# Modelos tradicionales: conceptos iniciales

**Tere García Muñoz (tgarciam@ugr.es)**
**Román Salmerón Gómez (romansg@ugr.es)**
**Alessio Gaggero (alessiogaggero@ugr.es)**

Universidad de Granada
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Tema 1 – Econometría 3
Grado en Económicas

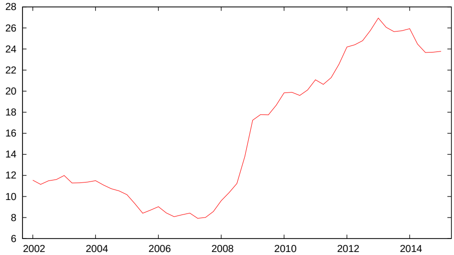
# Índice

# Introducción

Hasta ahora (en los cursos sobre Econometría previos) se ha tratado la estimación de modelos econométricos explicando el comportamiento de una variable endógena (dependiente o explicada) a partir de un conjunto de variables exógenas (independientes, explicativas o regresores).

En este tema se va a introducir una metodología (la de Box y Jenkins) que es habitualmente usada en el análisis de series económicas y en la que el comportamiento de una variable se explica usando sólo su propio pasado.

Tasa de paro en España desde el primer trimestre de 2002 al primer trimestre de 2015



# Introducción

**Objetivo**

Introducir el análisis de series temporales en tiempo discreto (mediante modelos estocásticos lineales) para explicar la estructura y prever la evolución de una variable observada a lo largo del tiempo.

- Los datos son observados (tomados) en intervalos regulares de tiempo (tiempo discreto: minutos, horas, días, semanas, meses, trimestres, cuatrimestres, semestres, años, etc). Es decir, los datos están ordenados cronológicamente (no son datos de sección cruzada ni de panel).
- El enfoque se denomina univariante ya que se usa únicamente la información que aporta la propia serie. No se consideran variables exógenas.
- Esta metodología, introducida por Box y Jenkins en 1970 con la publicación del libro *"Time Series Analysis: Forecasting and Control"*, trata de predecir la evolución de la serie usando sólo su evolución pasada y es útil para la previsión a corto plazo.

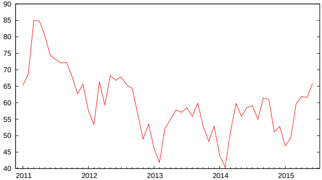
# Introducción

Este enfoque pone más atención a los datos que la Econometría *tradicional*, dejando que sean los datos *los que hablen*. Van a ser fundamentales herramientas no sólo estadísticas sino (como veremos) también gráficas.
Algunos ejemplos:

- Variables macroeconómicas como los índices de precios (IPC, vivienda, etc.), tasas de paro, afiliación a la Seguridad Social, PIB o índices bursátiles.
- Variables microeconómicas como las ventas de una empresa, gastos de una familia o precios de un producto.
- Variables ambientales como la velocidad del viento, grado de humedad, temperaturas o precipitaciones en un determinado lugar.
- Variables socio-demográficas: nacimientos, matrimonios, defunciones, separaciones, etc.
- Variables médicas como la presión arterial, tensión, peso o altura de personas.

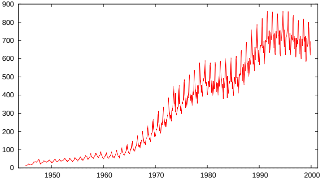
# Introducción

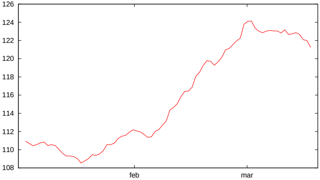
Número de pasajeros mensuales aeropuerto de granada de enero 2011 a junio de 2015 y valor mensual del euribor de enero de 2005 a junio de 2015





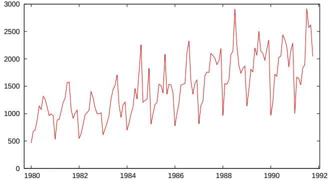
Consumo de gasolina mensual de enero de 1945 a diciembre de 1999 y datos diarios del índice Dow Jones de enero a marzo de 1950

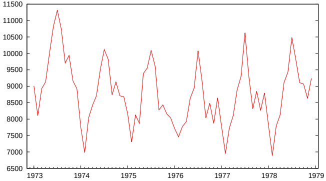


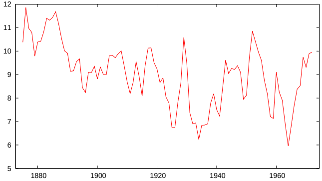
# Introducción

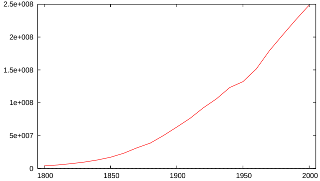
Ventas mensuales de vino tinto en Australia de enero de 1980 a octubre de 1991 y accidentes mortales mensuales de enero de 1973 a diciembre de 1978




Nivel anual del lago Huron de 1875 a 1972 y población en USA de 1800 a 2000 cada 10 años



# Índice

# Proceso estocástico

**Definición**

Se define un proceso estocástico como una sucesión de variables aleatorias $\{Y_t\}$, $t \in \mathbb{Z}$.

El subíndice $t$ se interpreta normalmente como el periodo (instante de tiempo) al que corresponde la variable aleatoria $Y_t$. Generalmente se considera que $t = 1, \ldots, T$.

En las ciencias no experimentales (como la Economía) la definición de proceso estocástico es puramente conceptual: se considera que una serie temporal como una realización de tamaño uno de un proceso estocástico (una única fila de la tabla).

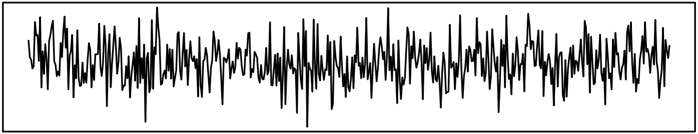
| $Y_1$ | $Y_2$ | $\ldots$ | $Y_T$ |
|---|---|---|---|
| $Y_1(1)$ | $Y_2(1)$ | $\ldots$ | $Y_T(1)$ |
| $Y_1(2)$ | $Y_2(2)$ | $\ldots$ | $Y_T(2)$ |
| $Y_1(3)$ | $Y_2(3)$ | $\ldots$ | $Y_T(3)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $Y_1(n)$ | $Y_2(n)$ | $\ldots$ | $Y_T(n)$ |

# Proceso estocástico

## Ejemplo

Un **ruido blanco** $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso estocastico que se define como una secuencia de variables aleatorias **incorreladas** que tienen **esperanza cero** y **varianza constante**.
Se denomina *blanco* por analogía a la luz blanca y significa que todas las posibles oscilaciones están presentes con la misma intensidad.
Sus oscilaciones son rápidas.

Ruido Blanco



# Proceso estocástico

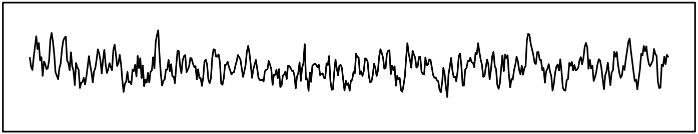
**Ejemplo**

A partir del ruido blanco anterior creamos un **proceso de medias móviles**:

$$v_t = \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$$

Es una versión suavizada del ruido blanco anterior.
Sus oscilaciones son más lentas.

Media Móvil



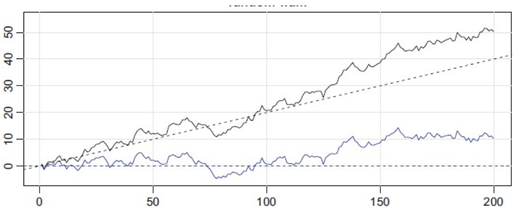
# Proceso estocástico

## Ejemplo

A partir del ruido blanco anterior creamos un proceso denominado **paseo aleatorio con constante**:

$$x_t = \delta + x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Si $\delta = 0$ se le denomina paseo aleatorio. Esta denominación viene del hecho de que el valor en el instante $t$ depende del valor anterior más un movimiento completamente aleatorio determinado por el ruido blanco.



# Distribuciones marginales

## Definición

Se llama **función de medias** de un proceso a una función del tiempo que proporciona las esperanzas de las distribuciones marginales para cada instante:

$$E[Y_t] = \mu_t, \quad t = 1, ..., T,$$

donde $T$ es el número de observaciones disponibles. Si todas las variables tienen la misma media, entonces la función de medias es constante, las realizaciones de este proceso no mostrarán ninguna tendencia y se dice que es un proceso estable en media.

# Función de autocovarianzas

**Definición**

Se define la función de varianzas de un proceso estocástico $\{Y_t\}$ a la que proporciona las varianzas en cada instante temporal:

$$Var(Y_t) = \sigma_t^2 = E[(Y_t - E(Y_t))^2].$$

Se dice que el proceso es estable en varianza si éstas son constantes en el tiempo.

**Definición**

Se define la función de autovarianzas de un proceso estocástico $\{Y_t\}$ a la que a las que describe las covarianzas entre dos variables del proceso en dos instantes cualesquiera:

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \gamma_{t,t+k} = E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t+k} - E(Y_{t+k}))].$$

Cuando $k = 0$, $\gamma_{t,t} = Var(Y_t)$.

# Función de autocorrelación

**Definición**

Se define la función de autocorrelación simple ($FAC$) de un proceso estocástico $\{Y_t\}$ como la función que describe las correlación entre dos variables del proceso en dos instantes cualesquiera:

$$\rho_{t,t+k} = \frac{Cov(Y_t, Y_{t+k})}{\sqrt{Var(Y_t)}\sqrt{Var(Y_{t+k})}} = \frac{\gamma_{t,t+k}}{\sqrt{\gamma_{t,t}\gamma_{t+k,t+k}}}.$$

Esta función propociona medidas adimensionales de la dependencia lineal entre variables.
Se mueve entre -1 y 1.

# Función de autocorrelación parcial

**Definición**

Se define la función de autocorrelación parcial (*FACP*) de un proceso estocástico $\{Y_t\}$ como la correlación lineal existente entre dos variables del proceso en dos instantes cualesquiera pero eliminando el efecto que tienen los retardos intermedios sobre ellas:

$$Corr(Y_t, Y_{t+k}/Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_{t+k-1}).$$

El primer valor de la *FACP* corresponde a la correlación entre $Y_t$ e $Y_{t+1}$ sin que haya que eliminar la influencia de ningún retardo intermedio (ya que no existen). Por tanto, para $k = 1$ coinciden los valores de la *FAC* y *FACP* de cualquier proceso estocástico.

# Índice

# Series Temporales

Una serie temporal es una muestra de un proceso estocástico, es una muestra de tamaño 1 de cada una de las $T$ variables que conforman el proceso. Para que una series temporal quede caracterizada debemos conocer las características del proceso estocástico que la genera.
Caracterización de un proceso estocástico: a partir de las funciones de distribución o a partir de los momentos. Puesto que el primer procedimiento es complicado, se usa el segundo a pesar de que lleve a una caracterización más incompleta.

$$E[Y_1],\ E[Y_2],\ \dots,\ E[Y_T],\ \begin{pmatrix} Var(Y_1) & Cov(Y_1,Y_2) & \dots & Cov(Y_1,Y_T) \\ Cov(Y_2,Y_1) & Var(Y_2) & \dots & Cov(Y_2,Y_T) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(Y_T,Y_1) & Cov(Y_T,Y_2) & \dots & Var(Y_T) \end{pmatrix}$$

¡¡En tal caso hay que estimar $T$ medias distintas y $\frac{T(T+1)}{2}$ elementos distintos de la matriz de varianzas-covarianzas, disponiendo de $T$ observaciones!!
Por tanto, para poder efectuar inferencia sobre un proceso estocástico deben imponerse una serie de restricciones o supuestos. Las habituales son considerar que la serie temporal es **estacionaria** y **ergódica**.

# Objetivo

Especificar un modelo estadístico (una ecuación matemática) que explique sus movimientos a partir de la propia serie temporal retardada. El modelo que se obtenga debe cumplir tres requisitos:

- **Describir** los cambios de la serie con respecto al tiempo (tendencia, estacionalidad, variaciones cíclicas y variaciones irregulares).
- **Predecir** los valores futuros.
- **Contrastar** hipótesis sobre las características a la que se refieren los valores de la serie.

Etapas del análisis:

- **Identificación:** Deteminar la especificación del modelo.
- **Estimación:** Estimar los parámetros del modelo especificado en la fase anterior.
- **Validación/Diagnosis:** Analizar la validez del modelo estimado.
- **Predicción:** Realizar predicciones con el/los modelos elegidos y validados.

# Etapas del análisis

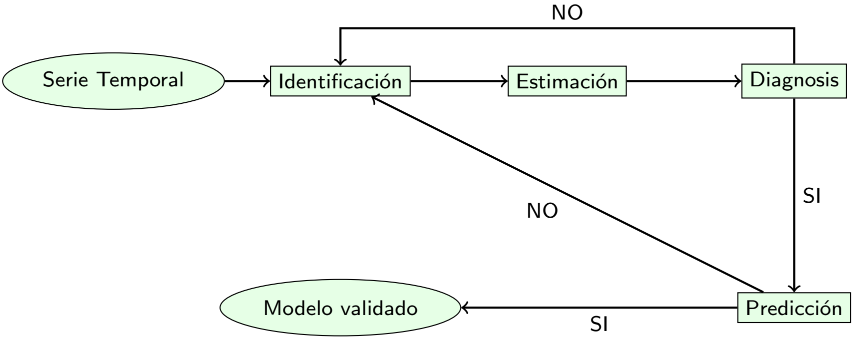



Figura: Fases en la modelización de una serie temporal

# Operadores de retardo y de diferencias

### Definición

El operador retardo, denotado por $B$, aplicado a una variable temporal la retarda en un periodo: $BY_t = Y_{t-1}$
$B^k Y_t = Y_{t-k}$ para $k \geq 1$
$Bc = c$, $c =$constante.

### Definición

El operador diferencia regular, denotado por $\nabla$, aplicado a una variable temporal la transforma de la siguiente manera: $\nabla Y_t = (1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$
$\nabla^k Y_t = (1-B)^k Y_t, k \geq 1$

# Índice

# Ruido Blanco

## Definición

Un **ruido blanco** $\{\varepsilon_t\}$ es un proceso estocastico que se define como una secuencia de variables aleatorias **incorreladas** que tienen **esperanza cero** y **varianza constante**:

$$E[\varepsilon_t] = 0$$

$$Var[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t^2] = \sigma_\varepsilon^2$$

$$Cov[\varepsilon_t, \varepsilon_s] = E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$$

Principales propiedades:

- No hay correlación entre términos
- Valores pasados no ayudan a pronosticar valores futuros.

Se llamará ruido blanco gaussiano (o normal) si la distribución de $\{\varepsilon_t\}$ es normal.

# Índice

# Estacionariedad

La estacionariedad conlleva que la serie tenga un comportamiento estable a lo largo del tiempo. Para que esto sea así, una serie temporal debe cumplir las siguientes características:

- No tener tendencia: no presentar un crecimiento o decrecimiento sistemático ni cambios de nivel.
- Ser homocedástica: a lo largo del tiempo las oscilaciones deben tenr una amplitud más o menos constante.
- En caso de existir, deben detectarse comportamientos estacionales para su correcta modelización.
- La estructura de dependencia debe mantenerse constante (si una observación influye en la posterior, que esto ocurra siempre)
- Para explicar el comportamiento de la serie deben tener mayor influencia las observaciones más cercanas.

# Estacionariedad

**Definición**

Un proceso estocástico $\{Y_t\}$ se dice estacionario en sentido estricto si la función de distribución del proceso, $F$, permanece invariante con respecto al tiempo. Es decir, si se verifica que: $F(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_l}) = F(Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \ldots, Y_{t_l+k}), \forall k$.

El concepto de estacionariedad en sentido estricto implica el cumplimiento de condiciones díficil de manejar en la práctica, por tal motivo se suele considerar un concepto menos exigente:

**Definición**

Un proceso estocástico $\{Y_t\}$ se dice estacionario en sentido débil cuando todos sus momentos de primer y segundo orden son invariantes en el tiempo.
Es decir, $E[Y_t] = \mu$ y $Cov(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_h$, $\forall t, h$.

Bajo el supuesto de estacionariedad, el problema de conocer el proceso estocástico que genera a la serie temporal se reduce a conocer la media, la varianza y las autocovarianzas del proceso.

# Función de autocovarianzas

La función de autocovarianzas de un proceso estocástico estacionario es una función del número de periodos de separación entre las variables $k$:

$$\gamma_{t,t+k} = \gamma_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Sus propiedades son:

- $\gamma_0 = Var(Y_k) \geq 0$
- $\gamma_k = \gamma_{-k}$, para todo $k$ entero (la función de autocovarianzas se calcula solo para los valores no negativos del retardo $k$)
- $|\gamma_k| \leq \gamma_0$, para todo $k$ entero

# Función de autocorrelación simple

La FAC de un proceso estacionario depende únicamente del desfase entre los dos instantes:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0}\sqrt{\gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Se suele representar mediante un gráfico de barras denominado **correlograma**. Sus principales propiedades son:

- $\rho_0 = 1$
- $\rho_k = \rho_{-k}$ (la FAC se representa únicamente para valores positvos).
- $|\rho_k| \leq 1$
- $\rho_k \to 0$ cuando $k \to \infty$.

# Función de autocorrelación parcial

La FACP en el retardo $k$ mide la influencia neta y directa que tendría $Y_{t-k}$ sobre $Y_t$, es decir, se prescinde de las influencias que sobre $Y_t$ tienen $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots, Y_{t-k+1}$. Siguiendo esta definición, la forma de calcular el coeficiente de la FACP en el retardo $k$ es obtener el coeficiente $\phi_{kk}$ de la siguiente regresión:

$$\tilde{Y}_t = \phi_{k1}\tilde{Y}_{t-1} + \phi_{k2}\tilde{Y}_{t-2} + \cdots + \phi_{kk}\tilde{Y}_{t-k} + v_t,$$

$\tilde{Y}_t = Y_t - E[Y_t]$
$v_t$ es un proceso de media cero incorrelado con $Y_{t-j}$ para todo $j$.
A partir de esta ecuación de regresión se puede calcular la expresión del coeficiente $\phi_{kk}$ de la FACP a partir de los coeficientes de la FAC.
Multiplicando a ambos lados de la regresión por $\tilde{Y}_{t-j}$ para $j = 1, ..., k$ se obtiene:

$$\tilde{Y}_t\tilde{Y}_{t-j} = \phi_{k1}\tilde{Y}_{t-1}\tilde{Y}_{t-j} + \phi_{k2}\tilde{Y}_{t-2}\tilde{Y}_{t-j} + \cdots + \phi_{kk}\tilde{Y}_{t-k}\tilde{Y}_{t-j} + v_t\tilde{Y}_{t-j}, \quad j =, 1, 2, \ldots, k,$$

# Función de autocorrelación parcial

Tomando esperanzas:

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\gamma_{j-k} + \underbrace{E[v_t \tilde{Y}_{t-j}]}_{0}, \quad j =, 1, 2, \ldots, k,$$

y dividiendo por $\gamma_0$:

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad j =, 1, 2, \ldots, k$$

Teniendo en cuenta que $\rho_0 = 1$ y que $\rho_k = \rho_{-k}$, estas $k$ ecuaciones quedarían como:

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 & = & \phi_{k1} + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 & = & \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ \rho_k & = & \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk} \end{array}$$

# Función de autocorrelación parcial

y utilizando la regla de Cramer se obtienen los valores de $\phi_{kk}$ para $k = 1, 2, \ldots$
Por ejemplo, denotando por $\rho_k^p (= \phi_{kk})$ a los coeficientes de la FACP, los tres primeros coeficientes se obtendrían de la siguiente manera:
Para $k = 1$: $\rho_1 = \phi_{11} \Rightarrow \rho_1^p = \phi_{11} = \rho_1$
Para $k = 2$:

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 & = & \phi_{21} + \phi_{22}\rho_1 \\ \rho_2 & = & \phi_{21}\rho_1 + \phi_{22} \end{array} \Rightarrow \rho_2^p = \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

Para $k = 3$:

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 & = & \phi_{31} + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33}\rho_2 \\ \rho_2 & = & \phi_{31}\rho_1 + \phi_{32} + \phi_{33}\rho_1 \\ \rho_3 & = & \phi_{31}\rho_2 + \phi_{32}\rho_1 + \phi_{33} \end{array} \Rightarrow \rho_3^p = \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

# Índice

# Estimaciones muestrales

**Proposición**

Bajo estacionariedad en sentido debil, se pueden estimar los primeros momentos poblacionales del proceso mediante los correspondientes momentos muestrales de la serie temporal:

- Media muestral: $\hat{\mu}_Y = \bar{Y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t$.
- Varianza muestral: $\hat{\sigma}_Y^2 = \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \bar{Y})^2$.
- Autocovarianza muestral en el retardo k:

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y}), \quad k =, 1, 2, \ldots$$

# Estimaciones muestrales

## Proposición (continuación

- Coeficiente de autocorrelación muestral en el retardo k:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\frac{1}{T-k}\sum\limits_{t=k+1}^{T}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}(Y_t - \bar{Y})^2}, \quad k =, 1, 2, \ldots$$

Ahora bien, cuando se trabaja con estos estimadores es necesario garantizar que el proceso estocástico que genera la serie verifique unas condiciones tales que los estimadores (generados con la serie temporal) tengan asintóticamente (cuando el número de observaciones es muy alto) las mismas propiedades que los estimadores generados con distintas réplicas del proceso. A dichas condiciones se les denomina condiciones de ergodicidad.

# Índice

# Ergodicidad

**Definición**

Se dice que un proceso estacionario en sentido débil es **ergódico respecto de la media** si el estimador $\hat{\mu}_Y$ calculado con la serie temporal para estimar la media del proceso converge en media cuadrática al estimador de la media definido sobre una muestra de réplicas independientes del proceso.

**Definición**

Se dice que un proceso estacionario en sentido débil es **ergódico respecto de las autocovarianzas** si los estimadores $\hat{\gamma}_k$ calculados con la serie temporal para estimar las autocovarianzas del proceso convergen en media cuadrática a los estimadores de las autocovarianzas definidos sobre una muestra de réplicas independientes del proceso.

# Ergodicidad

Si un proceso es estacionario y ergódico, los estimadores presentados anteriormente verifican:

- $\hat{\mu}_Y$ es un estimador consistente (en media cuadrática) de la media del proceso.
- $\hat{\gamma}_0$ es un estimador consistente (en media cuadrática) de la varianza del proceso.
- $\hat{\gamma}_k$ son estimadores consistentes (en media cuadrática) de las autocovarianzas del proceso.
- $\hat{\rho}_k$ son estimadores consistentes (en media cuadrática) de los coeficientes de autocorrelación del proceso.

Cuando aumenta el número de observaciones de una serie temporal surge otro problema: el número de parámetros desconocidos a estimar también aumenta. La ergodicidad conlleva que variables del proceso suficientemente separadas en el tiempo no estén correladas o, dicho de otra manera, la influencia de una variable aleatoria sobre otra muy alejada en el tiempo se puede considerar nula.