Identificación

Nombre del entrevistado: ____ Clase: _________________ Fecha: ___________________

Nombre del entrevistador: ____

Hora de inicio: ___________________________ Hora de finalización: ___________________________

Justificación del estudiante seleccionado: ____

II. Focos de entrevista

Si en los cuestionarios anteriores no ha quedo alguna respuesta clara, marcar con una **X** qué elementos profundizar.

	Función directa: Exploración de casos particulares
	○ Identificar relación funcional.
	○ Aplicar regla funcional en casos particulares diferentes.
	    ○ Casos particulares dados.
	    ○ Casos particulares propuestos por estudiante.

	Función directa: Proceso de generalización ○ Expresar la generalización ○ Razonar con la generalización[1]

	Función directa: Cantidades indeterminadas
	○ Expresar ideas sobre casos que incluyen cantidades indeterminadas.
	○ Interpretar casos en los que se utilizan letras.
	    ○ Letras propuestas por los estudiantes.
	    ○ Letras propuestas por el entrevistador.

	Organizar información en una tabla

Acciones "sin ayuda"

- Repetición de la pregunta.
  - Igual
  - Variando
  - Destacando algunos elementos
- Repetición de la respuesta o una síntesis de la última respuesta.
  - Acción eco.
  - Resumen.
- Estímulo con expresiones de interés.
  - Verbal
  - Gestos
- Pausa
- Solicitar profundizar
- Aclaración de lenguaje

[1] Basado en el trabajo (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey, & Newman-Owens, 2017) . Ellos proponen "Explore how students reason with the generalization" Sample questions: If your friend said he had 5 dogs and counted 6 dog noses, do you think he counted correctly? How do you know?

	Función inversa: Exploración de casos particulares
	○ Identificar relación funcional.
	○ Aplicar regla funcional en casos particulares diferentes.
	    ○ Casos particulares dados.
	    ○ Casos particulares propuestos por estudiante.

	Organizar información en una tabla

III. Protocolo y registro.
Mencione lo siguiente "[*nombre del estudiante*] A continuación, te realizaré algunas preguntas que tienen relación con el cumpleaños de Isabel. ¿Recuerdas que estuvimos hablando de ella las semanas anteriores? Las preguntas que te realizaré son solo para conocer tu pensamiento y comprender qué realizaste. Si tienes alguna pregunta, puedes hacerla cuando quieras. Al finalizar, te pediremos que no las compartas con tus compañeros para que todos puedan responder según sus propias ideas.

NOTA: A continuación se presentan dos situaciones, la primera trabaja la función 3x + 1 y la segunda 3x. En caso de notar dificultades en los estudiantes para comprender la primera función, proseguir la entrevista con la segunda.

Opción 1: Tipo de función: aditiva y multiplicativa (3x + 1)

En el cumpleaños de Isabel le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado y colocarán un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños.

Opción 2: Tipo de función: multiplicativa (3x)
En el cumpleaños de Isabel solo usaran los globos para regalárselos a los invitados. Le regalarán la misma cantidad de globos a cada invitado.

1. **Explorar casos particulares y descubrir relación funcional**

Guion	**Acciones para ayudar**
Cuando hay 3 invitados, se necesitan 10 globos. Cuando hay 6 invitados, se necesitan 19 globos. Cuando hay 2 invitados, se necesitan 7 globos. Luego de presentar los casos, proponer el siguiente caso. En caso de que aun no capte la relación entre cantidad de invitados y globos, volver a los casos anteriores y llevar a cabo alguna acción de ayuda. Cuando hay 5 invitados, ¿cuántos globos necesita?	En caso que tengan problemas para comprender la situación: 1º Replantear los casos mostrando las imágenes (Anexo 1). Decir: En la imagen están los tres invitados y la puerta. También tenemos los 10 globos (material manipulativo). ¿Cómo repartió los globos Isabel? [Repetir esto con otros casos y preguntar qué tienen en común cada situación] 2º Si aun tienen problemas para comprender la situación, plantear la situación alternativa (3x).
Observaciones generales	

2. **Aplicar relación funcional**

Mostrar tabla de dos columnas en blanco (Anexo 2), organizar los ejemplos anteriores en la tabla. El objetivo no es que los estudiantes organicen la información, si sucede, bien. Pero el objetivo del uso de la tabla es organizar los casos que se presentan a los estudiantes.

<table>
<tr><th>Guion</th><th>Acciones para ayudar</th></tr>
<tr><td>Proponer otros casos para completar la tabla y pedirle que ellos también escriban algunos ejemplos. El entrevistador es quien los escribe en la tabla.

Si hay (____) invitados, ¿cuántos globos se necesitan?
Proponer algunos de los números que a continuación se sugieren, pues están pensados para que las adiciones no tengan llevadas. Los que sean necesarios según cada entrevista.
Recordar proponerlos sin seguir un orden ascendente o descendente.

Números menores a 20 →
1, 4, 5, 7, 8, 9, 10 [se puede contar con los dedos]
11, 12.
Mayores a 20 y menores a 100 →
20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33.
Múltiplos de 10 puede ser fácil en algunos caso.
Mayores a 100 →
Número formados con dígitos del 0 al 3.

Dime un número de invitados (______). Si Isabel invita a esas personas, ¿cuántos globos necesita? Explícame cómo lo has pensado.
</td><td>En caso que tengan problemas de cálculo, señalar que pueden dejar expresada la operación sin escribir la respuesta. Esto no es necesario escribirlo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales

</td></tr>
</table>

Proceso de generalización

Estos casos no registrarlos en la tabla. Considerar el uso de un folio nuevo.

Guion	Acciones para ayudar
Expresar la generalización Si invita a "muchos" invitados, ¿cuántos globos necesita? Si invita a "infinitos" invitados, ¿cuántos globos necesita? ¿Cómo le explicarías a XXXX qué debe hacer para conocer la cantidad de globos que se necesitan en el cumpleaños? ¿Siempre se calcula así?, ¿cómo lo sabes?	Proponer otros casos generales y que señale si son correctos o no, justificando su respuesta. "Si alguien te dice que calcula la cantidad de globos … ¿tu le dirías que es correcto o incorrecto?" o Sumando tres veces la cantidad de invitados. o Multiplicando por tres la cantidad de invitados. o Calcular el triple de invitados. o Sumando tres veces la cantidad de invitados y sumar un globo que se utiliza en la puerta. o Multiplicando por tres la cantidad de invitados y sumar un globo que se utiliza en la puerta. o Calcular el triple de invitados y sumarle uno. Relacionar lo que digan de manera verbal con expresiones numéricas, para corroborar que lo que verbalizan corresponde con los cálculos que harían.
Razonar con la generalización Otro niño de la clase dice que "Hay XX invitados, por lo que necesitaran YY globos. ¿Estás de acuerdo con él?	Pedir que realicen representaciones de la situación con dibujos, para que comprueben sus respuestas.
Esta preguntar realizar solo en caso que el estudiante entrevistado logra generalizar la relación antes propuesta. Si en la puerta pusieran dos globos, ¿qué harías para saber la cantidad de globos que necesitan?	
Observaciones generales	

Cantidades indeterminadas

<table>
<tr><th>Guion</th><th>Acciones para ayudar</th></tr>
<tr><td>Interpretar casos en los que se utilizan letras.

Letras propuestas por los estudiantes. Preguntar una vez y luego pasar a V y F.
Escoge una letra para representar una cantidad cualquiera de invitados. ¿Cuántos globos necesitarás? ¿Cómo podemos saber cuántos globos necesitará?

Si un compañero escoge una letra distinta a la tuya, ¿la cantidad de globos que se necesita es la misma?
Letras propuestas por el entrevistador.
Si hay R invitados, ¿cuántos globos se necesitan?
Si hay B invitados, ¿cuántos globos se necesitan?
Si hay Y invitados, ¿cuántos globos se necesitan?

¿Son correctas estas afirmaciones?, ¿por qué?

Cuando hay Z invitados, se necesitan Z + Z + Z globos.
Cuando hay Z invitados, se necesitan W globos.
Cuando hay Z invitados, se necesitan 3xZ + 1 globos.
Cuando hay Z invitados, se necesitan Z globos.

</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Observaciones generales</td></tr>
</table>

Función inversa
Presentar al final de la entrevista, solo si queda tiempo. No es necesario que lo registren en la tabla.

Guion	Acciones para ayudar
Pedirles que registren la información en la tabla. Cuando usan XXX globos, ¿cuántos invitados hay en el cumpleaños? • Casos fáciles. • Números pequeños • Números grandes.	
¿Cómo explicarías cómo calcular la cantidad de invitados su conoces la cantidad de globos que utilizaron?	
Observaciones generales	

Anexo E: Cuestionario cuarto de primaria, sesión 3

Completa la tabla con la información que falta.

Número de mesas	Número de cajas
6	
20	
9	
	2
	44
	30
2 000	
	10 000

Explica cómo lo sabes

Explica cómo lo sabes

Explica cómo lo sabes

Explica cómo lo sabes

Explica cómo lo sabes

Escribe aquí un número muy grande para ti

Escribe aquí un número muy grande para ti