Modelos univariantes lineales estacionarios

Tere García Muñoz (tgarciam@ugr.es)
Román Salmerón Gómez (romansg@ugr.es)
Alessio Gaggero (alessiogaggero@ugr.es)

Universidad de Granada
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Tema 2– Econometría 3
Grado en Económicas

AR(p)

En un proceso autorregresivo la variable en el periodo t es explicada por las observaciones de ella misma en los periodos anteriores más un término de perturbación. La expresión de un proceso autorregresivo de orden p ($AR(p)$) es:

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

donde

- δ es una constante
- $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p$ son denominados parámetros autorregresivos
- ε_t es un ruido blanco

Utilizando el operador retardo B:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) Y_t = \delta + \varepsilon_t$$

AR(1)

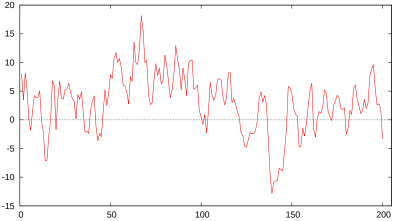
Definición

Un proceso estocástico $\{y_t\}$ sigue un modelo autorregresivo de orden 1, denotado por AR(1), si se puede escribir como

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \phi_p(B) Y_t = \delta + \varepsilon_t$$

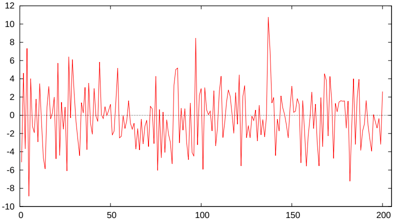
donde δ y ϕ son constantes y ε_t es un ruido blanco.

Representación de un proceso AR(1) con $\delta = 0$, $\phi = 0{,}8$ e $Y_0 = 5$



AR(1)

Representación de un proceso AR(1) con $\delta = 0$, $\phi = -0{,}3$ e $Y_0 = -2$



Proposición

- ε_t está incorrelado con los valores previos del proceso Y_t
- ε_t está correlado con los valores futuros del proceso Y_t

AR(1). Condición de Estacionariedad

Estacionariedad en Media

Si el proceso es estacionario en media se cumple que $E[Y_{t-i}] = \mu$, $\forall i \geq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} E[Y_t] &= E[\delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t] = \delta + E[\phi Y_{t-1}] + \underbrace{E[\varepsilon_t]}_{0} = \delta + \phi E[Y_{t-1}] \\ &\Rightarrow \mu - \phi\mu = \delta \Rightarrow (1-\phi)\mu = \delta \Rightarrow E[Y_t] = \mu = \frac{\delta}{1-\phi}. \end{aligned}$$

Esta expresión es finita si y solo si $\phi \neq 1$.

AR(1). Condición de Estacionariedad

Estacionariedad en Varianza

Si el proceso es estacionario en varianza se cumple que $Var[Y_{t-i}] = \gamma_0$, $\forall i \geq 0$. Entonces:

$$Var[Y_t] = Var[\delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t] = Var[\phi Y_{t-1}] + Var[\varepsilon_t] + 2 \cdot \underbrace{Cov(\phi Y_{t-1}, \varepsilon_t)}_{0}.$$

$$\begin{aligned} Var[Y_t] &= \phi^2 Var[Y_{t-1}] + Var[\varepsilon_t] \\ &\Rightarrow \gamma_0 - \phi^2\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow (1-\phi^2)\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}. \end{aligned}$$

$$\gamma_0 > 0, \sigma_\varepsilon^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - \phi^2 > 0 \Leftrightarrow |\phi| < 1$$

$$1 - \phi B = 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{\phi} \Leftrightarrow |B| > 1$$

AR(1). Condición de Estacionariedad

Función de autocovarianzas

Para poder operar con mayor facilidad se transformará el modelo como sigue:

$$E[Y_t] = \frac{\delta}{1-\phi} \Rightarrow \delta = E[Y_t](1-\phi).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación:

$$\begin{aligned} Y_t &= \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t = E[Y_t](1-\phi) + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &= E[Y_t] + \phi(Y_{t-1} - E[Y_t]) + \varepsilon_t, \end{aligned}$$

y entonces:

$$Y_t - E[Y_t] = \phi(Y_{t-1} - E[Y_t]) + \varepsilon_t. \tag{1}$$

Si se denota $Y_t - E[Y_t]$ como $\tilde{Y}_t$:

$$\tilde{Y}_t = \phi \tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t.$$

AR(1). Condición de Estacionariedad

Función de autocovarianzas

Proposición

Los momentos de primer y segundo orden de $\tilde{Y}_t$ verifican:

- $E[\tilde{Y}_t] = 0$.
- $Var[\tilde{Y}_t] = Var[Y_t] = \gamma_0$.
- $\widetilde{\gamma}_k = \gamma_k$.

Por tanto, los momentos de segundo orden de $\tilde{Y}_t$ e Y_t coinciden por lo que la obtención de la función de autocovarianzas de Y_t se puede realizar, de forma más sencilla, a partir de la función de autocovarianzas de $\tilde{Y}_t$.

AR(1). Condición de Estacionariedad

Función de autocovarianzas

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= Var[Y_t] = Var[\tilde{Y}_t] = E[(\tilde{Y}_t - \underbrace{E[\tilde{Y}_t]}_{0})^2] = E[(\phi \tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t)^2] \\
&= E[\phi^2 \tilde{Y}_{t-1}^2 + 2\phi \tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_t + \varepsilon_t^2] \\
&= \phi^2 \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-1}^2]}_{\gamma_0} + 2\phi \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_t]}_{0} + \underbrace{E[\varepsilon_t^2]}_{\sigma_\varepsilon^2} = \phi^2\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 \\
&\Rightarrow \gamma_0 - \phi^2\gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}. \\
\gamma_1 &= Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-1}) = E[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-1}] - \underbrace{E[\tilde{Y}_t]}_{0} \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-1}]}_{0} \\
&= E[(\phi \tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t)\tilde{Y}_{t-1}] = E[\phi \tilde{Y}_{t-1}^2 + \tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_t] \\
&= \phi \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-1}^2]}_{\gamma_0} + \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-1}\varepsilon_t]}_{0} = \phi\gamma_0.
\end{aligned}$$

AR(1). Condición de Estacionariedad

Función de autocovarianzas

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-2}) = E[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-2}] - \underbrace{E[\tilde{Y}_t]}_{0}\underbrace{E[\tilde{Y}_{t-2}]}_{0} \\
&= E[(\phi \tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t)\tilde{Y}_{t-2}] = E[\phi \tilde{Y}_{t-1}\tilde{Y}_{t-2} + \tilde{Y}_{t-2}\varepsilon_t] \\
&= \phi \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-1}\tilde{Y}_{t-2}]}_{\gamma_1} + \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-2}\varepsilon_t]}_{0} = \phi \underbrace{\gamma_1}_{\phi\gamma_0} = \phi^2\gamma_0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= Cov(Y_t, Y_{t-k}) = Cov(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-k}) = E[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-k}] - \underbrace{E[\tilde{Y}_t]}_{0}\underbrace{E[\tilde{Y}_{t-k}]}_{0} \\
&= E[(\phi \tilde{Y}_{t-1} + \varepsilon_t)\tilde{Y}_{t-k}] = E[\phi \tilde{Y}_{t-1}\tilde{Y}_{t-k} + \tilde{Y}_{t-k}\varepsilon_t] \\
&= \phi \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-1}\tilde{Y}_{t-k}]}_{\gamma_{k-1}} + \underbrace{E[\tilde{Y}_{t-k}\varepsilon_t]}_{0} = \phi\gamma_{k-1} = \phi^k\gamma_0, \qquad \forall k \geq 1.
\end{aligned}$$

Bajo la condición de estacionariedad obtenida para la varianza ($|\phi| < 1$ ó $|B| > 1$), se tiene que la función de autocovarianzas no depende del tiempo y el proceso es estacionario.

Función de autocorrelación simple

A partir de la función de autocorrelación, γ_k, suponiendo estacionariedad se tiene la siguiente *fas*:

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi^k \gamma_0}{\gamma_0} = \phi^k, k \geq 1.$$

Y_t está correlada con cualquier variable retardada Y_{t-k}. Por esta razón se dice que el proceso AR(1) tiene memoria infinita. Aunque si el proceso es estacionario, es decir si $|\phi| < 1$, dicha correlación es más débil a medida que aumenta el retardo.

Función de autocorrelación simple

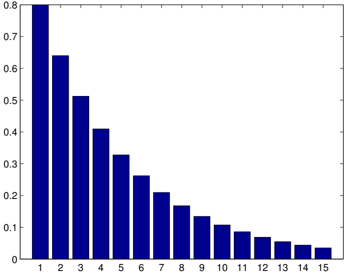


Figura: FAC para $\phi = 0{,}8$

Función de autocorrelación simple

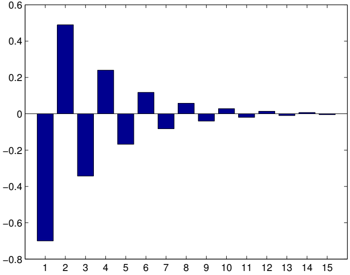


Figura: FAC para $\phi = -0{,}7$

Función de autocorrelación parcial

La FACP mide para cada retardo k el efecto directo de la variable retardada Y_{t-k} sobre Y_t con independencia de los efectos indirectos.

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t = Y_t = \delta + \phi(\delta + \phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t$$

Se observa que Y_{t-2} influye a Y_t utilizando como intermediaria a Y_{t-1}, es decir, si Y_{t-1} no existiera Y_{t-2} no podría influir en Y_t. Por tanto, no existe efecto directo de Y_{t-2} sobre Y_t y el coeficiente de autocorrelación de orden 2 sería igual a cero. Es fácil deducir que lo mismo ocurriría con los coeficientes de orden superior a 2.

La FACP para un proceso AR(1) es:

$$\rho_1^p = \rho_1 = \phi, \quad \rho_k^p = 0, \qquad \forall k \geq 2.$$

Principales características de un AR(1) estacionario

- El parametro autoregresivo debe verificar que $|\phi| < 1$
- La *FAC* decae hacia cero (en valor absoluto) de forma rápida.
- La *FACP* se anula para retardos iguales o superiores a 2.

Ejemplo (en el libro)

Dado el proceso $Y_t = 2{,}5 + 0{,}6 \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t$, donde ε_t es ruido blanco, calcular su media, varianza, covarianza, función de autocorrelación simple y los tres primeros coeficientes de la función de autocorrelación parcial.

AR(2)

Definición

Un proceso estocástico $\{Y_t\}$ sigue un modelo autorregresivo de orden 2, denotado por AR(2), si se puede escribir como

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \epsilon_t \Leftrightarrow (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Y_t = \delta + \varepsilon_t$$

donde δ, ϕ_1 y ϕ_2 son constantes y ε_t es un ruido blanco.

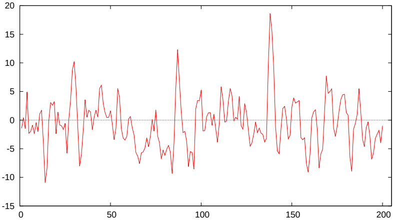


Figura: Proceso AR(2) con ($\phi_1 = 0{,}8$, $\phi_2 = -0{,}3$)

AR(2). Condiciones de Estacionariedad

Estacionariedad en Media

Si el proceso es estacionario en media se cumple que $E[Y_{t-i}] = \mu$, $\forall i \geq 0$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
E[Y_t] &= E[\delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t] = \delta + E[\phi_1 Y_{t-1}] + E[\phi_2 Y_{t-2}] + \underbrace{E[\varepsilon_t]}_{0} \\
&= \delta + \phi_1 E[Y_{t-1}] + \phi_2 E[Y_{t-2}] \Rightarrow \mu - \phi_1 \mu - \phi_2 \mu = \delta \\
&\Rightarrow \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Para que la media sea finita es necesario imponer que $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$.

AR(2). Condición de Estacionariedad

Estacionariedad en Varianza

La expresión de la varianza depende de las autocovarianzas de ordenes 1 y 2 (demostración en libro). Estos tres parámetros se obtienen resolviendo este sistema de ecuaciones (Ecuaciones de Yule-Walker):

$$\begin{cases} \gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 \\ \gamma_2 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0 \end{cases}$$

Obteniéndose:

$$\gamma_0 = \frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]}, \quad \gamma_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}\gamma_0, \quad \gamma_2 = (\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2)\gamma_0.$$

Para que la varianza sea positiva se debe cumplir que $|\phi_2| < 1$, $\phi_1 + \phi_2 < 1$ y $\phi_2 - \phi_1 < 1$.

AR(2). Condición de Estacionariedad

Si se analiza la estacionariedad utilizando el polinomio característico

$$1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$

que se cumplan las condiciones de estacionariedad es equivalente a comprobar que **los módulos de las dos raíces del polinomio característico sean mayores que uno**.
Las soluciones (raíces) de la ecuación de segundo grado $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ son:

$$B_1 = \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}, \quad B_2 = \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}.$$

Así pues, el proceso $AR(2)$ será estacionario si se cumplen las condiciones:

$$\left| \frac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \right| > 1, \quad \left| \frac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \right| > 1.$$

AR(2)

Función de autocovarianzas

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]} \\
\gamma_1 &= \frac{\phi_1}{1-\phi_2}\gamma_0 \\
\gamma_2 &= \left(\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2\right)\gamma_0 \\
&\vdots \\
\gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2}, \quad \forall k \geq 3
\end{aligned}$$

Función de autocorrelación

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1 \\
\rho_1 &= \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\frac{\phi_1\gamma_0}{1-\phi_2}}{\gamma_0} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \\
\rho_2 &= \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 \\
&\vdots \\
\rho_k &= \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2}
\end{aligned}$$

AR(2)

Función de autocorrelación parcial

La FACP estima el efecto directo que tiene Y_{t-k} sobre Y_t, excluyendo el efecto indirecto de los valores intermedios $Y_{t-k+1}, Y_{t-k+2}, \ldots, Y_{t-1}$.

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t,$$

Se observa que Y_{t-1} e Y_{t-2} tienen efectos directos sobre Y_t, sin embargo Y_{t-3} y las variables con retardo más alto necesitan de Y_{t-1} e Y_{t-2} para influir sobre Y_t, es decir, no tienen efectos directos. Por tanto, para un AR(2) los coeficientes ρ_k^p para $k \geq 3$ serán iguales a cero.

Los dos primeros coeficientes parciales se pueden obtener a partir de las ecuaciones:

$$\rho_1^p = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \quad \rho_2^p = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

Principales características de un AR(2) estacionario

- La FAC decae de forma rápida hacia cero.
- La forma de decrecimiento de la FAC depende de si las raices del polinomio característico son reales o complejas:
  - Si toman valores reales, la FAC decrecerá de forma similar a los procesos AR(1).
  - Si toman valores complejos, la FAC mostrará oscilaciones sinusoidales decrecientes.
- La FACP se anula para retardos superiores o iguales a 3.

Ejemplo (en el libro)

Dado el proceso

$$Y_t = 1 - 1{,}42 \cdot Y_{t-1} - 0{,}5 \cdot Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

donde ε_t es ruido blanco con $\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}5$, calcular su media, varianza, covarianza, función de autocorrelación simple y los dos primeros coeficientes de la autocorrelación parcial.

AR(p)

Se dice que un proceso estocástico $\{Y_t\}$ sigue un proceso autorregresivo de orden p, $AR(p)$, si se puede escribir como:

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

donde $\delta, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ son constantes y ε_t es ruido blanco con media cero y varianza σ_ε^2.

El proceso *AR(p)* puede escribirse utilizando el operador retardo B de la siguiente manera:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) Y_t = \delta + \varepsilon_t,$$

donde $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$ se denomina el polinomio característico.

Condiciones de estacionariedad

Un proceso $AR(p)$ es estacionario si el módulo de cada una de las p raíces del polinomio característico es mayor que uno.

Principales características de un AR(p) estacionario

- La FAC decae hacia cero de forma rápida.
- La FACP se anula para retardos superiores a p.

Ejemplo (en el libro)

Dado el proceso $Y_t = 2{,}5 - 1{,}8Y_{t-1} - 0{,}81Y_{t-2} + \varepsilon_t$ donde ε_t es ruido blanco. Se pide:

a) Comprobar si es estacionario.
b) Calcular la media del proceso.
c) Calcular la varianza del proceso sabiendo que $\sigma_\varepsilon^2 = 2$.
d) Calcular los coeficientes de retardos 1, 2 y 3 de la FAC.
e) Calcular la FACP.

MA(q)

Un proceso se denomina de medias móviles cuando explica el valor de una determinada variable en un periodo t en función de un término independiente y una sucesión de perturbaciones correspondiente a períodos pasados ponderados convenientemente.
La expresión genérica de un proceso de medias móviles *MA(q)* es la siguiente:

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

donde

- δ es una constante
- $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ son denominados parámetros de media móvil
- ε_t es ruido blanco

Utilizando el operador retardo B:

$$Y_t = \delta + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q)\varepsilon_t,$$

MA(q)

Media

$$E[Y_t] = E[\delta] + \underbrace{E[\varepsilon_t]}_{0} + \theta_1 \underbrace{E[\varepsilon_{t-1}]}_{0} + \theta_2 \underbrace{E[\varepsilon_{t-2}]}_{0} + \cdots + \theta_q \underbrace{E[\varepsilon_{t-q}]}_{0} = \delta. \qquad (3)$$

Denotando por $\tilde{Y}_t = Y_t - E[Y_t] = Y_t - \delta$, el proceso $MA(q)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\tilde{Y}_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

Condición de invertibilidad

Definicion

Un proceso Y_t es invertible si puede ser representado como un proceso autoregresivo de orden finito o un proceso autoregresivo de orden infinito pero convergente.

Intuitivamente que un proceso sea invertible significa que puede explicarse en función de su propio pasado hasta un determinado retardo (AR finito) o que la influencia del pasado se diluye con el tiempo (AR infinito convergente).

MA(q)

De la expresión con el polinomio característico del proceso $MA(q)$:

$$\tilde{Y}_t = (1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q)\varepsilon_t,$$

se obtiene:

$$(1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q)^{-1}\tilde{Y}_t = \varepsilon_t.$$

Por las propiedades de los polinomios se sabe que el inverso de un polinomio finito es un polinomio infinito:

$$(1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q)^{-1} = 1 + \varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \cdots ,$$

cuya expresión es convergente si y solo si las q **raíces del polinomio característico** $1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$ **son en módulo mayores que 1**, es decir, $|B_i| > 1$, $i = 1, ..., q$. A estas condiciones se les denomina **condiciones de invertibilidad** del proceso $MA(q)$.

MA(1)

Se dice que un proceso estocástico $\{Y_t\}$ sigue un proceso de medias móviles de orden 1, $MA(1)$, si se puede escribir como:

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} \Leftrightarrow Y_t = \delta + (1+\theta B)\varepsilon_t$$

donde δ, θ son constantes y ε_t es ruido blanco con media cero y varianza σ^2_ε.

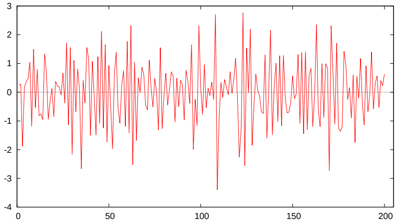


Figura: Proceso MA(1) con $\theta = -0{,}8$

MA(1). Estacionariedad

Como se ha visto, la media del proceso es δ y, por tanto, constante.
La varianza del proceso verifica:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= Var[Y_t] = Var[\delta + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}] = \underbrace{Var[\varepsilon_t]}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta^2 \underbrace{Var[\varepsilon_{t-1}]}_{\sigma_\varepsilon^2} \\ &\quad + 2\underbrace{Cov(\varepsilon_t, \theta\varepsilon_{t-1})}_{0} \\ \Rightarrow &\quad \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 + \theta^2\sigma_\varepsilon^2 = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Como $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ y $1 + \theta^2 > 0$, la varianza es positiva y constante.
Para confirmar la estacionariedad del proceso hace falta ver que la función de autocovarianzas no depende del tiempo.

MA(1). Estacionariedad

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= Cov(Y_t, Y_{t-1}) = Cov(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-1}) = E[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-1}] - \underbrace{E[\tilde{Y}_t]}_{0}\underbrace{E[\tilde{Y}_{t-1}]}_{0} \\ &= E[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-1}] = E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})\tilde{Y}_{t-1}] = \underbrace{E[\varepsilon_t \tilde{Y}_{t-1}]}_{0} + \theta \underbrace{E[\varepsilon_{t-1}\tilde{Y}_{t-1}]}_{\sigma_\varepsilon^2} = \theta\sigma_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= Cov(Y_t, Y_{t-2}) = Cov(\tilde{Y}_t, \tilde{Y}_{t-2}) = E[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-2}] - \underbrace{E[\tilde{Y}_t]}_{0}\underbrace{E[\tilde{Y}_{t-2}]}_{0} \\ &= E[\tilde{Y}_t \tilde{Y}_{t-2}] = E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})\tilde{Y}_{t-2}] = \underbrace{E[\varepsilon_t \tilde{Y}_{t-2}]}_{0} + \theta \underbrace{E[\varepsilon_{t-1}\tilde{Y}_{t-2}]}_{0} = 0.\end{aligned}$$

Razonando de igual manera se obtiene que todos los coeficientes con retardos superiores a dos son también nulos. Por tanto:

$$\gamma_0 = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2, \quad \gamma_1 = \theta\sigma_\varepsilon^2, \quad \gamma_k = 0, \ \forall\ k \geq 2.$$

No se necesita ninguna condición para obtener la estacionariedad.

MA(1)

Función de autocorrelación simple

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \frac{\theta\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \quad \rho_k = \frac{0}{\gamma_0} = 0, \ \forall \ k \geq 2$$

Función de autocorrelación parcial

Si el proceso es invertible, es decir, si la raíz de su polinomio característico $1+\theta B$ es mayor que 1 en valor absoluto, Y_t se puede expresar en función de su propio pasado.

Que el proceso $MA(1)$ se pueda expresar como un $AR(\infty)$ significa que existe un efecto directo entre la variable Y_t y todas las demás variables retardadas Y_{t-1}, Y_{t-2},... Por tanto, todos los coeficientes de la FACP son distintos de cero. Al ser el proceso invertible también se sabe que estos coeficientes decrecen a medida que aumenta el retardo, dicho con otras palabras, la influencia del pasado se debilita a medida que las variables se alejan en el tiempo.

Principales características de un MA(1) invertible

- Siempre es estacionario.
- La FAC sólo tiene un coeficiente no nulo en el retardo 1, siendo 0 en el resto.
- La FACP no se anula, pero tiene un comportamiento convergente a cero.

Ejemplo (en el libro)

Dado el proceso $Y_t = -1{,}5 + \varepsilon_t - 0{,}3 \cdot \varepsilon_{t-1}$, donde ε_t es ruido blanco con $\sigma^2_\varepsilon = 0{,}2$, calcular su media, varianza, covarianza, función de autocorrelación simple y primeros tres coeficientes de la función de autocorrelación parcial.

MA(2)

Se dice que un proceso estocástico $\{Y_t\}$ sigue un proceso de medias móviles de orden 2, $MA(2)$, si se puede escribir como:

$$Y_t = \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \Leftrightarrow Y_t = \delta + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2)\varepsilon_t$$

donde $\delta, \theta_1, \theta_2$ son constantes y ε_t es ruido blanco con media cero y varianza σ_ε^2.

Estacionariedad

La media de un proceso $MA(2)$ es igual a δ y, por tanto, constante.

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= Var[Y_t] = Var[\delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}] \\ &= \underbrace{Var[\varepsilon_t]}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta_1^2 \underbrace{Var[\varepsilon_{t-1}]}_{\sigma_\varepsilon^2} + \theta_2^2 \underbrace{Var[\varepsilon_{t-2}]}_{\sigma_\varepsilon^2} \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2 \sigma_\varepsilon^2 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Como $\sigma_\varepsilon^2 > 0$ y $1+\theta_1^2+\theta_2^2 > 0$, la expresión de la varianza es positiva y constante. Falta comprobar que la función de autocovarianzas no depende del tiempo, depende solo del retardo que separa a las variables.

MA(2)

La función de autocovarianzas de un proceso $MA(2)$ es:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 &(4)\\ \gamma_1 &= \theta_1(\theta_2+1)\sigma_\varepsilon^2 &(5)\\ \gamma_2 &= \theta_2\sigma_\varepsilon^2 &(6)\\ \gamma_k &= 0,\ \forall\ k \geq 3 &(7) \end{aligned}$$

Como puede observarse, la función de autocovarianzas no depende del tiempo. Por tanto, no es necesario imponer ninguna condición para que el proceso $MA(2)$ sea estacionario.

Función de autocorrelación simple

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = \frac{\theta_1(\theta_2+1)\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\theta_1(\theta_2+1)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2},$$

$$\rho_2 = \frac{\theta_2\sigma_\varepsilon^2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \quad \rho_k = \frac{0}{\gamma_0} = 0,\ \forall\ k \geq 3.$$

MA(2)

Función de autocorrelación parcial
Al igual que para el proceso $MA(1)$, si un proceso $MA(2)$ es invertible entonces se puede expresar en función de su propio pasado, por tanto, existe influencia directa de todas las variables retardadas Y_{t-1}, Y_{t-2},... sobre Y_t. Es decir, todos los coeficientes de la FACP serán distintos de cero.
La FACP tiene infinitos valores distintos de cero que decrecen exponencialmente a partir del primer valor hacia cero.

Principales características de un MA(2) invertible

- Siempre es estacionario.
- La FAC tiene sus dos primeros coeficientes distintos de cero.
- La FACP no se anula, pero tiene un comportamiento convergente a cero.

Ejemplo (en el libro)

Dado el proceso $Y_t = \varepsilon_t - 0{,}8 \cdot \varepsilon_{t-1} + 0{,}25 \cdot \varepsilon_{t-2}$, donde ε_t es ruido blanco con $\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}4$, calcular su media, varianza, covarianza, función de autocorrelación simple y primeros tres coeficientes de la función de autocorrelación parcial.

Principales características de un MA(q) invertible

- Siempre es estacionario.
- La FAC tiene los q primeros coeficientes distintos de cero.
- La FACP no se anula, pero tiene un comportamiento convergente a cero.

Ejemplo (en el libro)

Considere el modelo $Y_t = 5 + \varepsilon_t - 0{,}8\varepsilon_{t-1} + 0{,}25\varepsilon_{t-2}$ donde ε_t es ruido blanco. Sabiendo que $\sigma_\varepsilon^2 = 2$ se pide:

1. Comprobar las condiciones de estacionariedad e invertibilidad.
2. Calcular la media y varianza del proceso.
3. Obtener la FAC.
4. Calcular los dos primeros términos de la FACP.
5. Hallar la representación $AR(\infty)$ del proceso.

ARMA(p,q)

Se dice que un proceso $\{Y_t\}$ admite una representación autorregresiva y de medias móviles de orden p, q respectivamente, si se puede modelizar a través de la ecuación:

$$Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$

Este modelo se puede escribir en términos del operador de retardos:

$$\begin{aligned} Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} &= \delta + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) Y_t &= \delta + (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) \varepsilon_t \end{aligned}$$

ARMA(p,q)

Teorema

Un proceso autorregresivo de medias móviles finito *ARMA(p,q)* es estacionario sí y solo sí el módulo de cada una de las raíces del polinomio autorregresivo es superior a uno.

Teorema

Un proceso autorregresivo y de medias móviles finito *ARMA(p,q)* es invertible sí y solo sí el módulo de cada una de las raíces del polinomio de medias móviles es superior a uno.

El modelo *ARMA(p,q)*:

- Tiene media y varianza constantes.
- Los primeros q coeficientes de la FAC están dados por la parte *MA*. A partir del retardo q se producirá un decrecimiento que vendrá dado por la estructura *AR*.
- Los primeros p coeficientes de la FACP están dados por la parte *AR*. A partir del retardo p se producirá un decrecimiento que vendrá dado por la

ARMA(p,q)

Ejemplo (en el libro)

Considere el modelo $Y_t = 0{,}4Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}8\varepsilon_{t-1}$ donde ε_t es ruido blanco. Sabiendo que $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ se pide:

1. Comprobar las condiciones de estacionariedad e invertibilidad.
2. Calcular la media y varianza del proceso.
3. Obtener los coeficientes de orden 1 y 2 de la FAC.
4. Calcular los coeficientes de orden 1 y 2 de la FACP.
5. Hallar la representación $AR(\infty)$ del proceso.

Ejemplo (en el libro)

Dado el proceso $(1 + 0{,}2 \cdot B) \cdot Y_t = (1 - 0{,}7 \cdot B) \cdot \varepsilon_t$, donde ε_t es ruido blanco con $\sigma_\varepsilon^2 = 0{,}1$, se pide contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) ¿Es el proceso estacionario e invertible?

b) Calcular la función de autocorrelación simple para los retardos 1 y 2.

Teorema de Wold

Teorema de Wold

Cualquier proceso estacionario Y_t puede representarse como la suma de dos procesos mutuamente incorrelados:

$$Y_t = D_t + X_t,$$

donde D_t es un proceso determinista y X_t es un proceso $MA(\infty)$.

Sin tener en cuenta la parte determinista, el Teorema de Wold establece que un proceso estacionario puede expresarse como un proceso $MA(\infty)$:

$$Y_t = \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = (1 + \varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \cdots)\varepsilon_t$$

En la práctica no es útil utilizar una expresión con infinitos términos pero un polinomio infinito se puede representar como el cociente de dos polinomios finitos:

$$Y_t = (1 + \varphi_1 B + \varphi_2 B^2 + \cdots)\varepsilon_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}\varepsilon_t \Leftrightarrow \phi(B) Y_t = \theta(B)\varepsilon_t.$$

El Teorema de Wold permite que cualquier proceso estacionario sea descrito como un proceso $ARMA(p, q)$ o como sus casos particulares $AR(p)$ y $MA(q)$.

Identificación

Ya se conoce el tipo de modelos que pueden describir a los procesos estacionarios: **autorregresivos, de medias móviles y autoregresivos de medias móviles**. Ahora se trata de elegir qué tipo de modelo se ajustaría mejor a la serie temporal bajo estudio. Para ello se comparan las características muestrales de la serie con las características teóricas de los modelos. Concretamente se hacen comparaciones sobre las **funciones de autocorrelación simple y parcial**.

Estadísticos muestrales

	FAC	FACP
$AR(p)$	Decrecimiento exponencial y/o sinusoidal amortiguado	Nula para $k > p$
$MA(q)$	Nula para $k > q$	Decrecimiento exponencial y/o sinusoidal amortiguado
$ARMA(p,q)$	Decrecimiento exponencial y/o sinusoidal amortiguado	Decrecimiento exponencial y/o sinusoidal amortiguado

Cuadro: Comportamiento de la FAC y FACP para los procesos AR, MA y ARMA

Identificación

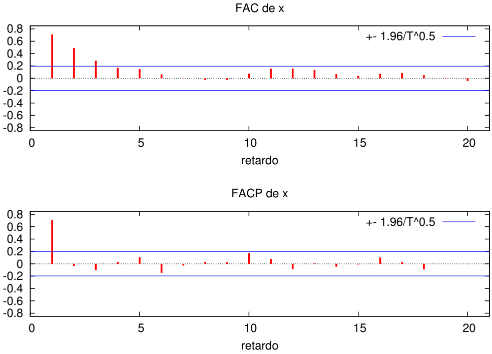
- Las primeras apuestas deberían ser modelos puros AR o MA y despues estudiar los modelos mixtos $ARMA$
- Si la primera decisión es sobre elegir un modelo AR o MA, se debe decidir qué función de autocorrelación muestral, la simple o la parcial, decrece:
  - Si se decide que la que decrece es la FAC muestral se apostaría por un modelo AR y el orden del modelo se decidiría viendo el número de coeficientes no nulos significativos en los primeros retardos de la FACP muestral
  - Si se decide que la función de autocorrelación muestral que decrece es la parcial, se apostaría por un modelo MA y su orden se decidiría viendo el número de primeros coeficientes significativos de la FAC muestral

Identificación

Inferencia

- Bajo la hipótesis nula de que $\rho_k^p = 0$: $\hat{\rho}_k^p \to N(0, \frac{1}{T})$
  Se rechazará la hipótesis nula a un nivel de significación del 5 % **si el estimador $\hat{\rho}_k^p$ está fuera del intervalo** $\pm \frac{2}{\sqrt{T}}$.
  Si se rechaza esta hipótesis nula para los p primeros coeficientes, se apostaría por describir la serie temporal bajo estudio con un proceso $AR(p)$.
- Bajo la hipótesis nula de que $\rho_k = 0$: $\hat{\rho}_k \to N(0, \frac{1}{T})$
  Se rechazará la hipótesis nula a un nivel de significación del 5 % **si el estimador $\hat{\rho}_k$ está fuera del intervalo** $\pm \frac{2}{\sqrt{T}}$.
  Si esto ocurre para los q primeros coeficientes, la serie bajo estudio se describiría mediante un proceso $MA(q)$.

Identificación



Identificación