A-33-178

16970 R11714

ARITHMETICA
DEMONSTRADA
THEORICO-PRACTICA
PARA
LO MATHEMATICO
Y MERCANTIL.

EXPLICANSE

LAS MONEDAS, PESOS, Y MEDIDAS DE LOS
Hebreos, Griegos y Romanos; y de estos Reynos
de España, conferidas entre sí:

COMPUESTA

POR JUAN BAUTISTA CORACHAN,
Maestro en Filosofia, Dr. en Sagrada Theologia, y
Cathedratico de Mathematicas en la Universidad de Valencia su Patria.

ADVIERTASE, QUE PARA NO TRASTOCAR LAS Operaciones, la moneda de oro y plata Castellana queda en el mismo valor que tenia en el año 1699. que fue quando salió á luz la primera impresion de esta Obra, supuesto no es circunstancia que varie el modo de obrar.

Con licencia, Barcelona: Por JUAN PIFERRER, Im[illegible]
sor, Plaza del Angel. Año 1719.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA GRANADA

PROLOGO.

TOdo el empleo de la Arithmetica es tratar de los numeros, unas veces exercitando sus operaciones, y otras inquiriendo, y considerando sus propiedades. En quanto á lo primero es *Practica*, y en lo segundo *Especulativa.* Pero si está aplicada al trato comun de compras, ventas, ganancias, trueques, compañías, &c. se dice *Mercantil*; porque principalmente aprovecha á los Mercaderes, que con mas frequencia tratan de esto: Y si está en numeros abstractos, ó no aplicados á cosas determinadas, especulando sus propiedades, se dice que con especialidad sirve para la Mathematica.

Estas partes todas de la Arithmetica comprehendo en este tratado; y aunque por sí solas pudieran ser bastante motivo para escribir, y suficiente materio para un volumen, pero no impelió la mano á tomar la pluma otra cosa, que el dar la demostracion: porque entre las muchas Arithmeticas que reconoce el Orbe literario, apenas hay una que demuestre las reglas, y que en esto no exceda los terminos del arte menor, ó mendigue noticias de otra ciencia.

Aqui pongo las demonstraciones con solos numeros, reduciendolas á una medianía, sin usar de todo el rigor Mathematico, para que las puedan entender los principiantes, y no olvidando que las han de leer los Maestros.

Los parrafos que contienen alguna cosa especial, están numerados por su órden, para citarlos facilmente; porque he tenido por mejor citar el parrafo, que la pagina, ó capitulo. Las citas están entre un parentesis, como se vé en la primera linea de la pagina 36. donde se halla esta

no-

nota (21), la qual significa, que en el parrafo 21. se explica lo que en dicha pagina es menester, y asi de las demas.

Y como para el comercio sea necesaria la noticia de las monedas, pesos, y medidas, alomenos de los Reynos circunvecinos entre los quales es mas frequente el trato, se han puesto en la segunda parte de los proemiales las de Castilla, Aragon, Valencia y Cataluña, confiriendolas entre sì. Y habiendo tomado la pluma para escribir de este asunto, me ha parecido añadir las de los Hebreos, Griegos, y Romanos, para la inteligencia de muchos lugares de la Sagrada Escritura, de Historiadores y Autores profanos.

Pero advierto, que en las monedas de Castilla, hablo segun el tenor de la ultima pragmatica, por la qual se subió el valor de la plata su quarta parte; de suerte, que el real de á ocho Mexicano, Segoviano, ó Sevillano que antes valia ocho reales de plata, y doce de vellon, y ahora segun pragmática, vale diez reales de plata, y quince de vellon, no siendo yá el real de plata sencillo la octava parte del dicho real de à ocho, sino la decima; pero vulgarmente el real de plata no se entiende la decima, sino la octava parte del real de á ocho Mexicano; y el valor de este en vellon no son quince reales, sino quince reales, y un ochavo.

Ultimamente prevengo al que leyere, que por mi poca salud no he podido asistir à las correcciones, pero las he encomendado à persona inteligente, y asi, si acaso en ellas, ó en la substancia de la Obra hallare algun descuydo, confio que con su grande prudencia le corregirà benignamente, teniendo en la memoria que somos hombres, y podemos errar.

PROE-

PROEMIALES,

PROEMIALES llamamos á las noticias generales de algunos terminos, y otras cosas concernientes, que segun buen orden se deben suponer antes del tratado principal. No es nuestro intento amontonar noticias, sino traer las mas necesarias con toda individuacion, y claridad. Contienen dos partes; la primera declara los Terminos: la segunda, las Monedas, Pesos, y Medidas.

PARTE I.

EXPLICANSE ALGUNOS TERMINOS.

No explicamos aqui todos los terminos, sino los mas generales; dexando los otros para su debido lugar; porque deste modo, á mas de tener las noticias mas recientes, evitamos al principiante el enfado de haberlos de buscar á cada paso.

DE LA ARITHMETICA.

1 ARITHMETICA, es Ciencia que trata de los numeros. Toma su nombre de la voz Griega *Arithmos*, que es *numero*, y de la Latina *Metior*, que significa *medir*. Dividese en *Especulativa*, y *Practica*; aquella considera las propiedades de los numeros: y esta usa dellas.

De la Unidad.

2 Unidad, segun Euclides *en la defin. 1. del lib. 7.* es aquella por la qual qualquier cosa se dice *una*; como por la unidad decimos un Angel, un hombre, una piedra. De otro modo: Unidad es la denominacion por la qual decimos *uno*; como por la blancura decimos *blanco*. Comunnmente se toma por la cosa denomidada *una*, de modo, que adelante, lo mismo entenderémos por *unidad*, que por *uno*.

3 La unidad es indivisible en aquella accepcion que es unidad, pero en otra puede ser divisible; como un dia en razon de dia es indivisible, porque no puede haver menos dias que uno, pero en razon de horas se divide en veinte y quatro horas, y entonces ya no es unidad, sino numero compuesto de veinte y quatro unidades. Esto necesita de mayor explicacion.

Para evitar la confusion, nacida como hija legitima de la multitud, fue preciso nombrar á ciertos agregados de unidades con nombres de unidad; como á las veinte y quatro horas llamarlas, *Dia*; á trecientos sesenta y cinco dias, *Año*; á cien años, *Siglo*. Porque si no fuera deste modo, para nombrar un dia haviamos de decir veinte y quatro horas, para dos dias, quarenta y ocho horas; para tres, setenta y dos, &c. que fuera una confusion intolerable. Pues hablando de siglos, un siglo es una unidad, pero tratando de años, no es ya unidad, sino numero compuesto de cien años, y entonces cada año es unidad; pero si consideramos dias, contiene trescientos sesenta y cinco dias.

Lo mismo significamos mas claramente quando decimos *un par*, *una terna*, *una quadrilla*, *una decena*, *un millar*, *un millon*, y otros nombres semejantes, con los quales expresamos numero, y juntamente unidad, porque todo aquel numero le consideramos como á uno. Asi mismo de qualquier *unidad*, ó por mejor decir, de qualquier *una*, podemos tomar la mitad, tercio, quarto, &c. con tal que sea divisible, pues no diremos medio Angel, porque es indivisible.

Con esto quedará entendido de raíz, como los Arithmeticos, hablando de la unidad dicen que es indivisible, y tratando de los quebrados asientan, en que el quebrado es parte, ó partes de la unidad; en lo qual parece que ay inconsequencia de doctrina, porque si la unidad es indivisible, como tiene partes? Pero en la verdad es muy consequente, porque es indivisible en una accepcion, y divisible en otra, como queda advertido; que es lo mismo que decir, que la unidad es indivisible por lo formal, y divisible por lo material, con tal que la materia se pueda dividir.

Del Numero.

4 Numero es *una multitud compuesta de unidades*; asi le difine Euclides *en la defin. 2. del lib. 7.* Parece que este otro modo de difinirle explica algo mas: *Es una coleccion de unidades* como dos, tres, quatro, &c. Porque el numero no es qualquier multitud, ó agregado de unidades, como un monton de piedras sin orden, ni distincion; sino distintas y ordenadas por el entendimiento, que las agrega, lo qual explica el nombre de *coleccion*; porque quien coge, ó ajunta, precisamente procede con algun orden, y distincion.

Es comun sentir de los Filosofos, que el numero depende del entendimiento, que agrega, y ordena las unidades, formando diferentes numeros; y por eso dicen con Aristoteles, que el numero está en el Alma, porque si no huviera quien numerára, no avria numero, ó cosa numerada. Es propio de los racionales el numerar; y asi preguntando Neoclides á Platon: *Por qué el hombre es el animal mas sabio de todos?* Respondió agudamente: *Porque sabe contar.* Los brutos no numeran, sino que con su conocimiento material conocen muchas unidades sin agregarlas; solo perciben *una*, *uno*, *uno*, pero no *tres*.

Para dar á entender la sobredicha coleccion de unidades, distingue Caramuel con sutileza en el proemio de su Arithmetica dos actos de entendimiento; el uno que conoce muchas unidades, y el otro que las numera, los quales explica con un caso donoso, que le escribió un amigo. Dispertó cierto hombre, y oyendo el Relox contó las horas asi: *Una*, *una*, *una*, *una*. Viendo, pues, este desorden, añadió, *Delira este Relox, porque ha dado quatro veces la una.* Dixera yo que él deliraba, porque havia de agregar las unidades, y no contarlas cada una de por sí. Conoció multitud de unidades, pero no las unió.

5 De lo dicho consta claramente, que la unidad no es numero, sino principio, y raís de todos los numeros; porque agregando unidades nace el numero que llamamos *Entero*, y tomando parte, ó partes de la unidad, como se dixo antes, sale el numero que decimos *Quebrado*. Entrambos numeros, desde la unidad, como á termino comun pueden proceder infinitamente, aquel creciendo, y este menguando; porque añadiendo unidades crece el entero, y tomando partes de la unidad se disminuye el quebrado.

6 El numero se puede considerar en dos maneras; la primera

quando expresa alguna especie, como quando decimos, dos Angeles, tres hombres, quatro piedras, &c. La segunda quando no se determina la especie, como dos, tres, quatro, cinco, &c. sin declarar si son Angeles, hombres, ó piedras. Los numeros de la primer diferencia se dicen *Contractos*, y los de la segunda *Abstractos.* Destos usarémos de ordinario.

De los Guarismos.

7 Guarismos, ó cifras, son las notas, ó caractères con que se escriben los numeros. No han sido siempre unos mismos; ha habido grande variedad, asi en Naciones, como en diferentes tiempos. Los primeros Arithmeticos escribian los numeros con puntos, repitiendolos tantas veces como tenia unidades el numero. Perdianse de vista, y recurrieron á lineas, de las quales despues formaron diversos guarismos.

La letra Hebraica *Jod* estuvo muy usada al principio, para expresar los numeros, repetidas tambien tantas veces como unidades. De aqui debió tomar origen, el poner antiguamente tres letras Jod para significar á Dios Trino, como lo dice Caramuel en el Proemio de su Arithmetica.

Los Romanos en sus principios, como refiere Polydoro *lib.* 1. *de rerum invent. cap.* 19. cada un año fixaban un clavo en las paredes del Templo de Jupiter, para significar el numero de los años, y Consulados, sirviendoles los clavos de guarismos en sus anales. Pero despues usaron de las letras por guarismos, como luego dirémos.

En la China, como lo asegura el P. Martin de Martin en su *hist. de la China lib.* 1. *decada* 1. se estila contar por unos granos ensartados en un hilo de hierro, los quales subiendo, y baxando, indican los numeros. Casi con este genero de cuenta suelen significar las suyas algunos Mercaderes de la Europa, pues disponen unos calculos en ciertas lineas, y circunstancias, que con facilidad señalan los numeros, y por eso á su Arithmetica la llaman *Calculatoria.*

Los Caldeos, Asirios, Hebreos, Griegos, y Romanos no tenian diferentes guarismos de las letras con que escribian. Pero entre estas Naciones habia alguna diferencia, porque los Hebreos usaban de todas sus letras; los Romanos de algunas; y los Griegos añadian caractères, como lo notó en su Arithmetica Geronimo Muños, Cathedratico de Mathématicas, y Lengua Hebraica en esta Universidad de Valencia.

Nosotros usamos de ciertos caractéres, que segun Abenragel en la in-

introduccion á su Astronomia, inventaron los Bracmanes en la India Oriental, de los quales los tomaron los Arabes, y despues los introduxeron en España en tiempo del Señor Rey Don Alonso el Sabio, y por su grande utilidad los ha admitido casi todo el Orbe. Estos guarismos, solamente son los diez siguientes.

Uno	Dos	Tres	Quatro	Cinco	Seis	Siete	Ocho	Nueve	Zero.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.

8 Cada uno destos guarismos, tomado por sí solo, significa tantas unidades, como el lugar que ocupa en la presente serie. Solo el zero por sí no es significativo, pero puesto á la derecha de otro guarismo, ó numero aumenta su valor diez veces, como luego dirémos.

No tiene la Arithmetica otros guarismos; con ellos, acompañados unos con otros, expresa todos los numeros por grandes que sean; asi como la Gramatica compone todos los vocablos con solas sus 23. letras. Antes que entrémos á tratar de los numeros, será bien que empleemos algun tiempo en el *Numerar*, y *Notar*, que son leer, y escribir Arithmetico; porque quien no supiere estas dos cosas, en vano espera entender la cuenta.

De la Numeracion.

9 Numeracion, á quien vulgarmente llaman *Cuenta*, es la expresion del valor de un numero escrito por sus propios guarismos; como que el 24. significa veinte y quatro; y el 40. quarenta. Aqui se deve advertir, que no se han de explicar los numeros por estos nombres: *Dos veces, tres veces, quatro veces, &c.* los quales no declaran la coleccion de unidades; sino por estos otros: *Dos, tres, quatro, &c.* que mas claramente expresan la dicha coleccion; con que no dirémos *veinte y quatro veces uno*, sino *veinte y quatro*.

Esto podemos explicar facilmente en los Reloxes, que pues en otra ocasion nos valimos dellos, no irémos desconcertados, si nos bolvemos á valer otra vez. Supongo que quatro Reloxes succesivamente tocan cada uno la *una*; entonces decimos, que han dado quatro vezes la *una*, no que son las *quatro*; porque no queremos hacer coleccion; pero quando un Relox da quatro golpes, contamos las quatro, porque aora queremos numerar, ó hacer coleccion.

Es la numeracion artificiosa, y paraque el principiante no tropiece en el primer paso, será bien que atienda con cuydado á lo siguiente. Porque toda la dificultad consiste en explicar, como con solos los diez guarismos, que señalamos arriba (8) se pueda escribir, y significar qualquier numero; porque entendido esto bien, quedará llano el modo de numerar.

10 Pues para mayor inteligencia desto, comienzo á contar desde la uniad, diciendo: 1. uno, 2. dos, 3. tres, 4. quatro, 5. cinco 6. seis, 7. siete, 8. ocho, 9. nueve. Y porque ya no tenemos mas guarismos significativos, es preciso que otra vez nos valgamos de los mismos, poniendo 1. y un zero para 10. diez, que es una decena. Aqui ya tenemos dos guarismos, de los quales el 0. no es significativo, solo sirve de llenar lugar, paraque el 1. pase al lugar segundo.

Aora al segundo guarismo van acompañando primeramente todos los guarismos deste modo 11. once, que es una decena, y uno; 12. doce, esto es una decena y dos; 13. trece, que es una decena, y tres, y asi prosiguiendo hasta que todos le ayan acompañado, y se ayan cumplido dos decenas que son 20. veinte. Luego todos los guarismos buelven á acompañar al 2. del 20. hasta que llega á tres decenas, que son 30. treinta. Al 3. del 30. acompañan otra vez todos los mismos guarismos hasta, que sube á quatro decenas, que son 40. quarenta; y asi prosiguiendo hasta que se cumplen diez decenas, que son 100. ciento. En donde por el diez, se pone 10. y porque este diez es de decenas, se pone otro cero, con que tenemos ya tres guarismos.

Aora al 1. del 100. van acompañando todos los guarismos de la primer centena, que son desde 1. hasta 99. hasta que cumplen dos centenas, que son 200. ducientos. Despues al 2. del 200. acompañan otra vez los mismos guarismos, hasta que hacen tres centenas, ó 300. trescientos; y con este orden, prosiguiendo hasta cumplir diez centenas, que son 1000. mil donde ay quatro guarismos, pues por el diez se ponen 10. y por ser de centenas, y estas tener dos ceros, se añaden otros tantos, con que son quatro. Y asi prosiguiendo infinitamente.

11 Atendiendo, pues, con atencion al sobredicho progreso de la cuenta, constará con evidencia lo primero, que la numeracion es circular decenaria; porque procede por periodos de diez, esto es, numèra primero diez; despues diez decenas, que son ciento; despues diez centenas, que son mil; diez millares que son diez mil, y asi infinitamente.

Y aunque es verdad que se pudo introducir otra numeracion que

pro-

procediera por diferentes periodos, de dos, de tres, de quatro, &c. como en la musica procede por octavas, y en la Astronomia antigua por sexagenas; pero nuestra numeracion decenaria es la mejor, porque sus periodos son muy proporcionados, ni sobrado grandes, ni pequeños: Y puede ser que atendiendo á los diez dedos de las manos, paraque por ellos pudiesemos contar, introduxesen los primeros Arithmeticos esta numeracion.

12 Lo segundo, que el orden de los lugares, ó asientos de los guarismos quando están juntos, procede de la mano derecha, respeto del que lee, ó escribe, ácia la izquierda; porque fueron inventados en los pueblos Orientales (7) donde suelen escribir en muchas partes de la derecha á la izquierda, como los Hebreos. Con que en qualquier numero, como en este 826. el primer guarismo es el de la mano derecha, que es el 6. y el ultimo el de la izquierda, que es 8. Esto quede advertido para siempre.

13 Lo tercero, que quando los guarismos van acompañados unos con otros, tienen dos valores: el uno por lo que el mismo guarismo significa; y el otro por razon del lugar que ocupa; porque en el primer lugar denota unidades; en el segundo, decenas; en el tercero centenas, &c. como se verá en la tabla numeratoria, que luego darémos. El segundo valor se contrae, y determina por el primero, pues un mismo guarismo, con solo mudar de lugar, muda de valor.

De suerte, que un guarismo solamente por mudar de lugar sube á otro grado de valor: Sirva de exemplo este numero 888. que segun predixo la Sybila Cumana, es la suma del valor numerico de las letras del Dulcisimo Nombre de JESUS, escrito en Griego, en sentir de Beda sobre el cap. 2. de San Lucas. En el qual numero, el primer guarismo vale lo que significa, que son ocho unidades; el segundo vale diez veces mas de lo que él significa, que son ocho decenas, ó ochenta; el tercero, cien veces mas que lo que él denota, esto es, ocho centenas, ú ochocientos: Con que todo valdrá *ochocientos ochenta y ocho*.

Lo mismo podiamos aver explicado en este otro numero 666. seiscientos sesenta y seis aunque numera cosa bien diferente, pues es el numero del nombre de Antichristo: como lo profetizó San Juan en el cap. 13. de su Apocalip. y en este otro 6666. seis mil seiscientos sesenta y seis, que es numero de una Legion. Pero bastan los exemplos.

14 Todo el progreso de la numeracion está decifrado en la tabla

siguiente, que aunque es infinito, pero como vá por periodos semejantes, pocos bastan para su inteligencia.

Tiene dos colunas; en la primera están los numeros, que indican los lugares de los guarismos, primero, segundo, tercero, &c. la segunda contiene los nombres de la numeracion, correspondientes á cada lugar: unidad, decena, centena, &c.

Si atendemos á la disposicion de la tabla hallarémos, que de seis en seis lugares buelven los mismos nombres, solo con la diferencia, que en el primer senario son unidades sencillas; en el segundo, unidades de cuento, ó millon; en el tercero, unidades de bicuento, ó millon de millon; en el quarto, unidades de tricuento, ó de millon de millon de millon; en el quinto, quadricuento, y asi infinitamente.

Tabla Numeratoria.

Lugar.	*Valor.*
1.°	Unidad.
2	Decena.
3	Centena.
4	Millar.
5	Decena de millar.
6	Centena de millar.
	. . . .
7	Cuento, ó millon.
8	Decena de cuento.
9	Centena de cuento.
10	Millar de cuento.
11	Decena de millar de cuento.
12	Centena de millar de cuento.
	. . . .
13	Bicuento, ó millon de millon.
14	Decena de bicuento.
15	Centena de bicuento.
16	Millar de bicuento.
17	Decena de millar de bicuento.
18	Centena de millar de bicuento.
	. . . .
19	Tricuento, ó millon de millon de millon.
20	Decena de tricuento.
21	Centena de tricuento.
22	Millar de tricuento.
23	Decena de millar de tricuento.
24	Centena de millar de tricuento.
	. . . .
25	Quadricuento.
	&c.

De suerte, que este nombre *Cuento, ó Millon*, se repite una vez menos que el numero del senario; y asi en el primer senario no se nombra cuento; en el segundo senario se dice cuento, ó millon una sola vez, porque es el segundo senario; en el tercero se dice millon de millon, ó abreviando *Bicuento*, que es nombrarle una vez menos que el lugar tercero del senario; en el quarto se dice millon de millon de millon, ó tricuento; y asi de los demá.

Esto

15 Esto supuesto, para numerar qualquier número, comenzarémos de la mano derecha ácia la izquierda, dando á cada guarismo el nombre que segun su lugar le corresponde en la tabla, y determinandole despues por lo que significa el mismo guarismo. Como en este numero 1697. al primer guarismo dirémos *Unidad*, al segundo *Decena*, al tercero *Centena*, al quarto *Millar*. Y porque el primero es 7. determinarémos el nombre de unidad, diciendo siete unidades, ó siete absolutamente: En el segundo, 9. dirémos nueve decenas, ó noventa: El tercero, 6. será seis centenas, ó seiscientos: Al quarto, 1. llamarémos mil; con que todo el numero valdrá mil seiscientos noventa y siete.

Este otro numero 38500. significa treinta y ocho mil y quinientos; En donde es menester advertir lo que se dixo antes (10) que el zero por si no tiene valor alguno, sino que solo sirve de llenar lugar; y asi en ocurriendo algun zero, se ha de pasar en silencio el nombre que segun el lugar le correspondiere en la tabla; pues porque en el lugar de las unidades, y decenas ay zeros, no las hemos nombrado, sino que avemos dicho *quinientos*. Asimismo darémos el valor á este otro numero 900426. diciendo, nuevecientos mil quatrocientos veinte y seis, sin nombrar decena, ni unidad de millar, porque hay zeros.

16 Paraque el principiante no fatigue su cabeza, ni pierda el hilo de la cuenta en numerar grandes numeros, como el siguiente, podrá usar deste artificio. Divida el numero con distinciones de tres en tres guarismos, comenzando de la mano derecha, y quedará repartido en miembros, de los quales cada una contiene tres guarismos correspondientes á unidad, decena, centena: solo el ultimo miembro puede tener uno, ó dos guarismos.

3. 2. 1.

30, 900, 510, 356, 714, 006, 810.

Despues de cada dos miembros irá escribiendo los exponentes 1. 2. 3. 4. &c. (son numeros que declaran el orden, los terminos el lugar, ó asiento) encima el guarismo inmediato siguiente á los dos miembros sobredichos: de modo, que el exponente 1. ha de estár sobre el septimo guarismo; el 2. sobre el decimotercio: el 3. sobre el decimo nono; y asi de los demás.

Dispuesto el numero, como queda dicho, para entender el artificio de raiz, podrá el principiante cotejarle con la tabla numeratoria (14) y hallará que los exponentes distinguen al numero en senarios, con-forma la tabla; y que en donde está el exponente 1. que es el septimo lugar, en la tabla se halla *cuento.* Al lugar del exponente 2. que es el decimotercio, corresponde en la tabla *bicuento.* Al exponente 3. *tricuento.*, &c. Y en el lugar en donde ay distincion en medio de los senarios, en la tabla dice *millar.* Con que el primer senario será de unidades; el segundo de cuentos, porque tiene el exponente 1. el tercero de bicuentos, porque tiene 2. y asi de los demás.

Con este aparato, quien supiere numerar un senario, los sabrá todos sin atender á los otros, y aun sin ver los guarismos, como luego dirémos. Comience, pues, por el último senario, en el qual solo se halla este numero 30 treinta; y porque el senario, es de tricuentos, añadirá esta palabra *Tricuento*, diciendo treinta tricuentos.

El siguiente senario 900510 vale nuevecientos mil quinientos, y diez, al qual porque es de bicuentos añada esta misma voz, diciendo, nuevecientos mil quinientos y diez bicuentos. En el otro senario 356714 porque es de cuentos, dirá trecientos cincuenta y seis mil setecientos y catorce cuentos. Finalmente, en el otro senario 006810. dirá seis mil ochocientos y diez. Despues pronunciará toda la cuenta asi: Treinta tricuentos nuevecientos mil quinientos y diez bicuentos; trecientos cinquenta y seis mil setecientos y catorce cuentos; seis mil ochocientos y diez.

17 Cumplamos aora lo que ofrecimos de dar regla para numerar qualquier numero sin ver todos sus guarismos juntos, sino sucesivamente comenzando por la izquierda, con tal que se sepa el numero de ellos. Parece enigma, pero lo tendrá decifrado quien huviere penetrado el artificio de numerar.

Supongo, pues, que se ha de nombrar el mismo numero, el qual porque tiene veinte guarismos, segun me han dicho, (porque supongo que no le he visto) dividido este numero 20. en senarios, y hallo que ay tres completos, porque tres veces seis son diez y ocho, y sobran dos guarismos de quarto (que es de tricuentos) de los quales el primero es de unidades, y el segundo de decenas; luego en viendo el segundo, ó último, que es 3. diré treinta; despues quando veré el zero dire asimismo treinta tricuentos, porque el lugar del zero no se nombra, como está dicho.

El tercer senario es de bicuentos, al qual corresponden en la tabla estos nombres: *Bicuento, decena de bicuento, centena de bicuento, millar de bicuento, decena de millar de bicuento, centena de millar de bicuento.* Luego quando veré el 9. que es el sexto guarismo del senario, diré nuevecientos: despues veo dos zeros, á los quales no les doy

nom-

nombre, sino que solo diré nuevecientos mil; el tercer guarismo del senario es 5. pues digo quinientos; el segundo es 1. diré diez; el primero es 0. al qual no le doy nombre, y asi diré quinientos, y diez bicuentos; con que todo el senario valdrá nuevecientos mil quinientos y diez bicuentos. Del mismo modo se contarán los otros senarios que omito por no ser molesto.

En los nombres de la cuenta suelen engañarse los que comienzan, pensando que lo mismo es bicuento, que doscuentos: tricuento, que tres cuentos; y asi de lo demás. Pero es engaño manifiesto, porque dos cuentos son dos unidades de cuento (tomandole por unidad) y bicuento es un cuento de unidades de cuento.

El engaño nace de atender á lo que advertimos arriba (9) que los nombres de la numeracion deven ser estos, *dos*, *tres*, *quatro*, &c. no *dos veces*, *tres veces*, &c. los quales son mas proprios del multiplicar, que del numerar: y como este nombre bicuento, en quanto á la diccion *Bi* se derive del adverbio Latino *Bis*, que significa dos veces, será lo mismo bicuento que un cuento multiplicado por otro cuento; ó que se nombra dos veces *cuento*, diciendo cuento de cuento, que es un cuento de unidades de cuento. La diferencia está clara en los numeros, porque dos cuentos se escriben asi 2000000. y bicuento deste modo 1000000000000.

18 De lo dicho en la numeracion queda manifiesto, lo primero, que aquel numero es mayor, que tiene mas guarismos, y asi 100. es mayor que el 99. Pero si dos, ó muchos numeros tienen tantos guarismos el uno como el otro, aquel será mayor, cuyo guarismo ultimo, penultimo, antepenultimo, &c. fuere mayor: con que el 8246. será mayor que el 8239.

19 Lo segundo, que si á qualquier numero, como 12. añadimos un zero á la derecha, asi, 120. crece su valor diez veces: si dos zeros, deste modo, 1200. le aumenta cien veces: si tres zeros 12000. mil veces, &c. porque los zeros hacen, que los guarismos pasen á otros lugares.

De la Notacion.

20 Notacion es la descripcion de un numero por sus propios caracteres, ó guarismos, como el veinte y quatro se escribe asi, 24. Es inversa de la numeracion; porque por esta leemos los numeros, y por la notacion los escribimos.

21 Para escribir qualquier numero se pondrán los guarismos

como se nombran, comenzando de la izquierda ácia la derecha, y si se omitieren alguno, ó algunos nombres de los de la tabla numeratoria, se notarán otros tantos zeros, que solo sirven de llenar lugar: Como para escribir con guarismos trecientos veinte y seis, escribase un 3. por los trecientos, un 2. por los veinte, y un 6. por los seis, asi 326.

Otro exemplo: Tengo de escribir con guarismos este numero dos mil cinquenta y quatro, escribo 2. por los dos mil; y porque de millar pasa á decena, esto es de dos mil cincuenta, sin nombrar centena, pongo un 0. en el lugar de las centenas, despues escribo 5. por los cinquenta, y ultimamente un 4. por los quatro, con que será todo junto 2054.

Otro exemplo; Se ofrece escribir con guarismos esta cuenta Treinta y seis cuentos ciento quatro mil y trescientos; escribo 36. por los treinta y seis cuentos; despues 1. por el ciento; y porque de ciento pasa á quatro mil sin nombrar decenas, pongo 0. y despues 4. por los quatro mil; prosiguiendo escribo 3. por los trecientos; y porque aqui acaba la cuenta sin nombar decenas, ni unidades, pondré dos zeros, y será todo junto 36 104 300.

De la cuenta Latina, ó Remana.

22 Porque este genero de cuenta, á la qual algunos llaman *Castellana*, aun está en uso en las Bulas Pontificias, y escrituras publicas, me ha parecido que no será fuera de proposito el declararla. Los Romanos escribian los numeros con solas estas siete letras I. V. X L. C. D. M. La I. vale uno; la V. cinco; la X. diez; la L. cinquenta; la C. ciento; la D. quinientos; y la M. mil.

Pero como las letras son pocas, y los numeros grandes, es necesario valerse de dos arbitrios; el primero, que la letra de menor valor, antepuesta á la de mayor, le quita su valor; como la I. puesta antes de la V. deste modo IV. hace quatro; la X. antes de la L. asi XL. vale quarenta; y asi de los demás. El segundo, que algunas letras se pueden escribir juntas hasta tres veces, y aun hasta quatro, como XXX. son treinta; y CCCC. ó deste modo CD. son quatrocientos.

Esto supuesto el año corriente 1697. se escribirá deste modo MDCXCVII. La M. es mil; las DC. seiscientos; las XC. noventa; las VII. siete. Este otro numero 2958. se escribirá asi MMCMLVIII. Las MM. son dos mil; las CM. nuevecientos, porque la C. quita ciento á la M. la L. cinquenta; y las VIII. ocho. Asimismo esta cuen-

ta

la MCDXLIV. vale 1444. porque la M. es mil; la CD. quatrocientos, las XL. quarenta; y lás IV. quatro.

Con esta cuenta no solian los Romanos contar numero mayor que tres mil; ni estaban muy puestas en uso las letras D. y M. Valianse de otras con que contaban hasta diez mil. Para escribir 500. ponian una I. y C. al revés de este modo IↃ. para mil asi CIↃ. para 5000. deste modo IↃↃ. para 10000. asi CCIↃↃ. Con que el numero 1697. se escribia con estos caractéres en esta forma CIↃIↃCXCVII.

De la medida, y partes del numero.

23 Un numero mide á otro, quando tomado, ó repetido una, ó muchas veces le iguala; asi como una vara mide á doce varas de cinta, porque aplicada doce veces las iguala. El 3. mide al 15. porque tomado, ó repetido cinco veces hace 15. El 4. mide al 4. porque tomado una vez le iguala.

El numero de las veces que se toma, ó repite un numero para igualar al otro, se dice que es por quien mide; como el 4. mide al 24. por 6. porque tomado seis veces hace 24. El 8. mide al quarenta por 5. porque repetido cinco veces hace 40.

El numero que mide se dice *Medida*; y si es el mayor de todos los que pueden medir á otro, se llama *Maxima Medida*: Como el 6. respeto del 12. porque aunque al 12. midan otros numeros como el 2. 3. y 4. pero el 6. es el mayor. El numero medido se dice *Multiplice* del que mide; y asi el 12. es multiplice del 6. y del 4. 3. 2. 1.

Si un numero, como el 3. mide á otros 6. 9. 15. se dice *Medida Comun*; y si es el mayor de los que pueden medir, se llama *Maxima medida comun*. La qual puede ser uno de los mismos numeros, como en 8. 16. pues el 8. se mide á si mismo, y al 16. La unidad mide á todos los numeros, porque se componen della; con que no hay numeros incommensurables, como en la magnitud, porque alomenos tienen la unidad por medida comun.

24 Un numero es parte de otro (hablando en terminos Arithmeticos) quando tomado, ó repetido muchas veces le iguala; y asi el 4. es parte del 12. porque tomado 3. veces hace 12. Asi mismo el 8. es parte del 48. porque tomado 6. veces hace 48. De suerte, que segun Euclides *en la defin.* 3. *del lib.* 7. la parte es un numero menor, respeto de otro mayor (que se llama todo) el qual menor mide al mayor.

Pero si el numero menor no mide al mayor, esto es, que repetido

una,

una, ó muchas veces no le iguala, se llama *Partes*, segun Euclides *en la defin.* 4. *del lib.* 7. como el 6. respeto del 15 porque tomado dos veces hace 12 que no llega á 15. y repetido tres veces pasa, pues hace 18. Dicese *Partes* porque contiene muchas.

Para mayor inteligencia desto, es menester advertir, que Euclides no trató de otro genero de parte, sino de la que mide á su todo; y asi, quando dice *Parte* ya se entiende que ha de medir al todo; y como el 6. no mida al 15 no puede decirse parte, respeto del 15. Pues como se nombrarà? Digo que *Partes*; porque el 6. contiene dos veces al 3. que es parte del 15. y porque el 3. es la quinta parte del 15. será el 6. respeto del 15. dos quintas partes.

25 Bien conozco, que estas noticias de *Parte*, y *Partes* serán dificultosas de entender à los principiantes; pero no he podido omitirlas por ser de Euclides, y comunes entre los Mathematicos. Pues paraque no causen confusion, diré lo mismo con terminos mas claros. La parte es en dos maneras, *Aliquota*, y *Aliquanta*. Parte aliquota es la que repetida muchas veces adequa, ó iguala al todo; como el 6. respeto del 24. Al contrario la parte aliquanta, que tomada muchas veces no le iguala; como el 3. respeto del 8. y esta es la que se dice *Partes*.

26 La parte aliquanta se suele individuar asi: Una mitad un tercio, quarto, quinto &c. Toma el nombre del numero por quien mide (23) el qual se llama *Denominador*; con que el 3. es mitad del 6. Porque le mide por 2. que és denominador; el 5. es tercio del 15. porque le mide por 5. el 2. es quarto del 8. porque le mide por 4. y asi de los demás.

27 La Parte aliquanta nesesariamente se ha de nombrar con dos nombres; como dos tercios, quatro quintos, &c. porque contiene muchas partes aliquotas. El primer nombre expresa el numero de las partes aliquotas que contiene; y el segundo dice quales partes aliquotas sean; como el 6. resepeto del 15. es *dos quintos*, porque contiene dos veces al 3. el qual es un quinto del 15.

28 Una Parte aliquota es semejante á otra aliquota, quando se contiene en sù todo tantas veces como la otra; y asi 3. y 5. son semejantes, respeto del 12. y 20. porque tanto el 3. en el 12. como el 5. en el 20. se contienen quatro veces. Asimismo 2. 4. 7. son semejantes, respeto del 6. 12. 21. porque se contienen tres veces. Los todos que contienen à las partes aliquotas semejantes, como el 12. y 20 respeto de 3. y 5. se llaman *Semejantes*, y tambien *igualmente multiplices*.

29 Una parte aliquanta es semejante à otra aliquanta, quando contiene tantas partes aliquotas semejantes de su todo, como la otra del suyo. Y asi el 3. y 9. son partes semejantes aliquantas del 5. y 15. porque entrambas contienen tres quintas partes de sus todos. El 4. 6. 10. son semejantes, respeto de 14. 21. 35. porque contiene qualquiera dellas dos septimos de su todo. Estos, todos se dicen *Semejantes*, pero no *igualmente multiplices*.

Las partes aliquotas, ó aliquantas, que tienen un mismo nombre son semejantes; porque toman el nombre de las veces que se contienen en el todo si son aliquotas (28): ó de las partes aliquotas semejantes que contienen, si son aliquantas. (29) Y asi, porque 2. y 5. respeto de 10. y 25. son un quinto, serán semejante aliquantas; y 6. y 4. respeto de 9. y 6. son semejante aliquantas, porque entrambas son dos tercios.

De la razon, y proporcion de los numeros.

30 *Razon numerica* es el respeto, relacion, ó habitud, que tiene un numero comparado con otro, segun que es mayor, igual, ó menor: como 4. á 2. 3. á 3. 5. à 6. El numero que se compara se dice *Antecedente*, y á quien se compara *Consequente*: y asi en la razon de 4. á 6. el 4. es antecedente, y el 6. consequente.

31 Si el antecedente es igual al consequente se dice *Razon de igualdad*; como 4. á 4. ó 6. à 6. Si el antecedente es mayor, es *razon de mayor desigualdad*; como 8. à 4. 10. á 2. Si el antecedente es menor, se llama *razon de menor desigualdad*; como 2. á 10 4. á 8 de suerte, que invirtiendo los terminos de la razon de mayor igualdad, resulta la de menor desigualdad, y al contrario.

Para mayor inteligencia de la razon, digo que consiste en la continencia del antecedente en el consequente, ó al contrario deste en aquel: como la razon de 6. à 3. no es otra cosa mas que el respeto de 6. á 3. en quanto el 6. contiene al 3. dos veces. La razon de 4. á 4. es el respeto de un numero á otro, en quanto el 4. contiene al 4. una sola vez. La razon del 2. al 9. es el respeto del uno al otro, en quanto el 2. se contiene en el 9. quatro veces y media. Qualquier numero dice razon á otro, porque tiene alguna continencia.

32 *Proporcion* es la comparacion, habitud, respeto, ó relacion de dos razones, como la relacion que hay de la razon de 4. à 2. á la razon de 6. á 3. De suerte, que asi como la razon está entre dos numeros, la proporcion está entre dos razones; porque una razon se pue-

de

de comparar á otra, como un numero á otro. Y asi como un numero se puede comparar á otro, en quanto es mayor, menor, ó igual, tambien una razon se puede referir á otra del mismo modo: de suerte, que aquellas razones son iguales, cuyos entecedentes tienen la misma continencia en sus consequentes; aquella razon es mayor, cuyo antecedente contiene mas veces á su consequente, ó es contenido menos veces de su consequente. Pero Euclides solo trató de la comparacion de las razones de igualdad; porque en la *definicion 4. del lib. 5.* definió la proporcion, diciendo que es *una semejanza de razones.*

Esta semejanza, ó igualdad de razones consiste, en que en entrambas haya la misma relacion, ó continencia; y asi la razon de 4. á 1. es semejante, la mesma, ó igual (todo significa lo mismo) á la de 12. á 3. porque asi como el 4. contiene al 1. quatro veces, del mismo modo el 12. contiene al 3. quatro veces. Y estos numeros se llaman *Proporcionales*: los quales expresan los Mathematicos deste modo: como 4. á 1. asi 12. á 3.

De otro modo podemos explicar esta igualdad de razones, diciendo, que aquellas razones son iguales, cuyos antecedentes son parte, ó todos semejantes de sus consequentes (28. y 29.): como la razon de 10. á 15. es igual á la de 2. á 3. porque los antecedentes 10. y 2. son partes semejantes (esto es dos tercios) de sus consequentes 15. y 3. Asimismo, la razon de 8. á 4. es semejante á la de 10. á 5. porque el 8. y 10. son todos semejantes, respeto de 4. y 5. Bastan estas noticias ahora, en el libro segundo se hallarán mas extensas.

Del numero par, é impar.

33 Numero par es el que se puede dividir enteramente en dos partes iguales, ó el que tiene mitad; como 2. 4. 6. 8. &c Numero impar es el que no se puede dividir enteramente en dos partes iguales, ó el que difiere del par por una unidad; como 3. 5. 7. 9.

Dividese el numero par en *Pariter par*, y en *Pariter impar.* El pariter par es un numero medido de par por par; como el 8. à quien mide el par 4. por 2. Y el 12. á quien mide el par 6. por par 2. Numero pariter impar es el medido de par por impar; como el 10. á quien mide par 2. por impar 5.

Adviertase que hay muchos numeros, que juntamente son pariter pares, y pariter impares; como el 12. porque es medido de par 2. por par 6. y tambien de par 4. por impar 3.

El numero impar solo tiene una especie, que es *Impariter impar*, á

quien

quien mide impar por impar; como el 15, que es medido de impar 3. por impar. 5.

Del numero primero, y compuesto.

34 Numero primo llama Euclides *en la defin. 11. del lib. 7.* al que solo es medido de la unidad, esto es, que no tiene otra parte aliquota, mas que la unidad; como 2. 3. 5. 7. y asi necesariamente ha de ser numero impar, exceptando al 2.

35 Numeros entre sí primos son los que solo tienen la unidad por medida comun, como 8. y 11. porque aunque el 8. tenga alguna medida fuera de la unidad, pero no es comun para los dos. Tambien 10. 12. 17. son entre sí primos, porque no tienen numero alguno por medida comun á todos los tres. Si entre muchos numeros hubiera algun numero primo, todos serán entre sí primos, porque aquel no tendrà medida alguna fuera de la unidad; y necesariamente ha de haber entre ellos algun numero impar, exceptando al 2.

36 Numero compuesto es el que tiene algun numero que le mide à mas de la unidad, ó el que tiene partes aliquotas fuera de la unidad; como el 12. á quien miden el 2. 3. 4. 6. y el 10. á quien miden 5. y 2. A todo numero compuesto mide algun numero primo, como consta por la *prop. 33. del lib. 7.* de Euclides.

37 Numeros entre sí compuestos son los que tienen alguna medida comun á mas de la unidad, como 8. y 10. á los quales mide el 2. Asimismo 6. 9. 12. son entre sí compuestos, porque à todos mide el 3. Esta medida comun puede ser uno de los mismos numeros, como 4. 8. 12. cuya medida comun es 4. lo qual sucede siempre, que el uno de ellos mide al otro, ú otros.

Del numero Digito, Articulo y Mixto.

38 Numero digito es el que solo tiene un guarismo, como 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. que son todos los numeros desde 1. hasta 10 exclusive. Numero articulo es el que tiene muchos guarismos, de los quales el primero es zero; como 10. 30. 2500. &c. Numero mixto es el que tambien tiene muchos guarismos; pero el primero no es zero, como 24 152. 208.

Del numero perfecto, diminuto y abundannte.

39. Numero perfecto llama Euclides *en la difin. 22. del lib. 7.* al que es igual á todas sus partes aliquotas juntas; como el 6. cuyas partes aliquotas 1. 2. 3. juntas hacen lo mismo 6. El 28. es tambien perfecto, porque sus aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. hacen 28 Numero diminuto es aquel, cuyas partes aliquotas juntas no llegan á igualarle; como el 8. cuyas partes aliquotas 1. 2. 4. hacen 7. El abundante es aquel cuyas partes aliquotas juntas hacen numero mayor; como el 12. porque sus aliquotas 1. 2. 3. 4. 6. hacen 16.

De los 28. numeros, que Pedro Bungo *en el cap. 28. de los misterios de los numeros*, dice que son perfectos, solos se hallan ocho perfectos, segun el P. Mariano Mersenno *en la prefacion del tom.* 1. *de su Physico Mathem.* que son los siguientes: 6. 28. 496. 8128. 23550336. 8589869056. 137438691328. 2385843008139952128.

Son los numeros perfectos muy pocos, y añade el dicho Mersenno, que hasta ahora solos se han hallado once; y que para examinar si un numero de 20. guarismos es perfecto, no bastan cien años. Tiempo mal gastado en cosa de tan poca importancia. El primer guarismo de qualquier numero perfecto es 6. ó 8.

PARTE II.

DE LAS MONEDAS, PESOS Y MEDIDAS.

PARA que el Arithmetico pueda formar cuentas, y reducciones de monedas, pesos y medidas de diferentes Reynos, es preciso que primero sepa su quantidad, division y correspondencia. Por eso he recopilado aqui algunas, asi antiguas, como modernas, entresacando lo mas cierto, porque esta materia es muy dificultosa, y del todo no se puede averiguar. En las monedas no hay cosa fixa. Los pesos y medidas son tan diferentes, que aun en un mismo Reyno se halla esta diversidad.

Mo-

Monedas, pesos y medidas de los Romanos antiguos.

La primer moneda que tuvieron los Romanos, fue una libra de cobre sin labradura, ni cuño alguno. Llamaronla *Peso*, *Libra*, ó *As*, como si dixesen *æs*, que es lo mismo que cobre. Y como la libra de peso tenia 12. onzas; correspondientes á los 12. meses del año, segun lo dice Fannio, dividieron tambien el As en 12. partes iguales.

A una parte de estas la llamaron *Uncia*, como si dixeran *uncia*; á dos *Sextans*, que es la sexta darte de 12. á tres *Quadrans*, porque es la quarta parte de los mismos 12. á quatro *Triens*, que es la tercera parte; á cinco *Quincux*; á seis *Semissis*, que es la mitad; á siete *Septunx* á ocho *Bes*; á nueve *Dodrans*; á diez *Dextans*, ó *Decunx*; y á once *Deunx*.

Pero reconociendo los Romanos la incomodidad de esta moneda, y apremiados de la nececisad en la primer guerra contra los Cartaginenses, segun afirman Macrobio y Aulo Gelio, la reduxeron á peso de dos onzas, sellandola con figura de una Res, que por eso, segun Plutarco en la vida de Publicola, la moneda se llama en Latin *Pecunia* del nombre *Pecus*. Despues aun fueron disminuyendola mas hasta media onza, pero quedando el mismo valor, y reparticion; de suerte, que media onza de cobre sellado tenia el mismo valor y division que una libra sin sello.

Aqui es conveniente saber dos cosas. La primera, que esta costumbre de sellar la moneda, aunque segun algunos, la introduxo en los Romanos Servio Tulio su sexto Rey: y segun Macrobio en el 1. de los Saturnales, Jano, que segun algunos fue Noe, á quien los Romanos despues adoraron por Dios; pero si atendemps á lo que dice Josepho, fue Cain el primer inventor de la moneda; y en tiempo de Abraham es cierto que la huvo.

La segunda, que no solo á este genero de moneda, sino á otras cosas tomadas por entero las llamaron *As*; y asi los Jurisconsultos á un heredero de toda la hacienda le llaman *Hæredem ex asse*; y á uno de la tercera parte le dicen *Hæredem ex treinte*. Tambien los Artilleros á la porcion de carbon y azufre, que se pone en la polvora, la llaman *As*, diciendo que la polvora fina consta de As, As, y seis; esto es, de una parte de azufre, otra de carbon, y seis de salitre.

La onza, ó duodecima parte del As tambien tenia sus divisiones, pro porque *Semionza* era la mitad de una onza ; *Siciliaco*, la quarta parte *Duela* la tercera ; *Sextula* la sexta ; *Drachma* la octava. La Drachma tiene 3 escrupulos, ó 60. granos.

Multiplicando el *As* tambien salian otros pesos , como Besis , Tressis , Quadrassis , Descussis , Centussis , &c. que eran 2. 3. 4. 10. 100. asses, ó con otros nombres Dupondio , Tripondio, Quadripondio, Decupondio , Centupondio , &c.

El As siempre se hacia de cobre ; pero habia una moneda muy pequeña de plata , que se llamaba *Libela*, la qual valia lo mismo que un As , como lo atestigua Varron.

El *Sestercio* , dicho en Latin *Sestertius*, era una moneda que valia dos asses y medio ; pero si se nombrava *Sestertium*, ya no era moneda, sino suma , ó numero de moneda , que valia mil sestercios de los primeros, ó 2500. esses.

Quinario era una moneda que valia dos sestercios , ó 5. asses : llamabase tambien *Victoriato*, por estár esculpida en él una victoria, como lo trae Budeo *en el lib.* 1.

Denario era moneda de 10. Asses , ó 2. quinarios , ó 4. sestercios. Siendo de plata era la septima parte de la onza ; porque Plinio *en el lib.* 33. *cap.* 9. dice , que de una libra de peso de 12. onzas se sellaban 84. denarios : con que segun esto , 7. denarios hacian una onza.

De aqui se infiere , que la drachma , siendo de plata valia 8. asses, y tres quartos ; porque como cada onza de peso tenia 8. drachmas , y la libra 96. por otra parte cada libra contenia 84. denarios, y cada uno 10. asses , que son 840. asses, partiendolos por 96. drachmas tocan à cada drachma 8. asses , y tres quartos.

La drachma corresponde casi al valor de un Julio Romano , ó un real de plata Mexicano, pero no al peso ; porque 8. onzas, que es un marco , contienen 64. drachmas , y del marco , segun la disposicion del Rey Don Fernando el Catholico año 1497. la qual siempre se ha observado , se sacan 67. reales de plata Mexicanos : con que el peso del real de plata Mexicano es menor que el de la drachma, porque de un mismo marco (por ser la onza Castellana igual á la Romana antigua , segun Vilalpando , Mariana , Alcazar , y lo comun de los Autores) se sacan mas reales que drachmas.

Y aunque à la verdad el valor de las drachmas es mayor que el del real Mexicano ; pero como la diferencia es muy poca , comunmente se toma por lo mismo. Y asi , valiendo ahora el real de á ocho Mexicano 15. reales de vellon, que son 510. maravedis, valdrá el real sencillo de plata , ó la drachma 63. maravedis , y tres quartos de maravedi , que

al

al presente corresponden à 26 dineros, y un quarto de Valencia; ó 24 dineros de Aragon; y à 42 de Cataluña.

Y segun esta cuenta valdria cada *As* ahora 7 maravedis, y dos septimos, ó 3 dineros de Valencia, y 12, treinta y cinco avos; ó 2 dineros Aragoneses, y 26, treinta y cinco avos, ó 24 dineros Catalanes; y 28 treinta y cinco avos. Y quando los Autores dicen que el *As* vale cerca de 4 maravedís, se han de entender de plata.

Advierto aquí que ahora se hacen en Castilla reales de á ocho, que llaman de Maria, los quales son la quarta parte menores que los Mexicanos; de suerte, que el real de à ocho de Maria vale 8 reales de plata y 12 de vellon; y el Mexicano, Segoviano, ó Sevillano vale 10 reales de plata, y 15 de vellon; y al mismo respeto los reales sencillos, de à dos y de à quatro. Pues para no confundir las cuentas de los Autores, compararé las monedas de las otras Naciones, y Reynos con los reales de plata antiguos, que son los Mexicanos, Segovianos ó Sevillanos.

Advierto tambien que muchas veces toman los Autores el denario y drachma por un mismo valor y peso; pero en la realidad son diferentes; porque el denario era la septima parte de la onza: y la drachma, la octava. Verdad es, que como dice Vilalpando, creciendo la avaricia de los Romanos disminuyeron el denario, haciendole igual á la drachma; y con esto se concilian los Autores.

Obolo era la sexta parte de la drachma. Cada uno contenia 10 granos; era moneda de cobre, segun Budeo *en el lib.* 1, sellada con una saeta. *Diobolo* eran 2 obolos, ó la tercera parte de la drachma. *Triob olo* ó *Hemidrachmio* eran 3 obolos, ó media drachma. *Tetrobolo* eran 4 obolos, ó dos tercios de la drachma.

Sueldo era una moneda de plata ú de oro que pesaba la sexta parte de la onza; y por eso se llamaba tambien *Sextula.* Su tercera parte se decia *Tremissis.*

La mina y talento no eran monedas, sino peso ó suma de moneda. Pesaba la *Mna* ó *Mina* 100 drachmas, y el *Talento* 60 minas ó 6000 drachmas: y asi vendria á 6000 reales de plata.

Algunas de estas monedas y pesos como la Drachma, Mina, y Talento, no eran propias de los Romanos, sino que las tomaron de los Griegos.

La menor medida de longitud que tenian los Romanos, era lo ancho de un grano de cebada.

El *Dedo* ordinario ó menor constaba de 4 granos de cevada juntos por los lados. Ahora le dividen en 12 partes iguales, á las que llaman *Lineas.*

Onza ó Uncia era lo mismo que un pulgar ó dedo mayor; Constaba de 5 granos de cebada y un tercio.

El *Palmo menor ó Quadrante* tenia quatro dedos menores juntos por los lados.

Bes llamaban los Romanos á la exsension del dedo pulgar, y el indice; lo que nosotros llamamos xeme, tenia 8 pulgares, ó dos tercios de un pie.

Dodrante ó Palmo mayor era medio codo ó 9 pulgares. Algunos dicen que era la extension del dedo pulgar y menique.

El *Piè* tenia 4 palmos menores, ó 16 dedos menores, ó 12 pulgares. El piè romano es el mismo que el Geometrico, y es igual al piè Valenciano, que es el tercio de la vara de Valencia, como lo prueba exactamente Joseph Vicente del Olmo, en su Nueva Descripcion del Orbe, *pag.* 92.

El *Codo* contenia pié y medio: era la distancia desde la dobladura del brazo hasta toda la extremidad de la mano; deciase tambien *Ulna.* Es media vara de Valencia.

El *Paso menor,* á quien los Romanos llamaban *Gresus,* tenia dos pies y medio. El *Mayor ó Paso Geometrico* constaba de 5 pies.

La *Pertica ó Radio* constaba de 10 pies.

El *Estadio* tenia 125 pasos, que es la distancia que corrió Hercules con un aliento, y por eso le llamaron Herculeo.

La *Milla* tenia 8 estadios ó 1000 pasos. Los Romanos contaban las millas por distancias de piedras: porque en los caminos ponian colunas de piedra para distinguirlas, y así una distancia de tres piedras, era lo mismo que 3 millas. Esta fue idea de Cayo Gracho, como consta de Plutarco en su vida.

Yugada era un espacio de campo que contenia 28800 pies quadrados. Deciase asi, segun Plinio *lib.* 18, *cap.* 3: porque con un yugo de bueyes se podia arar un dia. Columela en el *lib.* 2, *cap.* 9, dice que para sembrar una yugada de tierra fertil, eran menester 4 modios de trigo, que son 8 celemines Castellanos, y 8 y dos tercios de Valencia.

En quanto á las medidas Romanas de cosas liquidas, se ha de suponer, que asi como los Romanos dividian al *As*, ó libra en 12 partes iguales, tambien dividieron al *Sextario* en 12 Cyathos. Era el Sextario la sexta parte del Congio. El *Cyatho*, segun lo afirma Tirino en en los *Proleg. á la Sag. Escrit.* era un vaso con que solian sacar el vino á los convidados.

A estas 12 partes las llamaron tambien con los mismos nombres que á las de la libra; porque á un vaso, que contenia dos cyathos, le llamaron *Sextante*; al que tenia tres, *Quadrante*: al de quatro, *Triente*, &c.

Cabian en el sextario 20 onzas de agua ó vino (poco se diferencian estos dos licores en el peso) y en el cyatho 1 onza y dos tercios. Asi lo sienten Fannio, Mariana y Tirino. De miel cabian en el sextario 30 onzas, y de aceyte 18 segun el mismo Fannio.

La *Hemina* era la mitad de un sextario: *Quadrante* era media hemina, ó la quarta parte del sextario. *Acetabulo* era la mitad del quadrante, ó la octava parte del sextario: contenia un cyatho y medio.

Ligula era la minima medida de cosas liquidas que tenian los Romanos: servia de cuchara para tomar el caldo, ú otros liquidos; era la quarta parte del cyatho.

El *Congio* era un vaso pequeño, pero al modo de una tinaja; cabian en él 10 libras de agua. Era igual á un vaso cubico ó quadrado por todas partes, de medio pie Romano ó Geometrico. El mismo congio se guarda en el museo Farnesiano, de donde Vilalpando sacó la verdadera quantidad del pié Romano, haciendo un vaso cubico, en el qual cabia la misma agua que en el congio, y el lado del dicho vaso era la mitad del pié.

El *Congio* y el *Chus* ó *Choa* Attico eran iguales, aunque el congio contenia 6 sextarios Romanos, y el chus 8 Atticos; porque el sextario Attico ó Griego era menor que el Romano. Del nombre *Congio* fue llamado Movelio Torquato, Caballero Milanés, *Tricongio*; porque segun lo atestigua Plinio *lib.* 14, *cap.* 22, bebió tres congios de vino en un aliento, en presencia de Tiberio Cesar, que son 30 libras. Por la misma causa el hijo de Ciceron fue llamado Bicongio.

La *Urna*, aunque era un vaso en que solian guardar las cenizas de los muertos; pero tambien fué tomado por medida, que contenia 4 congios; y era la mitad del Anfora.

La *Anfora*, *Cantaro* ó *Quadrantal* era un vaso que contenia 8 congios, ó 2 urnas, ó 3 modios: Era igual á un vaso cubico de un piè Romano, à una Metretą de los Griegos.

El *Culeo* era la mayor medida de cosas liquidas que tenian los Romanos; cabian en él 20 anforas, ò 160 congios; era de cuero de Búfalo, y para llevarle era menester un carro.

Los Romanos tenian pocas medidas de cosas aridas ó secas, porque usaban tambien de las medidas de los liquidos. La mayor era el *Modimno*, que contenia 6 modios. Diodoro *lib.* 3 *cap.* 12, dice que la carga de un Camello es de 10 Medimnos.

El *Modio ó Celemin* era una medida en el qual cabian 16 sextarios, los quales siendo de agua pesarian 26 lib. y 8 onzas. El *Modio* era igual al *Sato* de los Hebreos, como lo prueba Mariana pag. 76, contenia 2 celemines Toledanos. Un modio de Trigo levisimo, dice Plinio *lib.* 18, *cap.* 7, que no excede el peso de 20 libras Romanas.

Los Romanos, como lo atestiguan Donato y Polibio, solian dar á los soldados y esclavos cada mes 4 modios de trigo para su sustento; y por eso à la medida de 4 modios la llaman algunos *Demenso*: pero otros dicen que el demenso era aquella medida ó porcion de trigo que correspondia à cada dia; y asi el modio contiene 7 demensos y medio, y cada uno es la comida escasa de un hombre.

Monedas, pesos y medidas Atticas, ó de los Griegos.

Muchas monedas, pesos y medidas de los Griegos, fueron las mismas que las de los Romanos, porque unos las tomaron de otros. De la onza es comun sentir de todos, que fué una misma en los Romanos, Griegos y Hebreos, y en casi todas las Naciones.

El Talento Attico fué en dos diferencias; el uno mayor, y el otro menor. Entrambos contenian ó pesaban 60 minas; pero el un genero de minas pesaba 100 drachmas, y el otro 75.

La *Drachma* era la octava parte de la onza.

El *Estater* era una moneda de plata, que pesaba 4 drachmas, ó media onza, igual al *Siclo* de los Hebreos; y aun en algunos lugares de la Sagrada Escritura, en donde el Hebreo lee *Siclo*, en Latin se pone *Stater*, como lo advierte Mariana en el *lib. de Pend. & Mens.* Habia tambien Estateros de oro que pesaban doblado.

El *Cistoforo* era una moneda de plata, que pesaba casi lo mismo que el Donario Romano.

El *Obolo* es la sexta parta de la drachma.

La *Gramma* era la tercera parte de la drachma, igual al scrupulo Romano, cuya mitad igualaba al obolo.

El *Geracio* era la tercera parte del obolo, ó la 18 parte de la drach-

drachma. El ceracio y filiqua Romana eran de un mismo peso. El *Calco ó Ereolo* era la mitad del cerabio.

El *Sitario* era la mitad del calco, contenia 3 leptas y media. Era la lepta el menor peso de los Griegos.

La menor medida de longitud de los Griegos fue lo ancho de un grano de cevada, como en los Romanos; pero como los granos eran diferentes segun la fertilidad de la tierra, aunque muchas de las medidas Griegas y Romanas constasen de un mismo numero de granos, no fueron iguales.

El *Dactylo* ò dedo tenia 4 granos de cevada juntos por los lados.

Palecte ò palmo menor tenia 4 dedos: era la sexta parte de un codo. Llamavanle tambien los Griegos *Dochme*, *Dactylodochme* y *Doron*.

Lycas era la extension entre las extremidades del dedo indice y pulgar, que nosotros decimos xeme; contenia 10 dedos.

Orthodoron era la longitud de la mano; tenia 11 dedos, segun Polux *lib.* 2.

Espithame ó palmo mayor tenia 12 dedos. Algunos dicen que era la extension del dedo pulgar y menique.

El *piè* tenia 4 palmos menores ó 16 dedos. Era media uncia ó pulgar mayor que el pie Romano, y cerca de un quadrante menor que el Hebreo: Con que el pié Romano ó Valenciano, respeto del Griego seria como 24 à 25: y respeto del Hebreo, como 3 à 4. El piè Griego al Hebreo es como 25 à 32, y así 25 pies Romanos hacian 24 Griegos. Item, 4 Romanos eran 3 Hebreos. Mas 32 Griegos hacian 25 Hebreos.

El *Pygme* era desde la dobladura del brazo, hasta las raizes de los dedos; tenia 18 dedos.

Codo era la distancia que hay desde la dobladura del brazo hasta toda la extension de la mano, que es pié y medio ó 24 dedos.

Orgyia ó paso constaba de 6 pies ò codos, era lo mismo que una brazada, ó quanto las dos manos se pueden extender, que es la estatura de un hombre. A una medida de 6 pies Romanos la llaman ahora *Hexampeda*.

El *Pletbro* ó *Peletbro*, à quien los Latinos llamaron *Jugerum*, constaba de 100 pies: era la sexta parte del estadio. El *Arvo* tenia 100 codos.

El *Estadio* constaba de 100 orgyias ó pasos. El estadio Griego era igual al Romano, aunque el numero de los pasos y pies era des-

igual;

igual; porque el estadio Romano tenia 125 pasos, que son 625 pies; y el estadio Griego constaba de 100 pasos ó 600 pies; como el piè Griego era una parte vigesimaquartà mayor que el Romano, por eso los 600 pies Griegos igualaban á los 625 Romanos.

El *Diaulo* contiene 2 estadios. El *Hippicon* 4 estadios. La *Milla* 8 estadios. El *Dolichos* 12 estadios.

La *Parasanga* constaba de 30 estadios, y la llamaban *Scheno* simple. El *Scheno* compuesto era de 60 estadios. Otro scheno habia de 40 estadios. El *Estatamo* se componia de 4 schenos simples.

De las medidas de cosas liquidas la Anfora era la mayor: contenia 12 chus ó choas, que son iguales al congio Romano. Llamavase tambien *Metreta*, *Ceramio* y *Cado*. Era casi igual à un vaso de un piè cubico Griego. Esta era la Metreta mayor, porque segun Alcazar habia otras menores, y en particular una igual à la anfora Romana de 8 congios.

La *Artaba* no era medida Griega, sino Egypcia, aunque estaba reputada por Attica; contenia un anforeo y medio, y casi 9 choas.

Anforeo era un vaso que contenia 6 choas, ó congios Romanos.

El *Chus* ó *Choas* era igual al congio Romano: contenia 6 sextarios Romanos, ó 8 Atticos.

El *Sextario* Attico era la octava parte del congio Romano; con que el Sextario Attico al Romano era como 8 à 6, ó como 4 á 3, y así 3 sextarios Romanos hacian 4 Griegos; contenia 2 cotylas. Cabian en el sextario Attico 15 onzas de agua.

Cotyla ó *Triblio* es la mitad del sextario. El *Quartario* ó *Hemicotylio* era la quarta parte del sextario. El *Oxybafo* era la octava parte del sextario. El *Cyatho* la duodecima.

Conca es la metad del cyatho. *Mistro* la quarta parte del cyatho. El *Cheme* la quinta parte. El *Cochlear* la decima.

La mayor medida Attica de cosas secas era *Cypsele*, contenia 6 medimnos: era la quinta parte mayor que el *Coro* de los Hebreos.

El *Medimno* Attico era igual al Romano; contenia 6 modios ó celemines; cabian en él dos anforas Romanas de agua ó 96 sextarios Romanos; contenia tambien 12 *Hemiectos* ó 48 chenices.

El *Chenix* era la menor medida de cosas secas que tenian los Griegos; cabian en él 2 sextarios Romanos, y era la medida de una comida escasa de un hombre en un dia.

Monedas, pesos y medidas de los Hebreos.

Los pesos y medidas de los Hebreos casi todos eran doblados de los Romanos, excepto la onza que era igual, como lo nota Tirino en el lugar citado; y el obolo que era poco mayor.

El *Kikar* ó *Talento* pesaba 60 Minas Hebreas, ó 120 Romanas. El Siclo alguna vez tambien se solia llamar Talento, como lo nota Mariana. Algunos admiten dos modos de Talento; uno del Santuario, del tiempo de Moyses, que pesaba 24000 drachmas: y otro de la Congregacion ó Comun que contenia 12000 drachmas.

La *Mina*, segun Vilalpando y Tirino *en el cap.* 45. *v.* 12 de Ezechiel, era en dos maneras; la una del Santuario ó Sagrada que contenia 60 siclos, ó 240 drachmas: y otra comun que pesaba 50 siclos, ó 200 drachmas.

El *Siclo* tenia 4 drachmas; era media onza, la qual era igual à la Romana.

La moneda de los Hebreos solia regularse por el peso del Siclo ó Estater; esto es, ó era igual al Siclo, ó à la metad, ó al quarto, &. Y asi advierten muchos con Vilalpando *tom.* 3. *pag.* 401. que quando en la Sagrada Escritura se nombra *Aureus* ó *Argenteus*, sin añadir otra palabra, se entiende Siclo. Algunos quieren que el Siclo de oro fuese doblado del de plata; y que pesaba una onza.

El Gbera ó *Obolo* era la vigesima parte del Siclo, como consta del *cap.* 30, *v.* 13. del Exodo, y del *cap.* 45. *v.* 12. de Ezechiel; la drachma contenia 5 obolos Hebreos. El obolo pesa 16 granos de cevada, y 14 y medio de trigo.

La menor medida de longitud de los Hebreos era el dedo, el qual era igual al pulgar Romano, como lo afirma Mariana *lib. de pond. & mens. pag.* 118. Del dedo ninguna mencion se hace en la Sagrada Escritura, sino en los libros de los Rabbinos.

Topbach, ó palmo menor, constaba de 4 dedos juntos por los lados.

Zeretb, ó palmo mayor, era la extension del pulgar y dedo menique de un hombre de grande estatura; contenia 3 palmos menores, ó 12 dedos pulgares; y asi era igual al pié Geometrico.

Pagbàm ó pié tenia 16 dedos, que era un pié y un tercio Geometrico. Conque el piè Hebreo al Geometrico era como 4 à 3, y al Griego, como 32 à 25.

El *Amàcb* ó codo, segun algunos era en dos maneras; uno legal,

que

que tenia un pié y medio de los Hebreos, ó 6 palmos menores: y otro comun de 5 palmos, ó 20 dedos.

Quanech, ó calamo, tenia 6 codos legales: asi lo sienten San Geronimo, Vatablo, Moldonato, y otros: y que el lugar de Ezechiel 40 *v.* 5. *Et in manu viri calamus mensura sex cubitorum & palmo*, se ha de entender asi: *Sex cubitorum ex cubito & palmo.* Veanse los expositores sobre este lugar.

Beráth, ó milla, constaba de 1000 codos comunes. Llamavase tambien *Chibrath terræ.* Dos destas era la distancia que podian caminar el Sabado.

Pasah, ó milla grande tenia 4 millas de las menores, ò 4000 codos.

El *Battho* ó *Bado* era un vaso en que cabian 72 sextarios Hebreos: segun San Geron. sobre el 45 de Ezech. y Josepho *lib.* 8, *cap.* 2 ó 48 sextarios Romanos; y así era igual al Ephi y à la Anfora de los Romanos. Algunos quieren que hubiese otro Batho legal, que era la mitad mayor, ò de 72 sextarios Romanos. Cabrian en el Batho 15 azumbres Castellanos.

El *Hin* era medida que contenia 12 sextarios Hebreos.

El *Log*, ó sextario, contenia quanto seis huevos de agua, que segun Mariana son 13 onzas y un tercio: con que el sextario Romano era la mitad mayor que el Hebreo, ò como 3 à 2. El sextario Attico al Hebreo como 9 à 8.

El *Huevo* era la menor medida de liquidos; pesava siendo de agua 2. onzas, y cerca de un quarto.

El *Chomer* ó *Coro* era la mayor medida Hebraica de cosas liquidas, y secas; porque entrambas cosas media, como consta del 3. de los Reyes, *cap.* 5. *v.* 11. que Salomon dava cada año al Rey Hirám veinte mil coros de trigo, y veinte coros de aceyte. Contenia 10. Bathos, ó Ephi, como consta de Ezechiel *cap.* 45. *v.* 11. en donde se dice, que el Batho, y Ephi eran medidas iguales, y entrambas la decima parte del Coro; solo se diferenciavan, en que el Ephi era medida de cosas secas, y el Batho de liquidas.

Contenia el *Coro*, segun San Geronimo sobre el *cap.* 45. de Ezechiel, 5. Medimnos, ó 30. Modios; y siendo de trigo pesarian por lo regular 600. libras.

El *Ephi* era la decima parte del coro; y asi cabrian en él 3. Modios, como consta del *Cap.* 2. *v.* 17. de Ruth.

El

El *Sato* era la tercera parte del Ephi: con que seria igual á un medio ; contenia 6. cabos , ó 4. sextarios Hebreos.

El *Gomor* era la decima parte del Ephi , como consta del Exodo *cap.* 16. *v.* 6. y asi , el trigo que cabria en el avia de pesar 36. libras; contenia un cabo , y quatro quintos. Era medida señalada por el mismo Dios para recoger el Manna , para el sustento de un dia de cada persona.

El *Cabo* era una medida que contenia 4. sextarios Hebreos.

Monedas , pesos y medidas de Castilla.

Solo pondré las monedas corrientes de Castilla , y estos Reynos, dexando las que no están ahora en uso. Y de las monedas, pesos y medidas hablaré solamente de las que corren en las cabezas de los Reynos , ó de las mas comunes.

El doblon de peso vale al presente quatro reales de á ocho Mexicanos.

El real de à ocho Mexicano , Segoviano , Sevillano vale 10. reales de plata , ó 15. de vellon.

El real de á ocho de Maria vale 8. reales de plata , ó 12. de vellon.

El real de vellon vale 34. maravedis , ó 8. quartos y medio.

El quarto tiene 4. maravedis.

El ochavo 2. maravedis.

El quintal , ó centupondio tiene 4. arrobas , ó 100. libras.

La arroba contiene 25. libras.

La libra 16. onzas.

La onza 16. adarmes.

El marco tiene 8. onzas , que son media libra ; si es de oro se divide en 50. Castellanos , cada Castellano en 8. tomines , y cada tomin en 12. granos. Pero si es de plata se divide en 8. onzas , cada onza en 8. ochavas , y cada ochava en 75. granos ; aunque algunos quieren que se divida en 6. tomines , y por consiguiente en 72. granos : Y asi que los granos del marco de la plata sean menos en numero que los del oro , pero todos juntos en el peso iguales.

La onza de Castilla es igual á la Romana , asi antigua como moderna , á la Griega y Hebrea , segun Titino , Alcazar , Vilalpando, Mariana y otros. Segun Alcazar es tambien igual á la de Paris y Venecia. Mas , 32. onzas de Castilla hacen 31. de Valencia; y asi, una

libra

libra de Castilla son 15. onzas y media de Valencia; 35. de Castilla hacen 36. de Aragon, segun la Tabla de los pesos de Puig: y 14. de Castilla hacen 12. de Cataluña, segun el mismo Autor.

La vara tiene 4. palmos, ó quartas.

El palmo 12. dedos ordinarios.

El pié es la tercera parte de la vara.

El codo es media vara, ó pié y medio.

Si se toman 13. pies de Castilla, harán 12. Romanos, ó Valencianos, porque estos dos son iguales, como queda dicho; con que 13. varas de Castilla son 12. de Valencia 9. pies Castellanos hacen 8. Griegos. Mas, 4. pies Castellanos hacen 3. Hebreos. Mas 107. pies de Castilla hacen 100. de Mallorca, Barcelona y Caller.

Lo mismo que se dice de pies se entiende de palmos, y varas, porque guardan la misma razon; y asi, 13. palmos, ó varas de Castilla son 12. de Valencia,

El *Moyo* es la mayor medida de cosas liquidas, tiene 16. cantaros, ó arrobas.

El cantaro tiene 8. azumbres.

El azumbre 4. quartillos, ó sextarios Castellanos.

El cantaro de aceyte tiene 4. quartas.

Una quarta 16. panillas La panilla pesa casi 4. onzas.

Cinco sextarios Castellanos hacen 4. Romanos y 6. Hebreos. Item, 15. Castellanos son 16. Griegos. El sextario Castellano de agua pesa 16. onzas Castellanas; y por aqui se puede sacar la correspondencia á otras medidas.

Un cahiz tiene 12. hanegas, ó medimnos Romanos.

La hanega 12. celemines, que son 6. modios Romanos.

El celemin 4. quartillos; cabe en el celemin 10. sextarios Castellanos, ú 8. Romanos.

Dos celemines de Castilla son un modio Romano, y 8. chenices Griegos. Mas, 3. celemines hacen 5. Gomor. Mas, 12. celemines de Castilla son 13. celemines Valencianos, segun Puig en el lugar citado y 32. hanegas Castellanas son 25. quarteras de Barcelona.

Monedas, pesos y medidas de Valencia.

La libra tiene 20. sueldos, y tambien 10. reales Castellanos.

El

El sueldo 12. dineros.

El real Castellano 24. dineros.

El real Valenciano 18 dineros.

El doblon vale 3. lib. 17. sueldos.

El real de á 8. Mexicano 19. sueldos, y 6. dineros.

El diezyocheno de plata de los ultimos batimientos es médio denario Romano antiguo.

La carga tiene 3. quintales, quando la arroba es de 30. libras; pero quando es de 36. tie 10. arrobas, y tanto pesa la carga en un caso como en otro.

El quintal 4. arrobas de 30. libras.

La arroba es en dos maneras, una de 30. lib. que llaman sutil, ó de peso delgado; y otra de 36. libras, que es la gruesa; y esta es la mas ordinaria. La arroba de la harina tiene 32. libras.

La libra 12. onzas, sino es de pescado fresco menudo, que tiene 16. onzas, y de pescado gordo 18. La de carne 36.

La onza tiene 4. quartos.

El quarto 4. adarmes.

El adarme 36. granos, solo el de olores tiene 32. granos.

31. onza de Valencia hacen 32. de Castilla: 23. onzas, ó libras de Valencia son 24. de Zaragoza, y 20. de Barcelona, y Mallorca, segun el dicho Puig.

La vara tiene 4. palmos, y tambien 3. pies.

El palmo 4. quartos.

El quarto 3. dedos.

El codo es media vara.

La braza real tiene 9. palmos; y siendo quadrada tendrá 81. palmo

La cuerda para medir los campos tiene 20. brazas, ó 45. varas.

La fanega de tierra tiene 200. brazas quadradas.

La cahizada 1200. brazas quadradas, ó 6 fanegadas.

La yugada 7200. brazas quadradas, ó 6. cahizadas.

12. palmos, pies, ó varas de Valencia son 13. de Castilla. Mas, 44. palmos de Valencia hacen 51. de Zaragoza, y 50. de Barcelona, y Mallorca segun Puig; pero segun Cortés, 100. palmos de Valencia son 114. de Aragon. El pié de Valencia es igual al Geometrico, ó Romano antiguos.

La carga de vino, y vinagre tiene 15. cantaros, ó arrobas.

El cantaro 4. quartas, ó azumbres.

La carga de aceyte tiene 12. cantaros, ó arrobas.

Teniendo el cantaro, ó arroba 36. libras, 16. azumbres de Valencia hacen 26. Castellanos, con poca diferencia; pero teniendo el cantaro 30. libras, 22. azumbres Valencianos son los mismos 26. Castellanos, tambien con poca diferencia.

El cahíz tiene 12. barchillas.

La barchilla 4. celemines.

El celemin 4. quarterones.

Trece celemines de Valencia son 12. de Castilla. Mas 48. celemines, ó un cahíz de Valencia son 42. celemines, ó 3. hanegas y media de Aragon, segun Cortés. Item 104. barchillas de Valencia son 25. quarteras de Barcelona, segun Puig.

Monedas, pesos, y medidas de Aragon.

La libra tiene 20. sueldos.

El sueldo 12. dineros.

El real Castellano 24. dineros.

El doblon vale 3. lib. 4. sueld.

El real de á ocho Mexicano 16. sueldos.

La carga tiene 3. quintales.

El quintal 4. arrobas.

La arroba 24. lib. y 30. lib. y 36. lib. segun fuere la mercadería.

La libra 12. onzas; y siendo de pescado, ó carne 36.

La onza 4. quartos.

El quarto 4. adarmes.

El adarme 32. granos.

36. onzas de Aragon son 35. de Castilla. Item, 24. lib. de Aragon son 23. de Valencia, y 20. de Barcelona.

La vara tiene 4. palmos.

El palmo 4. quartos.

51. varas de Aragon son 44. de Valencia, y 50. de Barcelona.

Un nietro de vino, ó carga tiene 16. cantaros.

Un cantaro 28. libras.

El

El cahiz tiene 8 hanegas.
La hanega 3 quartales, aunque no en todas partes.
El quartal 4 celemines.
42 celemines de Aragon son 48 de Valencia.

Monedas, pesos, y medidas de Cataluña.

La libra tiene 20. sueldos.
El sueldo 12. dineros.
El real Castellano 24. dineros.
La dobla 55 reales.
El real de á ocho Mexicano 14 reales.

La carga tiene 3. quintales.
El quintal 4. arrobas.
La arroba 26 libras.
La libra 12 onzas.
La onza 4. quartos.
El quarto 4. adarmes.
El adarme 36. granos.

100. onzas de Cataluña son 117. de Castilla, 115 de Valencia, y 120. de Zaragoza, segun el dicho Puig.

La vara tiene 8. palmos.
El palmo 4. quartos.

100. palmos de Barcelona son 107. de Castilla, y 88 de Valencia, y 102. de Zaragoza, segun el mismo Autor.

La carga de vino 32. quarteros.
El quartero 4. quartos.
La carga de aceyte 30. quartanes.
El quartan 16. quartas.

La quartera de trigo tiene 12. quartanes.

El congio Romano, que segun queda dicho era un vaso igual á un cubo de medio pié Geometrico, esto es á un vaso quadrado por todas partes, que tenga medio pié Geometrico por cada lado, lleno de las especies siguientes pesaria las onzas Romanas, Griegas, Hebreas ó Castellanas (todas son iguales) que señala esta tabla, segun las experiencias mas exactas de Mersenno, y otros Autores; de suerte, que un cubo de oro de medio piè Geometrico pesa 2250 onzas; de azogue 1608 onzas y tres quartos, &c. Y asi, con esto queda conocida la proporcion de los metales, y otras especies.

De oro	2250 onzas.	De marmol	472 onz. $\frac{1}{2}$
De azogue	1608 onz. $\frac{3}{4}$	De piedra comun	315 onzas.
De plomo	1361 onz. $\frac{1}{4}$	De cristal	281 onz. $\frac{1}{4}$
De plata	1127 onz. $\frac{1}{2}$	De azufre	270 onzas.
De cobre	1065 onzas.	De miel	180 onzas.
De laton	1012 onz. $\frac{1}{2}$	De agua	120 onzas.
De hierro	945 onzas.	De vino	118 onz. $\frac{1}{2}$
De estaño comun	877 onz. $\frac{1}{2}$	De cera	112 onz. $\frac{1}{2}$
De estaño puro	892. onz. $\frac{1}{2}$	De aceyte	108 onzas.
De piedra iman.	585 onzas.	De harina	54 onzas.

La correspondencia de las monedas modernas con facilidad se puede saber por el valor del real de á ocho. La de los pesos y medidas es mas dificultosa, porque no tenemos copia de pesos y medidas, justos de otros Reynos para conferirlos con toda puntualidad, como pide esta materia; y esa es la causa porque los Autores no concuerdan, sino los que se copian unos à otros. Algunos pesos y medidas están aquí averiguados con toda la precision que en esto cabe. Otros, solamente segun los traen los Autores. Ahora faltan las divisiones del tiempo y circulo, en órden à la astronomia.

El año civil, si es comun, tiene 365 dias: pero si bisextil 366.
El dia 24 horas.
La hora 60 minutos.
El minuto 60 segundos.
El segundo 60 tercios; y así infinitamente.
El mes, por el trato comun y mercantil se toma por 30 dias.

El circulo tiene 360 grados; y si es la Ecliptica se divide en 12 signos, y cada uno en 30 grados.
El grado tiene 60 minutos.
El minuto 60 segundos.
El segundo 60 tercios; y asi prosiguiendo sin termino.

LIBRO I.

DE LA LOGISTICA DE LOS NUMEROS.

LOGISTICA es una parte de la Arithmetica practica, que trata de las quatro reglas elementares de Sumar, Restar, Multiplicar y Partir, que comunmente llaman *Algorithmo* de los numeros. Contiene quatro partes: La primera trata de los numeros enteros; la segunda, de los quebrados; la tercera de los numeros denominados por diferentes especies; la quarta, de las partes decimales.

PARTE I.

LE LA LOGISTICA DE LOS ENTEROS.

40 NUMERO entero, es el que se expresa como á todo, sin decir orden á componer, ò ser parte de otro numero; como 6. 10. 24.

En los proemiales dimos regla para escrivir cada numero de por sí. (12) Aora que entramos à tratar de muchos numeros juntos, es forzoso declarar el modo de escrivirlos, segun la disposicion que piden casi todas las reglas de Arithmetica.

41 Escrivanse los numeros unos debaxo de otros, de modo, que las unidades corresponden á unidades; las dezenas, á dezenas; centenas, á centenas, &c. formando una coluna de unidades, otra de dezenas, otra de centenas, &c. como parece en el exemplo. Este orden se guardará siempre que no se advierta otra cosa en contrario.

308157
1500
12346
5032
10
1060

Siempre que los numeros se huvieren de escrivir juntos, se tendrán presentes estas dos advertencias. La primera, que la coluna de las unidades, que es la primera, ha de estár siempre llena; de suerte, que si ay algun vacío, esté en las otras colunas; pero no en la primera; lo qual necesariamente se sigue del orden que hemos señalado antes, para escrivir muchos numeros.

La segunda, que en una coluna jamás se pongan dos guarismos, sino cada uno en su coluna, paraque deste modo no se confundan las unidades con dezenas, dezenas con centenas, &c.

CAPITULO PRIMERO.

DEL SUMAR.

42 SUmar es juntar muchos numeros en uno para saber el valor de todos juntos; como sumando 8. con 4. sabemos que hazen 12. Los numeros que se han de sumar, comunmente se dizen *Partidas*, y el agregado dellas *Suma*. Las partidas, todas han de ser homogeneas; esto es, de una misma especie, como libras, ó arrobas, ó varas, &c. porque no ay arte para sumar libras con varas, Reales con arrobas, &c. La suma siempre es homogenea con las partidas.

Dirá alguno; cómo puede ser, que no aya arte para sumar numeros hetereogeneos, ò de diferentes especies, pues hallamos muchas sumas como esta: 4. arrobas, y 20. libras, en las quales están juntas cosas de diferente especie?

Respondo, que quando la una es parte de la otra, como las libras, que son parte de arroba se suman poniendo la especie menor al lado de la mayor mediante las particulas *y*, ò *mas* deste modo: 4. arrob. y 20. lib. ó deste otro: 4. arrob. mas 20. lib. que es lo mismo que dezir, que además de las 4 arrob. ay 20. lib. pero no se suman haziendo un

nu-

numero de todas las especies, como lo hacemos en los homogeneos; porque cada especie ha de estár distinta: y haciendo un numero de todas, que en el exemplo sería 24. no podriamos decir que eran arrobas, ni libras.

Preceptos.

43. Primero: Escribanse las partidas, de modo, que las unidades correspondan à unidades, decenas à decenas, &c. como se dixo arriba (41) y tirese una linea por debaxo las partidas.

44 Segundo: Sumense los numeros de cada coluna, comenzando por las unidades; y si la suma tuviere un solo guarismo, escrivase debaxo la linea enfrente la coluna que se suma; pero si tuviere muchos, escrivase el primero como antes, y el otro, ú otros guardense en la memoria para sumarlos con los numeros de la coluna siguiente; sino es, que la coluna sumada sea la ultima, pues en tal caso los guarismos guardados se escrivirán debaxo la linea mas adelante ácia la mano izquierda.

45 Tercero: Si entre los numeros de alguna coluna ocurriere alguno, ò algunos zeros, no se haga caso dellos, sino sumense los guarismos significativos como antes; y si toda la coluna fuere de zeros, escrivase un zero debajo la linea, si es que no se guarda algo de la coluna antecedente, pues entonces se deve escribir lo que se guardó. Con los exemplos estará todo manifiesto.

Exemplo I.

Escritas las partidas, como está dicho (43) comenzaré la suma por la coluna de las unidades de arriba á baxo, ò al contrario, que en esto no ay singular misterio, diciendo: 3. y 0. hacen 3. y 4. son 7. porque esta suma solo tiene un guarismo, le escrivo debaxo la linea enfrente la coluna que he sumado, y no guardo cosa alguna. Paso à la segunda coluna, diciendo: 0. y 2. son 1. y 2. son 3. escrivo el 3. y nada guardo. Paso à la tercera coluna, diciendo: 1. y 5. son 6. y 2. son 8. pongo 8. y está concluída la suma.

103
510
224
———
837

Exemplo II.

Los numeros 8. 0, 5. 7. de la primer coluna, sumados hacen 20. y porque en 20. ay dos guarismos: escrivo el primer 0. debaxo la linea, y enfrente la dicha coluna, y guardo el segundo guarismo 2. para sumarle con los numeros de la coluna siguiente. Pues digo, 2. que guar-

97068
20
28005
9087
———
134180

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA GRANADA

guardava, y 6. de la segunda coluna hacen 8. y 2. son 10. y 0. son los mismos 10. y 8. son 18. escrivo el 8. y guardo el 1. y porque en la tercer coluna todos son zeros, escrivo debaxo la linea el 1. que guardaba. Los numeros 7. 8. 9. de la coluna quarta hacen 24. pongo 4. y llevo 2. que con los numeros 9. 2. de la ultima coluna son 13. pongo el 3. debaxo la ultima coluna, y el 1. un lugar mas adelante.

Exemplo III.

Porque en la primera, y segunda coluna todos son zeros, escrivo dos zeros debaxo la linea, de cada uno enfrente de su coluna. En la tercera solo está el 5. significativo, pues escrivo 5. debaxo la linea. En la quarta coluna todos son zeros, y nada guardava. pues pongo 0. En la quinta coluna están 6. 1. 2. que hacen 9. los quales escrivo. En la sexta coluna solo está el 3. el qual escrivo debaxo la linea. Paso á la ultima coluna, en la qual solo hallo al 2. pongole debaxo la linea, y está concluída la operacion.

$$\begin{array}{r} 2360000 \\ 10000 \\ 20500 \\ \hline 2390500 \end{array}$$

Demonstracion.

La demonstracion consiste en probar, que tantas unidades ay en la suma, como en las partidas; porque si esto consta, estará claro, que la suma es igual á todas las partidas juntas. Y paraque la demonstracion no sea puramente abstracta, me valgo del Exemplo II.

Sumando, pues, los numeros de la primer coluna hacen 20. unidades, que son dos decenas justas, pues por eso he puesto el 0. debaxo la coluna de las unidades, que es decir, que no ay unidad alguna, y he guardado las 2. decenas para juntarlas con la segunda coluna, que es de decenas.

Juntando aora estas dos decenas con los numeros de la segunda coluna hacen 18. decenas; y porque el 8. son decenas, las he escrito debaxo la coluna de las decenas, y he guardado una decena de decena, ò ciento, para juntarlo con la coluna siguiente de las centenas, la qual toda es de zeros, y por eso se ha escrito sola la decena guardada.

Los millares de la quarta coluna son 24. se han escrito los 4. millares, y se han guardado 2. decenas de millar, las quales sumadas con la siguiente coluna, que es decenas de millar, hacen 13. pues se han escrito las 3. decenas, y la decena de decena, ò cien mil, se ha escrito en lugar mas adelante. Con que ni se ha perdido, ni añadido de nuevo unidad alguna: Luego tantas unidades ay en la suma, como en las partidas.

Observaciones.

46 Si las partidas fueren muchas, será conveniente, para no fatigar la cabeza, dividirlas en diferentes clases; y aviendo sumado ca-

da clase de por sí, se juntarán despues las sumas; como si huviere veinte partidas, tiro una linea por debaxo de las primeras diez, y las sumo despues: sumo las otras diez, y juntando estas dos sumas, tendré la suma total.

47 La suma de numeros pares siempre es par, Euc. *prop.* 21. *del lib.* 9. La suma de impares será par quando el numero de las partidas fuere par, Euc. *prop.* 22. *del lib.* 9. Pero si fuere impar, será tambien la suma impar, Euc. *prop.* 23. *lib.* 9. De donde se infiere, que sumando numero par con par, ò impar con impar, la suma es par; pero sumando par con impar, hace impar.

48 Si dos numeros entre sí primos, como 4. y 7. se suman, el numero de la suma 11. será tambien entre sí primo á qualquiera dellos, Euc. *prop.* 30. *del lib.* 7.

CAPITULO SEGUNDO.

DEL RESTAR.

49 Restar es quitar un numero de otro mayor, ò igual para hallar la diferencia; como quitar 4. de 6. para saber la diferencia 2. ò quitar 4. de 4. para hallar la diferencia zero.

En esta regla solo concurren dos numeros, y se busca un tercero. El primero de los que concurren es de quien se resta, como en el exemplo propuesto es el 6. al qual suelen llamar los Mercaderes *Deuda*. El segundo es el que se resta, como el 4. y se llama *Paga*. El tercero es la *resta*, *diferencia*, ò *residuo*, como el 2. La deuda, y paga han de ser homogeneas, ò de una especie. La resta tambien sale homogenea con la deuda, ò paga.

Preceptos.

50 Primero: Escrivase la paga debaxo la deuda, quando la paga es menor, ò igual; pero quando es mayor, pongase la paga encima, y la deuda debaxo, para saber lo que se pagó mas, de suerte, que el numero menor siempre ha de estár debaxo del mayor, correspondiendo las unidades à unidades, decenas á decenas, &c. (41) y tirase una linea por debaxo.

51 Segundo: La operacion se comenzará de la mano derecha ácia la izquierda, restando cada guarismo inferior de su superior,

y escriviendo la diferencia debaxo la linea, enfrente del guarismo que se resta. Y porque el guarismo inferior puede ser menor, igual, ò mayor que el superior, se guardará el precepto siguiente.

52 Tercero: Si el guarismo inferior es menor que el superior, hecha la resta, se pondrá la diferencia debaxo la linea, como queda dicho. Si es igual, y no se guarda algo de la operacion antecedente, escrivase zero. Pero si es mayor, tomese la diferencia del guarismo inferior hasta 10. y juntandola con el guarismo superior, escrivase la suma debaxo la linea, y entonces se guardará 1. para juntarlo con el guarismo inferior siguiente.

53 Quarto; Si el guarismo inferior fuere zero, y no se guarda algo de la operacion antecedente, escrivase el mismo guarismo superior debaxo la linea; lo mismo se hará quando el guarismo inferior fuere 9. y se guarda 1. de la operacion antecedente.

54 Quinto: Si en el numero superior, ò paga quedan algunos guarismos que no tengan inferiores, y no se guarda algo de la operacion antecedente, escribanse debaxo la linea. Todo estará claro en los exemplos.

Exemplo I.

Pero devia 879. reales, y pagó 138. reales, quiere saber lo que queda deviendo. Escrita la deuda, y debaxo la paga; comience la operacion, diciendo: Quien deve 9. y paga 8. queda deviendo 1. escrivale debaxo del 8. Pase á la otra coluna, diciendo: Quien deve 6. y paga 3. queda à dever 3. escrivale debaxo el 3. Pase á la otra coluna: Quien deve 8. y paga 1. deve 7. escrivale, y sabrá que deve 731. reales.

$$\begin{array}{r} 869 \\ 138 \\ \hline 731 \end{array}$$

Exemplo II.

Comienzo por las unidades, diciendo: Quien de 8. quita 3. le quedan 5. escrivo 5. y paso á la segunda coluna: quien de 6. quita zero, ò nada, quedan 6. pongo 6. y paso á la otra coluna: quien de 3. resta 4. no puede (aqui entra el precepto tercero) pues digo, de 4. hasta 10. ván 6. y 3. de arriba son 9. escrivoles, y llevo 1. el qual junto con el guarismo inferior siguiente, que es 0. y hace 1. Aora digo: quien del 0. de arriba quita 1. no puede, pues de 1. hasta 10. van 9. y 0. de arriba son 9. escrivo 9. y llevo 1. que con el 9. inferior siguiente hacen 10. Digo aora, quien de 9. de arriba quita 10. no puede, pues de 10. á 10. va zero, y el nueve superior son 9. escrivole, y llevo 1. Paso adelante: quien de 1. quita el 1. que guardaba, queda zero; escrivole, y tambien el 3. que tiene inferior, y está concluída la resta.

$$\begin{array}{r} 3190368 \\ 90403 \\ \hline 3099965 \end{array}$$

Exemplo III.

Quien de 1. resta 6. no puede, pues de 6. hasta 10. van 4. y 1. de arriba son 5. escrivo 5. y guardo 1. el qual con el 0. hace 1. Digo aora : quien deve 1. y paga 1. nada deve , ponga 0. Paso á la otra coluna : quien deve 6. y paga zero , ò nada , deve los mismos 6. escrivolos y paso á la otra coluna : quien deve zero , y paga zero, nada deve; escrivo 0. y paso à la otra coluna , diciendo : quien de 5. resta 7. no puede, pues de 7. hasta 10. van 3. y 5. son 8. escrivo 8. y llevo 1. el qual con el 9. son 10. Digo ahora : quien de 3. quita 10. no puede , pues de 10. hasta 10. va zero , y 3. de arriba son 3. escrivoles, y llevo 1. el qual supongo que está debaxo el 2. ultimo. Digo pues: quien de 2 resta 1. queda deviendo 1. escrivole , y está acabada la resta.

2350611
970006
———
1380605

Escolio.

54 Quando el guarismo inferior es mayor que el superior , suelen algunos hacer la resta de otro modo , del qual nos valdrémos en el partir. En el exemplo siguiente se han de restar 8. de 3. y porque no se puede, toman una decena del numero superior siguiente (qualquier que sea) la qual con el 3. hace 13. Aora pues, restan 8. de 13. quedan 5. y llevan 1. para juntarlo con el 6. inferior siguiente, y hacen 7. restan 7. de 9. y quedan 2. con que la resta es 25. Este modo en la sustancia es el mismo que hemos dado , como aora veremos.

93
68
——
25

Demonstracion.

Solo demostraré la regla del restar , quando el guarismo inferior es mayor que el superior, porque quando es igual, ó menor no ay dificultad. Supongo, pues, que lo mismo es tomar una decena del numero superior, como se hizo en este escolio, que tomar la diferencia del guarismo inferior hasta 10. y juntarla con el superior como lo hemos enseñado ; porque aquel 10. cuya diferencia se toma, es la decena del numero superior.

Esto supuesto, digo, que aquella decena que se tomó del numero superior, se avia de quitar despues del mismo numero, y quedarian 8. en el exemplo antecedente , entonces se restarian 6. de 8. pues porque el quitar la decena del numero superior incluye alguna circunstancia mas facil añadirla al numero inferior 6. dexando intacto el superior 9. y restar 7. de 9. y en los dos casos quedará la misma diferencia ; porque el 6. se ha aumentado una unidad , y el 9. tambien se ha aumentado otra unidad , supuesto que se avia de quitar. Luego la misma diferencia avrá de 6. á 8. que de 7. à 9. porque si à dos quantidades añadimos partes iguales , la diferencia será la misma.

Observaciones.

55 Si muchas partidas se huvieren de restar de otras muchas, será preciso sumar primero todas las partidas de la deuda, y despues las de la paga, para poder hacer la resta con las sumas; como si un Mercader quiere ajustar sus cuentas, para saber su caudal, suma por una parte todas las partidas que le deven, y por otra todas las que él deve, reste pues una sume de otra, y tendrá lo que buscaba.

56 Si de un numero par se quita par, ò de impar se resta impar, quedará par, Euc. *prop.* 24. *y* 26. *del lib.* 9. Pero si de numero par se resta impar, ò de impar se quita par, el residuo será impar, Euc. *prop.* 25. 27. y *del lib.* 9.

CAPITULO TERCERO.

DEL MULTIPLICAR.

57 MUltiplicar un numero por otro, es aumentar, ò tomar el uno tantas veces, como unidades tiene el otro: Y asi, lo mismo es multiplicar 5. por 4. que aumentar el 5. quatro veces. El numero que se multiplica se dice *Cantidad*, ò *Multiplicando*. Por quien se multiplica se llama *Multiplicador*, ò *Multiplicante.* El que sale de la multiplicacion se dice *Produto.*

De la definicion del multiplicar se infiere lo primero, que el multiplicar es un sumar abreviado; porque lo mismo es multiplicar 5. por 4. que sumar quatro cincos. Lo segundo, que la misma razon tiene el producto à un numero de los multiplicantes, como el otro à la unidad; esto es, en el exemplo propuesto el producto 20. tiene el mismo respeto al 5. que al 4. al 1. porque para hacer el 20. se ha tomado el 5. tantas, veces, como unidades tiene el 4. Luego el 20. contiene al 5. tantas veces, como el 4. à la unidad.

Asimismo, la misma razon ay del 20. al 4. que del 5. à la unidad; porque para hacer el 20. se ha tomado el 4. cinco veces; esto es, tantas veces como unidades tiene el 5. Luego el 20. contiene al 4. tantas veces, como el 5. contiene à la unidad. De aqui se infiere, que el multiplicar es hallar un numero que tenga la misma razon à uno de los multiplicantes, como el otro à la unidad.

58 En los numeros contractos, ò en lo mercantil, el numero multiplicando, de ordinario es la especie que se compra, ò vende, y el

multiplicador es el precio; con que en esta regla los numeros dados no es necesario que sean homogeneos, ò de una misma especie, como en el sumar, y restar. El producto es de la especie del precio.

59 Aunque lo mismo es multiplicar un numero por otro, que este por aquel, v. gr. 6. por 4. que 4. por 6. como lo demuestra Euc. *en la prop.* 16. *del lib.* 7. con todo eso, para mayor facilidad en los numeros abstractos se pondrá el mayor arriba, y el menor debaxo, y en los contractos, la especie arriba, y el precio debaxo, correspondiendo siempre unidades à unidades, decenas à decenas, &c. Este capitulo tiene tres Problemas.

PROBLEMA I.

MULTIPLICAR UN NUMERO DIGITO POR otro digito.

60 EL producto de un guarismo por otro, como 6. por 8. (que son numeros digitos) se hallará, ò por el natural conocimiento, ò por el frequente exercicio, ò por la tabla Pytagorica, ò por la regla que el vulgo llama del *Perezoso.*

Por la siguiente tabla, la qual de su autor Pitagoras, se dice Pytagorica, se hallará el producto de la multiplicacion de dos numeros digitos del modo siguiente. Se ha de multiplicar 7. por 8. busquese uno destos numeros en el lado izquierdo, y el otro arriba en la frente de la tabla, y corriendo las dos colunas adentro en la casilla comun, que corresponde à los dos se hallará el producto 56.

Asimismo, para saber quanto hacen 6. multiplicados por 8. busquese el 6. en el lado, y el 8. arriba, ò al contrario, y corriendo la linea de uno, y otro, en el angulo comun se hallará el 48.

Tabla Pytagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Por la regla del perezoso (la qual solo es de conveniencia quando, los numeros digitos son mayores que 5.) hallarémos el producto deste mo-

modo. Supongo que se han de multiplicar 7. por 8. escrivo el uno debaxo el otro, y al lado las diferencias de cada uno hasta 10. las quales son 3. y 2. Multiplico las diferencias entre sí, (lo qual no es dificultoso por ser numeros pequeños) cuyo producto 6. le escrivo debaxo las dichas diferencias. Despues resto en cruz qualquier diferencia del numero opuesto; esto es, resto 3. de 8. ó 2. de 7. y quedan cinco; con que será el producto 56.

$$\begin{array}{ccc} 7 & \text{——} & 3 \\ 8 & \text{——} & 2 \\ \hline 5 & & 6 \end{array}$$

Otro exemplo: Se han de multiplicar 6. por 7. escritos estos numeros, y sus diferencias hasta 10. como antes, multipliquense las diferencias 4. y 3. entre sí, y será el producto 12. el qual porque tiene dos guarismos escrivase el primero, que es 2. debaxo las diferencias, y guardase el otro; despues restanse las diferencias en cruz, y quedarán 3. á los quales se añadirá el 1. guardado; con que será el produoto 42

$$\begin{array}{ccc} 6 & \text{——} & 4 \\ 7 & \text{——} & 3 \\ \hline 4 & & 2 \end{array}$$

PROBLEMA II.

MULTIPLICAR UN NUMERO DE MUCHOS GUARISMOS por numero digito.

Preceptos.

61 Primero: Escrivase el numero menor debaxo del mayor en el lugar de las unidades, y tirese una linea por debaxo.

62 Segundo: comenzando la operacion de la derecha ácia la izquierda, multipliquese cada guarismo del numero superior por el guarismo inferior, conforme se dixo en el Problema antecedente, y si el producto tiene un guarismo solo, se escrivirá debaxo el guarismo multiplicado del numero superior; pero si tuviere dos, escrivase el primero como antes, y el otro guardase en la memoria para juntarlo con el producto siguiente, si no fuere el ultimo, porque en tal caso se escrivirá un lugar mas adelante ácia la izquierda.

63 Tercero: Si en la cantidad huviere algun zero, en llegando á multiplicarse se pondrá zero en el producto, si es que no se guarda algo de la operacion antecedente, porque entonces se ha de escrivir aquello que no se guardó. Practiquémos los preceptos.

Exemplo I.

Tengo de multiplicar 1036. por 2. Multiplico 2. por 6. diciendo : dos veces 9. son 12. escribo el 2. debaxo el 6. y guardo 1. Prosigo diciendo : dos veces 3. son 6. y 1. que guardaba son 7. escribo el 7. debaxo el 3. y nada guardo. Paso adelante : dos veces 0 es 0. y porque nada guardaba , escribo el 0. Digo despues : dos veces 1. son 2. escrivole , y está concluida la operacion.

$$\begin{array}{r} 1036 \\ 2 \\ \hline 2072 \end{array}$$

Exemplo II.

Siete veces 5. son 35. escribo el 5. y guardo el 3. Otra vez : siete veces 1. son 7. y 3. que guardaba son 10. pongo el 0. y guardo 1. Prosigo : siete veces 0. es 0. y 1. que guardaba es 1. escribole. Despues digo : siete veces 6. son 42. escribo el 2. y llevo 4. Ultimamente : siete veces 9. son 63. y 4. que llevaba son 67 escribo el 7 debaxo el 9. y el 6. un lugar mas adelante.

$$\begin{array}{r} 96015 \\ 7 \\ \hline 672105 \end{array}$$

Exemplo III.

Nueve veces 0. es 0. escribole. Otra vez , nueve veces 8. son 72. escribo el 2. y guardo el 7. Nueve veces 3. son 27. y 7. que guardaba hacen 34. escribo el 4. y llevo 3. Nueve veces 0. es 0. y 3 que llevaba son 3. escribole , y nada guardo. Otra vez : nueve veces 0 es 0. y porque nada guardo , escribo el 0. Nueve veces 2. son 18. escribo el 8. debaxo el 2. y el 1. una casa mas afuera.

$$\begin{array}{r} 200380 \\ 9 \\ \hline 1803420 \end{array}$$

Demonstracion.

Atendiendo con cuidado á la operacion , se verá que es manifiesta ; porque si el primer producto parcial tiene dos guarismos , el primero pertenece á las unidades , y por eso se escribe debaxo el primer guarismo de la cantidad : y el segundo pertenece á las decenas , y esa es la causa porque se guarda para juntarlo con el segundo producto parcial que es de decenas ; el qual tiene dos guarismos , se escribe el primero , que es de las decenas, debaxo el segundo guarismo de la cantidad , que tambien es de las decenas, y se guarda el segundo guarismo para juntarlo con el tercero producto parcial , que es de las centenas , y así de los demás. Lo que se vè en el exemplo presente , donde escribiendo los productos parciales cada uno de por sí , el 4. del primer producto 40 (que se habia de guardar , para juntarle con el primero numero del segundo producto) corresponde à este , que es el 2. con quien se suma.

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 4 & 5 \\ & & & 8 \\ \hline & & 4 & 0 \\ & 3 & 2 & \\ 2 & 4 & & \\ \hline 2 & 7 & 6 & 2 \end{array}$$

PROBLEMA III.

MULTIPLICAR UN NUMERO DE MUCHOS GUARISMOS por otro tambien de muchos guarismos.

Preceptos.

64 PRimero: Dispuesto los numeros de modo, que en los *Abstractos* el menor, y en los *Contractes* el precio, estén debaxo, correspondiendo unidades á unidades, &c. (59) y tirada una linea, multiplicase cada guarismo del numero inferior por todos los del superior, como si estuviera solo, segun se dixo en el Problema antecedente, comenzando á escrivir cada producto debaxo el guarismo que multiplica, procediendo hácia la izquierda.

65 Segundo: Sumense los productos parciales del mismo modo que están escritos, y la suma serà el producto total. Los preceptos quedarán manifiestos con los exemplos.

Exemplo I.

Multiplico el 4 por todos los guarismos de la cantidad, ó numero superior, como si estuviera solo, conforme queda dicho en el Problema antecedente, y el producto le comienzo à escribir baxo el mismo 4. y voy procediendo hácia la izquierda. Del mismo modo multiplico el segundo guarismo del numero multiplicador, que es 2 por todos los guarismos de la cantidad, comenzando á escrivir el producto baxo el mismo 2. Despues sumo los productos parciales segun están escritos, y tengo el producto total que buscava.

$$\begin{array}{r} 8006 \\ 24 \\ \hline 32024 \\ 16012 \\ \hline 192144 \end{array}$$

Exemplo II.

Multiplico el 0 del multiplicador por toda la cantidad, cuyo producto es todo de zeros, los quales comienzo á escrivir baxo el mismo 0. Multiplico despues el 1 del multiplicador por toda la cantidad, comenzando á escrivir el producto baxo el mismo 1. y porque la unidad no aumenta la multiplicacion, basta copiar la misma cantidad en el lugar del producto. Multiplico ultimamente el 9 por toda la cantidad, comenzando à escrivir el el producto baxo el mismo 9. Hago la suma, y tengo el producto total deseado.

$$\begin{array}{r} 1600 \\ 910 \\ \hline 0000 \\ 1600 \\ 14400 \\ \hline 1456000 \end{array}$$

Exem-

Exemplo III.

$$\begin{array}{r} 90136 \\ 8018 \\ \hline 721088 \\ 90136 \\ 00000 \\ 721088 \\ \hline 722710448 \end{array}$$

Multiplico el 8 por todos los guarismos de la cantidad, y el producto le comienzo á escrivir baxo el mismo 8 como se dixo antes. Despues multiplico el 1 por toda la cantidad ; y porque la unidad no aumenta la multiplicacion , basta copiar la cantidad , comenzando á escrivirla baxo el mismo 1. Multiplico el o del multiplicador por toda la cantidad, cuyo producto todo es de zeros. Multiplico ultimamente el 8 por toda la cantidad; y porque en el multiplicador hay otro 8, basta copiar el producto correspondiente al primer 8 porque es el mismo , ó igual, el qual comienzo à escrivir baxo el 8 que se multiplica; despues sumando los productos parciales del modo que están escritos, hallo el producto total que buscava.

Demonstracion.

Que la regla, para hallar los productos parciales sea verdadera , ya está demostrado en el Problema antecedente. Aora solo falta probar, que los dichos productos parciales se devan comenzar á escrivir baxo el guarismo multiplicador , y despues sumarlos segun estàn escritos; lo qual es evidente , porque el primer guarismo del multiplicador, que pertenece á las unidades , multiplicando los guarismos de la cantidad, primero produce unidades, despues decenas , centenas, &c. y asi su producto se ha de comenzar á escrivir baxo las unidades.

El segundo guarismo del multiplicador, porque pertenece á las decenas, produce primero decenas, despues centenas , millares , &c. y asi su producto se ha de comenzar á escrivir baxo las decenas, suponiendo que en el lugar de las unidades hay un zero, el qual no se escrive por no confundir.

El tercer guarismo es de las centenas ; y por eso quando multiplica los guarismos de la cantidad, produce primero centenas, despues millares, decenas de millar, &c. con que su producto se ha de comenzar à escrivir baxo las centenas, suponiendo que al principio ay dos zeros para llenar los lugares de las unidades y decenas , que no se escriven por no perturbar, y asi de los demas productos. Luego los productos están bien escritos para sumarlos ; porque unque la primer coluna no está llena , pero faltan zeros que la llenen , como está dicho.

Escolio.

66 Para alivio de los que se fatigan la cabeza en cuentas largas,

ser-

servirá la regla siguiente de multiplicar por sumas, la qual es muy segura y de grande descanso, en particular quando una misma cantidad se ha de multiplicar muchas veces por diferentes numeros.

653 —— 1
1306 —— 2
1959 —— 3
2612 —— 4
3265 —— 5
3918 —— 6
4571 —— 7
5224 —— 8
5877 —— 9

Escribase la cantidad aparte, y doblandola, que es multiplicar por 2. saldrá la segunda linea; sumense la primera y segunda linea, y tendremos la tercera: sumando la primera con la tercera hallaremos la quarta: juntando la primera con la quarta, conoceremos la quinta, y así de las demas. Al lado de cada linea escribanse los exponentes 1. 2. 3. 4. &c. como parece en la formula.

Supongo pues que se ha de multiplicar la cantidad misma por 829. porque el primer guarismo del multiplicador es 9. copiese la linea del 6 comenzando debaxo el 9. del multiplicador. Porque el segundo guarismo del multiplicador es 2. copiese la linea del 2 comenzando baxo el segundo guarismo del multiplicador. Y porque el tercer guarismo del multiplicador es 8. copiese la linea del 8. comenzando à escribirla baxo el mismo 8. Despues se sumarán los productos, para saber el producto total. Este modo de obrar, en la substancia es el mismo que hemos dado en en los Problemas antecedentes.

$$\begin{array}{r} 653 \\ 829 \\ \hline 5877 \\ 1306 \\ 52240 \\ \hline 541337 \end{array}$$

Observaciones.

67 Para hacer con mayor brevedad algunas operacioees del multiplicar, observense estas reglas, nacidas de las que hemos dado arriba. La primera: Si entre los guarismos del multiplicador ocurriere algun zero, basta poner zero en el producto parcial, baxo el mismo zero del multiplicador; y pasando al otro producto, se escrivirá en la misma linea, como parece en este exemplo, en el qual para multiplicar el zero, solo se ha escrito un zero, y el producto de la multiplicacion por el 2. se ha continuado en la misma linea; porque si se escribieran los zeros, como en el exemplo tercero, los que están entre los otros guarismos no mudan la suma, y así no es necesario escribirlos.

$$\begin{array}{r} 637 \\ 205 \\ \hline 3185 \\ 12740 \\ \hline 130585 \end{array}$$

68 La segunda: Si en el principio de la cantidad, ò multiplicador hubiere alguno ó algunos zeros, como en el exemplo presente

basta

basta multiplicar los guarismos significativos, como si estuvieran solos, y al producto añadirle tantos zeros como hubiere en la cantidad, ó en el multiplicador, ó en entrambos juntos. La razon de este modo de abreviar entenderá claramente quien la cortejáre con el Exemplo II.

$$\begin{array}{r} 2360 \\ 1400 \\ \hline 944 \\ 236 \\ \hline 334000 \end{array}$$

69 De aqui se infiere, que si un numero se ha de multiplicar por 10. 100. 1000. 10000. &c. basta añadirle tantos zeros como tiene el multiplicador; y asi, multiplicando 84. por 100. será el producto 8400. Porque como la unidad no aumenta la multiplicacion, queda el mismo numero, ó cantidad por producto: á mas de esto, quando en el multiplicador hay zeros al principio, basta añadirlos al producto, como se dixo antes; luego multiplicando por numero que tiene una unidad, y zeros, con añadir otros tantos zeros á la cantidad, queda multiplicada.

70 Un numero par, multiplicado por qualquier numero par, produce par: un numero impar, multiplicado por par, hace par, Euc. *prop.* 28, *del lib.* 9. Tambien un numero impar, multiplicado por impar, hace impar, Euc. *prop.* 29. *del lib.* 9.

71 Si un numero multiplica á otros dos, los productos tienen la misma razon, que los numeros multiplicados: como si el 6 multiplica al 8. y 4. los productos 48. y 24. tienen entre si la misma razon que los numeros multiplicados 8. y 4. con que son quatro proporcionales, como 8. á 4. asi 48. á 24. (32) esto demuestra Euc. *en la prop.* 17. *del lib.* 7.

72 Si dos numeros, como 5. y 3. fueren primos á un tercero 4. el producto 15. de los dos será tambien primo el mismo 4. Euc. *prop.* 26. *del lib.* 7. Y si dos numeros, como 7. y 5. cada uno fuere primo á cada uno de otros dos, como á 3. y á 2. el producto 35. de los primeros será tambien primo el producto 6. de los segundos, Euclides *prop.* 28. *del lib.* 7.

73 Si dos numeros, como 4. y 7. fueren entre sí primos, y el uno 4. se multiplica por si mismo, el producto 16. será tambien primo al otro 7. Euc. *prop.* 27. *del lib.* 7. y si cada uno de los mismos numeros se multiplica por sí mismos, los productos 16 y 49. serán tambien entre sí primos. Y si otra vez estos productos se multiplican por los mismos numeros, los productos que saldrán 64. y 343. serán tambien entre sí primos, y asi infinitamente, Euc. *prop.* 29. *del lib.* 7.

74 Si quatro numeros, como 8. 2. 12. 3. son proporcionales, esto es, si la mesma razon tiene el primero 8. al segundo 2. que el ter-

cero 12. al quarto 3. será el producto de los extremos 8. y 3. igual al producto de los medios 2. y 12. esto es, multiplicando 8. por 3. sale 24. y multiplicando 2. por 12. tambien sale 24. Y al contrario: si de quatro numeros el producto de los extremos fuere igual al producto de los medios, los quatro numeros serán proporcionales, Euc. *prop.* 19. *del lib.* 7.

Aplicacion del multiplicar.

75 Por esta regla del multiplicar, aplicada á numeros contractos, sabrémos el valor de lo que se compra, ó vende, multiplicando la especie por el precio; como si Pedro compró 12. varas de paño á 3. libras la vara, para saber quanto valen multiplique 12. por 3. y hallará 36. libras, que es el valor de las 12. varas.

Asi mismo: Pedro vende 32. cavallos por 25. reales de á ocho cada uno; si quiere saber el valor de todos, multiplique 32. por 25. y hallará que valen 800. reales de á ocho. Del mismo modo: Pedro compra 18. arrobas de azucar á razon de 30. reales la arroba, para saber quanto debe, multiplique 18. por 30. y hallará 540. reales.

76 Tambien por esta misma regla convertirémos la especie de mayor valor en la de menor, ó la moneda mas alta en la mas baxa, multiplicandola por el numero en que la especie mayor, ó mas alta se divide para hacer la menor, ó mas baxa, que es el numero de las veces que la especie mayor contiene á la menor, el qual se hallará en la segunda parte de los proemiales.

Quiero reducir 36. libras, moneda de Valencia, á sueldos: porque la libra contiene 20. sueldos: multiplico 36. por 20. y hallo 720. sueldos; los quales, si los quiero convertir en dineros, porque el sueldo tiene 12. dineros, multiplico los 720. sueldos por 12 y salen 8640. dineros.

Para reducir 48. libras de la misma moneda á dineros, conviertolas primero á sueldos, multiplicando por 20. y salen 960. sueldos, los quales multiplico por 12. y hallo 11520. dineros. Podia tambien de primera instancia hacer lo mismo, multiplicando las 48. libras por 240. dineros que tiene cada libra, y saldrá lo mismo.

Otro exemplo: Se han de reducir 20. reales, moneda de Castilla, á maravedis; porque cada real consta de 34. maravediz, multiplico los 20. reales por 34. y hallo 680. maravedis. Asimismo: He de convertir 10. cahices de Castilla á celemines; porque cada cahiz tiene 12. hanegas, multiplico 10. cahizes por 12. y salen 120. hanegas; y porque cada una contiene 12. celemines, multiplicolas por 12. y hallo 1440. celemines.

Para reducir toda esta cantidad 8. libras 17. sueldos, y 10 dineros, moneda de Valencia, á la ultima especie, que son dineros, multiplicaré las 8. libras por 20. sueldos que tiene cada libra, y al producto 160. añadiré los 17. sueldos de la cantidad, y serán 177. sueldos; los quales multiplicaré por 12. dineros que tiene cada sueldo, y al producto 2124. añadiré los 10 dineros de la cantidad, y estará toda reducida á 2134. dineros.

Del mismo modo: Si quiero reducir 5. arrobas 18. libras, y 9. onzas, peso de Castilla, á la ultima especie, que son onzas, multiplicaré las 5. arrobas por 25. libras que tiene cada arroba Castellana, y al producto 125. añadiré las 18. libras de la cantidad, con que serán 143. libras, las quales multiplicaré por 16. onzas que tiene cada libra en Castilla, y al producto 2288. añadiré las 9. onzas de la cantidad, y quedará reducida á 2297. onzas.

CAPITULO IV.

DEL PARTIR.

77 PArtir un numero por otro es distribuirle en tantas partes quantas unidades tiene el numero por quien se parte; como partir 12. por 4. es dividir el 12. en quatro partes, porque tamtas unidades tiene el 4. De otro modo se puede explicar, diciendo, que partir es sacar un numero de otro, tantas veces quantas se contiene en él.

Al numero que se parte llamarémos, *Cantidad* ó *Dividendo*; á aquel por quien se parte *Partidor*, ó *Divisor*; y á lo que sale de la division *Quociente*, porque señala las veces que el partidor se contiene en la cantidad. La cantidad, y el partidor no es preciso que sean de una misma especie; pero el quociente casi siempre sale de la especie de la cantidad.

78 De lo dicho se infiere dos cosas; la primera, que el partir es un restar abreviado; porque es sacar un numero de otro tantas veces como se contiene en él; luego es lo mismo que restarle las mismas veces: como si el 4. se resta del 12. quedará el residuo 8. con que ya se ha sacado un 4. del 12. Si otra vez se resta el 4. del 8. quedará 4. ya se ha sacado otro 4. Si otra vez se resta 4. de 4. queda zero, ya se ha sacado otro 4. y asi se han sacado tres quatros; pues para no hacer

tantas restas se divide el 12. por 4. y viene al quociente 3. que son las veces que el 4. se contiene en el 12. Por eso algunos á la division suelen llamar *Aplicacion*, porque un numero se entiende que se aplica muchas veces para restarle.

79 La segunda, que despues de hecha la division, la misma razon tiene el quociente con la unidad, que la cantidad con el partidor; como en el exemplo propuesto el quociente 3. tiene á 1. la misma razon que 12. á 4. porque como el partir sea sacar un numero de otro tantas veces quantas se contiene en él, y tantas veces se contiene quantas unidades tiene el divisor: luego la misma razon hay del quociente á la unidad, que de la cantidad al divisor. Y asi, el partir se puede explicar de otro modo, diciendo, que es buscar un numero que tenga con la unidad la misma razon, que la cantidad con el divisor.

Esta regla de partir es inversa, ó contraria á la del multiplicar; porque enseña á resolver lo que compone el multiplicar, y lo que la una hace, la otra deshace: como por la multiplicacion de 5. por 3. se hace el 12. y por la division de 12 por 4 se resuelve el mismo 12. viniendo al quociente 3. Este capitulo contiene dos problemas; en el primero se enseña à partir por numero digito, que vulgarmente llaman medio partir: En el segundo se da regla para partir por numero de muchos guarismos, que es entero partir.

PROBLEMA I.

PARTIR POR NUMERO DIGITO, ó medio partir.

Preceptos.

80 PRrimero: Escribe el divisor al lado de la cantidad, tirando una linea por el lado, y que corra por debaxo, y la operacion se comenzarà de la izquierda á la derecha; porque como la division resuelve lo que compuso la multiplicacion, ha de comenzar por donde esta acaba; pues lo ultimo de la composicion, es lo primero en la resolucion.

81 Segundo: Si el ultimo guarismo de la cantidad es igual, ò mayor que el partidor, pongase una distincion antes de dicho ultimo guarismo; pero si fuere menor, se tomará un guarismo mas, poniendo la dicha distincion antes de los dos ultimos guarismos, y con esto quedará separado el primer miembro, y el quociente ha de tener tantos gua-

guarismos, quantos tuviere la cantidad, contando al primer miembro por un solo guarismo, aunque en èl aya muchos.

82 Tercero: Dividase el primer miembro por el divisor; esto es, mirese quantas veces el partidor cabe en el dicho miembro, que es lo mismo que ver por qué numero se multiplicará el partidor, de suerte, que el producto iguale, ò haga el numero proxime menor que pueda caber en el mismo miembro, y será el quociente, el qual se escribirá debaxo el partidor. Despues se multiplicará el quociente por el partidor, y restando el producto del miembso, se escribirá el residuo debaxo, el qual no puede ser mayor, ni igual al partidor, sino menor; porque si fuera igual, ó mayor, podria el partidor caber en la cantidad alomenos una vez mas.

83 Quarto: De la cantidad se abaxará el guarismo siguiente al miembro, poniendole al lado del residuo, y hará el segundo miembro, el qual se partirá por el divisor, como ántes; despues se abaxará el siguiente guarismo de la cantidad al lado del segundo guarismo; para tener el tercer miembro; y así de los demás.

84 Quinto: Si algun miembro, por ser menor, no se puede partir por el divisor, se pondrà zero en el quociente, y se abaxará el guasismo siguiente, para tener el otro miembro.

85 Sexto: Si divididos todos los miembros sobráre algo, se escribirá al lado derecho del quociente encima de una linea, y debaxo se pondrá el partidor en forma de quebrado. Practiquemos los preceptos.

Exemplo I.

6,27	3
o 2	――
	2

Se ha de partir este numero de 627. reales à 3. hombres; dispuestos los numeros, como parece en la formula, porque el ultimo guarismo 6. de la cantidad, es mayor que el partidor 3. pongo una distincion al 6. y divido el 6 por el 3. esto es, veo quantas veces cabe el 3. en el 6. ó por qual numero se ha de multiplicar el 3. paraque haga 6. ù otro numero proxime menor, y hallo que es el 2. escribole debaxo el partidor, (que es el lugar del quociente) y le multiplico por el mismo partidor, diciendo: Dos veces 3. son 6. restoles del 6 de la cantidad, y queda zero, escribole por primer residuo debaxo el 6. del miembro.

6,27	3
o 27	――
o	209

Despues abaxo el 2. de la cantidad, poniendole al lado del primer residuo, para hacer el segundo miembro o2, el qual divido por 3. Y porque no puedo por ser menor que el divisor, pongo o. en el quociente à la derecha del 2. y abaxo el 7. de la cantidad, escribiendole al lado del residuo segundo, que es 02. y será el tercer miembro 27. Aora divido el 27. por 3. y hallo el quociente 9. escribole al lado del o. y multiplico el 9. por 3. diciendo: Nueve veces 3. son 27. restolos del miembro 27. queda o. con que está concluida la operacion, siendo el quociente 209. reales, que son los que tocan á cada un hombre.

Exemplo II.

He de partir 10540. á 6. por que el ultimo guarismo 1. es menor que el partidor 6. tomo un guarismo mas, y separo el primer miembro 10. con una distincion; y porque en la cantidad ay quatro guarismos, contando el primer miembro por uno, sabré que el quociente ha de tener tambien quatro guarismos. Divido, pues, el miembro 10. por 6. diciendo: 10. partidos á 6. doy 1. al quociente (porque el 6. solo una vez cabe en el 10.) escribo el 1. debaxo el partidor, y le multiplico por el mismo partidor, diciendo: Una vez 6. son 6. restados de 10. quedan 4. escriboles debaxo el miembro 10. y tengo el primer residuo 4.

10,540	6
4	
	1

Para tener el miembro segundo abaxo el 5. escribiendolo al lado del residuo 4. y será 45. dividiéndole por 6. y caven al quociente 7. escribo 7. en el lugar del quociente al lado del 1. y multiplicando los 7. por 6. resto el producto 42. del miembro 45. quedan 3. que escribo debaxo el 5. del miembro, y será el 3. el residuo segundo.

10,540	6
45	
3	17

Despues abaxo el otro guarismo 4. de la cantidad, poniendole al lado del residuo 3. para hacer el tercer miembro 34. el qual divido por 6. y hallo que al quociente le caben 5. escribolos en el quociente al lado de 17. y multiplicando 5. por el divisor 6. resto el producto 30. del miembro 34. y queda el residuo 4. el qual escribo debaxo el 4. del 34.

10,540	6
45	
34	175
4	

Luego abaxo el o. de la cantidad al lado del residuo 4. para tener el miembro quarto 40. dividole por 6. y hallo que le tocan á 6. escribolos en el quociente, y aviendolos multiplicado por el partidor 6. resto el

10,540	6
45	
34	1756 $\frac{4}{6}$
40	
4	

producto 36. del miembro 40. y quedan 4. y porque este residuo es el ultimo, pongole al lado del quociente, tirando por debaxo una linea pequeña, debaxo de la qual escribiré el partidor, como parece el formula.

Exemplo III.

Se han de repartir 108035. hanegas de trigo entre nueve casas. Pongo la distincion al 10. porque el ultimo guarismo 1. es menor que el partidor, y parto el primer miembro 10. à 9. hallo que el quociente es 1. escribole debaxo el partidor, y multiplicando 1. por 9. hacen 9. restolos de 10. queda 1. por residuo, el qual escrivo debaxo del 0.

```
20,8035    9
 1        ---
           1
```

Abaxo el 8. de la cantidad, escribiendole al lado del residuo 1. y tendré el segundo miembro 18. dividole por 9. y le doy al quociente á 2. escribo 2. en el quociente al lado del 1. y multiplicando el 2. por el partidor 9. resto el producto 18. del miembro 18. y queda 0 por residuo, el qual escribo debaxo el 8. del 18.

```
10,8035    9
 18       ---
  0       12
```

Prosigo en abaxar el guarismo siguiente 0. de la cantidad, y será el tercer miembro 00. y porque no le puedo partir por el 9. escribo 0. en el quociente, y abaxo el otro guarismo 3. para hacer el miembro quarto 003. el qual tampoco puede partirse por el 9. por ser menor, pues pongo otro 0. en el quociente.

```
10,8035    9
 18       ---
  003     1200
```

Ultimamente, abaxo el 5. de la cantidad, y tendré el otro miembro 35. dividole por 9. y le doy 3. al quociente; multiplico 3. por 9. son 27. restoles de 35. y quedan 8. y por ser el ultimo residuo le escribo al lado del quociente encima una linea, y debaxo el partidor 9. Con que pertenecen á cada casa 12003. hanegas, y ocho novenos de hanega.

```
10,8035     9
 18       --------
  0035    12005 8/9
     8
```

Si preguntáres què significa el ultimo residuo encima de una linea, y debaxo el partidor? Digo, que si una unidad de la cantidad se considera dividida en tantas partes como unidades tiene el divisor, se han de tomar tantas destas, como unidades tiene el ultimo residuo; como en el exemplo presente, una hanega se ha de dividir en 9. partes iguales, y destas se han de tomar 8. que tocan á cada casa; de suerte, que àdemas de las 12003. hanegas que tocan à cada casa, se han de tomar 8. partes de las 9. en que se ha de dividir una hanega, que son ocho novenos de hanega: y para eso son las 8. hanegas que sobran.

Demonstracion.

La demonstracion contiene muchas partes, las quales se demonstrarán de por sí. La primera: que la operacion se aya de comenzar de la izquierda àcia la derecha, ya se hizo notorio en el precepto primero.

La segunda: que el quociente conste de tantos guarismos como hay en la cantidad, contando el primer miembro por uno, como queda advertido en el precepto segundo, es manifiesto, porque tantas veces se puede aplicar el partidor á la cantidad; y si bien se advierte, multiplicando el partidor por el quociente, se verá que los productos parciales tienen correspondencia con los miembros de la division, y en particular quando nada sobra.

La tercera: que qualquier guarismo del quociente sea el verdadero (si está bien hecha la operacion) lo pruebo así: Multiplicando el quociente parcial por el partidor, y restando el producto del miembro, queda un residuo menor que el divisor: luego el dicho guarismo, ó quociente parcial es el verdadero, pues manifiesta quantas veces cabe el partidor en el miembro.

La quarta: que quando sobra algo en la particion, se haya de poner encima de una linea, y el divisor debaxo en forma de quebrado, es claro si se considera lo siguiente: Supongo, que partiendo un qualquier numero de reales á 4 compañeros, sobra el real, sin duda que este real que sobra se ha de partir en quatro partes iguales, y à cada compañero le tocará una parte, que es un quarto de real, ò 6 dineros; si sobran 2. reales tocará à cada compañero dos quartos, ó 12 dineros, porque sobrando un real tocó un quarto á cada uno; luego sobrando dos reales tocarán dos quartos: si sobran 3 reales, vendrán à cada compañero tres quartos, ó 18. dineros, porque sobrando un real tocó á cada uno un quarto; luego sobrando 3. reales tocaràn tres quartos: con que obrando conforme mandan los preceptos, saldrà el verdadero quociente.

PRO-

PROBLEMA II.

PARTIR POR NUMERO DE MUCHOS GUARISMOS, ò entero partir.

EN este Problema los preceptos son casi los mismos que en el antecedente; pero paraque no aya la menor dificultad en aplicarlos, pondrè ios mas principales.

Preceptos.

86 Primero: Despues de escritos el partidor y cantidad, como en el Problema pasado, se han de separar de la cantidad con una distincion tantos guarismos, quantos tuviere el partidor, con tal que hagan numero igual, ó mayor que el partidor; porque si hicieren numero menor, se ha de tomar un guarismo mas, y quedará distinguido el primer miembro.

87 Segundo: Partase el ultimo guarismo del miembro, ó los dos ultimos, quando el miembro tuviere un guarismo mas que el divisor, por el ultimo guarismo del mismo divisor, dandole por quociente aquel numero, que despues de multiplicado por todo el divisor pueda el producto restarse de tal miembro; y asi, no siempre se podrá dar al quociente todas las veces que el ultimo guarismo del divisor cabe en el ultimo, ó ultimos del miembro, porque se ha de atender à la multiplicacion: ni tampoco se podrá dar al quociente 10. porque en un asiento no puede haber dos guarismos, (41) con que lo mas que se puede dar son 9. Hecho esto, vayase multiplicando el quociente por todos los guarismos del partidor; comenzando por la derecha; y juntamente restando los productos parciales del miembro, comenzando tambien à restar de la derecha, y escriviendo el residuo debaxo el miembro; el qual residuo (como está dicho) no puede ser igual, ni mayor que el partidor.

88 Tercero: Baxese el guarismo siguiente de la cantidad, escribiendole al lado del residuo, para hacer el miembro, segun el qual se partirá del mismo modo. Si algun miembro no se pudiere partir por ser menor que el divisor, se pondrá o. en el quociente; y se abaxará el guarismo siguiente de la cantidad, para hacer el otro miembro. Si à lo ultimo sobrare algo, se pondrá al lado del quociente encima de una linea, y debaxo se escribirá el divisor, como está dicho en el Problema antecedente. Esto es dificultoso, y quiere mucha practica.

Exemplo I.

Tengo 984. reales de renta cada año , y quiero saber quanto tengo cada mes : porque el año tiene 12. meses , divido los 984. reales por 12. de este modo. Separo los dos guarismos ultimos de la cantidad con una distincion . (porque hacen numero mayor que los del divisor) y tendré el primer miembro 98. Divido el ultimo guarismo del miembro, que es 9. por el ultimo del divisor , que es 1. y le doy à 8. por quociente , el qual escribo debaxo el partidor. Multiplico aora el quociente 8. por todos los guarismos del divisor , y juntamente resto el producto de todos los guarismos del miembro; deste modo : Ocho veces 2. son 16. los quales porque no puedo restarlos del 8. del miembro, tomo una unidad del 9. y serán 18. resto aora 16. de 18. y quedan 2. que escribo debaxo el 8. del miembro, y guardo 1. por la unidad que tomé: despues multiplico 8. por 1. son 8. y 1. que guardaba son 9. restolos del 9. del miembro , y queda 0. Con que será el primer residuo 2.

98,4	12
02	8

Abaxo el guarismo siguiente 4. de la cantidad, escribièndole al lado del residuo , y tengo el segundo miembro 24. Divido ahora el 2. del 24. por el 1. del 12. y le doy 2. por quociente , el qual escribo al lado del quociente parcial 8. multiplico el 2. por el 2. del partidor , y el producto 4. le resto del 4. del miembro, queda 0. multiplico otra vez el quociente parcial 2. por el 1. del partidor , y resto el producto 2. del otro guarismo 2. del miembro , queda 0. y está concluida la operacion. Con que cada mes tengo 82. reales.

98,4	12
24	
00	82

Exemplo II.

Se han de partir 23065. à 79. porque los dos ultimos guarismos 23. de la cantidad son numero menor que los del partidor , pongo la distincion al tercero , y será el primer miembro 230. el qual, porque tiene un guarismo mas que el partidor , parto los dos ultimos guarismos , esto es , el 23. por el ultimo 7. del partidor ; y aunque parece que podia dar al quociente 3. pero si atiendo à la multiplicacion , no puedo dar sino 2. escribole en el lugar del quociente: aora multiplico el 2. del quociente por el 9 del partidor , y el producto 18. le resto del primer guarismo 0. del miembro , pues porque no puedo restarle , por ser menor , tomo dos decenas del 23. y serán 20. resto aora 18. y quedan 2. los quales escribo debaxo el 0. y guardo 2.

230,65	79
72	2

por

por las dos dezenas que tomé prestadas; multiplico otra vez el quociente 2. por el 7. del partidor, y al producto 14. añado las dos dezenas que guardaba; con que serán 16. restolos de 23. y quedan 7. que escribo debaxo el 3. y será el residuo 72. menor que el partidor.

Hecho esto, baxo el guarismo siguiente 6. de la cantidad, y le escrivo al lado del residuo, para hacer el segundo miembro 726. el qual porque tiene un guarismo mas que el divisor, parto los dos guarismos ultimos 72. por el 7. del partidor, y le doy 9. al quociente, el qual escribo al lado del quociente parcial 2. Aora multiplico el quociente 9. por los 9. del partidor, y el producto 81. le resto del 6. del miembro, pues porque no puedo, tomo ocho decenas del 72. y serán 86. de los quales restando 81. quedan 5. que escribo debaxo el 6. y guardo 8. por las decenas tomadas; multiplico otra vez el 9. del quociente por el 7. del partidor, y al producto 63. añado los 8. que guardaba, y son 71. restados de 72. del miembro queda 1. Con que será el residuo 15.

230 65	79
72 6	
1 5	29

Aora abaxo el guarismo siguiente 5. de la cantidad, y le pongo al lado del residuo 15 para hacer el miembro 155. el qual tiene un guarismo mas que el partidor, pues parto los dos ultimos 15. al ultimo del partidor 7. y doy uno al quociente, el qual escribo en su lugar; multiplico 1. por 9. del partidor, y el producto 9. le resto del primer guarismo 5. del miembro, ò de à 5. tomando una decena, y quedan 6. que escribo debaxo el 5. y llevo 1. multiplico otra vez el 1. del quociente por el 7. del partidor, y al producto 7. añado 1. que guardaba, y son 8. restolos de 15 del miembro, y quedan 7. Con que el residuo será 76. el qual escribo encima de una linea, y debaxo pongo el partidor, como parece en el exemplo.

230,65	79
72 6	
1 55	291 $\frac{76}{97}$
76	

Exemplo III.

Se han de partir 26492. ducados entre 358. Soldados: Porque el partidor tiene tres guarismos, veo si los tres ultimos guarismos de la cantidad hacen numero mayor, menor, ó igual al partidor, y hallo que menor, (18) pues tomo un guarismo mas, separando con una distincion al primer miembro 2649 y porque tiene un guarismo mas que el partidor, divido los dos ultimos 26. por el ultimo 3. del partidor, dando 7. al quociente, el qual escribo en su lugar,

2649 2	358
143	
	7

gar. Aora multiplico el 7. por el 8. del partidor, y el producto 56. le resto del primer guarismo 9 del miembro, ó del 59. tomando cinco decenas, y quedan 3. que escribo debaxo el 9. y guardo 5. Multiplico otra vez el 7. por el 5. del partidor, y al producto 35. añado los 5. que guardaba, y son 40. restolos del segundo guarismo 4. del miembro, ò de 44. tomando quatro decenas, y quedan 4. que escribo, y guardo 4. Multiplico otra vez 7. por 3. del partidor, son 21. añado los 4. que guardaba, y son 25 restolos de 26. del miembro, y queda 1. Con que será el primer residuo. 143.

Baxo el guarismo siguiente 2 de la cantidad, escribiendole al lado del residuo, para hacer el miembro 1432 el qual tiene un guarismo mas que el partidor, pues divido los dos guarismos ultimos 14. por el ultimo 3. del partidor, dando 4. al quociente, el qual escribo al lado del quociente parcial 7. Aora multiplico el 4. del quociente por el 8. del partidor, y resto el producto 32. del primer guarismo 2. del miembro, ó de 32. tomando tres decenas del 143. para hacer la resta, y queda 0. y guardo 3. por las decenas tomadas. Multiplico otra vez el 4. por el segundo guarismo del partidor, que es 5. y al producto 20. añado el 3. que guardaba, son 23. resto del segundo guarismo 3. del miembro, ó de 23. tomando dos decenas, y queda 0. y guardo 2. Multiplico otra vez el 4. del quociente por el 3. del partidor, y al producto 12. añado 2. que guardaba, son 14. restolos de 14. del miembro queda 0. Con que tocan á cada Soldado 74. ducados justos.

	358
2649,2	
1432	74
000	

Exemplo IV.

Se han de partir 4575397. á 5719. porque el partidor tiene quatro guarismos, examino si los quatro guarismos ultimos de la cantidad hacen numero mayor igual, ò menor que el divisor, y hallo que menor, pues separo con una distincion un guarismo mas; con que el primer miembro será 45753. y porque tiene un guarismo mas que el partidor, divido los dos ultimos 45. por el ultimo 5. del divisor, y doy al quociente 8. (no puedo darle à 9. porque tengo de atender á la multiplicacion de los otros guarismos del divisor) el qual escribo en su lugar.

Aora multiplico los 8. del quociente por el 9. del partidor, y resto el quociente 72. del primer guarismo 3. del miembro, ò de 73. tomando siete decenas, y sobra 1. que escribo debaxo el 3. y guardo 7. Multiplico otra vez el 8. por el segundo gua-

45753,97	5719
0001	8

guarismo 1. del divisor, y al producto 8. añado los 7. que guardaba, son 15. restolos del segundo guarismo 5. del miembro , ó de 15. tomado una decena queda 0. y guardo 1. Otra vez multiplico el 8. por el tercer guarismo 7. del divisor, y al producto 56. añado 1. que guardaba, son 57. restolos del tercer guarismo 7. del miembro, ó de 57. tomando 5. decenas queda 0. y guardo 5. Multiplico otra vez el 8. por el 5. del partidor , y al producto 40. añado los 5. que guardaba , son 45. restados de 45. del miembro queda 0. Con que el primer residuo es 1.

45753,97 (5719
1 97 800 197
5719

Baxo el guarismo siguiente 9. de la cantidad , escribiendole al lado del residuo , para hacer el miembro 19. el qual por no poderse partir por el divisor , por ser menor, escribo 0. en el quociente , y baxo el siguiente guarismo 7. para hacer el miembro 179. y porque tampoco se puede partir, pongo otro 0. en el quociente , quedando el ultimo residuo 197. el qual escribo al lado del quociente encima de una linea , y debaxo el divisor , como parece en la formula.

Este modo de partir, á quien los Italianos llaman *Partir por Danda,* no está muy usado en España, pero es el mejor, y el mas alabado de los Autores; porque procede con grande claridad , y distincion en escribir cada miembro, y residuo; de suerte, que si en el quociente hubiere avido algun yerro, con facilidad se puede enmendar , borrando el residuo, y volviendo á hacer la operacion de aquel miembro solamente, sin ser necesario volver à comenzar desde el principio, lo qual no es facil hacerlo siempre en el modo ordinario , y en particular quando hay muchos guarismos. A mas desto es muy breve, pues no es necesario escribir muchas veces el partidor , ni borrar guarismos , como en otros modos. La demonstracion es la misma que dimos en el problema antecedente.

Escolio.

El partir es la règla mas dificil de toda la Logistica , y el escolio en donde suelen naufragar los principiantes ; toda su dificultad consiste en conocer lo que se debe dar al quociente, para que se pueda restar el producto, y el residuo no sea mayor, ni igual al partidor. No hay en esto regla fixa, porque depende de los guarismos que acompañan al ultimo guarismo del partidor, y del miembro; si estos guarismos en el partidor y en particular el penultimo, fueren de grande valor como 9. 8. 7. por lo regular no se podrá dar al quociēte tanto, como veces cabe en el ultimo guarismo del divisor el ultimo, ò dos ultimos del miembro; pero si fueren de poco valor, como 0. 1. 2. casi siempre se podrán dar al quociente las veces que el ultimo guarismo del divisor cabe en el ultimo, ó dos ultimos del miembro.

Aunque, como queda advertido, no hay regla fixa para conocer el verdadero quociente, pero hay dos señales infalibles; el primero, que despues de hecha la multiplicacion del quociente por el partidor, se pueda restar el producto del miembro; porque si no se puede, es mayor el quociente de lo justo. El segundo, que hecha la resta sea el residuo menor que el divisor; porque si fuere mayor, ó igual, será el quociente menor que el verdadero. De suerte, que tomando el quociente mayor que el verdadero, no se podrá restar el producto; y tomandole menor de lo justo, será el residuo mayor, ó igual al partidor: Con que el verdadero quociente parcial tiene las dos circunstancias, de poderse restar el producto, y quedar menor el residuo.

Pues guiado el principiante de estos dos señales, podrá hacerse facil en conocer quanto debe dar el quociente, exercitandose muchas veces en earle aquel numero que le pareciere mas congruente, y haciendo la multiplicacion, y despues la resta, verá si se puede restar, ó si el residuo es igual, ó mayor que el partidor; porque si no se pudiere restar, habrá de tomar el quociente menor; y si el residuo fuere igual, ó mayor que el divisor, habrá de aumentar el quociente, y borrando el residuo y quociente, volver á hacer la operacion, hasta que encuentre con el quociente verdadero. Y para no hacer tantos borrones, podrá con la imaginacion hacer la multiplicacion, y resta, antes de escribir el quociente.

Pero para que el principiante tenga norte fixo en hallar los quocientes, podrá valerse de esta otra regla, que aunque larga y cansada, pero muy segura, y no fatiga la cabeza; la qual es muy util para quando se han de hacer muchas particiones por un mismo partidor.

Escribase el partidor aparte, y hagáse la tabla que se enseñó en el escolio del problema 3. del multiplicar. Supongo, pues, que se han de partir 1200567. á 296. formo la tabla del partidor, y pongo la distincion en la cantidad como antes, y tendré el primer miembro 1200. Ahora busco en la tabla que numero es el mayor de los que pueden caber en dicho miembro, y hallo que es el 1184. cuyo exponente es 4. escribole bebaxo del miembro, y al lado el 4 por quociente: hago la resta, y queda el residuo 16.

296 — 1
592 — 2
888 — 3
1184 — 4
1480 — 5
1776 — 6
2072 — 7
2368 — 8
2664 — 9

Abaxo el siguiente guarismo 5. de la cantidad, escribiendole al lado del residuo, para hacer el segundo miembro 165. Veo qual numero de la ta-

tabla es el proxime menor, y ninguno hallo, porque todos son mayores, pues pongo zeros debaxo del miembro y al lado zero por quociente, hago la resta, y queda el residuo 165.

Baxo el siguiente guarismo 6 de la cantidad, y será el tercer miembro 1656. veo qual numero de la tabla es el proxime menor, y hallo el 1480. cuyo exponente es 5. escribole debaxo del miembro, y al lado 5. por quociente: hago la resta, y quedan 176.

1200,567
1184 ——— 4
———
0165
000 ——— 0
———
1656
1480 ——— 5
———
1767
1480 ——— 5
———
287

Baxo el otro guarismo 7. para hacer el miembro 1767. busco qué numero en la tabla es el proximo menor, y hallo que es el 1480. cuyo exponente es 5. escribole debaxo del miembro, y al lado el 5. por quociente, hago la resta, y quedan 287. que se han de escribir encima una linea, y debaxo el partidor, como antes: Con que el quociente será 4055. y mas el quebrado.

La razon de este modo de partir es clara, porque los numeros de la tabla son los productos de los quocientes, que son los exponentes, por el partidor, ó primer mumero, y por eso se escriben debaxo de cada miembro para hacer la resta; en lo demás es la misma operacion que hemos explicado en los problemas antecedentes.

Observaciones.

89 Para abreviar algunas operaciones del partir, será bien observar lo siguiente. Quando el partidor tiene al principio alguno, ó algunos zeros, se separarán los dichos zeros, y otros tantos guarismos primeros de la cantidad con un parentesis, y despues haciendo la particion en lo que quedare, se pondrá el ultimo residuo á la izquierda de los guarismos separados de la cantidad, para hacer quebrado, como ahora dirémos.

Supongo que se han de partir 3624. á 2900. porque en el partidor hay dos zeros al principio, los separo con un parentesis; y asimismo separo otros tantos guarismos de la cantidad, y quedarán 36. en la cantidad, y 29. en el partidor. Divido ahora 36. á 29. por el modo ordinario, y cabe el quociente 1. y sobran 7. los quales pondré al lado izquierdo de los guarismos separados de la cantidad, y serán 724. escri-

36(24 29(00
7 1 $\frac{724}{2900}$

escribolos encima de una linea, y todo el partidor debaxo en forma de quebrado, como parece en el exemplo.

La razon de esto es manifiesta; porque habiendo zeros al principio del partidor, los primeros guarismos de la cantidad quedan intactos, porque los primeros productos del quociente por el partidor sin zeros, los quales restados de los primeros guarismos de la cantidad, quedan los mismos.

90 De aqui se colige, que si el partidor es 10. 100. 1000 &c. esto es, una unidad con zeros, basta separar tantos guarismos primeros de la cantidad, quantos zeros hay en el partidor, y los que quedaren en la cantidad serán el quociente; los que están separados se escribirán encima de una linea, y todo el partidor debaxo: como partiendo 97895. á 100. será el quociente $978\frac{95}{100}$.

Pero si los guarismos separados de la cantidad fueren tambien zeros, en tal caso se quitarán del todo, tanto de la cantidad, como del partidor, y se hará la particion en lo que quedare; porque quitando zeros de una cantidad, es lo mismo que partirla por un numero que conste de una unidad, y tantos zeros como se quitan; y asi, quitando tantos zeros de la cantidad como del divisor, es lo mismo que partirlos por un mismo numero; luego quedarán proporcionales, como luego dirémos; luego el quociente será el mismo. Y asi, para partir 3800. por 90. quitando un zero de cada parte, se partirán los 380. por 9. como está dicho, y vendrá 42. 2. novenos al quociente.

91 Si un numero menor se ha de dartir por otro mayor, no hay mas que hacer, sino poner la cantidad encima de una linea, y el partidor debaxo en forma de quebrado: como para partir 24. á 96 será el quociente $\frac{24}{96}$, porque la cantidad 24. no puede contener aun una vez al divisor 96. luego el quociente ha de ser quebrado, que es lo mismo que el ultimo residuo de la division.

De este modo de partir en forma de quebrado suelen usar muchas veces los Arithmeticos, aun quando la cantidad es mayor que el partidor; y en particular, quando la cantidad no contiene veces justas al partidor, y despues se ha de hacer alguna otra operacion.

92 Si dos numeros desiguales, como 93. y 12. tienen tantos guarismos el uno como el otro, el mayor contendrá al menor menos que 10. veces; porque si el menor 12. se multiplica por 10 será 120. con que tendrá un guarismo mas que el mayor 93 luego el 120. será mayor que el 93. (18) y asi, necesariamente el 93. ha de contener al 12. menos que diez veces, porque el 93. es menor que 120. el qual contiene al 12. diez veces justas.

93 Si un numero tiene un guarismo mas que otro, como 124. y 98. y el ultimo guarismo del 124. es menor que el ultimo del 98. contendrá el 124. al 98. menos que diez veces; porque si multiplicamos al 98. por 10. el producto 980. contendrá al 98. diez veces justas, y el 980. tendrá tantos guarismos, y será mayor (18) que el 124. luego el 124. no puede incluir, ó contener al 98. diez veces.

94 Si dos numeros, como 24. y 12. se dividen por un qualquier numero 3. los quocientes 8. y 4. tendrán la misma razon que los divididos 24. y 12. porque multiplicando los quocientes 8. y 4. por el divisor 3. se restituyen los numeros 24. y 12. los quales tienen la misma razon que 8. á 4. segun Euc. *prop.* 17. *del lib.* 7. (71) luego son proporcionales 24. á 12. como 8. á 4.

95 Si un numero impar, como el 3. mide á par como al 12. tambien mide á su mitad 6. Euc. *prop.* 30. *del lib.* 9. Y si un numero impar, como el 5. es entre sí primo á otro 4. tambien será primo al duplo 8. Euc. *prop.* 31. *del lib.* 9.

96 Si un numero mide á uno de dos entre sí primos, es necesario que el mismo numero sea entre sí primo con otro de los dos; y asi, porque el 3. mide á uno destos dos 9. 7. es á saber al 9. será el 3. entre sí primo con el otro 7. Euc. *prop.* 25. *del lib.* 7.

97 A todo numero compuesto, como al 12. mide algun numero primo, como el 3. Euc. *prop.* 33. *lib.* 7. Y asi todo numero, ó es primo, ó es medido de algun primo, Euc. *prop.* 34. *del lib.* 7.

98 Si un numero se divide por 9. quedará el mismo residuo que si la suma de sus guarismos (no atendiendo al lugar, sino como fueran unidades) se divide tambien por 9. como partiendo 38. á 9 sobran 2. partiendo, pues, la suma de 3. y 8. que es 11. por 9. tambien sobran 2. Del mismo modo, dividiendo 45. á 9. sobra 0. pues dividiendo la suma de 4. y 5. que es 9. á 9. sobra tambien 0.

La razon desto depende de la disposicion de los guarismos; porque el 3. en el primer exemplo, por estar en segundo lugar, vale diez veces mas de lo que significa, (13) luego vale nueve veces lo que él significa, y sobran 3. unidades las quales juntas con las 8. unidades del 38. son 11. quitando 9. quedan 2. con que resolviendo el 38. en nueve, se vienen á sumar los guarismos 3. y 8. luego el mismo residuo queda de la division de 38. por 9. que de la suma 11. por el mismo 9. Este es el fundamento de las pruebas del 9. que traen muchos Autores.

Aplicacion del partir.

99 Por esta regla de partir, dado el valor total de la especie, y el numero de ellas, vendrémos en conocimiento del precio de cada una;

ò sabiendo el valor total, y el precio de cada especie, conocerémos el numero de las especies, dividiendo el valor total por el numero de las especies, ò por el precio de cada una dellas.

Pedro empleó 1000. ducados en comprar 50. cavallos, y quiere saber à como costó cada uno. Divida 1000. por 50. y el quociente 20. será lo que buscaba. Otro exemplo: Un Mercader compró una pieza de paño por 2540. reales, y cada vara le costó à 30. reales, para saber quantas varas tiene la pieza, divida los 2540. por 30. y hallará 84. varas, y dos tercios.

100 Tambien por esta regla del partir convertirémos la especie menor, ò moneda mas baxa en la mayor, ò mas alta, dividiendola por el numero de las veces que la moneda, ò especie mayor contiene à la menor, el qual sabrémos por la segunda parte de los Proemiales.

Se han de reducir 510. maravedis à reales Castellanos: porque cada real tiene 34. maravedis, divido los 510. por 34. y hallo que son 15. reales. Asi mismo, si se han de reducir 1540. dineros à sueldos, y libras de Valencia, porque cada sueldo tiene 12. dineros, divido los 1540. por 12. y hallo 128. sueldos, y 4. dineros; y porque cada libra tiene 20. sueldos, divido los 128. sueldos por 20. y hallo 6. libras, y 8. sueldos: Con que los 1540. dineros hacen 6. libras, 8. sueldos, y 4 dineros.

Otro exemplo: Se han de reducir 624. quartos de palmo à canas, medida de Cataluña: porque cada palmo tiene 4. quartos, divido los 624. quartos por 4. y hallo 156. palmos justos; y porque cada cana tiene 8. palmos, divido los 156. palmos por 8. y hallaré 19. canas, y 4. palmos.

Otro exemplo: Se han de reducir 1005. minutos de tiempo en horas: porque cada hora tiene 60. minutos, divido los 1005. minutos por 60. y hallaré 16. horas, y 45. minutos. Asi mismo, tengo de convertir 11264. minutos de circulo en grados, y signos: porque cada grado tiene 60. minutos, dividolos por 60. y hallo 187. grados, y 44. minutos; y porque cada signo tiene 30. grados, divido los 187. grados por 30. y hallo 6 signos 7. grados, y 44. minutos.

CAPITULO QUINTO.

DEL EXAMEN DE LAS QUATRO *operaciones de la Logistica de los Enteros.*

101 EXamen es una prueba con que se averigua , si está bien hecha la operacion. No se examina la regla , sino la obra ; aquella pide demonstracion , este examen , ó prueba. Por muchos modos se pueden examinar las quatro operaciones de Sumar, Restar , Multiplicar , y Partir ; pero no todos son infalibles. Solo explicaré el que comunmente llaman *Prueba real,* dexando los otros por no gastar tiempo en cosa de poco provecho , pues casi todos se contentan con bolver à hacer la operacion.

$$\begin{array}{r}364\\180\\15\\134\\\hline 693\\364\\\hline 329\\180\\\hline 149\\15\\\hline 134\\134\\000\\\hline\end{array}$$

Prueba del sumar.

102 La prueba real del sumar es restar. En el exemplo presente restese la primera partida 364. de la suma 693. y quedarán 329. de donde se restará la segunda partida 180. y quedará el residuo 149. del qual se restará la torcera partida 15. y quedará 134. de donde se restará la ultima partida 134. y quedan zeros , con que está bien hecha la suma; porque como la suma 693. es igual à todas las partidas juntas , si estas se restan ha de quedar zero, ò nada.

Para abreviar basta quitar la primer partida de la suma , y el residuo 329. ha de ser la suma de las otras partidas ; esto es , sumando 180. 15. y 134. han de hacer 329.

Prueba del restar.

103 La prueba real del restar es sumar. Sumese la paga con la resta , y ha de salir la deuda , como parece en el exemplo ; porque sacando la paga de la deuda , queda la resta : luego sumando la paga con la resta, buelve à hacer la deuda.

$$\begin{array}{rl}2611 & \textit{Deuda.}\\305 & \textit{Paga.}\\\hline 2306 & \textit{Resta.}\\\hline 2611 & \textit{Suma.}\end{array}$$

Prueba del multiplicar.

104 La prueba real del multiplicar es partir. Divídase el producto por el multiplicador, y ha de salir la cantidad; ò divídase el producto por la cantidad, y ha de salir el multiplicador: como multiplicando 24. por 8. sale el producto 192. pues para examinar la operacion, divídase el producto 192. por 24. y saldrá el quociente 8. ó divídase por 8. y será el quociente 24. porque la division resuelve lo que compuso la multiplicacion: luego partiendo el producto por uno de los numeros multiplicantes, ha de salir el otro.

24
8
—
192

Prueba del partir.

105 La prueba real del partir es multiplicar. Multiplíquese el quociente por el partidor, y si en la division sobró algo añadase al producto, y ha de salir el numero dividiendo como dividiendo 29568. por 869. salen al quociente 34. y sobran 22. pues multipliquense los 34. por 869. ò al contrario, y al producto 29546. añadanse los 22. que sobraron, y serán 29568. que es el dividendo: porque la multiplicacion compone lo que la division resuelve; luego multiplicando el quociente por el divisor, saldrá la cantidad que se dividió.

		896
29568		
3498		
22	34	$8\overset{22}{96}$

Aqui dirá alguno que las pruebas reales son ciruclos viciosos, como dicen los Filosofos; porque el sumar se prueba por el restar, y el restar por el sumar: como si uno probára que es de dia, porque luce el Sol; y juntamente probára que luce el Sol, porque es de dia, cometeria circulo vicioso, y de ninguno seria admitida esta prueba.

Respondo, que estas no son pruebas demonstrativas, sino señales, ò indicios, con los quales se descubre si ay algun yerro en la operacion; y asi no cometen circulo vicioso, pues solo manifiestan que la operacion no está errada, fundandose en que es casi imposible, que dos modos de obrar entre sí opuestos estén errados, y convengan en la verdad.

* * *

CAPITULO SEXTO.

DEL EXERCICIO DE LA LOGISTICA de los enteros.

Paraque el principiante se exercite en las quatro reglas de Sumar, Restar, Multiplicar, y Partir enteros, me ha parecido conveniente poner aqui algunas questiones, á cuya semejanza podrá inventar otras.

106 Question 1. Què numero se sumará con 12. que la suma sea 32.? Restense 12. de 32. y quedarán 20. que es el numero buscado; porque si de la suma 32. se resta una partida 12. quedará la otra 20. y sumandolas volverán à hacer el mismo 32. Si la suma 32. fuera menor, ó igual al numero dado, la question es imposible.

106 Question 2. Con qual numero se sumará el producto de 4. por 6. que la suma sea 84.? Multipliquese 4. por 6. y el producto 24. restese del 84. y quedarán 60. por el numero buscado: Si no se puede restar, la question es imposible.

107 Question 3. De qué numero se restarán 8. para que queden 16.? Sumense 8. con 16. y la suma 24. será el numero que se busca, como está claro.

108 Question 4. De qual numero se podrá restar el quociente de la division de 40. por 8. que la resta sea 15.? Dividase 40. por 8. y el quociente 5. sumese con 15. y será la suma 20. Digo, que si de 20. se quita el quociente 5. será la resta 15. porque como 5. y 15. se sumaron: luego restando 5. de la suma 20. quedará el 15. quando el quociente tiene quebrado, se resolverá la question por las reglas de quebrados, que luego darémos, porque hasta ahora aun no se puede resolver.

109 Question 5. Por qual numero se multiplicará 7. paraque hagan 140.? Dividanse los 140. por 7. y hallaremos 20. que es el numero buscado; porque por la multiplicacion de 7. por 20. se restituye el numero 140. Si en la division vienen quebrados, no se podrá resolver la question hasta que tratèmos de quebrados.

110 Question 6. Qué numero ha de ser partido por 8. paraque el quociente sea 5.? Multipliquese el 8. por 5. y hallarémos 40.

111 Question 7. Por qual numeros se partirán 84. paraque el

quociente sea 12.? Dividanse los 84. por 12. y vendrán 7. que es el numero buscado.

112 Question 8. qué numero será tanto mayor que 8. quanto menor que 24.? Sumense 8. y 24. y la metad de la suma 32. que es 16. será el numero que se busca; esto es, el 16. es mayor que el 8 en 8. y es menor que el 24. tambien en 8. porque sumando los dos numeros dados, la metad de la suma dista igualmente dellos.

113 Question 9. El 6. de qué numero es un septimo? Multipliquese por 7. y será el producto 42. el numero buscado: porque el 6. tomado, ó repetido siete veces, hace al 42. luego es su septimo.

114 Question 10. El 10. de qué numero es dos tercios? Porque los tercios son dos, dividiendo en dos partes al 10. y será 5. la una; ahora mulplico el 5. por 3. porque son tercios, y hallaré 15. digo que el 10. es dos tercios de 15. porque habiendo de ser el 10. dos tercios: luego partiendo por dos tendré un tercio, y multiplicandole por 3. tendré tres tercios; luego el 10. será dos tercios destos tres. Si hay quebrados, se resolverá la question quando tratarémos dellos.

115 Question 11. Qué numero multiplicado por 4. y el producto partido por 6. hará 12.? Multipliquese el 12. por 6. y el producto 72. partase por el 4. y será el quociente 18. el numero buscado.

116 Question 12. Pedró mercó 90. arrobas de cierta mercaderia, peso de Castilla, á razon de 5. reales la libra, y despues la vende á 6. reales, preguntase quanto gana. Reduzganse las 90. arrobas á libras (76) multiplicandolas por 25. libras que tiene cada arroba en Castilla, y serán 2250. libras, las quales se han de multiplicar por 5. reales, que es el precio de la compra, y el producto 11250. serán los reales, que costaron las 90. arrobas. Y pues se vendieron á 6. reales la libra, multipliquense las mismas libras 2250. por 6. vendrá el valor de la venda 13500. Restese el valor de la compra del de la venda, esto es, 11250. de 13500. y se hallará la ganancia 2250. reales

117 Question 13. Un Mercader quiere emplear 50. doblones en Valencia en tres generos de ropas: la vara del primer genero vale 10. sueldos, la del segundo 8. sueldos, y la del tercero 7. sueldos, y quiere tantas varas de un genero como de otro, quantas varas tomará de cada uno? Porque el precio de las varas son sueldos, y los doblones se han de emplear en Valencia, reduzganse los 50. doblones á sueldos, multiplicandolos por 77. sueldos que vale cada doblon en Valencia, y serán 3850. sueldos. Ahora juntense los tres precios 10. 8. y 7. y harán 25. sueldos, que es el valor de 3. varas, una de cada genero; dividanse los 3850. por 25. y será el quociente 154. varas de cada genero, que es

lo

lo que buscaba; porque si 25. sueldos es el valor de 3. varas, de las quales cada una es de un genero: luego dividiendo los 3850. sueldos por 25. se hallarán las varas de cada genero.

118. Question 14. Pedro prestó á Juan 10. doblones en Valencia, y quiere que se los vuelva en quatro generos de moneda, es á saber, en reales de á ocho, en reales de á quatro, en medios doblones, y en diezyochenos, de suerte, que haya tantas piezas de unos, como de otros; quantas piezas habrá de cada uno? Esta question es la misma que la antecedente.

El real de á ocho en Valencia vale 19. sueldos, y 6. dineros; el de á quatro 9. sueldos, y 9. dineros; el medio doblon vale una libra 18. sueldos, y 6. dineros; el diezyocheno vale 1. sueldo, y 6. dineros; pues porque en el valor de las monedas hay dineros, que es la minima especie, reduzganse á dineros. (76) y asi, los 10. doblones serán 9240. dineros. El real de á ocho reducido será 234. dineros. El real de á quatro reducido será 117. dineros. El medio doblon 462. dineros. El diezyocheno son 18. dineros. Sumense los 234. 117. 462. y 18. dineros, y será la suma 831. dineros; divídanse los 9240. dineros, que valen 10. doblones, por esta suma, y se hallará que le ha de volver 11. y $\frac{89}{31}$ de cada pieza.

119 Question 15. Pedro mercó 4. piezas de tafetan, que cada una tiraba 100. varas, á 8. sueldos la vara, á como le volverá á vender, paraque gane 40. libras? Multipliquense las 4. piezas por 100. varas, y serán 400. varas, multipliquense por 8. sueldos, y será el valor de todas 3200. sueldos; y porque quiere ganar 4. libras, reduzganse á sueldos, y serán 800. sueldos, y sumense con los 3200. sueldos, y serán 4000. sueldos, que es el valor de las quatro piezas, al precio que se han de vender; dividanse los 4000. sueldos por las 400. varas, y se hallará que ha de vender la vara á 10. sueldos.

120 Question 16. Pedro quiere emplear 8000. reales en tres especies de ganados; halla terneras á 80. reales cada una, carneros à 20. reales cada uno, y cabritos á 10. reales: quiere que haya doblados cabezas comprará de cada suerte?

Si quisiera mercar tanto de una especie como de otra, estaba resuelta la question, segun la practica de la question 13. pero porque quiere dobladas cabezas de carneros que de terneras, se doblará el valor de cada carnero, que será 40. reales; y porque quiere doblados cabritos que carneros, se quatrodoblará el precio de cada cabrito, y será tambien 40. reales; porque como el precio de los carneros se dobló, y los ca-

cabritos han de ser doblados de los carneros, se ha de quatrodoblar, que es doblarle dos veces; sumense estos precios 80. 40. y 40. y la suma 160. será el partidor, por quien se dividirán los 8000. reales: con que vendrán al quociente 50. que es el numero de las terneras; doblandole será 100. el numero de los carneros; y doblandole otra vez serán 200. el numero de los cabritos. La prueba es multiplicar los 50. por 80. reales, los 100. por 20. y los 200. por 10. y todo ha de sumar los 8000. reales.

121 Question 17. San Geronimo, en la vida de San Hilarion afirma, que habia un hombre llamado Marsita, que llevaba à qualquier distancia 15. modios Romanos de trigo: preguntase quantas libras Castellanas de peso llevaba. Para la resolucion de esta question es menester suponer lo que dice Plinio *en el lib.* 18. *cap.* 7. que un modio de trigo levisimo no excede 20. libras: y la experiencia del P. Mariana, *fol.* 85. que un modio de trigo el mas pesado, pesa 21. libra Romana. Pues supongo, que el trigo que llevaba Marsita era de mediano peso, y que cada modio pesaba 20. libras Romanas: Multipliquense 20. por 15. y saldrán 300. libras Romanas; quitese el tercio, porque la libra Castellana es el tercio mayor que la Romana, y quedarán 200. libras Castellanas, que son dos quintales Castellanos.

122 Question 18. El Coloso de Rhodas fue una estatua muy grande de metal, que segun Plinio *en el lib.* 34. tenia de alto 70. codos; costó de fabricar 300. talentos de plata por espacio de 12. años; cayó por un terremoto el año 223. antes de la venida de Christo; quedó postrada hasta el año 653. que el Rey Mahuvias la vendió, y se cargaron de su metal 900. Camellos, segun lo escribe Casalio. Preguntase quan alta era, que valia, y que pesaba, segun las monedas, pesos, y medidas de Valencia.

Porque cada codo contiene dos palmos de Valencia, mutipliquense los 70. codos por 2. y saldrán 140. palmos que tenia el Coloso. Cada talento tiene 60. minas, ó 6000. drachmas, ó reales de plata; pues multipliquense los 300. talentos que costó el Coloso por 6000. drahmas, y valdrá 1800000. drachma; y porque cada drachma vale 29. dineros, y $\frac{1}{4}$ de Valencia, multipliquense las 1800000. por 29. y $\frac{1}{4}$ y se hallarán 5265000. dineros, los quales reducidos à libras, sueldos, y dineros (100) son 219375. libras justas: y tanto valia el Coloso.

En quanto al peso del Coloso es de notar, que segun Plinio, y Diodoro *lib.* 3. *cap.* 12. la carga ordinaria de un Camello era de 10. medimnos de trigo, que pesaba cada uno 120. libras Romanas, ò Articas; pues si multiplicamos las cargas de los 900. Camellos por 1200. libras

que

que llevaba cada uno, hallarémos 1080000. libras Romanas, ó Atticas, que con poca diferencia son iguales à las de Valencia; y asi; pesaba cerca de 30000. arrobas.

123 Question 19. Pedro ha comprado 10. varas de vayeta, que tiene 8. palmos de ancho, y la quiere aforrar de olandilla, que tiene 3. palmos de ancho: preguntase quantas varas de olandilla habrá menester. Multipliquense las 10. varas por lo ancho 8. y serán 80. palmos; partense por 3. que es lo ancho del aforro, y vendrán 26. varas, y $\frac{2}{3}$ de la olandilla.

124 Question 20. En el Templo de Salomon habia un vaso muy grande de agua, el qual por su capacidad, y materia se llamaba *Mare æneum.*, Mar de bronce; cabian en él 2000. Bathos de agua, como consta del 3. de los Reyes *cap. 7. v. 26.* los quales eran legales de 72. sextarios Romanos, ó 3000. Metretas, como consta del 2. del Paralipomenon *cap. 4. v. 5.* que eran iguales á la Anfora Romana de 48. sextarios, Alapide, Alcazar, y Tirino: Preguntase quantas onzas de agua cabian.

Porque cada sextario contenia 20. onzas de agua, como queda dicho en la 2. parte de los Prœmiales, multipliquense los 2000. Bathos por 72. sextarios: ó las 3000. Metretas por 48. sextarios; y de entrambas multiplicaciones saldrán 144000. sextarios, los quales se multiplicaràn por 20. onzas, y serán 2880000. las onzas de agua que cabian en el *Mare æneum*, que son cerca de 8000. cantares de agua, de la medida de Valencia.

Bastan estas questiones para exercicio, à cuya semejanza podrá el estudioso hallar otras: ahora pasemos à los quebrados.

PAR-

PARTE II.

DE LA LOGISTICA DE LOS

Quebrados.

125 NUMERO *Quebrado*, como queda advertido en los Proemiales, es parte, ó partes de la unidad, en quanto supone, ó representa algun todo dividido en partes iguales; como si un real está dividido en quatro partes iguales, y de ellas se toman tres, será quebrado.

Siendo, pues, el quebrado parte, ó partes de un todo dividido, necesariamente ha de decir algun orden ó respeto á las partes en que está dividido el dicho todo, porque las partes que se toman, alguna denominacion han de tener; pues no basta decir tres partes, sino que se ha de declarar quales sean; esto es, si son partes de quartos, quintos, sextos, &c.

Y paraque esto se entienda mejor, usaré de exemplos en numeros contractos. Supongo que un real que en Valencia llamamos Castellano, y tiene 24. dineros, se divide en quatro partes, de las quales se toman tres; cada parte de las 4. son 6. dineros; y asi, las tres partes serán 18. dineros. Supongo otra vez, que el mismo real se divide en 6. partes, y se toman tres, ahora cada parte de las 6. son 4. dineros; y asi las tres serán 12. dineros.

En entrambos casos se han tomado tres partes del real; pero como en el primero las tres partes eran de quartos, y en el segundo de sextos, por eso en ambos casos, aunque sea el mismo numero de partes el que se toma, pero no es el mismo valor, pues en el primer caso las tres partes valen 18. dineros, y en el segundo valen 12. Con que es preciso, que las partes que se toman (que es el quebrado) tengan algun orden á las partes en que está dividido el todo, ó la unidad.

126 Con esto queda manifiesto, que es forzoso que el quebrado se declare, y escriba con dos numeros. El uno enseña las partes que se toman del todo dividido, y se dice *Numerador*, porque numera las partes tomadas, el qual se escribe encima de una linea. El otro manifies-

fiesta en quantas partes se divide el mismo todo, y se llama *Denominador*, ó *Nombrador*, porque dá nombre, y explica quales sean las partes del todo, y se escribe debaxo del numerador.

Sea un qualquier todo, como un real dividido en ocho partes iguales, de las quales si tomamos una, será el quebrado un ochavo (de ordinario para expresar el denominador se añade esta particula *Avo*, ó *Avos*) el qual se escribirá asi $\frac{1}{8}$. Si tomamos dos partes, será el quebrado *Dos ochavos*, y se señalará deste modo $\frac{2}{8}$. Si separámos tres partes, será *Tres ochavos*, y asi $\frac{3}{8}$; y asi de los demas.

En estos quebrados, ó en qualquier otros, el numerador es el numero que está encima de la linea, y el denominador el que está debaxo; con que el numerador de $\frac{5}{7}$ es 5. y el denominador 7.

127 Aqui es menester advertir, que aunque es verdad, que escribimos, y nombramos qualquier quebrado con dos numeros: pero el quebrado solo consiste en el numerador, no tomado absolutamente sin respeto á otro, sino con orden al denominador; porque el quebrado son las partes que se toman del todo: luego solo consiste en el numerador que las numera, diciendo relacion al denominador, para expresar quales sean las partes tomadas, por lo qual se diferencia del entero.

Y asi, esta diferencia hay del numero entero al quebrado; que las unidades del entero son absolutas, sin expresar respeto, ni orden á componer, ó ser partes de algun todo, alomenos en lo explicito; porque implicitamente tambien son respectivas, como luego dirémos. En el quebrado las unidades no son absolutas, sino que expresamente dicen orden al todo de quien son partes; y asi, quando de un entero partido en 6. partes, tomamos cinco, no decimos absolutamente cinco, sino *cinco sextos*.

Con que el entero no se diferencia del quebrado en otra cosa mas, que las unidades del entero son expresamente absolutas, y las del quebrado respectivas; pero en la realidad en nada difieren, porque las unidades del entero tambien dicen orden á la unidad. Supongo para explicarme, que 35. varas de paño se han de repartir entre 8. hecha la division vienen al quociente 4. varas, y tres quartos de vara (los quebrados de ordinario salen de la particion) entonces el quarto significa 4. unidades de vara, y el quebrado denota tres unidades de quarto de vara: con que tanto el entero 4. como el quebrado *tres quartos* de vara, dicen orden á la unidad; pero en los enteros no se expresa el orden, y en los quebrados si.

128 De aqui se infiere, que podemos expresar qualquier numero

mero entero como quebrado, poniendole encima de una linea, y una unidad debaxo, lo qual se estila en la multiplicacion, y division de los quebrados, como verémos en su lugar; y asi este numero 10. le podemos expresar de este modo $\frac{10}{1}$, porque qualquier numero entero dice orden implicito à la unidad, pues consta de muchas unidades.

129 Para que el principiante no halle dificultad en algunos quebrados que encontrará en el discurso de este tratado, es menester que advierta, que aunque el quebrado tomado con todo rigor sea menor que la unidad, y por consiguiente su numerador haya de ser menor que su denominador, el qual supone por la unidad; eso no obstante acostumbran los Arithmeticos para facilitar la operacion, poner algunos quebrados mayores, ó iguales à la unidad, esto es, cuyos numeradores sean mayores, ò iguales à los denominadores; como $\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{6}{6}\frac{8}{3}$ &c.

Y para conocer qual quebrado sea mayor, igual, ó menor que la unidad, se guardará esta regla: Siempre que el numerador fuere menor que el denominador, el quebrado será menor que la unidad: Siempre que el numerador, y denominador fueren iguales, será el quebrado igual à la unidad, ó à un entero: Pero quando el numerador fuere mayor que el denominador, entonces el quebrado tambien serà mayor que la unidad, como luego dirémos; y por consiguiente contendrà alomenos un entero.

130 Con las noticias, que hasta aqui hemos dado de los quebrados, no será dificultoso el nombrarlos, y escribirlos; porque primero se nombra el numerador, y despues el denominador, añadiendole casi siempre la particula *avo*, ó *avos*, como queda advertido, y asi este quebrado $\frac{8}{12}$ será ocho dozavos; este otro $\frac{124}{356}$ será ciento y veinte y quatro, trescientos cinquenta y seis avos. Para escribirlos se pondrá el primer nombre en guarismo encima de una linea, y el segundo debaxo; como dos tercios se escribirá asi $\frac{2}{3}$.

131 El quebrado se divide en sencillo, y compuesto. Quebrado sencillo, ó simple, es aquel que es parte, ó partes de un entero, ó de la unidad, como dos tercios de un real. Quebrado compuesto es aquel que es parte, ó partes de un quebrado simple, tomado como à todo; como si $\frac{2}{3}$ se suponen divididos en quatro partes, y se toman tres serán $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, tres quartos de dos tercios.

132 El quebrado compuesto se subdivide en quebrado de quebrado, y en quebrado de parte de quebrado. El quebrado de quebrado es parte, ó partes de otro quebrado. El quebrado de parte de quebrado es parte, ó partes de una unidad de quebrado. Con un exemplo contracto lo explicaré mejor. Si $\frac{2}{3}$ de dia (que son 16. horas, porque cada

da tercio son 8. horas) se supone dividido en 4. partes , de las quales se toman 3. serán $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de dia , que son 12. horas , porque cada quarto de 16 es 4. y tomando tres , serán las 12. horas: si los $\frac{3}{4}$ se suponen divididos en 16. partes , y se toma 4. será $\frac{4}{6}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de dia , que son 8. horas , porque los $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de dia son 12. Cada sexto son 2. horas ; pues si se toman 4. sextos , serán 8. horas , y entonces será quebrado de quebrado de quebrado , y asi infinitamente.

En el mismo quebrado $\frac{2}{3}$ de dia , explicaré el quebrado de parte de quebrado ; supongo que una parte, ò unidad de $\frac{2}{3}$, que es $\frac{1}{2}$, está dividida en dos partes, y se toma una , será $\frac{1}{2}$ de una unidad de $\frac{2}{3}$; y como el tercio del dia sean 8. horas , será la mitad 4. horas; con que $\frac{1}{2}$ de una unidad de $\frac{2}{3}$ de dia son 4. horas. Tambien una unidad desta $\frac{1}{2}$ se puede dividir en otras partes para hacer quebrado de quebrado. Con que el quebrado de quebrado es parte , ó partes de un quebrado simple : y el quebrado de parte de quebrado , es prrte , ó partes de una unidad de quebrado simple.

Observacion.

133 Quando dos , ò mas quebrados sè comparan entre sí , ò se habla dellos , siempre se ha de entender , que son parte , ó partes de un mismo entero , mientras no se advierta otra cosa en contrario. Y asi, tratando destos dos quebrados $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{6}$, se entiende que son partes de un mismo todo, ó sea libra , sueldo , vara, ó qualquier otro todo de [illegible]en se hace mencion ; y asi, no se ha de entender que el un quebrado es de libra , y el otro de vara , ò de qualquier otro todo , sino entrambos de un mismo todo.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA THEORICA DE LOS Quebrados.

ESte Capitulo comprehende todos los fundamentos de la Logistica de los quebrados. Es de mucha importancia ; quien le entendiere bien , no hallará dificultad en toda la Logistica de los quebrados; pero quien solo gustáre de la practica , sin atender à la demonstracion, podrá omitirle.

THEO-

THEOREMA I.

QUALQUIERA QUEBRADO TIENE LA MISMA RAZON A su todo, ó à la unidad, que el numerador al denominador.

Exposicion.

134 SEa qualquier quebrado $\frac{2}{3}$ dos tercios de un dia, que son 16. horas. Digo que la misma razon ay de $\frac{2}{3}$ de dia à 1. dia, que del numerador 2. al denominador 3. esto es, que si el numerador 2. se contiene una vez y media en el denominador 3. tambien los $\frac{2}{3}$, que son 16. horas, se contienen en un dia, que son 24. horas, una vez y media.

Demonstracion.

El quebrado es el mismo numerador; y la unidad, ó todo dividido es el mismo denominador. (127) Luego el mismo respeto, ò razon dice el quebrado à la unidad, que el numerador al denominador: como si un padre se llama Pedro, y su hijo se dice Juan, el mismo respeto, ò relacion de paternidad dice el padre al hijo, que Pedro à Juan.

Consectarios.

135 Quanto mayor fuere el numerador, respeto del mismo, ò igual denominador, tanto mayor será el quebrado, y al contrario; y asi, $\frac{3}{4}$ es mas que $\frac{2}{4}$, porque el 3. al 4. dice mayor razon, que el 2. al mismo 4. (32)

Con qué si un numerador fuere doblado de otro será tambien doblado el quebrado del otro, con tal que tengan un mismo denominador; y asi, $\frac{4}{7}$ es doblado de, $\frac{2}{7}$ y lo mismo es de qualquiera otra razon.

136 Quando el numerador es menor que el denominador, el quebrado es menor que la unidad; porque como el denominador supone por la unidad, y la misma razon ay del numerador al denominador que del quebrado à la unidad: y si el numerador es menor que el denominador, tambien el quebrado será menor que la unidad.

Quando el numerador es igual al denominador, el quebrado es igual à la unidad, ò contiene un entero justamente; porque entonces el numerador contiene una vez sola al denominador: luego el quebrado tambien contiene una vez sola al entero, ò unidad.

Quando el numerador es mayor que el denominador, tambien el quebrado es mayor que la unidad, y contiene à lo menos un entero; porque como el quebrado tiene la misma razon al entero, ó unidad, que el numerador al denominador, si el numerador es mayor que el denominador, tambien el quebrado será mayor que la unidad.

THEOREMA II.

LOS QUEBRADOS CUYOS NUMERADORES TIENEN una misma razon à sus denominadores, son iguales.

Exposicion.

137 SEan dos, ò mas quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ de un mismo entero, cuyos numeradores 2. y 4. tengan una misma razon á sus denominadores 3. y 6. esto es, que asi como el 2. se contiene en su denominador 3. una vez y media, tambien el 4. es contenido en su denominador 6. una vez y media. Digo que los quebrados dichos son iguales.

Demonstracion.

Porque por el Theorema antecedente la misma razon tiene el quebrado $\frac{2}{3}$ à su entero, que 2. à 3. Y la misma razon tiene el quebrado $\frac{4}{6}$, al mismo entero (entrambos son quebrados de un mismo entero, como está advertido arriba) que 4. à 6. Luego siendo la razon de 2. á 3. la misma que la de 4. à 6. por la suposicion, será tambien la razon del quebrado $\frac{2}{3}$ á su todo la misma que de $\frac{4}{6}$ al mismo todo; con que los dichos quebrados tienen una misma razon al todo; luego son iguales: porque quando dos quantidades tienen una misma razon à una tercera, son iguales entre sí, como consta de la *prop.* 9. *del lib.* 5. *de Euc.*

Consectario.

138 De aqui se infiere, que la magnitud de los quebrados no se ha de tomar de la magnitud de los numeros con que se expresan, sino de la razon que los numeradores tienen à sus denominadores; de suerte, que un quebrado no será mayor que otro porque tenga mayores numeros, sino porque el numerador diga mayor razon al denominador; y asi $\frac{2}{7}$ será menor que $\frac{1}{2}$; porque menor razon tiene el 2. al 7. que el 1. al 2. (32) Tambien $\frac{10}{20}$, aunque se exprese con numeros mayores que $\frac{1}{20}$, es igual al dicho $\frac{1}{2}$, porque asi como 10. es mitad de 20. tambien 1. es mitad de 2.

THEOREMA III.

AQUEL QUEBRADO ES MAYOR CUYO NUMERADOR tiene mayor razon à su denominador.

Exposicion.

139 SEan dos, ò mas quebrados $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{2}$, y la razon del numerador 5. al denominador 6. sea mayor que la de 1. à 2. Digo, que el quebrado $\frac{5}{6}$ es mayor que $\frac{1}{2}$. De-

Demonstracion.

Siendo la razon de 5. à 6. mayor que la de 1. à 2. será la razon del quebrado $\frac{5}{6}$ à su todo mayor (134.) que la del quebrado $\frac{1}{2}$ al mismo todo (son quebrados de un mismo todo) Luego $\frac{5}{6}$ es mayor que $\frac{1}{2}$; porque de dos quantidades, la que tiene mayor razon à una tercera, que aqui es el todo, ò unidad, es mayor, como consta por la *prop.* 10. *del lib.* 5. *de Euclides.*

THEOREMA IV.

LOS QUEBRADOS QUE TIENEN IGUAL, Ò UN MISMO denominador, tienen entre sí la razon de los numeradores.

Exposicion.

140 SEan dos, ò mas quebrados $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{6}$ de un mismo todos, los quales tengan un mismo, ò igual denominador 6. Digo, que la misma razon tienen el quebrado $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{6}$ que el numerador 3. à 1. Esto es, que si el 3. es *triplo* del 1. tambien el quebrado $\frac{3}{6}$ es triplo de $\frac{1}{6}$.

Demonstracion.

El quebrado consiste en el numerador con respeto al denominador. (127) Luego siendo el denominador igual, tendrán los quebrados la misma razon de los numeradores.

A mas desto, siendo los denominadores iguales, toda la igualdad, ò desigualdad de los quebrados depende de los numeradores; luego los quebrados tienen la misma razon de los numeradores.

Consectarios.

141 De aqui se buelve à inferir, que quanto mayor será el numerador; respeto de un mismo denominador, tanto mayor será el quebrado; y asi, $\frac{3}{5}$ es mayor que. $\frac{2}{5}$ Tambien $\frac{3}{5}$ será menor que $\frac{4}{5}$; porque teniendo entrambos quebrados un mismo denominador, tienen la razon de los numeradores.

142 Si el numerador de un quebrado se multiplica por un qualquier numero, crece el quebrado tantas veces, como unidades ay en el tal numero; como si el numerador 3. deste quebrado $\frac{3}{7}$ se multiplica por 4. será el nuevo quebrado $\frac{12}{7}$, quatro veces mayor que $\frac{3}{7}$; porque como $\frac{12}{7}$, y $\frac{3}{7}$ tienen igual denominador, tienen la razon de los numeradores, la qual es quadrupla, porque en el 12. entra quatro veces el 3. que son tantas veces como unidades tiene el 4. por quien se ha multiplicado.

143 Pero si el numerador de un quebrado se parte por un qualquier numero, se disminuye el quebrado tantas veces, como unidades tiene el par-

partidor ; y asi , partiendo el numerador 24. deste quebrado $\frac{24}{30}$ por 6. saldrá $\frac{4}{30}$ que será seis veces menor, que el primero; porque $\frac{24}{30}$, y $\frac{4}{30}$ tienen igual denominador , con que tienen la razon de los numeradores , de los quales el 4. es seis veces menor que el 24.

THEOREMA V.

LOS QUEBRADOS TIENEN ENTRE SI LA MISMA RAZON que los productos de la multiplicacion en cruz de los numeradores por los denominadores.

Exposicion.

144 SEan dos quebrados $\frac{3}{6}$, y $\frac{2}{8}$, multiplicando el numerador 3. por el denominador 8. sale el producto 24. multiplicando el numerador 2. por el denominador 6. sale el producto 12. de modo que las multiplicaciones se han de hacer en cruz como se vé figarado. Digo , pues , que la misma razon tiene el quebrado $\frac{3}{6}$ à $\frac{2}{8}$, que 24. á 12. que son los productos de cada numerador, por los denominadores opuestos , y porque 24. es doblado de doce , tambien tres sextos será doblado de dos octavos.

$$\begin{array}{ccc} 24 & & 12 \\ \frac{3}{6} & \text{X} & \frac{2}{8} \\ & 48 & \end{array}$$

Antes de la demonstracion es menester suponer dos cosas. La primera , que los denominadores 6. y 8. se multipliquen entre sí , y harán 48. La segunda , que si un numero multiplica á otros dos , los productos tienen la misma razon entre sí , que los numeros multiplicados; como lo demuestra Euclides en la *proposicion* 17. *del libro* 7. y lo vemos insinuado en las observaciones del multiplicar.

Demonstracion.

El 6. multiplicando al 2. y al 8. produce 12. y 48. y asi tendrá el 12. al 48. la misma razon que el 2. al 8 . luego los quebrados $\frac{2}{8}$, y $\frac{12}{48}$ serán iguales. (137) Asi mismo el 8. multiplicando al 3. y al 6. produce 24. y 48. que tendrán la misma razon que 3. y 6. con que los quebrados $\frac{3}{6}$, y $\frac{24}{48}$ serán iguales; (137) pues porque los quebrados $\frac{24}{48}$ $\frac{12}{48}$, tienen un mismo, ó igual denominador, tienen entre sí la razon de los denominadores 24. á 12. (140) luego sus iguales $\frac{3}{6}\frac{2}{8}$ tienen entre sí la razon de 24. á 12.

Consectario.

145 De aqui consta claramente, que multiplicando en cruz , como está dicho , si salieren los pruductos iguales , serán los quebrados iguales ; pero si los productos fueren desiguales, tambien serán los quebrados desiguales ; y aquel quebrado será mayor , cuyo numerador multi-

plicando al denominador opuesto produxere mayor numero.

Con que con facilidad se puede conocer si dos quebrados son iguales, ó desiguales: sean, pues, dos quintos, y tres septimos: para conocer si son iguales, ó qual de los dos es mayor, multiplico en cruz: y porque 15. es mayor que 14. diré, que tres septimos es mayor que dos quintos. Asi mismo multiplicando en cruz en estos otros quebrados $\frac{1}{2}$ $\frac{10}{20}$ salen los productos iguales, por lo qual diré que los quebrados son iguales.

$$\begin{array}{ccc}14 & & 15\\ \frac{2}{5} & \times & \frac{3}{7}\end{array}$$

THEOREMA VI.

LOS QUEBRADOS QUE TIENEN IGUALES NUMERADOres, tienen entre sí la razon reciproca de los denominadores.

Exposicion.

146 SEan los quebrados dos tercios, y dos sextos, cuyos numeradores sean iguales. Digo que el quebrado dos tercios al quebrado dos sextos, tendrá la misma razon que el denominador 6. al denominador 3. que es razon reciproca; y asi dos tercios será doblado de dos sextos, porque el 6. es doblado del 3.

$$\begin{array}{ccc}12 & & 6\\ \frac{2}{3} & \times & \frac{2}{6}\end{array}$$

Demonstracion.

Siendo los numeradores iguales, toda la desigualdad de los quebrados proviene de los denominadores; pues multiplicando en cruz, tendrán los quebrados la misma razon de los productos, (144) los quales tienen la misma razon, que los denominadores, porque los numeradores son iguales, que es lo mismo que si fuera un solo numero, el qual multiplicando à otros dos, produce numeros proporcionales, (71) con que los productos 12. y 6. tienen la misma razon que los denominadores; y por haberse multiplicado en cruz, se han invertido; de suerte, que la misma razon hay de 12. á 6. que del numerador 6. à 3. Los quebrados, pues, dos tercios, y dos sextos, tienen la misma razon que 12. á 6. y esta es la misma que 6 à 3. luego los dichos quebrados tienen la razon reciproca de los denominadores.

Consectario.

147 De aqui consta, que si el denominador de un quebrado se multiplica por un qualquier numero, se disminuye el quebrado tantas veces, quantas unidades hay en el multiplicador; como multiplicando el denominador de este quebrado $\frac{3}{5}$ por 4 sale el quebrado $\frac{3}{20}$ quatro veces

ces menor ; porque los quebrados $\frac{5}{20}$ $\frac{5}{5}$, tienen la razon reciproca de 5. á 20. pues como el 5. se ha multiplicado por 4. será el 20. quatro veces mayor que el 5. y el 5. será quatro veces menor : y asi el un quebrado quatro doblado del otro.

148 Pero si el denominador de un quebrado se parte por qualquier numero, quedando el mismo numerador como antes , crece el quebrado tantas veces , quantas unidades hay en el partidor : y asi partiendo el denominador de este quebrado $\frac{6}{40}$ por 5. saldrá el quebrado $\frac{6}{8}$ cinco veces mayor : porque los quebrados $\frac{6}{8}$ $\frac{6}{40}$, tienen la razon de 40. á 8. que es cinco veces mayor.

CAPITULO SEGUNDO.

DE LA REDUCCION DE LOS QUEBRADOS.

REduccion de los quebrados es una mutacion de unos en otros, guardando el mismo valor. Contiene este Capitulo algunos Problemas necesarios para la Logistica de los quebrados , y otros solamente utiles , y convenientes. Tambien se comprenden aqui las reducciones de enteros á quebrados , y de estos á aquellos.

PROBLEMA I.

REDUCIR UN QUEBRADO A LOS MINIMOS TERMINOS.

ESte Problema solo es conveniente , pero no necesario. Enseña á reducir un quebrado de numeros grande á otro del mismo valor , que esté expresado con los menores terminos que se puedan hallar , quedando en él mismo valor.

Ya queda advertido , (138) que el valor , ó magnitud de un quebrado , no depende de la magnitud de los numeros con que se significa, sino de la razon que tiene el numerador al denominador ; porque un mismo quebrado se puede expresar con diferentes numeros , como parece en estos $\frac{102}{204}$ $\frac{100}{200}$, &c. los quales todos valen una mitad.

Esto supuesto , lo que se busca en este Problema, es reducir un quebrado de numeros grandes , como el $\frac{100}{200}$, á un quebrado que tenga los minimos terminos , ó numeros de todos aquellos , con que se puede signifi-

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

nificar el mismo valor del dicho quebrado, que será $\frac{1}{2}$ porque no hay otros numeros menores, que puedan significar una mitad.

Esta reduccion, como queda dicho, no es necesaria, porque todas las operaciones de los quebrados se pueden hacer sin ella; pero es de grande conveniencia, porque mas facilmente se conoce el valor del quebrado, y mejor se obra con numeros pequeños, que con grandes: para la reduccion es menester saber lo siguiente.

Propuestos dos, ó mas numeros, conocer si son entre sí primos, ó compuestos, y hallar la maxima medida comun.

149 Quales sean los numeros entre sí primos, ò compuestos, ya queda explicado en los Proemiales, (35. y 37.) ahora lo que buscamos es conocerlos. Partase el mayor por el menor, y si sobra algo dividase el menor por el residuo: si desta particion sobra algo, partase el primer residuo por el segundo; y de esta suerte se ha de continuar hasta que sobre zero, ó unidad: si sobra zero son los tales numeros entre sí compuestos, y el ultimo partidor serà la maxima medida comun; pero si sobra 1. seràn entre sí primos.

Sean estos dos numeros 3241. y 159. los que se han de examinar. Divido el mayor por el menor, y quedan 61. (no se hace caso del quociente, sino del residuo) Divido el menor 159. por el residuo 61. y sobran 37. Divido el primer residuo 61. por el segundo 37. y sobran 24. Divido el segundo residuo 37. por el tercero 24. y sobran 13. Divido el 24. por 13. y sobran 11. Divido el 13. por 11. y sobran 2. Divido el 11. por 2. y sobra 1. con que son numeros entre sí primos.

Otro exemplo: Tengo de examinar estos numeros 824. y 278. Divido el mayor por el menor, y sobran 268. Divido el menor 278. por el residuo 268. y sobran 10. Divido el 268. por 10. y sobran 8. Divido el 10. por 8. y sobran 2. Divido el 8. por 2. y sobra 0. con que son numeros entre si compuestos, y el ultimo partidor 2. será la mayor medida comun.

Si los numeros propuestos fueren mas que dos primeramente se han de examinar dos de ellos, los quales si fueren entre sí primos, tambien todos los numeros propuestos serán entre si primos; pero si fueren compuestos, tomese la maxima medida comun, y comparandola con el otro de los numeros propuestos, vease si hacen numeros entre sí primos, ó compuestos; si primos, todos serán primos, si compuestos saquese la maxima medida comun, la qual sera maxima medida comun de todos los tres numeros propuestos. Si hubiere mas numero, se

con-

conferirá esta medida comun del mismo modo con el quarto numero, y asi de los demás.

Sean estos tres numeros 84. 32. 16. los que se han de examinar. primeramente miro si los dos 84. y 32. son entre sí primos, ò compuestos, y hallo que son compuestos, cuya maxima medida comun es 2. Examino si esta medida comun 2. y el otro numero 16. son entre sí primos, ò compuestos, y hallo que son compuestos, cuya maxima medida comun tambien es 2. pues, digo, que el 2. es maxima medida comun de los tres numeros propuestos.

Otro exemplo: Sean propuestos quatro numeros 12. 18. 24. 30. Examino los dos 12. y 18. y hallo que son compuestos, y que su medida comunes 6. Examino otra vez el 6. y el 24. y hallo que son compuestos, y que su maxima medida comun es otra vez 6. Examino este 6. y el 30. y hallo que son compuestos, y que su medida comun es tambien el 6. pues, digo, que el 6. es maxima medida comun de todos los quatro numeros propuestos. Estos modos de obrar enseña Euclides *en las proposiciones 2 y 3. del lib. 7.*

Resuelvese el Problema.

150 Examinese el numerador, y denominador del quebrado si son entre sí primos, ó compuestos: si son primos ya está el quebrado reducido à los mismos terminos; de suerte, que aunque esté expresado con grandes numeros, como $\frac{236}{537}$, no se puede reducir quedando el mismo valor, por ser los minimos terminos en aquella razon que dice el numerador al denominador, en la qual consiste el valor del quebrado.

Pero si el numerador, y denominador son entre sí compuestos, busquese la mayor medida comun, por la qual se partirán los mismos numerador, y denominador, y los quocientes serán los terminos del quebrado reducido.

Como para reducir $\frac{84}{100}$ à minimos terminos, buscará primero la maxima medida comun, (149) que es 4. por la qual partiré el 84. y el 100. y estará el quebrado reducido à $\frac{21}{25}$. Asi mismo este otro quebrado $\frac{128}{368}$, se reducirá à los minimos terminos, partiendo el numerador, y denominador por 16. que es la maxima medida comun entre el numerador, y denominador, y vendrá el quebrado reducido $\frac{8}{23}$.

Demonstracion.

Dividiendo dos numeros por un partidor, salen los quocientes proporcionales, ò en una misma proporcion, que todo es uno, con los numeros dividendos, (94) luego en el exemplo primero, los quocientes 21. y 25. son proporcionales con los dividendos 84. y 100. y asi, los quebrados $\frac{84}{100}$, y $\frac{21}{25}$ son iguales, porque tienen los numeradores la misma razon à los denominadores. (137) A mas desto, dividiendo por la maxima medida comun, salen los quocientes minimos, porque quanto mayor es el divisor, es menor el quociente; y consta tambien por el corolario de la *prop.* 35. *del lib.* 7. de Eucl. luego el quebrado $\frac{21}{25}$, es igual à $\frac{84}{100}$, y está reducido à los minimos terminos.

Escolio.

151 Esta reduccion, como dixe, no es necesaria, sino conveniente; y asi por no gastar tiempo, y fatigar la cabeza en esta operacion la qual suele ser muy cansada, se podrá reducir el quebrado las mas veces à menores terminos, aunque no siempre à los minimos, deste modo.

Saquese la mitad, tercio, quarto, quinto, sexto, &c. ò aquella parte que se pudiera del numerador, y denominador del quebrado; esto es, partanse por 2. 3. 4. 5. 6. &c. hagase lo mismo del quebrado que saliere; y asi, prosiguiendo hasta que no se pueda partir mas; entonces estará reducido el quebrado à menores terminos, y muchas veces à los minimos; porque partiendo los terminos del quebrado por un numero, no se muda la proporcion, y por consiguiente, ni el valor del quebrado.

Como para reducir este quebrado $\frac{48}{96}$, divido los terminos por 2. que es sacar mitad, y será $\frac{24}{48}$, dividiendole otra vez por 2. saldrá $\frac{12}{24}$, dividiendole otra vez por 2. sale $\frac{6}{12}$, aora por abreviar sacando el sexto, ò partiendole por 6. saldrá $\frac{1}{2}$, que es lo mas que se puede reducir.

Si en el numerador, y denominador huviere al principio alguno, ò algunos zeros, quitense tantos de uno, como de otro, y quedará mas reducido, como en este $\frac{240}{600}$, quito un zero de cada parte, y restará $\frac{24}{60}$, que es lo mismo que partir por 10. Asi mismo, quitando dos zeros deste quebrado $\frac{600}{000}$, que es lo mismo que partir por 100. quedará mas reducido à $\frac{6}{100}$; porque partiendo por un mismo numero, quedan los quebrados iguales, como se dixo antes.

152 A esta regla de reducir quebrados à minimos, ò menores terminos, suelen llamar los Arithmeticos, *abreviar quebrados*; su opuesta es, la regla de aumentarlos; la qual aunque es de poco, ò de ningun provecho, pero para cumplimiento deste escolio no omitiré el enseñarla.

Multipliquense el numerador, y denominador del quebrado que se ha de aumentar por un qualquier numero, ò por aquel que importáre; y saldrá el quebrado aumentado à mayores terminos; como para aumentar $\frac{2}{3}$ multiplico por 4. y tendré $\frac{8}{12}$; si multiplico por 5. tendré $\frac{10}{15}$; porque quando un numero multiplica à otros dos, salen los productos;

pro-

proporcionales ; (71) luego los quebrados $\frac{2}{5}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{10}{15}$ son iguales , porque los numeradores tienen la misma razon à sus denominadores.

Examen.

153 Para examinar la reduccion , ò aumento de los quebrados , se hará asi : Multipliquense los terminos del quebrado reducido por la maxima medida comun , y saldrá el quebrado que se reduxo , como si $\frac{84}{100}$ está reducido à $\frac{21}{25}$, multiplico el 21. y el 25. por 4. que es la medida comun , y se bolverá á restituír el $\frac{84}{100}$ como es manifiesto.

Si los terminos aumentados del quebrado se dividen por el numero que se multiplicaron , bolverá à salir el quebrado primero , como si $\frac{2}{3}$ se aumentó à mayores terminos $\frac{20}{30}$, multiplicando por 10. Dividase aora por 10. y bolverá à salir como antes.

PROBLEMA II.

REDUCIR LOS QUEBRADOS A UN COMUN denominador.

154 REducir los quebrados à una denominacion , ò comun denominador , es buscar otros iguales , ò del mismo valor , que tengan un mismo , comun , ò igual denominador.

Si los quebrados son dos , como $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, se reducirán multiplicando entre sí los denominadores 3. y 5. y será el producto 15. el comun denominador. Para hallar los numeradores competentes al comun denominador , multipliquense los numeradores en cruz por los denominadores , como en el exemplo propuesto , multiplicando 2. por 5. sale el numerador 10. y multiplicando el 4. por 3. sale el otro numerador 12. con que los $\frac{2}{3}$, y $\frac{4}{5}$ estarán reducidos à un comun denominador $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$.

$$\begin{array}{ccc} 10 & & 12 \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{4}{5} \\ & 15 & \end{array}$$

Otro exemplo. Se han de reducir los quebrados $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{6}$ à un comun denominador. Multiplicò los denominadores 2. y 6. saldrá el comun denominador. Multiplico aora en cruz , y saldrán los nuevos numeradores 6. y 10. con que estarán reducidos , à $\frac{6}{12}$ y $\frac{10}{12}$. *La demonstracion desta primera parte del Problema , es la misma que la del Theorema 5.*

$$\begin{array}{ccc} 6 & & 10 \\ \frac{1}{2} & \times & \frac{5}{6} \\ & 12 & \end{array}$$

Si los quebrados , que se han de reducir fueren mas que dos , se multiplicará el denominador del primero , por el denominador del segundo ; y el producto , por el denominador del tercero , y este producto , por el denominador del quarto , &c. El ultimo producto , será el denominador comun. Para hallar los numeradores competentes à este denominador comun , multipliquese el numerador de cada quebrado por los denominadores de los otros quebrados , no por el propio , y el producto será el numerador competente al comun denominador.

Como si se han de reducir los quebrados $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$. Multiplicando 3. por 5. y el producto 15. por 7. será el comun denominador 105. Para los nuevos numeradores, multiplico, el numerador 2. por los denominadores 5. y 7. diciendo 2. veces 5. son 10. otra vez 10. veces 7. son 70. que es el un numerador. Multiplico el numerador 4. por 3. y 7. y será 84. el otro numerador. Multiplico el numerador 6. por 3. y 5. y será el otro numerador 90. con que los quebrados reducidos à un comun denominador , serán $\frac{70}{105}$ $\frac{84}{105}$ $\frac{90}{105}$.

$$\begin{array}{ccc} 70 & 84 & 90 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} & \frac{6}{7} \\ & 105 & \end{array}$$

Otro exemplo : Se han de reducir estos quebrados $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$ à un comun denominador. Multiplicando los denominadores entre si , saldrá el denominador comun 384. Multiplicando cada numerador por todos los denominadores , menos que por el propio , saldrán los numeradores nuevos 192. 288. 320. 336 con que estarán reducidos à $\frac{192}{384}$ $\frac{288}{384}$ $\frac{320}{384}$ $\frac{336}{384}$.

$$\begin{array}{cccc} 192 & 288 & 320 & 336 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{6} & \frac{7}{8} \\ & \multicolumn{2}{c}{384} & \end{array}$$

Demonstracion.

Si se atiende con cuydado à la operacion , constará claramente, que es lo mismo que reducir los quebrados de dos en dos à un comun denominador ; porque si en el exemplo primero se reducen los $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ à un comun denominador , serán $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$; y si cada uno destos se hermana con el otro quebrado $\frac{6}{7}$ reduciendolos à un comun denominador ; esto es , reduciendo por una parte $\frac{10}{15}$ y $\frac{6}{7}$, y por otra $\frac{12}{15}$ y $\frac{6}{7}$, quedarán todos reducidos , porque es la misma operacion que hemos hecho antes : pues como la reduccion de dos quebrados esté ya demonstrada , lo estará tambien la de muchos.

Escolio.

155 De otro modo podemos hacer la misma reduccion en quanto al hallar los nuevos numeradores. Multipliquese cada numerador por el

comun denominador; y partiendo el producto por el denominador propio de cada quebrado, los quocientes serán los nuevos numeradores. Como si se han de reducir $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ à un comun denominador. Multiplicando los denominadores 3. 3. y 4. entre sí, tendré el denominador comun 36. Aora multiplico el numerador 1. por el comun denominador 36. y el producto (que es 36.) le divido por el denominador 3. del quebrado $\frac{1}{3}$ será el quociente el numerador nuevo 12. Asimismo: multiplico el numerador 2. por el 36. y partiendo el producto 72. por el denominador 3. del quebrado $\frac{2}{3}$ saldrá el nuevo numerador 24. Ultimamente: multiplico el numerador 3. por el comun denominador 36. y el producto 108. le divido por el denominador 4. del quebrado $\frac{3}{4}$ el quociente 27. será el nuevo numerador.

12	24	27
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
	36	

La razon desto depende de lo que dirémos en la demonstracion de la regla de tres; porque aqui ay una regla de tres implicita deste modo: Si el denominador 3. (en el primer quebrado) dá el numerador 1. quedará el comun denominador 36. la qual regla se hace multiplicando el termino segundo por el tercero, que aqui es el 1. por el 36. y partiendo el producto por el primer termino, que es el denominador 3. como le verémos en su lugar.

Examen.

Para examinar esta reduccion, solo se ha de atender à que los quebrados reducidos sean iguales à los quebrados antes de reducir; porque el saber si tienen un comun denominador no necesita de prueba, pues se vé à la primera vista. Supongo, pues, que estos quebrados $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ están reducidos à estos $\frac{8}{20}$ y $\frac{15}{20}$. Examinense si los quebrados $\frac{2}{5}$ $\frac{8}{20}$ si son iguales multiplicando en cruz, y viendo si los productos salen iguales. (145) Del mismo modo se examinarán los otros dos $\frac{3}{4}$ y $\frac{15}{20}$, y si los $\frac{8}{20}$ y $\frac{15}{20}$ fueren iguales à $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ estará bien hecha la reduccion.

PROBLEMA III.

REDUCIR UN QUEBRADO Á UN DENOMINADOR DEterminado quando se puede hacer.

156 REducir un quebrado á un denominador determinado, es buscar un quebrado de igual valor, que tenga el denominador, que se pide. Multipliquese el numerador del quebrado por el denominador señalado, y el producto partase por el denominador del

del mismo quebrado, el quociente será el nuevo numerador competente al denominador determinado.

Este quebrado $\frac{2}{3}$ se ha de reducir à un quebrado que tenga por denominador 6. Multiplíquese el numerador 2. por 6. y el producto 12. divídase por el denominador 3. del quebrado, el quociente 4. será el numerador competente al denominador 6. con que el quebrado reducido es $\frac{4}{6}$ igual à $\frac{2}{3}$.

Otro exemplo: Tengo de reducir $\frac{6}{8}$ à quartos, ò à un denominador 4. multiplico 6. por 4. y el producto 24. le parto por el denominador 8. y será el quociente 3. con que el quebrado reducido es $\frac{3}{4}$.

Demonstracion.

157 Que el quebrado reducido $\frac{4}{6}$ en el primer exemplo, (lo mismo se dirá de qualquier otro) sea igual à los $\frac{2}{3}$ estará manifiesto por el Theor. 2. con que prueba, que la misma razon tiene el numerador 2. al denominador 3. que el otro numerador 4. à su denominador 6. esto es, que estos quatro numeros 2. 3. 4. 6. son proporcionales, lo qual pruebo asi.

El 2. se ha multiplicado por el otro extremo 6. y el producto 12. que es de los dos extremos, se ha partido por el 3. que es un medio, para hallar el otro medio 4. y asi multiplicando 3. por 4. se buelve à restituír el 12. que es el producto de los medios: con que de los quatro numeros 2. 3. 4. 6. el producto de los extremos es igual al de los medios luego por la *prop.* 19. *de lib.* 7. de Euc. son proporcionales; que es intento.

Observacion.

158 Quando el producto del numerador por el denominador determinado no se puede partir enteramente por el denominador del quebrado, no tiene lugar esta reduccion sin aver quebrado de parte de quebrado; como reduciendo $\frac{2}{5}$ à octavos, salen $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{5}$ de un octavo: con que no siempre se podrá hacer esta reduccion á quebrado simple. El examen desta operacion es el mismo que dimos en el Problema antecedente. En esta doctrina se fundan las partes Decimas, que explicarémos en la quarta parte deste Libro, y el Problema siguiente.

Hallar el valor de un quebrado.

159 Hallar el valor del quebrado, es saber lo que vale en alguna especie determinada; como que $\frac{3}{4}$ de vara son 3. palmos. Primeramente es necesario saber el valor del entero, respeto de quien es quebrado; esto es, en que partes se divide el dicho entero: pues multiplicando el valor del entero por el numerador del quebrado, y partiendo el producto por denominador, se hallará lo que se busca.

Exemplo: Para saber $\frac{3}{5}$ de libra, moneda de Valencia, qué valen: porque la libra tiene 20. sueldos, multiplico el numerador 3. por 20.

salen 60. dividolos por el denominador 5. y hallo 12. pues tantos sueldos son los $\frac{3}{5}$ de libra.

Otro exemplo : Si se busca qué valen $\frac{2}{3}$ de libra , moneda de Valencia Multiplico el 2. por 20. son 40. sueldos ; dividolos por 3. caben 13. sueldos, y sobra $\frac{1}{3}$ de sueldo , el qual porque contiene 12. dineros, multiplico el numerador 1. deste ultimo quebrado por 12. y el producto 12. le divido por el denominador 3. salen 4. dineros : con que valdrá el quebrado 13: sueldos y 4 dineros.

Otro exemplo : Quiero saber el valor de $\frac{2}{7}$ de arroba peso de Castilla ; porque la arroba en Castilla tiene 25. libras , multiplicolas por 2. y el producto 50. le divido por el denominador 7. caben à 7. y sobra $\frac{1}{7}$ de libra ; la qual porque tiene 16. onzas las multiplico por el numerador 1. deste ultimo quebrado, y partiendo el producto 16.por el denominador 7. caben à 2. y sobran $\frac{2}{7}$ de onza ; la qual porque tiene 8. ochavas , las multiplico por el numerador 2. deste ultimo quebrado, y dividiendo el producto 16. por 7. hallo 2. ochavas , y sobran $\frac{2}{7}$ de ochava la qual porque tiene 75. granos , les multiplico por 2. y parto el producto 150. por 7. caben à 21. granos , y sobran $\frac{3}{7}$ de grano , el qual ya no tiene division : con que los $\frac{2}{7}$ de arroba son 7. libras , 2. onzas , 2. ochavas , 21. granos , y $\frac{2}{7}$ de grano.

Demonstracion.

El quebrado se reduce al denominador en que se divide el entero, como en el exemplo primero los $\frac{3}{5}$ de libra , segun la operacion, están reducidos à $\frac{12}{20}$ de libra ; y porque el denominador son las mismas partes del todo , que aqui es la libra , no ay necesidad de nombrarle , sino solo el numerador 12. sueldos. De suerte, que saber el valor de un quebrado, es reducirle à un denominador,que sea el numero de las partes en que se divide el todo, ò especie mayor, para hacerla menor, ò mas baxa.

PROBLEMA IV.

REDUCIR LOS ENTEROS A QUEBRADOS.

Reducir un entero à quebrado, es buscar un quebrado igual al mismo entero. Tiene este Problema muchos casos.

Caso primero.

160 Para reducir un entero à qualquier quebrado sin determinar la especie , ò el denominador , se pondrá debaxo del entero una unidad, y estará reducido , como consta por lo que advertimos arriba, (128) y asi para reducir 12. à quebrado se hará deste modo $\frac{12}{1}$.

Ca-

Caso segundo.

161 Pero para reducir el entero à quebrado, cuyo denominador se ha determinado, se multiplicará el entero por el denominador señalado, y el producto será numerador respeto del dicho denominador; como si 16. se han de reducir à quintos, multipliquense los 16. por 5. y será el quebrado $\frac{80}{5}$. Si la unidad se ha de reducir à un denominador determinado, como à 5. pongase un 5 encima la linea, y otro debaxo asi $\frac{5}{5}$, y estará reducida.

La razon de esto es, porque si el 16. le ponemos como à quebrado asi $\frac{16}{1}$, para reducirle à quintos, multiplicamos el 16. por 5. y para hallar el nuevo numerador partimos el producto por el denominador 1. del quebrado; (156) pues como partir por 1. no disminuye la cantidad, quedará por numerador nuevo el mismo producto de 16. por 5. luego con multiplicar el entero por el denominador determinado; y el producto ponerle encima del mismo denominador, estará reducido el entero à quebrado.

Caso tercero.

162 Para reducir, ò incorporar el entero en un quebrado, multipliquese el entero por el denominador del quebrado, y al producto añadase el numerador del mismo quebrado; la suma será el nuevo numerador: como si 10. se han de reducir à $\frac{2}{3}$, multiplico 10. por 3. y al producto 30. añado el numerador 2. será todo 32. que es el numerador nuevo, debaxo del qual pondré el mismo denominador, y estará reducido asi $\frac{32}{3}$.

Porque si el entero 10. solo se huviera de reducir à tercios, seria $\frac{30}{3}$, por la regla antecedente, à mas desto ay 2. tercios: luego se han de añadir para hacer $\frac{32}{3}$: y como la unidad no aumenta la multiplicacion, se sigue desta regla, que para reducir la unidad à un quebrado, basta sumar el numerador, y denominador, y la suma será el nuevo numerador, debaxo del qual se pondrá el mismo denominador; y asi si 1. se ha de reducir à $\frac{3}{4}$, sumense 3. y 4. y debaxo la suma 7. pongase el mismo denominador 4. con que serán $\frac{7}{4}$.

Caso quarto.

163 Se han de reducir. 12. y $\frac{3}{4}$ à $\frac{2}{8}$. Primeramente reduzganse los 12. enteros al quebrado $\frac{3}{4}$ que les acompaña por la regla antecedente, y serán $\frac{51}{4}$, los quales se reducirán à un quebrado, que tenga por denominador 8. (156) y serán $\frac{102}{8}$ añadanse los 2. octavos, y será el quebrado reducido $\frac{104}{8}$. *La reduccion de este caso no es universal, porque depende del Problema antecedente, el qual no siempre tiene solucion, como asi se advirtió.*

PROBLEMA V.

REDUCIR LOS QUEBRADOS Á ENTEROS.

QUando el numerador es mayor que el denominador, el quebrado es mayor que la unidad, y por consiguiente contiene á lo menos un entero. (136) Pues lo que se busca en este Problema, es hallar quantos enteros hay en un quebrado mayor que la unidad.

164 Divídase el numerador por el denominador, y el quociente enseñará los enteros: Como en este quebrado $\frac{36}{9}$, dividiendo 36. por 9. hallarémos que hay 4. enteros justos. En este otro $\frac{45}{6}$, dividiendo el 45. por 6. hallarémos 7. enteros, y sobran $\frac{3}{6}$. La razon es clara, porque como el denominador es un entero, partiendo por él, sabremos quantos enteros contiene el quebrado. El examen será reducir los enteros al quebrado, que tenga por denominador el mismo de antes, (161. y 162.) y ha de salir el quebrado, que se reduxo.

PROBLEMA VI.

REDUCIR EL QUEBRADO COMPUESTO Á SIMPLE.

REducir el quebrado compuesto á simple, es hallar un quebrado sencillo, que sea igual al compuesto. Y como el quebrado compuesto sea en dos maneras; es á saber, quebrado de quebrado, y quebrado de parte de quebrado, (132) tendrá este Problema dos partes.

Primera parte.

165 Para deducir quebrado de quebrado, á quebrado simple, multiplíquense los numeradores entre sí unos por otros, y saldrá el nuevo numerador: multiplíquense del mismo modo los denominadores, y el producto será el nuevo denominador.

Como para reducir $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ á quebrado sencillo, multiplicando los numeradores 2. y 4. será 8. el nuevo numerador; multiplicando tambien los denominadores 3. por 5. será 15. el nuevo denominador, y el quebrado simple reducido será $\frac{8}{15}$.

Si hay quebrado de quebrado de quebrado, como $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, multiplicando asi mismo los numeradores entre sí 1. por 3. y el producto por 2. saldrá el nuevo numerador 6. Multiplicando tambien entre sí los denominadores 2. por 4. y el producto 8. por 3. será 24. el nuevo denominador, y el quebrado reducido $\frac{6}{24}$, ó $\frac{1}{4}$. Del mismo modo se reducirán muchos quebrados de quebrados.

Demonstracion.

En el exemplo primero (lo mismo diré de qualquier otro) los $\frac{2}{3}$ son de $\frac{4}{5}$: luego si $\frac{4}{5}$ se dividen en tres partes, y se toman dos, se tendrá el intento. Pues dividir los $\frac{4}{5}$ en tres partes es multiplicar el denominador 5. por 3. ó aumentarle tres veces, porque tanto quanto se aumenta el denominador, mengua el quebrado, (47) con que el tercio de $\frac{4}{5}$ será $\frac{4}{15}$. Y porque son dos tercios se ha de tomar dos veces el quebrado $\frac{4}{15}$, que es lo mismo que multiplicar el numerador 4. por 2. porque quanto crece el numerador, se aumenta el quebrado, (142) y será $\frac{8}{15}$, que es el mismo quebrado producido. Pues si este modo de obrar se mira bien, es lo mismo que multiplicar numerador por numerador, y denominador por denominador, que es lo que habemos hecho en el exemplo. Lo mismo es quando hay muchos quebrados de quebrados.

Segunda parte.

166 Para reducir el quebrado de parte de quebrado, á quebrado simple, saquese una parte del quebrado de quien el otro es parte, con la qual, y el quebrado de parte se hará la reduccion como antes.

Como si $\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{4}$ se han de reducir á quebrado simple, tomese una parte de los $\frac{3}{4}$, y será $\frac{1}{4}$ con que los $\frac{2}{5}$ respeto de $\frac{1}{4}$ serán quebrado de quebrado: de este modo $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{4}$, reduzganse multiplicando numerador por numerador, y denominador por denominador, (165) y será el quebrado simple reducido $\frac{2}{20}$.

Otro exemplo: Sean $\frac{3}{7}$ de una parte de $\frac{2}{3}$, tomando una parte de los $\frac{2}{3}$ será lo mismo, que $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{3}$, reduzganse (165) y serán $\frac{3}{21}$. Otro exemplo: Sean $\frac{1}{2}$ de una parte de $\frac{4}{5}$ de una parte de $\frac{2}{7}$. Tomando cada parte de los quebrados será $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{7}$, y reducidos como antes serán $\frac{1}{70}$ la demonstracion es la misma.

Examen.

En los quebrados de quebrado, dividanse los terminos del quebrado simple por los terminos de qualquiera de los quebrados de quebrado, y saldrá el otro: Como si $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{6}$ están reducidos á $\frac{8}{18}$, partiendo el 8. y el 18. por los terminos 2. y 3. del quebrado $\frac{2}{3}$ saldrá el otro quebrado $\frac{4}{6}$, porque como $\frac{8}{18}$ provino de la multiplicacion de los terminos de $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$: luego partiendo por los terminos de un quebrado, saldrá el otro.

En los quebrados de parte de quebrado se hará el mismo examen, pero no con todo el quebrado, sino con la parte del quebrado: Como si son $\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{7}$ saquese una parte de este quebrado, y será $\frac{1}{7}$, como mo se dixo antes, y seràn $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{7}$, los quales reducidos á quebrado simple será $\frac{2}{35}$; pues si los terminos deste quebrado se dividen por los terminos de $\frac{2}{5}$, saldrán los terminos de $\frac{1}{7}$, pues es la misma operacion de antes.

Observacion.

El quebrado, que se reduce en estas dos operaciones, es el primero, ó el que es parte, porque no se ha de entender, que todos los quebrados juntos se reducen tanto el que es parte, como el que es todo, sino solo el que es parte; de suerte, que el reducir $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ es hallar quanto valdrá $\frac{1}{3}$ de la mitad; y si la mitad es de sueldo, (que consta de 12. dineros) valdrá 6. dineros, con que $\frac{1}{3}$ de esta mitad serán 2. dineros, y asi $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de sueldo valdrá 2. dineros. En el Problema siguiente reducirèmos todos los quebrados, tanto el que es parte, como el que es todo.

PROBLEMA VII.

INCORPORAR LOS QUEBRADOS COMPUESTOS.

EN el Problema antecedente dimos regla para reducir el quebrado compuesto á simple; ahora enseñaremos el modo de incorporarlos, ó reducirlos á un quebrado solo, que sea igual al quebrado que es parte, y al que es todo, de suerte, que todos se haga uno solo. Contiene tambien este Problema dos partes.

Primera parte.

167 Incorporar un quebrado de quebrado, es hallar un quebrado simple, que sea igual al quebrado que es parte, y al que es todo: Como si son $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, para incorporarlos se ha de buscar un quebrado, que sea la suma de entrambos; esto es, que sea igual á los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ los dos juntos.

Reduzganse primero á quebrado sencillo, (165) y serán en el exemplo propuesto $\frac{8}{15}$. Ahora multipliquese el numerador del quebrado $\frac{4}{5}$, que es el todo, por el denominador del quebrado $\frac{2}{3}$, que es parte, y el producto 12. añadase al numerador del quebrado reducido $\frac{8}{15}$, serán $\frac{20}{15}$ el quebrado que se busca.

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{5} \quad \frac{8}{15} \quad \frac{20}{15}$$

Otro exemplo: Se ha de incorporar el quebrado $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ en el mismo quebrado $\frac{3}{4}$. Reducidos à quebrado simple son $\frac{3}{8}$; multiplicando en numerador 3. por el denominador 2. son 6 añadidos al numerador 3. del quebrado reducido $\frac{3}{8}$ son $\frac{9}{8}$, que es la suma de $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$.

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{3}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{9}{8}$$

Si

Si ay muchos quebrados de quebrados se incorporarán primero los dos primeros, y despues el siguiente, &c. como si son $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{7}$. Por la regla antecedente se incorporarán los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$, y serán $\frac{5}{6}$, despues se incorporarán los $\frac{5}{6}$ en los $\frac{2}{5}$, y serán $\frac{22}{30}$, los quales se incorporarán con los $\frac{3}{7}$, y serán $\frac{156}{210}$, que es el quebrado que se busca.

Demonstracion.

En el primer exemplo, (lo mismo diré de qualquier otro) multiplicando el denominador 3 por los terminos del quebrado $\frac{4}{5}$, saldrá el quebrado $\frac{12}{15}$ igual à $\frac{4}{5}$, como consta por el Problema 2. A mas desto el quebrado $\frac{8}{15}$, por la construccion es igual al quebrado de quebrado $\frac{2}{3}$. (165) Luego sumando los quebrados $\frac{12}{15}$ con $\frac{8}{15}$, (que teniendo un mismo, ó igual denominador, basta añadir los numeradores, como luego dirémos) será la suma $\frac{20}{15}$ el quebrado que se busca. Quando ay muchos quebrados de quebrados, la demonstracion es la misma, pues que se incorporan de dos en dos.

Segunda parte.

168 Para incorporar un quebrado de parte de quebrado, como $\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{7}$, se multiplicarán los denominadores, y será el nuevo denominador 35. Para hallar el nuevo numerador se multiplicará el numerador 3. del quebrado de quien se toma la parte, por el denominador 5. del quebrado que es parte; y al producto 15. se añadirá el numerador 2. y será el nuevo numerador 17. y todo el quebrado $\frac{17}{35}$.

$\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{7}$ $\frac{17}{35}$

Otro exemplo: Se han de incorporar $\frac{3}{4}$ de una parte de $\frac{1}{2}$, multiplicando los denominadores 4. por 2. salen 8. multiplicando el numerador 1. por el denominador 4. y al producto 4. añadiendo el numerador 3. salen 7. que es el nuevo numerador, y todo el quebrado $\frac{7}{8}$.

$\frac{3}{4}$ de una parte de $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{8}$

Si son muchos quebrados; como $\frac{1}{2}$ de una parte de $\frac{3}{4}$, de una parte de $\frac{2}{3}$, de una parte de $\frac{4}{5}$, se incorporarán de dos en dos; esto es, $\frac{1}{2}$ con $\frac{3}{4}$, y serán $\frac{7}{8}$, los quales se incorporarán con $\frac{2}{3}$, y serán $\frac{23}{24}$, los quales se incorporarán con $\frac{4}{5}$, y serán todo $\frac{119}{120}$.

Demonstracion.

En el exemplo primero el quebrado $\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{7}$, reducido à quebrado simple es $\frac{2}{35}$. (166) El quebrado $\frac{3}{7}$ es igual à $\frac{15}{35}$, como consta por el Problema 2. luego teniendo un comun denominador los dos quebrados basta añadir los numeradores, y será el quebrado $\frac{17}{35}$ el que se busca. Quando ay muchos quebrados es lo mismo, porque se incorporan de dos en dos, como está dicho.

CAPITULO TERCERO.

DEL SUMAR QUEBRADOS.

ESte Capitulo, y los tres siguientes contienen diferentes reglas, las quales reduciré à Problemas, para proceder con toda claridad, y distincion.

PROBLEMA I.

SUMAR QUEBRADOS.

169 SI los quebrados tienen un mismo, ò igual denominador, sumense los numeradores, y la suma será el nuevo numerador, debaxo del qual se pondrá el mismo denominador: como si se han de sumar $\frac{2}{5}$ con $\frac{3}{5}$, sumando los numeradores 2. y 3. será la suma 5. debaxo del qual se pondrá el denominador 5. y será el quebrado, ò suma $\frac{5}{5}$, que es lo mismo que un entero.

Otro exemplo: Sean $\frac{3}{7}$, y $\frac{6}{7}$ sumando 3. con 6. será el nuevo numerador 9. debaxo del qual se pondrá el 7. y saldrá la suma $\frac{9}{7}$, que es uno entero, y $\frac{2}{7}$.

Pero si los quebrados que se han de sumar tienen diferentes denominadores, reduzganse primero à un comun denominador; (154) despues sumense los numeradores nuevos, poniendo debaxo de la suma el denominador comun: como para sumar $\frac{2}{3}$ con $\frac{5}{7}$, reduzcanse à $\frac{14}{21}$, y $\frac{15}{21}$, sumense 14. y 15 serán 29. debaxo se pondrán el 21. y asi será la suma $\frac{29}{21}$, que es un entero, y $\frac{8}{21}$.

Otro exemplo: Se han de sumar $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, y $\frac{4}{6}$, reducidos à un comun denominador, (154) son $\frac{30}{60}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{40}{60}$; sumense los numeradores 30. 24. y 40. debaxo de la suma 94. escribase el comun denominador 60. con que la suma será el quebrado $\frac{94}{60}$.

Demostracion.

Teniendo los quebrados un comun denominador, serán partes de un todo denominadas por un mismo numero; esto es, serán partes hamogeneas, ò de una misma especie: luego la suma de estas partes (en las quales consisten los quebrados , como se dixo arriba) en orden al comun denominador , como será la suma de los quebrados.

PROBLEMA II.

SUMAR ENTERO CON QUEBRADO.

170 TRes casos puede tener este Problema. El primero , es sumar un entero con un quebrado , y este caso no tiene dificultad ; porque si se pone el quebrado al lado derecho del entero, estará sumado : como si se han de sumar 12. enteros con $\frac{2}{3}$, será la suma 12. y $\frac{2}{3}$; porque como el quebrado no es homogeneo con el entero , se suma con la conjuncion , y como está dicho en el numero 42.

El segundo caso es , quando se han de sumar muchos enteros con un quebrado : Sumense los enteros, y al lado de la suma escribase el quebrado como antes : como para sumar 12. y 15. con $\frac{2}{5}$, sumo 12. y 15. y al lado de la suma 27. pongo el quebrado asi : 27. y $\frac{2}{5}$.

El tercero caso , es quando han de sumar uno , ò muchos enteros con muchos quebrados ; como en el exemplo : Sumense los quebrados , y serán $\frac{13}{10}$. (169) Y porque el numerador es mayor que el denominador , reduzcanse à enteros , (164) y será 1. y $\frac{3}{10}$; escribanse los $\frac{3}{10}$, y el 1. se sumará con los enteros; con que será la suma 45. y $\frac{3}{10}$. La razon de este modo de obrar por sí misma es manifiesta.

$$\begin{array}{ll} 10 & \\ 34 & \\ & \frac{1}{2} \\ & \frac{4}{5} \\ \hline 45 & \frac{3}{10} \end{array}$$

PROBLEMA III.

SUMAR ENTEROS , Y QUEBRADOS , CON ENTEROS, y quebrados.

171 SUmense primero los quebrados , (169) y reducida la suma à enteros (si es que el numerador fuere igual, ò mayor que el denominador) se escribirá el quebrado que sobráre debaxo de la linea , y enfrente de los otros quebrados ; despues sumando los enteros hallados por el quebrado reducido (si es que los hay) con los enteros de las partidas , estará concluida la suma.

Como si se han de sumar 6. y quatro quintos, con 12. y tres quartos, la suma de los quebrados es $\frac{31}{20}$, sacados los enteros, ò reducidos, es 1. y $\frac{11}{20}$; escribanse los $\frac{11}{20}$, y sumese 1. con los 6. y 12. y será toda la suma 19. y $\frac{11}{20}$.

Otro exemplo: Se han de sumar los numeros, ò partidas que están en el exemplo: los quebrados sumados son $\frac{534}{216}$, y reducidos à enteros son 2. y $\frac{102}{216}$; escribase este quebrado, y guardense los 2. enteros, para sumarles con los enteros de las partidas; con que será la suma 178. y $\frac{102}{216}$.

6	$\frac{4}{5}$
12	$\frac{3}{4}$
19	$\frac{11}{20}$
16	$\frac{8}{9}$
10	$\frac{3}{4}$
150	$\frac{5}{6}$
178	$\frac{102}{216}$

CAPITULO QUARTO.

DEL RESTAR QUEBRADOS.

PROBLEMA I.

RESTAR UN QUEBRADO DE OTRO.

172 SI los dos quebrados tienen igual denominador, restese el menor numerador del mayor, y la diferencia, ò resta será el nuevo numerador, debaxo del qual se pondrá el denominador de los quebrados: como si se han de restar tres quintos de quatro quintos, restense 3. de 4. y quedará 1. y el quebrado de la resta será un quinto. Otro exemplo: Se han de restar $\frac{8}{12}$ de $\frac{11}{12}$, restando 8. de 11. quedarán 3. y el quebrado residuo será $\frac{3}{12}$.

Pero si no tienen un mismo, ò igual denominador, reduzcanse à un comun denominador por el Problema 2. del Capitulo 2. y se hará la resta como antes: como si se han de restar tres quintos de tres quartos, reducidos son $\frac{12}{20}$, y $\frac{15}{20}$; y restando 12. de 15. quedarán 3. que será el numerador nuevo, debaxo del qual se pondrá el comun denominador; con que la resta será $\frac{3}{20}$.

Otro exemplo: Se han de restar dos tercios de quatro sextos, reducidos son $\frac{12}{18}$, $\frac{12}{18}$, restando 12. de 12. queda cero; con que ningun re-

residuo queda; porque quien debe $\frac{2}{3}$, ò $\frac{12}{18}$, y paga $\frac{4}{6}$, ò $\frac{12}{18}$, todo lo ha pagado, y nada queda deviendo.

Demostracion.

Los quebrados consisten en el numerador, (127) y siendo el denominador el mismo, ò comun, serán partes de un todo denominado por un mismo numero, y toda la igualdad, ò desigualdad está en los numeradores: luego restando un numerador de otro, quedará la diferencia, resta, ò residuo.

Observacion.

En el restar quebrados no pueden concurrir mas que dos numeros, como se dixo en el restar enteros; y asi, quando se hubiere de restar un quebrado de muchos, ò al contrario, se hará primero la suma, y despues la resta: como para restar tres quartos de un medio y dos quintos, se sumarán los dos, y de la suma $\frac{9}{10}$ se restarán los tres quartos, y quedarán $\frac{6}{40}$.

Si un quebrado no se puede restar de otro, por ser este menor, como tres quartos de un medio, se hará la resta al contrario, para saber lo que se pagó mas, (como se dixo en el restar enteros) restando un medio de tres quartos.

PROBLEMA II.

RESTAR QUEBRADOS DE ENTERO.

173 Resuelvase una unidad del entero en quebrado, cuyo denominador sea igual al denominador del quebrado que se ha de restar; (161) despues restese el quebrado dado de la unidad asi reducida, y restando 1. que se tomó del entero, quedará la resta.

Como si se han de restar dos quintos de 16. tomo una unidad de los 16. y reducida à quintos será cinco quintos; restense ahora dos quintos de cinco quintos, y quedarán tres quintos, se escribirán debaxo la linea; despues restese 1. que se tomó del numero 16. y quedarán 15. con que será la resta 15. y tres quintos: la razon deste modo de obrar por sí misma es manifiesta.

$$\begin{array}{rr} 16 & \\ & \frac{2}{5} \\ \hline 15 & \frac{3}{5} \end{array}$$

Observacion.

174 Atendiendo con cuydado à la regla sobredicha, consta clara-

mente , que se puede restar quebrado de entero , sin hacer reduccion de unidad ; porque como la unidad reducida tenga el numerador igual al denominador del quebrado que se resta, es lo mismo quitar el numerador de este quebrado de su denominador , que del numerador de la unidad reducida ; y asi para hacer la resta , basta quitar el numerador del quebrado de su denominador , y luego quitar 1. del entero: como para restar cinco sextos de 8. restese el numerador 5. del denominador 6. y quedará un sexto : aora restese 1. de 8. y quedará toda la resta 7. y un sexto.

PROBLEMA III.

RESTAR ENTERO , Y QUEBRADO , DE ENTERO SOLO.

175 ESte Problema es casi el mismo que el antecedente. Restese el numerador del quebrado de su denominador, (usando de la observacion antecedente) ; despues añadase 1. à la paga , y hagase la resta de los enteros del modo ordinario : como si se han de restar 6. y dos septimos de 12. restando el numerador 2. del denominador 7. quedan 5. y el quebrado es cinco septimos : añadese 1. à los 6. y serán 7. restados de 12. quedan 5. con que es la resta 5. y cinco septimos.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6\,\frac{2}{7} \\ \hline 5\,\frac{5}{7} \end{array}$$

PROBLEMA IV.

RESTAR ENTERO , DE ENTERO , Y QUEBRADO.

176 REstese el un entero del otro (49) , y al lado escribase el quebrado : como para restar 8. de 10. y dos tercios , restando 8. de 10. quedarán 2. y con el quebrado será la resta 2. y dos tercios.

$$\begin{array}{r} 10\,\frac{2}{3} \\ 8\phantom{\,\frac{2}{3}} \\ \hline 2\,\frac{2}{3} \end{array}$$

PROBLEMA V.

RESTAR ENTEROS, Y QUEBRADO, DE ENTEROS, y quebrado.

177 TRes casos tiene este Problema. El primero es quando el quebrado de la paga es igual al de la deuda; y entonces, con restar solamente los enteros, como parece en el exemplo, está concluida la operacion; porque restando un quebrado de su igual, queda cero.

$$\begin{array}{r} 24\ \frac{1}{2} \\ 16\ \frac{1}{2} \\ \hline 8\ {}^{0} \end{array}$$

178 El segundo es, quando el quebrado de la paga es menor que el de la deuda; y entonces restese un quebrado de otro, (172) y escribase la diferencia debaxo la linea; despues hagase la resta de los enteros por el modo ordinario, como perece en el exemplo.

$$\begin{array}{r} 18\ \frac{3}{4} \\ 10\ \frac{1}{2} \\ \hline 8\ \frac{2}{8} \end{array}$$

179 El tercero es, quando el quebrado de la pagá es mayor que el de la deuda; y en tal caso tomese una unidad de los enteros de la deuda, la qual se reducirá al quebrado que le acompaña (162); despues hagase la resta, como en el segundo caso, pero añadiendo 1. à los enteros de la paga, por la nnidad que se tomó de la deuda: como en el exemplo, tomese 1. de 10. y reducido à $\frac{1}{2}$, será $\frac{3}{2}$, restense ahora tres quartos de $\frac{1}{2}$ (172), y quedarán seis ochavos, que se han de escribir debaxo la linea: despues, juntando 1. con los enteros 6. de la paga, serán 7. restense de 10. y quedan 3. con que la resta son 3. y ^{6}. La razon de este modo de obrar por sí misma es manifiesta.

$$\begin{array}{r} 10\ \frac{1}{2} \\ 6\ \frac{3}{4} \\ \hline 3\ \frac{6}{8} \end{array}$$

De otro modo: Tomese lo que falta para un entero del quebrado: $\frac{3}{4}$ de la paga, que será un quarto, sumese con el quebrado $\frac{1}{2}$ de la deuda, y serán $\frac{6}{8}$; añadese 1. à los enteros de la paga, serán 7. restese como antes. Este modo no se diferencia en la substancia del que hemos usado en el restar enteros.

¶ En todos estos Problemas se reducen los quebrados compuestos à sus simples (quando les hay) antes de cada operacion, por el Problema 6. del cap. 2.

CA-

CAPITULO QUINTO.

DEL MULTIPLICAR QUEBRADOS.

PROBLEMA I.

MULTIPLICAR QUEBRADO POR QUEBRADO.

180 Multipliquense los numeradores uno por otro, y el producto será el nuevo numerador: Multipliquense tambien los denominadores, y saldrá el nuevo denominador: como si se han de multiplicar dos quintos por quatro septimos; multiplicando 2. por 4. sale 8. multiplicando 5. por 7. sale 35. con que el quebrado producido será $\frac{8}{35}$. Otro exemplo: Para multiplicar tres quartos por un medio, multipliquense los numeradores 3. por 1. y tambien los denominadores 4. por 2. y será el quebrado producido $\frac{3}{8}$.

$$\frac{2}{5}\quad\frac{4}{7}\qquad\frac{8}{35}$$

Aunque los quebrados multiplicados sean muchos, se hará del mismo modo: como para multiplicar dos tercios por tres quintos, y el producto por un medio, y el producto otra vez por tres septimos, se multiplicarán los numeradores unos por otros, esto es, 2. por 3. y el producto 6. por 1. y el producto 6. por 3. serán 18. Multipliquense del mismo modo los denominadores, y será el producto 210. con que el quebrado producido será $\frac{18}{210}$. Si se han de multiplicar quebrados compuestos, se reducirán à simples por el Problema 6. cap. 2. y despues se hará la multiplicacion.

$$\frac{2}{3}\ \frac{3}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{7}\qquad\frac{18}{210}$$

Demostracion.

El multiplicar quebrados es lo mismo que reducir quebrado de quebrado à quebrado simple (160) Y para explicar esto, me valdré de numeros contactos; porque con ellos se percibirá mejor el fin del multiplicar, el qual entendido, estará clara la demostracion.

Supongo, pues, que valiendo la vara de cinta medio real, se toma solamente media vara: Con que se ha de multiplicar la cantidad media vara por el precio medio real: Pues valiendo toda la vara medio real, sin duda que la media vara valdrá la mitad de medio real; con que será quebrado de quebrado; esto es, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, que será $\frac{1}{4}$.

Asimismo, si la vara vale dos tercios de real, y se toman tres quartos de vara, se habrán de multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$; esto es, tomar $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$. Luego lo mismo es multiplicar, que reducir quebrado de quebrado à quebrado simple. Y como esta reduccion esté demostrada en el Problema 6. del cap. 2. estará tambien demostrado el multiplicar. Porque entrambas operaciones se hacen del mismo modo, multiplicando los numeradores, &c. para hacer el denominador.

PROBLEMA II.

MULTIPLICAR ENTERO POR QUEBRADO.

181 REduzcase el entero à quebrado, poniendole debaxo una unidad, (560) y hagase la multiplicacion como antes: como si se han de multiplitar 4. por $\frac{2}{3}$, reducido el entero será; multipliquese, pues, por $\frac{2}{3}$, y será el producto $\frac{8}{3}$.

$\frac{4}{1}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{8}{3}$

Lo mismo se hará sin reducir el entero à quebrado con solo multiplicar el entero por el numerador del quebrado; porque como la unidad, que sirve de denominador al entero, no aumenta la multiplicacion, lo mismo es que si no estuviera; y asi, basta multiplicar el entero por el numerador del quebrado.

PROBLEMA III.

MULTIPLICAR POR ENTERO, QUEBRADO.

182 Reduzcase el entero al quebrado que le acompaña, (262) y hagase la multiplicacion como antes: (181) como si se han de multiplicar 6. por 2. y $\frac{3}{5}$; reducidos los 2. à los $\frac{3}{5}$ son $\frac{13}{5}$; ahora multipliquese el entero 6. por el numerador 13. y será el producto $\frac{78}{5}$, que son 15. y $\frac{3}{5}$.

183 Lo mismo se hará sin reduccion. Multipliquese el 2. por el 6. será el producto 12. Multipliquese el 6. por el quebrado $\frac{3}{5}$, y el producto $\frac{18}{5}$ reduzcase à enteros, (164) y serán 3. y tres quintos, sumense con los 12. y será todo el producto 15. y $\frac{3}{5}$.

$$\begin{array}{rl} 6 & \frac{3}{5} \\ 2 & \\ \hline 12 & \frac{3}{5} \\ 3 & \\ \hline 15 & \frac{3}{5} \end{array}$$

PROBLEMA IV.

MULTIPLICAR ENTERO, Y QUEBRADO POR ENTERO, y quebrado.

184 Reduzcanse los enteros à sus quebrados, (162) y hagase la multiplicacion. (180) Como para multiplicar 8. y tres quartos por 6. y dos tercios, reducidos son $\frac{35}{4}$ y $\frac{20}{3}$. Multipliquense ahora, y saldrá el producto $\frac{700}{12}$, que son 58. y $\frac{4}{12}$.

185 De otro modo sin reduccion: Multipliquense los enteros, y al producto 48. añadanse los productos de cada entero por los quebrados en cruz: esto es, el producto de 8. por dos tercios, y de 6. por tres quartos, que son 5. y un tercio, y quatro, y dos quartos. Añadase tambien el producto de los mismos quebrados entre sí, que es $\frac{6}{12}$, ò un medio. Sumese todo, (171) y será el producto total 38. y $\frac{8}{24}$, ò un tercio.

$$\begin{array}{rl} 8 & \frac{3}{4} \\ 6 & 2 \\ \hline 48 & \frac{1}{3} \\ 5 & \frac{2}{4} \\ 4 & \frac{1}{2} \\ \hline 58 & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$$

Otro exemplo: Pedro compra 4. varas y dos quintos de paño à 2. libras, y cinco sextos la vara. Multiplicando 4. por 2. salen 8. despues multipliquese en cruz cada entero por el quebrado opuesto: esto es, el 4. por cinco sextos, y el 2. por dos quintos, salen los productos 3. y dos sextos, y quatro quintos, que se escribirán en su lugar, como parece en el exemplo: à mas de esto se multiplicarán los quebrados dos quintos por cinco sextos, y el producto $\frac{10}{30}$ se escribirá, como parece. Hecha la suma de todo, (171) será el valor de las 4. varas, y dos tercios, las 12. libras, y abreviado $\frac{7}{15}$, que salen en la suma, que son (159) 9. sueldos y 4. dineros.

$$\begin{array}{rl} 4 & \frac{2}{5} \\ 2 & \frac{5}{6} \\ \hline 8 & \\ 3 & \frac{2}{6} \\ & \frac{4}{5} \\ & \frac{10}{30} \\ \hline 12 & \frac{420}{900} \end{array}$$

Observaciones.

186 Para multiplicar un quebrado por entero que sea igual al denominador; como $\frac{3}{4}$ por 4. basta borrar el denominador, y dexar al numerador como entero; porque multiplicando tres quartos por 4. segun las reglas dadas, salen $\frac{12}{4}$; y para reducirlos à enteros se divide el numerador 12. por el denominador 4. (164), y saldrán 3. con que el producto de 3. por 4. que es 12. se parte por el denominador 4. que es igual al entero 4. por quien se multiplicó: Luego ha de venir al quociente el mismo numero multiplicador, que es el 3.

187 Quando el numerador de un quebrado es igual al denominador del otro, como $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, para multiplicarlos basta poner por quebrado el numerador, y denominador desiguales, asi $\frac{3}{5}$; porque como haciendo la operacion por las reglas dadas, se ha de multiplicar el 4. por el 3. y el 5. y por el 4. se sigue, que el 5. multiplica al 3. y al 5. Luego los productos 12. y 20. son proporcionales (71) con los numeros 3. y 5. y asi el quebrado $\frac{12}{20}$, producido por las reglas ordinarias, será igual (137) al quebrado $\frac{3}{5}$, producido por esta regla.

188 Para doblar, trasdoblar, quatrodoblar, &c. un quebrado, multipliquese el numerador por 2. 3. 4. &c. como consta por lo que diximos arriba, (181) ò dividase el denominador por los mismos numeros, (quando se puede) como consta por el numero 148. Y asi para doblar este quebrado tres quartos, multiplico el numerador por 2. y saldrá seis quartos; ò divido el denominador por 2. y saldrá $\frac{3}{2}$, que todo es uno.

Escolio.

189 Tres cosas notables ocurren en el multiplicar quebrados, en que suelen reparar, y admirarse los principiantes. La primera: Multiplicando quebrados menores que la unidad, el producto siempre es menos que qualquiera de los quebrados que se multiplican: como multiplicando dos tercios por tres quartos, sale el producto $\frac{6}{12}$, ò $\frac{1}{2}$, que es menor que los dos tercios, y que los tres quartos. Lo qual parece contra toda razon; porque multiplicando ha de crecer el producto, supuesto que se aumenta el un numero de los multiplicados tantas veces, como unidades tiene el otro.

La segunda: No sale el mismo producto multiplicando los quebrados, que multiplicando el valor de ellos mismos: como si Pedro compra

dos

dos tercios de libra de fruta, por tres quartos de sueldo la libra: multiplicando, segun la regla de los quebrados, salen $\frac{6}{12}$, ò $\frac{1}{2}$. Multipliquemos ahora segun el valor: Los dos tercios de libra de peso de 12. onzas son 8. onzas, y los tres quartos de sueldo son 9. dineros; (199) pues multiplicando 8. por 9. dineros son 72. dineros: con que multiplicando en forma de quebrado sale medio sueldo, que son 6. dineros; y multiplicando por el valor salen 72. dineros, que son 6. sueldos, lo qual parece contra toda razon.

La tercera: En el sumar, y restar quebrados se reducen primero à un comun denominador; y para multiplicarlos, y partirlos (como luego verémos) no es necesaria esta reduccion.

190 Para inteligencia de la primera, y segunda dificultad, es preciso saber qual sea el intento, y fin del multiplicar; y para explicarlo mejor me valdré del mismo exemplo. Digo, pues, que multiplicar dos tercios de libra de fruta por tres quartos de sueldo, es buscar quanto valen los dos tercios de libra, à razon de tres quartos de sueldo la libra; de suerte, que el precio tres quartos no es valor de cada tercio de libra sino del entero, que es la libra, que es lo mismo que buscar que valdrán dos tercios de libra, valiendo la libra tres quartos de sueldo: sin duda que valdrán menos que tres quartos; porque si toda la libra vale tres quartos, los dos tercios de libra valdrán menos; y por eso sale numero menor en el producto, y con esto queda satisfecha la primer duda.

Pero quando se multiplica el valor de los quebrados, como 8. onzas por 9. dineros, de ordinario se varía la suposicion, porque el precio se toma de cada onza: esto es, se multiplican las 8. onzas à 9. dineros cada onza, y asi importan 72. dineros, ò 6. sueldos. Si el precio 9. dineros no se tomára de la onza, sino de la libra, como se hace en los quebrados, fuera lo mismo que multiplicar quebrados; porque entonces, si la libra vale 9. dineros, los dos tercios de libra valdrán 6. dineros, que es medio sueldo, como antes.

De modo, que toda la dificultad consiste, en que se varía la suposicion; porque multiplicando en forma de quebrado, el precio no es valor de la parte del quebrado, sino del todo, ò unidad; y multiplicando el valor de los quebrados, el precio se hace comunmente valor de cada unidad; y asi se aumenta tantas veces como hay unidades: Con que no puede salir lo mismo multiplicando dos tercios por tres quartos, que multiplicando 8. por 9. y lo mismo diré de qualquier otro exemplo.

Verdad es, que si el producto del valor de los quebrados se compara con el producto del valor de los todos, será lo mismo: Como el producto del valor de los quebrados es 72. los todos de cada quebrado se dividen

en

en 12. partes; porque la libra tiene 12. onzas, y el sueldo tiene tambien 12. dineros: pues si el 72. se compara con el producto de 12. por 12. que es 144. tambien será mitad; como multiplicando dos tercios por tres quartos, sale una mitad.

Otro exemplo: Se han de multiplicar dos quartos de vara por quatro quintos de libra; siguiendo la regla de los quebrados salen $\frac{8}{12}$, que son dos quintos. Y mutiplicando el valor de dos quartos de vara, que son 2. palmos, por el precio quatro quintos de sueldo, que son 16. sueldos, salen 32. sueldos, los quales comparados con el producto de 4. palmos, que tiene la vara, por 20. sueldos, que tiene la libra, el qual es 80. sueldos, tambien serán dos quintos; de suerte, que 32. sueldos, son dos qnintos de 80. sueldos.

La razon de esto es, porque se ha de comparar producto con producto; esto es, producto de las partes, con el producto de los todos; porque de este modo son homogeneos: pero no se compara bien el producto de las partes con el todo, porque son heterogeneos.

Por la difinicion del multiplicar, se explica de raiz lo sobredicho. Porque el multiplicar es buscar un numero que tenga la misma razon con uno de los multiplicantes, que el otro con la unidad; (57) ò que la unidad tenga la misma razon con uno de los multiplicantes, que el otro con el producto. Y asi, multiplicar dos tercios por tres quartos, es lo mismo que buscar un numero, que será $\frac{1}{2}$, que tenga la misma razon con $\frac{3}{4}$, que $\frac{2}{3}$ con la unidad; ò que la unidad tenga la misma razon con $\frac{2}{3}$, como $\frac{3}{4}$ con $\frac{1}{2}$. Y asi, serán proporcionales 1. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$; pues como dos tercios son menos que la unidad, tambien medio ha de ser menos que tres quartos; y por eso, multiplicando quebrados sale numero menor.

Pero multiplicando enteros, como 8. por 9. serán proporcionales 1. 8. 9. 72. donde como el 8. es mas que la unidad, porque es entero, tambien el 72. ha de ser mas que 9. y por eso sale mayor el producto. Verdad es, que si los quebrados fueren mayores que la unidad: esto es, que tengan el numerador mayor que el denominador, el quebrado producido será tambien mayor que qualquiera de los multiplicantes. Pero si hubiere un quebrado mayor que la unidad, y otro menor, entonces el producto será algunas veces mayor, y otras menor.

La solucion de la tercera dificultad es facil; porque como el sumar, y restar ha de ser de partidas homogeneas; (42. y 4.) por eso los quebrados se reducen à un comun denominador, que es hacerlos homogeneos, ò de una misma especie; pero en el multiplicar, y partir no es preciso que sean homogeneos, (58. y 77.) y asi no es necesario la reduccion.

CA-

CAPITULO SEXTO.

DEL PARTIR QUEBRADOS.

PROBLEMA I.

PARTIR QUEBRADO A QUEBRADO.

191 PAra partir quebrados es necesario tener grande cuydado en escribirlos, de modo, que el quebrado dividendo esté à la izquierda, y el partidor à la derecha, respeto del que los escribe; pero no es preciso que el dividendo sea mayor que el divisor, porque puede ser menor. Multipliquese el numerador del quebrado dividendo por el denominador del divisor, y saldrá el nuevo numerador. Multipliquense el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y saldrá el nuevo denominador.

Se han de partir quatro quintos à tres septimos; escribanse como se vé en el exemplo, y multiplicando el numerador 4. del quebrdo dividendo, por el denominador 7. del divisor, saldrá el nuevo numerador 28. Multiplicando el denominador 5. del dividendo por el numerador 3. del divisor, saldrá el nuevo denominador 15. con que el quociente será $\frac{28}{15}$.

$$\frac{4}{5} \text{X} \frac{3}{7} \quad \frac{28}{15}$$

Otro exemplo: Para partir ^{1} por $\frac{3}{5}$, multiplico 1. por 5. y tengo el numerador 5. Multiplico 2. por 3. y tengo el nuevo denominador 6. con que el quociente será $\frac{6}{5}$. Si se han de partir quebrados compuestos, reduzganse à simples por el Problema 6. y despues se partirán.

$$\frac{1}{2} \text{X} \frac{3}{5} \quad \frac{5}{6}$$

Demostracion.

Para entender la demostracion del partir quebrados, es necesario saber el intento y fin de esta regla; que es buscar quantas veces entra, ò se contiene el quebrado divisor en el dividendo, el qual es el mismo intento que en el partir enteros. Y tantas veces como el dividendo contietiene al divisor , otras tantas el quociente contiene à la unidad ; y asi son proporcionales , el dividendo , divisor , quociente , y unidad ; como consta en los enteros , que partiendo 12. por 4. salen 3. y la misma razon hay de 12. à 4. que de 3. à la unidad: luego si yo pruebo que la misma razon hay de quatro quintos à tres septimos , què de $\frac{28}{15}$ à la unidad , en el primer exemplo estará clara la demostracion de la regla. Asi lo pruebo.

El numerador 28. y el denominador 15. del quociente han sido producidos de la multiplicacion en cruz de los terminos del quebrado dividendo , por los del divisor : luego la misma razon tiene el dividendo $\frac{4}{5}$ al divisor $\frac{3}{7}$, que el 28. al 15. (144) pues la razon que tiene el 28. al 15. esa misma tiene el quebrado $\frac{28}{15}$ à la unidad : (134) luego como $\frac{4}{5}$ à $\frac{3}{7}$ asi $\frac{28}{15}$ à la unidad , que es tener la misma razon. Mas facilmente se entenderá esto por el Escolio que pondremos al fin del Capitulo.

PROBLEMA II.

PARTIR ENTERO POR QEBRADO, O AL contrario.

192 Reduzcase el entero à quebrado , poniendo una unidad debaxo , (160) y hagase la particion , como en el Problema antecedente. Como para dividir 8. à $\frac{3}{4}$, reduzco el 8. à $\frac{8}{1}$; ahora hago la division , multiplicando en cruz el 8. por el 4. y el 1. por el 3. sale el quociente $\frac{32}{3}$.

$$\frac{8}{1} \text{ X } \frac{3}{4} \qquad \frac{32}{3}$$

Otro exemplo : Se han de partir cinco septimos por 6. reducido el entero será $\frac{6}{1}$: ahora dividanse los cinco septimos por 6. enteros , multiplicando el 5. por 1. y el 7. por 6. y saldrá el quociente. La demostracion es la misma de antes.

$$\frac{5}{7} \text{ X } \frac{1}{6} \qquad \frac{5}{42}$$

PROBLEMA. III.

PARTIR ENTERO , Y QUEBRADO POR ENTERO SOLO, ò al contrario.

193 Reduzcase el entero al quebrado que le acompaña, (162) y hagase la division como antes : como si se han de partir 10. y dos tercios por 8. reducidos los enteros sen $\frac{32}{3}$, y $\frac{8}{1}$; haga-

ga-

gase la particion, mulplicando el 32. por 1. y el 3. por 8. vienen al quociente treinta y dos veinte y quatro avos.

$\frac{32}{3} \mathrm{X} \frac{8}{1}$ $\frac{32}{24}$

Otro exemplo: Para partir 8. por 2. y $\frac{5}{6}$, reducidos los enteros son $\frac{8}{1}$, y $\frac{17}{6}$, hecha la particion, sale el producto $\frac{48}{17}$.

PROBLEMA IV.

PARTIR ENTERO, Y QUEBRADO POR entero, y quebrado.

194 REduzcanse los enteros à los quebrados que les acompañan, (162) y hagase la misma operacion: Como para partir 6. y dos tercios à 3. y medio, se reducirán à $\frac{20}{3}$, y $\frac{2}{7}$; multiplicando despues 20. por 2. y 3 por 7. saldrá el quociente $\frac{40}{21}$. *La demostracion de todos estos Problemas es la misma que la del primero.*

$\frac{20}{3} \mathrm{X} \frac{2}{7}$ $\frac{40}{21}$

Observaciones.

195 Para partir un entero por quebrado no es menester reducir, sino que basta multiplicar el denominador por el entero, para hacer el nuevo numerador, y poner por denominador el numerador del quebrado: Como partiendo 5. por dos tercios, se multiplican los 5. por el denominador 3. y se pondrá el numerador 2. por denominador, asi $\frac{15}{2}$. *La razon es manifiesta; porque obrando como en el Problema 2. se havian de partir $\frac{5}{1}$ por $\frac{2}{3}$, multiplicando en cruz; pues como la unidad no aumenta la multiplicacion, basta multiplicar el 5. por 3. y poner el numerador 2. por denominador.*

196 Pero para partir un quebrado por numero entero, basta multiplicar el denominador del quebrado por entero, y el producto es el denominador del quociente, cuyo numerador es el mismo del quebrado dividendo: Como para partir de dos quintos à 4. multipliquese el 4. por 5. y al 20. pongase el numerador 2. asi $\frac{2}{20}$. *La razon consta claramente por lo que se dixo en el Parrafo antecedente.*

197 Quando los terminos del quebrado dividendo se pueden partir enteramente por los del quebrado divisor, como dividiendo $\frac{16}{50}$ por $\frac{4}{5}$, estará concluida la division en partir los terminos del dividendo por los del divisor: esto es, dividir 16. por 4. y 30. por 5. y sale el quociente $\frac{4}{6}$; *porque si el quebrado quociente se multiplica*

por

por el divisor, se vuelve à restituir el dividendo, que es la prueba del partir.

198 Si los quebrados se reducen à un comun denominador, (154) dividiendo el numerador solo del quebrado dividendo por el numerador del divisor, sin hacer caso del comun denominador, se hallará el quociente reducido à enteros: (quando los hay) Como si se han de partir $\frac{3}{4}$ à $\frac{1}{2}$, reducidos son $\frac{6}{8}$, $\frac{4}{8}$; partase 6. à 4. y vendrán al quociente 1. y dos quartos. Si se han de partir enteros y quebrados, reduzcanse primero los enteros à quebrados, y despues à un comun denominador. Hecho esto, se obrará del mismo modo. *La razon de esto es, porque estando reducidos los quebrados à un comun denominador, los numeradores (en los quales consiste el quebrado) son partes de un mismo todo dividido; esto es, dicen orden á un numero dividido en partes; luego es lo mismo que si los numeradores fueran enteros, y asi la division será del mismo modo que en los enteros.*

199 Quando los numeradores de los quebrados son iguales, como $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{6}$ para partirlos, basta poner el denominador del divisor $\frac{4}{6}$ por numerador del quociente; y el denominador del dividendo $\frac{4}{5}$ por denominador, asi $\frac{6}{5}$. *Porque como los dos numeradores son iguales, es lo mismo que si fuera un solo numero 4. el qual multiplicando al 5. y al 6. para partir, produce 20. y 24. que tienen la misma razon que 5. à 6. (71) luego los quebrados $\frac{20}{24}$, y $\frac{5}{6}$ son iguales, (137) por ser los terminos proporcionales, luego basta hacer la operacion referida: porque partiendo como enseña la regla, (191) salen $\frac{20}{24}$, y obrando de este modo salen $\frac{5}{6}$.*

200 Quando los denominadores son iguales, ò están reducidos los quebrados à un comun denominador, para partirlos basta poner por numerador el denominador del quebrado dividendo, y por denominador el numerador del divisor; y asi, partiendo cinco septimos à dos septimos, será el producto cinco medios. *La razon es la misma.*

Para tomar la mitad, tercio, quarto, quinto, &c. de un quebrado, que es lo mismo que partirle por 2. 3. 4. 5. &c. se puede hacer de dos modos; el primero es partir el numerador del quebrado por 2. 3. 4. 5. &c. quando se puede (143) El segundo es multiplicar el denominador por los mismos numeros (147); con que para sacar el tercio de ^{6}, se partirá el 6. por 3. y quedarán $\frac{2}{8}$; ò se multiplicará el 8. por 3. y serán $\frac{6}{24}$, que es lo mismo.

Escolio.

Aqui suelen tambien reparar los principiantes quando vén que muchas veces sale el quociente mayor, que la cantidad que se parte; como partiendo $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{4}$, salen $\frac{4}{2}$, que son 2. enteros; lo qual parece contra toda razon; porque el quociente parece que ha de ser menor que el numero dividendo.

La satisfacion de este reparo ya queda insinuada en la demostracion del primer Problema de este capitulo; porque el partir es buscar quantas veces entra el divisor en el numero dividendo: y un quebrado puede entrar, ò caber en otro muchas veces, como $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en $\frac{1}{2}$; y asi no hay que maravillarse, si algunas veces viene al quociente quebrado mayor que el dividendo, y aun muchas veces enteros.

Siempre que el quebrado divisor fuere menor que el dividendo, será el quociente mayor que la unidad; porque à lo menos el divisor cabe una vez en el dividendo. Quando el divisor fuere igual al dividendo, será el quociente una unidad, porque cabe una vez justa. Pero quando el divisor fuere mayor que el dividendo, será el quociente menor que la unidad; porque el divisor no cabe aun una vez en el dividendo.

Por regla general, siempre que el divisor fuere menor que la unidad, será el quociente mayor que el dividendo; porque la misma razon tiene la unidad al quociente, que el divisor al dividendo, como se dixo arriba (191): Luego por la *prop. 16. lib. 5. de Euc.* la unidad al divisor tendrá la mesma razon, que el quociente al dividendo; pues como por la suposicion la unidad es mayor que el divisor: luego el quociente será mayor que el dividendo; porque si no fuera asi, no guardarán la misma razon.

Mas claramente se puede explicar esto con numeros contractos, y se verá, que en la substancia no hay diferencia del partir enteros, ò quebrados; porque (como queda advertido en los confectarios del partir enteros) quando se sabe todo el valor de lo que se merca, ò vende, (à lo que llamamos especie) y el numero de la dicha especie, partiendo se sabrá el valor de una especie. Pues lo mismo sucede en los quebrados: Y supongo que he comprado media vara de cinta, y me cuesta medio real; para saber quanto valdrá una vara, divido el precio $\frac{1}{2}$ por el numero de las especies, que es $\frac{1}{2}$ vara, y saldrá $\frac{2}{2}$, que es un real, lo qual es certisimo; porque si media vara cuesta medio real, toda la vara costará un real; con que sale mayor el quociente que la cantidad: De suerte, que el fin de esta regla es, saber quanto vale un entero, al respeto que un quebrado del mismo entero vale un quebrado del precio del entero.

CAPITULO SEPTIMO.

DEL EXAMEN DE LA LOGISTICA de los quebrados.

201 La prueba real del sumar, restar, multiplicar, y partir quebrados, es la misma que la de los enteros; porque el sumar se examina por el restar; el restar, por el sumar, &c. Como si se han de sumar estos quebrados $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$, la suma es $\frac{5}{5}$; para hacer la prueba restanse los 2. quintos de 5. quintos, y quedarán $\frac{3}{5}$, que es otro quebrado.

Para hacer la prueba del restar, se sumará la paga con la resta, como restando tres quartos de cinco sextos, reducidos los quebrados son $\frac{18}{24}$, y $\frac{20}{24}$, y la resta $\frac{2}{24}$; la qual, si se suma con la paga $\frac{18}{24}$, saldrá la deuda $\frac{20}{24}$.

El examen del multiplicar será partir el producto por qualquiera de los quebrados multiplicantes, y saldrá el otro: Como si multiplicando dos tercios por dos quartos, salió el producto $\frac{4}{12}$; partiendole por dos tercios, saldrán $\frac{12}{24}$, que es lo mismo que dos quartos.

La prueba del partir será multiplicar el quociente por el divisor, y ha de salir el quebrado dividendo: Como si partiendo $\frac{2}{5}$ à $\frac{1}{2}$, sale el quociente $\frac{4}{5}$; multiplicandole por $\frac{1}{2}$ saldrán $\frac{4}{10}$, que es lo mismo que el dividendo dos quintos.

CAPITULO OCTAVO.

DEL EXERCICIO DE LA LOGISTICA de los quebrados.

202 Question primera. Con qué número se han de sumar 5. y un quarto, paraque la suma sea 8. y cinco septimos? Restense los 5. y un quarto de los 8. y cinco septimos, y la resta 3. y $\frac{13}{28}$ será el numero que se pide.

Ques-

203 Question segunda. De qué numero se restarán dos tercios de cinco quartos, para que queden $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$? Reducidos los quebrados compuestos à simples (165), serán $\frac{10}{12}$, y $\frac{1}{8}$; sumense, y la suma $\frac{92}{95}$ será el quebrado buscado.

204 Question tercera. Este quebrado $\frac{2}{5}$ qué parte es de $\frac{1}{2}$? Dividase $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{5}$, y saldrán cinco quartos, que es la parte que se busca; y asi digo que los dos quintos son cinco quartos de $\frac{1}{2}$.

205 Question quarta. Este quebrado tres quartos, de qué numero es el tercio? Multipliquese el quebrado por 3. y saldrán nueve quartos, que es el numero que se busca.

206 Question quinta. Buscanse dos quebrados, con tal proporcion, que la mitad del uno sea igual à los dos tercios del otro, y la suma de los dos sea un entero justo, que es una unidad. Multipliquense los quebrados $\frac{1}{2}$, y $\frac{2}{3}$, que señalan las partes, en cruz, y saldrán los numeradores 3. y 4. de los quebrados que se buscan, cuyo denominador es la suma 7. de los numeradores sobredichos; y asi, los quebrados que se buscan son tres septimos, quatro septimos, los quales sumados son iguales à un entero; y la mitad $\frac{2}{7}$ de los $\frac{4}{7}$, es igual à los dos tercios $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{7}$.

207 Question sexta. Bascanse dos quebrados, que los tres quintos del uno sean iguales à los dos tercios del otro, y sumados hagan tanto como multiplicados. Multipliquense los quebrados en cruz, y saldrán 10. y 9. los quales serán denominadores, cuyos numeradores serán la suma 19. de los mismos, asi $\frac{19}{20}$ $\frac{19}{9}$. Pues tomando los $\frac{3}{5}$ del $\frac{19}{19}$, son $\frac{19}{15}$; y los dos tercios del $\frac{19}{10}$, son tambien $\frac{10}{15}$. Sumando, y multiplicando los $\frac{19}{10}$, y $\frac{19}{9}$, de entrambos modos salen $\frac{361}{90}$.

$$\begin{array}{ccc} 9 & & 10 \\ \frac{3}{5} & \times & \frac{2}{3} \end{array}$$

Question septima. Pedro compró en Valencia 39. libras y media de seda, limpia de taras, à 23. reales y dos quartos la libra, quantas libras valen? Escribanse los numeros, como se vé en la formula, y multipliquense las 36. libras por los 23. reales; despues multipliquese la media libra por los 23. reales, multiplicando el numerador 1. por 23. y partiendo el producto por el denominador 2. serán once reales y medio, que se escribirán, como parece en el exemplo. Multipliquense las 36. libras por los dos quartos, multiplicando el numera-

$$\begin{array}{rr} 36 & \frac{1}{2} \\ 23 & \frac{2}{4} \\ \hline 108 & \\ 72 & \\ 11 & \frac{1}{2} \\ 18 & \\ & \frac{2}{8} \\ \hline 857 & \frac{12}{16} \end{array}$$

dor 2. por 36. y partiendo el producto por el denominador 4. serán 18. reales. Ultimamente, multipliquense los dos quartos per un $\frac{1}{2}$, y será el producto dos ochavos. Súmese todo (171), y serán 857. y $\frac{12}{16}$, ò tres quartos.

Y porque el valor de la seda se ha de dar en libras de Valencia se partirán los 857. reales por 10. que tiene cada libra, y serán 85. libras, y sobran 7. reales, que son 14. sueldos. Aora se ha de saber el valor del quebrado $\frac{12}{16}$ de real. (159) Multiplíquese el numerador 12. por 24. dineros, que tiene el real, y el producto 288. dividase por el denominador 16. y serán 18. dineros, que es un sueldo, y 6. dineros; añadase el un sueldo à los 14. sueldos de antes, y será todo el valor 85. libras 15. sueldos, y 6. dineros.

208 Question octava. Un Mercader vendió en Madrid 100. varas de tafetan à 9. reales, y tres quartillos de vellon cada vara; quantos reales de à ocho Mexicanos valdrán? Multipliquense las 100. varas por los 9. reales, y tres quartos, (182) y serán 975. reales de vellon; y porque cada real de à ocho Mexicano al presente vale 15. reales de vellon, dividase por 15. y serán 65. reales de à ocho.

100	
9	$\frac{3}{4}$
900	
75	
975	

209 Question nona. Un Mercader compró en Castilla 1000. arrobas, y media de aceyte à 20. reales, y medio de vellon cada arroba, y despues las buelve à vender à 22. reales, y un quartillo: quanto gana? Multipliquese la cantidad por el primer precio, y será el valor 20510. reales, y un quartillo. Multiplique otra vez la cantidad por el segundo precio, que es el de la venta, y hallará 22261. reales, y un ochavo. Reste la una partida de la otra: esto es, reste lo que le costó la compra, de lo que vale la venta, y hallará 1750 reales, y siete ochavos de ganancia. Advierto en estas dos questiones, que por quartillo no entiendo quarto de los que corren en Castilla, que vale 4. maravedis; sino la quarta parte de un real.

1000	$\frac{1}{2}$
20	$\frac{1}{2}$
0000	
2000	
500	
10	
	$\frac{1}{4}$
20510	$\frac{4}{1}$

210 Question decima Pedro vendió en Valencia 150. cahices, y medio de trigo, por 7. libras, y media el cahiz, y quiere que le paguen en reales de à ocho; quantos le han de dar? Multipliquense

los

los 150. y medio por 7. y medio, (184) y serán 1128. libras, y tres quartos de libra, que son 15. sueldos, ò 7. reales, y medio. (159) Ahora reduzcanse las libras à reales (76), y juntando los 7. y medio, serán 11287. y medio. Partanse por 9. reales, y tres quartillos, (193) que al presente vale cada real de à ocho en Valencia, y hallarémos 1157. reales de à ocho, y $\frac{9}{13}$.

Pero si quiere que le paguen en doblones, porque el doblon vale en Valencia 38. reales y medio, partense los 11287. reales y medio por 38. y medio, y saldrán 293. doblones, y $\frac{2}{11}$.

211 Question once. A tres quartos la libra de fruto, quantos maravedis valdrá una arroba en Madrid: Porque la arroba en Madrid tiene 25 libras, y cada quarto son 4. maravedis; y por consiguiente los 3. quartos son 12. maravedis: multipliquense las 25. libras por 12. y saldrán 300. maravedis. Si se han de hacer reales, partanse por 34. y serán 8. reales, y 28. maravedis.

212 Question doce. Este quebrado $\frac{4}{8}$, quantos quintos son: Dividanse los quatro ochavos por un quinto, y vendrán $\frac{20}{8}$, que son 2. y medio; con que son dos quintos, y medio.

213 Question trece. Este quebrado $\frac{3}{4}$, de qual quebrado es $\frac{2}{7}$? Dividanse los tres quartos por dos septimos, y se hallarán $\frac{21}{8}$, por el quebrado que se busca.

214 Question catorce. Quales son los $\frac{2}{3}$ de este quebrado $\frac{5}{7}$? Saquese el tercio de cinco septimos, multiplicando el denominador por 3. y serán $\frac{5}{21}$; y porque son dos los tercios que se piden, multipliquese el numerador 5. por 2. y serán $\frac{10}{21}$ los dos tercios de cinco septimos. Con que multiplicando los cinco septimos por los dos tercios (180), sale lo mismo. Y asi, para sacar partes de un quebrado, no hay mas que hacer, que multiplicarle por el quebrado que significa las partes; como para sacar tres septimos de una mitad, multiplicando los quebrados salen $\frac{3}{14}$, que son los tres septimos que se buscan.

215 Question quince. Cómo se hallará un numero que tenga qualquiera partes señaladas, como mitad, tercio, quarto, &c.? Digo, que si se escriben los quabrados que significan las partes, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, y se multiplican los denominadores entre sí, el producto 24. tendrá mitad, tercio, y quarto, porque es producido de 2. 3. y 4. Luego se puede partir enteramente por los mismos numeros, que es tener mitad, tercio, y quarto.

PARTE III.

DE LA LOGISTICA DE LOS NUMEROS Denominados.

NUmeros denominados llaman comunmente à los que numeran especies diferentes; como libras, sueldos, dineros, reales, arrobas, &c. La logistica de estos numeros es la mas dificil de todas, y por esto pide grande cuidado, y aplicacion.

CAPITULO PRIMERO.

DEL SUMAR NUMEROS DENOMINADOS.

LAS partidas que se hubieren de sumar han de ser homogeneas, ò de una especie, porque no se sumarán bien libras, sueldos, y dineros, con arrobas, libras, y onzas. No digo que las especies de cada partida sean homogeneas, sino unas partidas con otras.

Preceptos.

216 Primero: Escribanse las especies cada una debaxo de su semejante, estando las unidades debaxo de unidades, decenas debaxo decenas, &c. de modo, que cada genero de especie forme una coluna separada de la otra. El orden de escribirlas ha de ser este: que la especie mas alta, ò de mayor valor esté à la izquierda, y la mas baxa, ò menor à la derecha.

217 Segundo: Comiencese la operacion por la especie mas baxa, sumando las partidas; y en llegando à hacer el numero que constituye, ò iguala à la especie immediata mas alta, se hará un señal al lado,

lado, tantas veces, quantas llegáre à la especie siguiente, escribiendo lo que sobráre debaxo. Despues se llevarán tantas unidades, como señales hubiera, para juntarlas con la coluna de la especie siguiente, la qual se sumará del mismo modo. La suma de la ultima coluna, qualquiera que fuere, se hará como en los enteros. Esto necesita de practica.

Exemplo I.

Tengo de sumar arrobas, libras, y onzas, peso de Valencia. Comienzo por las onzas, diciendo: 10. y 9. son 19. onzas, donde hay una libra, y sobran 7. onzas, por eso hago un señal al lado del 9. sumo los siete que sobran con los 9. siguientes, y son 16. donde hay otra vez una libra, y por eso hago otro señal, y sobran 4. y 11. son 15. donde hay otra libra, y asi hago otro señal, y sobran 3. los quales escribo debaxo la linea, por ser los ultimos.

Arrobas.	Libras.	Onzas.
16	10	10
3	24-	9-
124	26	9-
15	13-	11-
160	4	3

Paso à sumar las libras, llevando 3. por otros tantos señales que hay en la serie de las onzas. Pues 3. y 10. son 13. y 24. son 37 donde hay una arroba, que consta de 36. libras, y asi hago un señal al lado, y sobra una, el qual junto con 26. son 27. y 13. son 40. donde hay otra arroba, y sobran 4 libras, que escribo debaxo la linea. Paso à la coluna de las arrobas, llevando 2. por otros tantos señales que hay en las libras, y las sumo del modo ordinario, como se vé en la formula.

Exemplo II.

Se han de sumar cahices, hanegas, quartales, y celemines de Aragon. Comienzo por los celemines, diciendo: 3. y 2. son 5. aqui hay un quartal, y asi hago un señal al lado, y sobra 1. y 3. son 4. que es otro quartal, y nada sobra, y 1. de abaxo es 1. escribole debaxo la linea.

Cahiz.	Hane.	Quar.	Cele.
12	7-	2-	3
8	5	1	2-
10	6-	2-	3-
1	3	1	1
33	7	2	1

Paso à los quartales, llevando 2. y 2. son 4. aqui hay una hanega, y sobra 1. que con 1. son 2. y 2. son 4. aqui hay otra hanega, y sobra 1. y 1. son 2. escribolas debaxo la linea.

Paso à las hanegas, llevando 2. por otros tantos señales que hay en en la coluna de los quartales , y 7. son 9. donde hay un cahiz , que son 8. hanegas , pongo un señal , y sobra 1. y 5. son 6. son 12. aqui hay otro cahiz , sobran 4. y 3. son 7. hanegas , escribolas , y llevo 2. por otros tantos señales , que hallo en las hanegas , para juntarlos con los cahices , los quales sumaré por el modo ordinario.

Exemplo III.

Tengo de sumar libras , sueldos , y dineros , moneda de Valencia: Comienzo por los dineros , diciendo : 3. 0. y 10. son 13. donde ay un sueldo, que son 12. dineros , pongo un señal , y sobra 1. y 11. son 12. pongo otro señal , y nada sobra , por eso escribo un zero. Paso à los sueldos , llevando 2. por otros tantos señales que hallo en la coluna de los dineros , y 18. son 20. que es una libra justa , pongo un señal , y nada sobra ; 19. y 0. son 19. y 15. son 34. donde se contiene una libra , y sobran 14. que escribo debaxo la linea. Despues sumo las libras del modo ordinario , llevando 3. por otros tantos señales que hallo en los sueldos.

Libras.	Sueldos.	Diner.
360	18-	3
10	19	0
840	0	10-
	15·	11-
1212	14	0

Esta misma suma , en quanto à los sueldos , (los dineros , y libras se suman del mismo modo) se suele hacer comunmente de otro modo mas facil. Supongo , pues , que están sumados los dineros , como antes , y que llevo 2. los quales juntandoles con los numeros 8 9. 0. y 5. de la primer coluna de los sueldos , son 24. escribo el 4. y llevo 2. y 1. 1. y 1. de la segunda coluna de los sueldos son 5. decenas de sueldo , ò 50. sueldos , que son 2. libras , y 10. sueldos ; pues escribo 1. al lado del 4. por los 10. sueldos , y llevo 2. libras , para juntarlas con las libras siguientes , como antes.

Para saber con facilidad quantas libras hacen las decenas de sueldo , se guardará esta regla. Si el numero de las decenas es impar, como en el exemplo , que es 5. se quitará 1. el qual se escribirá debaxo la linea ; y de lo que quedáre , que aqui es 4. se tomará la mitad , la qual será el numero de las libras : si es par , se pondrá zero debaxo la linea , y tomando la mitad de las decenas , será el numero de las libras que se han de llevar , para sumarlas con la coluna de las libras.

Exemplo IV.

Otra vez se han de sumar libras , sueldos , y dineros. Sumando los di-

dineros sobra cero, y llevo un sueldo, que con 5. 7. y 8. son 21. escribo el uno, y llevo 2. y 1. 1. y 1. de la segunda coluna de los sueldos son 5. decenas, de las quales, porque hacen numero impar, quito uno que escribo, y del residuo 4. tomo la mitad, que son dos libras que guardo para sumarlas con la coluna de las libras.

Libras.	Sueld.	Diner.
15	0	3
3	15	0
8	17	9
25	18	0
53	11	0

Exemplo V.

Supongo que se han de sumar reales de à ocho, sueldos, y dineros, moneda de Valencia; y aunque este genero de cuenta no está muy puesto en uso, pero porque sirve para entender otras de otros Reynos, me ha parecido conveniente el explicarla.

Hagase la suma, como en el exemplo antecedente, suponiendo, que los reales de à ocho son libras, y será 23. reales de à ocho 16. sueldos, y 8. dineros: Y porque sumando los sueldos se llevaron 3. reales de à ocho, suponiendo que eran libras de à 20. sueldos, y en la verdad el real de à ocho al presente no vale 20. sueldos, sino 19. sueldos, y 6. dineros, de suerte que faltan 6. dineros, ò un quartillo para 20. sueldos; es claro, que en las tres libras que se llevaron habia tres quartillos mas, que son un sueldo, y 6. dineros; porque á cada real de à ocho le falta un quartillo para libra: Luego se han de añadir uu sueldo, y 6. dineros; con que será la verdadera suma 23. reales de à ocho 18. sueldos, y dos dineros.

4	19	5
12	18	9
3	19	2
1	19	4
23	16	8
	1	6
23	18	2

De otro modo se puede hacer la misma suma, aunque mas cansada. Sumanse los dineros, y sueldos solamente, y serán 76. sueldos, y 8. dineros; reducidos à dineros (76) serán 920. dineros, los quales partidos à 234. dineros que tiene cada real de à ocho, saldrán 3 reales de à ocho, y sobran 218. dineros, que son 18. sueldos, y 2. dineros. (100) Pues sumense los 3. reales de à ocho con la coluna de los reales de à ocho, y se hallará la suma misma.

Exemplo VI.

Tengo de sumar escudos, reales, y maravedis de Castilla. Suman-mando los maravedis, digo: 26. y 31. son 57. donde hay un real, que consta de 34. maravedis, y sobran 3. y 30. son 53. donde hay otro real, y sobran 19. maravedis, los quales escribo debaxo la linea; y llevo dos reales, por otros tantos señales que hallo, y 10. son 12. donde hay un escudo, que son once reales, y sobra 1. y 9 son 10. y 10. son 20. aqui hay otro escudo, y sobran 9. reales, que escribo; y llevo dos escudos, por otros tantos señales que hay al lado de la coluna de los reales, los quales ajunto con los escudos en la forma ordinaria, y sale la suma 64. escudos 9. reales, y 19. maravedis.

Escud.	Reales.	Marav.
38	10.	26
9	9	31.
15	10.	30.
64	9	19
	1	8
64	8	1

Esta suma no es la verdadera, porque los escudos no valen once reales justos, sino once reales, y 26. maravedis; y asi, se ha de corregir, restando dos veces 26. maravedis, que es lo mismo que un real, y 18. maravedis; porque en la coluna de los reales hay dos escudos, y en la operacion los dichos dos escudos se han contado por once reales justos cada uno, sin hacer caso de los 26. maravedis; con que la primer suma está aumentada en dos veces 26. maravedis, y por eso se han restado, para que quede la suma verdadera 64. escudos 8. reales, y un maravedis.

Exemplo VII.

Se han de sumar signos, grados, minutos, y segundos. Aunque podia hacer la operacion por la regla general, pero de este otro modo es mas facil. Comenzando por los segundos, ajuntando 4. 0. y 2. son 6. y porque no llegan à decena, escribolos debaxo la linea, y nada guardo; despues sumando 5. 4 y 5. son 14. decenas de segundos, y porque cada minuto tiene 6. decenas, ò 60. segundos, las 14. decenas serán dos minutos, y sobran dos decenas, que escribo al lado del 6.

Signos.	Grad.	Min.	Segun.
10	26	38	54
9	13	58	40
11	29	0	52
32	9	38	26

Paso à la coluna de los minutos, llevando 2. y 8. 8. son 18. minutos, escribo el 8 y llevo una decena, la qual con 3. y 5. son 9. decenas de minuto; y porque cada grado tiene 6. decenas, ò 60. minutos, las 9. decenas será un grado, y sobran 3. decenas de minuto, que escribo debaxo la linea.

Su-

Sumando el un grado que llevaba con 6. 3. y 9. hacen 19. grados, escribo los 9. y guardo 1. y 2. 1. y 2. son 6. decenas de grados; y porque cada signo tiene 30. grados, serán las 6. decenas 2. signos justos; por eso nada escribo, y llevo 2. para juntarlos con los signos del modo ordinario; y asi será toda la suma 32. signos 9. grados 38. minutos, y 26. segundos.

Aqui es menester advertir, que en las cuentas Astronomicas jamás se nombran, ò numeran mas que 11. signos, porque la Ecliptica se divide en 12. signos; y asi lo mas que se numeran son 11. signos, grados, minutos, &c. porque quando llega la suma à 12. signos, se dice que es un circulo ò cero signos; quando pasa de los 12. signos, se restan de la suma tantas veces como se pueden; con que como en nuestra suma son 32. signos, se han de restar de ella los 12. signos tantas veces, quantas se pueda, y quedará la suma en terminos Astronomicos propios 8. signos 9. grados 38. minutos, y 26. segundos.

Demostracion.

La demostracion del sumar numeros denominados consta claramente del mismo modo de obrar; porque cada coluna se suma como en el modo ordinario de sumar enteros; à mas de esto, se guardan tantas unidades para juntarlas con la especie mayor siguiente, quantas veces la especie menor iguala, ò cumple à la mayor; porque las dichas unidades ya no son de la especie menor, sino de la mayor siguiente.

CAPITULO SEGUNDO.

DEL RESTAR NUMEROS DENOMINADOS.

PAra restar numeros de diferentes especies, la deuda, y paga han de ser homogeneas, como queda advertido en el restar enteros; la resta tambien sale homogenea con la paga, y deuda.

Preceptos.

217 Primero: Escribase el numero menor debaxo del mayor, como le dixo en el restar enteros, de suerte, que unas especies correspondan à otras, y tirese una linea por debaxo.

Se-

218 **Segundo:** Comenzando la operacion de la especie menor, ò mas baxa, restese el numero inferior del superior; y si no se puede hacer la resta, por ser el numero de arriba menor, tomese la diferencia del numero inferior à la especie mayor siguiente; la qual diferencia, sumada con el numero superior, se escribirá debaxo la linea, llevando 1. para juntarlo con el numero inferior de la especie inmediata siguiente.

Exemplo I.

Se han de restar marcos, onzas, adarmes, y granos, peso Valenciano. Resto 34. granos de 31. y porque no puedo, digo: de 34. hasta 36. granos, que es el adarme, van 2. y 31. son 33. escriboles, y llevo 1. para juntarlo con el 10. de los adarmes, y serán 11. resto ahora 11. adarmes de 8. y porque no puedo, digo: de 11. hasta 16. adarmes que tiene la onza van 5. y 8. de arriba son 13. escriboles, y llevo 1. para juntarle con el 6. de las onzas, y serán 7. resto 7. onzas de 7. de arriba, queda cero, y nada llevo; resto ultimamente 3. marcos de 8. y quedan 5. que escribo debaxo la linea, con que restan 5. marcos, ninguna onza 13. adarmes, y 33. granos. De este modo suelen pesar el oro los Plateros.

Marc.	Onzas.	Adar.	Gran.
8	7	8	31
3	6	10	34
5	0	13	33

Exemplo II.

Tengo de restar canas, palmos, y quartos, medida de Cataluña. Resto un quarto de dos, y queda uno que escribo debaxo la linea. Resto 7. palmos de 6. y porque no puedo, digo: de 7. palmos hasta 8. que tiene la cana, vá 1. y 6. de arriba son 7. escriboles, y llevo 1. para juntarle con las 3. canas, y son 4. Resto ahora 4 de 4. queda zero, y está concluída la resta.

Canas.	Palmos.	Quartos.
4	6	2
3	7	1
0	7	1

Exemplo III.

Tengo de restar libras, sueldos, y dineros, moneda de Valencia, ò Aragon. Resto 9 de 3. dineros, y porque no puedo, digo: de 9. dineros hasta 12. que tiene el sueldo van 3. y 3. de arriba son 6. escriboles; y llevo 1. para sumarle

Libras.	Sueldos.	Dineros.
36	18	3
15	8	9
21	9	6

con los 8. sueldos, y serán 9. restados de 18. quedan 9. Resto ultimamente 15. de 36. y quedan 21.

Exemplo IV.

Otra vez se ha de restar la misma moneda. Quito 8. dineros de 6. y porque no puedo, digo: de 8. à 12. ván 4. y 6. de arriba son 10. escriboles debaxo la linea, y llevo 1. para juntarlo con los 16. sueldos, y son 17. restoles de 12. y porque no puedo, digo: de 17. hasta 20. sueldos que tiene la libra ván 3. y 12. de arriba son 15. escriboles, y llevo 1. para sumarle con las 3. libras, y son 4. restadas de 10. quedan 6. que escribo, y está concluída la resta. Podia restar los sueldos de otro modo, diciendo: 1. que llevo, y 6. son 7. restados de 2. no puedo; pues digo: de 7. hasta 10. ván 3. y. 2. de arriba son 5. escriboles, y llevo 1. el qual junto con el 1. del 16. son 2. decenas; restados del 1. del 12. no puedo; pues digo: de 2. hasta 2. decenas vá nada, y 1. de arriba es 1. que escribo, y llevo 1.

Libras.	Sueldos.	Diner.
10	12	6
3	16	8
6	15	10

Exemplo V.

Se han de restar signos, grados, minutos, y segundos. Aunque puedo obrar del mismo modo, pero de este otro será mas facil. Resto 0. de 4. y quedan 4. Resto 5. decenas de 3. y porque no puedo, digo: de 5. hasta 6. decenas de segundos vá 1. y 3. de arriba son 4. escribolas, y llevo 1. el qual junto con el 4. de los minutos, y son 5. restolos de 2. y porque no puedo, digo: de 5. hasta 10. van 5. y 2. de arriba son 7. escriboles, y llevo 1. el qual sumo con el 3. de abaxo, y son 4. resto 4. decenas de minutos de 5. y resta 1. que escribo. Paso à los grados, diciendo: quien debe 5. y pagó 0. queda à dever 5. despues, quien deve 1. decena de grados, y paga 2. no puede, pues de 2. decenas, hasta 3. decenas de grados, que hacen un signo vá 1. y 1. de arriba son 2. que escribo debaxo las decenas de grados, y llevo 1. signo, para juntarle con los 2. de abaxo, y son 3. restados de 3. de arriba queda cero.

Sign.	Grad.	Minut.	Segund.
3	15	52	34
2	20	34	50
0	25	17	44

Exem-

Exemplo VI.

Para restar dias, horas, minutos, y segundos, segun el computo Astronomico, es menester advertir, que los Astronomos no usan del modo de contar civil de las horas hasta 12. y de allí hasta otras 12. sino que cuentan seguidamente hasta la 24. Esto supuesto, comienzo la operacion por los segundos, diciendo: Quien de 5. quita 3. le quedan 2. escribolos. Quien de ninguna decena de segundo quita 4. no puede, pues de 4. decenas hasta 6. van 2. escribolas, y paso à los minutos, llevando 1. el qual con el cero es 1. restado de 8. quedan 7. y nada guardo; escribo el 7. y al lado pongo las 3. decenas de minuto, porque debaxo no tienen guarismo alguno.

Dias	Horas.	Minut.	Segun.
12	19	38	5
6	23	0	43
5	20	37	22

Ahora las horas se han de restar por entero. Resto, pues, 23. horas de 19. y porque no puedo, digo: de 23. hasta 24. que es el dia, vá 1. y 19. de arriba son 20. escribo el 20. y llevo un dia, el qual con el 6. de abaxo hace 7. resto, pues, 7. de 12. y quedan 5. dias.

Demostracion.

Toda la dificultad consiste en demostrar la regla, quando el numero inferior es mayor que el superior; porque quando es menor por sí misma es manifiesta. Pero quien hubiere percibido bien la demostracion del restar enteros, no le será dificultoso aplicarla à los numeros denominadores, porque es casi la misma, y asi no la repito.

CAPITULO TERCERO.

DEL MULTIPLICAR NUMEROS denominados.

ESta regla es la mas dificil de toda la Logistica, y asi pondré todo cuydado en explicarla, reduciendola à Problemas, y cada uno resolviendole por diferentes modos, para que el estudioso pueda elegir el que le pareciere mas proporcionado à su gusto. Es tambien convenienniente saber diferentes modos de obrar; porque à mas de tener eleccion, sucede aqui muchas veces, un mismo genero de cuenta, con unas circunstancias, se puede formar facilmente por un modo, y con otras no; sino que es preciso, para facilitar la operacion, recurrir à otro modo mas proporcionado.

PROBLEMA I.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR OTRA.

220 ESte Problema no encierra otra dificultad, mas que el multiplicar enteros: Como si Pedro compró 30. libras de manzanas à 6. dineros la libra, multiplicando 30. por 6. salen 180. dineros, que son 15. sueldos. Otro exemplo: Un Mercader vendió 361. varas de lienzo por 164. maravedis cada vara, para saber quanto valen todas, multipliquense las 361. vara por los 164. maravedis, y se hallarán 59204. maravedis, que son 1741. reales de vellon, y 10. maravedis. La demostracion es la misma que la de multiplicar enteros.

PROBLEMA II.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR OTRA ESPECIE, y quebrado.

221 ESte Problema es el mismo que multiplicar entero por entero, y quebrado. (182) Pedro compró 10. caballos à 25. libras, y dos tercios cada uno; para saber lo que valen multiplique 10. por 25. y dos tercios, y hallará 256. libras y dos tercios. Otro exemplo: Pedro compró 250. libras de seda à 24. reales y tres quartos la libra (supongo que está quitada la tara.) Multiplique 250. por 24. y tres quartos (182), y hallará 6187. reales y medio. La demostracion está dada en el multiplicar entero por entero, y quebrado.

PROBLEMA III.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR DOS ESPECIES.

Precepto.

222 MUltipliquese la especie mas alta del multiplicador por la cantidad (220), y de dicha cantidad saquese

la parte, ò partes, que la especie menor del multiplicador fuere, respeto de la mayor, ò mas alta, y sumandolas con el producto antecedente, será todo el valor que se busca.

Exemplo I.

Para saber 30. cahices de trigo á 5. libras, y 10. sueldos, moneda de Aragon, quanto valen; multiplico 30. por 5. y salen 150. libras: Y porque los 10. sueldos es mitad de la libra, saco la mitad de la cantidad 30. la qual es 15. libras, porque la cantidad supone ahora por libras, y añadiendolas à las 150. libras, será todo el valor de los 30. cahices 165. libras.

30	
5 lib.	10. suel.
150 lib.	
15 lib.	
165 lib.	

Demostracion.

La razon de esto es clara; porque si cada cahiz valiera 5. libras justas, seria todo el valor 150. libras; y si cada cahiz valiera 6. libras: esto es, una libra mas, creceria el primer valor 30. libras, y asi seria 180. libras; porque multiplicar los 30. cahices por 5. libras, es tomarlos cinco veces; y multiplicarlos por 6. es tomarlos seis veces. (57) Luego como en 6. hay una libra mas que en 5. avrá 30. libras mas en el valor segundo, que en el primero. Pues como en el exemplo propuesto el precio de cada cahiz es 5. libras 10. sueldos, y los 10. sueldos es mitad de la libra, crecerá el valor correspondiente à las 5. libras (que son 150. libras) la mitad de 30. libras, que son 15 Esto es, si en el precio se añadiera una libra mas, creceria el valor total 30. libras Luego si se añade media libra, crecerá la mitad de 30. que son 15. libras.

De otro modo.

123 Multipliquense los 10. sueldos por los 30. cahices, y serán 300. sueldos; despues multipliquense los 30. cahices por 5. libras, y serán 150. libras; conviertanse los 300. sueldos en libras, y serán 15. las quales añadidas à las 150. libras, harán el valor total de 165. libras.

30 cahices	
5 lib.	10. suel.
150 lib.	300. suel.
15 lib.	
165 lib.	

De otro modo.

124 Debaxo los sueldos escribase el numero 20. que son los suel-

dos que hacen una libra, y será el quebrado $\frac{10}{20}$ de libra, al qual se reducirán las 5. libras, (62) y será el quebrado $\frac{110}{20}$ de libra; multipliquense por 30. (181) y será el producto $\frac{3300}{20}$, cuyo valor (159) es 165. libras.

30 cahices.
5 lib. $\frac{10}{20}$ sueld.

De otro modo.

225 Reduzcanse las 5. libras y 10. sueldos à sueldos, (76) y serán 110. sueldos; multipliquense los 30. cahices por 110. sueldos, y serán 3300. sueldos; reduzcase à libras, (100) y serán 165. libras.

Exemplo II.

Quiero saber quanto valdrán 10. varas de paño à 3. libras y 5 sueldos la vara. Multiplico las 10. varas por 3. libras, y son 30. libras. Ahora porque los 5. sueldos son la quarta parte de la libra, saco el quarto de 10. que es lo mismo que partir 10. à 4. y salen 2. libras y 10. sueldos; escribolas debaxo de las 30. libras, y hecha la suma, hallo, que las 10 varas valen 32. libras y 10. sueldos. La razon es la misma; porque como à mas de las 3. libras hay 5. sueldos, que es la quarta parte de una libra, tambien à mas de las 30. libras, que es el producto de 10. por 3. ha de haber una quarta parte de la cantidad, que representa libras.

10 varas.
3 lib. 5 sueld.

30. lib.
2. lib. 10 sueld.

32 lib. 10 sueld.

De otro modo.

Multipliquense los 5. sueldos por las 10. varas, y serán 50. sueldos, que son 2. libras y 10. sueldos, las quales se añadirán al producto de 10. por 3., y serán 32. libras y 10. sueldos.

De otro modo.

Debaxo los sueldos ponganse 20. y será el quebrado $\frac{5}{20}$. Multipliquense, pues, las 10. varas por 3. y $\frac{5}{20}$; (181) y serán $\frac{650}{20}$, que hacen 32. libras y 10 sueldos.

10 varas.
3 lib. 5 sueld.

De otro modo.

Reduzcanse las 3. libras y 5. sueldos à sueldos, y serán 65. sueldos, multipliquense por las 10 varas, y el producto 650. sueldos, reducido à libras, será 32. libras y 10. sueldos.

Exemplo III.

Un Mercader compra 1240. quintales de azucar à 12. libras y 15. sueldos el quintal; para saber lo que valen, multipliqueles por las 12. libras; despues, para no fatigarse la cabeza, ni exponerse à errar, tire una linea perpendicular por el lado izquierdo de la formada, y porque los 15. sueldos no son parte aliquota de la libra, sino aliquanta, dividales en partes aliquotas, las menos que pueda, y mas proporcionadas: esto es, dividales en 10. y en 5. escribiendoles al lado de la linea perpendicular, como parece en la formula.

	1240 quintales.
	12 lib. 15. sueld.
	2480
	1240
10	620
5	310
	15810 lib.

Esto supuesto, porque 10. sueldos son media libra, saque la mitad de 1240. escribiendola en derecho de los 10. sueldos del lado, y será 620. libras; y porque los 5. sueldos son mitad de los 10. saque mitad de la mitad 620. Escribiendola tambien en derecho de los 5. sueldos, poniendo las unidades debaxo unidades, decenas debaxo decenas, &c. y será 10. libras. Sumelo todo, y hallará el valor de 15810. libras. La razon de este modo de obrar, supuesto la doctrina antecedente, por sí misma es manifiesta.

De otro modo.

Multipliquense los 1240. quintales por los 15. sueldos, y serán 18600. sueldos, que hacen 930. libras, añadanse al producto de 1240. por las 12. libras, y será todo el valor las mismas 15810. libras.

De otro modo.

Debaxo los sueldos pongase el numero 20. y será el quebrado $\frac{15}{20}$. Multipliquese ahora los 1240. quintales por 12. libras y $\frac{15}{20}$, ò $\frac{8}{4}$, que todo es uno, y se hallará la misma suma del valor.

1240 quitales.
12 lib. $\frac{15}{20}$ sueld.

De otro modo.

Reducidas las libras à sueldos serán 255. sueldos, por los quales se multiplicará la cantidad, y saldrán 316200. sueldos, los quales convertidos en libras, darán el mismo valor.

Exem-

Exemplo IV.

Un Platero compra 7. onzas de oro à 14. libras y 19. sueldos la onza, pregunta quanto valdrá? Multiplico las 7. onzas por 14. libras; y porque los 19. sueldos no son parte aliquota de la libra, les divido en aliquotas 10. 5. y 4. escribiendolas al lado, como parece en la formula; y porque los 10. sueldos son mitad de la libra, saco mitad de la cantidad, que es 3. libras y 10. sueldos, y la escribo enfrente de los 10. sueldos del lado. Despues, porque 5. sueldos son mitad de 10. saco mitad de la mitad 3. libras y 10. sueldos, y será una libra y 15. sueldos. Finalmente, porque los 4. sueldos son la quinta parte de la libra, saco quinto de la cantidad 7. que es dividirla por 5. y hallo una libra y 8. sueldos. Sumandolo todo, hallaré 104. libras y 13. sueldos, por el valor deseado.

	7 onzas.
	14 lib. 19 suel.
	28
	7
10	3 lib. 10 suel.
5	1 lib. 15 suel.
4	1 lib. 8 suel.
	104 lib. 13 suel.

Los otros modos de formar la misma cuenta no tienen especial dificultad, y asi los omito por no ser molesto.

Exemplo V.

Pedro vendió 10. varas de lienzo à 6. sueldos y 6. dineros la vara, para saber quanto valen, multiplico 10. por 6. sueldos, y hallo 60. sueldos. Y porque 6. dineros son la mitad de un sueldo, saco la mitad de 10. y serán 5. sueldos, que escribo debaxo las 60. y hecha la suma serán 65. sueldos, ò 3. libras y 5. sueldos.

10 varas.
6 suel. y 6. din.
60 suel.
5 suel.
65 suel.

La razon es la misma que la del primer exemplo; porque si el precio fueran 6 sueldos justos, seria el valor 60. sueldos, y si fueran 7. sueldos, seria el valor 10. sueldos mas: esto es, 70. sueldos. Luego si el precio es 6. sueldos y medio, será el valor 60. sueldos, y mas la mitad de 10. que es 5. sueldos.

De otro modo.

Despues de multiplicada la cantidad 10. varas por los 6. sueldos, multipliquese la misma por 6. dineros, y serán 60. dineros, ò 5. sueldos; añadese al producto de 10. por 6. sueldos; y será todo el valor 65. sueldos.

De otro modo.

Debaxo de los 6. dineros ponganse 12 que son los dineros que hacen un sueldo, y será el precio 6. sueldos y $\frac{6}{12}$, ò $\frac{1}{2}$. Multipliquese ahora la cantidad 10. varas por 6. sueldos y medio, (182) y serán los mismos 65. sueldos.

De otro modo.

Reducido el precio à la menor especie serán 78. dineros, los quales multiplicados por 10. serán 780. dineros, los quales reducidos à sueldos serán 65. sueldos.

Exemplo VI.

Supongo que las mismas 10. varas de lienzo se vendieron à 6. sueldos y 8. dineros; para saber quanto valen, despues de multiplicadas por los 6. sueldos, tiro una linea perpendicular al lado, y porque los 8. dineros no son parte aliquota del sueldo, dividoles en aliquotas 6. y 2. que escribo al lado; y porque 6. dineros son la mitad del sueldo, saco la mitad de la cantidad, que será 5. sueldos, y la escribo enfrente de los 6. dineros; y porque los 2. dineros del lado son el tercio de 6. saco la tercera parte de lo que le corresponde al 6. que son 5. sueldos, y será un sueldo y 8. dineros, que tambien escribo; hecha la suma hallo el valor de 66. sueldos y 8. dineros.

	10 varas.
	6 suel. y 8 din.
6	60
2	5
	1 suel. 8 din.
	66 sueldos 8 din.

Podia dividir tambien los 8. dineros en 4. y 4 y porque el 4. es tercio de un sueldo, sacar la tercera parte de la cantidad, y pornerla dos veces, por razon de los dos quartos, y seria lo mismo. Los otros modos omito, por no tener especial dificultad.

Exemplo VII.

Un aposento rectangulo: esto es, cuyas paredes están à esquadra, se ha de pavimentar de azulejos ordinarios; tiene de ancho 5. varas, y de largo 8. varas y tres palmos: quantos azulejos entrarán ? Multiplico las 5. varas por 8. y 3. palmos, y asi: Multiplico 8. por 5. y son 40. y porque

	5 varas.
	8 var. y 3. palm.
	40
2	2 var. 2 palm.
1	1 var. 1 palm.
	43 var. 3 palm.

los

los 3. palmos no son parte aliquota de la vara, dividoles en aliquotas 2. y 1. escribiendolas al lado; pues porque 2. palmos es la mitad de la vara, saco la mitad de 5. varas, que serán 2. varas y 2. palmos; y por que un palmo es mitad de 2. palmos, saco la mitad de lo que corresponde à los 2. palmos: esto es, de 2. varas y 2. palmos, y será una vara y un palmo; hago la suma, y hallo que tiene 43. varas quadradas y 3. palmos, las quales reducidas à palmos serán 175. palmos quadrados, y porque en cada uno caben 4. azulejos ordinarios, multiplico los 175. palmos por 4. y hallaré 700. azulejos. Dexo los otros modos, por no tener dificultad.

PROBLEMA IV.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR OTRAS DOS, y quebrado.

Precepto.

225 Multiplicada la cantidad por las dos especies, como se hizo en el Problema antecedente, multipliquese otra vez la cantidad por el quebrado, (181) y saldrá un quebrado, respeto de la especie menor, el qual reducido à enteros (159) se añadirán al primer, ò primeros productos; despues sumado todo, será el valor que se busca.

Exemplo I.

Un Mercader vende 8. arrobas de azucar à 2. libras 16. sueldos y dos quintos de sueldo la arroba; para saber quanto valdrán multiplico las 8 arrobas por las 2. libras, y salen 16. libras. Y porque los 16. sueldos no son parte aliquota de la libra, resuelvolos en aliquotas 4. 4. 4. 4 los quales escribo al lado; pues porque los 4. sueldos son el quinto de la libra, saco quinto de la cantidad 8. y será una libra y 12. sueldos; porque el quinto de 8. es 1. y sobran 3. libras, que son 60. sueldos, cuyo quinto son 12. sueldos. Y porque hay quatro quatros, escribo quatro veces el dicho quinto, como se vé en la formula.

	8 arrobas.	
	2 lib. 16 suel. y	$\frac{2}{5}$
	16 lib.	
4	1 lib. 12 suel.	
4	1 lib. 12 suel.	
4	1 lib. 12 suel.	
4	1 lib. 12 suel.	
	3 suel.	$\frac{1}{5}$
	22 lib. 11 suel.	$\frac{1}{5}$

Hecho esto, multiplico las 8. arrobas por el quebrado 1, y despues busco el valor del producto, lo qual se hará de este modo: Multiplico las 8. arrobas por el numerador 2. y dividiendo el producto 16. por el denominador 5 saldrán 3. enteros, y $\frac{1}{5}$: y porque el quebrado es sueldo, de los 3. enteros serán sueldos, los quales escribo, como parece; sumo todos los productos, y hallo el valor 22. libras 11. sueldos 1. $\frac{1}{5}$.

Este Problema está ya demostrado en los antecedentes; porque el multiplicar una especie por otras dos, queda probado en el Problema antecedente. El multiplicar una especie por quebrado, consta por el multiplicar entero por queqrado: (182) luego como este Problema solo contenga el multiplicar una especie por otras dos, y à mas de esto, quebrado, estará todo demostrado.

De otro modo.

Multipliquense las 8. arrobas por todas las especies del multiplicador, y serán 16. libras 128. sueldos $\frac{16}{5}$. Reduzcanse los $\frac{16}{5}$ à sueldos, y los sueldos à libras, y serán 22. libras 11. sueldos y $\frac{1}{5}$.

8 arrobas.
2 lib. 16. sueld. $\frac{2}{5}$

---

16 lib. 128. sueld. $\frac{16}{5}$

---

22 lib. 11 sueld. $\frac{1}{5}$

De otro modo.

Debaxo de los 16. sueldos pongase el denominador 20. y será el quebrado $\frac{16}{20}$. Esto supuesto, reduzcanse las 2. libras à $\frac{16}{20}$, (162) multiplicandolas por el denominador 20., y al producto 40 añadiendo el numerador 16. será el quebrado reducido $\frac{56}{20}$. El quebrado $\frac{2}{5}$ es quebrado de parte de $\frac{56}{20}$; pues incorporese en él, (168) multiplicando los denominadores 20. por 5. y será el nuevo denominador 100. Para hallar el nuevo numerador se multiplicará el numerador 56. por el denominador 5. y al producto 280. se añadirá el numerador 2. y será el quebrado incorporado $\frac{282}{100}$ de libra.

8 arrobas.
2 lib. $\frac{16}{20}$ sueld. $\frac{2}{5}$

Multipliquese ahora la cantidad 8. por $\frac{282}{100}$ (181), multiplicando el 8. por numerador 282. y saldrá el quebrado $\frac{2256}{100}$, cuyo valor (159) es 22. libras 11. sueldos y $\frac{1}{5}$.

De otro modo.

Reducidas las 2. libras y 16. sueldos à sueldos, serán 56. sueldos los quales se reducirán à dos quintos, y serán $\frac{282}{5}$ de sueldo. (162.) Multipliquese ahora la cantidad 8. arrobas por $\frac{282}{5}$ de sueldo, (181) y será el producto $\frac{2256}{5}$ de sueldo, cuyo valor es 451. sueldos y un quinto, que son 22. libras 11. sueldos y un quinto.

Exemplo II.

Pedro compra 4. onzas de canela à 3. sueldos 8. dineros y dos tercios de dinero; para saber quanto valen, multipliquense las 4. onzas por los 3. sueldos, y serán 22. sueldos. Ahora, porque los 8. dineros no son parte aliquota del sueldo, dividanse en aliquotas 4. 4. las quales se escribirán al lado; y porque 4. dineros son el tercio de un sueldo, saquese el tercio de la cantidad 4. y será 1. sueldo y 4. dineros, porque la cantidad supone ahora por sueldos; escribase otra vez el dicho tercio, porque hay otro 4.

	4 onzas.
	3 suel. 8. din. $\frac{2}{3}$
4	12
4	1 suel. 4 din.
	1 suel. 4 din.
	2 din.
	14 suel. 10 din. $\frac{2}{3}$

Multipliquese la cantidad por dos tercios de dinero, y serán ocho tercios, ò 2. dineros y $\frac{2}{3}$. Sumese todo, y saldrá el valor 14. sueldos 10. dineros y $\frac{2}{3}$ de dinero. Los otros modos no tienen especial dificultad.

Exemplo III.

Pedro compró 6. varas de terciopelo à 4. libras 17. sueldos dos quintos de sueldo y mitad de quinto de sueldo la vara; para saber quanto valen, multiplico las 6. varas por las 4. libras; despues, porque 17. sueldos no son parte aliquota de la libra, resuelvolos en aliquotas 10. 5. 2. y escribolas al lado; y porque 10. sueldos es la mitad de la libra, saco mitad de 6. y serán 3. asimismo porque 5. sueldos es mitad de 10. saco mitad de 3. que es lo que corresponde à los 10. sueldos, y será 1. libra y 10. sueldos; y porque los 2. sueldos son la quinta parte de 10. saco el quinto de 3. libras, que es lo que corresponde à los 10. sueldos; y porque de 3. libras no puedo sacar el quinto sin resolverlas en suel-

	6 varas.
	4. lib. 17. suel. $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$
	24 lib.
10	3 lib.
5	1. lib. 10 suel.
2	12 suel.
	3 suel.
	29 lib. 5 suel.

dos, resuelvolas, y serán 60. sueldos, cuyo quinto son 12. sueldos.

Hecho esto, porque el medio es parte de un quinto, le incorporo asi (168): Multiplico los denominadores 5. por 2. y será el nuevo denominador 10. multiplico el numerador 2. por el denominador 2. y al producto 4. añadiendo el numerador 1. será el nuevo numerador 5. y el quebrado reducido $\frac{5}{10}$ de sueldo. Multiplico ahora las 6. varas por $\frac{5}{10}$ de sueldo, y saldrán $\frac{30}{10}$, que son tres sueldos justos. Sumolo todo, y hallo el valor 29. libras y 5. sueldos.

De otro modo.

Debaxo de los 17. sueldos pongase el denominador 20. y reduciendo las 4. libras al quebrado $\frac{17}{20}$ (162), serán $\frac{97}{20}$ de libra; despues incorporense unos quebrados en otros, de este modo: Multipliquense los denominadores 20. por 5. y saldrá el nuevo denominador 100. para hallar el nuevo numerador, multipliquese el numerador 97. por el denominador 5. y al producto 485. añadase el numerador 2. y será el quebrado $\frac{487}{120}$, en el qual se incorporará del mismo modo el quebrado $\frac{1}{2}$, multiplicando los denominadores 100. por 2. serán 200. el nuevo denominador; para el nuevo numerador, multipliquese el numerador 487. por el denominador 2. y al producto 974. añadase el numerador 1. y será el quebrado $\frac{975}{200}$ de libra; por el qual se multiplicarán las 6. varas, y saldrán $\frac{5850}{200}$ de libra, cuyo valor (159) es 29. libras y 5. sueldos.

6 varas
4 sibras $\frac{17}{20}$ suel. $\frac{2}{5}\frac{1}{2}$

PROBLEMA V.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR OTRAS muchas.

226 EL que hubiere entendido los Problemas antecedentes, no hallará dificultad en este; porque solo añade el exercicio de la multiplicacion por diferentes exemplos.

Exemplo I.

Pedro compró 40. arrobas de azucar à 3. libras un sueldo y un dinero la arroba, y quiere saber quanto valen. Multiplique la cantidad 40. arrobas por la especie mas alta del multiplicador, que son las 3. libras, y saldrán 120. libras. Ahora paso à multiplicar la segunda

espe-

especie, que son sueldos, y pues un sueldo es la vigesima parte de la libra, saco la misma parte de la cantidad 40. la qual supone ahora por libras, que es lo mismo que partirla por 20. y saldrán 2. libras, que escribo debaxo de las 120. libras.

Paso à la tercer especie del multiplicador, que es dineros, y porque un dinero es la duodecima parte del sueldo, saco dozavo de la cantidad 40. que ahora supone por sueldos; partiendo 40. à 12. caben 3. sueldos, y sobran 4. los quales reducidos à dineros son 48. dineros, y partidos à 12. caben à 4. con que el dozavo de 40. sueldos son 3. sueldos y 4. dineros, que escribió en su lugar. Hago la suma, y salen 122. libras 3. sueldos 4. dineros, por el valor de las 40. arrobas de azucar.

40 arrobas.		
3 lib.	1 suel.	1 din.
120 lib.		
2 lib.		
	3 suel.	4. din.
122 lib.	3 suel.	4 din.

Demostracion.

Si el precio de cada arroba fueran solas 3. libras, las 40 arrobas valieran 120. libras solas; y si dicho precio fuera una libra mas; esto es, 4. libras, valieran las 40. arrobas 160. libras: esto es, 40. libras mas que antes; de suerte, que por cada unidad que se aumenta el precio, crece el valor una vez mas el numero de la cantidad, ò especie que se multiplica: luego habiendo en el precio un sueldo à mas de las tres libras crecerá el valor correspondiente à las dichas 3. libras una vigesima parte de la cantidad 40. porque un sueldo es la vigesima parte de la libra: y si huviera 2. sueldos, creceria dos vigesimos; si 3. sueldos, tres vegimos, &c. De donde consta claramente, que multiplicando la segunda especie, que aqui son sueldos, la cantidad supone, ò representa à la especie immediata mayor del multiplicador, que aqui son libras: porque aumentandose el precio una libra, crece el valor 40. libras: aumentandose parte de una libra, crecerá el valor la misma parte de las 40. libras.

Supuesto, pues, que por cada sueldo que hay en el precio, à mas de las libras, crece el valor una vigesima parte de 40. libras, se infiere claramente, que por cada un dinero que haya en el precio, à mas de los sueldos, crecerá el valor un dozavo de dicha vigesima parte, porque un dinero es el dozavo de un sueldo, y la dicha vigesima parte corresponde à un sueldo: luego si se saca el dozavo de dicha vigesima parte, que aqui son 2. libras, será lo que corresponde à un dinero; y como la sobredicha vigesima parte ha provenido de la divirion de las 40. libras por 20. sueldos, si ella se multiplica por los mismos 20 sueldos, para poder mas facilmente sacar el dozavo, reduciendo las libras de la vigesima parte à sueldos, volverá à restituirse la misma cantidad 40. pero no en especie de libras, sino de sueldos; y esta es la causa porque sacando partes por razon de los dineros, la cantidad supone, ò representa sueldos.

De donde se infiere, que en qualquier multiplicacion de numeros denominados multiplicando la cantidad por la especie mayor, el producto es homogeno à la dicha especie mayor; sacando partes por razon de la especie proxime menor, la misma cantidad supone por la especie immediata mayor; y sacando partes por razon de la tercer especie, la cantidad supone por la especie antecedente mayor, de suerte, que sacando qualquier parte, siempre la cantidad supone por la especie proxime menor del multiplicador.

Exemplo II.

Para saber 30. cahices de trigo à 6. libras 19. sueldos 11. dineros el cahiz quanto valen, los multiplicaré primero por las 6. libras; despues, porque los 19. sueldos no son parte aliquota de la libra, los dividiré en aliquotas 10. 5. 4. escribiendolas al lado, para mayor facilidad; y porque los 10. sueldos son la mitad de una libra, sacaré la mitad de la cantidad 30. que ahora supone por libras, y será 15. libras. Y porque los 5. sueldos son la mitad de 10. sacaré la mitad de 15. libras, que corresponden à los 10. sueldos, y será 7. libras y 10. sueldos. Finalmente, por que 4. sueldos es el quinto de la libra, sacaré el quinto de la cantidad 30. que es 6. libras.

	30 cahices.		
	6 lib.	19 suel.	11 din.
	180 lib.		
10	15 lib.		
5	7 lib.	10 suel.	
4	6 lib.		
6		15 suel.	
4		10 suel.	
1		2 suel.	6. din.
	209 lib.	17 suel.	6. din.

Paso à los dineros, y porque 11. no es parte aliquota del sueldo, los divido en aliquotas 6. 4. 1. y porque 6. dineros es medio sueldo, saco la mitad de la cantidad 30. que ahora supone por sueldos, y serán 15. sueldos: y porque los 4. dineros es la tercera parte del sueldo, saco el tercio de la misma cantidad 30. y serán 10. sueldos. Ultimamente, porque un dinero es la quarta parte de 4. saco el quarto de 10. sueldos, que corresponden à los 4. dineros, y serán 2. sueldos y 6. dineros. Sumo todas las partidas, y hallo el valor 209. libras 17. sueldos y 6. dineros.

De otro modo.

Multipliquese la cantidad por todas las especies del multiplicador, y será el producto 180. libras 570. sueldos y 330. dineros. Despues reduzcanse los dineros à sueldos, y los sueldos à libras, y saldrá el valor mismo 209. libras 17. sueldos y 6. dineros.

30 cahices.
6 lib 19. suel. 11 din.

180 lib. 570. suel. 330. din.

De otro modo.

Debaxo de los 19. sueldos pongase el denominador 20. que es una libra; debaxo los 11. dineros escribase el denominador 12. que es un sueldo, como parece; reduzcanse las 6. libras à 19. veinte avos, (162) y serán 139. veinte avos de libra, en cuyo quebrado se incorporaráu los 11. dozavos, (268) multiplicando los denominadores 20. por 12. para hacer el nuevo denominador 240. despues multiplicando el numerador 139. por el denominador 12. y añadiendo al producto 1668. el numerador 11. será todo el quebrado 1679. 240. avos de libra; ahora multipliquese la cantidad por el dicho quebrado, y saldrán 50370. 240. avos, cuyo valor (159) es 209. libras 17. sueldos y 6. dineros.

30 cahices.
6 lib. $\frac{19}{20}$ suel. $\frac{11}{12}$ din.

De otro modo.

Reducido el precio à la menor especie (76) serán 1679. dineros, por los quales se multiplicarán los 30. cahices, y será 50370. dineros; reducidos à libras, sueldos, y dineros, (100) serán 209. libras 17. sueldos y 6. dineros.

Exemplo III.

Para saber que valen 10. onzas de oro 14. libras 12. sueldos 9. dineros y dos tercios de dinero cada onza, se multiplicarán primero las 10. onzas por las 14. libras, y despues se dividirán los 12 sueldos en partes aliquotas 10. 2. por razon de los 10. sueldos se sacará la mitad de la cantidad 10. y serán 5. libras; y por los 2. sueldos se sacará el quinto de las 5. libras, que corresponden à los 10. sueldos del lado.

Los 9. dineros se dividirán en partes aliquotas de sueldo 6. y 3. Por los 6. dineros se sacará mitad de la cantidad 10. que ahora supone por sueldos, y serán 5. sueldos; y por los 3. dineros se sacará mitad de la dicha mitad, y serán 2. sueldos y 2. dineros.

10 onzas.
14 lib. 12. suel. 9. din. $\frac{2}{3}$

	140 lib.		
10	5 lib.		
2	1 lib.		
6		5 suel.	
3		2 suel.	6 din.
			6 din. $\frac{2}{3}$

146 lib. 8 suel. 0 din. $\frac{2}{3}$

Hecho esto, multipliquese la cantidad por los dos tercios, y reduzcase à enteros asi: Multipliquese 10. por el numerador 2. y el producto 20. se partirá por el denominador 3. será el quociente 6. dineros y dos tercios. Hecha la suma de todo, vendrá el valor 146. libras 8. sueldos 0. dineros y dos tercios.

De otro modo.

Multipliquese la cantidad por todas las especies, como en el exemplo segundo de este Problema, modo segundo, y despues reduzcase à libras, sueldos, &c. (100)

De otro modo.

Debaxo de los 12. sueldos pongase el denominador 20. y debaxo de los 9. dineros se escribirá el denominador 12. Despues reduzcanse las 14. libras al quebrado 12. 20. avos, en el qual quebrado se incorporarán los 9. 2. avos, y serán 3513. 240. avos de libra; en este quebrado tambien se incorporarán los dos tercios, y serán 10541. 720. avos de linea. Hecho esto, multipliquese la cantidad 10. onzas por este ultimo quebrado, y el valor del producto será el que se busca.

10 onzas.
14 libras $\frac{12}{20}$ suel. $\frac{9}{13}$ din. $\frac{2}{3}$

Exemplo IV.

Un campo rectangulo tiene de largo 100. pasos geometricos, y de ancho 50. pasos 4. pies 3. palmos y dos dedos; para saber quanto tendrá la superficie, se multiplicará lo largo por lo ancho, y aunque este

te

te genero de multiplicacion se puede hacer sacando partes, pero mejor será por multiplicacion de cada especie.

100 pasos.			
50 pas.	4 pies	3 pal.	2 dedos.
5000 pas.	400 pies	300 pal.	200 dedos.
5097 pas.	2 pies	2 pal.	

Multipliquense los 100. pasos de largo por todas las especies del multiplicador por el modo ordinario de multiplicar enteros, y será el producto 5000. pasos 400. pies 300. palmos y 200. dedos. Reduzcase cada especie inferior à la inferior, partiendole por la denominacion de esta, y será el verdadero producto, ò superficie del campo 5097. pasos 2. pies y 2. palmos.

PROBLEMA VI.

MULTIPLICAR MUCHAS ESPECIES POR OTRAS muchas.

Preceptos.

227 QUando en la cantidad, y multiplicador hay muchas especies, se multiplicará primero solo la mayor especie de la cantidad por todas las del multiplicador como queda dicho en los Problemas antecedentes. Despues de todo el multiplicador se sacarán aquella parte, ò partes, que cada una de las especies de la cantidad fuere, respeto de la especie proximo mayor de la misma cantidad, y sumandolo todo saldrá el verdadero producto.

Exemplo I.

Pedro merca 4. varas y 2. palmos de paño à razon de 2. libras 10. sueldos y 8. dineros la vara; para saber quanto valen, multiplique las 4. varas por todas las especies del multiplicador, sacando partes, ò de otro qualquier modo de los referidos; y despues, porque los dos palmos son la mitad de la vara, saque mitad de todo el precio, que será 1. libra 5. sueldos 4. dineros. Sumelo todo, y hallará 11. libras 8. sueldos.

4 varas	2 palmos	
2 lib.	10 suel.	8 din.
8 lib.		
2 lib.		
	1 suel.	4. din.
	1 suel.	4. din.
1 lib.	5 suel.	4. din.
11 lib.	8 suel.	

De otro modo.

Debaxo cada especie de las menores pongase por denominador el numero que constituye à la especie immediata mayor ; esto es, debaxo de los 2. palmos, pongase el numero 4. porque 4. palmos hacen una vara ; debaxo los 10. sueldos pongase 20. y debaxo los 8. dineros escribanse 12.

Hecho esto se reducirá la cantidad al quebrado dos quartos, y será 18. quartas de vara. Asimismo se reducirán las 2. libras à 10. 20. avos ; y serán 50. 20. avos ; en el qual quebrado se incorporarán los 8. 2. avos. (168) y serán 608. 240. avos de libra. Multipliquense ahora los 18. quartos por 608. 240 avos, (180) y serán 10944. 960. avos de libra, cuyo valor es 11. libras y 8. sueldos.

4 varas $\frac{2}{4}$ palm.
2. lib. $\frac{10}{20}$ suel. $\frac{8}{12}$.

$\frac{18}{4}$ $\frac{608}{246}$

Exemplo II.

Si quiero saber 10. libras y 10. onzas de seda labrada, peso de Valencia, à 3. libras 11. sueldos la libra quanto valen, multiplicaré las 10. libras por todo el precio, como se hizo en los Problemas antecedentes ; despues para saber el valor de las 10. onzas, porque no son parte aliquota de la libra de peso, las dividiré en aliquotas 6. y y 4. porque 6. onzas es media libra, sacaré la mitad de todo el precio, que será una libra 15. sueldos y 6. dineros ; despues, porque las 4. onzas son el tercio de la libra de peso, sacaré el tercio de todo el precio, deste modo : El tercio de 3. libras es una libra ; el tercio de 11. sueldos son 3. sueldos, y sobran 2. que reducidos à dineros son 24. dineros ; el tercio, pues, de 24. dineros son 8. Con que todo el tercio serán una libra 3. sueldos y 8. dineros. Hecha la suma, hallaré el valor 38 libras 9. sueldos y 8. dineros.

10 lib. 10 onzas.
3 lib. 11 suel.

10 30 lib.
1 5 lib.
6 lib. 10 suel.
4 1 lib. 15 suel. 6 din.
1 lib. 3 suel. 8 din.

38 lib. 9 suel. 2 din.

De otro modo.

Debaxo las 10. onzas pongase el denominador 12. que son las onzas

zas que hacen la libra ; asimismo , debaxo los 11. sueldos escribaſe el denominador 20. que son los sueldos que hacen la libra de moneda. Reduzcaſe los enteros à los quebrados que les acompañan , y ſerán 130. dozavos y 71. veinte avos ; multipliquese , y el valor del produćto 9230. 240. avos , será 8. libras 9. sueldos y 2. dineros.

10 lib. $\frac{10}{12}$ onzas.
3 lib. $\frac{11}{20}$ suel.

$\frac{130}{12}$ $\frac{71}{20}$

Eſte modo de obrar es lo mismo que reducir el multiplicador , y cantidad à la ultima especie , y ſerán 130. onzas , y 71. sueldos ; multipliquense , pues , las 130. onzas por los 71. sueldos , y el produćto 9230. se partirá por el produćto 240. de 12. por 20. que son las onzas , y sueldos que hay en una libra de peso , y de moneda ; y el quociente dará lo que se busca.

Exemplo III.

Se han de multiplicar 36. arrobas 20. libras y 5. onzas , peso Valenciano , por 15. sueldos 3. dineros y medio la arroba. Multipliquense primero las 36. arrobas por los 15. sueldos 3. dineros y medio, como se ha hecho en los Problemas antecedentes.

36 arrob. 20 lib. 5 onz.
15 sueld. 3. din. $\frac{1}{2}$

	180 suel.	
3	36 suel.	
	9 suel.	
18	1 suel. 6 din.	
2	7 suel. 7 din.	$\frac{3}{4}$
4	10 din.	$\frac{7}{36}$
1	1 din.	$\frac{151}{216}$
		$\frac{367}{64}$
	559 suel. 2 din.	$\frac{59}{64}$

Hecho esto , porque las 20. libras no son parte aliquota de la arroba , las divido en aliquotas 18. y 2. y porque las 18. libras son media arroba , saco la mitad de todo el precio , diciendo : La mitad de 15. sueldos son 7. y sobra un sueldo , que son 12. dineros, y 3. dineros son 15. cuya mitad son 7. dineros , y ſobra un dinero , el qual reduzco al quebrado , y será tres mitades , cuya mitad en tres quartos. (320) Y porque las 2. libras son la novena parte de 18. saco el nono de 7. sueldos 7. dineros y tres quartos , diciendo : El nono de 7. sueldos es cero ; resuelvoles , pues , en dineros, y serán 84. dineros ; juntoles los 7. y harán 91. dinero , cuyo noveno es 10. dineros , y sobra un dinero , el qual reduzco à los tres quartos , y serán siete quartos , cuyo noveno son 7. 36. avos, Paso ahora à las onzas, resolviendolas en partes aliquotas 4. y 1. de la libra; y porque las quatro onzas son el tercio de la libra, y por consiguiente el sexto de 2. libras; saco el sexto de 10. dineros y 7. treinta y seis avos, que es lo que corresponde à las dos libras, diciendo: El sexto de 10. dineros es uno, y sobran 4. que reducidos al quebrado 7. treinta y seis avos, son 151. treinta y seis avos, cuyo sexto es 151. 216. avos.

Podia tambien hacer lo mismo de otra manera, sacando el valor de una libra, que es partir todo el precio por 36. que son las libras tiene la arroba; ò sacar el sexto de todo el precio, y de este sexto sacar otra vez el sexto, y será el valor de la libra 5. dineros y 7. 72. avos, el qual escribiré aparte. Despues por las 4. onzas sacaré el tercio del valor de la libra, y será el mismo un dinero, y 151 126. avos.

Y porque una onza (que es la que falta hasta 5.) es la quarta parte de 4. saco el quatro de lo que corresponde à 4. onzas, diciendo: El quarto de un dinero no le tiene; (en especie de dinero) pues le reduzco al quebrado 151. 216. avos, y será 367. 216. avos, cuyo quarto es 367. 864. avos de dinero. Hago la suma de todo, y hallo el valor 559. sueldos 2. dineros y 56. 884. avos de dinero.

Advierto aquí, que en lo mercantil no se hace caso de los ultimos quebrados, y en particular quando son de algun entero de poco valor; pues es mayor el trabajo qué acarrean, que lo que valen, porque en el exemplo solo importan dos dineros. Pues si los quebrados son de alguna especie de notable valor, ò si se han de multiplicar, entonces no se pueden omitir sin error considerable.

Advierto tambien, que quando los quebrados han procedido de la continua particion, como en este exemplo, que del primer quebrado tres quartos han nacido el segundo 7. 36. avos, y de este el tercero, &c. entonces todos los numeradores se contienen en el denominador 864. del ultimo quebrado: y asi, reduciendo todos los quebrados al denominador ultimo, tendrán todos un mismo denominador, y será facil el sumarlos: como reduciendo los tres quartos al denominador 864. (159) salen 648. 864. avos. Asimismo, reduciendo los otros quebrados 7. 36. avos, y 151. 216. avos al mismo denominador, saldrán 168. 864 avos, 604. 864 avos; con que todos los quatro quebrados del exemplo tendrán un mismo denominador, como se vé aqui figurado; y asi, con

$$\frac{648}{640} \quad \frac{168}{864} \quad \frac{604}{864} \quad \frac{367}{864}$$

$$\text{Suma} \quad \frac{1787}{864}$$

sumar los numeradores, y à la suma escribirle debaxo el comun denominador, saldrá un quebrado, que será la suma de todos los quatro, el qual porque tiene el numerador mayor que el denominador, será mayor que un entero; con que partiendo el numerador 1787. por el denominador 864. vendrán dos dineros, y sobran 59. 864. avos de dinero.

De otro modo.

Reduzcase la cantidad à la menor especie, y serán 15797. onzas. (76) Asimismo se reducirá el precio à la menor especie, que son medios dineros, ò meajas, y serán 367. meajas. Multipliquese un numero por otro, y el producto 5797499. se ha de partir por el partidor, que hallaré aora. Saco las onzas que ay en una arroba, que es la especie mayor de la cantidad, y son 432. asimismo saco las meajas que ay en un sueldo, que es la especie mayor del precio, y hallo 24. multiplico 432. por 24. y el producto 10378. es el partidor. Hecha la particion hallo el mismo valor de antes.

La razon porque el producto 5797499. de la cantidad por el precio reducido à la minima especie, no es el verdadero, sino que se ha de partir por el producto de las onzas, y meajas que ay en una arroba, y un sueldo, es manifiesta; porque el dicho producto 5797499. es numero plano, ò es producto de dos numeros. Luego se ha de comparar con otro numero plano, ù otro producto, y no se ha de tomar por sí solo.

Esta operacion es la misma que la que pone denominadores debaxo de cada especie, exceptando la primera, y despues reduce las especies al ultimo quebrado, para hacer la multiplicacion por quebrados: porque si una, y otra se cotejan, se verá la identidad.

Exemplo IV.

Pedro compra en Castilla 10. cahices de trigo 8. hanegas 5. celemines y 2. quartillos, por 40. reales y tres quartos de real cada cahiz; para saber lo que valen, multiplico los 10. cahices por los 40. reales y tres quartos, como se dixo en los Problemas antecedentes.

Despues, porque las 8. hanegas no son parte aliquota del cahiz, las divido en aliquotas 4. 4. y escribiendolas al lado como antes, y porque 4. hanegas son el tercio de un cahiz: saco el tercio de todo el precio, diciendo: El tercio de 40. es 13. y sobra un real, que reducido à los tres quartos son siete quartos; el tercero, pues de 7. quartos son 7. dozavos; (200) escrivo otra vez el mismo tercio, por razon de las otras quatro hanegas.

Hecho esto, para saber el valor de los celemines, sacaré aparte el valor de una hanega, tomando la duodecima parte de todo el precio, que será tres reales y 19. 48. avos; y porque los 5. celemines no son parte aliquota de la hanega, dividole en aliquotas 4. y 1. y pues el 4. es la tercera parte de la hanega, saco el tercio del valor de la hanega 3. reales y 19. 48. avos, diciendo: El tercio de 3. es un real; el tercio de 19. 48. avos es 19. 144. avos; y porque un celemin es el quarto de 4. saco el quarto de lo que le corresponde à 4. celemines, diciendo: El quarto de un real no le tiene (en especie de real); pues le reduzco à su quebrado, y será 163. 144. avos, cuyo tercio (200) es 163. 576. y porque dos quartillos es la mitad de un celemin, saco la mitad de este ultimo quebrado, que es lo que corresponde à un celemin. Hago la suma, y hallo 436. reales y 257. 1152. avos de real.

	10 cahic. 8 ha. 5 cel. 2 qua	
	40 reales.	$\frac{3}{4}$
	400 real.	
	5 real.	
	2 real.	$\frac{1}{2}$
4	13 real.	$\frac{7}{12}$
4	13 real.	$\frac{7}{12}$
4	1 real.	$\frac{19}{144}$
1		$\frac{163}{576}$
2		$\frac{183}{1152}$
	436 real.	$\frac{257}{1157}$

De otro modo.

Reduzcase la cantidad à quartillos, (76) y serán 6166. Asimismo reduzcase el precio à quartos, y serán 163 multipliquese un numero por otro, y se guardará el producto 1005058. Despues se multiplicarán los quartillos que hay en un cahiz, que son 576. por los quartos de real que hay en un real, què son 4. y el producto 2304. será el partidor: partase, pues, el producto 1005058. por este ultimo producto 2304. y el quociente dará el mismo valor..

Exemplo V.

Se han de multiplicar 12. nietros 12. cantaros y tres quintos, medida de Aragon, por 2. libras 16. sueldos 8. dineros y medio. Multiplico los 12. nietros por 2. libras, y son 24 libras. Paso á los sueldos, y porque 16. sueldos no es parte aliquota de la libra, dividoles en aliquota 4. 4. 4. 4. y pues 4. sueldos son el quinto de la libra, saco el quinto de la cantidad 12. diciendo: El quinto de 12. son 2. libras, (supone la cantidad por libras) y sobran dos libras, que hechas sueldos son 40. sueldos, cuyo quinto son 8. Escribo este quinto quatro veces, porque ay quatro quartos.

Paso à los dineros, y porque los 8. dineros no son parte aliquota del sueldo, dividoles en aliquotas 4. y 4. y porque 4. dineros son el tercio del sueldo, saco el tercio de los 12. nietros, que aora suponen por sueldos, y serán 4. sueldos, los quales escribo otra vez, porque ay dos quatros.

	12 nietr.	12 cant.		$\frac{3}{5}$
	2 lib.	16 suel.	8 din.	$\frac{1}{2}$
	24 lib.			
4	2 lib.	8 suel.		
4	2 lib.	8 suel.		
4	2 lib.	8 suel.		
4	2 lib.	8 suel.		
4		4 suel.		
4		4 suel.		
			6 din.	
4		14 suel.	2 din.	$\frac{1}{8}$
4		14 suel.	2 din.	$\frac{1}{8}$
4		14 suel.	2 din.	$\frac{1}{8}$
		2 suel.	1 din.	$\frac{83}{160}$
	36 lib.	5 suel.	1 din.	$\frac{143}{160}$

Paso al medio dinero, sacando mitad de la cantidad 12. que aora supone por dineros, y serán 6. dineros.

Hecho esto saco partes, ò busco el valor de las otras especies que ay en la cantidad, y porque los 12. cantaros no son parte aliquota del nietro, el qual tiene 16. cantaros, dividoles en aliquotas 4 4 4 y porque 4. cantaros son el quarto de un nietro, saco quarto de todo el precio, diciendo: El quarto de 2. libras no le tiene (quedando libres); reduzcolas à sueldos, añadiendoles los 16. sueldos, y serán 56. sueldos, cuyo quarto son 14. sueldos. Saco el quarto de los 8. dineros, y es 2. dineros; saco tambien el quarto de medio dinero, que es un ochavo, y será el valor de 4. cantaros 14. sueldos 2. dineros y un ochavo, que escribo tres veces, por otros tantos quatros que ay al lado.

Para hallar el valor de los tres quintos de cantaro, saco el primero el valor de un cantaro, partiendo todo el precio por 16. que son las partes que tiene un nietro, y escribiendole à parte, porque el dicho precio es de un nietro, deste modo. Reduzco las dos libras à sueldos, y añadiendoles los 16. sueldos, serán 56. sueldos, los quales partidos à 16. caben 3. y sobran 8. sueldos, que reducidos à dineros, y añadidos los 8. dineros, son 104. dineros, los quales partidos à 16. caben à 6. y sobrán 8. dineros, los quales reducidos à medios son 17. medios, y partidos por 16. son 17. treinta y dos avos. Con que el valor de un cantaro es 3. sueldos 6. dineros y 17. treinta y dos avos. Todo este valor reduciré al ultimo quebrado, y será 1361. treinta y dos avos. Multiplico aora este quebrado por los tres quintos de cantaro, y hallaré 4083. 160. avos, que son 25. dineros y 83. 160. avos: esto es, dos sueldos un dinero y 83. 160. avos, los quales escribo. Hago la suma, y hallo el valor de 40. libras 5. sueldos 1. dinero y 143. 160. avos.

De otro modo.

Debaxo de cada especie, exceptando las dos mayores de cada parte, pongase el denominador que constituye à la especie proxime mayor, como parece en el exemplo: esto es, debaxo los 12. cantaros pongase 16., que hacen un nietro; debaxo los sueldos, escribanse 20. y debaxo los dineros ponganse 12. Hecho esto, reduzcanse los 12. nietros à 12. diez y seis avos, y serán 204. 16. avos, en cuyo quebrado se incorporarán los tres quintos, (168) y serán 1023. 80. avos. Del mismo modo se reducirá el precio, y será 1361. 480. avos. Multipliquese un quebrado por otro, y el producto será quebrado de libra, que es la especie mayor; reduzcase à libras, sueldos, y dineros, y se tendrá el mismo valor deseado.

12 nietr.	$\frac{12}{16}$ cant.	$\frac{3}{5}$	
2 libras	$\frac{16}{20}$ suel.	$\frac{8}{12}$ din.	$\frac{1}{2}$

Exemplo VI.

Se han de multiplicar 5. cahices, y tres celemines por 6. libras, y 8. dineros, medida, y moneda de Valencia. Multiplico los 5. cahices por las 6. libras, y son 30. libras. Aora, porque no ay sueldo alguno, paso à los 8. dineros, sacando tercio de la cantidad 5. cahices, y escribiendole dos veces, por razon de dos quartos que ay en el 8. y cada uno es el tercio del sueldo. Hecho esto, tengo de sacar partes del precio por las otras especies, que ay en la cantidad; y aunque no ay barcilla alguna, pero tengo de sacar el valor de una, para saber el valor de tres celemines.

5 cahic	0 barcha.	3 celem.
6 lib.	0 suel.	8 din.
30 lib.		
	1 suel.	8 din
	1 suel.	8 din.
	5 suel.	0 din. $\frac{1}{3}$
	2 suel.	6 din. $\frac{1}{6}$
30 lib.	10 suel.	10 din. $\frac{1}{2}$

Di-

Divido, pues, todo el precio por 12. que son las barchillas que ay en un cahiz, diciendo: El dozavo de 6. libras en especie no le tiene, pues resuelvolas en sueldos, y serán 120. sueldos; y porque no ay sueldo alguno à mas de libras, nada tengo de añadir à los 120. sueldos: saco, pues, el dozavo de 120. y es 10. sueldos, que escribo à parte; asimismo, el dozavo de 8. dineros es dos tercios de dinero. Con que el valor de una barchilla es 10. sueldos, ningun dinero, y dos tercios de dinero.

Esto supuesto, por los dos celemines saco la mitad de dicho valor de una barchilla, y será 5. sueldos cero dinero y un tercio. Saco tambien la mitad de esta mitad por el un celemin de los tres, será 2. sueldos 6. dineros y un sexto. Sumandolo todo salen 30. libras 10. sueldos 10. dineros y medio, que es el valor de los 5. cahices zero barchillas y 3. celemines.

Demonstracion.

Para demonstrar este Problema en numeros determinados es al proposito el exemplo 3. en el qual la multiplicacion de la mayor especie de la cantidad por el precio, ya queda demonstrada en los Problemas antecedentes. Ahora solo falta probar el modo de sacar partes, por razon de las otras especies de la cantidad, que son libras, y onzas. Si como son 36. arrobas fueran 37. esto es, hubiera una arroba mas, creceria el valor una vez todo el precio mas: luego si hay una libra mas que las 36. arrobas, crecerá la trigesima sexta parte del precio; y si dos libras, dos trigesimas sextas partes, &c. Luego habiendo 20. libras, por razon de las 18. que es media arroba, crecerá el valor la mitad del precio; y por las 2. libras; y crecerá la decima octava parte del precio, ò la nona de dicha mitad.

Asimismo, si à mas de las libras hubiera una onza, creceria el valor la duodecima parte de una trigesima sexta parte del precio: esto es, un dozavo del valor de una libra; y si hay dos onzas, crecerá dos dozavos, &c. Luego habiendo 5. onzas, por razon de las 4. crecerá un tercio de dicha trigesima sexta parte del precio, ò un sexto del valor de 2. libras; y por razon de la una onza, crecerá la quarta parte de dicho tercio, pues que una onza es la quarta parte de 4. Luego sacando partes, segun está dicho, queda bien hecha la multiplicacion.

Aqui suelen preguntar algunos la causa por qué quando se multiplican muchas especies por otras muchas, solamente se han de sacar partes de la especie mayor de la cantidad, correspondientes à todas las especies del multiplicador: y sacando partes por razon de las demás especies de la cantidad, se han de sacar de todo el multiplicador; como en el mismo exemplo 3. multiplicando los 15. sueldos 3. dineros y medio, se sacan partes de sola la especie mayor 36. arrobas, y sacando partes por razon de las 20. libras 5. onzas, se han de sacar de todas las especies del multiplicador, ò precio.

A esto respondo, que el multiplicador es precio de una unidad de la especie mayor: esto es, de una arroba; y asi, todas las especies del precio se han de referir à ella sola: y por la misma razon, como todas las especies menores de la cantidad son parte, ò partes de una de la mayor: esto es, de una arroba en nuestro exemplo, se han de sacar por ellas partes de todo el multiplicador que es el precio de una arroba.

Conseċtario.

De lo dicho hasta aqui se infiere un modo universal para multiplicar muchas especies por otras muchas, que es reducir la cantidad, y multiplicador à sus minimas especies, y luego multiplicarlas, guardando el producto para partirle; despues se multiplicará el numero de las veces que la especie menor de la cantidad entra en la mayor, por el numero de las veces que la especie menor del partidor entra en su especie mayor; y dividiendo aquel producto guardado por este, saldrá el numero que se busca.

Como en el exemplo 5. de este Capitulo, para multiplicar 12. nietros 12. cantaros y tres quintos de cantaro, medida de Aragon, por 2. libras 16. sueldos 8. dineros y medio, se reducirá la cantidad à quintos de cantaro, y serán 1023. quintos. Asimismo, se reducirá el multiplicador à medios dineros, ò meajas, y serán 1361. meajas. Multipliquense los 1023. quintos de cantaro por 1361. meajas, y saldrán 1392303. meajas. Ahora vease quantos quintos de cantaro hay en un nietro, lo qual se hallará multiplicando los 16. cantaros que tiene el nietro por 5. y saldrán 80. Asimismo, vease quantas meajas hay en una libra, multiplicando 20. sueldos por 12. dineros, y el producto por 2. y saldrán 480. meajas. Multipliquense los 80. quintos de cantaro por las 480. meajas, y saldrán 38400. meajas. Ultimamente, dividase el producto guardado 1392303. por este ultimo producto 38400. y saldrán 36. libras 5. sueldos 1. dinero, y 143. 160. avos de dinero, por el precio de la sobredicha cantidad.

* * *

CAPITULO QUARTO.

DEL PARTIR NUMEROS DENOMINADOS.

228 Aunque podia dividir este Capitulo en diferentes Problemas que facilitasen la division: pero como piden algunas advertencias, por no confundir al estudioso, le reduciré à una regla general, que aunque en algunos casos es cansada, pero en otros es totalmente necesaria.

Regla general.

229 Escritos los denominadores debaxo de las especies, como se hizo en el Capitulo antecedente, se reducirá por incorporacion la especie mas alta al ultimo quebrado, asi en la cantidad, como en el divisor; despues se hará la division en los quebrados, como se dixo en el partir quebrados.

Exemplo I.

Pedro compró una pieza de tafetán, que tiraba 100. varas, por precio de 80. libras 12. sueldos, para saber lo que valia la vara, escribanse 20. debaxo de los sueldos; y despues reduzcase el precio al quebrado doce veinte avos, y serán 1612. 20 avos de libra; partase por 100. (192), y el quociente será 1612. 2000. avos de libra, cuyo valor (159) es 16. sueldos 1. dinero y 11. 25. avos; tanto valia cada vara. La demonstracion es la misma que la de partir quebrados.

80 lib. $\frac{20}{12}$ sueld. $\Big|\overline{\ 100\ }$

De otro modo.

Esta cuenta, y sus semejantes se puede hacer mas facilmente: Reducidas las libras à sueldos, serán 1612. sueldos; dividanse por 100. por el modo ordinario de partir enteros, y vendrán al quociente 16. sueldos, 3. y 25. avos de sueldo, que son 1. dinero y 11. 25. avos.

De otro modo.

Porque el partidor 100. proviene de la multiplicacion de 10. por 10.

10. saquese el décimo de todo el precio, diciendo: El decimo de 80. libras son 8. libras: el decimo de 12. sueldos es 1. sueldo, y sobran 2. sueldos, que son 24. dineros: el decimo de 24. dineros es 2. dineros y 4. decimos. Con que todo el decimo del precio es 8. libras 1. sueldo 2. dineros y 4. decimos. Saquese de este decimo otro decimo, diciendo: El decimo de 8 libras no le tiene en especie de libras; pues reducidas à sueldos, y añadido un sueldo son 161. sueldos, cuyo decimo es 16. sueldos, y sobra un sueldo, el qual reducido à dineros, y juntandole los 2. dineros serán 14. dineros, cuyo decimo es 1. dinero, y sobran 4. que reducidos al quebrado serán 44. decimos, cuyo decimo es 44. 100. avos, ò 11. 25. avos, y asi, el precio de cada vara será 16. sueldos 1. dinero y 11. 25. avos.

80 lib. 12 sueld.
8 lib. 1 sueld. 2. din. $\frac{4}{10}$
16 sueld. 1 din. $\frac{44}{100}$

Exemplo II.

Un administrador, criado, oficial, &c. tiene de salario cada año 70. libras 18. sueldos; para saber quanto tiene cada dia, reduzcase el salario à sueldos, poniendole debaxo 20. por denominador, y serán 1418. veinte avos de libra; dividanse por 365. dias, que tiene el año comun, ò por 366. quando es bisiesto, y saldrán al dia 1418. 7300. avos de libra, cuyo valor es 3. sueldos 10 dineros y 226. 365. avos.

De otro modo.

Reduzcase el salario à dineros, y serán 17016. los quales se partirán por 365. dias, y vendrán al quociente 46 dineros y 226. 365. avos, que son 3. sueldos 10. dineros y 226. 365. avos.

Esta misma cuenta, para lo civil se hará de otro modo, con mucha facilidad; tomese el tercio del salario, y doblandole serán los dineros que vienen al dia, como el tercio de 70. libras son 23. cuyo duplo son 46. dineros, y sobra una libra, la qual con los 18. sueldos hace 38. pues por cada 30. sueldos que hubiere, à demás del dicho tercio, se tomará un dinero; con que serán 47. dineros: esto es, 3. sueldos y 11. dineros.

La razon porque no concuerdan estas dos cuentas, es, porque en la primera se ha tomado el año verdadero de 365 dias; y en la segunda se ha tomado vulgarmente, contando cada mes por 30. dias, que al año son 360. dias; y como en esta ultima cuenta son menos los dias, por eso ha salido mas salario al dia.

Al contrario, para saber el gasto, ò salario de cada dia quanto hace al año, se hará asi: Conviertase el gasto de cada dia en dineros de los quales se tomará la mitad, y se añadirá à los mismos dineros; y serán las libras que hacen al año; como si quiero saber 3. sueldos cada dia quantas libras son al año, reduzco los sueldos à dineros, y son 36. cuya mitad 18. añadida à los 36. hace 54. y tantas libras importan al año. Esta regla tambien es para lo civil, ò gasto ordinario; porque en sí no es verdadera, por la razon antecedente.

Exemplo III.

Un Mercader quiere emplear 1246. libras y 10. sueldos en trigo, cuyo cahiz vale 6. libras; para saber quantos cahices comprará, escriva el denominador 20. debaxo los sueldos, y reduciendo las libras al quebrado 10. 20. avos, serán 24930. 20. avos; partidos por 6. saldrán 24930. 120. avos, cuyo valor son 207. cahices y 9. barchillas.

1246 lib. $\frac{10}{20}$ sueld.

De otro modo.

Resuelvanse las libras del empleo en sueldos, juntando los 10. y serán 24930. reduzcanse tambien las 6. libras del precio de cada cahiz en sueldos, y serán 120. sueldos; partanse aquellos sueldos por estos, y vendrán al quociente 207. cahices y 9. dozavos, que son 9. barchillas.

Exemplo IV.

Un Mercader compró una pieza de terciopelo por 300. libras 12. sueldos y 6. dineros, cuya vara valia 2. libras 17. sueldos y 2. dineros; para saber quantas varas tiraba, ponganse los denominadores debaxo de las especies, exceptuando las primeras, y reducidas las dos cantidades al ultimo quebrado, como se hizo en el Capitulo antecedente, se partirá el quebrado de todo el precio, por el quebrado del valor de la vara: esto es, 72150 240. avos, por 686. 40. avos; y pues los denominadores son iguales, basta partir el un numerador por el otro, porque la proporcion de los quebrados ahora solo consiste en los numeradores.(197) Partiendo, pues, 72150. por 686. caben à 105. varas y 60.343. avos. de vara; porque aunque en la realidad el quebrado dividendo es de libra, pero aqui supone por varas; porque tantas varas avrá en el quociente, quantas veces cabe el divisor en el dividendo, ò cantidad.

300 lib. $\frac{12}{20}$ sueld. $\frac{6}{12}$ din.
2 lib. $\frac{17}{22}$ sueld. $\frac{2}{12}$ din.

Exem-

Exemplo V.

Pedro compró en Aragon 10. cargas 2. quintales 3. arrobas y dos quintos de cierta mercaderia, por 100. libras 10. sueldos 5. dineros y dos tercios; para saber quanto vale la carga, reduzcanse ambas cantidades al ultimo quebrado, como está dicho en el Capitulo antecedente, y 10 carg. $\frac{2}{3}$ quint. $\frac{4}{3}$ arrob. $\frac{2}{5}$ serán 72377. 720. avos de libra, y 100. lib. $\frac{10}{20}$ suel. $\frac{5}{12}$ diner. $\frac{2}{3}$ 657. 60. avos de carga; partase el quebrado de libra, por el de carga, y vendrán al quociente 4342620. 473040. avos de libra, cuyo valor (159) es 9. libras 3. sueldos 7. dineros.

Demostracion.

De lo que está dicho hasta ahora, queda clara la demonstracion; porque el reducir, à incomportar unos quebrados en otros, está demostrado en el Capitulo 2. de los quebrados; la division de los mismos está demonstrada en el Capitulo 6. Luego todo quedó demostrado.

Observaciones.

Siempre que el numero dividendo, y divisor, despues de reducidos à quebrados tuvieren un mismo, ò igual denominador, con partir solamente los numeradores, sin atender à los denominadores, queda hecha la operacion, como se vé en el exemplo 4 porque la magnitud de los quebrados consiste en el numerador, con relacion, y respeto al denominador: luego teniendo los dos quebrados un mismo, ò igual denominador, toda su magnitud depende solamente de los numeradores: y asi, con partir un numerador por otro, vendrá el quociente que se busca. Por lo qual será conveniente, siempre que se pueda, reducir los dos quebrados del dividendo, y divisor à un comun denominador, y hacer la division en los numeradores, como si fueran enteros.

Algunas veces importa reducir el dividendo, y divisor à quebrados de un mismo todo; como dividiendo 6. libras 6. sueldos y 3. dineros por 8. sueldos 1. dinero y 23. 31. avos de dinero, no se hará bien la division, reduciendo primero el dividendo à quebrado de libra que es la mayor especie, y el divisor à quebrado de sueldo, que es tambien su mayor especie; sino que el divisor se ha de reducir à quebrado de libra, multiplicando, como está dicho, los 8 sueldos por 12. y al producto 96. añadiendo 1. dinero, serán 97. dineros, los quales se multipliplicarán por el denominador 31. y saldrán 3007. añadiendo los 23. serán 3030. que es el numerador, cuyo denominador no ha de ser el producto de 12. (que es el denominador de 1. dinero) por 31. sino el producto de 20. por 12. y por 31. que será 7440.

CAPITULO QUINTO.

DEL EXAMEN DE LA LOGISTICA de los numeros denominados.

231 LAs pruebas de estas quatro operaciones son las mismas que las de la Logistica de los enteros, y quebrados; porque el sumar se examina por el restar, y el restar por el sumar; el multiplicar por el partir, y al contrario; y asi no me detengo en esto.

CAPITULO SEXTO.

DEL EXERCICIO DE LA LOGISTICA de los numeros denominados.

AUnque parece que bastaban los exemplos, que en esa parte de la Logistica hemos puesto, para el exercicio de ella; pero porque hasta ahora solo hemos explicado las reglas, y no atendido à las circunstancias que en lo mercantil suelen suceder, y otras curiosidades, no será fuera de proposito el exemplificarlas en las questiones siguientes.

232 Question primera. Pedro compra en Valencia despues de San Juan de Junio 100 libras 7. onzas y tres quartos de seda en madexa à 23. reales y un quartillo; despues la vuelve à vender à 25. reales y tres quartillos; preguntase quanto gana, pagados todos los gastos, y habiendo menguado la seda 7. onzas.

Para resolver esta question se ha de suponer, que aqui en Valencia despues de San Juan se quitan 2. quartos y medio de tara para cada li-

bra,

bra, y en llegando à 6. onzas ya se cuenta por libra; y mas de esto se pagan 4. dineros al Corredor por cada libra de seda, quitadas las taras, y contando tambien las 6. onzas por una libra; mas quien vende paga por cada dos libras un dinero por el trabajo de pesarla.

Esto supuesto, porque son 100. libras y 7. onzas, tengo de contar 101. libra, para quitar la tara; y asi escribo à parte 101. dos veces, y mas la mitad 50. media; y sumandolo todo serán 252. quârtos y medio la tara, los quales reducidos à libras, y onzas, (159) serán 5. libras 3. onzas cero quartos y medio de tara, la qual restada de la cantidad, quedará la segunda limpia 95. libras 4. onzas 2. quartos y medio.

101
101
50 $\frac{1}{2}$

252 $\frac{1}{2}$

100 lib. 7. onz. $\frac{3}{4}$
5 lib. 3. onz. 0 q. $\frac{1}{2}$

95 lib. 4. onz. $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$

Multiplicando ahora la seda limpia por el precio de 23. reales y un quartillo; y aun podia hacer la multiplicacion por 2. libras 6. sueldos y 6. dineros, que es lo mismo: pero la haré por reales de este modo. Multiplicando las 95. libras por 23. reales; despues por el quartillo saco quarto de las 95. libras, y es 23. reales y 18. dineros. Hecho esto, por las 4. onzas saco tercio de todo el precio, que es 7. reales y 18. dineros; por los 2. quartos saco ochavo de dicho tercio, porque 2. quartos es la octava parte de 4. onzas; y ultimamente, por el medio quarto saco quarto del ochavo; porque medio quarto es la quarta parte de 2. quartos. Y sumandolo todo son 2217. reales 17. dineros y un diez y seis avo; que es lo mismo que 221. libra 15. sueldos 5. dineros y un diez y seis avo.

95 lib. 4. onz. $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$
23 real. $\frac{1}{4}$

285
190
23 real. 18 din.
7 real. 18. din.
23 din. $\frac{1}{4}$
5 din. $\frac{13}{16}$

2217 real. 17. din. $\frac{1}{16}$

A este valor de la seda tengo de añadir el derecho del Corredor, que son 4. dineros por libra, que importa 1. libra 11. sueldos y 8. dineros, y asi valdrá la compra de la seda 223. libras 7. sueldos 1. dinero y un diez y seis avo.

Y porque quando se bolvió à vender habia brecado 7. onzas, las restaré de las 100. libras 7. onzas y tres quartos, y quedarán 100. libras

cero

zero onzas y tres quartos; de las quales sacaré la tara, y quedarán 94. libras 10. onzas y 2. quartos, que multiplicadas por 25. reales y tres quartos son 2443. reales 0. dineros y tres quartos de dinero, que es lo mismo que 244. libras 6. sueldos 0. dineros y tres quatos.

94 lib. 10 onz. $\frac{2}{4}$
25 real. $\frac{3}{4}$

470
188
47
23 real. 12 din.
12 real. 21 din.
8 real. 14 din.
1 real. 1 din. $\frac{3}{4}$

2443 real. 0 din. $\frac{3}{4}$

El derecho del Corredor importa 1. libra 11. sueldos y 8. dineros porque aunque son 94. libras limpias; pero como hay 10. onzas, que pasan de media libra, se cuenta por libra entera. El peso son 4. sueldos y dos dineros; lo qual sumado hace la cantidad de 246. libras 1. sueldo 10. dineros y tres quartos de dinero. Resto, pues, el valor de la compra del de la venta, y hallo 22. libras 14. sueldos 9. dineros y 11. diez y seis avos de ganancia.

Advierto, que en algunos generos de seda se quitan dos dineros por cada libra, por razon de los hilos; à mas de esto se pagan los portes; y asi todo se debe contar.

233 Question segunda: Un Mercader compra 100 piezas de lienzo, que cada una tira 24. varas y 3. palmos, por 5. sueldos 8. dineros y medio la vara, y ha de pagar de derechos à 1. sueldo y 5. dineros por libra de moneda; preguntase à quanto venderá cada vara, para ganar en todo 19. libras 15. sueldos y 3. dineros?

Convierto las 100. piezas en varas, multiplicandolas por 24. varas y 3. palmos, que tira cada pieza, y hallo 1475. varas, las quales multiplico por los 5. sueldos 8. dineros y medio, que cuesta cada vara, y hallo 706. libras 8. sueldos 1. dinero y medio, por el valor de las 100. piezas. Hecho esto, para hallar el valor de los derechos, multiplico las 706. por 1. sueldo y 5. dineros, y hallo 50. libras y 2. dineros; las quales añadidas à las 706. libras 8. sueldos 1. dinero y medio, son 756. libras 8. sueldos 3. dineros y medio, y en tanto estuvo la compra.

Ahora para saber à como se ha de vender la vara para ganar 19. libras 15. sueldos y 3. dineros, añado esto al valor de la compra, y serán 776. libras 3. sueldos 6. dineros y medio. Divido esto por las 2475 varas, que tienen todas las piezas, reduciendo el valor de la compra à meajas, que serán 372565. y partiendolas por las 2475. varas,

ras, vendrán al quociente 150. meajas y 263. 495. avos, que son 6. sueldos 3. dineros, y mas el quebrado sobredicho de meaja, que por importar poco se puede dexar; y à tanto se deve vender la vara.

234 Question tercera. Un Mercader quiere vender 20. varas de tafetán sencillo, y 16. varas de tafetán doble, todo por 15. libras 12. sueldos y 3. dineros, de suerte, que la vara del tafetán doble se venda 2. sueldos y 5. dineros mas cara que la del sencillo; preguntase quanto vale la vara de cada genero?

Primeramente se buscará quanto valen las 16. varas de tafetán doble à 2. sueldos 5. dineros la vara, y hallaré 1. libra 18. sueldos y 8. dineros; las quales restaré de la cantidad que quiero sacar de la venta, y quedarán 13. libras 13. sueldos y 7. dineros; las quales partiré por la suma de las varas, que es 36. y vendrán al quociente 7. sueldos 7. dineros y 7. 36. avos de dinero, y tanto vale la vara del tafetán sencillo, à los quales añadiré 2. sueldos y 5. dineros, y tendré el valor de la vara del tafetán doble 10. sueldos 0. dineros y 7. 36. avos.

235 Question quarta. Pedro compró 200. arrobas y 24. libras de azucar piedra por 6110. libras 15. sueldos y 5. dineros; para saber à quanto venderá la libra, para ganar el tercio del caudal, saque el tercio del dicho caudal, que es 2036. libras 18. sueldos 5. dineros y dos tercios, y juntandolo con el mismo caudal, hallará 8147. libras 13. sueldos 10. dineros y dos tercios: lo qual partido por 7224. libras, que ay en las 220. arrobas y 24. libras, vendrá al quociente 1. libra 2. sueldos y 6. dineros, por el precio de cada libra que ha de vender.

236 Question quinta. Un Mercader compró 10. piezas de veta blanca, de las quales cada una tirava à 50. varas, por 10. sueldos y 6. dineros la vara; hizolas teñir, pagando 3. sueldos por vara, y se encogió cada vara del tinte un ochavo de palmo; despues la vende à 15. sueldos la vara: y preguntase quanto gana?

Multipliquense las 10. piezas por las 50. varas que tira cada una; y se hallarán 500. varas, las quales multiplicadas por 10. sueldos y 6. dineros, son 5250. sueldos; y añadiendo 1500. sueldos, que vale el tinte, son 6750. sueldos, que es lo que vale la compra. Hecho esto, multipliquese el denominador 8. del quebrado por 4. palmos que tiene la vara, y será un 32. avo, respeto de la vara; el qual multiplicado por las 500. varas, importa 15. varas y 5. ochavos, que restadas de las mismas 500. varas, quedan las varas teñidas 484. y 3. ochavos; las quales multiplicadas por los 15. sueldos, que es el precio de la venta, ta, sale la renda 7265. sueldos y 5. ochavos; de la qual, restada la compra, queda de ganancia 215. sueldos y 5. ochavos.

237 Question sexta. Ped[illegible] quiere mercar trigo con cierta cantidad de dinero, que no se e[illegible]ia, y halla de dos generos, el uno à 6. libras, y el otro à 7. libras [illegible] cahiz; y habiendo hecho la cuenta con el dinero que trahe, halla, que si le compra del primer precio le sobrarán 3. libras, y si le compra del segundo le faltarán 5. libras; preguntase quanto dinero tenia, y quantos cahices habia de comprar, para que le sobráran, ò faltáran las libras sobredichas?

Sumense las libras que se dice que faltan, y sobran en las dos compras: esto es, 3. y 5. que son 8. las quales se partirán por la diferencia de los precios de los dos generos de trigo, que es 1. y vendrán 8. al quociente; pues tantos cahices habia de comprar.

Para saber el dinero que tenia, multipliquense los 8. cahices por 6. libras, y serán 48. libras; y porque à este precio le sobravan 3. libras, añadanse, y serán 51. libra todo el dinero que tenia. Asimismo, si los 8. cahices se multiplican por 7. libras, serán 56. libras; y porque à este precio le faltavan 5. libras, restense de 56. y quedarán otra vez las mismas 51. libra.

238 Question septima. Un hombre compró 124. varas de tafetán por 50. libras y 10. sueldos; y por no tener mas dinero, huvo de pagar los derechos en tafetán, pagando à 2. sueldos y 6. dineros por libra; pidese quantas varas ha de dar por los derechos?

Primeramente se ha de vér quanto suben los derechos de las 50. libras y 10. sueldos, à razon de 2. sueldos y 6. dineros cada libra; lo qual se sabe multiplicando las 50. libras y 10. sueldos, por los derechos 2. sueldos y 6. dineros, y serán 6. libras y sueldos y 3. dineros.

Hecho esto se ha de vér quanto vale cada vara, partiendo las 50. libras y 10. sueldos por las 124. varas, y se hallarán 8. sueldos 1. dinero y 23. 31. avos de dinero por el precio de la vara. Dividanse aora las 6. libras 6. sueldos y 3. dineros que importavan los derechos, por los 8. sueldos 1. dinero y 23. 31. avos que vale cada vara, y saldrán 15. varas y media, que se deven dar por el valor de los derechos.

239 Question octava. Un Pastor compró cierto numero de ovejas, de suerte, que de cada tres ovejas pagó 4. libras y 10. sueldos; y despues bolviendolas à vender cada 7. ovejas por 9. libras y 2. sueldos halló de pérdida 26. libras y 16. sueldos; preguntase quantas eran las ovejas?

Saquese el tercio de las 4. libras y 10. sueldos, y será el valor 1. libra y 10. sueldos de cada oveja de la compra; porque 3. ovejas costaron 4. libras 10 sueldos. Luego el tercio deste precio será el valor de una. Asimismo, saquese el septimo de las 9. libras y 2. sueldos, y saldrá el valor de una oveja 1. libra y 6. sueldos en la venta. Restese un valor de otro, y se hallarán 4. sueldos de pérdida en cada una. Aora partase la pérdida 26. libras y 16. sueldos, hecha sueldos, que serán 536. por los 4. sueldos, y saldrán 134. que son las ovejas que tenia.

240 Question nona. Un Polvorista quiere hacer 100. arrobas 30. libras y dos tercios de polvora de 5. as, y as; preguntase quanto pondrá de salitre, azufre, y carbon? Porque la polvora de 5. as, y as consta de 5. partes de salitre, 1. de azufre, y 1. de carbon, sumense 5. 1. y 1. y serán 7. las partes de dicha polvora. Aora, porque el salitre son los cinco septimos de la masa de la polvora, saquense los cinco septimos de las 100. arrobas 30. libras y dos tercios, partiendo por 7. y multiplicando por 5. y serán 72. arrobas 1. libra y un tercio de salitre. Y porque el azufre es el septimo de dicha masa de polvora, saquese el septimo de las 100. arrobas 30. libras y dos tercios, partiendo por 7. y serán 14. arrobas 14. libras y dos tercios de azufre. Ultimamente, porque el carbon es igual con el azufre, avrá otras 14. arrobas 14. libras y dos tercios de carbon; y todas las tres partes juntas harán la cantidad de la polvora que se desea.

PARTE IV.

DE LA LOGISTICA DE LAS PARTES Decimas.

241 PArtes *Decimas* llaman al quebrado que tiene por denominador una unidad con algunos zeros, (158) como $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{12}{1000}$, &c. Aunque en todo rigor, si el denominador tiene una unidad, y un zero, se habian de llamar *Decimas*; si una unidad, y dos zeros, *Centesimas*; si una uni-

unidad, y tres zeros, *Millesimas*, *&c.* Pero creo que el llamarse *Decimas*, es, porque guardan proporcion de culpa entre sí; porque provienen de la division de un qualquier todo en 10. partes, y de cada una destas en otras 10. y otra vez de cada una destas en otras 10. y asi infinitamente.

Para mayor inteligencia destas partes decimas, supongo, que un pié, ò qualquier otro modo, se divide en 10. partes iguales, à quien podemos llamar decimas primeras; cada decima primera se divide en 10. partes, que podèmos decirles decimas segundas, ò centesimas, respeto del pié, cada centesima en otras 10. à las quales llamarémos decimas terceras, ò millesimas, respeto del mismo pié, y asi infinitamente.

Con que el denominador de las decimas primeras tiene un zero; el de las segundas dos zeros; el de las terceras tres zeros, &c. A asi podemos escribirlas en una linea sin forma de quebrado, poniendo despues de un parentesis un numero exponente que declare quantos zeros acompañan à la unidad del denominador; como $\frac{2}{10}$ se podrán escribir asi 2 (1. Mas $\frac{24}{100}$ asi 24 (2. porque ay dos zeros. Mas $\frac{13}{1000}$ deste modo 13 (3. porque ay tres zeros en el denominador. Mas $\frac{1205012}{10000}$ asi 1205012 (4.

El uso destas partes decimas es de suma conveniencia en la Arithmetica, pues por ellas se evita la molestia de los quebrados, que à cada paso se encuentran; porque como proceden en dupla proporcion, asi como en los lugares, ò asientos de los guarismos, su Logistica no se diferencia de la de los enteros, como luego veremos.

Ultimamente es necesario advertir, que los zeros son inutiles al principio de las decimas, y asi no se escriben bien 300 (4. ò $\frac{300}{10000}$. porque como partiendo el numerador, y denominador de un quebrado por otro qualquier numero, sale otro quebrado igual, pero con menores terminos: (151) si el numerador, y denominador se parten por 100. (que es quitar de entrambos dos zeros) saldrá el quebrado $\frac{3}{100}$ igual à $\frac{300}{10000}$. Luego en las partes decimas no se deven poner zeros al principio de las dichas decimas, ò numerador; porque qualquier quebrado se ha de expresar con los menores terminos que se pueda, para facilitar la operacion; y asi, las dichas partes decimas se declararán asi $\frac{3}{100}$, ò 3 (2.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA REDUCCION DE LAS Decimas.

EN este Capitulo pondré diferentes reducciones de las partes decimas, las quales son necesarias para su Logistica, explicandolas con brevedad; pues quien tiene noticia de los quebrados, no le será dificil entenderlas.

PROBLEMA I.

REDUCIR UN QUEBRADO COMUN A DECIMAS.

242 AÑadanse al numerador tantos zeros como se ha de ser exponente, y partiendo por el denominador, el quociente serán las decimas; como para reducir quatro quintos à decimas terceras, ò que su exponente sea 3. añado tres zeros al numerador 4. y será 4000. dividole por el denominador 5. y vendrán 800. por el numerador de las decimas, cuyo denominador, es 1000. así $\frac{800}{1000}$, ò de este modo 800 (3. que es lo mismo que ocho decimos, ò 8 (1.

Asimismo, para reducir 6. ochavos à segundas, añadiendo dos zeros al 6 serán 600. y partiendo por 8. vendrán 75. 100. avos, ò 75. (2. La razon de esta operacion ya queda explicada arriba. (158)

Algunas veces no se puede hacer esta reduccion, porque no se puede partir el numerador aumentado con zeros por el denominador, de suerte, que el quociente venga justo; como para reducir dos tercios à decimas segundas, añadiendo dos zeros al 2. son 200. los quales no se pueden justamente partir por 3. porque sobran 2. En este caso, ò se ha de dexar la reduccion por ser imposible, ò no se ha de hacer caso de lo que sobra, por ser la diferencia pequeña; y así serán 66. 100. avos, ò se hará la reduccion à decimas de mayor exponente, como à octavas, así 66666666 (8. para que la diferencia sea insensible, la qual aqui es dos partes de cien cuentos.

PRO-

PROBLEMA II.

REDUCIR LAS DECIMAS A UN QUEBRADO COMUN.

243 ESte Problema es el mismo que el 3. del Capitulo 2. de los quebrados; (156) con que tambien será la misma su demonstracion. Y asi, multipliquense las decimas por el nuevo denominador, y del producto quitense tantos guarismos primeros, como unidades tiene el exponente; que es lo mismo que partir por un numero que tenga una unidad, y tantos zeros, como unidades el exponente; como para reducir 8. (1. à quintos, multipliquense 8. por 5. y del producto 40. quitese el primer guarismo 0. porque en el exponente hay sola una unidad, y quedarán 4. quintos.

Asimismo, para reducir 224. (3. à sextos, multiplicando 224. por 6. serán 1544. quitando los tres guarismos primeros, porque en el exponente hay tres unidades, quedará un sexto. Advierto, que esta reduccion algunas veces es imposible, como en este exemplo, porque se pierden algunas partes.

PROBLEMA III.

REDUCIR UNAS DECIMAS A OTRAS.

244 PAra reducir las decimas menores à mayores, se añadirán al numerador tantos zeros, como le faltan unidades al exponente; como si 324 (3. se han de convertir en quintas, añadense dos zeros, porque del exponente 3. al exponente 5. van 2. y serán 32400 (5. Asimismo, si 84 (2. se han de reducir à octavas, añadanse seis zeros, asi 84000000 (8. porque como el denominador tiene seis zeros mas: esto es, está multiplicado por 1000000. tambien el numerador se ha de multiplicar por el mismo numero, que es añadir los zeros; y entonces, como los terminos del primer quebrado 84. 100. avos están multiplicados por un mismo numero 1000000. las decimas que saldrán serán iguales à las primeras.

Al contrario, si las decimas mayores se han de reducir à menores, como 245 (4. à terceras, se quitarán tantos guarismos primeros, como se han de quitar unidades al exponente, y asi quedarán 24 (3. Asimismo, para reducir 12546 (8. à quintas, se quitarán tres guarismos, y quedarán 12 (5. porque como el exponente 8. ò denominador 100000000. tiene tres zeros màs que el exponente 5. ò denominador 100000. los terminos del quebrado 12546. 100000000. avos se han de partir por 1000. que es lo mismo que quitar tres guarismos de cada parte, y quedarán 12. 100000. ò 12 (5.

PROBLEMA IV.

REDUCIR LOS ENTEROS A DECIMAS, y al contrario.

245 PAra reducir los enteros à decimas, añadense tantos zeros como ha de ser el exponente: como 86. reducidos à terceras, serán 86000 (3. y 642. reducidos à sextas, serán 642000000 (6. porque ¿añadir zeros, es lo mismo que multiplicar por un numero que tenga una unidad, y otros tantos zeros, que es el denominador; y el reducir los enteros à un denominador determinado, es multiplicarle (161) por el denominador.

246 Para reducir las decimas à enteros, apartense de mano derecha con una distincion tantos guarismos como dice el exponente, y los de mano izquierda serán enteros; y asi 46,30531 (5. serán 46. enteros, y 30531 (5. Asimismo 865,003 (3. son 865. enteros, y 003 (3. ò 3. (3. Porque quando el quebrado es mayor que un entero, para reducirle à enteros se ha de partir el numerador por el denominador; (164) y como el denominador aqui es una unidad con zeros, basta separar tantos guarismos primeros, como tiene zeros el denominador; porque esto es partir por numero que consta de una unidad, y zeros. (90)

PROBLEMA V.

REDUCIR LOS NUMEROS DENOMINADOS à Decimas.

247 REduzcanse las especies menores al ultimo quebrado, como se hizo en el multiplicar numeros denominados; y reducido este quebrado à decimas, (242) se escribirá à mano izquierda la especie mayor, poniendo una distincion antes, para denotar que son enteros; como si se han de reducir 3. libras 2. sueldos y 8. dineros à centesimos, escritos los denominadores

3 lib. ${}^{2}_{20}$ sueld. ${}_{12}$ din.

dores 20. debaxo los 2. sueldos, y 12. debaxo los 8. dineros, se incorporará el quebrado 8. dozavos en 2. veinte avos, (168) multiplicando los denominadores entre sí, para hacer el nuevo denominador 240. despues multiplicando el numerador 2. por el denominador 12. y al producto 24. añadiendo el numerador 8. será el nuevo numerador 32. y el quebrado 32. 240. avos, el qual reducido à segundas, ò centesimas, (242) será 13. (2. y escritas las 3. libras à la mano izquierda, serán 3, 13 (2.

Asimismo se han de reducir à quintas 8. varas 3. palmos 2. quartos y medio. Escritos los denominadores debaxo las especies menores, è incorporados los quebrados, serán 29. 31. avos. Los quales se reducirán à quintas, (242) y añadidas las 8. varas à la izquierda, serán 8, 90625. (5.

Adviertanse, que algunas veces no se pueden reducir los numeros denominados à decimas menores, sino que precisamente ha de ser la reduccion à mayores, para que el error no sea muy notable; como si se han de reducir 16. libras 1. sueldo y 1. dinero à decimas primeras, el quebrado incorporado es 13. 240. avos; añadiendo un zero al numerador, por razon de las decimas primeras, será 130. el qual no se puede partir por el denominador 240. como ordena la regla; (242) y asi, es preciso lo menos, reducirlas à decimas segundas, añadiendo dos zeros, y será 1300. partiendo, pues, por 240 vienen 5. con que serán las decimas 16. 05 (2.

Adviertase tambien, que si despues de la reduccion saliere el quociente con menos guarísmos que unidades tiene el exponente, ò zeros el denominador, como en el exemplo antecedente, donde el quociente es un guarismo solo 5. y el exponente es 7. añadanse tantos zeros à la mano izquierda, hasta que el numero de los zeros, y guarismos significativos de las decimas sea igual al exponente, y asi; en dicho exemplo se ha añadido un zero, porque el numero de los guarismos de las decimas es uno solo, y el exponente es dos.

Demonstracion.

El reducir el quebrado à decimas ya queda demonstrado en el Problema primero de este Capitulo. Ahora solo falta dar la razon, por qué se ha de añadir la especie mayor à la mano izquierda; la qual es esta. La especie mayor es entero, y para reducir los enteros à quebrado, se multiplican por el denominador, y se añade el numerador; (191) y si el denominador es una unidad con algunos zeros, como aqui en las decimas, basta añadir à los enteros otros tantos zeros como hay en el denominador, (69) y despues escribir el numerador del quebrado en el lugar de los zeros; como si son 3. libras, y 13. 100. avos de libra, para reducir las 3. libras al quebrado, se añaden dos zeros al entero 3. y serán 300. 100. avos; y como ahora se han de añadir los 13. que es el numerador, será lo mismo que ponerlos en el lugar de los zeros, de este modo $\frac{313}{100}$, donde se vé claramente, que añadiendo los enteros al lado izquierdo de las decimas, quedan reducidos.

De aqui nace la razon, porque quando el numero de los guarismos de las decimas no es tanto como el exponente, se han de poner entre las decimas, y enteros tantos zeros, como faltan hasta igualar con el exponente, porque desde el primer guarismo de las decimas, hasta los enteros, ha de haber tantos guarismos, como unidades tiene el exponente, ò zeros el denominador: luego si faltan se han de suplir con zeros, que es llenar los lugares, ò asientos de los guarismos, para que los enteros disten del principio tantos lugares, como tiene zeros el denominador.

PROBLEMA VI.

HALLAR EL VALOR DE LAS DECIMAS.

148 ESte Problema no encierra otra dificultad mas, que hallar el valor de un quebrado comun. Sean, pues, 38 (2. de sueldo, para saber quantos dineros valen, multipliquense los 38. por 12. dineros que vale el sueldo, y serán 456. dividanse por 100. que es el denominador, quitando los dos guarismos primeros 56. por otros tantos zeros que en el denominador, (90) y quedarán 4. dineros, y 56. (2. de dinero, que es el valor de las sobredichas decimas.

Asimismo, para saber quanto importan 36, 857 (3. de milla, medida geometrica, porque los guarismos de las decimas son cinco, y el exponente es 3. separo con una distincion los dos ultimos guarismos, que son enteros, y serán 36. millas y 857 (3. de milla. Ahora, porque la milla tiene 1000. pasos, multiplico las decimas 857. por 1000. y quitando del producto tres zeros, porque el exponente es 3. quedarán 857. pasos justos: y asi, las sobredichas decimas importan 36. millas y 857. pasos. La demonstracion es la misma que la de los quebrados.

⁂

CAPITULO SEGUNDO.

DEL SUMAR, Y RESTAR DECIMAS

249 Reduzcanse à la denominacion, ò exponente mayor: (244) luego se suman, y restan por el modo ordinario de sumar, y restar enteros.

Exemplo I.

Se han de sumar 16. enteros con 13. (2. y 184 (5. reducido todo à quintas, que es la denominacion mayor, serán como parece en la formula. Sumense, como si fueran enteros, y será la suma 16, 13184 (5.

$$\begin{array}{r} 16,00000\;(5 \\ 13000\;(5 \\ 184\;(5 \\ \hline 16,13184\;(5 \end{array}$$

Exemplo II.

Para sumar 10. enteros con 12, 92 (2. y 13, 1065 (4. y 63 (6. se reducirán à sextas, y sumarán por el modo ordinario de sumar enteros, como parece en el exemplo.

$$\begin{array}{r} 10,000000\;(6 \\ 12,920000\;(6 \\ 13,106500\;(6 \\ 63\;(6 \\ \hline 36,026563\;(6 \end{array}$$

Exemplo III.

250 Para restar 26,43 (2. de 146. 1301 (4. se reducirán à una misma denominacion de quartas, como se vé en el exemplo, y restando por el modo ordinario, quedarán 119, 7001 (4.

$$\begin{array}{r} 146,1301\;(4 \\ 26,4300\;(4 \\ \hline 119,7001\;(4 \end{array}$$

Exemplo IV.

Se han de restar 3. libras de peso 4 onzas, y 3. quartos, de 4. libras 10. onzas y media. Reducidas las especies à qualesquiera decimas, (247) serán 4. 875 (3. y 3, 395 (3. restense por el modo ordinario, y quedarán 1, 480 (3.

$$\begin{array}{r} 4,875\;\;(3 \\ 3,395\;\;(3 \\ \hline 1,480\;\;(3 \end{array}$$

Demonstracion.

La demonstracion es manifiesta, por el sumar, y restar quebrados, porque estando reducidas las decimas à una misma denominacion, los numeradores se suman, y restan como si fueran enteros, como se demonstró en el sumar, y restar quebrados.

CAPITULO TERCERO.

DEL MULTIPLICAR, Y PARTIR DECIMAS.

251. PAra multiplicar se guarda el estilo ordinario de multiplicar enteros, y la suma de los exponentes es el exponente del producto.

Exemplo I.

Se han de multiplicar 38, 46 (2. por 1, 50 (2. Multiplicando los numeros como si fueran enteros, y sumando los exponentes, saldrá el producto 57, 6900 (4.

$$\begin{array}{r} 38\,,\,46\;(\,2 \\ 1\,,\,50\;(\,2 \\ \hline 19\,,\,2300 \\ 38\,,\,46 \\ \hline 57\,,\,6900\;(\,4 \end{array}$$

Exemplo II.

Pedro compró 4. arrobas 3. libras y 5. onzas de cierta mercaderia, por 23. libras 19. sueldos y 6. dineros la arroba; para saber todo el valor reduzca la cantidad à decimas, qualesquiera que sean, y quanto mayores mejor: v. g. à sextas, (148) y serán 4, 094907 (6. Reduzcase tambien el precio à decimas: v. g. à terceras, y serán 3, 975 (3. Multipliquense unas por otras por el modo ordinario, y sumando los exponentes se hallará el exponente del producto, como parece

$$\begin{array}{r} 4\,,\,094907\;(\,6 \\ 3975\;(\,3 \\ \hline 20474535 \\ 28664339 \\ 3\,,\,6854163 \\ 12\,,\,284721 \\ \hline 16\,,\,277255325\;(\,9 \end{array}$$

en

en el exemplo, cuyo valor (248) es 16. libras 5. sueldos 6. dineros, y 13. 24. avos.

Exemplo III.

Se han de multiplicar 9453 (3. por 2, 52 (2. Multiplicad las decimas, como se vé, se sumarán los exponentes, y será el producto 19, 35036 (5.

943 (3
2 , 52 (2
1886
4715
18,86
19,35036 (5

Exemplo IV.

Para saber quanto valdrán 3. cahices de trigo 8. herchillas y media, por 7. libras cada cahiz, se reducirá la cantidad, como queda dicho, y serán 3,708 (3. Multipliquense por 7. libras, que son 7 (0. que es el modo para escribir los enteros en forma de decimas, quando no se pide que se reduzcan à decimas determinadas, y será el producto 25, 956 (3.

3 , 708 (3
7 (0
25 , 956 (3

Exemplo V.

Se han de multiplicar 3. grados 32. min. y 54. segund. por 25. min. y 40. segundos. Reduzcanse los 3. grados à minutos, multiplicando por 60. y añadiendo los 32. minutos, serán 212. minutos. Ahora los segundos del numero multiplicando, y multiplicador, reduzcanse à decimas, qualesquiera que sea: v. g. centesimas, añadiendoles dos zeros, y partiendo por 60. saldrán las decimas 212. 90 (2. y 25, 66 (2. Multipliquense ahora unas decimas por otras, como si fueran enteros, y sumando los exponentes será el producto 5463, 0140 (4. Para saber su valor, partanse los 5463. segundos por 60. y serán 91. minuto y 3. segundos. Las restantes decimas 0140. no hacen aun un segundo.

212 , 90 (2
25 , 66 (2
12 , 7740
127 , 740
1064 , 50
4258 , 0
5463 , 0140 (4

Quando no hay segundos, se añadirán al principio tantos ceros, como unidades ha de tener el exponente; y asi, para reducir 54. minutos à centesimas, serán 54, 00. (2.

De-

Demonstracion.

El multiplicar quebrados, es multiplicar numerador por numerador, y denominador por denominador, como queda demonstrado; pues como aqui se multiplican las partes decimas, que son los numeradores, y se suman los exponentes, que es lo mismo que multiplicar los denominadores; porque para multiplicar un numero por otro, que conste de una unidad, y zeros, basta añadir otros tantos zeros, como queda tambien probado: se infiere claramente, que asi se deben multiplicar las decimas.

252 Para partir se guarda el estilo ordinario de partir enteros, y el exponente del partidor se resta del exponente de la cantidad, para tener el exponente del quociente. Pero quando el partidor fuere mayor que la cantidad, ò tambien el exponente del partidor fuere mayor que el de la cantidad, se añadirán algunos zeros à la cantidad, y otras tantas unidades al exponente.

Exemplo I.

Se han de partir 3605. por (634 (4. Dividanse 3605. por 34. por el modo ordinario, y restando el exponente 4. del exponente 6. quedarán 2. con que será el quaciente 106. (2. de lo que sobra no se hace caso.

3605 (6   34 (4
205   100 (2
1

Exemplo II.

Para partir 346. (5. por 86 (8. porque el exponente de la cantidad es menor que el del partidor, añadiré à la cantidad algunos zeros, como 6, y aumentaré otras tantas unidades su exponente; con que serán 346000000 (11. los quales partidos por 86 (8. caben al quociente 4023255. (3.

346000000   86 (8
200   4023255 (3
280
220
480
500
70

Exemplo III.

Se han de partir 24. enteros por 125 (4. Porque el numero de las decimas es mayor que el de los enteros, y tambien el exponente, añadanse algunos zeros à los enteros, de suerte, que sean mas que las unidades del exponente de las decimas, y serán 24, 00000 (5. y hagase la particion como antes.

Exem-

Exemplo IV.

Pedro compró 15. varas y dos palmos de terciopelo, y le costó todo 60. libras 12. sueldos y 3. dineros. Para saber quanto costó la vara, resuelva las dos cantidades en decimas, qualquier que sean, mientras sean proporcionadas para poder partir, y serán los del precio 60, 6125 (4. y de las varas 15, 5 (1. Hagase la division de aquellas decimas por estas, y vendrá el quociente 3, 910 (3. por el valor de cada vara.

Demonstracion.

Quando los terminos del quebrado dividendo se pueden partir enteramente por los del divisor, partiendo unos por otros está concluída la division; (196) pues aqui se parten las decimas del dividendo por la del divisor, que son los numeradores, y restando los exponentes es lo mismo que partir; porque para dividir por numero que consta de una unidad, y zeros, basta quitar otros tantos guarismos del dividendo, que es restar un exponente de otro: luego esta regla del partir enseña la verdad.

Solamente puede obstar lo que sobra en la division de las decimas; pero ya se ha dicho, que de esto no se hace caso, porque el uso de las decimas mas sirve para facilitar las operaciones, por otra parte molestas, quo para ostentar la certeza Arithmetica; y reduciendo à decimas mayores, ò cuyo exponente tengo muchas unidades, se hace insensible lo que sobra.

Y asi tenga advertido el estudioso en Arithmetica, que las partes decimas no siempre proceden con todo el rigor Mathematico, para que no se canse en quererlas cotejar con las otras operaciones; pues, como queda dicho, solo sirven de alivio en las operaciones molestas de quebrados, y otras reglas.

LIBRO II.

DE LA ANALOGIA DE LOS NUMEROS.

ANALOGIA es lo mismo que *Proporcion*; y asi, el asunto de este Libro es tratar de los numeros proporcionales, y de sus propriedades. Dividase en quatro partes, correspondientes à las quatro reglas en que se comprehenden todas las proporciones. La primera es de los numeros proporcionales, ò *Regla de tres*. La segunda, de las *Compañias*. La tercera, de las *Aligaciones*. La quarta, de *Falsas posiciones*.

PARTE I.

DE LOS NUMEROS PROPORCIONALES, ò Regla de tres.

ANTES de explicar la regla de tres, ò de proporcion, será conveniente que trate de la Theorica de las Razones, y Proporciones de los numeros; quien no gustáre de ella, sino solo de la practica, podrá dexarla, y pasar à la regla de tres.

DE LA RAZON DE LOS NUMEROS,

y su division.

253 RAzon numérica es la *relacion, respeto, ò habitud que un numero tiene à otro, en quanto es mayor, igual, ò menor.* Como el 6. comparado con el 3. dice razon, en quanto es mayor: El mismo 6. comparado con el 6. dice razon en quanto es igual: Y el mismo 6. comparado con el 8. tiene razon, en quanto es menor. El numero comparado se dice *Antecedente*, y aquel à quien se compara se llama *Consequente*; y asi, en la razon de 8. à. 4. el 8. es antecedente, y el 4. consequente.

Advierto aqui, que Euclides en la *difin.* 3. *del lib.*5. difinió la razon, diciendo, que es una mutua habitud de dos quantidades de un mismo genero, en quanto se comparan, segun la quantidad; pero esta es difinicion comun à la quantidad continua, y discreta, y aora solo tratamos de la discreta, ò del numero; con que ha sido preciso haber dado otra difinicion mas individual, aunque en la substancia es la misma.

254 Dividese la razon en *razon de igualdad, y desigualdad*: La razon de igualdad es la relacion de un numero à otro igual; como 6. à 6. La razon de desigualdad es el respeto, ò relacion de un numero à otro desigual; como 4. à 8. 5. à 7. 9. à 2. La razon de igualdad no se puede subdividir, porque no hay mas, ni menos igual.

255 Pero la razon de desigualdad se subdivide en razon *de mayor desigualdad, y menor desigualdad.* La razon de mayor desigualdad, es la relacion de un numero mayor à otro menor; como 12. à 4. item 8. à 1. La razon de menor desigualdad, es el respeto de un numero menor à otro mayor; como 4. à 12. item 1. à 8. Con que la razon que es de mayor desigualdad, como de 6. à 1. invirtiendo los terminos se hace de menor desigualdad, como de 1. à 6.

La razon de mayor desigualdad se subdivide en cinco generos: es à saber, en razon *Multiplice*, *Superparticular*, *Superparciente*, *Multiplice superparticular*, y *Multiplice superparciente*.

256 La razon *Multiplice*, es, quando el antecedente contiene al consequente muchas veces justas, sin sobrar algo. Si le contiene dos veces justas, se llama *Dupla*, como 2. à 1. item 4. à 2. item 24. á 12. Si le contiene tres veces justas, se dice *Tripla*, como 3. à 1. item 15. à 5. item 6. à 2. Si quatro veces, *Quadrupla*, como 4. à 1. item 20. à 5. item. 100. à 25. Si cinco veces, *Quintupla*. Si seis, *Sextupla*; y asi de las demás.

257 La razon *Superparticular*, es, quando el antecedente contiene al consequente una sola vez, y sobra una parte aliquota del consequente; la qual, si es la mitad de dicho consequente, se dice *Sequialtera*; como 3. à 2. item 6. à 4. item 9. à 6. Si la parte aliquota que sobra es el tercio del consequente, se llama *Sesquitercia*; como 4. à 3. item 8. à 6. item 12. à 9. Si es el quarto, se dice *Sesquiquarta*; como 5. à 4. item 10. à 8. 15. à 12. Si es el quinto, *Sesquiquinta*; como 6. à 5. item 12. à 10. item 18. à 15. Si es el sexto, *Sesquisexta*. Si es el septimo, *Sesquiseptima*, *&c.*

258 La razon *Superparciente*, es, quando el antecedente contiene al consequente una sola vez, y sobra una parte aliquanta del consequente: y porque la parte aliquanta se expresa con dos nombres, como dos tercios, tres quartos, dos quintos, &c. tendrán tambien dos nombres las especies de esta razon, pues por el primer nombre, si es dos, se dice *Superbiparciente*; si tres *Supertriparciente*; si quatro, *Superquadruparciente*, *&c.* Y por razon del segundo nombre se añaden *tercias*, *quartas*, *quintas*, *sextas*, *&c.* Como la razon de 5. à 3. ò de 10. à 6. ò de 15. à 9. es *Superbiparciente tercias*, porque el antecedente contiene al consequente una sola vez, y sobran dos tercios del consequente. La razon de 7. à 4. ò de 14. à 8. ò de 21. à 12. es *Supertriparciente quartas*; porque el antecedente contiene una sola vez al consequente, y sobran tres quartos del consequente. La razon de 7. à 5. ò de 14. à 10. ò de 21. à 15. es *Superbiparciente quintas*, porque sobran dos quintos del consequente.

Para distinguir estos dos generos de razones *Superparticular*, y *Superparciente*, que à los poco exercitados causa alguna dificultad, se observará esta regla, la qual despues aplicaremos à todas las razones: Dividase el antecedente por el consequente, y el quociente será una unidad, y un quebrado; pues si el denominador del tal quebrado se puede partir justamente por el denominador, será la razon superparticular, y esto ultimo quociente le dará el nombre; como para conocer la razon de 8. à 6. dividiendo 8. por 6. viene 1. y dos sextos; pues porque partiendo el denominador 6. por el numerador 2. salen 3. justos, será sesquitercia. Asimismo, para conocer la razon de 30. à 25. partiendo, viene al quociente 1. y cinco veinte y cinco avos; y porque el denominador 25 se puede partir justamente por el numerador 5. saliendo 5. por quociente, será sesquiquinta.

Pero si el denominador del quebrado no se puede partir justamente por su numerador, será la razon superparciente, y el mismo quebrado le dará el nombre; como para conocer la razon de 8. à 7. partiendo vienen

nen al quociente 1. y dos septimos; y pues el denominador 7. no se puede partir enteramente por el numerador 2. se dirá por el 2 *Superbiparciente*, y por el 7. se añadirá *septimas*. Asimismo, la razon de 11. à 7. será *Superquadruparciente septimas*; porque partiendo salen 1. y quatro septimos. Tambien la razon de 15. à 8 será *Superseptuparciente octavas*; porque dividiendo, vienen al quociente 1. y 7 octavos.

Pero advierto, que el quebrado se ha de reducir à los menores terminos, para dar el debido nombre, y asi, la razon de 14. à 8. no se dirá *Supersextuparciente octavas*, aunque partiendo sea el quociente 1. y seis ochavos; sino *Supertriparciente quartas*, porque el quebrado seis ochavos se reduce à tres quartos. Del mismo modo à la razon de 20. à 14. no la nombrarémos *Supersextuparciente decimas quartas*, aunque el quociente sea 1. y 6. 14. avos; sino *Supertriparciente septimas*, porque el quebrado se ha de reducir à tres septimos.

259 La razon multiplice superparticular, es, quando el antecedente contiene al consequente muchas veces, y sobra una parte aliquota del consequente; si le contiene dos veces se llama *Dupla*; si tres, *Tripla*; si quatro, *Quadrupla*, *&c.* y si sobra un tercio, se añade *Sesquitercia*; si un quarto, *Sesquiquarta*, *&c.* Y asi, la razon de 20. à 6. es *Tripla sesquitercia*; porque el 20. contiene al 6. tres veces, y sobran dos sextos, ò un tercio. Tambien la razon de 11. à 2. es *Quintrupla sesquialtera*; porque el 11. contiene al 2. cinco veces, y sobra una mitad. Asi mismo, la razon de 30. à 9. se llama *Tripla sesquitercia*; porque el 30. contiene al 9. tres, y sobran tres novenos, ò un tercio.

260 La razon multiplice superparciente, es, quando el antecedente contiene al consequente muchas veces, y sobra una parte aliquanta del consequente; si le contiene dos veces se dice *Dupla*; si tres, *Tripla*, si quatro, *Quadrupla*, *&c.* Y si sobran dos tercios, se añade *Superbiparciente tercias*, si tres quartos, *Supertriparciente quartas*, *&c.* como está dicho en la razon superparciente Y asi, la razon de 17. à 6. es *Dupla superquintuparciente sextas*; porque el 17. contiene al 6. dos veces, y sobran cinco sextos. Asimismo, la razon de 31. à 4 es *Septupla supertriparciente quartas*, porque el 31. contiene al 4. siete veces, y sobran tres quartos; y asi de las demás.

De suerte, que estos dos ultimos generos de razones son compuestos de multiplice, y de superparticular, ò superparciente; y asi, sabidas las partes de que se componen, no se pueden ignorarlos todos, porque tienen los mismos nombres, y subdivisiones.

La razon de menor desigualdad tambien se subdivide en otros cinco gèneros, añadiendo la particula *sub*, los quales son: *Submultiplice*,

Sub-

Subsuperparticular, *Subsuperparciente*, *Submultiplice superparticular*, y *Submultiplice superparciente*; y cada genero de estos se subdivide en las mismas especies que los de la razon de mayor desigualdad, solo añade la particula *sub*.

261 La razon submultiplice, es, quando el antecedente es contenido en el consequente muchas veces justas; las quales, si son dos, se dice *Subdupla*, como 1. à 2. item 4. à 8. si tres, *Suptripla*, como 1. à 3. item 6. à 18. si quatro, *Subquadrupla*, como 1. à 4. item 2. à 8. y asi de las demás.

262 La razon subsuperparticular, es, quando el antecedente es contenido en el consequente una sola vez, y sobra una parte aliquota del antecedente; la qual, si es la mitad, se dice *Subsesquialtera*, como 2. à 3. item 4. à 6. Si el tercio, *Subsesquitercia*, como 3. à 4. item 6. à 8. Si el quarto, *Subsesquiquarta*, como 4 à. 5. item 8. à 10. y asi de las demás.

263 La razon subsuperparciente, es, quando el antecedente se contiene en el consequente una sola vez, y sobra una parte aliquanta del antecedente; la qual, si es dos tercios, se dice *Subsuperbiparciente tercias*; si tres quartos, *Subsupertriparciente quartas*, *&c.* como se dixo en la razon superparciente, solo se añade el *sub*.

264 Las razones submultiplice superparticular, y submultiplice superparciente son compuestas de la submultiplice, y de la subsuperparticular, y subsuperparciente; y asi no tengo que explicarlas, pues entendidas las partes no se puede ignorar el todo.

265 De suerte, que la razon de menor desigualdad, es inversa de la de mayor desigualdad; y asi, invirtiendo los terminos de la una sale la otra, como la razon de 4. à 1. es quadrupla, y la de 1. à 4. es subquadrupla. La razon de 2. à 3. es subsesquialtera, y la de 3 à 2. es sesquialtera. La razon de 30. à 11. es dupla superoctuparciente undecimas, y la de 11. à 30. es subdupla superoctuparciente undecimas, y asi de las demás. Solo se ha de tener grande cuydado en añadir la particula *sub*, quando se nombra alguna razon de menor desigualdad, porque por ella se distingue de la de mayor desigualdad.

266 De lo dicho hasta aqui se concluye, que los generos de la razon son once: es à saber, uno de igual, cinco de mayor desigualdad, y otros cinco de menor desigualdad;y que no sean mas, ni menos lo pruebo asi. Un numero, respeto de otro,ò es igual, ò mayor,ò menor.Si igual, constituye un genero de razon de igualdad, la qual como queda advertido, no se puede subdividir mas: Si es mayor, puede ser de cinco maneras; porque, ò contiene al menor algunas veces justas, y es multiplice, ò se

con-

contiene una sola vez, y sobra parte aliquota,y es superparticular;ò sobra parte aliquanta, y es superparciente, ò le contiene muchas veces,y sobra parte aliquota , y es multiplice superparticular ; ò conteniendole muchas veces sobra parte aliquanta , y es multiplice superparciente. Asimismo, si es menor hay otros cinco generos ; luego todos son once.

267 Advierto aqui , que comunmente los Autores dividen la razon en general en razon *Racional* , è *Irracional*; la racional es la que se puede declarar por numeros ; y asi un numero à otro necesariamente dice razon racional. La irracional es la que no se puede expresar con numeros , como la razon que hay entre el lado, y la diagonal de un quadro ; ò entre raíz quadrada de 7. y raíz quadrada de 3. como lo verémos en otro lugar , pero como aqui solo tratamos de la razon que se halla entre numeros , no hay necesidad de explicar mas de esta division ; porque en los numeros no hay razon irracional.

Observaciones.

268 Una razon se puede expresar con diferentes terminos ; como la razon de 2. à 1. es la misma que la de 4. à 2. y que la de 30. à 15. y que la de 100. à 50. porque en todas el antecedente tiene un mismo respeto al consequente ; esto es , le contiene dos veces. Asimismo, todas estas razones 2. à 3. item 4. à 6. item 12. à 18. item 100. à 150. &c. son iguales , ò las mismas ; porque en todas el antecedente se contiene en el consequente una vez , y sobra una mitad del antecedente ; y asi son subsesquialteras. La razon de esto es clara ; porque la razon consiste en la relacion , ò respeto del antecedente al consequente : luego mientras se guarde la misma relacion no se muda la razon , aunque los terminos sean diferentes.

Y aunque una razon se puede declarar con diferentes terminos, pero es conveniente expresarla con terminos menores ; porque teniendo pocas unidades , facilmente se conoce la relacion , ò continencia del antecedente en el consequente , ò al contrario ; y asi la razon tripla con mayor facilidad se conoce por estos terminos 3. à 1. que por estos 81. à 27. como se dixo en los quebrados.

269 Los terminos mismos , por los quales se puede declarar una razon , se dice *Raíces* de la tal razon ; y asi la raíz de la razon quadrupla es la razon de 4. á 1. La de la superbiparciente tercias es la razon de 5. á 3. porque de ellos , como de raíz , proceden todos los otros terminos con que se puede expresar la misma razon.

270 En la colocacion de los terminos para expresar las razones se debe tener grande cuydado, porque los principiantes muchas veces no reparan en hacer antecedente al termino que avia de ser consequente; y

asi para declarar la razon dupla, suelen decir que es de 1. á 2. siendo en la realidad de 2. á 1. en lo qual se engañan totalmente; porque quando la cantidad mayor se compara á la menor, es razon de mayor desigualdad; y quando la menor se refiere á la mayor, es la razon de menor desigualdad, que son del todo diferentes; pues en aquella de antecedente contiene el consequente, y en esta es contenido.

Y para que esta diferencia esté manifiesta, me valdré de los numeros contractos. Supongo, pues, que los Soldados del Exercito de España tienen la razon de 2. á 1. á los Soldados de Francia; si los de Francia son 10000. los de España serán 20000. pero si se dixera que la razon es de 1. á 2. siendo los de Francia 10000. serán los de España 5000. que es la mitad: de suerte, que la diferencia seria de tener España 20000. Soldados, á tener 5000. porque la razon de 2. á 1. significa doblado y la de 1. á 2. la mitad.

De aqui consta con evidencia, que no pasa lo mismo en la quantidad respectiva, ò en las razones, que en la absoluta; porque en la quantidad absoluta la misma distancia ay de un termino á otro, que de este á aquel: v. g. la misma distancia ay de Valencia á Madrid, que de Madrid á Valencia; pero en las razones, no ay la misma razon de un termino á otro, que de este á aquel: esto es, de 2. á 1. que de 1. á 2. como queda advertido.

271 Ultimamente conviene observar, que las razones unas son *iguales semejantes, las mismas, ò de una especie* (todos estos nombres significan lo mismo); y otras *desiguales, desemejantes, diferentes, ò de diversa especie.* Las iguales son las que dicen una misma relacion, ò habitud, como 2. á 1. item 6. á 3. item 2. á 6. porque en todas el antecedente dice relacion de doblado al consequente, y asi son duplas; de suerte, que las razones iguales tienen un mismo nombre: esto es, que todas las duplas son iguales, todas las triplas, todas las sesquialteras, &c.

Las razones desiguales son las que no dicen una misma relacion, ò habitud. Como la razon de 3. á 1. es desigual á la de 4. á 1. porque en aquella la relacion es de triplo, y en esta es de quadruplo: asimismo la razon de 2. á 3. es desemejante á la de 3. á 2. porque en aquella el respeto es de subsesquialtera, y en esta de sesquialtera: con que no tienen un mismo nombre.

Pero advierto, que no es lo mismo razon ingual, que razon de igualdad; ni razon desigual, que de desigualdad: porque la razon de igualdad, ò desigualdad es el respeto entre dos quantidades iguales, ò desiguales; pero la razon igual, ò desigual es la comparacion de dos, ò muchas

chas razones, en quanto tienen el mismo, ó diferente respeto; de suerte, que si se comparan 3. con 6. es razon de desigualdad; pero si comparamos la razon de 3. à 6. con la de 4. à 8. se dice que las tales razones son iguales, como aora veremos.

DE LA PROPORCION, Y PROPORCIONALIDAD.

272 Proporcion es el respeto, ò relacion de una razon à otra, con que es razon de razones; porque asi como un numero se compara à otro en quanto es mayor, igual, ò menor; tambien una razon se puede comparar à otra en quanto es mayor, menor, ò igual, y asi como la comparacion de los numeros se llama *Razon*, del mismo modo la comparacion de las razones se dice *Razon de razones, ò Proporcion.*

De modo, que las razones comparadas unas con otras, pueden ser mayores, menores, ò iguales; aquellas razones son mayores, que dicen mayor continencia, como la razon de 4. à 1. es mayor que la de 3. à 1. porque mayor continencia es la quadrupla de 4. à 1. que la tripla de 3. à 1. Aquellas razones son menores, que dicen menor continencia, como la razon de 2. à 1. respeto de la de 6. à 2. y aquellas son iguales, que tienen igual continencia, como la razon de 6. à 3. respeto de la de 2. à 1. porque entrambas son duplas; pues la relacion de una razon á otra, en quanto es mayor, menor, ò igual, se dice Proporcion.

Dirá alguno; si la razon es relacion, como puede aver una mayor que otra; porque el ser mayor, ò menor, es propio de la quantidad? Respondo, que es verdad que la razon es del genero de relacion; pero por la intima afinidad que tiene con la quantidad, participa tambien sus propiedades, como lo vemos en el peso, sonido, movimiento, y otras muchas cosas, que aunque no sean quantidades, pero se dicen mayores, ò menores.

Esta difinicion de la proporcion comprehende todas las comparaciones de las razones; y asi es mas universal que la de Euclides *lib. 5. defin. 4.* en donde solo define la proporcion que hay entre razones semejantes, diciendo, que la proporcion es *rationum similitudo*, una semejanza de razones; pero no hay por qué nos estrechemos á tan angostos terminos de tratar solo de la proporcion de razones semejantes, pudiendo comprehenderlas todas. Este ensanche debemos al P. Gregorio á S. Vincencio, de la Compañia de Jesus: que con singular agudeza fue el primero que trató esta materia.

De lo dicho hasta aqui se infieren dos cosas: La primera, que la proporcion se puede dividir en otros tantos generos, como la razon; y asi avrá proporcion multiplice, superparticular, &c. Como la razon de 15. á 2. es tripla de la de 2. á 1. esto es, la sexdupla es tripla de la dupla, porque 6. es triplo de 2. asimismo la razon de 2. á 1. es subsesquialtera de la de 3. á esto 1. es, la dupla, respeto de la tripla.

La segunda, que la proporcion pide quatro terminos; porque como está entre dos razones, y cada una tiene dos terminos, tendrá la proporcion quatro: verdad es, que bastan tres terminos materiales, quando un termino sirve de consequente en una razon, y de antecedente en otra; como en la proporcion de las razones de 8. á 4. y de 4. á 2. donde no hay mas que tres terminos materiales 8. 4. 2. porque el 4. hace oficio de dos; pero formales siempre son quatro terminos, que se llaman proporcionales.

273 La proporcion es en dos maneras, una continua, y otra discreta, ò no continua. La continua es, quando la misma razon hay del primer termino al segundo, que del segundo al tercero, como 27. 9. 3. porque de 27. á 9. hay razon tripla, y tambien de 9. á 3. y asi el un termino 9. hace oficio de dos, como queda dicho. La no continua es, quando no hay la misma razon del primer termino al segundo, que de este al tercero, como 8. 4. 6. 3. porque del 8. al 4. hay razon dupla, pero no del 4. al 6. Y aunque el un termino sea comun á las dos razones, como aqui 6. 4. 2. no por eso es continua, pues no hay la misma razon de 6. á 4. que de 4. á 2.

274 La proporcionalidad es el respeto de dos proporciones, y asi es razon de proporciones, ò razon de razones de razones; porque las proporciones se pueden comparar entre sí, en quanto una es mayor, igual, ò menor que otra, del mismo modo que se comparan las razones. De suerte, que la razon está entre dos numeros, la proporcion entre dos razones, y la proporcionalidad entre dos proporciones.

De donde se infiere, que la proporcionalidad requiere ocho terminos formales, porque está entre dos proporciones, de las quales cada una tiene quatro terminos; pero materiales pueden ser solos cinco, como en estos 2. 4. 8. 16. 32. donde los tres de enmedio hacen oficio de antecedentes, y consequentes. Tambien tiene la proporcionalidad otros tantos generos, como la razon, y como la proporcion, que por estos se explican en el numero siguiente.

DEL DENOMINADOR DE LA RAZON, PROPORCION, y proporcionalidad.

275 El denominador de una razon es una razon semejante, expresada

sada con los terminos mas claros que se puedan hallar. En esta explicacion comprehendo el denominador de la razon, proporcion, y proporcionalidad; porque como la proporcion, y proporcionalidad sean razones (273 y 274), definiendo al denominador de la razon, quedarán entendidos los otros denominadores. De modo, que lo que diré del denominador de la razon, se ha de entender tambien del denominador de la proporcion, y proporcionalidad.

Sucede muchas veces, que una razon está expresada con terminos muy grandes, de suerte, que facilmente no se puede conocer el respeto del antecedente al consequente; como esta 189 à 27. Y asi se necesita de denominador, que explique, y declare con terminos menores el dicho respeto, ò relacion, que será la razon de 7. à 1. por la qual claramente se conoce, que la razon de 189. à 27. es septupla.

Asimismo, la razon que ay entre la razon de 40. à 5. y la de 2. à 1. que es proporcion, no se puede conocer facilmente sin el denominador 4 à 1. el qual manifiesta que la proporcion es quadrupla; y lo mismo digo de la proporcionalidad.

Y porque el denominador de qualquier razon declara la continencia del antecedente en el consequente, ò de este en aquel; le llamó Euclides en la *definicion* 5. *del libro* 6. segun la inteligencia del Padre Clavio, *Quantidad de la razon*, porque enseña quan grande, ò pequeña sea la razon. Solo definió Euclides al denominador de la razon, no al de la proporcion, ni proporcionalidad. Porque como los antiguos no conocieron, ò no trataron de otra proporcion que de la de igualdad, la qual no necesita de denominador; por esto no trataron del denominador de la proporcion, ni proporcionalidad.

276 Siendo, pues el denominador una razon semejante à la razon de quien es denominador, que declara qual sea el respeto del antecedente al consequente, necesariamente ha de constar de terminos muy claros, que manifiesten el dicho respeto, ò relacion, y como ninguna razon puede tener terminos mas claros que la que tienen por consequente la unidad por ser la mas simple, y conocida en la Arithmetica; por esto el denominador ha de ser una razon semejante à la razon de quien es denominador, que tenga por consequente la unidad; y asi del denominador, de la razon de 40 à 5. es la razon de 8. à 1. porque claramente enseña que es octupla.

277 Y como qualquier numero, ò sea entero, ò quebrado, diga orden à lo menos implicito à la unidad (127), pues que, ò se compone de unidades, ò es parte, ò partes de la unidad; no es necesario que en el denominador se declare la unidad que es consequente; y asi el de-

nominador de la razon de 12. à 3. es 4. porque ya se entiende que es lo mismo que 4. á 1. Asimismo el denominador de la razon de 13. à 9. es 1. y $\frac{4}{9}$, que es lo mismo que 1. $\frac{4}{9}$ à 1. y asi de los demás. Con que para expresar el denominador no es menester poner dos terminos, sino solo el antecedente, dexando el consequente, que es la unidad.

Concluyo con que el denominador no necesita de otro denominador; porque como ha de ser la razon mas clara que aya entre todas las razones de la especie de la razon de quien es denominador, si huviera denominador de denominador, este no seria denominador, porque no seria el mas claro, supuesto que avria otro denominador que le declarase: v. g. el denominador de la razon de 80. à 40. ha de ser la razon mas clara que se halle entre todas la razones duplas; si huviera, pues, otra razon mas clara que el denominador, ella seria denominador: Luego el que por la suposicion es denominador en la verdad, no seria denominador, sino aquella razon mas clara: Luego el denominador no necesita de otro denominador, porque asi, el denominador del denominador seria el verdadero denominador.

A mas desto: Si el denominador necesitára de otro denominador, se daria denominador de denominador: luego el primero no seria denominador; porque se precederia en infinito, señalado denominador de denominador, y otra vez denominado de este denominador, &c. y asi no seria verdadero denominador, porque avria otro denominador, ò razon mas clara; la qual, segun la difinicion, seria el verdadero denominador.

DE LOS TERMINOS PROPORCIONALES.

278 Terminos, numeros proporcionales son los que componen la proporcion, los quales son quatro formales. (272) Y como la proporcion puede estar entre razones desiguales (272), no es necesario que los terminos proporcionales guarden una misma razon. Pero, porque los antiguos no conocieron sino la proporcion de iguales, que es la que difinió Euclides en la *difin. 4. del lib.* 5. diciendo que es semejanza de razones; siempre que hablaré de terminos proporcionales entenderé de los que componen proporcion de igualdad, mientras otra cosa no advirtiere en contrario.

279 Y asi quatro numeros son proporcionales, quando la misma razon ay del primero al segundo, que del tercero al quarto, como 8. 2. 12. 3 porque tanto del 8. al 2. como del 12. al 3. ay razon quadrupla; asimismo 4. 6. 9. son proporcionales; porque la misma raaon sub-

ses-

sesquialtera ay del 4. al 6. que del 6. al 6. El 6. hace oficio de antecedente, y consequente, porque la proporcion es continua.

280 Los numeros proporcionales se suelen expresar deste modo, como 4. à 2. asi 8. à 14. que es lo mismo que decir, que la misma razon ay de 4. à 2. que de 8. à 4. porque ambas son duplas. Estos terminos proporcionales son los de la regla de tres; porque no se busca otra cosa, que conocidos los tres primeros terminos, hallar el quarto proporcional. De los terminos proporcionales, el primero es semejante al tercero, y el segundo al quarto: esto es: el antecedente de una razon al antecedente de la otra, y el consequente al consequente, à quien Euclides en la *difin.* 11. *del lib.* 5. llama terminos *Homolgos*, ò semejantes; porque si el un antecedente es mayor, igual, ò mayor que su consequente, tambien el otro antecedente ha de ser mayor, igual, ò menor que su consequente.

281 Los terminos proporcionales se pueden comparar entre sí de seis modos, y siempre son proporcionales; es à saber Alternando, Invirtiendo, Componiendo, Dividiendo, Convirtiendo, y por igualdad, como lo demuestra Euclides en el libro 5. y nosotros en el capitulo siguiente.

282 Terminos proporcionales directos, son los primeros proporcionales que se ofrecen antes de hacer la inversion, alternacion, &c. como 8. á 6. asi 24. á 18. y esta se llama Proporcion directa.

283 Proporcion *Alterna*, ò permutada, es la comparacion del antecedente al antecedente, y consequente al consequente, como si son directamente proporcionales 6. à 3. como 10. à 5. serán alternando 6. á 10. como 3. á 5.

284 Proporcion *Inversa* es la comparacion de los consequentes á los antecedentes; como si son directamente proporcionales 6. á 3. como 10. á 5. serán invirtiendo 3. á 6. como 5. á 10.

285 Composicion de razon es la comparacion de la suma del antecedente, y consequente al mismo consequente; la suma se señala con esta señal † como si son directamente proporcionales 6. á 3. asi 10. á 5. serán componiendo como 6. † 3. á 3. asi 10. † 5. á 5. esto es, como 9. á 3. asi 15. á 5. A esta composicion de razon se pueden añadir otras dos; la primera composicion conversa, quando la suma del antecedente, y consequente se compara el antecedente, como 6. † 3. á 6. asi 10. † 5. á 10. esto es, como 9. á 6. asi 15. á 10. La segunda es composicion contraria, quando el antecedente se compara á la suma de antecedente, y consequente, como 6. á 6. † 3. asi 10. á 10. † 5. esto es, como 6. á 9. asi 10. á 15.

286 Division de razon, es, quando la diferencia del antecedente, y consequente se compara al mismo consequente; la diferencia se señala de este modo — como si son directamente proporcionales, como 4 à 3. asi 8. à 6. serán dividiendo como 4. — 3. à 3. asi 8.— 6. à 6. esto es, como 1. à 3. asi 2. à 6. pero es necesario que el antecedente sea mayor que el consequente. A esta division de razon se pueden añadir otras dos. La primera es divsion *Conversa*, quando se compara el consequente à la dicha diferencia, como 3. à 4. — 3. asi 6. 8. — 6. La segunda es division *Contraria*, quando se compara el antecedente con la diferencia del consequente, y antecedente: y asi el consequente ha de ser mayor, como si son directamente proporcionales como 3. à 4. asi 6. à 6. serán dividiendo contrariamente, como 3. à 4. — 3. asi 6. à 8. — 8. esto es, como 3. à 1. asi 6. à 2.

287 Conversion de razon, es, quando el antecedente se compara à la diferencia del antecedente, y consequente; como si son directamente proporcionales, como 4. à 3. asi 8. à 6. serán convirtiendo como 4. à 4. — 3. asi 8. à 8. — 6. esto es, como 4. à 1. asi 8. à 2. con que el antecedente necesariamente ha de ser mayor que el consequente.

288 La proporcion por igualdad, es, quando habiendo mas que dos numeros en una serie, como 18. 12. 6. y tomando otros tantos en otra serie 6. 4. 2. de suerte; que cada dos de ellos sean proporcionales, como 18. à 12. asi 6. à 4. y como 12. à 6. asi 4. 2. se quitan los medios, quedarán los extremos proporcionales, como 18. à 16. asi 6. à 2. y esta es la proporcion por igualdad, la qual puede ser en dos maneras, como ahora verémos.

18.	12.	6.
6.	4.	2.

Esta proporcion por igualdad se divide en *Ordenada*, y *Perturbada*, la ordenada, es, quando se guarda un mismo orden en los primeros dos numeros, que en los segundos, como en el exemplo antecedente. La perturbada, es quando se invierte el orden; como si es 18. à 12. asi 6. à 4. y como 12. à 6. asi 12. à 6. entonces quitando los medios quedarán los extremos proporcionales, como 18. à 12. asi 6. à 4.

18.	12.	6.
6.	4.	2.

Pero aqui se ha de advertir con cuydado, que no es lo mismo proporcion de igualdad, que proporcion por igualdad, porque aquella es la que está entre razones iguales, y esta es quando se quitan los medios, y quedan los extremos proporcionales, como está dicho.

289 **Terminos** *reciprocos* son los dos medios, y los dos estremos de quatro numeros proporcionales, como en esta proporcion 8. à 2. como 4. à 1. los terminos reciprocos son los medios 2. y 4. y tambien los estremos 8. y 1.

DE LA RAZON COMPUESTA.

290 *Razon Compuesta*, es la que se compone de otros por multiplicacion, como un numero de otro. Euclides la definió en la *defin.* 5. *del lib.* 6. por los denominadores, que son las quantidades de las razones, diciendo que la razon es compuesta quando las quantidades de las razones multiplicadas entre sí hacen alguna razon, ò segun la version de Zamberto, hacen la quantidad de alguna razon que es lo mismo que decir, que su denominador es el producto de los denominadores de las razones de quien se compone; como si son dos razones 8. à 2. y 9. à 3. cuyos denominadores 4. y 3. multiplicados hacen 12. pues la razon cuyo denominador es 12. que es la *duodecupla*, ò de 12. à 1. (276) es la compuesta de las razones de 8. à 2. y de 9. à 3. De suerte, que asi como el numero 12. es compuesto de la multiplicacion de 4. por 3. del mismo modo la razon duodecupla se compone por la multiplicacion de las razones quadrupla, y tripla.

Asimismo, si se proponen las razones de 4. à 1. y de 3. à 7. y de 5. à 2. cuyos denominadores 4 $\frac{3}{7}$, y 2. $\frac{1}{2}$, se multiplican entre sí, saldrá el denominador 4. $\frac{2}{7}$ de la razon compuesta dellas; con que la razon quadrupla superbiparciente septimas, que corresponde al denominador 4. $\frac{2}{7}$, será compuesta de las razones de 4. à 1. y de 3. à 7. y de 5. à 2.

Esta multiplicacion, se puede hacer de otro modo sin los denominadores, multiplicando las mismas razones, y el producto será la razon compuesta por multiplicacion; como si se multiplican las razones de 8. à 2. y de 9. à 3. escritas en forma de quebrado, asi: $\frac{8}{2}$, $\frac{9}{3}$, multiplicando antecedente por antecedente, y consequente por consequente, saldrá la razon compuesta 72. sextos, ò de 72. à 6. que es duodecupla. Asimismo, multiplicando las razones de 4. à 1. de 3. à 7. y de 5. à 2. asi: $\frac{4}{1}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{2}$, saldrá la razon compuesta 60. 14. avos, que es quadrupla superbiparciente septimas.

La razon desto es manifiesta; porque el denominador ha de ser una razon semejante à la que es denominador, que tenga por consequente la unidad (276) la qual se omite, porque no aumenta la multiplicacion; pero si se multiplican los denominadores, teniendo la unidad por consequente, como en el primer exemplo $\frac{4}{1}$ por $\frac{3}{1}$ (poniendole en forma de que-

quebrados, pues como luego dirémos, el multiplicar razones es lo mismo que multiplicar quebrados) saldrá el denominador $\frac{12}{1}$ de la razon compuesta, como consta por la definicion de Euclides. Y como los denominadores sean las mismas razones, ò semejantes à aquellas de quien son denominadores, lo mismo será multiplicar los denominadores, que las mismas razones de quien son denominadores. Luego multiplicando las mismas razones componentes, sale la razon compuesta.

De aqui se infiere, que si hay una serie de numeros, qualesquiera que sean, como 6. 8. 4. 3. 12. la razon del primero 6. al ultimo 12. es compuesta de las razones intermedias; esto es, la razon de 6. á 10. se compone de las razones de 6. à 8. de 8. à 4. de 4. à 3. y de 3. à 12. porque si se escriben en forma de quebrados, asi $\frac{6}{8}\ \frac{8}{4}\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{12}$, y se multiplican los antecedentes entre sí, y tambien los consequentes, saldrá la razon de 576. à 1152. que es semejante à la compuesta de 6. à 12. porque como los antecedentes son los mismos que los consequentes, fuera el 6. y el 12. si se multiplican los antecedentes 3. 4. 8. entre sí, producirán el mismo numero 96 que multiplicando los mismos consequentes 3. 4. 8. y como el antecedente 6. se ha de multiplicar por el 96. que es el producto de los demás antecedentes, y el consequente 12. se ha de multiplicar por el mismo numero 96. que es el producto de los demás consequentes, es manifiesto, que un mismo numero 96. multiplica à los numeros 6. y 12. Luego produce numeros proporcionales 576. y 1152. (71) Luego en qualquier série de numeros, la razon de los extremos es compuesta de las razones de los medios.

291 Si las razones compuestas son iguales, ò semejantes, entonces la razon compuesta se dice *Duplicada*, *Triplicada*, *Quadruplicada*, &c. segun el numero de las razones de que se compone; y asi si son dos razones semejantes 8. à 1. y 24. à 3. cuyos denominadores 8. y 8. multiplicados hacen el denominador 64. à 1. diga que esta razon de 64. à 1. es duplicada de la razon octupla, porque se compone de dos octuplas por multiplicacion.

Asimismo, si son tres razones iguales 2. à 1. — 4. à 2. — ò à 3. cuyos denominadores 2. 2. y 2. multiplicados hacen 3. digo que la razon octupla es triplicada de la dupla, porque multiplicando tres veces la dupla hace la octupla; y asi de la quadruplicada, quintuplicada, &c.

La razon *Subduplicada*, *Subtriplicada*, *Subquadruplicada*, &c. es aquella de la qual se compone la *Duplicada*, *Triplicada*, &c. Y asi, en el exemplo antecedente la razon dupla es subtriplicada de la octupla; porque de la dupla, tomada tres veces por multiplicacion, se compone la octupla.

Es-

292 Esta composicion de razon, y sus especies, se entienden mejor en los terminos continuamente proporcionales. Sean, pues, A. B. C. D. E. por los quales están significadas diferentes series de numeros, proporcionales, como parece en el exemplo, donde la razon de A. à C. es duplicada de la razon de A. à B. porque como la razon de A. à B. es la misma que la de B. à C. por ser continuamente proporcionales, componiendose la razon de A. à C. de las razones de A. à B y de á B. à C. es lo mismo que si constará de la razon de A. à B. dos veces, ò de dos razones de A. à B. y por eso se dice duplicada.

A.	B.	C.	D.	E.
81.	27.	9.	3.	1.
2.	4.	8.	16.	32.
4.	4.	4.	4.	4.

La razon A. à B. será subduplicada de la razon A. C. porque dos razones de A. à B. componen la dicha razon A. à C. De suerte, que asi como comparando un numero que comprehenda à otro dos veces, como 4. à 2. la razon se dice *Dupla*; y comparando el 2. al 4. se llama *Subdupla*; tambien quando una razon se compone de dos iguales, se dice *Duplicada*; y cada una de estas dos se llama *Subduplicada*, respeto de la *Duplicada*.

Asi mismo, la razon de A. à D. es triplicada de la de A. à B. porque se compone de las tres razones A. à B. B. à C. C. à D. que son iguales entre sí, que es lo mismo que componerse tres veces la razon de A. à B. Y la razon de A. à B. es subtriplicada de la A. à D. De modo, que asi como el 6. porque contiene tres veces al 2. es triplo del 2. y el mismo 2. porque es contenido en el 6. tres veces, se dice subtriplo del 6. del mismo modo, porque la razon de A. à D. contiene tres razones iguales à la razon de A. à B. es triplicada de ella, y la razon de A. à B., porque es contenida tres veces en la razon de A. à D. será subtriplicada; y asi de la quadruplicada, quintuplicada, &c.

293 Esta materia es muy dificultosa, y pide grande atencion. Solo advierto, para que los principiantes no se equivoquen, que no es lo mismo razon *Dupla*, que *Duplicada*; ni *Tripla* que *Triplicada*, &c. porque la razon dupla es quando el antecedente contiene dos veces al consequente; (256) y la duplicada es, quando una razon (sea la que fuere, dupla, tripla, sesquialtera, &c.) se toma dos veces, para componer à otra; (291) y asi, la razon de 81. à 9. es duplicada de la de 81. à 27. aunque se componga de dos triplas. Y la razon de 2. à 32. es quadruplicada de la de 2. à 4. aunque se compone de qua-

PROPOSICION III.

SI DOS RAZONES SON IGUALES, O SEMEJANTES, à una tercera, tambiem son iguales, ò semejantes entre sí.

297 ESta proposicion es la 11. *del lib.* 5. de Euclides, la qual es puro axioma, y no nesesitá de prueba, sino que por sí misma es manifiesta; porque si dos razones son iguales á una tercera, tambien serán iguales entre sí; como si dos numeros son iguales á un numero tercero, serán tambien iguales entre sí. A mas desto, el denominador de qualquier razon numerica es un numero solo, (277) y los denominadores de las razones iguales son numeros iguales; porque enseñando la quantidad de las razones, si estas son iguales, tambien lo serán sus denominadores. Pues si dos numeros, por ser iguales á un tercero, son iguales entre sí; luego tambien las razones, de quien los tales numeros son denominadores, por ser iguales á una tercera, serán iguales entre sí.

PROPOSICION IV.

SI QUATRO NUMEROS SON PROPORCIONALES, el produćto de los medios es igual al produćto de los estremos, y al contrario.

298 ESta proposicion es la 19. *del lib.* 7. de Euclides, y el fundamento de la regla de tres. Sean proporcionales A. B. C. D. Digo, que multiplicando el primero A. por el quarto D. sale el produćto igual al produćto de la multiplicacion del segundo B. por el tercero C. esto es, multiplicando 8. por 3. sale 24. y multiplicando 4. por 6. tambien sale 24.

A.	B.	C.	D.
8.	4.	6.	3.

Supongo, pues, que multiplicando A. por D. sale AD. multiplicando B. por C. sale BC. y multiplicando A. por C. sale AC. Esto supuesto, porque A multiplica á C. y D. tendrán los produćtos AC. AD. la misma razon que C. á D. (71) Asimismo, multiplicando C. á A. y B. tendrán los produćtos AC. AB. la misma razon que A. á B.

AD.	AC.	BC.
24.	48.	24.

y pues las razones A. á B y C. á D. son iguales por la suposicion, serán tambien iguales las razones AC. á AD. y AC. à BC. y porque un numero AC. dice una misma razon á dos numeros AD. BC. serán estos iguales. (294) Luego el producto de los medios es igual al producto de los estremos.

299 Al contrario. Si los productos de los estremos, y medios, son iguales, serán los quatro numeros proporcionales: porque el producto AC. de A. por C. tendrá una misma razon á AD. BC. (295) la qual será igual á la de A. á B. y de C. á D. porque proviene de la multiplicacion como se dixo antes. Luego A. es á B. como C. á D. que es ser proporcionales.

Consectario.

300 Si tres numeros, como 8. 4. 2. fueren continuamente proporcionales, el producto de los estremos es igual al quebrado del medio; esto es, al producto del medio, multiplicado por sí mismo; porque en los continuos proporcionales, el medio se toma dos veces, ó hace oficio de dos terminos; (273) y asi, serán 8. 4. 4. 2. Luego el producto de 8. por 2. es igual al producto de 4. por 4. que es el quebrado de 4. y esta es la *propos.* 20. *del lib.* 7. de Euclides. Y al contrario. Si el quebrado del medio es igual al producto de los extremos, los numeros serán continuamente proporcionales.

PROPOSICION V.

SI DE QUATRO NUMEROS FUERE MAYOR LA RAZON del primero al segundo, que del tercero al quarto, tambien el producto de los estremos será mayor que el producto de los medios, y al contrario; pero si fuere menor, será tambien el producto menor, y al contrario.

301 ESta proposicion contiene quatro partes. La primera: Sean quatro numeros señalados con las letras A. B. C. D. y sea la razon de A. á B. mayor, que la de C. á D. Digo, que el producto AD. de los estremos, será mayor que el producto BC. de los medios: porque multiplicando A. á C. y D. produce AC. AD. en la misma razon de C. á D. (71) A. asimismo, multiplicando C. á A. y B. produce AC. BC. en la misma razon

A.	B.	C.	D.
12.	3.	6.	2.
AD.		AC.	BC.
24.		72.	18.

zon de A. à B. Con que la razon de AC. à BC. es igual à la de A. à B. y la razon de AC. à AD. igual à la de C. à D. Y como por la suposicion, la razon de A. à B. sea mayor que la de C. à D, será tambien la razon de AC. à BC. mayor que la de AC. à AD. Luego AD. es mayor que BC. ò BC. menor que AD. (296)

302 La segunda es conversa de la primera. Si el producto AD. de los extremos A. y D. es mayor que el producto BC. de los medios B y C. será mayor la razon de A. B. que la de C. à D. porque siendo AD. mayor que BC. será la razon de AC. à BC. (que es la misma que la de A. à B.) mayor que la de AC. à AD. (que es la misma que la de C. à D.) por lo que está demostrado arriba numero 296.

303 La tercera. Si de quatro numeros A. B. C. D. la razon de A. à B. fuere menor que la de C. à D. será tambien el producto AD. de los extremos menor que el producto BC. de los medios; porque, como está dicho antes, AC. à BC. tiene la misma razon que A. á B. y AC. á AD. tiene la misma razon que C. á D. Y como la razon de A. á B. es menor que la de C. á D. será tambien la razon de AC. á BC. menor que la de AC. á AD. Luego AD. es menor que BC. (296)

A.	B.	C.	D.
3.	4.	8.	2.

AD.	AC.	BC.
3.	24.	32.

304 La quarta es conversa de la tercera. Si el producto AD. de los extremos, es menor que el producto BC. de los medios, será la razon de A. B. menor que la de C. á D. porque la razon de AC. á BC. que es la misma que la de A. á B. será menor que la de AC. á AD. que es la misma que la de C. á D.

Escolio.

305 En esta, y en la proposicion antecedente hemos señalado los productos con las mismas letras juntas de los numeros multiplicantes; como para denotar el producto de A. 4. por B. 6. se ha puesto el producto AB. 24. lo qual es de grandisima conveniencia; porque facilmente se conoce de que numeros provino el tal producto, los quales son los mismos que indican las letras; y asi, quando veo el producto AB. sin mas discurso que solo el verle, conozco que provino de la multiplicacion del numero significado por el numero expresado por B.

Quando veo los productos AB. AD al instante conozco que el numero significado por A. multiplicó los numeros B y D. y asi que los productos AB. AD tienen la misma razon que B. y D. que son las letras no comunes à los dos productos. Asimismo, los productos AB. AD. AE. provienen de la multiplicacion de A. por B. C. D. y asi tienen entre sí la razon de B. C. D. que son las letras no comunes, ò que no se hallan en todos los productos.

Quando un numero se multiplica por sí mismo una, ò muchas veces, se pone tantas veces quantas se multiplican; y asi; multiplicando A. por sí mismo, será el producto AA. Si otra vez se multiplica, será AAA. y asi los productos AA. AB. tendrán la razon A. à B. Tambien los productos ABB. BBB. tendrán la razon de A. à B. &c. Deste modo de expresar los productos usaremos algunas veces.

PROPOSICION VI.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *FUEREN PROPORCIOnales, tambien lo serán alternando.*

306 SEan proporcionales A. B. C. D. Digo, que tambien serán proporcionales, alternando como A. à C. asi B. à D. porque quando de quatro numeros el producto de los extremos es igual al de los medios, los numeros son proporcionales (299); pues como hecha la alternacion no se muden los medios, ni los extremos, sino en el lugar, quedarán los mismos productos que antes; y asi serán proporcionales.

A.	B.	C.	D.
4.	1.	8.	2.
A.	C.	B.	D.
4.	8.	1.	2.

Este es el modo de comparar los proporcionales que explicamos arriba (283), y demuestra Euclides en la *prop.* 13. *del lib.* 7.

PROPOSICION VII.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *SON PROPORCIONAles, tambien lo serán invirtiendo.*

307 POrque haciendo la inversion serán B. A D. C. con que los medios se hacen extremos, y los extremos medios: luego siempre el producto de los extremos es igual al de los medios: luego son proporcionales. (299) Y esta es la comparacion que explicamos arriba. (284)

A.	B.	C.	D.
4.	1.	8.	2.
B.	A.	D.	C.
1.	4.	2.	8.

PROPOSICION VIII.

LAS PARTES SEMEJANTES TIENEN ENTRE SI LA misma razon que sus todos.

308 ESta proposicion es casi la *del lib.* 5. de Euclides aplicada à numeros. Sean 2. y 4. partes semejantes, respeto de los todos 6. y 12. Digo, que la misma razon ay de la parte 2. á su semejante 4. que del todo 6. al otro 12. Porque como una parte aliquota es semejante á otra aliquota, quando se contiene en su todo tantas veces como la otra en el suyo (28); ò una parte aliquanta es semejante á otra aliquanta, quando contiene tantas partes aliquotas semejantes de su todo, como la otra del suyo (29), tendrán las partes semejantes la misma razon á sus todos; esto es, será como 2. á 6. asi 4. á 12. porque los todos contendrán proporcionalmente á sus partes semejantes; luego alternando (306) como la parte 2. á su semejante 4. asi el todo 6. al todo semejante 12.

309 Y si una parte semejante es á la otra semejante, como un todo á otro: tambien la comparte, ò residuo será al otro residuo, como el un todo al otro. Como si 2. es á 4. como 6. á 12. tambien serán proporcionales con los mismos todos los residuos de 2. hasta el todo 6. que es 4. y de la parte 4. hasta 12. que es 8. esto es, será como 4. á 6. asi 8. á 12. Porque los residuos tambien son partes semejantes, y esta es la *prop.* 11. *del lib.* 7. de Euclides.

Conseƈtarios.

310 Si á dos, ò mas numeros, como al 6. y 8. se añaden numeros proporcionales como 3. y 4. las sumas 9. y 12. tendrán la misma razon; esto es, serán proporcionales como 6. á 8. asi 9. á 12. Porque siendo los numeros añadidos proporcionales con los numreros dados, serán partes semejantes, respeto de las sumas. Supuesto que los numeros dados 6. y 8. son partes semejantes, y las compartes 3. y 4. que son los numeros añadidos son tambien semejantes; luego los todos, ò suma tienen la misma razon.

Pero si los numeros añadidos no son proporcionales, las sumas no tendrán la misma razon, por no ser los dichos numeros añadidos partes semejantes. Y asi, si dos numeros desiguales, como á 6. y 8. se añaden numeros iguales como 4. y 4. las sumas 10. y 12. no guardarán la misma razon, porque los numeros añadidos tampoco tienen la misma azon.

311 Si de dos, ò mas numeros, como de 8. y 24. se restan numeros proporcionales, como 2. y 6. los residuos 6. y 18. tendrán la misma razon, porque los numeros restados son semejantes; luego los residuos tambien son semejantes, y asi tienen la misma razon.

Pero si los numeros restados no son proporcionales, las restas, ò residuos tampoco son proporcionales, por no ser partes semejantes; con que si de dos numeros desiguales, como de 8. y 24. se restan iguales 4. y 4. ò al contrario, las restas 4. y 20. no son proporcionales, porque los numeros restados no tienen la misma razon.

312 Si dos, ò mas numeros, como 8. y 3. se multiplican por otro qualquier numero 6. los productos 48. y 18. guardan la misma razon; porque los numeros multiplicados 8. y 3. son partes semejantes aliquotas de los productos, los quales son todos, y asi tienen la misma razon. Y esta es la *prop. 17. del lib. 7.* de Euclides.

De aqui se infiere un modo facil para aumentar los terminos de qualquier razon, ò para dar otros terminos en la misma razon, y es multiplicarles por un qualquier numero; como si los terminos de la razon de 4. à 3. se han de hacer mayores, quedando la misma razon, multiplicoles por qualquier numero 5. y saldrán 20. y 15. en la misma razon: y asi, dada una razon, como de 4. à 3. multiplicando por qualquier numeros, saldrán otras razones iguales.

313 Si dos, ò mas numeros, como 48. y 18. se parten por un qualquier numero 6. los quocientes 8. y 3. tienen la misma razon; porque los quocientes son partes aliquotas semejantes, respeto de los todos, ò numeros dividendos 48. y 18.

De aqui nace un modo facil para disminuír los terminos de qualquier razon, quedando ella la misma, ò igual, y es partir los dichos terminos por un qualquier numero; como para disminuír los terminos de la razon de 12. à 6. dividolos por 2. y salen 6. à 3. en la misma razon. Si no se pueden partir enteramente, tampoco se podrán disminuír.

Con que sumando, ò restando numeros proporcionales con otros proporcionales; ò multiplicando, ò partiendo proporcionales por otro qualquier numero, siempre nacen numeros proporcionales.

PROPOSICION IX.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *SON PROPORCIONAles, tambien lo serán componiendo.*

314 Porque componiendo serán como A. ✱ B. à B. asi C. ✱ D. á D. (286); luego B. y D. son partes semejantes, respeto de A. ✱ B. y de C. ✱ D. luego son proporcionales. (308) A mas desto A. y C. tienen la misma razon que B. y D. (306): luego las sumas A. ✱ B. y C. ✱ D. tiene la misma razon à las partes B. y D. (310). Esta es la *prop.* 18. *del lib.* 5. de Euclides.

A.	B.	C.	D.
8.	12.	4.	6.

PROPOSICION X.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *SON PROPORCIONAles, tambien lo serán dividiendo.*

315 Porque dividiendo serán como A-B. à B. asi C-D. à D. (286) Luego, ò A-B. y C-D. son partes semejante, respeto de B. y D., ò al contrario B. y D. son partes semejantes, respeto de A-B. y de C-D. (quando son iguales no tiene dificultad). Luego son proporcionales la diferencia de A. y B. que aqui es 4. á B. y la diferencia de C. y D. que aqui es 2. à D. Y esta es la *prop.* 17. *del lib.* 5. de Euclides, aplicada à numeros.

A.	B.	C.	D.
10.	6.	5.	3.

PROPOSICION XI.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *SON PROPORCIONAles, tambien lo serán convirtiendo.*

316 Porque convirtiendo serán como A. à A-B. asi C. à C.-D. (287). Luego, ò A. y B. son partes semejantes, respeto de A-B. y C-D. ò al contrario (quando son iguales no hay dificultad). Luego son proporcionales.

A.	B.	C.	D.
8.	3.	16.	6.

PROPOSICION XII.

SI FUEREN MUCHOS NUMEROS A. B. C. *Y OTROS tantos* E. D. F. *de suerte que cada dos sean proporcionales, tambien los extremos* A. E. C. F. *serán por igualdad de razon proporcionales.*

317 SEan tres numeros A. B. C. y otros tantos E. D. F. de suerte que sean proporcionales como A. á B. asi E. à D. y como B. á C. asi D. á F. Digo, que quitando los medios, quedarán los extremos proporcionales, como A. á E. asi C. á F. porque siendo proporcionales A. á B. como E. á D. serán tambien alternando como A. á E. asi B. á D. (306). Y porque son proporcionales como B. á C. asi D. á F. lo serán tambien alternando como B. á D. asi C. á F. Con que la razon de B. á D. será igual á las razones de A. á F. y de C. á F. Luego estas son iguales entre sí (297); esto es, será A. à E. como C. à F. y esta es la *prop.* 14. *del lib.* 7. de Euclides.

A.	B.	C.
4.	6.	2.
E.	D.	F.
8.	12.	4.

PROPOSICION XIII.

EN LOS NUMEROS PROPORCIONALES, LA SUMA, ò diferencia de los antecedentes, à la suma, ò diferencia de los consequentes, tiene la misma razon que un antecedente à su consequente.

318 SEan proporcionales A. á C. como B. á D. y B. á D. como E. á F. Digo, que la suma P. de los antecedentes, á la suma Q. de los consequentes, tiene la misma razon que un antecedente E. á su consequente F. Porque serán alternando como A. á B. asi C. á D. (306), y componiendo como A. ✻ B. á B. asi C. ✻ D. á D. (314); y como sea alternando como B. á E. asi D. á F. será componiendo como A. ✻ B. ✻ E. á E. asi C. ✻ D. ✻ F. á F. Luego la suma de los antecedentes á la suma de los consequentes, es como un antecedente E. á su consequente F.

A.	8.	C.	12.
B.	2.	D.	3.
E.	4.	F.	6.
P.		Q.	
41.		21.	

319 Y si los numeros A. B. C. D. son proporcionales; tambien lo serán la diferencia E. de los antecedentes, à la diferencia F. de los consequentes, como un antecedente C. al consequente D. porque serán alternando como A. à C. asi B. à D. y dividiendo como A - C. à C. asi B - D. à D. esto es, como la diferencia E. al antecedente C. asi la diferencia F. al consequente D. Esta proposicion es casi la 12. del 7. de Euclides.

A,	12.	B.	24.
C,	8.	D.	16.
E.	4.	F.	10.

PROPOSICION XIV.

SI QUATRO NUMEROS SON PROPORCIONALES, LA suma del mayor, y menor serà mayor que la suma de los otros dos.

320 SEan proporcionales 2. 8. 1. 4. Digo, que la suma 9. de mayor 8. y menor 1. es myor que la suma 6. de los otros dos, 4. y 2. Dispónganse los terminos proporcionales, alternando, ò invirtiendo, de modo que los dos numeros mayores se comparen por una parte, y los dos menores por otra, asi 2. à 1. como 8. à 4. Hecho esto, si restamos los dos numeros menores 2. y 1. de los mayores 8. y 4. quedarán las diferencias 6. y 3. en la misma razon, (311) y asi el 6. será numero mayor que el 3. Consideremos ahora quatro numeros; los primeros dos son los proporcionales menores 2. y 1. y los otros dos son los restados del 8. y 4 que tambien son 2. y 1. Pues si sumamos el 2. de los proporcionales, con el 1. de los restados, la suma 3. será igual à la suma 3. del 1. de los proporcionales, con el 2. de los restados; y si à estas sumas iguales añadimos las diferencias 6. y 3. serán 9. y 6. y porque la diferencia 6. es mayor que la diferencia 3. la suma à que se añadiere el 6 hará mayor numero que la à que se añadiere el 3. Con que la suma del maximo, y minimo es 9. mayor, que la de los otros que es 6. Esta es la *prop.* 25. *del lib.* 5. de Euclides, aplicada à numeros.

Consectarios.

321 Si fueren tres numeros 8. 4. 2. continuamente proporcionales, la suma 10. del mayor 8. y menor 2. será mayor que el duplo del 4. porque el 4. se repite dos veces, asi 8. 4. 4. 2. y como la suma del maximo, y minimo es mayor que la suma de los otros dos numeros, será mayor que el duplo del quatro, ò que la suma de dos quartos. Y lo mismo es de qualquiera otros tres numeros continuamente proporcionales.

Los

322 Los nùmeros maximo, y minimo siempre son medios, ò extremos de los quatro proporcionales; porque sean A. B. C. D. como la misma razon hay de A. à B. que de C. à D. si A. es mayor que B. tambien C. será mayor que D. y si menor, tambien menor. Luego si A. es el numero maximo, D. será el minimo; y si B. es el maximo, C. será el minimo. Asimismo, si A. es el minimo, será D. el maximo; y si B. es el minimo, será C. el maximo. Luego el maximo, y minimo, ò son los medios B. y C. ò los extremos A. y D.

A.	B.	C.	D.
5.	7.	15.	21.

PROPOSICION XV.

LAS RAICES DE QUALQUER ESPECIE DE RAZON son numeros entre sí primos, y al contrario.

323 RAíces de una razon son los numeros minimos enteros, en que se puede expresar aquella razon. (269) Sean, pues los minimos términos de la razon superparticular 3. y 2. Digo, que son numeros entre sí primos; porque si no son primos, han de ser compuestos; luego les ha de medir algun numero primero. (36) Dividanse, pues, el 3. y 2. por aquel numero primo (si puede ser) los quocientes tendrán la misma proporcion, (313) y serán menores que 3. y 2. Luego estos serán los minimos de la razon superparticular por la suposicion, y no lo serán porque hay otros, lo qual es imposible que sean minimos, y no minimos: luego no tienen medida por quien se puedan dividir; y asi serán entre sí primos. Y esta es la *prop. 24. del lib. 7.* de Euclides.

324 Al contrario. Si son numeros entre sí primos, serán los minimos de aquella especie de razon; porque no se podrán dividir por otro numero enteramente, pues no tienen medida comun: luego son minimos en aquella especie de razon. Y esta es la *prop. 23 del lib. 7.* de Euclides.

PROPOSICION XVI.

HALLAR EL DENOMINADOR DE QUALQUIER RAZON.

325 DIvidase el antecedente por el consequente, y el quociente será el denominador. Y asi el denominador de la razon de 10. à 2. es 5 El denominador de la razon de 8. à 3. es 2. y dos tercios. El de 3. à 5. es tres quintos. El de 15. à 6. y dos tercios, es 2.

y un quinto. El de 5. à 27. es 5. 27. avos: y asi de los demás. Porque el denominador ha de enseñar la razon del antecedente al consequente; esto es, quantas veces el antecedente contiene, ò es contenido en el consequente; y ha de tener la misma razon à la unidad, que el antecedente al consequente, como se dixo arriba; pues por la division se manifiesta la continencia del antecedente en el consequente, ò de este en aquel; y el quociente tiene la misma razon à la unidad, y que el dividiendo al divisor. (79) Luego partiendo el antecedente por el consequente, se sabe el denomindor.

Observaciones.

326 El denominador de la razon de igualdad siempre es la unidad. El de la razon de mayor desigualdad siempre es entero solo, ò entero, y quebrado. El de la razon de menor desigualdad siempre es quebrado.

327 Siempre que en el denominador huviere algun quebrado, se ha de reducir à los mismos terminos, para que deste modo sea el denominador facilmente conocido.

328 Quando el denominador de alguna razon es quebrado, el numerador, respeto del denominador del quebrado, señalará la relacion del antecedente al consequente; porque el numerador al denominador tiene la misma razon, que el quebrado à la unidad. (134) Y asi el numerador al denominador tiene la misma razon, que el antecedente al consequente.

PROPOSICION XVII.

CONOCER LA RAZON QUE DOS NUMEROS tienen entre sí.

329 Por el denominador conocerémos la quantidad de las razones; porque aquellas razones son iguales, que tienen iguales denominadores. Aquella es mayor que otra, que tiene mayor denominador, y al contrario; y asi la razon de 12. à 5 es mayor que la de 7. à 6. porque el denominador 2. y dos quintos de aquella, es mayor que el denominador 1. y un sexto desta.

330 Dividase el mayor numero por el menor, y el quociente enseñará la razon, segun lo que se dixo en la division de las razones desde el n. 256. Pero con esta diferencia, que en las razones de menor desigualdad se ha de añadir la particula *sub*. Y asi, la razon de 35. à 4. es noncupla; porque partiendo 36. por 4. salen 9. en el quociente. Si fuere la razon de 4. à 36. que es de menor desigualdad, seria subnoncupla.

La

La razon de 81. à 90. es subsesquinona, porque partiendo 90. à 81. caben à 1. y 9. 81. avos, ò un noveno; y si la razon fuera de mayor desigualdad de 90. á 81. seria sesquinona. (257)

Asimismo, la razon de 15. á 4. es tripla supertriparciente quartas; porque dividiendo 15. por 4. caben al quociente 3. y tres quartos; pues por los 3. enteros se dice tripla, y por los tres quartos, que es parte aliquanta, se llama, supertriparciente quartas. (258) Si fuera de menor desigualdad de 4. á 15. sería subtripla supertriparciente quartas.

La razon de 35. á 7. es quintupla, porque dividiendo 35. por 7. caben á 5. y si fuera de 7. á 35. sería subquintupla.

Del mismo modo, la razon de 41. á 8. es quintupla sesquioctava, porque dividiendo salen 5. y un octavo; y si fuera de 8. á 41. seria subquintupla sesquioctava.

La razon de 13. á 54. es subquadrupla subperbiparciente decimas tercias, porque partiendo el 54 por el 12. caben á 4. y 2. 13. avos; y porque se compára el menor con el mayor, se añade la particula *sub.*

La razon desto es, porque partiendo el mayor numero por el menor se conoce la continencia del menor en el mayor, y por consiguiente está manifiesta la razon de un numero á otro; solo con advertencia, que si el menor se compára al mayor, se ha de añadir la particula *sub*, para denotar que es razon de menor desigualdad; pues esta, y la de mayor desigualdad tienen los mismos nombres; diferenciandose solamente en tener la particula *sub.*

PROPOSICION XVIII.

HALLAR LOS NUMEROS DE QUALQUIER RAZON.

331 ESta proposicion es inversa de la precedente, porque en aquella se dá nombre à la razon que tienen los numeros, y en esta se buscan los numeros correspondientes al nombre de la razon; para lo qual es menester tener en la memoria lo que se dixo en division de las razones, desde el num 256.

Si la razon que se ha de señalar en numeros es de las especies de multiplice, se tomará el numero que expresa el nombre por antecedente, y por consequente la unidad: Como para señalar una tripla, tomese 3. por antecedente, y 1. por consequente, y será la razon de 3. á 1. la que se busca. Si quiero una noncupla, y será la razon de 9. á 1. Si una vigecupla, será al razon de 20. á 1. y asi de las demás. Pero si la razon ha de ser de las submultiplices, se hará al contrario, tomando la unidad por antecedente, y el numero expresado en la razon que se pide por consequente: como una subsextupla será de 1. à 6. mas una subdecupla será de 1. à 10. &c.

Quando la razon que se pide en numero, es de las especies de superparticular, tomese por consequente el numero que se nombra; y por antecedente un número que sea una unidad mayor: Como para señalar en numeros una sesquiquinta, tomese 4 por consequente, y 5. por antecedente, y será la razon de 5. á 4. Si se ha de dar una sesquinona, será de 10. á 9. Si una sesquivigesima, será de 21. á 20. Pero si ha de ser de las subsuperparticulares, se tomará por antecedente el numero nombrado, y por consequente un numero una unidad mayor; y asi, la razon susbsesquialtera será de 2. à 3. la subsesquidecima será de 10 à 11. &c.

Si la razon ha de ser de las superparcientes, porque tiene dos nombres, (258), sumense los dos numeros expresados por los dos nombres, y será el antecedente, cuyo consequente es el numero significado por el segundo nombre: Como para señalar una supertriparciente quartas, juntando 3. y 4. será 7. el antecedente, y 4. el consequente; esto es, de 7. à 4. para dar una superdecuparciente decimas septimas, juntando 10. y 17. será 27. el antecedente, y 17. el consequente. Para señalar una superquadriparciente nonas, será de 13. à 9. Pero si es de las subsuperparcientes, se hará al contrario; como una subsuperbiparciente undecimas, será de 11. à 13. &c.

En las multiplices superparticulares multipliquense los numeros significados por las dos partes, y al producto añadale una unidad, y será el antecedente, cuyo consequente es el numero de la segunda parte de la razon; y asi una dupla sesquitercia será de 7. à 3. porque los numeros expresados son 2. y 3. los quales multiplicados, y al producto añadida una unidad, hacen 7. que es el antecedente, y el consequente es el 3. señalado por el nombre sesquitercia. Asimismo, la razon sextupla sesquinona será en numeros de 55. à 9. porque multiplicando 6. por 9. salen 54. y 1. son 55. que es el antecedente, cuyo consequente es 9. Si la razon es submultiplice superparticular, se comparará el menor numero con el mayor; y asi, la razon subsextupla sesquinona será de 9. à 55.

En las multiplices superparcientes, se multiplicará el numero señalado por el nombre dupla, tripla, &c. por el numero significado por las palabras tercias, quartas, &c y al producto se añadirá el numero expresado por las voces, bi, tri, quadru, &c. la suma será el antecedente, cuyo consequente es el numero señalado por los nombres tercias, quartas, &c. Y asi la razon quadrupla superbiparciente septimas, será de 30. á 7. porque multiplicando 4. por 7. son 28. y añadiendo 2. hacen 30. porque es el antecedente, cuyo consequente es 7. Asimismo, la razon sextupla superquadruparciente quintas, será de 34. á 5. porque multiplicando 6 por 5. son 30. y añadiendo 4 hacen 34. cuyo consequente es 5. En las razones submultiplices superparcientes, se compára el numero menor con el mayor, y asi, la razon subsextupla superquadruparciente quintas será de 5. á 34.

La razon desto consta por la misma naturaleza de las razones; y asi quien las huviere entendido bien; no necesita de otra demonstracion.

PROPOSICION XIX.

DADO EL DENOMINADOR, HALLAR LA RAZON de quien es denominador.

332 ESta proposicion es inversa de la 16. Si el denominador es numero entero, será la razon multiplice, y tomando el denominador por antecedente, y por consequente la unidad, será la razon que se busca: Como si al denominador es 4. será la razon de 4. á 1. Si es 12. será de 12. á 1. y asi de los demás, como por sí mismo es manifiesto.

333 Si el denominador es entero, y quebrado, reduzgase el entero al quebrado, (161) y entonces el numerador será el antecedente, y el denominador del quebrado el consequente. Y asi, la razon correspondiente al denominador 1. y medio, será de 3. á 2. porque el entero reducido al quebrado es dos tercios; y tomando el numerador 3 por antecedente, y el 2. por consequente, será de 3. á 2. Asimismo, la razon del denominador 5. y dos tercios, será de 17 à 3. porque reducidos los 5. al quebrado, son 17. tercios. Del mismo modo, la razon correspondiente al denominador 3. y cinco septimos, será de 26. á 7.

Si el denominador es quebrado solo, entonces la razon correspondiente será la que tiene el numerador al denominador del quebrado, y asi, la razon correspondiente al denominador dos tercios, será de 2. à 3 y la correspondiente al denominador 5. 19. avos, será de 5. à 19. Todo esto consta por lo que se dixo arriba num. 328.

PRO-

PROPOSICION XX.

LA RAZON DE IGUALDAD ES PRINCIPIO, Y RAIZ de las demás razones.

334 QUe la razon de igualdad sea principio, y raíz de todas las demás razones, asi como la unidad, respeto de los numeros, y el punto de la tranquilidad continua, es expreso sentir de Adrastro, y Eratostenes, segun Theon *c.* 31. El P. Clavio en la *defin.* 4. *del lib.* 5. de Eucl. prueba con su acostumbrada sutileza, como todas las razones se engendran de la razon de igualdad, y se resuelven en ella. Nicomaco: Pappo, Theon, y Boecio la hicieron tambien principio de todos los medios proporcionales. Con que esta proposicion no es ficcion nueva, sino que la admitieron, y probaron los Antiguos; lo qual digo por cierto recencior, citado por el P. Aynscom, que nuevamente pretende, que la razon de igualdad es lo mismo que cero, ò nada.

Y aunque podia probarla por diferentes medios, solo me valdré de los denominadores. El denominador de la razon de igualdad es 1. El de la razon de mayor desigualdad es entero solo, ò entero, y quebrado; y el de la razon de menor desigualdad es quebrado solo, como consta por la *prop.* 16. La unidad, pues, es principio, y raíz de todo numero, asi entero, como quebrado (5): luego la razon correspondiente al denominador 1. será principio, y raíz de todas las razones correspondientes á los denominadores que son numero entero, ò quebrado, los quales son denominadores de todas las otras razones.

Consectarios.

335 De lo dicho se infiere, que la razon de mayor desigualdad es mayor que la de igualdad; y la razon de menor desigualdad es menor: porque la quantidad de las razones se mide por los denominadores; (329) y la razon mayor desigualdad tiene por denominador á lo menos un entero, y quebrado, que es mayor el denominador 1. de la razon de igualdad; y el denominador de la razon de menor desigualdad es quebrado, el qual es menor que el denominador 1. de la razon de igualdad.

336 Si la razon de menor desigualdad vá creciendo succesivamente por todos los terminos, siempre se acercará mas, y mas á la razon de igualdad; pero nunca llegará á igualarla, sino que siempre será menor: porque el denominador de la razon de menor desigualdad es un quebrado, el qual puede crecer continuamente sin llegar á

numero entero, ò à la unidad, que es el denominador de la razon de igualdad; como parece en este quebrado $\frac{1}{2}$, que puede aumentarse deste modo $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$, &c. y como ha de pasar por infinitos terminos, jamás llegará à la unidad.

337 Asimismo, si la razon de mayor desigualdad vá decreciendo succesivamente por todos los terminos, siempre irá acercandose à la razon de igualdad, pero nunca llegará; porque como su denominador à lo menos es un entero, y quebrado, y el quebrado pueda disminuirse infinitamente, deste modo $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$; &c. jamás llegará à desvanecerse el quebrado, de suerte, que quede sola la unidad, ò el entero, que es el denominador de la igualdad.

338 Ninguna razon de mayor, ò menor desigualdad absolutamente puede ser la maxima, ò minima de todas; sino que dada qualquier razon destas, se puede señalar otra mayor, ò menor; porque sus denominadores son numero entero, ò quebrado, y absolutamente no hay numero maximo, ni minimo. Esto se ha de entender de los generos de razon de mayor, ò menor desigualdad, en quanto cada una comprehende cinco especies; pero no de cada especie de por sí: porque, como ahora verémos, puede aver maxima, y minima en algunas destas.

339 En las razones multiplices, la dupla es la minima de todas, porque los denominadores de las razones son numero entero; y de los enteros no puede haber otro numero menor que el 2. que es el denominador de la razon dupla. Pero en las submultiplices, la subdupla es la maxima; porque el denominador destas es un quebrado que tiene la unidad por numerador, de los quales quebrados no puede haver otro mayor que el $\frac{1}{2}$, que es denominador de la dupla.

340 En las razones superparticulares, la sesquialtera es la maxima; porque el denominador destas razones es 1. y un quebrado que tiene por numerador la unidad, de los quales ninguno es mayor que el $\frac{1}{2}$; porque el dicho quebrado denota una parte aliquota, de las quales no hay otra mayor que la mitad; y asi, el denominador 1. y medio, será el mayor de todos los de las razones superparticulares. Pero en las subsuperparticulares, la subsesquialtera es la minima, porque su denominador dos tercios es el minimo de todos los desta especie.

341 En las razones superparcientes, multiplices superparticulares, y multiplices superparcientes, absolutamente no hay maxima, ni minima: porque como cada una consta à lo menos de dos partes, por la una puede ser maxima, y por la otra minima; como se vé en la dupla sesquialtera, en donde por ser dupla es minima, y por sesquialtera maxima.

PRO.

PROPOSICION XXII.

QUALQUIER RAZON ES LO MISMO QUE UN QUEBRADO, cuyo numerador es el antecedente, y el denominador el consequente.

342 ESta proposicion es tan notoria, como un axioma; y asi, solo necesita de explicacion. Qualquier razon se expresa con dos terminos, que son el antecedente, y consequente. Qualquier quebrado tambien se explica con dos terminos, que son el numerador, y denominador: luego si el antecedente se hace numerador, y el consequente denominador, la razon será quebrado. Pero se ha de advertír, que aqui no se toma el quebrado en todo rigor, en quanto el numerador es menor que el denominador, sino en quanto puede ser igual, y mayor, como se advirtió arriba (129); ni es necesario interponer linea entre el antecedente, y consequente, como en los quebrados.

Consectarios.

De aquí es manifiesto, que casi toda la doctrina, y operaciones de los quebrados se pueden aplicar à las razones, como ahora verémos; suponiendo como cierto, que aqui en los numeros respectivos, la razon de igualdad es lo mismo que en los absolutos la unidad, como está probado en la proposicion antecedente.

343 Qualquier razon tiene el mismo respeto à la razon de igualdad, que el antecedente al consequente; porque qualquier quebrado tiene la misma razon à la unidad (134), que el numerador al denominador; y la razon de igualdad en las razones, es lo mismo que la unidad en los numeros, como está dicho.

344 Las razones que tienen un mismo consequente, tienen entre sí la proposicion de los antecedentes; y asi la razon de 3. à 2. es à la razon de 6. à 2. como el antecedente 3. al antecedente 6. esto es, la razon de 3. à 2. es mitad de la de 6. à 2. porque siendo los consequentes iguales, toda la desigualdad de las razones proviene de los antecedentes; luego tienen la proposicion de los antecedentes. Esto mismo se demonstró en los quebrados *cap.* 1. *theor.* 4.

$$\begin{matrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{matrix}$$

345 Las razones tienen entre sí la misma proporcion, que los productos de la multiplicacion en cruz de los antecedentes por los consequen-

quentes, como está demonstrado en el *theor. 5. del cap. 1.* de los quebrados : y asi la razon de 8. à 3. à la razon de 5. à 9. tiene la misma razon que 72. à 15. ò abreviando, que 24. à 5 De donde se infiere, que si multiplicando en cruz, los productos son iguales, son tambien las razones iguales. Pero si son desiguales, aquella razon será mayor, cuyo antecedente multiplicando el consequente de la otra razon produxere mayor numero; y asi, la razon de 8. á 3 es mayor que la de 5. á 9. porque el 72. es mayor, que el 15.

72 15
8 X 5
3 9

546 Las razones que tienen iguales antecedentes, tienen entre sí la razon reciproca de los consequentes, como se demonstró en el *theor.* 6. del lugar citado. Con que la razon de 3. á 2. á la razon de 3. á 9. es como 9. á 2. Asi mismo, la proposicion de la razon de 5. á 1. á la de 5. á 7. es como 7. á 1. y asi de las demás.

3 3
2 9

347 Para reducir una razon á los minimos terminos, dividase el mayor numero (sea el antecedente, ò el consequente) por el menor; y si sobra algo, dividase el menor por el residuo. Si de esta particion sobra algo, partase el primer residuo por el segundo; y desta suerte continuando, hasta que sobre cero, ò unidad. Si sobra unidad no se podrá reducir, porque está ya en los minimos terminos. Si sobra cero, el ultimo partidor será la maxima medida comun, por la qual se partirán los terminos de la razon, y quedará reducida. (149)

Como si se ha de reducir la razon de 80. á 12. dividiendo el 80. por 12. quedan 8. partiendo 12. por 8. quedan 4. partiendo 8. por 4. queda cero; pues el 4. es la maxima medída comun, por la qual dividiendo los terminos 80. y 12. de la razon compuesta, vendrá la razon reducida de 20. á 3.

348 Para reducir las razones á un mismo, ò comun consequente, se obrará como en los quebrados. (154) Sean las razones de 5. á 7. y de 8. á 15 Multiplicando los consequentes 7. por 15. sale el comun consequente 105. y multiplicando en cruz salen los nuevos antecedentes 75. y 56. Con que las razones reducidas serán de 75. á 105. y de 56. á 105.

75 56
5 X 8
7 15
105

349 Para reducir una razon á un consequente determinado, se multiplicará el consequente dado por el antecedente de la razon, y el producto se partirá por el consequente de la misma razon : como, si la razon de 5. á 3. se ha de reducir á una razon que tenga 6. por consequente, se multiplicará el 6. por el 5. y el producto 30. se partirá por

el

el 3. el quociente 10. será el antecedente nuevo, y la razon reducida será de 10. á 6. como consta por el num. 156. Si no se puede partir enteramente, tampoco se podrá reducir.

350 Para sumar las razones, se reducirán primero á un comun consequente, y despues se sumarán los antecedentes como en los quebrados; y asi, si las razones que se han de sumar son de 4. á 3. y de 8. á 10. reducidas á un comun consequente son de 40. á 30. y de 24. á 30. Sumense los antecedentes 40. y 24. y será la suma la razon de 64. á 30.

351 Para restar. Reducidas á un comun consequente, restese el un antecedente del otro; y asi, si se ha de restar la razon de 8. á 10. de la razon de 4. á 3. reducidas son de 24. á 30. y de 40. á 30. Restese el antecedente 24. de 40. y quedará la razon de 6. á 30. que es la diferencia entre las razones dadas.

40		24
4		8
3		10
	30	

352 Para multiplicar. Se multiplicarán los antecedentes entre sí, y saldrá el nuevo antecedente. Asimismo, multiplicando los consequentes entre sì, se hallará el nuevo consequente. Con que multiplicando la razon de 7. á 3. por la de 5. á 9. será el produćto la razon de 35. à 27. como se dixo en los quebrados. Para doblar, tresdoblar, quatrodoblar, &c. una razon, se multiplicará el antecedente por 2. 3. 4. &c. como se dixo en los quebrados.

7	——	3
3	——	3

353 Para partir. Multipliquese el antecedente de la razon dividenda por el consequente del divisor, y el produćto será el antecedente del quociente. Asimismo, multipliquese el consequente de la razon dividenda por el antecedente del divisor, y el produćto será el consequente del quociente; como para dividir la razon de 8. à 2. por la de 5. à 7. multiplicando el antecedente 8. por el consequente 7. sale el nuevo antecedente 56. y multiplicando el consequente 2. por el antecedente 5. resulta el nuevo consequente 10. Con que el quociente es la razon de 56. à 10. Para tomar la mitad, tercio, quarto, &c. de una razon, se multiplicará el consequente por 2. 3. 4. &c. como en los quebrados,

8	X	56
2		10

354 Estas quatro operaciones de sumar, restar, multiplicar, y partir se pueden hacer por los denominadores de las razones, hallando primero los denominadores (325), sumando, restando, multiplicando, ò partiendolos llanamente, y despues buscando la razon correspondiente al denominador que saliere. (332) Como si se ha de multiplicar la ra-

zon

zon de 8. à 4. por la de 9. à 3. multiplico los denominadores 2. y 3. y allo el denominador 6. cuya razon es de 6. à 1.

355 Algunos confunden el sumar, y restar razones, con el multiplicar, y partir, diciendo, que el sumar razones es lo mismo que el multiplicar; y el restar, lo mismo que el partir, pero se engañan totalmente, como lo advierten el P. Clavio à ultimo del lib. 9. de Euc. y el P. Aynscom en el libro de la naturaleza de las Razones cap. 14. porque las razones son lo mismo que los quebrados, como queda probado, y lo demuestran Clavio en el lugar citado, Aynscom en dicho libro cap. 13. Cardano en el lib. 5. de proporciones prop. 12. Salignaco lib. 2. cap. 1. Henischio lib. 3. Gregorio à S. Vincencio lib. 8. Candalla, Volumnio; y otros muchos; pues si en los quebrados son diferentes la suma, y resta, de la multiplicacion, y division, como es cierto, tambien lo serán en las razones. A mas desto, porque haciendo las operaciones por los denominadores (354), sale diferente la suma de la multiplicacion, y la resta de la division, como es manifiesto.

356 Multiplicando entre sí dos razones de mayor desigualdad, la razon producida tambien es de mayor desigualdad; como si se multiplica la razon de 8. à 2. por la de 6. à 3. sale la razon de 48. à 6. ò de 8. à 1. de mayor desigualdad; porque como los antecedentes 8. y 6. son mayores que los consequentes 2. y 3. necesariamente han de producir mayor antecedente que el consequente; y asi la razon producida es razon de mayor desigualdad.

8 — 6 48
2 — 3 6

357 Multiplicando entre sí dos razones de menor desigualdad, producen una razon de menor desigualdad; como si la razon de 2. à 8. se multiplica por la razon de 3. à 6. saldrá la razon de 6. à 48. de menor desigualdad; porque como los antecedentes son menores que los consequentes, necesariamente el antecedente nuevo 6. ha de ser menor que el consequente nuevo 48.

2 — 3 6
8 — 6 48

358 Multiplicando una razon de mayor desigualdad por otra de menor desigualdad, la razon producida puede ser de mayor desigualdad, como parece en el primer exemplo; de igualdad, como se vé en el segundo exemplo; ò de menor desigualdad, como lo enseña el exemplo tercero. Peró la razon producida siempre es menor que la razon de mayor desigualdad multiplicanda, y mayor que la razon de menor desigual-

gualdad multiplicante; porque la unidad à un numero de los multiplicantes, tiene la misma razon que el otro numero de los multiplicantes al producto (57): Luego la razon de igualdad (que es lo mismo que la unidad en los numeros absolutos) tendrá el mismo respeto à la razon de 3. à 1. en el primer exemplo, que la razon de 2. à 4. à la razon producida de 6. à 4. y como la razon de 3. à 1. es mayor que la razon de igualdad, tambien la razon de 6. à 4. serà mayor que la de 2. à 4. que es de menor desigualdad.

3——2 6
1——4 4

2——2 4
1——4 4

6——3 18
5——4 20

Y alternando, como la razon de igualdad, à la de 2. à 4. asi la de 3. à 1. al producto de 6. à 4. y como la razon de 2. à 4. es menor que la razon de igualdad; tambien la razon de 6. à 4. producida, serà menor que la razon de mayor desigualdad multiplicanda de 3. à 1.

359 Multiplicando qualquier razon como la de 8. à 5. por la razon de igualdad de 3. à 3. sale la misma razon multiplicada de 24. à 20. esto es, que el producto es igual à la razon que se multiplica; porque como en la razon de igualdad el antecedente 3. es igual al consequente 3. es lo mismo que si fuera un solo numero 3. pues multiplicando el antecedente 8. y consequente 5. por un mismo numero 3. salen los numeros 24. y 15. en la misma razon de 8. à 5. (312) Luego la razon de 24. à 15. es igual, ò la misma que la de 8. à 5. Y por esto, multiplicando una razon de igualdad por otra tambien de igualdad, la razon producida es de igualdad.

8——3 24
5——3 15

360 Si los terminos de una qualquier razon, como de 3. à 5. se invierten de suerte, que salga otra razon de 5. à 3. y se hace la multiplicacion de estas dos razones, la razon producida será de igualdad; porque como los antecedentes 3. y 5. son los mismos numeros que los consequentes 5. y 3. haciendo la multiplicacion de los antecedentes entre sí, y tambien de los consequentes entre sí, saldrán numeros iguales, que hacen la razon de igualdad.

3——5 15
5——3 15

361 Si de dos razones iguales, como de 5. á 10. y de 3. á 6. se invierten los terminos de la una, de suerte, que sean de 5. á 10. y de 6.

á 3.

à 3. multiplicandolas, estando invertida la una, saldrá la razon de igualdad; porque siendo las razones de 5. à 10. y de 3. à 6. iguales, serán los numeros 5. 10. 3. 6. proporcionales; y haciendo la inversion de los terminos de la una razon, y despues multiplicando las razones, se vienen à multiplicar los medios, y los extremos: Luego han de salir numeros iguales (298) que hacen la razon de igualdad.

5—6	30
10—3	30

362 Si son tres, ò mas numeros en continua proporcion, como 8. 4. 2. y se toma un otro qualquier numero, como 16. las razones de 8. à 16. de 4. à 16. de 2. á 16. son continuamente proporcionales; porque teniendo los mismos consequentes, tienen la razon de los antecedentes (344), que por la suposicion son continuamente proporcionales.

8.	4.	2.
16.	16.	16.

Asi mismo serán continuamente proporcionales las razones de 16 à 8. de 16. á 4. de 16. á 2. porque como tienen iguales antecedentes, tienen entre sí la razon reciproca de los consequentes (346), los quales por la suposicion son continuamente proporcionales.

16.	16.	16.
8.	4.	2.

PROPOSICION XXII.

REDUCIR QUALQUIER RAZON ENTRE QUEBRADOS à razon entre numeros enteros.

363 MUchas veces sucede, que por estár una razon entre quebrados solos, ò entre enteros, y quebrados, no se puede conocer facilmente, ni hacer en ella algunas operaciones de las referidas, ni de las que darémos adelante; por lo qual es conveniente que enseñemos el modo de reducirla á numeros enteros.

Sea, pues, qualquier razon de dos tercios à cinco septimos, la qual se ha de reducir à enteros. Reduzganse los quebrados à un comun denominador (154), y será la razon de 14 21. avos à 15 21. avos; y porque los quebrados que tienen iguales denominadores guardan entre sí la razon de los denominadores, será el quebrado 14. 21. avos à 15. 21. avos, como 14. à 15. Luego la razon de dos tercios à cinco septimos, ò de 14 21. avos à 15. 21. avos, que es toda una estará reducida à la razon de 14. à 15.

Otro exemplo. Sea la razon de 9. à dos tercios la que se ha de reducir à razon entre numeros enteros. Pongase una unidad debaxo el 9. asi $\frac{9}{1}$, y luego reduzganse los quebrados $\frac{9}{1}$ $\frac{2}{3}$ à un comun denominador, y serán 27. tereios, y dos tercios; tomense los numeradores solos, y será la razon reducida de 27. à 2. la misma que la de 9. à dos tercios.

Si la razon dada es de 3. y dos quintos, à 8. y tres quartos, reduzganse los enteros à los quebrados (162), y serán 17. quintos, y 35. quartos. Reduzganse ahora à un comun denominador $\frac{68}{20}$, y $\frac{175}{20}$ tomando los numeradores solos, quedará la razon sobredicha reducida à enteros de 68. à 175.

PROPOSICION XXIII.

MULTIPLICANDO EL DENOMINADOR DE QUALQUIER razon por el consequente, produce el antecedente.

364 SEa qualquier razon de 8. à 2. cuyo denominador es 4. (325); digo, que si el 4. se multiplica por el consequente 2. el producto será el antecedente 8. porque el denominador nace de la division del antecedente por el consequente: Luego multiplicando el denominador por el consequente, se restituye el antecedente.

Consectario.

365 Dividiendo el antecedente de una razon por el denominador, sale el consequente; como en la razon de 12. á 4. cuyo denominador es 3. Digo, que dividiendo el 12. por 3. sale el consequente 4. porque multiplicando el consequente por el denominador, se produce el consequente: Luego dividiendo el antecedente por el denominador, buelve á salir el consequente.

366 Dado el denominador, y un termino de la razon, se hallará la dicha razon deste modo: Si el termino dado es el consequente, multipliquese por el denominador, y saldrá el antecedente: pero si es el antecedente, dividase por el denominador, y saldrá el consequente; como si el denominador de una razon es 8. y se dá el consequente 4. multiplicando 8. por 4. saldrán 32. y asi la razon será de 32. à 4. pero si el termino dado es el antecedente 32. partiendo por 8. saldrá el consequente 4. y la razon será de 32. à 4.

PROPOSICION XXIV.

DADO EL ANTECEDENTE HALLAR EL consequente en qualquier razon.

367 SEa el antecedente 4. al qual se ha de buscar un consequente, de suerte, que formen una razon quintupla. Primeramente busquense los terminos de la razon quintupla, y serán 5. à 1. (331). Multipliquense ahora el antecedente dado 4. por el consequente 1. y el producto 4. dividase por el antecedente 5. pues el quociente quatro quintos será el consequente que se busca, y la razon quintupla será de 7. à quatro quintos.

Asimismo, dado el antecedente 9. se ha de hallar un consequente, de modo, que resulte una razon susquialtera. Los terminos de la sesquialtera son 3. y 2. (331). Multipliquense el antecedente 9. por el consequente 2. de la razon susquialtera, y el producto 8. dividase por el antecedente 3. El quociente 6. será el numero que se busca, y la razon sesquialtera será de 9. à 6.

Del mismo modo, dado el antecedente 8. se ha de hallar un consequente, de suerte, que sea la razon subquadrupla. Los terminos desta razon son 1. y 4. Multiplicando el antecedente 8. por 4. y partiendo el producto 32. por 1. sale el consequente 32. y asi la razon subquadrupla será de 8. à 32.

La razon deste modo de obrar nace de la *prop.* 4. (298). Porque en el ultimo exemplo (lo mismo es de los demás) lo que se pide es una razon semejante á la de 1. á 4. dado el antecedente 8. y se ha hallado el consequente 32. de suerte, que son quatro numeros proporcionales 1. 4. 8. 32. pues como en esta el producto de los medios es igual de los extremos, y los medios están conocidos que son 4. y 8. si se multiplican, y el producto 32. se parte por un extremo conocido, que es 1. el quociente será el otro extremo 32. que se busca. Y esta es la regla de tres como luego verémos.

PROPOSICION XXV.

DADO EL CONSEQUENTE HALLAR EL ANTECEDENTE en qualquier razon.

368 ESta proposicion es inversa de la antecedente. Sea dado el consequente 12. al qual se ha de hallar un antecedente

en razon superbiparciente septimas. Los terminos desta razon son 9. y 7. (33). Multipliquense, pues, el consequente dado 12. por el antecedente 9. y partiendo el producto 108. por el consequente 7. saldrá el antecedente 15. y tres septimos, que es el que se busca; y la razon de 15. y tres septimos á 12. será superbiparciente septimas.

Asimismo, dado el consequente 10. se busca un antecedente que constituya una razon subquintupla. Los terminos desta razon son 1. y 5. Multipliquese, pues el consequente 10. por el antecedente 1. y partiendo el producto 10. por el consequente 5. saldrá el antecedente 2. de la razon subquintupla de 2. à 10.

Del mismo modo, conocido el consequente 22. se busca un antecedente en razon subtripla sesquiseptima. Los terminos desta razon son 7. à 22. y pues este consequente es igual al qne está dado, no hay mas hacer, sino tomar el antecedetne 7. por el que se busca.

La razon deste modo de obrar es la misma. Porque en el exemplo segundo son proporcionales 2. 10. 1. 5. y como los medios están conocidos, multiplicando 10. por 1. y partiendo el producto por un extremo conocido 5. saldrá el otro 2. que se busca.

PROPOSICION XXVI.

SI DE QUATRO NUMEROS PROPORCIONALES A. B. C. D. *los extremos* A. D. *son entre sí primos, todos los quatro serán los minimos en su proporcion.*

369 Esta es la *prop.* 1. *del lib.* 8. de Euclides. Sean proporcionales en qualquier razon, como A. à B. así C. à D. y los extremos A. y D. sean entre sí primos. Digo, que los dichos proporcionales son los menores que en numeros enteros se pueden hallar en su proporcion; esto es, que en la razon subdupla, que es la que guardan, no se pueden hallar otros quatro numeros proporcionales enteros, que sean menores que los sobredichos.

A.	B.	C.	D.
3.	6.	2.	4.

Porque no se pueden señalar otros numeros menores; y si acaso alguno dixere que estos otros numeros E. F. G. H. son menores, probaré que han de ser mayores. Porque como E. F. G. H. son proporcionales à A. B. C. D. serán por igualdad de razon proporcionales A. E. D. H. (317); y alternando (306.) serán proporcionales A. D. E. H. Y pues A. y D. son entre sí

E.	F.	G.	H.
6.	12.	4.	8.

pri-

primos, serán los minimos en su razon (323): luego E. y H. no son los minimos, luego son mayores. Y asi, los intermedios F. y G. tambien han de ser mayores que los medios B. y C. porque entrambos tienen la misma razon con los extremos.

Pero advierto, que aqui habla Euclides de los numeros enteros, excluyendo la unidad, y los quebrados; porque si ponemos en un termino de los proporcionales la unidad, ò algun quebrado, podrán darse otros numeros menores que los proporcionales, que tengan los extremos entre sí primos como estos 1. 2. 2. 4. ò estos otros $\frac{1}{2}$, 1 3. 6.

PROPOSICION XXVII.

HALLAR LOS NUMEROS QUE UNO QUISIERE continuamente proporcionales, minimos en una razon dada.

370 SEa una qualquier dada de A. á B. y se han de hallar primeramente tres numeros continuamente proporcionales, que guarden la razon dada de A. à B. y serán los menores que todos los que pueda haber en la misma razon. Si los numeros A. y B. no son los minimos en su razon, hallense los minimos, reduciendo la dicha razon de A. á B. á minimos terminos. (347) Despues desto multipliquense el numero A. por sí mismo, y será AA. Multipliquese A. por B. y será AB. Multipliquese ultimamente B. por sí mismo, y será BB. Digo, pues, que los numeros AA. AB. BB. son continuamente proporcionales, y los minimos en la razon de A. à B.

A	B		
5.	3.		
AA	AB	BB	
25.	15.	9.	
AAA	AAB	ABB	BBB
125.	75.	45.	27.

Que sean continuamente proporcionales lo pruebo asi: El numero AA. á AB. tiene la misma razon que A. á B. (305). Asimismo, la razon de AB. á BB. es la misma que la de A. à B. Luego los sobredichos tres numeros son continuamente proporcionales, porque continuamente guardan una misma razon.

Que sean los minimos en aquella razon que guardan de A. á B. lo pruebo asi: Como A. y B. son numeros minimos en su razon, serán entre sí primos (323); y multiplicandose à sí mismos, los productos AA. y BB. serán tambien entre sí primos, (73) que es la *prop.* 29. *del lib.* 7. de Eucl. y por consiguiente serán los minimos en su razon. (323) Luego por la proposicion antecedente los tres numeros AA. AB BB. son los minimos en aquella razon que tienen.

Mas se han de hallar quatro numeros continuamente proporcionales, que guarden entre sí la misma razon que A. à B. y sean los minimos de todos los quatro numeros continuamente proporcionales en la misma razon. Si A. y B. no son los minimos en su razon, hallanse los minimos en la misma razon. (347) Y habiendo hallado los tres AA. AB. BB. continuamente proporcionales, y minimos en su razon, multiplicando AA. y AB. por A. y AB. BB. por B. saldrán los quatro numeros AAA. AAB. ABB. BBB. que se buscan.

Del mismo modo se hallarán cinco, y mas numeros continuamente proporcionales, y minimos en la razon que guardan entre sí. La demonstracion es la misma. Esta es la *prop.* 2. *del lib.* 8. de Euclides.

Consectarios.

371 Si hay muchos numeros continuamente proporcionales, y minimos en su razon, como 25. 15. 9. los extremos 25. y 9. son primos entre sí, que es la *prop.* 3. *del lib.* 8. de Euclides. Y si son tres los numeros continuamente proporcionales en la forma sobredicha, los extremos son numeros quadrados; si son quatro, los extremos son cubos; si cinco, quadrado quadrados, &c.

372 La unidad, y los numeros A. AA. AAA. &c. son continuamente proporcionales. Tambien lo son la unidad, y los numeros B. BB. BBB. &c. y tantos medios hay entre los dos extremos de los referidos numeros, quantos entre cada extremo, y la unidad: v. gr. entre AAA. y BBB. hay dos numeros medios, pues otros tantos hay entre AAA. ò BBB. y la unidad.

PROPOSICION XXVIII.

LOS NUMEROS MINIMOS, O LAS RAICES DE UNA razon, miden igualmente à otros sus proporcionales.

373 SEan 3. y 2. los minimos numeros, ò raices de la razon sesquialtera. Digo, que miden à todos los otros numeros enteros que están en razon sesquialtera, como à 12. y 8. Porque siendo 3. y 2. los minimos, necesariamente 12. y 8, han de ser mayores

luego 3. y 2. serán partes aliquotas, ò aliquantas semejantes, respeto de ellos; pues de ningun modo pueden ser tres partes aliquantas semejantes, porque estas constan de partes aliquotas semejantes (19), y estas aliquotas semejantes guardarian la misma razon que 3. à 2. y serian menores, por ser partes; con que 3. y 2. no serian los minimos numeros en la razon sesquialtera, que es contra la suposicion: luego han de ser aliquotas semejantes, y por consiguiente miden à los numeros 12. y 8. Lo mismo demostraré de otros numeros en razon sesquialtera. Esta es la *prop. 21. del lib. 7.* de Euclides.

PROPOSICION XXIX.

SI TRES NUMEROS SON PROPORCIONALES A OTROS tres, tambien sus diferencias son proporcionales.

374 SEan tres numeros A. B. C. proporcionales à otras tres D. E. F. La diferencia de A. à B. sea G. y la de B. à C. sea H. Asimismo, la diferencia de D à E. sea I. y la de E. à F. sea K. Esto supuesto digo, que la misma razon tiene la diferencia G. à la diferencia H. que la diferencia I. à la diferencia H. esto es; que las diferencias son proporcionales, como G. à H. asi I. à R.

G	H	
2	1	
A	B	C
6	4	3
D	E	F
18	12	9
I	K	
6	3	

Porque siendo proporcionales A. à B. como D. à E. serán, invirtiendo B. à A. como E. à D. (307). Luego restando los numeros menores B. y E. de los mayores A. y D. quedarán los residuos G. y I. proporcionales (311), como B. á E. asi G. á I. Asimismo se demonstrará, que las diferencias H. y K. son proporcionales con B. y E. Luego la razon de G. á I. es la misma que la de H. á K. (297). Luego es como G. á I. asi H. á K. que es ser proporcionales.

PROPOSICION XXX.

SI DOS NUMEROS SE AÑADE UN NUMERO, ò de los mismos se resta el mismo numero, las diferencias de las sumas, ò restas serán las mismas que antes de sumar, ò restar.

375 SEan dos numeros 8. y 12. cuya diferencia es 4. Digo lo primero, que si se añade un numero 5. de suerte que se 13. y 17. la diferencia tambien será 4. Porque añadiendo el 5. à los numeros 8. y 12. tanto se aumenta el uno como el otro: luego la diferencia es la misma que antes.

Digo lo segundo, que si de dos numeros 8. y 12. se resta un mismo numero 5. los residuos, ò restas 3. y 7. tendrán la misma diferencia que los mismos 8. y 12. Porque restando un mismo numero de los dos, tanto se disminuye el uno como el otro; luego la diferencia es la misma.

	4	
8		12
	5	
13		17
3		7

PROPOSICION XXXI.

SI TRES NUMEROS MULTIPLICAN, O DIVIDEN por un mismo numero, las diferencias de los productos, ó quocientes son proporcionales á las diferencias de los dichos tres numeros.

376 SEan tres numeros 8. 12. 16. los que se han de multiplicar, ò dividir por un qualquier numero 4. La diferencia de 8. à 12. es 4. y la de 8. à 16. es 8. Multiplicando, pues, ò dividiendo los dichos tres numeros por 4. salen los productos 32. 48. 64. y los quocientes 2. 3. 4. Digo, que las diferencias 16. y 32. del producto 32. à 48. y del mismo 32. à 64. ò las diferencias 1. y 2. del quociente 2. á 3. y del mismo 2. à 4. son proporcionales à las diferencias 4. y 8. de los tres numeros 8. 12. 16.

8	12	16	4	8
	4			
32	48	64	16	32
2	3	4	1	2

Porque el numero 4. multiplicando à los numeros dados 8. 12. 16. produce los numeros 32. 48. 64. proporcionales. (312) Luego las diferencias de 8. 12. 19. y las de 32. 48.

64.

64. son proporcionales. (374) Asimismo, dividiendo los numeros propuestos 8. 12. 16. por 4. salen los quocientes 2. 3. 4. proporcionales (313). Luego las diferencias tambien son proporcionales.

PROPOSICION XXXII.

SI QUATRO NUMEROS SE EXCEDEN IGUALMENTE la suma de los extremos es igual à la suma de los medios, y al contrario.

377 ESte Theorema demonstrarémos en todos los numeros, cuyo exceso es igual, ò que forman una progresion Arithmetica, en el lib. 4. ahora basta en solos quatro. Sean, pues, 4. 6. 8. 10. cuyo exceso, ò diferencia es 2. Digo lo primero, que la suma 14. de los extremos 4. y 10. es igual à la suma 14. de los medios 6. y 8. porque si el extremo mayor 10. dá su diferencia, ò exceso 2. al menor extremo 4. resultarán los quatro numeros 6. 6 8. 8. como es manifiesto, en los quales los extremos son iguales à los medios: luego la suma de los extremos es igual à la suma de los medios.

4. 6. 8. 10.

378 Digo lo segundo, que si son quatro numeros, y la suma de los extremos es igual à la de los medios, los tales numeros se exceden igualmente. Porque si las diferencias, ò excesos no fueren iguales, dando el extremo mayor 10. su diferencia 2. al menor extremo 4. no quedarian los numeros 6. 6. 8. 8. para que las sumas de los extremos, y medios sean iguales; luego los excesos han de ser iguales.

Advierto, que no es preciso que los quatro numeros propuestos se excedan continuamente con un mismo exceso, como en el exemplo, sino que basta que los dos primeros, y dos ultimos se excedan igualmente como en estos 3.7.5.9. en los quales la demostracion es la misma.

PROPOSICION XXXIII.

SI DOS NUMEROS MULTIPLICAN A UNO, la diferencia de los productos es igual al producto de la diferencia de los multiplicadores, por el mismo numero multiplicando.

379 MUltipliquen estos dos numeros 3. y 5. (cuya diferencia es 1.) à un qualquier numero 4. y los productos sean

12. y 20. cuya diferencia es 8. Digo que esta diferencia 8. es igual producto del mismo 4. por la diferencia 2. Porque si los numeros 3. 5. fueran iguales, tambien los productos de la multiplicacion por 4. serian iguales: luego el ser el producto 20. mayor que el producto 12. proviene de que el numero 5. es mayor que el numero 3. esto es, por la diferencia 2. multiplicada por 4. Luego la diferencia de los productos 20. y 12. es igual al producto de la diferencia 2. por 4.

	2	
3		5
	4	
12		20
	8	

Estas noticias, y proporciones bastan para entender de raíz este Libro; en los dos siguientes se proseguirán por mas extenso. Ahora pasamos à la Regla de Tres.

CAPITULO SEGUNDO.

DE LA REGLA DE TRES,

ò de Proporcion.

380 Regla de Proporcion es la que enseña el modo de hallar un numero incognito por la proporcion que tiene con algunos conocidos, los quales porque son tres (à lo menos los principales) se dice *Regla de Tres*; y tambien de *Oro*, por la grande utilidad que trae Dividese en *Simple*, y *Compuesta*; y cada una de estas en *Directa*, è *Inversa*.

381 La Regla de Tres simple, es la que por solos tres numeros dados, ò conocidos enseña à hallar un quarto numero proporcional; como en esta question. Un Oficial en 4. meses gana 20. libras, quanto ganará al mismo respeto en 8. meses? En donde son conocidos tres numeros, y se busca la ganancia correspondiente à los 8. meses, al respeto de lo que gana en los 4. meses; de suerte, que han de tener la misma razon los 4. meses à la ganancia 20. libras, que los 8. meses à la ganancia que se busca, la qual es 40. libras; esto es, son proporcionales como 4. à 20. asi 8. á 40.

382 La Regla de Tres compuesta, es la que contiene muchas proporcionales; y asi concurren mas que tres terminos conocidos, por los quales se busca un numero no conocido: Como si 4. hombres en 6. meses ganan 50. libras, 8. hombres en 12. meses quanto ganarán? En don-

donde hay conocidos cinco numeros, y se busca el sexto.

383 Aqui se han de advertir dos cosas: La primera, que aunque en esta regla compuesta concurran mas que tres terminos, eso no obstante se dice *Regla de Tres*; porque entre los terminos conocidos solos hay tres principales, à quien los otros acompañan, como luego verémos. La segunda, que en todas las reglas de tres los numeros, ò terminos conocidos son impares, como tres, cinco, siete, &c. y con el que falta se hace numero de terminos pares.

PROBLEMA I.

DISPONER LOS TERMINOS DE LA REGLA DE TRES simple, y conocer si es directa, ò inversa.

384 DE los tres numeros conocidos que concurren en la regla de tres simple, los dos son homogeneos: esto es, numeran una misma especie, de los quales el uno tiene annexa la question. El otro numero de los tres conocidos es homogeneo con el quarto numero que se busca: Como en la question propuesta (381), si un oficial en 4. meses gana 20. libras, en 8. meses qué ganará? Los 4. y 8. meses son homogeneos; y las 20. libras son tambien homogeneas con la ganancia que se busca; pero de los dos terminos conocidos homogeneos 4. y 8. el 8. tiene annexa la question, porque son los meses, respeto de los quales se busca la ganancia.

385 Pues para disponer, ò ordenar la regla de tres, segun el metodo debido, el numero que tiene annexa la question pongase en tercer lugar, y su homogeneo en primero; el otro numero, que es solitario, pero homogeneo al numero incognito, estará en segundo lugar, ò en medio de los dos homogeneos: de suerte, que el primer numero ha de ser semejante al tercero, y el segundo al quarto. Como porque en la misma question el numero 8. meses tiene annexa la question, se pondrá en tercer lugar, y su homogeneo, que son los 4. meses, estará en primer lugar. El otro termino solitario, que son las 20. libras, pongase en segundo lugar, asi: Si en 4. meses se ganan 20. libras, en 8. meses qué se ganará? Y de este modo los terminos semejantes serán los antecedentes, y tambien los consequentes, como lo explica Euclides *en la difin* 11. *del lib.* 5.

386 Estando asi ordenados los terminos, se conocerá si la proporcion es directa, ò inversa; deste modo: Si el primer termino tiene la misma razon al tercero (que son los homogeneos) que el segundo

do al quarto (que son los otros homogeneos) : esto es, si creciendo, ò menguando el tercer termino, respeto del primero; tambien ha de crecer, ò menguar el quarto, respeto del segundo, será la proporcion directa, segun la *prop.* 14. *del lib.* 5. de Euclides. Como en la misma question, porque siendo el tercer numero 8. mayor que el primero 4. tambien el quarto numero (que es 40) es mayor que el segúndo 20. La proporcion es directa. Asi mismo en esta otra question: Si un correo en 12. horas camina 16. leguas, en 3. horas quantas leguas caminará? Tambien es directa; porque siendo el tercer numero 3. menor que el primero 12. tambien el quarto (que es 4) es menor que el segundo 16.

387 Pero si el primer termino tiene la misma razon al tercero, que reciprocamente el quarto al segundo: esto es, si creciendo, ò menguando el tercero, respeto del primero, al contrario, el quarto ha de menguar, ò crecer, respeto del segundo, la proporcion es *inversa*, *indirecta*, ò *reciproca*; como si 100. hombres para hacer una fortaleza han de menester 4. meses, 200. hombres quantos meses habrán de menester? Cierto está, que al mismo paso que los hombres son mas, la fortaleza se acabará mas presto: Con que siendo el numero de 200. hombres mayor que los 100. el tiempo en que acabarán la fortaleza será menor que los 4. meses. Asi mismo, esta otra question es indirecta: Si de paño de 8. palmos de ancho son menester 6. varas para hacer un vestido, de paño de 5. palmos de ancho quantas varas serán menester? Porque no hay duda, que menguando lo ancho del paño, son menester mas varas para hacer el vestido; y asi, siendo menor el tercer termino que el primero, el quarto ha de ser mayor que el segundo.

Dirá alguno: Si el numero quarto aun no está conocido, cómo se puede saber si es mayor, ò menor que el segundo? Respondo, que aunque individuamente antes de resolver la question no sea conocido el quarto numero; pero por las circunstancias de la question se puede conocer en general si es mayor, ò menor; porque si 4. hombres ganan 10. libras, 8. hombres ganarán mas de 10. libras; y 2. hombres ganarán menos; aunque hasta que esté resuelta la question, no se conozca determinadamente quanto sea aquel mas, ò menos.

388 Para sacar al estudioso de este cuydado, señala otra regla el P. Tacquet en su Arithmet. pract. lib. 4. cap. 1. que es la siguiente. Si los dos terminos homogeneos (el primero, y tercero) hacen, ò son en algun modo causa de alguna cosa unica, que está fuera de la question: esto es, que no es uno de los quatro terminos de la question,

cion, de suerte, que los otros dos terminos (segundo, y quarto) sean como circunstancia de hacer la tal cosa, será inversa la proporcion. Y asi, esta question si 100. hombres para hacer una fortaleza han menester 4. meses, 200. hombres quantos meses havrán menester para hacer la misma fortaleza, será indirecta, ò inversa; porque los hombres, que son el primero, y tercero terminos, gocen la fortaleza, que está fuera de la question, ò no es uno de los quatro terminos; y los meses son circunstancia; para hacer la dicha fortaleza. Pero esta regla padece algunas dificultades.

389 Aqui es preciso advertir, que algunas veces se propone alguna question, cuyos terminos están desordenados de suerte, que parece inversa, siendo en la verdad diriecta; como: Si una redoma se llena con 20. dineros de vino de à 10. sueldos el cantaro, de vino de à 10. sueldos con quantos dineros se llenará. Pero este genero de questiones, si se ordenan por la regla sobredicha (385), no parecerán inversas, sino directas, deste modo: Si valiendo el cantaro de vino 10. sueldos son menester 20. dineros para llenar una redoma, valiendo el cantaro 16. sueldos, quantos dineros serán menester para llenar la misma redoma? No hay duda que serán menester mas dineros; y asi la proporcion, será directa: porque siendo el tercer numero 16. mayor que el primero 8. el quarto tambien es mayor que el segundo 20. Y tengase por regla general, que siempre que el termino homogeneo al que se busca está en primer lugar, la question está desordenada.

Dirá alguno: Puede haber question, que aunque no esté ordenada segun la relga antecedente, con todo eso, se puede resolver bien, como esta: Si con 15. reales, gano 5. reales, con 20. doblones quanto ganaré? En la qual los terminos homogeneos están en primero, y segundo lugar, contra lo que ordena la regla sobredicha. Respondo, que en la proposicion directa, mientras que el primer termino esté en su lugar, aunque el segundo y tercero estén desordenados, no importa: porque, como luego veremos, para resolver la question, directa, se multiplica tercero por segundo; y como lo mismo sea multiplicar el tercero por el segundo, que este por aquel, por eso no importa que estén variados. En la proporcion inversa se multiplica primero por segundo, ò segundo por primero; y asi, no importa que estos dos terminos estén desordenados.

390 Advierto tambien, que à veces la question se propone de tal suerte, que necesita de reduccion: Como si en 4. meses gano 30. reales, en 2. años quanto ganaré? Aqui parece que no hay terminos

homogeneos, porque el primero son meses, y el tercero años; pues reduzganse los años à meses, y se propondrá asi: Si en 4. meses gano 30. reales en 24. meses quanto ganaré.

Asi mismo: Si por una libra de moneda pago 2. sueldos de derecho, he gastado 20. libras, comprehendiendo los derechos, quanto importan los dichos derechos? Lo primero los terminos homogeneos. 1. y 20. libras reduzgase à sueldos, y serán 20. y 400. y porque en los 400. sueldos están comprehendidos los derechos, y sumo los 2. sueldos que debe cada libra con los 20. sueldos, y serán 22. Digo, pues: Si 22. sueldos comprehendiendo los derechos dán 2. sueldos de derechos, 400. sueldos, comprehendiendo los derechos, quanto pagarán de derechos? y con esto estará la question, segun el debido orden. Otras muchas questiones declararémos en el exercicio de la regla de tres.

391 Ultimamente, casi siempre que el numero que se busca es de tiempo, como horas, dias, meses, &c. la regla de tres es inversa, como se vé en la question siguiente: Si 6. labradores arán un campo en 12. horas, 3. labradores en quantas horas le ararán? El conocimiento de la regla de tres directa, ò inversa pide exercicio.

PROBLEMA II.

RESOLVER QUALQUIER QUESTION DE REGLA *de tres, simple directa.*

392 Resolver una question de regla de tres simple, y directa, es hallar un numero, que con otros tres conocidos haga quatro proporcionales directamente (386), que es lo mismo, que conocida una razon; y el antecedente de otra razon igual, ò semejante, buscar el consequente (367): Como si 4. varas de paño costaron 12. libras, 6. varas qué costarán? Donde está conocida à la razon de 4. à 12. y se busca otra razon igual, señalado el antecedente 6.

Multiplíquese, pues, el tercer termino 6. por el segundo 12. y el producto 72. partase por el primero 4. y el quociente 18. será el quarto termino, el qual es consequente, respeto del 6. y asi, serán dos razones iguales, la una de 4. à 12. y la otra de 6. à 18.

Asi mismo: Si con 3. libras gano 6. sueldos, con 9. libras quanto ganaré? Multiplico el tercero 9. por el segundo 6. y el producto 54. le parto por el primero 3. y el quociente 18., son los sueldos que ganare con las 9. lib. al mismo respeto que con 3. lib. gano 6. sueldos.

Otro exemplo. Con 40. reales compro 36. lib. de azucar : con 100. reales quantas libras compraré ? Multiplicando 100. por 36, y partiendo el producto 3600. por 40. sale el quarto numero 90. que son las libras que puedo comprar con 100. reales.

Otro exemplo. En 5. meses gasto 30. lib. en 15. meses quanto gastaré? Multiplico 15. por 30. y parto el producto 450. por 5. el quociente 90. son las libras que al mismo respeto gastaré en los 15. meses; de suerte, que en 5. meses gasto 30. lib. en 15. meses gastaré al mismo tenor 90. libras.

Demonstracion.

La demonstracion de esta regla se funda en la *prop. 4. del cap. antecedente*; que si quatro numeros son proporcionales, el producto de los medios es igual al de los extremos: pues multiplicando el tercero por el segundo, sale el producto de los medios, el qual partido por un extremo, que es el primero, dá el otro extremo, que es el quarto; porque como el producto del primero, y quarto, ha de ser igual al producto del segundo, y tercero: si este ultimo producto se parte por el primer termino, saldrá el quarto, pues que multiplicando el partidor, que es el primero por quociente, que es el quarto, buelve á salir el numero que se partió.

Escolio.

393 Por otros modos se puede tambien resolver qualquier question de regla de tres simple directa. Sea esta: Si un hombre en 8. dias camina 60. leguas, en 12. dias quantas leguas caminará? Dividase el segundo numero 64. por el primero 8. y multipliquese el quociente 8. por el tercero 12. será el producto 96. el numero de las leguas, que caminará en los 12. dias.

De otro modo: Partase el tercero 12. por el primero 8. y multipliquese el quociente 1. y $\frac{1}{2}$ por el segundo 64. y saldrán las mismas 96. leguas.

De otro modo: Partase el primero 8. por el segundo 64. y partiendo tambien el tercero 12. por el quoeionte $\frac{8}{64}$ saldrán las mismas 96. leguas.

De otro modo: Dividase el primero 8. por el tercero 12. y el segundo 64. dividase por el quociente $\frac{8}{12}$ lo que saliere serán las mismas 96. leguas.

Examen.

394 Para examinar qualquiera de las sobredichas operaciones, multipliquese el primer numero por el quarto, y el producto ha

de ser igual à la multiplicacion del segundo por el *tercero*. Tambien se puede examinar haciendo la operacion al revés de este modo: Si el quarto numèro ya hallado dá el tercero, que dará el segundo? Siguiendo la regla se ha de hallar el primero, que estaba ya antes conocido.

PROBLEMA III.

RESOLVER QUALQUIER QUESTION DE REGLA DE TRES simple inversa.

395 QUal sea la proposicion inversa, indirecta, 6 reciproca, y como se conoce, ya queda explicado arriba, (387) ahora falta el resolverla. Multipliquese el primer termino por el segundo, y el producto partase por el tercero: Como en un Presidio hay bastimento para que 3600. Soldados se sustenten en 8. meses, si *hubiera* 4000. Soldados quanto tiempo se podrian sustentar? Multiplicando 3600. por 8. y partiendo el producto 28800. por 4000. sálen 7. meses y $\frac{800}{400}$, 6 $\frac{1}{5}$ de mes.

Otro exemplo: Si 8. Oficiales acaban una casa en 2. años, 5. Oficiales en quanto la acabarán? Multipliquese los 8. por 2. y el producto 16. partase por 5. el quociente 3. y $\frac{1}{5}$ serán los años buscados.

Otro exemplo: De paño de 4. palmos de ancho son menester 10. varas para un vestido, si el paño tiene 6. palmos, quantas varas seràn menester? Multiplicando 4. por 10. y partiendo el producto 40. por 6. salen 6. varas $\frac{4}{6}$.

Demonstracion.

En la proporcion inversa el primer termino tiene la misma razon al tercero, que el quarto al segundo (387); esto es, en el ultimo exemplo como 4. á 6. asi 6. y $\frac{4}{6}$ á 10. luego invirtiendo (307) será como 6. á 4. asi 10. á 6. y $\frac{4}{6}$, y con esto está reducida la proporcion inversa á directa; de suerte, que la misma razon tiene lo ancho de un paño con lo ancho del otro, como lo largo del segundo con lo largo del primero. Pues estando reducida, si se multiplica el tercero 10. por el segundo 4. y el producto 40. se parte por el primero 6. saldrá el quarto 6. y $\frac{4}{6}$, como consta por la proposicion antecedente, que es lo mismo, que si antes de la reduccion, se multiplica el primero por el segundo, ò este por aquel, y el producto se parte por el tercero. Con que reduciendo es la misma demonstracion, que la antecedente.

Escolio.

396 Qualquier question de regla de tres inversa se puede reducir à directa, como consta por la demonstracion, y resolverla como si fuera directa, como esta: En 4. meses acaban una casa 8. Oficiales, para acabarla en 2. meses quantos Oficiales serán menester? La qual se reducirá à directa poniendo el tercer termino en primer lugar, y el primero en segundo, el segundo termino estará en tercer lugar, deste modo: Si 2. meses dan 4. meses, 8. Oficiales quantos darán? Siguiendo la regla directa hallarémos 16. Oficiales, que son menester para acabar la casa en 2. meses.

De otro modo sin reduccion: Dividase el primero 4. por el tercero 2. y multipliquese el quociente 2. por el segundo 8. para hallar el quarto 16.

De otro modo sin reduccion: Partase el segundo 8. por el tercero 2. y el quociente 4. multipliquense por el primero 4. saldrán 16.

De otro modo sin reduccion: Partase el tercero 2. por el primero 4. y por el quociente $\frac{2}{4}$ se partirá el segundo 8. para hallar los mismos 16. Oficiales.

De otro modo sin reduccion: Dividase el tercero por el segundo, y partiendo el primero por el quociente, hallarémos el quarto.

Examen.

Para examinar la operacion de la regla de tres, multipliquense el primer numero por el segundo, y el producto ha de ser igual al producto del tercero por el quarto.

PROBLEMA IV.

DISPONER LOS TERMINOS DE LA REGLA DE TRES compuesta, y conocer si ay indireccion.

397 QUando los numeros conocidos son mas de tres, como cinco, siete, nueve, once, &c. (siempre el numero dellos es impar) la proporcion es compuesta, (382) y siempre concurren tres terminos principales, de los quales los dos son homogeneos, semejantes, ò numéran una misma cosa, y el otro està solo pero es homogeneo con el que se busca. De los dos terminos homogeneos conocidos, el uno tiene anexa la question, como se dixo arriba

ba (384), y á ellos acompañan todos los demas terminos como circunstancias, ó condiciones. De suerte, que los tres terminos principales forman una proporcion simple, y todos los otros terminos que hay en la proporcion compuesta les acompañan en particular á los dos homogeneos, como está dicho.

Todo esto verêmos claramente en esta question: Si 4. hombres en 10. meses ganan 24. doblones: 8. hombres en 20. meses quantos doblones ganarán? En donde los 4. 24. y 8. son los terminos principales, de los quales los 4. y 8. son homogeneos, porque numeran una misma cosa, y el 8. tiene annexa la question; el 24. está solitario, pero es homogeneo con el numero que se busca, los 10. y 20. meses acompañan por modo de circunstancia á los 4. y 8. hombres.

398 Esto supuesto; para disponer los terminos de la question de regla de tres compuesta, primeramente se buscaràn los tres principales mirando que terminos hacen algo; esto es, ganan, pierden, trabajan, &c. los quales solamente son dos, y son los homogeneos, como en la question propuesta 4. y 8. hombres: mirese tambien, que es lo que hacen, gan n pierden, &c. y este será el otro termino principal, que es solitario, pero homogeneo con el incognito, como son los 24. doblones: ultimamente vease con que circunstancias, tiempo, ó condiciones lo hacen, pierden, ganan, trabajan, &c. y estos son los terminos que acompañan á los homogeneos, como los 10. y 20. meses.

Pues de los dos terminos principales homogeneos, el que tiene anexa la question, que aqui son los 8. hombres, ponganse en tercer lugar con su compañero 20. meses: el otro homogeneo 4. hombres con su compañero 10. meses esté en primer lugar; y el termino principal solitario ponganse en medio, como en la regla de tres simple, pues aqui solos se añaden los terminos comitantes á los homogeneos.

399 Para entender esto mejor conducirà mucho el saber, que qualquier regla de tres tiene dos partes; en la una todos los terminos son conocidos; y en la otra (que comienza del termino, á quien está anexa la question) se ignora un termino, cuyo lugar se dexará vacío. Esto supuesto, se dispondrán los terminos como está dicho, pero de suerte, que el primero de una parte corresponda al primero de la otra, el segundo al segundo, &c. esto es que sean homogeneos. Y à cada termino se pondrà su exponente como parece en el exemplo siguiente: Si 8. molinos con 3. muelas cada uno, en 5. dias muelen

len 200. cahices de trigo; 3. molinos con 4. muelas cada uno, en 2. dias, quantos cahices molerán?

El P. Joseph Zaragozá, para disponer los terminos de la regla de tres compuesta, en su Arithmetica Universal *lib.* 1. *cap.* 13. no se vale desta regla de reducir la proporcion à tres terminos principales: sino que usa desta otra, copiada palabra por palabra: *Los numeros siempre se han de disponer de suerte, que el primero de la una parte sea de la misma especie que el primero de la otra, &c. de suerte, que se correspondan el primero con el primero, el segundo con el segundo, &c.* Y asi solo da por regla, el que se correspondan los terminos de una, y otra parte de la proporcion. Este modo es mas simple, pero pide cuydado para disponer la proporcion, de suerte que tenga sentimiente cabal: El otro modo que hemos dado, es mas artificioso, y da sentido à la question.

1	8. molinos.
2	3. muelas.
3	5. dias.
4	200. cahices.
5	3. molinos.
6	4. muelas.
7	2. dias.
8	cahices.

400 Dispuestos los terminos como se ve, falta averiguar si hay alguna proporcion inversa; porque como la proporcion compuesta conste de muchas proporcionales simples, las quales son tantas quantos terminos hay en la segunda parte, es contingente, que entre ellas se halle alguna indirecta, la qual se conocerá deste modo.

Resuelvase la proporcion compuesta en simples dexando los otros terminos, y suponiendo que en cada parte son los mismos asi: Si 8. molinos con ciertas muelas, y dias muelen 200. cahices, 3. molinos con las mismas muelas, y dias, quanto molerán? Esta proporcion es directa; porque siendo menor el numero de los molinos en la segunda parte, tambien han de moler menos; y resolviendola (392) saldrán 75. cahices.

Ahora formese otra proporcion simple respeto de las muelas, diciendo: Si 3. muelas en cierto tiempo muelen 75. cahices, que salieron en la proporcion antecedente; 4. muelas en el mismo tiempo quanto molerán? La qual tambien es directa; porque siendo las 4. muelas mas que las 3. tambien han de moler mas que 75. cahices; y asi siguiendo la regla (392) salen 100. cahices.

Ultimamente instituyase otra proporcion simple para los dias, diciendo: Si en 5. dias se muelen 100. cahices, que salieron en la question antecedente, en 2. dias quantos se moleràn? La qual tambien es directa, y resolviendola saldrán 40. cahices.

401 Otro exemplo: Si 4. Escribanos escriben 100. hojas en 3. dias 6. Escribanos 150. hojas en quantos dias las escribirán? Resuelvase la question, diciendo: Si 4. Escribanos para escribir ciertas hojas han menester 3. dias; 6. Escribanos para escribir las mismas hojas quantos dias abrán menester? Esta question es inversa; porque siendo mas los Escribanos en la segunda parte, han de ser menos los dias; la qual resuelta (395) dará 2. dias.

1	4. Escribanos.
2	100. hojas.
3	3. dias.
4	6. Escribanos.
5	150. hojas.
6	dias.

Formese otra regla de tres, respeto de las hojas diciendo: Si 100. hojas se escriben en 2. dias, que se hallaron antes; 150. hojas en quantos dias se escribirán? La qual es directa, porque siendo mas las hojas de la segunda parte, tambien han de ser mas los dias; con que la question propuesta contiene una proporcion inversa, y otra directa; y la indireccion está en el primero, y quarto termino, que son los Escribanos.

402 Otra regla dá el P. Andres Tracquet de la Compañia de Jesus en su *Arith. Pract. lib* 4. para conocer si la proporcion compuesta tiene inversion, que es la siguiente: Si en el primer, y tercer lugar comprehendiendo los terminos, que acompañan á los principales homogeneos) un termino, respecto de otro es circunstancia, medio, condicion, &c. la question es directa; pero si un termino hace algo respecto de su compañero, es inversa. Y asi, porque las muelas, y dias son circunstancias medios, ò condiciones, para que los molinos muelan, es la question directa; pero porque los Escribanos obran algo en sus compañeros que son las hojas, pues las escriben, la question contiene proporcion inversa. Esta regla es mas breve, pero es muy obscura, y facil de errar.

403 Ultimamente, para la cabal inteligencia de este Problema es conveniente advertir dos cosas, á mas de las que se notaron arriba (389. y 390.) la primera, que una misma proporcion compuesta, solo con mudar de termino incognito puede pasar de inversa á directa, ó al contrario, como en la proporcion antecedente, buscando los dias como con efecto alli se buscan, es la proporcion inversa; pero si se buscan las hojas, será directa. deste modo: Si 4. Escribanos en 3. dias escriben 100. hojas; 6. Escribanos en 3. dias quantas hojas escribirán?

404 La segunda, que todos los terminos superfluos, se deben

quitar de la proporcion, y resolverla en los que quedan. Y asi, quando en las dos partes de la proporcion un termino se expresa con un mismo numero, se ha de quitar; porque no muda la proporcion; como en esta question: Si 4. Escribanos en 3. dias escriben 100. hojas; 6. Escribanos en 3. dias quantas hojas escribirán? Porque los dias en una, y otra parte tienen el mismo numero, ó son los mismos, quitense, y quedará la question de este modo: Si 4. Escribanos escriben 100. hojas; 6. Escribanos, quantas escribirán?

405 Tambien son superfluos, y se deben quitar los terminos, que habiendo hecho alguna reduccion, son inutiles: como en la question propuesta antes: (399) Si ocho molinos cada uno con 3. muelas en 5. dias muelen 200. cahizes; 3. molinos cada uno con 4. muelas en 2. dias quanto molerán? Cada uno de los 8. molinos tiene 3. muelas; luego multiplicando los 8. por 3. serán 24. muelas las que tienen entre todos los 8. molinos; asimismo cada uno de los 3. molinos tiene 4. muelas: luego entre todos los 3. molinos tendrán 12. muelas; pues como las muelas son las que muelen, los molinos son inutiles, y mientras que en una parte haya 24 muelas, y en la otra 12. molerán lo mismo, aunque haya mas, ò menos molinos; y asi se han de quitar quedando la proporcion de este modo: Si 24. muelas en 5. dias muelen 200. cahices; 12. muelas en 2. dias quanto molerán?

406 Pero advierto, que esta reduccion no es necesaria, porque en la misma solucion está comprehendida, supuesto que se multiplican los terminos como luego verémos; solo lo que digo es, que habiendo hecho la reduccion son superfluos los terminos reducidos; por lo qual está manifiesto que no se debe seguir, lo que hace cierto Autor, que reduciendo dexa los mismos terminos, que están comprehendidos en la reduccion.

PROBLEMA V.

RESOLVER QUALQUIER QUESTION DE REGLA DE TRES compuesta, y directa.

407 Resuelvase la question compuesta en tantas simples, como terminos conocidos hay en la segunda parte conforme queda dicho en el Problema antecedente, y resolviendo cada una de por sí, se hallará el termino deseado.

Exemplo I.

Si 6. hombres en 4. meses ganan 30. libras ; 4. hombres en 5. meses quanto ganaràn ? Digase primero por regla de tres simple : Si 6. hombres en cierto tiempo ganan 30. libras; 4 hombres en el mismo tiempo quanto ganarán ? Siguiendo la regla (393) saldrán 20. libras. Digase otra vez: Si en 4. meses se ganan 20. libras; en 5. meses quantas se ganarán ? Siguiendo la regla (392) se hallarán 25. libras , que es el termino deseado.

1	6. hombres.
2	4. meses.
3	30. libras.
4	4. hombres.
5	5. meses,
6	libras.

Demonstracion.

Las reglas de tres simples , ya quedan demonstradas , con que toda la dificultad está en probar que ha de haber tantas reglas de tres simples , como terminos conocidos hay en la segunda parte de la proporcion , lo qual es manifiesto; porque cada termino conocido tiene connexion con el que se busca , de suerte , que mudando qualquiera de los conocidos , se muda tambien el no conocido ; y como todas las especies de los terminos conocidos estén en la segunda parte , habrá tantas reglas de tres como terminos en dicha segunda parte.

De otro modo.

4 8 Incorporense los terminos , que acompañan , en los principales homogeneos , multiplicando unos por otros , y en los productos , y termino principal solitario , formese la regla de tres : como en el mismo exemplo multiplicando los 4. meses que acompañan à los hombres de la primera parte por los 6. hombres, serán 24. multiplicando tambien los 4. meses que acompañan à los hombres de la segunda parte por los 4 hombres , son 20. Y con esto queda superfluo el numero de los hombres , y asi se ha de quitar. (405) Digase pues : Si en 24. meses se ganan 30. libras , en 20. meses, quanto se ganará ? Siguiendo la regla saldrán las mismas 25. libras.

Exemplo II.

Si 5. Terciopeleros , trabajando 8. horas cada dia , en 3. semanas texen 1000. varas de tafetan; 3. Terciopeleros, trabajando 9. horas cada dia, en 7. semanas quantas varas texerán? Digase: Si 5. Terciopeleros en ciertas horas, y semanas texen 1000. varas ; 3. Terciopeleros en el mismo tiempo

1	5. Terciopeleros.
2	8. horas.
3	3. semanas.
4	1000. varas.
5	3. Terciopeleros.
6	9. horas.
7	7. semanas.
8	varas.

quantas varas texerán? Siguiendo la regla (392) salen 600. varas.

Formese otra regla, diciendo: Si trabajando 8. horas cada dia, se texen en ciertas semanas 600. varas: trabajando 9. horas en las mismas semanas quanto se texerá? Siguiendo la misma regla, saldrán 675. varas.

Otra vez digase: Si en 2. semanas se texen 675. varas; en 7. semanas quantas se texerán? Siguiendo la misma regla saldrán 1575. varas, que es el termino que se busca.

De otro modo: Multipliquense los terminos que acompañan á los principales; esto es 3. 8. 5. por una parte, y 7. 9. 3. por otra, y serán los productos 120., y 189. Digase aora: Si 120. dán 1000. 189. qué darán? Siguiendo la regla vendrán las mismas 1575. varas.

Exemplo III.

Si en 3. Conventos de 30. Religiosos cada uno, en 4. semanas dando 2. cahices de limosna, se consumen 8. cahices de trigo: en 5. Conventos de 20. Religiosos cada uno, en 6. semanas, dando 4. cahices de limosna, quantos cahices avrán menester? Resuelvase en reglas simples: Si 3. Conventos, con ciertos Religiosos, semanas, y limosna, consumen 8. cahices: 5. Conventos, con los mismos Religiosos, &c. quanto consumirán? Sigase la regla, (392) multiplicando 5. por 8. y partiendo el producto 40. por 3. y porque no se puede enteramente, partase haciendo quebrando asi $\frac{40}{3}$.

1	3. Conventos.
2	30. Religiosos.
3	4. semanas.
4	2. limosna.
5	8. cahices.
	. . . . . .
6	5. Conventos.
7	20. Religiosos.
8	6. semanas.
9	4. limosna.
10	cahices.

Hagase otra regla: Si 30. Religiosos, con ciertas semanas, y limosna consumen $\frac{40}{3}$ de cahiz: 20. Religiosos, con las mismas circunstancias, quantos consumirán? Sigase la regla multiplicando 20. por $\frac{40}{3}$. que es multiplicar solo el denominador (181) y el producto $\frac{800}{3}$. dividase por 30. multiplicando el denominador (195), y serán $\frac{800}{90}$. de cahiz; ò mas abreviado $\frac{80}{9}$.

Formese otra regla diciendo: Si en 4. semanas, con cierta limosna, se gastan $\frac{80}{9}$. de cahiz: en 6. semanas quanto se gastarà? Multiplicando 6. por $\frac{80}{9}$. que es multiplicar 6. por 80. y partiendo el producto $\frac{480}{9}$. por 4. que es multiplicar el denominador, saldrán $\frac{480}{36}$. de cahiz, que abreviados son $\frac{80}{9}$.

Ultimamente digase: Si dando de limosna 2. cahices se gastan $\frac{40}{3}$ de cahiz ? dando de limosna 4. cahices, quantos se gastarán? Multiplicando 4. por $\frac{40}{3}$, que es multiplicar el numerador, y partiendo el producto $\frac{160}{3}$ por 2. que es multiplicar el denominador, salen $\frac{160}{6}$ de cahiz, que son 26. cahices y $\frac{2}{3}$ el termino que se buscaba.

De otro modo.

Multipliquense los terminos que acompañan á los homogeneos principales, por los mismo homogeneos; esto es, 3. 30. 4. 2. y será el producto 720. multipliquense tambien entre sí 5. 20. 6. 4. y saldrán 2400. Digase ahora por regla de tres, si 720. dàn 8. que darán 2400? Siguiendo la regla, saldrán los mismos 26. cahices y $\frac{2}{3}$.

Consectario.

408 Si se considera con atencion el progreso de las operaciones antecedentes, estará manifiesto, que en el primer exemplo dividendo el producto de los terminos, tercero, quarto, y quinto, por el producto del primero, y segundo, sale el sexto termino, el qual multiplicado por el primero, y segundo, necesariamente ha de restituir al producto del tercero, quarto, y quinto, que se partió: luego el producto del sexto, primero, y segundo, es igual al producto del tercero, quarto, y quinto.

En el exemplo 2. el producto del termino quarto, quinto, sexto, y septimo, partido por el producto del primero, segundo, y tercero, dà el octavo termino, el qual multiplicando por este ultimo producto, buelve á restituir al producto del quarto, quinto, sexto, y septimo: luego el producto del octavo, primero, segundo, y tercero, es igual al producto del quarto, quinto, sexto, y septimo. Asimismo en el exemplo 3. el producto del termino decimo, primero, segundo, tercero, y quarto, es igual al producto del quinto, sexto, septimo, octavo, y nono; y asi de las demas operaciones.

Con que en qualquier question de regla de tres compuesta, si el ultimo exponente se escribe primero, y despues los demas por su orden, dividiendo los exponentes con una linea, de suerte, que haya tantos à una parte como à otra, serán los productos de una, y otra parte iguales; como en las questiones de cinco numeros, pongase primero el ultimo exponente, que es 6. y despues los demas deste modo 6. 1. 2. | 3. 4. 5. será el producto de los numeros correspondientes à los exponentes 6. 1. 2. igual al producto de los numeros correspondientes à los exponentes 3. 4. 5.

En las questiones de 7. numeros escribiendo el ultimo exponente en primer lugar, y los demas consecutivamente dividiendolos con una linea deste modo, 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7. será el producto de los numeros

ros correspondientes à los exponentes 4. 5. 6. 7. igual al producto de los numeros correspondientes à los exponentes 8. 1. 2. 3.

En las questiones de 9. numeros se escribirán los exponentes asi 10. 1. 2. 3. 4. | 5. 6. 7. 8. 9. y los productos de los numeros que acompañan en la question à los exponentes en ambas partes serán iguales; y asi de las demás questiones de 11. 13. 15. numeros, &c.

Examen.

410 Escribanse los exponentes como acabamos de decir, y multiplicando los terminos correspondientes à los exponentes, los productos de una, y otra parte han de ser iguales: como en el exemplo 1. dispuestos los exponentes serán 6. 1. 2. | 3. 4. 5. Los numeros correspondientes à los 6. 1. 2. son 25. 6. 4. (el 25. es el termino hallado) los quales multiplicados entre sí hacen 600. pues los numeros correspondientes à los otros exponentes 3. 4. 5. que son 30. 4. 5. tambien multiplicados entre sí hacen 600.

En el exemplo 2. dispuestos los exponentes, serán 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7. cuyos terminos correspondientes à los 8. 1. 2. 3. son 1575. 5. 8. 3. los quales multiplicados entre sí producen 189000. pues lo mismo han de producir los numeros 1000. 3. 9. 7. correspondientes à los exponentes 4. 5. 6. 7.

PROBLEMA IV.

RESOLVER LA QUESTION DE REGLA DE TRES compuesta, quando ay inversion.

411 EL modo para conocer quando la question de regla de tres compuesta contiene proporcion inversa, ya queda enseñado en el Problema 4. aora solo falta el resolverla. Resuelvase, pues, en proporciones simples, como queda dicho, y cada una se resolverá por el Problema 2. ò. 3. segun fuere directa, ò inversa.

Exemplo I.

Si 10. Labradores aran 8. cahizadas de tierra en 3. dias; 12. Labradores 20. cahizadas en quantos dias las ararán? Digase: Si 10. Labradores aran ciertas cahizadas en 3. dias; 12. Labradores las mismas cahizadas en quantos dias las ararán? Esta question es inversa, porque creciendo el numero de los Labradores, han

1	10. Labradores.
2	8. cahizadas.
3	3. dias.
4	12. Labradores.
5	20. cahizadas.
6	dias.

de menguar los dias, y la inversion está en el primero, y quarto termino de la question compuesta; que son los Labradores; resuelvase, pues, (395) multiplicando 10. por 3. y partiendo el producto 30. por 12. y porque justamente no se puede, partase en forma de quebrado asi $\frac{30}{12}$. ò abreviando $\frac{5}{2}$.

Formese otra regla de tres simple para las cahizadas, deste modo: Si 8. cahizadas se labran en $\frac{5}{2}$. de dias; 20. cahizadas en quanto tiempo se labrarán? Esta es directa, porque siendo mas las cahizadas, han de ser tambien mas los dias; resuelvase, pues (392), multiplicando las 20. cahizadas por los $\frac{5}{2}$. que es multiplicar el numerador, y el producto $\frac{100}{2}$. dividase por 8. que es multiplicar el denominador; el quociente $\frac{100}{16}$. que son 6. dias y $\frac{1}{4}$. será el termino deseado.

Exemplo II.

Si valiendo el cahiz de trigo 6. libras, y pesando 12. arrobas, por 4. dineros, dán 12. onzas de pan; valiendo 7. libras, y pesando 14. arrobas, por 6 dineros, quantas onzas darán? Digase: Si valiendo 6. libras con cierto peso, y por ciertos dineros dan 12. onzas; valiendo 7. libras con las mismas circunstancias, quantas onzas darán? Esta proporcion es inversa, porque creciendo el valor del trigo, han de menguar las onzas; pues multiplicando 6 por 12. y partiendo el producto 72. por 7. haciendo quebrado asi $\frac{72}{7}$. serán las onzas.

1	6. libras.
2	12. arrobas.
3	4. dineros.
4	12. onzas.
	. . . . .
5	7. libras.
6	14. arrobas.
7	6. dineros.
8	onzas.

Hagase otra regla de tres simple, diciendo: Si 12. arrobas dán $\frac{72}{7}$. de onza; 14. arrobas quanto darán? Esta es directa; porque creciendo el peso, han de crecer las onzas en numero: pues multiplicando 14. por $\frac{72}{7}$. que es multiplicar el numerador, (181) y partiendo el producto 1008. 7. avos por 12. que es multiplicar el denominador (295) saldrán 1008. 84. avos de onza.

Ultimamente digase: Si 4. dineros dán 1008. 84. avos de onza 5. dineros quanto darán? Esta proporcion es tambien directa; porque creciendo los dineros, han de crecer tambien el numero de las onzas; pues multiplicando 6. por 1008. 84. avos, que es multiplicar el numerador, y partiendo el producto 6048. 84. avos por 4. que es multiplicar el denominador, saldrán 6048. 336. avos, esto es 18 onzas, y tantas onzas darán con las dichas circunstancias por 6. dineros.

Exemplo III.

1	2. Escribanos.
2	20. hojas.
3	30. lineas.
4	50. letras.
5	3. dias.
6	4. Escribanos.
7	15. hojas.
8	20. lineas.
9	32. letras.
10	dias.

Si 2. Escribanos escriben 20. hojas de á 30. lineas cada una, y de á 50. letras cada linea en 3. dias; 4. Escribanos, para escribir 15. hojas de á 20. lineas cada una, y de á 32. letras cada linea. quantos dias abrán menester? Resuelva se en proporciones simples deste modo: Si 2. escribanos escriben ciertas hojas de ciertas lineas, y letras en 3. dias; 4. Escribanos las mismas hojas en quantos dias las escribirán? Esta proporcion es inversa, porque creciendo el numero de los Escribanos, ha de menguar el numero de los dias, pues multiplicando 2. por 3. y partiendo el producto 6. por 4. en forma de quebrado asi $\frac{6}{4}$ serán los dias.

Ahora por razon de las hojas formese otra regla de tres simple, diciendo: Si 20. hojas de ciertas lineas, y letras, se escriben en $\frac{6}{4}$ de dia; 15. hojas con las mismas circunstancias en quantos dias se escribirán? Esta es directa, porque siendo menos las hojas, tambien han de ser menos los dias; multipliquense, pues, las 15. hojas por $\frac{6}{4}$ multiplicando solo el numerador, y el producto $\frac{90}{4}$ partase por 20. multiplicando solo el denominador, y serán $\frac{90}{80}$ de dia, que abreviando es $\frac{9}{8}$.

Hagase otra regla de tres atendiendo á las lineas: Si 30. lineas de ciertas letras cada una se escriben en $\frac{9}{8}$ de dia 20. de las mismas letras, en quanto se escribirán? La qual tambien es directa, pues multiplicando 20. por $\frac{9}{8}$ que es multiplicar el numerador, y partiendo el producto $\frac{180}{8}$ por 30. que es multiplicar el denominador, saldrán 180. 240. avos de dia, que abreviando en $\frac{3}{4}$.

Ultimamente: Si 50. letras se escriben en $\frac{3}{4}$ de dia, 32. en quanto tiempo se escribirán? La qual tambien es directa; pues multiplicando 32. por $\frac{3}{4}$, y partiendo el producto $\frac{96}{4}$ por 50. saldrán 96 200. avos de dia, que son 5. horas 45. minutos y 36. segundos por el termino deseado. Advierto aqui en la reduccion, ò valor del quebrado, que aunque el dia tiene 24. horas, pero para el trabajo solas se cuentan 12. y en esta forma está reducido el quebrado.

Con-

Consectarios.

412 Quien atendiere con cuydado à las operaciones antecedentes verá, que si se truecan los terminos donde está la inversion, será lo mismo que el consectario del Problema antecedente; y asi en la question de cinco terminos directa escribiendo los exponentes deste modo 6. 1. 2. | 3. 4. 5. el producto de una parte, es igual al de la otra; y en la inversa, mudando los exponentes de los numeros donde está la inversion, que en el exemplo 1. es en el primero, y quarto termino, asi 6. 4. 2. | 3. 1. 5. los productos de entrambas partes son iguales.

En el exemplo segundo, si todas las proporciones fueran directas, serian los exponentes 8. 1. 2. 3. | 4 5. 6. 7. (409). Pero como ay una proporcion inversa, que está en el primero, y quinto termino, ordenense estos exponentes pasando de una parte à otra asi 8. 5. 2. 3. | 4. 1. 6. 7. y dispuestos deste modo, el producto de los terminos correspondientes à los exponentes de una parte será igual al producto de los terminos correspondientes à los exponentes de la otra parte. Lo mismo es en qualquier otra regla de tres compuesta, è inversa, pasando siempre de una à otra parte los exponentes, que contienen la inversion.

Examen.

413 Escribanse los exponentes, como si la question fuera directa, segun se dixo antes, y despues mudense de una à otra parte los exponentes en donde está la inversion; estando deste modo, si los productos de entrambas partes son iguales, la operacion está bien hecha.

MODO FACIL PARA RESOLVER QUALQUIER REGLA de tres compuesta.

414 De lo dicho hasta aqui se infiere un modo facilisimo para resolver qualquier proporcion compuesta, aunque el numero que falta, no sea el ultimo, sino qualquier otro; para lo qual se guardarán los preceptos siguientes.

415 Primero: Escribanse los terminos de la pregunta, y al lado sus exponentes, dexando vacío el lugar del termino, que se busca.

416 Segundo: Escribanse los exponentes de suerte, que el ultimo (sea el que falta, ò no) esté en primer lugar, y los otros por su orden, dividiendolos con una linea de modo, que aya tantos á una parte como à la otra, y asi en las questiones de 5. numeros estarán deste modo 6. 1. 2. | 3. 4. 5. en las de 7. asi 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7.

7. en las de 9. asi 10. 1. 2. 3. 4. | 5. 6. 7. 8. 9. en las de 11. deste modo 12. 1. 2. 3. 4. 5. | 6. 7. 8. 9. 10. 11. y asi de las demas.

417 Tercero: Examinese si hay alguna, ó algunas inversiones en la question (397), si no hay inversion, quedarán los exponentes en la forma sobredicha; pero si la hay, los exponentes donde está la inversion, pasarán de una á otra parte, como si en la question de 7. numeros la inversion está en el 2. y 7. se mudarán de este modo 8. 1. 6. 3. | 4. 5. 2. 7. si hubiere otra inversion en el 3. y 7. se dispondrá de este modo 8. 1. 6. 7. | 4. 5 2. 3. y asi de las demas.

418 Quarto: Dispuestos los exponentes, se multiplicarán entre si los terminos correspondientes á los exponentes de la parte donde estuvieren todos conocidos, y el producto será el numero dividendo; tambien se multiplicarán entre sí los numeros correspondientes á los exponentes de la parte donde falta el termino que se busca, y el producto será el partidor; hagase la division, y el quociente será el termino que se busca. Para esto aprovechará mucho tener en memoria los consectarios de los Problemas antecedentes.

Exemplo I.

1	8. hombres.
2	10. doblones.
3	50. libras.
	. . . . . .
4	3. hombres.
5	15. doblones.
6	libras.

Si 8. hombres, cada uno con 10. doblones, ganan 50. libras; 3. hombres, cada uno con 15. doblones quanto ganarán? Escribanse los exponentes como està dicho 6. 1. 2. 3. 4. 5. y porque no hay inversion, quedarán asimismo los dichos exponentes. Ahora porque el termino que falta es el correspondiente al 6. que está en la primera parte, multipliquese el 8. por 10. (que son los terminos correspondientes á los exponentes 1. y 2.), y el producto 80. será el partidor: Multipliquese entre sí los numetos 50. 3. y 15. que corresponden à los exponentes 3. 4. 5. y el producto 2250. será el dividendo; hecha la division de 2250. por 80. será el quociente 28. y $\frac{1}{8}$ el sexto termino.

Si el termino que falta no es el sexto, sino qualquier otro, como [illegible] quarto, asi: Si 8. hombres con 10. doblones cada uno, ganan 50. libras: quantos hombres con 15. doblones cada uno ganarán 28. libras y $\frac{1}{8}$. Dispuestos los exponentes 6. 1. 2. | 3 4. 5. porque el termino que falta es el quarto, que está en la segunda parte de los exponentes, multipliquense los numeros 28. y $\frac{1}{8}$ 8. 10. correspondientes á los exponentes 6. 1. 2. y el producto 2250. partase por el producto 750 los numeros 50. y 15. correspondientes á los exponentes 3. y 5. el quociente 3. será el quarto termino.

Si falta otro termino, como el quinto de este modo: Si 8. hombres con 10. doblones cada uno, ganan 50. libras; 3. hombres con quantos doblones ganarán 28. libras y $\frac{1}{8}$? Dispuestos los exponentes como está dicho, serán 6. 1. 2. | 3. 4. 5. y pues el termino que falta, es el quinto, que está en la segunda parte de los exponentes, multipliquense los numeros 50. y 3. correspondientes á los exponentes 3. y 4. de la parte donde falta el termino quinto, y el producto 150. será el partidor: Multipliquense tambien los numeros 28. y $\frac{1}{8}$ 8. 10. correspondientes á los exponentes 6. 1. 2. de la otra parte, y el producto 2250. será el numero dividendo: hecha la division, se hallará el termino quinto 15. doblones.

1	8. hombres.
2	10. doblones.
3	50. libras.
4	3. hombres.
5	15. doblones.
6	28. libras y $\frac{1}{8}$.

Exemplo II.

Si 4. hombres consumen para su sustento 2. cahizes de trigo, que pesa cada uno 12. arrobas en 10. semanas; 3. hombres, 5. cahices de peso de 13. arrobas en quanto tiempo los consumirán? Los exponentes se escribirán asi 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7. y porque hay inversion en el 1. y 5. mudense deste modo, 8. 5. 2. 3. | 4. 1. 6. 7. y multiplicando entre sí los numeros 10. 4. 5. 13. que corresponden á los exponentes 4. 1. 6. 7. será el producto 2600. el numero dividendo, multiplicando los numeros 3. 2. 12. correspondientes á los exponientes 5. 2. 3. el producto 72. será el divisor: hecha la division, saldrá el octavo termino 36. $\frac{1}{9}$.

1	4. hombres.
2	2 cahices.
3	12. arrobas.
4	10. semanas.
5	3. hombres.
6	5. cahices.
7	13. arrobas.
8	semanas.

Asimismo, si falta qualquier otro termino multiplicando los numeros correspondientes à los exponentes de la parte donde estan conocidos todos, el producto será el dividendo; y multiplicando los numeros correspondientes á los exponentes conocidos de la parte donde falta será el producto del divisor. Esto quiere exercicio.

De-

Demonstracion.

Dispuestos los exponentes como està dicho, el producto de los numeros correspondientes á los exponentes de una parte, es igual al producto de los numeros correspondientes á los exponentes de la otra parte (40. y 412.) luego partiendo el producto de la parte donde no falta termino alguno, por el producto de la parte donde falta algun termino, será el cociente el termino que se busca.

Advierto que si falta alguno de los terminos intermedios, la question no pasa de directa á inversa, ó al contrario; pero si se dispone la pregunta de suerte, que el termino intermedio que falta, esté en el ultimo lugar, puede suceder, que de directa pase á inversa, ò al contrario, como se notó arriba. (403.)

Advierto tambien, que aunque no hemos puesto exemplos en numeros denominados, ó quebrados, se han de seguir las mismas reglas; pues no añaden otra dificultad mas que multiplicar, y partir quebrados, ó numeros denominados, la qual queda explicada en la segunda, y tercera parte del libro 1. Pero para evitar el enfado que traen el multiplcar, y partir numeros denominados; si los hubiere en alguna regla de tres, se podrán reducir á la minima especie. (76) y despues obrar como si fueran enteros; advirtiendo, que si un termino se reduce, tambien se ha de reducir á la misma especie el otro termino homogeneo, ó semejante, como se verá en el numero 458. question 57.

CAPITULO TERCERO.

DEL EXERCICIO DE LA REGLA DE TRES.

PAra que el estudioso halle juntas las questiones de una misma especie, divido este exercicio de diferentes clases de reducciones de monedas, pesos, y medidas, intereses, ganancias, arrendamientos, &c. Advirtiendo, que aunque algunas questiones se resuelvan sin regla de tres, pero eso no obstante me ha parecido ponerlas aqui, para que esten todas las de una especie juntas.

Reducciones de monedas pesos, y medidas.

419 Question 1. 27. doblones, quantas libras son de Valencia; porque cada doblon en Valencia, vale 3. libras y 17. sueldos, ó 38. reales, y $\frac{1}{2}$. Multipliquense los 27. doblones por 38. reales, y $\frac{1}{2}$, y

el producto 1039. reales, y $\frac{1}{2}$. reduzgase à libras, partiendo por 10. que es quitar el primer guarismo 9. y quedarán 103. libras y 9. reales, y $\frac{1}{2}$. ò 19. sueldos, y tanto importarán los 27. doblones. Lo mismo se halla multiplicando los 27. doblones por 3. libras, y 17. sueldos (226).

420 Question 2. Pedro ha de pagar 3624. libras moneda de Valencia en doblones; preguntase, quantos ha de dár? Reduzga las libras à sueldos multiplicando por 2. y añadiendo un zero, y serán 72480. sueldos dividalos por 77. sueldos que vale un doblon, y hallará 941. doblon, y sobran 23. sueldos, que ha de dar en otra moneda.

Para reducir los doblones à libras, y sueldos, ò al contrario, tienen los Mercaderes, y otras personas de negocio, una tabla del valor de los doblones, la qual se hace deste modo: Escribase el valor de un doblon, doblese, y saldrá el valor de dos doblones: sumese el valor de un doblon con el de dos doblones, y saldrán tres, sumese el valor de uno con el de los tres, y serán quatro, y asi prosiguiendo en suma el valor de un doblon con todos los demás, saldrá el immediate siguiente, como parece en la presente tabla.

1	3. lib.	17. suel.
2	7. lib.	14. suel.
3	11. lib.	11. suel.
4	15. lib.	8. suel.
5	19. lib.	5. suel.
6	23. lib.	2. suel.
7	26. lib.	19. suel.
8	30. lib.	16. suel.
9	34. lib.	13. suel.
10	38. lib.	10. suel.
	&c.	

Esto supuesto, si quiero saber 7. doblones quanto valen, enfrente del 7. hallo 26. libras, y 19. sueldos. Al contrario, si quiero saber 34. libras 8. sueldos quantos doblones hacen, busco el numero proxime menor à las 34 libras 8. sueldos y hallo 30. libras 16. sueldos, y al lado 8. doblones, resto aora las 30. libras 16. sueldos de las 34. libras 8. sueldos, y sobran 3. libras 12. sueldos que ay à mas de los 8. doblones.

Asimismo para reducir en Valencia los reales de à ocho à libras, se multiplicarán por 9 reales, y $\frac{3}{4}$. que vale cada uno, y el producto se reducirá à libras; como si quiero saber 124. reales de à ocho, quantas libras son, los multiplico por 9. y $\frac{3}{4}$. multiplicando primero por 9. y despues sacando mitad por los dos quartos, y mitad de la mitad por el otro quarto, el producto 1209. son reales, que quitado el 9. serán 120. libras y 9. reales, ò 18. sueldos.

Lo mismo se puede hacer de otra manera. Se han de reducir 253. reales de à ocho à libras de Valencia: Supongo que los reales de á ocho son libras; pues porque à cada real de à ocho falta un quartillo, ó seis dineros para una libra habré de quitar tantos quartillos como reales á de ocho, pues dividiendo 253. quartillos por 4. tendrè 63. reales, y un quarto; esto es, 6. libras 6. sueldos y 6. dineros. Restoles de los 253. y quedan 246. libras 13. sueldos y 6 dineros, que valen los 253. reales de à ocho.

421 Question 3. Dos mil maravedis, quantas libras son de Valencia? El real de à ocho Mexicano en Castilla vale 15. reales de vellon, que son 510. maravedis, en Valencia valen 19. sueldos, y 6. dineros, que son 234. dineros. Digase, pues, por regla de tres: Si 510. maravedis son 234. dineros, 2000. maravedis quantos dineros serán? Multiplicando 2000. por 234 y partiendo el producto 468000. por 510. saldrán 917. dineros, que reducidos á libras, y sueldos (100) son 3 libras 16. sueldos 5 dineros, y treinta y tres cinquenta un avos.

Del mismo modo reduciré los 2000. maravedis á moneda de Aragon, donde el real de á ocho vale 8. reales, ó 192. dineros, diciendo: Si 510. maravedis dan 192. dineros, 2000. maravedis quantos dineros darán? Siguiendo la regla hallo 752. dineros, reduzgolos á libras, y sueldos, y hallo tres libras dos sueldos, y ocho dineros.

Pero adviertase, que aunque segun la Pragmatica el real de à ocho Mexicano vale en Castilla 15. reales de vellon, eso no obstante en el trato comun vale 15. reales, y un ochavo, que son 512. maravedis; y segun esto, se ha de decir: Si 512. maravedis dan 234. dineros de Valencia; luego 2000. maravedis darán 914. dineros, y un diez y seis avos, que son 3. libras 16. sueldos y 2. dineros, y mas el dicho quebrado; y lo mismo es en otros Reynos.

422 Question 4. Preguntase: Los 30. reales en que Christo nuestro Señor fue vendido por Judas, quanto son de la moneda de Valencia? Para resolver esta question es necesario acordarse de lo que se advirtiò en los proemiales tratando de las monedas, pesos, y medidas Hebreas: que siempre que en la Sagrada Escritura se nombra *Argenteus* sin añadir mas, se entiende siclo; y como la Escritura diga *Constituerunt ei triginta argenteos*, Matth. 26. vers. 15. eran 30. siclos; y como cada siclo era media onza, y en el valor casi igual á un real de á quatro Mexicano, serian los 30. siclos lo mismo que 15. reales de á ocho, que en Valencia valen (420) 14. libras 12. sueldos y 6. dineros. Por este vil precio fue vendido Jesu-Christo.

Pero advierto, que en la Iglesia Mayor de esta Ciudad de Valencia se guardan dos reales de los que Judas vendió á Christo, cuñados en Rhodas, como consta por el cuño del Sol, y cada uno pesa medio siclo, pues son del tamaño de un real de á dos. Lo mismo dice Vilalpando de uno que vió en Roma: Y asi à Judas le debieron dar 60. de estos, los quales hacen 30 siclos; y siempre es verdadero decir que le dieron 30. siclos. Como si hubiera de dar 30. doblones, y pagára con 60. medios doblones, seria verdadero decir, que habia dado 30. doblones.

423 Question 5. De la epistola que se canta en la Misa de los difuntos, consta, que Judas Machabeo, embió al Templo de Jerusalen 12000. dragmas de plata, para ofrecer Sacrificio por los que eran muertos en la guerra; preguntase quanto corresponde en nuestras monedas? La respuesta es facil; porque como consta de la segunda parte de los proemiales, una dracma vale lo mismo que un real de plata Mexicano, Con que las 12000. dragmas son otros tantos reales de plata, y partidos por 8. son 1500. reales de á ocho Mexicanos, que en Valencia valen 1462. libras 10. sueldos.

424 Question 6. Un Mercader ha de llevar de Valencia á Madrid 1262. varas de tafetan, pregunta quantas varas serán en Madrid? Porque 12. varas de Valencia son 13. de Castilla, como está dicho en los proemiales, diga por regla de tres. Si 12. dan 13. que darán 1262. Siguiendo la regla hallará 1367. varas, y un sexto.

425 Question 7. Pedro merca en Castilla 30. cahices, y 8. hanegas de trigo por 45. reales de vellon el cahiz; despues los trahe á Valencia, haciendo de gastos 30. libras y los vende à 7. libras el cahiz; preguntase quanto gana. Reduzganse à celemines (76), y serán 4416. Digase por regla de tres: Si 12. celemines de Castilla son 13. de Valencia (proem. part. 2.), 4416. quantos serán de Valencia? Siguiendo la regla saldrán 4784. los quales reducidos à cahices (100) son 99. cahices, y 8. barchillas.

Saquese el valor de los 30. cahices, y 8. hanegas, multiplicando asi mismo los 99. cahices, y 8. barchillas por 7. libras, y valdrán 697. libras, y dos tercios; restense las 30. libras de gastos, y quedarán 667. libras, y dos tercios, las quales reducidas à reales, y multiplicando por 10. son 6676. reales, y dos tercios. Esto supuesto, formese una regla de tres: Si 9. reales y tres quartos, que vale el real de á ocho en Valencia, dan 15. reales de vellon en Castilla, 6676. reales, y dos tercios de Valencia, que darán en Castilla? Siguiendo la regla, salen 10271. real de Castilla, y 31. 39. avos, de los quales restando

do

do los 1380. reales que costó el trigo en Castilla, quedan 8891. reales de ganancia.

426 Question 8. Salomon daba cada año al Rey Hirám 20000. coros de trigo, como consta del 3. de los Reyes, *cap.* 5. *v.* 11. preguntase quantos cahices eran de Valencia? Porque cada coro contenia 5. medimnos, y cada medimno era igual á una hanega de Castilla, como consta de los Proemiales, multipliquense los 20000. coros por 5. y saldrán 100000. medimnos, ó hanegas de Castilla ; y porque cada hanega contiene 12. celemines, multiplicando por 12. saldrán 1200000. celemines de Castilla ; ahora digase por regla de tres : Si 12. celemines de Castilla, son 13. celemines de Valencia ; 1200000. celemines de Castilla, quantos seràn de Valencia ? Siguiendo la regla, salen 1300000. celemines de Valencia, que son 27083. cahices y 4. barchillas.

427 Question 9. El Rey Atalo compró de Aristide, Pintor Tebàno, una tabla pintada por 100. talentos, como lo dice Plinio en el *lib. 7. cap.* 38. pidese quantas libras serian de Valencia ? De los Proemiales consta, que cada talento contenia 6000. dragmas, ò reales de plata, los quales multiplicados por 100. serán 600000. y partidos por 8. que son los reales que tiene un real de á ocho, seràn 75000. reales de á ocho, los quales valen al presente en Valencia 73125. libras. Excelente pincèl seria, pues fue estimado en tanto precio. De Demetrio, afirma el mismo Plinio en el lugar citado, que no quiso poner fuego á Rhodas por no quemar una pintura de Protogenes, que estaba en aquella parte del muro por donde habia de entrar. De Alexandro Magno se cuenta, que dió 800. talentos à Aristoteles para que adelantàra la Filosofia, que son 60000. reales de á ocho.

Cambios.

El cambio es un trueque de una moneda en otra en un mismo lugar, ó en diferente. Dos modos hay de cambios, en quanto pertenecen à la Arithmetica : el uno es, *cambio menudo*, que es un trueque de una moneda en otra sin interés alguno : el otro es, *cambio real*, quando interviene interés en el trueque, ó sea en un mismo Reyno, ó en diferente ; y tambien ès cambio real, quando no se cambia la moneda, sino que una misma se transporta, pero pagando interès por la conduccion. Muchas questiones de cambios, particularmente menudos, quedan ya resueltas, ahora resolverè otras.

428 Question 10. Un mercader dió à otro en Zaragoza 240. libras 8. sueldos, para que se los haga buenos en Valencia, pidese quan-

tas le dará en Valencia ? Resuelvanse las 240. libras 8. sueldos en reales, multiplicando las libras por 10. y los sueldos partiendolos por 2. y sumando el quociente en los reales, serán 2404. reales; digase ahora por regla de tres: Si 8. reales (que es valor del real de à ocho en Zaragoza) dan 9. reales y $\frac{3}{4}$. (que es el valor en Valencia) que darán 2404. reales ? Siguiendo la regla, saldràn 2929. reales y $\frac{7}{8}$. que son 292. libras 1. sueldo y 9. dineros, y tanto le ha de dar en Valencia.

429 Question 11. Pedro ha de cambiar en Valencia 20. doblones por moneda de plata Valenciana, pagando á razon de 2. libras y $\frac{1}{2}$. por 100. porque la plata es mas estimada, que el oro; preguntase quantas libras recibirà ? Reduzga los doblones à libras (419), y serán 77. libras. Reste las 2. libras y $\frac{1}{2}$. de 100. y quedarán 97. libras y $\frac{1}{2}$. Diga ahora por regle de tres: Si 100. libras estàn rebaxadas à 97. libras y $\frac{2}{3}$. las 77. libras à quantas se rebaxarán ? Siguiendo la regla, hallará 75. libras 1. sueldo y 6. dineros, y tanto ha de recibir en moneda de plata.

430 Question 12. Al contrario, Pedro tiene 420. libras en plata, y quiere cambiarlas en Valencia por doblones para ganar el interés corriente, que supongo es á 2. libras por 100. pidese quantos doblones recibirá ? Sume las 2. libras de interès con las 100. y serán 102. diga ahora por regla de tres: Si 100. dan 102. que darán 420. ? Siguiendo la regla salen 428. libras 8. sueldos, las quales convertidas en doblones (420) son 111. doblones, y mas 1. libra y 1. sueldo, que es lo que ha de recibir.

431 Question 13. Un Mercader en Valencia, da à otro 150. libras 12. sueldos, para que se las abone en Barcelona, pagando de interés à 3. por 100. moneda de Valencia, preguntase quantas le ha de hacer buenas en Barcelona ? Resta las 3. libras de las 100. y quedan 97. Dí ahora por regla de tres: Si 100. libras se han rebaxado á 97. por razon del interés; 150. libras 12. sueldos, á quantas se rebaxarán? Siguiendo la regla, hallarás 146. libras 1. sueldo y 7. dineros y $\frac{17}{25}$. y que estas libras de Valencia se han de convertir en moneda de Barcelona, dirás por regla de tres: Si 234. dineros, que vale el real de à ocho en Valencia, son 336. ardites de Barcelona; 35059. dineros de Valencia (están reducidas las 146. libras 1. sueldo y 7. dineros, á dineros, dexado el quebrado, para hacer la operacion mas facil) quantos serán de Barcelona ? Siguiendo la regla, hallarás 50341. ardites, los quales reducidos à libras son 204. libras 15. sueldos 1. dinero, y tanto ha de abonar en Barcelona.

Si el interés se paga aparte, de suerte, que todas las 150. libras 12. sueldos, se han de transportar à Barcelona, primeramente se verá lo que sube el interès de este modo: Si 100. libras hacen 3. de interés; 150. libras 12. sueldos, quanto harán? Siguiendo la regla, hallarémos 4. libras 10. sueldos 4. dineros, y tanto se ha de pagar de interés à mas de las 150. libras 12. sueldos. Ahora para saber lo que corresponde en Barcelona, à las dichas 150. libras 12. sueldos, se harà otra regla de tres: Si 9. reales y $\frac{3}{4}$. que es el valor del real de á ocho en Valencia, son 14. reales en Barcelona, ò para quitar quebrados: Si 39. reales de Valencia, son 56. en Barcelona; 150. libras 12. sueldos de Valencia, quantas serán en Barcelona? Siguiendo la regla, hallarémos 216. libras 4. sueldos 11. dineros, que es lo que ha de dar en Barcelona.

432 Question 14. Un Mercader en Valencia dió à otro cierta cantidad, para que la conduxera à Barcelona, pagando el interés á 3. por 100. moneda de Valencia; habiendola conducido se sabe, que en Barcelona ha dado 216. libras 4. sueldos 11. dineros, y $\frac{1}{13}$ de aquella moneda; preguntase qué cantidad le dió de moneda de Valencia?

Digase por regla de tres: Si 14. reales de Barcelona, son 9. reales $\frac{3}{4}$. de Valencia, que es el valor del real de à ocho en cada Reyno, ó para quitar el quebrado: Si 56. reales, son 39. quanto serán las 216. libras 4. sueldos 11. dineros y $\frac{1}{13}$ siguiendo la regla, salen 150. libras 12. sueldos de Valencia. Ahora por el interés formese otra regla: Si 100. dan 3. de interés, 150. libras 12. sueldos, quanto darán de interés? Siguiendo la regla, salen 4. libras 10. sueldos 4. dineros y $\frac{8}{25}$. las quales sumadas con las 150. libras 12. sueldos, hacen 155. libras 2. sueldos 4. dineros y $\frac{8}{25}$ de Valencia, y tanta cantidad dió el Mercader en Valencia para transportar á Barcelona, pagando el interés en la misma Valencia.

433 Question 15. Un Mercader tiene en Valencia 36. libras, y queriendolas en Barcelona, halla quien se las dé á razon de 4. por 100. moneda de Barcelona, preguntase quantas libras le darán en Barcelona? Digase por regla de tres: Si 39. dan 56. (como se hizo en la question 13) 36. libras que darán? Siguiendo la regla, se hallarán 51. libra y $\frac{9}{13}$ moneda de Barcelona.

Ahora formese otra regla de tres por el interés, y porque el interes está incluido en las 51. libra y $\frac{9}{13}$. Sumese el 4. con el 100. serán 104. vienen de 100. las 51. libra y $\frac{9}{13}$. de quanto vendrán, siguiendo la regla, hallo 49. libras y $\frac{119}{169}$ y tanto le ha de dar en Barcelona.

434 Question 16. Un Mercader tiene 150. libras en Aragon, y ha-

halla quien le hace buenos en Cadiz 2600. reales por cierto interés, pidese quanto importa el interés en Cadiz? Resuelvanse las 150. libras en reales, y serán 1500. reales, digase ahora por regla de tres. Si 8. reales de Aragon, son 15. de Castilla, ó Cadiz; 1500. reales, quantos serán, siguiendo la regla, hallo 2812. reales y $\frac{1}{2}$ de los quales resto los 2600. reales, y quedan 212. reales y $\frac{1}{2}$. y tanto sube el interés. Y si quisiere saber á quanto es por 100. digo con otra regla: Si 2600. dan 212. que darán 100. Sigo la regla, y hallo 8. reales y 5. maravedis, y $\frac{2}{11}$.

435 Question 17. Un Mercader quiere un cambio de 50. escudos de Roma para Valencia, y halla quien se lo haga dar à razon de 8. reales por escudo; esto es, que de cada escudo, le han de dar 8. reales en Valencia; preguntese quantas libras le darán en Valencia? Digase por regla de tres: Si 1. escudo son 8. reales en Valencia; 50. escudos, quantos serán? Y se hallarán 400. reales, que son 40. libras, y tanto importará lo que le han de dar en Valencia.

436 Question 19. Pedro estando en Aragon, quiere pasar primero á Valencia, y despues á Cataluña; se halla con 10. doblones, y queriendolos cambiar, pide al Campsor (el qual tiene moneda de dichos Reynos) que le dé tantos dineros de Aragon, y de Valencia, como de Cataluña; pidese quantos ha de dar de cada Reyno de estos?

Para resolver esta question, es preciso acordarse de lo que queda dicho en los Proemiales, que el doblon en Aragon vale 3. libras 4. sueldos, en Valencia 3. libras 17. sueldos, y en Cataluña 55. reales, ó 5. libras 10. sueldos. Conviertanse, pues, en una especie en que no haya quebrados, la qual será sueldos, y serán 64. 77. y 110. Hecho esto, supongase que el Campsor dá una qualquier cantidad de sueldos, de cada moneda, es á saber 10. sueldos, los quales se pondrán encima de los 64. 77. y 110. sueldos en forma de quebrado deste modo $\frac{10}{64}$. $\frac{10}{77}$. $\frac{10}{110}$. ó abreviado $\frac{1}{11}$. Sumense estos quebrados, y serán $\frac{20438}{54208}$ Digase ahora por regla de tres: Si $\frac{20438}{54208}$. vienen de 10. sueldos; 10. doblones (reducidos) [illegible] quantos sueldos vendrán? Siguiendo la regla, se hallarán 265. sueldos, que ha de dar de moneda de cada Reyno.

La prueba es reducir los 265. sueldos y $\frac{2365}{10219}$. de Cataluña, á moneda de Aragon; y asimismo los mismos sueldos de Valencia, á moneda de Aragon: luego sumarlos con los mismos de Aragon, y han de salir 640. sueldos, que valen los 10. doblones en Aragon. Pero adviertase, que la reduccion, se ha de hacer por lo que vale el do-

doblon en cada Reyno de estos, supuesto que nos hemos valido del doblon, pero si se hace por la correspondencia del real de á ocho, saldrá diferente, porque en Valencia, y Cataluña el real de á ocho, vale mas al respeto que el doblon; pues que en Cataluña quatro reales de à ocho valen 56. reales, y el doblon 55.

437 Question 29. Un mercader tiene en la Tabla de Valencia 150. libras, y pide que le den de contado tantas libras, que el quinto de ellas, hecho sueldos, sea tantos sueldos, como libras quedáren en dicha Tabla; pidese quantas libras le darán de contado? Tomese la quinta parte de 20. sueldos, que tiene la libra, y es 4. sueldos á los quales se añadirá por regla general 1. y seràn 5. Hecho esto, partanse las 150. libras por 5. y saldràn 30. libras que son las que le han de dar.

La prueva es, que se tome el quinto de 30. libras, y es 6. libras, las quales reducidas á sueldos, son 120. sueldos, restanse las 30. libras de las 150. y quedarán tambien 120. libras en la Tabla.

438 Question 20. Si 39. reales de Valencia, son 56. de Barcelona, 14. de Barcelona, son 8. de Aragon, y 16. de Aragon; son 30. de Castilla; pidese 100. reales de Castilla, quantos serán de Valencia? Esta question se puede resolver de dos modos, el primero por regla de tres, diciendo: Si 56. reales de Barcelona, son 39. de Valencia; 14. de Barcelona, quantos serán de Valencia? Siguiendo la regla, saldràn 9. reales y $\frac{3}{4}$. los quales son tanto como los 8. de Aragon. Digase otra vez: Si 16. reales de Aragon, son 30. de Castilla; 8. de Aragon, quantos serán de Castilla? Siguiendo la regla, saldrán 15. reales de Castilla, los que son tanto como los 9. y $\frac{3}{4}$. de Valencia. Ahora digase por regla de tres: Si 15. reales de Castilla, son 9. y $\frac{3}{4}$. de Valencia; 100. reales de Castilla, quantos serán de Valencia? Siguiendo la regla, salen 65. reales de Valencia, que corresponden á los 100. de Castilla.

El segundo modo de resolver la question, es escribir los 39. reales de Valencia, y debaxo 1. despues de escribir los 56. de Barcelona, y debaxo los 14. Despues los 8. de Aragon, y debaxo los 16. ultimamente los 30. de Castilla, y debaxo los 100. como se vé en la formula. Hecho esto, multipliquense los numeros unos por otros, segun lo señalan las lineas; esto es, 39. 14. 100. y el producto 873600. será el dividendo, porque en el está incluido el numero 100. que tiene anexa la

$$\begin{array}{cccc} \text{Valencia.} & \text{Barcelona.} & \text{Aragon.} & \text{Castilla.}\\ 39 \times & 56 \text{——} & 8 \text{——} & 30\\ 1 & 14 \text{——} & 16 \text{——} & 100 \end{array}$$

question. Multipliquense asimismo entre sí 1. 56. 8. 30. y el producto 13440. será el partidor: hecha la division, hallarémos 65. reales como antes.

Adviertase, que quando el mismo numero de moneda de un Reyno se compara con el otro deste modo: Si 39. reales de Valencia, son 56. en Barcelona, y 56. de Barcelona, son 32. en Aragon, y 32. de Aragon, son 60. en Castilla; 100. de Castilla quantos serán en Valencia? Basta formar una sola regla de tres, diciendo: Si 60. de Castilla, son 39. en Valencia; 100. de Castilla, quantos serán en Valencia? Siguiendo la regla, salen los mismos 65. reales; porque en este caso, aunque haya muchas razones intermedias; pero como el mismo consequente de una razon, es antecedente en la otra, se sigue que 60. reales de Castilla, son iguales á 39. de Valencia, y asi basta la regla de tres propuesta.

Trueques.

Trueque, es una permuta de una cosa en otra: tres modos distinguen comunmente los Arithmeticos de trueques; el primero es simple, quando una mercaderia se cambia con otra sin ganancia, ó con ella; el segundo es compuesto, quando en el trueque se pide parte de dinero de contado; el tercero es con tiempo, quando la paga no se hace de presente, sino con algun espacio de tiempo.

439 Question 21. Un labrador quiere trocar trigo por cevada, el cahiz de trigo vale 70. reales, y el de la cevada 25. preguntase quantos cahices de cevada se darán por 30. de trigo? Para responder á esta pregunta, y sus semejantes, lo primero se ha de saber quanto valen los 30. cahices de trigo á 70. reales; multiplicando 30. por 70. salen 2100. reales por el valor del trigo; dividanse por 25. reales, que es el valor del cahiz de la cevada, y saldrán 84. que son los cahices de cevada que le han de dar por los 30. de trigo. la prueva es, que tanto han de valer los 84. cahices de cevada á 25. reales, como los 30. cahices de trigo à 70. reales.

440 Question 22. Pedro tiene 40. arrobas de miel, la qual pagandola de contado, vale à 25. sueldos la arroba, pero en trueque la quiere subir á 30. sueldos, Preguntase para trocarla por aceyte, que de contado vale à 20. sueldos la arroba, quantas arrobas le darán, y á como subirá el precio del aceyte en trueque?

Para la solucion digase por regla de tres: Si 25. sueldos precio de la miel de contado, se suben en trueque à 30. sueldos; 20. sueldos precio del aceyte de contado, á quanto subirán en trueque? Si-

guien-

guiendo la regla, hallarémos 24. sueldos, y á tanto vale la arroba del aceyte en trueque, porque ha de subir á proporcion de la miel. Ahora para saber las arrobas que se han de dar de aceyte por las 40. de miel, multipliquense las 40. arrobas de miel por los 30. sueldos en trueque, y son 1200. dividase por los 24. sueldos que vale el aceyte en trueque, y salen 50. arrobas de aceyte, que le han de dar por las 40. de miel.

441 Question 23. Pedro quiere trocar miel por aceyte, la miel vale de contado á 25. sueldos la arroba, y en trueque á 30. el aceyte fuè puesto en trueque á 24. sueldos la arroba, pidese de contado à quanto valdrá? Digase por regla de tres: Si 30. sueldos en que la miel fue puesta en trueque, vienen de 25. sueldos, que valia de contado; 24. sueldos en que el aceyte fue puesto en trueque, de quantos sueldos vendrán de contado? Siguiendo la regla, salen 20. sueldos, y à tanto vale la arroba del aceyte de contado.

442 Question 24. Pedro para trocar miel por aceyte, sube la miel 5. sueldos mas la arroba de lo que la vendia de contado, el aceyte de contado vale à 20. sueldos, pero en trueque, sube à 24. pidese à como se vendia la miel de contado? Restase el precio del aceyte de contado, y en trueque esto, es, 20. de 24. y quedan 4. Digase ahora por regla de tres Si 4. vienen de 20. de quantos vendrán 5. que es lo que se subió la miel en trueque? Siguiendo la regla, saldrán 25. sueldos, que es el precio de la miel de contado.

443 Question 25. Pedro trueca miel por aceyte, la arroba de la miel, no se sabe quanto vale de contado, pero en trueque vale à 30. sueldos; la arroba del aceyte vale de contado à 20. sueldos, y en trueque 24. despues de hecho el trueque, halla el que tiene la miel, que gana á razon de 10. por 100. pidese que vale la arroba de la miel de contado?

Lo primero se ha de igualar el trueque, como sino hubiera ganancia, diciendo: Si 24. sueldos del valor de la arroba del aceyte en trueque, vienen de 20. sueldos, que es el valor de la arroba de aceyte de contado; 30. sueldos valor de la arroba de la miel en trueque, de quantos sueldos vendrán, y hallo, que de 25. sueldos. Ahora para saber quanto vale la arroba de la miel habiendo ganancia de 10. por 100. Sumense los 10. con los 100. y digase: 100. vienen de 110. de quantos vendrán los 25. sueldos del precio de la miel de contado? Siguiendo la regla de tres, salen 27. sueldos y medio, y á tanto precio habia de valer la arroba de la miel de contado para ganar à 10. por 100.

444 Question 26. Pedro tiene 40. arrobas de miel, las quales quiere cambiar por aceyte, pero con tal condicion, que la quarta parte del valor de la miel, le han de dar en dinero de contado, y lo demas en aceyte; la arroba de la miel, vale á 25. sueldos, y la del aceyte á 20. sueldos, pidese quanto dinero, y aceyte le han de dar?

Multiplicando las 40. arrobas por 25. sueldos, saldrán 1000. sueldos, que es el valor de toda la miel; luego porque la quarta parte se ha de dar en dinero, sacando la quarta parte de los 1000. sueldos, será 250. sueldos los que se han de dar de contado, y quedarán 750. sueldos, los quales partidos por los 20. sueldos que vale la arroba del aceyte, saldrán 37. arrobas y media, y tanto aceyte le han de dar.

445 Question 26. Pedro tiene 40. arrobas de miel, cuya arroba vale à [illegible] sueldos, y la quiere baratar por aceyte, cuya arroba vale à 2[illegible]dos, pero quiere los $\frac{2}{3}$. en dinero de contado, y aun quiere gan[illegible] trueque à razon de 10. por 100. preguntase quanto dinero, [illegible]eyte le han de dar?

Multi[illegible]ense las 40. arrobas por los 25. sueldos como antes, y saldrán 100. sueldos por el valor de la miel; dividanse en tres partes, y tomanse las dos por razon de los $\frac{2}{3}$. y serán 666. sueldos, y $\frac{2}{3}$. quiere ganar à 10. por 100. digase por regla de tres: Si 100. dan 110. de ganancia, y principal, que darán los 333. sueldos y un tercio? Siguiendo la regla, saldrán 366. sueldos y dos tercios, dividanse por 20. sueldos, que es el precio de la arroba del aceyte, y saldrán 18. arrobas y un tercio, que le han de dar de aceyte.

446 Question 27. Dos quieren trocar sus mercaderias, es à saber miel por aceyte; la arroba de la miel, vale de contado 25. sueldos, y en trueque 30. sueldos; la arroba del aceyte, vale de contado 20. sueldos, y en trueque 24. sueldos; el que da la miel, quiere esperar 4. meses al que da el aceyte: preguntase, el dueño del aceyte, quantos meses esperará al de la miel, para que la barata sea justa.

Ordenese una regla de tres, compuesta en esta forma: Si 25. sueldos, que vale la miel, de contado ganan 5. sueldos en trueque (que es lo que hay de 25. hasta 30.) en 4. meses; 20. sueldos que vale el aceyte de conta-

1	25. sueldos.
2	5. sueldos.
3	4. meses.
4	20. sueldos.
5	4. sueldos.
6	meses.

do-

do para ganar 4. sueldos (que hay desde 20. de contado, hasta 24. en trueque) quantos meses serán menester; siguiendo la regla (que es inversa) salen 4. meses, y tanto tiempo ha de aguardar el que dá el aceyte, al de la miel.

447 Question 28. Dos quieren trocar sus mercaderias; el primero dá miel, cuya arroba de contado vale à 25. sueldos, y en trueque à 30. y dá 2. meses de espera; el segundo tiene aceyte, cuya arroba de contado vale 20. sueldos, y dá 3. meses de espera; preguntase à como pondrà el aceyte en trueque, para que la barata sea justa?

Digase por regla de tres compuesta: Si 25. sueldos en 2. meses ganan 5. sueldos (que es la diferencia del valor de la miel de contado, ó en trueque) 20. sueldos del aceyte de contado en 3. meses, quanto ganarán? Siguiendo la regla (que es directa) salen 6. sueldos, los quales añadidos à los 20. sueldos del aceyte de contado, son 26. sueldos, que vale la arroba del aceyte en trueque, dando 3. meses de espera.

448 Question 29. Pedro, y Juan quieren trocar miel, y aceyte: Pedro vende la miel de contado á 25. sueldos la arroba, y en trueque la pone à 30. Juan vende la arroba del aceyte de contado à 20. sueldos, y en trueque la pone à 23. sueldos, preguntase si el trueque es justo, y sino lo es, á quanto se gana, ò pierde por ciento.

Digase por regla de tres: Si 25. sueldos de la miel, suben á 30. los 20. sueldos del aceyte, à quanto subirán; siguiendo la regla, salen 24. sueldos, y à tanto habia de poner Juan en trueque el aceyte: y asi Juan queda defraudado, y Pedro gana. Ahora para saber quanto es por 100. la perdida del uno, y ganancia del otro, pongase los precios en forma de quebrado, como parece en la formula, multipliquense en cruz, y serán los productos 600. y 575. Digase pues por regla de tres: Si 600. dan 575. que darán 100, siguiendo la regla, salen 95. y 5. 6. avos, restados de 100. quedan 4. y un sexto, y esto pierde Juan por 100. Digase otra vez; si 575. dan 600. que darán 100. Siguiendo la regla, salen 104. sueldos, y 8. 2. avos: De los que restando 100. quedan 4. y $^{8}_{23}$ avos, que es lo que gana Pedro por 100. La multiplicacion en cruz, denota la proporcion de los quebrados, ó de los precios de las mercaderias;

$$\begin{array}{ccc} 575 & & 600 \\ \frac{25}{30} & \times & \frac{20}{23} \end{array}$$

rias ; con que aquel ganarà , cuyo quebrado fuere menor , y asi porque el quebrado de los precios de la miel $\frac{25}{30}$. es menor que el de los precios del aceyte $\frac{20}{23}$. Supuesto que el numero 575. es menor que 600. (140) ganará Pedro , que trueca la miel , y perderá Juan que da el aceyte. La razon desto es , porque haciendo la regla de tres , si 575. dan 600. que darán 100. como los 600. son mas que 575. tambien saldrá numero mayor que los 100. con que hay ganancia; y al contrario.

GANANCIAS , INTERESES , PENSIONES,

Arrendamientos , &c.

449 Question 30. Un Mercader compró cierta mercaderia por 250. reales , pidese por quanto la venderá para ganar à 7. por 100 ? Sumense los 7. con los 100. y serán 107. Ahora digase por regla de tres : Si 100. suben á 107. á quantos subirán 250. reales ; siguiendo la regla , que es directa , salen 267. reales , y medio , y por tanto precio la ha de vender.

450 Question 31. Pedro hace teñir 1000. varas de vayeta , la qual se entra , y encoje á 3. por 100. pidese quantas varas tendrá despues de teñida? Restense los 3. de los 100. y serán 97. digase ahora por regla de tres: Si 100. baxan á 97. à quanto baxarán las 1000. varas? Siguiendo la regla , que es directa , salen 970. varas , y tantas tendrá despues de teñida.

De suerte , que para ganar á tanto por 100. se pone el 100. en primer termino de la regla de tres ; el segundo termino , es la suma de la ganancia , y de los 100. y el tercer termino , es la cantidad que ha de ganar. Pero quando se pierde á tanto por 100. se resta lo que se pierde de los mismos 100. y se ordena la regla de tres del mismo modo.

451 Question 32. Pedro vendió cierta mercaderia por 84. libras , halló que ganaba à 8. por 100. pidese quanto le costó la dicha mercaderia ; sumese 8. y 100. y serán 108. luego digase por regla de tres : Si 108. vienen de 100. de quantos vendrán 84. Siguiendo la regla , salen 77. libras y 7. 9. avos por el coste de la mercaderia.

452 Question 33. Vendiendo la vara del terciopelo por 25. reales , se halla perder 4. por 100. pidese à quanto costó la vara. Restense 4. de 100. y quedan 96. digase ahora: Si 96. vienen de 100.

de quantos vendrán 25. Siguiendo la regla, salen 26. reales, y 1. 24. avos, y à tanto costó la vara.

453 Question 34. Vendiendo una mercaderia por 1500. reales, se ganan 500. reales, pidese à quanto se gana por 100. Restense los 500. reales de los 1500. y quedarán 1000. Aora digase por regla, de tres: Si 1000. ganan 500. quanto ganarán 100. Siguiendo la regla salen 50. y asi digo; que se gana á 50. por 100.

454 Question 35. Un Mercader compró una pieza de paño, la qual con drechos costó 1500. reales, pagando de drechos à 7. por 100. pidese quanto costó la pieza? Sumense los 7. y 100. y son 107. Luego digase si 107. vienen de 100. de quantos vendrán 1500. y salen 1401. reales y 93. 107. avos por el precio de dicha pieza.

455 Question 36. Un Mercader compró cierta mercaderia por tantos reales de tal suerte, que si diera por ella 50. reales mas de lo que pagó, y la vendiera por 280. reales, hallaria ganar 12. por 100. pidese quanto costó la dicha mercaderia? Añadanse 12. à 100. y son 112. Digase aora, si 112. vienen de 100. de quantos vendrán los 280. Siguiendo la regla, salen 250. reales, y quedan 200. reales por el valor verdadero de la mercaderia.

456 Question 37. Si con 80. reales en 4. meses, se gana à razon de 7. por 100. con 60. reales en 10. meses, à quanto se ganará por ciento. Dispongase una regla de tres compuesta, como se vè en el exemplo, y resolviendola, salen 13. reales, y un octavo, y à razon de tanto, ganan por 100. los 60. reales en 10. meses.

1	80. reales.
2	4. meses.
3	7. ganancia.
4	60. reales.
5	10. meses.
6	13. real. y $\frac{1}{8}$.

457. Question 38. Si vendiendo 3. varas de cinta por 5. reales, se gana el tercio de lo que cuestan, si se vendieran 5. varas por 7. reales, quanto se ganaria por ciento? Saquese el quarto del 5. que es el precio de las 3. varas; y quedarán 3. reales, y tres quartos por el precio que costaron. Aora para ver lo que se gana por 100. he de saber lo que se gana en 5. varas, buscando primero lo que valen por regla de tres. Si 3. varas valen 3. reales, y tres quartos, quanto valdrán las 5. varas? Y hallo 6. reales, y un quarto, los quales estados de los 7. reales de la venda de las 5. varas, quedan tres quartos de real, y tanto se gana en las 5. varas. Digo otra vez; Si en 5. varas se ganan tres quartos de real; en 100. quanto se ganará? Sigo la regla, y hallo que se ganan 15. reales por ciento.

La razon, porque ganando el tercio en las varas se saca el quarto, es porque como en los 5. reales está incluido el coste de las 3. varas, y mas un tercio, el dicho coste está dividiendo en tres partes, y se añade una, y asi los 5. reales están divididos en 4. partes, luego quitado la una, quedan las tres por el verdadero valor de las 3. varas.

458 Question 39. Pedro debe á Juan 100. libras, las quales ha de pagar al fin de un año por concierto, pero si las paga de contado, Juan perderá de la paga á razon de 10. por 100. preguntase quanto se dará de contado? Añadanse los 10. con los 100 y serán 110. Diga aora: Si 110. baxan á 100. á quantos baxarán 100. libras? Siguiendo la regla, salen 90. libras, 18. sueldos, y 2. dineros y $\frac{2}{11}$, y tanto ha de pagar de contado.

459 Question 40. Si vendiendo una mercaderia por 1000. reales, se gana 10. por 100. para ganar á 12. por 100. por quanto se venderá? Sumense los 10. y 12. con los 100. y serán 110. y 112. Digase ahora por regla de tres: si 110. dán 1000. quantos darán 112. siguiendo la regla salen 1018. reales, y $\frac{2}{11}$.

460 Question 41. Si vendiendo una mercaderia por 1060. reales, se halla perder à razon de 4. por 100. por quantos reales se habia de vender para ganar á razon de 4. por 100. Restense los 4. que se pierden de 100. y por otra parte añadanse los quatro que se ganan à los mismos 100. y serán 96. y 104. Digase ahora: si 96. dan 1060. reales; 104 quantos darán, y salen 1148. reales, y $\frac{1}{3}$. y á tanto se habia de vender para ganar à 4. por 100.

461 Question 42. Si vendiendo el marco de oro de 22. quilates por 90. libras, se halla ganar á 12. por 100. pidese por quantas libras se ha de vender el marco de oro de 24. quilates para ganar á 10. por 100? Añadanse los 12. á los 100. y digase: si 112. vienen de 100. de quantos vendrán 90. siguiendo la regla salen 80. libras, y $\frac{5}{84}$ por el caudal del marco de 22. quilates. Para saber el valor del marco de 24. quilates digase: si 22. quilates dan 80 libras, y $\frac{5}{84}$. quanto darán 24. quilates, resolviendo la question salen 87. libras, y $\frac{51}{77}$. que es el valor del marco de 24. quilates. Ultimamente, porque en él se ha de ganar á 10. por 100. digase; si 100. dan 110. que darán 87. y $\frac{51}{77}$. siguiendo la regla salen 96. libras; y $\frac{4}{7}$. y por tanto se ha de vender el marco de oro de 24. quilates para ganar à 10. por 100.

462 Question 43. Vendiendo 2. arrobas de azucar por 60. reales, se pierde à 8. por 100. si se vendieran 3. arrobas por 150. reales

à quantos se perderia, ó ganaria por 100. Restando los 8. de los 100. quedan 92. Digase aora: Si 92. vienen de 100. los de 60. reales de quanto vendrán? Siguiendo la regla, salen 65. reales y 5. 23. avos, que es el valor de las dos arrobas de azucar, sin pérdida, cuya mitad 32. reales y 14. 23. avos, es el valor de una arroba, el qual multiplicado por las 3. arrobas, salen 97 reales y 19. 23. avos por el valor justo en las 3. arrobas sin ganancia, ni pérdida: pero porque se venden por 150. reales habrá de ganancia 52. reales y 4. 23. avos: Y diciendo por regla de tres: Si 150. reales. ganan 52. reales y 4. 23. avos, quanto ganarán ciento? Siguiendo la regla, salen 53. reales y un tercio, y à tanto se gana por 100.

463 De otro modo mas fácil se puede resolver la misma question. Restados los 8. de la pérdida de 100. quedan 92. Digase ahora por regla de tres compuesta: 2. 60. 92. 3. 150. la qual es inversa en el primero, y quarto término; y resolviendola, salen 153. reales y un tercio. Y pues este termino hallado es mayor que 100. habrá ganancia: restense, pues, 100. y quedarán 53. reales y un tercio, por lo que se gana por ciento; si fuera menor, avria pérdida; y entónces, restando el dicho término de 100. la resta seria pérdida por 100.

464 Question 44. Pedro prestó á Juan 1500. reales por 4. meses, á razon de 5. por 100. preguntase quanto sube el interés? Digase: Si 100. en 12. meses (que es un año) ganan 5. los 1500. reales, en 4. meses quanto ganarán? Siguiendo la regla, salen 25 reales.

465 Question 45. Pedro ha de cobrar 22. libras dentro de 2. meses, y por haber menester dinero de presente busca quien le compre la paga, y halla quien le dé 20. libras de contado, dexandose perder las 2. libras, preguntase à quanto pierde por 100? Digase por regla de tres. Si 20. libras en 2. meses hacen 2. libras de interés, 100. libras en 12. meses que es un año, quanto interés harán? Siguiendo la regla salen 60. y à tanto pierde por 100. y por consiguiente quien dá el dinero, gana 60. por ciento.

466 Cuidado en la conciencia quien hace estos tratos, porque aunque á la primera vista no parece ganar mucho 2. libras en 20. pero atendiendo, que no son 100. libras, sino 20. ni es un año el tiempo del empleo, sino 2. meses, sale una ganancia exorbitantisima, como es á 60. por 100.

467 Question 46. Pedro prestó á Juan 1500. reales por cierto tiempo; ganando à 5. por 100. al fin del tiempo le buelve 1525. reales, pidese por quanto tiempo fué el mutuo? Digase por regla de tres: Si 100. ganan 5. en 12. meses, para que 1500. ganen 25. que

es la diferencia de 1500. á 1525. quantos meses serán menester? Siguiendo la regla, que es inversa en el primero, y quarto termino, salen 4. meses, y por tanto tiempo duró el mutuo.

1	100. caudal.
2	5. ganancia.
3	12. meses.
4	1500. caudal.
5	25. ganancia.
6	meses.

468 Question 47. Pedro dexó à Juan 360. reales por tiempo de 10. años à razon de 10. por 100. sin contar interés de interés, pidese quantos reales le ha de volver al fin de los 10. años? Digase primeramente por regla de tres: Si 100. en un año ganan 10. los mismos 100. en 10. años, quanto ganarán? Siguiendo la regla salen 100. los quales, sumados con los 100 del caudal, son 200. Aora digase otra vez: Si 100 suben à 200. á quantos subirán los 360 reales? Siguiendo la regla, salen 720 reales, y tantos le ha de bolver.

469 Question 48. Juan ha de pagar à Pedro 720 reales dentro de 10 años; pero si paga de contado, le quitará á razon de 10. por 100. pidese quantos reales pagará de presente? Vease lo que ganan 190. en 10. años por la question antecedente, y se hallarán 100. los quales juntos con los 100. primeros, son 200. Digase aora por regla de tres: Si 200. baxan á 100. los 720. reales á quantos baxarán? Resolviendo la question, salen 360. reales, y tantos ha de dar de contado. Todo esto se entiende sin interès de interés.

470. Question 49. Si 200 reales en 8. meses ganan 16. reales, 150. reales en 8. meses quanto ganarán? Aunque esta question es de cinco numeros; pero como los dos son iguales, que son los 8. meses se deben quitar (404), y quedará de tres numeros asi: Si 200. reales ganan 16. quanto ganarán 150.? y salen 12, reales de ganancia.

471 Question 50. Pedro prestó 4000. reales á Juan por tiempo de 3. años, despues quando los bolvió Pedro no quiso recibir interés, sino que pidió à Juan que le prestara 7480. reales: pidese quanto tiempo los ha de retener Pedro para satisfacerse por el interés de los 4000. reales en 3 años? Digase por regla de tres: Si 4000. reales ganan cierto interés en 3. años, 7480. reales, para ganar la misma cantidad, quanto tiempo será menester? La qual es inversa, porque creciendo el numero de los reales, en la segunda parte, ha de menguar el tiempo; resolviendola, pues, salen 1. año 7 meses. 7. dias y $\frac{101}{187}$.

472 Question 51. Un Mercader debe 450. reales, los quales ha

de pagar dentro de un año en tres pagas : iguales en el tiempo , y en la cantidad; pero si los paga de contado , le quitarán à razon de 10. por 100. preguntase , quantos reales pagará de contado ? Dividanse los 450. reales de la deùda , y los 12. meses que tiene el año en tres partes iguales por las tres pagas , y habrá de pagar 150. reales al fin de 4. meses por la primera paga ; mas 150. reales , despues de otros 4. meses ò al fin de 8. meses , contando desde que contraxo la deuda por la segunda paga : ultimamente 150. reales al fin de 12. meses , desde el dia de la deuda por la tercera paga.

Hecho esto , vease que ganan los 150 reales en 4. 8. y 12. meses à razon de 10. por 100. diciendo : Si 100. en 12. meses , que es un año , ganan 10. quanto ganarán 150. reales en 4. meses ? Salen 5. reales. Otra vez : si 100. en 12. meses ganan 10. quanto ganarán 150. en 8. meses? Salen 10. Otra vez : Si 100. en 12. meses ganan 10. quanto ganarán 150. en 12. meses ? Salen 15. reales : Sumense los 5. 10. y 15. reales de las ganancias , y son 30. reales por la ganancia de los 450. reales pagados en tres pagas.

Aora vease los 450. reales en quanto tiempo ganarán los 30. reales á razon de 10. por 100. diciendo : Si 160. ganan 10. en 22. meses; 450. para ganar 30. quanto tiempo abrán menester ? Esta question tiene inversion en el primero , y quarto término ; y resuelta , salen 8. meses , y en tanto tiempo los 450. reales ganarán 30.

Estos mismos meses (siendo las pagas iguales) se pueden conocer por otro modo mucho mas facil ; y es , juntar los meses de las pagas ; esto es 4. 8. y 12. y son 24. los quales se partirán por el numero de las pagas , que son 3. y saldrán 8. meses ; y al fin de tanto tiempo habia de pagar los 450. reales en una paga.

Conocidos , pues , los 8. meses por qualquiera de los dos modos, vease 100. reales en 8. meses á 10. por 100. que ganarán , diciendo : Si 12. meses , que es un año , ganan 10. los 8. meses, quanto ganarán ? Y salen 6. reales y $\frac{2}{3}$, que sumados con 100. son 106. y $\frac{2}{3}$. Digase aora: Si 106. y $\frac{2}{3}$ baxan à 100. los 550. reales á quanto baxarán ? Siguiendo la regla , salen 421. reales y $\frac{7}{8}$, y con tantos pagará de presente.

473 Question 52. Pedro arrienda unos diezmos por 360. doblones cada año , por tiempo de 5. años ; pero si los paga todos de contado , ó al presente , le quitarán à razon de 10. por 100. al año: pidese quantos doblones pagará de contado ? Para saber en quanto tiempo debia pagar toda la cantidad junta , contando à 10. por 100. de interés , ó ganancia , se hará por reglas de tres , ó por el otro mo-

do, que enseñamos en la question antecedente, del qual usaremos aora por ser mas facil.

Sumense, pues, los años en que consisten las pagas; esto es, 1. 2. 3. 4. 5. y son 15. años, los quales se partirán por 5. que es el numero de las pagas, ò años, y salen al quociente 3. años; pues al fin de 3. años debia pagar toda la cantidad del arrendamiento, que son 1800. doblones, es à saber, la suma de las 5. pagas, sin perjuicio de ninguno.

Esto supuesto, vease quanto ganan 100. en 3. años, à razon de 10. por 100. diciendo por regla de tres: Si en un año se ganan 10. en 3. quanto se ganará? Y salen 30. doblones, los quales juntos con los 100. hacen 130. Digase ahora: Si 130. se baxan à 100. los 1800. doblones, à quanto baxarán? Siguiendo la regla salen 1384. doblones y 8. 13. avos, y en tanto pagará de contado.

474 Question 53. Pedro vendió cierta mercaderia por 10000. reales à pagar en quatro pagas; es à saber. 1000. reales dentro de un año, 2000. reales al fin de 2. años, 3000. reales dentro de 3. años, y 4000. reales al fin de 4. años; pero pagando de contado, le quitará à razon de 10. por 100. al año pidese en quantos reales pagará de presente?

Por ser estas pagas desiguales, multipliquese cada paga por su tiempo; esto es, la primera, por un año, la segunda, por 2. la tercera, por 3. &c. y saldrán 1000. 4000. 9000. y 16000. cuya suma 30000. partida por toda la deuda 10000. dará 3. años, y al fin de tanto tiempo abia de pagar los 10000. reales en una paga, para equilibrar el tiempo. Vease aora quanto ganan 100. en 3. años à razon de 10. por 100. y se hallarán 30. que juntos con los 190. son 1030. Digase aora: Si 130. dan 100. qué darán 10000. reales? Y salen 7692. reales y 4. 13. avos, y tanto ha de dar de contado.

475 Question 54. Pedro prestó à Juan 1000. reales por tiempo de 4. años, à razon de 10. por 100. al año de interes; pero con pacto, que el interés gane como el mismo principal; preguntase, quantos reales bolverá? Estas questiones de interés de interés, se pueden resolver de dos modos. Sea el primero, sumar la ganancia con el caudal, y continuar la regla de tres por todos los años que corre el interes, asi.

Año primero: Si 100. dan 10. luego 1000. darán 100. que sumados con el caudal, son 1100. Año segundo: Si 100. dan 10. luego 1100. darán 110. los quales sumados con los 1100. son 1210. Año tercero: Si 100 dan 10. luego 120. darán 1211. que sumados con los 1211. son 1331. Año

quar-

quarto: Si 100. dan 10. luego 1331. darán 133. y $\frac{1}{10}$. los quales sumados con los 1331. son 1464. y $\frac{1}{10}$. y tanto ha de bolver al fin de los quatro años.

De otro modo, se puede hacer mas facilmente. Escribase el caudal, é interès de un año, tantas veces como son los años, y multiplicando unos numeros por otros, saldrán el numero dividendo: Escribase por otra parte el caudal solo una vez menos que el numero de los años, y hecha la multiplicacion de unos numeros por otros, saldrá el divisor: Dividase un numero por otro, y el quociente dará el numero buscado.

Como en el exemplo, la suma del caudal, é interés de un año, es 1100. la qual se ha de escribir quatro veces por otros tantos años que dura la ganancia, como se vé en la formula; multiplicando continuamente unos numeros por otros, salen 146410000000. Escribase el caudal 1000. tres veces: esto es, una vez menos que los años de la ganancia; y multiplicando un numero por otro continuamente, salen 1000000000. Dividase aquel producto por este, y saldrán los mismos 1464. reales $\frac{1}{10}$.

1100. 1100. 1100. 1100.
1100. 1100. 1100.

476 Question 55. Pedro debe á Juan 1000. reales, y no pudiendolos pagar, le consigna 300. reales cada año de una renta que tiene; preguntase en quanto tiempo estará pagada la deuda, pagando, como queda dicho cada año 300. reales, en los quales se ha de comprehender todo el interés que le perteneciere, á razon de 10. por 100.? Vease lo que importa el interès de los 100. reales, á razon de 10. por 100. en un año, diciendo: Si 100 ganan 10. luego 1000. ganarán 100. restense estos 100. de interès de los 300. realeales que pagan cada año, y quedaràn 200. que havrá pagado del capital; y asi, se han de restar de los 1000. y quedarán 800. reales.

Año 2. digase: Si 100. ganan 10. luego 800. ganarán 80. de interés, restense de los 300. y quedan 220. que avrá pagado del capital; y assi, estos 220. se han de restar de 800. y quedarárn 580.

Año 3. Si 100. ganan 10. luego 580. ganarán 58. de interès, restados de los 300. quedan 242. que aura pagado de la suerte principal á mas de interès, y por eso restense de 580. y quedarán 338.

Año 4. Si 100. ganan 10, luego 338. ganarán 33. y $\frac{4}{5}$. de interés, los quales, restados de los 300. quedan 266. y $\frac{1}{5}$. que quitados de 338. restan 71. reales y 4. quintos por capital. Y porque es mucho mayor la paga del un año de 300. reales, que los 71. y 4. quintos, que sobran por la suerte principal, es manifiesto, que este año ultimo, no se podrán cobrar todos los 300., reales sino los 71. y 4. quintos, y lo que los corresponde de interés en un año; porque se supone, que al fin del año, no se hace la paga. Digase, pues: Si 100 ganan 10. luego 71. y 4. quintos ganarán 7. reales y 9. avos, los quales juntos con los 71. y 4 quintos, son 78. y 49. 50 avos, y tantos ha de cobrar Pedro de los 300 reales de la paga del año qunito. Con que la deuda estará pagada en 4. años, y mas 78. reales y 49. 50. avos del año quinto.

477. Question 56. Pedro quiere fundar un beneficio, no hallandose en bastante dinero, hace donacion á la Parroquia de 100. doblones, para que al principal, y las pensiones se cargen á censo de 5. por 100. continuamente hasta que hagan la cantidad de 150. doblones; preguntase quantos años han de pasar, suponiendo, que no aya omission en los cargamientos?

Por muchos modos se puede resolver esta question, sea el primero por la regla de tres. Sumense los 5. con los 100. y serán 105. y vayase discurriendo por los años, como en la question 54. hasta encontrar con el numero que se busca, deste modo.

Año 1. completo: Si 100. dán 105. luego 100. doblones darán 105.

Año 2. Si 10. dán 105. luego 105. darán 110. y un quarto.

Año 3 Si 100. dan 105. luego 110. y un quarto, darán 115. y 61. 80. avos.

Año 4. Si 100. dàn 105. luego 115. y 61. 80. avos, daràn 121. y 881. 1600. avos

Año 5. Si 100. dàn 105. luego 121. y 881. 1600. avos, darán 127. y 20101. 32000. avos.

Año 6. Si 100. dán 105. luego 127. y 20101. 32000. avos, darán 134. y 6121. 640000. avos.

Año 7. Si 100. dàn 105. luego el numero del año antecedente darà 140. doblones y 9088541. 12800000. avos.

Año 8. Si 100. dàn 105. luego el numero del año antecedente darà 147. doblones y 901859361. 25600000. avos.

Aora ya no se puede continuar la regla otro año; porque la cantidad, que ha sido en este ultimo año, està muy cerca de los 150. doblones, que se han de hacer de propiedad; de suerte, que falta menos que la pension de un año: y asi solo se han de buscar los meses que faltan, para que las pensiones hágan los dichos 150. doblones. Restese, pues la ultima cantidad 147. doblones, y el quebrado sobre escrito de los 150. doblones; quedarán 2 doblones y 65140639. 25600000. avos. Digase aora por regla de tres compuesta: Si 100. ganan 5. en 12. meses (que es un año): luego 147. doblones y 190859361. 25600000. avos para ganar 2. doblones y 65140639 25600000. avos, quantos meses avrán menester? Siguiendo la regla, que es inversa en el primero, y quarto termino, salen 3. meses, y 25045179277. 37822859361. avos. Y asi, en 8. años, 3. meses, y el inmediato quebrado de mes, los 100. doblones avian subido à 150.

De otro modo se puede resolver la misma question. Escribase el numero 105. (que es el capital, é interés de un año) y el numero 100. (que es el capital) muchas veces, como se vé en la formula.

150. 150. 150. 150. 150. 150. 150 150.
150. 100. 100. 100. 100. 100. 100.

Multipliquese el numero 105. por sí mismo algunas veces, v. g. siete; esto es, multipliquense 105. por 105. y el prodncto otra vez por 150. y este proproducto otra vez por 105. hasta siete veces, y el producto se guardarà. Multipliquense aora el numero 100 seis veces por si mismo (siempre se ha de multiplicar una vez menos, como se dixo en la question 54.) y partiendo el producto guardado por este, vendrá el quociente un numero mucho menor que 150. que es señal de aver pocas multiplicaciones: pues multipliquese cada producto una vez mas, que serán ocho veces en el uno, y siete en el otro; y hecha la particion, saldrán los mismos 147. doblones, y el mismo quebrado. En lo demás obrese como en el parrafo antecedente; con que en 8. años, (porque ay ocho multiplicacionos) 3. meses, y el quebrado, los 100. doblones avrán subido à 150.

De suerte que esta regla, es la misma, que la que dimos en la question 54. solo con la diferencia, que alli estavan conocidos los años, y por consiguiente se sabía el numero de las multiplicaciones; pero aqui se buscan los años, haciendo diferentes multiplicaciones, hasta que partiendo el producto del numero 105. por el producto del 100. venga un numero proxime menor á 150. que se busca; y tantos años avrán pasado, quantas multiplicaciones huvière del 105. por si mismo.

De otro modo. Porque los 5. que se ganan de pension por 100. son la vigesima parte de los mismos 100. Saquese la vigesima parte de los 100. doblones, que es dividirles por 20. y serà 5. añadanse à los 100. y seràn 105. los doblones del primer año. Otra vez, dividanse los 105. por 20. y el quociente 5. y un quarto, añadase à los 105. y serán 110. y un quarto los doblones del año segundo. Otra vez, saquese la vigesima parte de 110. y un quarto, y será 5. y 41. 80. avos, añadese á los 110. y un quarto, y seràn 115. y 61. 80. avos los doblones del año tercero; y asi, se proseguirá hasta hallar un numero proxime menor á los 150. doblones, como se ha hecho antes.

Hasta aqui hemos procedido en buscar los años, suponiendo, que no aya avido intermision en cargar las pensiones, ó reditos, pero si la ha havido, se hará quenta de lo que gana al principal en todo aquel tiempo, y despues de lo que gana la pension, y principal. Y para declararme mejor, supongo, que cada pension ha tardado medio año de cargar, que es el tiempo que en Valencia se dà à los Curadores, y tambien supongo, que se dá en este caso para cargar los reditos; de suerte, que juridicamente se les admite medio año, sin cargar las pensiones.

Año 1. En este año la pension de los 100. doblones, se ha de contar por medio año, porque se entregan para cargar, y se ha de dar medio año de vacio, pero si al principio del año estuviera hecho el cargamento, se avria de contar la pension por un año; pues siguiendo la regla de tres: Si 100. en un año, ganan 5. luego 100. doblones en un año, ganarán 5. cuya mitad 2. y medio es lo que han rentado los 100. doblones este primer año, dando medio año de vacio como está dicho; los quales 2. doblones y medio, se han de cargar en el segundo año, dando tambien el dicho medio año de vacio.

Año 2. En este año los 100. doblones cargados; ganan 5. doblones por todo el año entero, y à mas deste, se ha de vér los 2. doblones y medio quanto ganarán en medio, que siguiendo la regla de tres, en un octavo de doblon, con que al fin del segundo año, se allan de pension 5. doblones por los 100. doblones, y un octavo de doblon por los 2. doblones y medio que se encargaron, los quales sumados, hacen 5. doblones y un octavo, y esto es lo que se ha de cargar el año tercero; y hasta aora ay cargados 100. doblones por una parte del primer año, y 2. doblones y medio del año segundo, que juntos son 102. doblones y medio.

Año

Año 3. Los 102. dos doblones y medio que están ya cargados hacen doblones , y un octavo de pension por todo el año , porque están ya cargados ; mas los 5. doblones , y un octavo que se han de cargar este año ; hacen 41. 320. avos de doblon de pension por medio año ; con que al fin deste tercer año , se hallan de pensiones 5. doblones , y un octavo , y mas 41. 320. avos , que sumadas hacen 5. doblones y 81. 320. avos , que se han de cargar el año siguiente, y hasta aora ay cargados 102. doblones y medio de los años antecedentes , y 5. doblones y un octavo , que se cargaron este año , que todas hacen la suma de 107. doblones , y cinco octavos.

Año 4. Los 107. doblones , y cinco octavos , que están ya cargados , hacen 7. doblones y 61. 160. avos por todo el año. Mas los 5. doblones y 81. 320 avos por medio año , hacen 1701. 12800. avos de doblon : con que al fin deste año , se hallan este quebrado antecedente de doblon , y mas 7. doblones y 61. 160. avos , deste modo se irá prosigüiendo en los otros años , hasta igualar proximamente con los 150. doblones.

478. Question 57. Pedro cargó 200. libras 10. sueldos y 6. dineros á razon de 5. por 100. preguntase en 5. meses y 8. dias , quanta pension harán ? Para evitar la molestia de los numeros denominados , se pueden reducir todos á la minima especie , y ordenar la regla de tres asi : Si 24000. dineros (que son las 100. libras) en 365. dias (que es un año) ganan 1200. dineros (que son las 5. libras) 48126. dineros (que son las 200. libras 10. sueldos y 6. dineros) en 158 dias (que son los 5. meses , y 8. dias) quanto ganaràn ? Siguiendo la regla , que es directa , salen 1041. dineros y 1152. 1825. avos , que son 4. libras 6. sueldos 9. dineros , y mas el sobredicho quebrado.

1	24000, dineros.
2	365 dias.
3	1200. dineros.
4	48126 dineros.
5	158 dias.
6	dineros

Adviertase : que los meses de ordinario se cuentan por 30. dias cada uno , pero si alguno quiere proceder con todo rigor , puede contar los meses que tienen 31. dias , escriviendolos desde que comienza el censo ; como si el censo se cargò al principio de Junio , escriva Junio , y al

1	Junio 30 dias.
	Junio 31 dias.
2	Agosto 31. dias.
3	Setiemb. 30. dias.
4	Octubre 31. dias.
5	8 dias.
	161 dias.

lado

lado 30. dias, despues Julio, y al lado 31. dia, despues Agosto, y al lado 31. &c. y despues los 8. dias como parece en la formula: pues la suma de todo, serán los dias que corrió el senso.

Adviertase tambien, que basta reducir los terminos homogeneos á una misma especie; pero si ay algun termino, que su homogeneo no es número denominado, no necesita de la reduccion: y asi porque el termino quarta, y quinto, son numeros denominados, se han de reducir à la ultima especie, y tambien sus homogeneos primero, y segundo, se reducirán á la misma especie; pero porque el termino tercero no es numero denominado, y el sexto, que es el que falta, no ay necesidad para que sea numero denominado, se podrá dexar el tercer termino sin hacer reduccion, y entonces saldrá el sexto termino sin reduccion de la misma especie que el tercero: y asi será la regla de tres: Si 24000. dineros en 365. dias, ganan 5. libras 48126. dineros en 158. dias, ganarán 4. libras y 148977. 438000. avos, que son 6. sueldos 9. dineros y 1152. 1825. avos, que es lo mismo que antes.

479. Question 58. Pedro cargó á censo 1250. libras á 16. dineros por libra; preguntase quanto hacen cada año de pension; Digase: Si una libra dá 16. dineros de pencion en un año, 1250. libras, quanta pension harán? Siguiendo la regla, hacen 20000. dineros, que son 83. libras 6. sueldos y 8. dineros.

De aqui se infiere otro modo mas facil, que es multiplicar las 1250. libras por 16. dineros, ó por 1. sueldo y 4. dineros, lo qual solo es añadir su tercera parte, esto es, saquese el tercio de 1250. que es 416. añadido á los 1250. son 1666. sueldos y dos tercios, esto es 83. libras 6. sueldos y 8. dineros. La razon desto es, porque en la regla de tres antecedente, se multiplican las 1250. libras por 16. y el producto se parte por 1. con que queda el mismo producto. Luego no es menester ordenar regla de tres: y como el multiplicar 1250. libras por 16. dineros, ó por 1. sueldo y 4. dineros, es multiplicar por 1. que no aumenta la multiplicacion, y despues añadir el tercio, porque 4. dineros, son el tercio de un sueldo, por eso basta añadir el dicho tercio, y serán sueldos.

480. Question 59. Pedro quiere hacer 40. libras de renta, y halla quien tome un censo à razon de 16. dineros por libra; preguntase quantas libras cargará? Conviertanse las 40. libras en dineros, y son 9600. dineros, dividanse por 16. y el quociente 600. serán las libras, que ha de cargar.

481. Question 60. Pedro cargò 1000. libras á 15. dineros por li-

libra, y quiere saber en quanto tiempo las pensiones importarán las mismas 1000. libras. Busquese quanto hacen de pension las 1000. libras en un año á 15. dineros por libra, (479) y se hallarán 1250. sueldos, dividanse las 1000. libras por los 1250. sueldos, y se hallarán 16. años, y en tanto tiempo las pensiones importarán las 1000. libras: porque si se multiplican los 16. años por la pension de un año, se producen las mismas 1000. libras.

482. Question 61. Un Mercader compra en Valencia 3. cargas 2. quintales y 1. arroba de almendras por 30. libras la carga, y por aver algunas cortezas, le quitan á razon de 5. por 100. de tara, preguntase quanto vale limpio? Primeramente se ha de quitar la tara, reduciendo las cargas quitales á arrobas, que es la minima especie, y serán 45. arrobas (76) suponiendo que la arroba es de 30. libras. Y porque hacen de taras á 5. por 100. juntense los 5. con los 100. y digase: Si 105. vienen de 100. de quantos vendrán 45. arrobas? Siguiendo la regla, salen 42. arrobas y seis septimos de arroba limpias.

Aora para saber lo que valen, digase por regla de tres: Si 12. arrobas, que es una carga, valen 30. libras, 42. arrobas y seis septimos, quanto valdrán? Siguiendo la regla, salen 106. libras 6. sueldos 2. dineros, que es el valor de la mercaderia en limpio.

Questiones miscelaneas.

483. Question 62. Pedro compró dos tercios de onza de canela, por cinco sextos de real, quiere saber al mismo respeto, que valdrán tres quartos de onza de la misma canela? Diga por regla de tres: Si dos tercios valen cinco sextos, los tres quartos, que valdràn? Multiplicando los tres quartos por los cinco sextos, salen 15. 24. avos, y partiendo este producto por los dos tercios, hallará 45. 48. avos de real, por el valor de los tres quartos de onza.

De otro modo se puede resolver esta question, sus semenjantes, cuyos terminos fueren quebrados, ó enteros, y quebrados, con tal, que los enteros se reduzgan á sus quebrados. Escribanse segun el orden de la regla de tres; esto es el primer termino en el lugar primero, el segundo en segundo lugar, &c. Y multiplicando segun lo el señalan las lineas; esto es, el 3. por el 5. y el producto 15. Por el otro 3. saldrá el numerador 45. multiplicando tambien el 2. por el 6. y el producto por el 4. saldrá el denominador 48. con que los tres quar-

$$\begin{array}{cccccc} 2 & & 5 & \text{——} & 3 & 45 \\ \text{—} & \times & \text{—} & & \text{—} & \text{—} \\ 3 & & 6 & \text{——} & 4 & 48 \end{array}$$

quartos de onza, valdrán 45. 48. avos de real.

La razon desto es manifiesta, porque resolviendo la regla de tres, se multiplican los tres quartos por los cinco sextos, que es multiplicar numerador por numerador, y denominador por denominador, y el producto 15. 24. avos, se parte por los dos tercios, que es multiplicar el numerador 15. por el denominador 3. y el denominador 24 por el numerador 2. que es lo mismo que hemos hecho.

Quando la regla de tres en quebrados es inversa, se obra como aqui está figurado. Si para ganar 2. reales y tres quartos, son menester dos quintos de dia, para ganar 6. reales y medio, quanto tiempo será menester? Reducidos los enteros à sus quebrados, escrivanse los terminos conforme el orden de la regla de tres, multiplicando los numeros segun lo señalan las lineas, saldrán 44. 260. avos de dia, que es una hora y 28. minutos. La razon es la misma.

$$\begin{array}{ccccccc} 11 & \text{——} & 2 & & 13 & & 44 \\ \text{—} & & \text{—} & \bowtie & \text{—} & & \text{—} \\ 4 & \text{——} & 5 & & 2 & & 260 \end{array}$$

484 Question 63. Si cinco septimos de libra, valen dos tercios de real, tres quartos de onza, que valdrán? Conviertanse los cinco septimos de libra en quebrado de onza, multiplicando el numerador 5. por las 12. onzas que tiene la libra, y serán 60. septimos de onza. Aora obrese del mismo modo, multiplicando segun las lineas, y saldrán 42. 720. avos de real.

$$\begin{array}{ccccccc} 60. & & 2 & \text{——} & 3 & & 42 \\ \text{—} & \bowtie & \text{—} & & \text{—} & & \text{—} \\ 7 & & 3 & \text{——} & 4 & & 720 \end{array}$$

485 Question 64. un Platero puso en el crisol 30. onzas de oro de 20. quilates, y despues halló solas 28. onzas, pidese de quantos quilates son? Digase: Si 28. onzas son 30. los 20. quilates, quantos serán? Siguiendo la regla, saldrán 21. quilates y tres septimos.

486 Question 65. En un Precidio ay biscocho para 3. meses, dando cada dia 24. onzas à cada Soldado, si ha de durar 4. meses, quantas onzas se darán? Digase por regla de tres: Si 3. meses dán 24. onzas, 4. meses quantas darán? Sigiendo la regla inversa, salen 18. onzas.

487 Question 66. Si 6. hombres en 15. dias han menester 3. barchillas de trigo, y si 8. niños en 20 dias han menester 4. barchillas, preguntase sí estuvieran todos juntos, en quanto tiempo consumirian 18 barchillas del mismo trigo? vease quanto trigo han menester los 8. niños en los 15. dias de los hombres, diciendo: Si

en

en 20. dias consumen los niños 4. barchillas de trigo; luego en 15. dias consumirán 3. las quales juntas con las 3. barchillas que han menester los hombres, son 6. Ahora digase: Si 6. barchillas se consumen en 15. dias, 18. barchillas en quantos dias se consumirán? Siguiendo la regla salen 45. dias, y en tanto tiempo consumirán las 18. barchillas, comiendo todos juntos.

488. Question 67. Pedro compró una pieza de lienzo por cierta cantidad, la qual vendió por 200. reales, dando tres varas por 8. reales, y ganando el tercio de su caudal; preguntase quantas varas tirava la pieza, y á quanto costava cada una? Digase: Si 8. reales vienen de 3 varas, 200. reales de quantas vendrán? Siguiendo la regla salen 75. varas, que tirava la dicha pieza. Ahora para saber lo que costó cada vara, quitese el quarto de los 200. reales (porque gana el tercio se quita el quarto: si ganára el quinto, se quitaria el sexto; y siempre el denominador de lo que se quita, tiene 1. mas que el denominador de lo que gana) y que darán 150. los quales divididos por las 75. varas que tira la pieza, dan 2. reales, y tanto costó cada vara.

489. Question 68. Pedro tiene un vaso en el qual caben 100. libras de aceyte, y le quiere llenar de miel, pregunta quantas libras cabrán? Porque la proporcion del aceyte á la miel; es como 108. á 180. como consta de los Proemiales, diga por regla de tres: Si 108. son 180. luego 100. libras de aceyte serán 166 libras y dos tercios: y con tantas libras de miel se llenará el dicho vaso.

Lo mismo es, si tiene una bala de hierro, que pesa 6. libras, y quiere saber otra del mismo tamaño de cobre quanto pesará. Diga: Si 945. que es el hierro, dan 1065. que es el cobre; luego las 6. libras de hierro darán 6. libras y 16. 21 avos de cobre.

490 Question 69. Pedro tiene 80. arrobas de aceyte, y otras tantas de vino, las 80. arrobas de aceyte caben en 10. vasos iguales, preguntase las 80. arrobas de vino en quantos vasos tambien iguales cabrán?

Esta question es inversa de la antecedente; porque en aquella se buscaba el peso de dos especies, conocida su magnitud; y en esta, conocido el peso se busca la magnitud. La proporcion, pues, del aceyte al vino, es como 108. á 118. y un octavo, como consta de los Proemiales (siendo la misma magnitud), y pues aora se busca esta, (siendo el peso uno mismo) será la razon reciproca como 118. y un octavo, à 108. Digase, pues: Si 118. y un octavo, dan 108. O para quitar quebrados: Si 945. dan 864. Luego 10. vasos darán 9. vasos, y un séptimo y en tantos vasos iguales á los del aceyte , cabrán las 80. arrobas de vino.

Lo mismo es , si tiene una bala de plomo que pesa 10. libras , y quiere saber 10. libras de cera , hechas una bala , qué tamaño tienen? Diga por regla de tres : Si 112. y medio de cera ; dan 1361. y un quarto de plomo. Luego 10. libras de plomo darán 121. y la razon de 10. à 121. tendrá el tamaño de la bala de plomo á la de cera : con que partiendo 121. por 10. saldrán 12. y un decimo , y tantas veces será mayor la bala de cera , que la de plomo. Esto se entiende en la solidéz , pero no en el diametro.

491. Y asi , si quiere saber el diametro , se podrá valer de esta Tabla sacada tambien de Merseno , y ajustada à la que dimos en los Proemiales , entre tantò que no tratamos de la raiz cubica.

Oro	100	Marmol	168
Azogue	111	Piedra comun	192
Plomo	118	Christal	200
Plata	124	Azufre	202
Cobre	128	Miel	225
Laton	130	Agua	265
Hierro	133	Vino	267
Estaño comun	136	Cera	271
Estaño puro	137	Aceyte	276
Piedra Imán	156	Harina	347

Como si tiene una bala de cobre que pesa 18. onzas , y quiere saber otra bala de plata de 18. onzas que diametro tendrá , mida primero con un compas de puntas bueltas el diametro de la bala de cobre , y dividiendole en las partes iguales , que quisiere , ó tomandolas de un pitipié , supongo que sean 10. Diga aora : Si 128. que es el cobre , dan 124. que es la plata : luego 10. partes del diametro de la bala de cobre darán 9. partes y 11. 16. avos , por el diametro de la bala de plata.

492 Question 70. Un Artifice quiere hacer una bala de plomo , que tenga un palmo Valenciano de diametro : pregunta quantas libras de plomo pesará ? Para resolver facilmente esta question , se ha de suponer , que segun concuerdan todos los Artilleros , el diametro de una bala de hierro colado de una libra Valenciana de peso , es la quinta parte del palmo Valenciano : y por consiguiente , el diametro de una bala de hierro de 8. libras , es dos quintos del mismo palmo,

el de una bala de 27. libras, es tres quintos; el de 64. libras es quatro quintos; y el diametro de una bala de 125. libras, es un palmo Valenciano. Y con estas medidas tienen hechos los calibres los sobredichos Artilleros de Valencia, aunque es verdad, que no he tenido ocasion de comprobar estas medidas; pero pasen aora.

Esto supuesto, digase por regla de tres: Si 945. onzas de hierro, dan 1361. y un quarto de plomo: luego 125. libras que pesa la bala de hierro de un palmo, darán 180. libras y 5. 84avos, por el peso de la bala de plomo de un palmo Valenciano de diametro.

Otras questiones de esta materia pondremos en el Libro tercero, porque necesitan de la extraccion de raiz cubica. Entretanto tengase bien en la memoria, que la Tabla que dimos en los Proemiales, supone que todas las especies son de una misma magnitud, pues están ajustadas à la capacidad del Congio Romano, ó de un Cubo de medio pie Geometrico. Y así, si se busca el peso de alguna especie dispuesta en forma de Cubo de medio pie Géometrico, será las onzas Romanas, Griegas, Hebraicas, ó Castellanas, que se señalan en la misma Tabla, y si se desea en otras onzas, formese regla de tres. Pero si hay dos especies de igual tamaño, ó magnitud, (qualquier que sea) y se sabe el peso de la una, se conocerá el peso de la otra por regla de tres, como lo hicimos en la question 68. (489.

Pero en esta Tabla (491.) suponiendo un mismo peso en todas las especies, se señalan las partes de los diametros, ò lados homologos, de las mismas especies hechas esferas, ò cuerpos semejantes: Como si se hace una bala de oro de qualquier peso, y su diametro se divide en 100. partes iguales, digo que otra bala de azogue del mismo peso, tendrá 111. partes de aquellas por diametro, y otra bala de plomo del mismo peso, tendrán 118. partes de las mismas por diametro, y asi de las demás especies.

493 Question 71. Una pieza de Artilleria ha menester para cargarse 20. libras de polvora comun, que llaman *de Artilleria*, ò de 4. as y as; preguntase de polvora de 5. as y as, ò de 6. as y as, quantas libras serán menester? Para la perfecta inteligencia de esta pregunta, se ha de suponer, que aunque puede haber diferentes composiciones de polvora, pero las mas usadas son tres. La primera, de 4. partes de salitre, una de azufre, y otra de carbon, que es lo mismo que polvora de 4. as y as; y de esta composicion sale polvora comun. ó de Artilleria. La segunda, de 5. partes de salitre una de azufre, y otra de carbon que es lo mismo que polvora de 5. as y as, de la qual usan en los arcabuces. La tercera de 6. partes de salitre,

una de azufre, y otra de carbon; esto es, de 6. as y as; la qual polvora fina, ò de pistolas.

Estas tres diferentes composiciones se han de entender en caso, que el salitre no esté refinado, y entónces la mayor, ó menor cantidad hace la polvora mas ó menos valiente? pero si el salitre está mas refinado en una polvora que en otra, menor cantidad de salitre puede hacer mas que la mayor cantidad; y así, la polvora de quatro as y as, que tenga el salitre muy refinado, será mas fuerte que la de cinco as y as, que tenga el salitre sin refinar; de suerte que la perfeccion del salitre puede suplir la cantidad, y al contrario: con que en una misma cantidad de salitre, puede salir la polvora mas ò menos valiente, si está mas ó ménos preparado. Y como la perfeccion del salitre no se puede conocer tan facilmente como la cantidad, tampoco será facil hacer las sobredichas composiciones, de suerte, que no tengan mas, ò menos perfeccion, que la que han de dar sus partes.

A mas de esto se ha de advertir, que los que tratan la polvora, asientan todos, que la mayor ó menor eficacia proveine de tener mas, ó menos salitre en cantidad, ò en perfeccion, como queda dicho; y por eso dicen, que la polvora de 6. as y as, es mas valiente que la de 5. as y as, porque tiene mas salitre. De suerte, que segun ellos, toda la eficacia proviene del salitre; pero en mi concepto se engañan totalmente: porque aunque es verdad, que la violencia de la polvora proviene del salitre; pero como en ella hay otros materiales, pueden estos retardar la violencia, segun su menor perfeccicn, ò mayor cantidad: y no estar en debida proporcion.

Pero supuesto que en la realidad hay los tres sobredichos géneros de polvora, y que toda la eficacia proviene de solo el salitre, entraré à resolver la question; suponiendo que en 45. libras de polvora de 4. as y as, ay tanto salitre, como en 42. libras de 5. as y as, y como en 40. libras de 6. as y as, como se verá abaxo. (533) Digase, pues: Si 45. libras dan 42. luego 20. libras darán 18. libras y dos tercios de polvora de 5. as y as. Otra vez: Si 45. dan 40. luego 20. darán 17. libras, y siete novenos de polvora de 6. as y as. De suerte, que tanto valor tendrán 20. libras de polvora de 4. as y as, como 18. y dos tercios de 5. as y as; y como 17. y siete novenos de 6. as y as; y con tantas libras se cargará la dicha pieza. Pero si las 20. libras de polvora son de 5. as y as, y las quiero reducir à polvora de 4. as y as, digo: Si 42. dan 45. luego 20. darán 21. libra y tres septimos de 4. as y as: Si las las 20. libras ssn de 6. as y as, y las quiero reducir à 4. as y as, diré: Si 40. dadan 45. luego 20. darán 22. libras y media.

PARTE II.

DE LA REGLA DE COMPAÑIAS.

494. ENSEñA esta regla dividir un numero en partes proporcionales á otros numeros señalados; como partir este numero 100. en tres partes, que guarden entre sí la razon que 20. 18. 12. las quales son 40. 36. 24. Fundase en la proposicion 12. del lib. 5. de Euclides (318); porque siendo proporcionales 40. 36. 24. á 20. 18. 12. tambien la suma 100. de los antecedentes, que son los primeros numeros, será proporcional á la suma 50. de los consequentes, que son los segundos; esto es, los todos son proporcionales á sus partes semejantes.

Y aunque ha tomado el nombre de las compañias que suelen hacer los Mercaderes, poniendo cada uno cierta cantidad, y despues repartiendo la ganancia, ó perdida á proporcion de la cantidad expuesta; pero tambien se aplica á muchisimas otras cuentas de reparticiones, testamentos, &c. como luego veremos.

495 Dividase en simple, y compuesta. La regla de compañias simples es aquella en que una cantidad se reparte en partes pro-proporcionales á otras dadas, sin atender á tiempo, ni otras circunstancias; y asi se resuelve la question por regla de tres simple. La compuesta atiende al tiempo, ù otras condiciones, y ha menester regla de tres compuesta, ó alomenos reducida à simple, que es lo ordinario.

COMPAñIAS SIMPLES.

Precepto.

496 La suma de las cantidades expuestas, ó numeros dados, pongase en primer lugar; la ganancia, pérdida, &c. pongase en segundo; cada cantidad expuesta, ó en numero dado, escribase en tercer lugar; despues formense tantas reglas de tres, como numeros huviere en el lugar tercero; los numeros que salieren estarán en quarto lugar, y enseñarán lo que se busca. Este orden de Escribir los terminos se guardará siempre, dexando vacío el lugar del termino que se busca, hasta que se aya hallado. Si la cantidad, ó caudal de

cada uno no es de una especie, se hará la reduccion; de suerte, que en todos sea de una especie.

497. Question 1. Tres Mercaderes hacen compañia; el primero pone 10. dobles; y el segundo 15 y el tercero 20. Acabada la compañia hallaron 90. doblones de ganancia; para saber quanto toca á cada uno, segun la cantidad que puso, sumense los caudales de cada uno, y serán 45. los quales se escribirán en primer lugar. En el segundo pongase la ganancia comun 90. Y en el tercero escribanse los caudales de cada uno. Hecho esto, formense tantas reglas de tres como caudales ay; diciendo; Si 45. ganan 90. luego 10. ganarán 20. Otra vez: Si 45. ganan 90. luego 15. ganarán 30. Otra vez: Si 45. ganan 90. luego 20. ganarán 40. Con que al que puso 10. le tocan 20. al que 15. le corresponden 30. y al que dió 20 le alcanzan 40. como se ve en la formula.

Cau. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
45.	90.	10.	20.
		15.	30.
		20.	40.

Para no hacer tantas reglas de tres, multipliquense los caudales de cada uno por la ganancia comun, y los productos 900. 1350. 1800. dividanse por la suma de los caudales, los quocientes serán las ganancias de cada uno.

Demonstracion.

Por lo que se dixo arriba (494) es manifiesta la demonstracion; porque los caudales han de ser proporcionales con las ganancias, segun buena quenta, y razon; esto es, la misma razon ha de aver de 10. á 20. que de 15. á 30. y de 20. á 40. A mas desto, la suma de los antecedentes, que son los caudales, tiene la misma razon à la suma de las ganancias, que son los consequentes, que cada caudal á su ganancia; y assi, son proporcionales la suma de los caudales á la ganancia comun, como cada caudal á cada ganancia; luego resolviendo las reglas de tres, saldrán las ganancias.

Examen.

Multipliquense cada ganancia por el caudal comun 45. y sumensi los productos. Multipliquense tambien cada caudal por la ganancia comun 90. y sumense los productos. Pues si las dos sumas son iguales, estará bien hecha la operacion.

498. Question 2. Tres Mercaderes emplearon 45. doblones, y ganaron el primero 20. doblones; el segundo 30. y el tercero 40. pidese el caudal de cada uno. En esta question están conocidos el

el primero, segundo, y quarto terminos de la regla de tres, y falta el tercero; pues como el producto de los extremos es igual al de los medios (298), multipliquense cada ganancia por el caudal comun, ó empleo, y partiendo los productos por la ganancia comun, saldrán los caudales de cada uno.

De otro modo: Pongase la ganancia comun 90. en primer lugar, el empleo, ó caudal comun 45. en segundo; las ganancias particulares 20. 30. 40. en tercero, y haganse las reglas de tres como antes: Si 90. dán 45. luego 20. 30. 40. darán los empleos, ó caudales 10. 15. 20.

499. Question 3. Tres Mercaderes hicieron compañia, el primero puso 10. doblones, y ganó 20. el segundo puso 15. y ganó al mismo respeto; el tercero puso 20. y ganó tambien al mismo respeto? Preguntase quanta fue la ganancia comun, y quanto ganaron el segundo, y tercero? Escribanse los terminos, segun la formula, y porque en la primera regla de tres falta el segundo termino, y el producto de los extremos es igual al de los medios, multipliquense la ganancia 20. por el caudal comun 45. y el producto 900. partase por el caudal 10. el quociente 60. será la ganancia comun. O digase por regla de tres: Si 10. dán 20. luego 45. darán 90. Las ganancias que faltan se hallaran por la question 1.

Caud. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
45.		10.	20.
		14.	
		20.	

500. Question 4. Tres Mercaderes, haciendo compañia, emplearon el primero 10. doblones, y ganó 20. el segundo no se sabe lo que empleó, pero ganó 30. doblones; el tercero empleó 20. doblones, y no se sabe lo que ganó; preguntase quanto empleò el segundo, y ganó el tercero? Para responder á esta question, se ha de suponer lo que se demonstró en la proposicion 11. (329) que las diferencias de los antecedentes son proporcionales á los antecedentes, y consequentes. Pues tomese la diferencia de las ganancias, conocidas, que es 10. y digase por regla de tres: Si la ganancia 20 dá 10. de diferencia, el caudal

Caud. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
		10.	20.
			30.
		20.	

10. que diferencia dará del caudal, cuya ganancia és 30. y siguiendo la regla salen 5. los quales juntos con el caudal 10. (y esto porque la ganancia 30. es mayor que la ganancia 20. que corresponde el caudal 10. que si fuera menor, se abia de restar la diferencia 5. del caudal 10.) dará al caudal 15. del segundo.

Con esto ya están conocidos los tres caudales, y por consiguiente la suma dellos, ó caudal comun. La ganancia comun se conocerá por la question 3. y por la primera quedará conocida la ganancia del tercer Mercader.

501. Question 5. Un Mercader debe 10000. reales á quatro acreedores: al primero deve 200. al segundo 8000. al tercero 1050. al quarto 750. solos tiene 9000. reales para pagar; preguntase quantos reales cobrará proporcionalmente cada acreedor; En esta question la paga es menor que la deuda, y asi ay pérdida; pues pongase la deuda en primer lugar; la paga ó perdida comun en segundo; las deudas particulares en tercero; y formando tantas reglas de tres, como deudas ay en la question, segun se hizo en las ganancias en la question 1. saldrán las pagas particulares, como se vé en el exemplo. De suerte, que el modo de obrar en estas questiones de compañias, el mismo es la ganancia, que en la perdida.

Deuda	Paga com.	Deudas.	Pagas.
10000.	9000	200.	180.
		8000.	7200.
		1050.	945.
		750.	675.

502 Question 6. Dos Mercaderes ganaron en una compañia 1000. reales; al primero, entre caudal, y ganancia le tocaron en la reparitcion 1500. reales; y al segundo 1200. pidese quantos reales puso cada uno. Dispongase la formula como antes, y sumando los 1500. y 1200. reales, seràn 2700. de los quales restada la ganancia comun 1000. quedan 1700. y tanto fue el caudal comun de los dos; con que tenemos ya el primer termino. Y pues en los 1500. y 1200. reales està comprehendido el caudal, y ganancia, sumense el caudal, comun 1700. con la ganancia comun 1000. y serán 2700. (que es la misma suma

Cau. com.	Gan.	Gan. com.	Caudales.	Gan. y caudales,
1700.	1000.		944. $\frac{4}{7}$	1500.
			755. $\frac{5}{9}$.	1200.
				2700.

de

de las dos ganancias, y caudales). Aora digase por regla de tres: Si 2700. dán el caudal comun 1700. los 1500. qué caudal daràn? Siguiendo la regla, salen 944. reales, y quatro novenos, y tanto puso el primero: Digase otra vez: S: 2700. dàn 1700. luego 1200. daràn 755. y cinco novenos, y en tanto contribuyò el segudo.

503. Question 7. Tres Mercaderes hicieron compañia con pacto, que el primero tuviese de la ganancia á razon de 10. por 100. El segundo á razon de 12. por 100. Y el tercero á razon de 18. por 100. Ganaron 5600. reales, pidese quanto ha de tener cada uno? Para responder à esta question, y sus semejantes, se ha de suponer, que los 10 12. y 18. que han de ganar por 100. son los caudales de cada uno, y que la suma 40. es el caudal comun. Dispuestos, pues, los terminos como enseña la formula, es la misma question que la primera, y asi resolviendola segun lo que alli se dixo, saldrán las ganancias 900. 1080. y 1620.

Caud. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
40.	3600.	10.	900.
		12.	1080.
		18.	1620.

504. Question 8. Dos Mercaderes hicieron compañia, el uno puso 100. doblones, el otro solo puso el trabaxo de la negociacion, el qual fué estimado por 80. doblones; despues de acabada la compañia, hallaron 380. doblones entre caudal, y ganancia; pidese quanto toca á cada uno. Sumense los caudales de cada uno 100. y 80. (porque el trabajo se reputa por caudal) y será el caudal comun 180. Aora restense los 100. doblones, que puso el primero de los 380. de ganancia, y caudal, y quedarán 280. por ganancia comun. Con esto están dispuestos los terminos como parece en la formula, y la question es la misma que la primera, por la qual se hallarán las ganancias 155. y cinco novenos, para el que puso los 100. doblones, y 124. y quatro novenos, para el que solo contribuyó con su trabajo.

Caud. com.	Gan. com.	Caudales..	Ganancias.
180.	280.	100.	155. $\frac{5}{9}$.
		80.	124. $\frac{4}{9}$.

De suerte, que en este genero de compañias en que el uno pone dinero, y el otro trabajo; el que pone dinero, ha de sacar su caudal, y la ganancia se ha de repartir á proporcion del caudal del uno, y de la estimacion del trabajo del otro; porque lo que se pone en estas com-

compañias es dinero, y trabajo, pues asi como el uno queda con su industria, y habilidad para emprender otra compañia; tambien el otro ha de quedar con su dinero para poder hacer otro contrato.

505 Question 9. Dos Mercaderes hicieron compañia, el primero puso 100. doblones, y el segundo 20. y á mas el trabajo, y agencias, que valen 80. doblones; acabáda la compañia, se hallaron 40. doblones de perdida, preguntase quanto ha de pagar cada uno? En esta question la perdida, se ha de pagar á proporcion del caudal de cada uno, diciendo por regla de tres: Si 120. dán 40. luego 100. darán 33. y un tercio, otra vez; Si 120. dán 40. luego 20. daràn 6. y dos tercios, y no se ha de atender al trabajo, porque aunque es verdad, que los 20. doblones con el trabajo, valen tanto como los 100. doblones, que puso el primero, y que si huviera ganancía, avia de partirse igualmente; pero como pierde por razon de los trabajos, supuesto que si en la compáñia huviera ganancia, ganaria por ellos si pagára atendiendo á las trabajos, sería doblada la paga; la una por lo que pierde, y la otra por lo que paga.

Caud. com.	Perd. com.	Caudales.	Perdidas,
120.	40.	100.	33. $\frac{1}{3}$.
		20.	6. $\frac{2}{3}$.

506. Question 10. Quatro Mercaderes conciertan 10000. libras de azucar por 9000. reales; el primero toma 4000. libras, el segundo 2000. el tercero 3000. y el quarto las 1000. restantes; pidese quanto ha de pagar cada uno? Digase por regla de tres. Si 10000. libras valen 9000. luego las 4000. libras del primero, valdrán 3600. reales; las 2000. del segundo, valdràn 1800. reales; las 3000. del tercero, valdrán 2700. reales; y las 1000. del quarto valdrán 900. reales.

507. Question 11. Dos hicieron compañia, y en ella ganaron 200. reales, de los quales al primero la tocaron 50. el segundo expuso doblado caudal que el primero, y mas 8. reales; preguntase quanto caudal expuso cada uno? Supuesto que el primero ha ganado 50. reales, es cierto, que el segundo aviendo expuesto doblado, le tocarán 100. reales, y por los 8. reales que puso mas, le pertenecerá el residuo de 150. reales, que ganan entre primero, y segundo, hasta 200. reales de toda la ganancia, que es 50. reales. Digase, pues, si 50. reales, que es el dicho residuo, proviene de 8. reales, que expuso mas; luego 50. reales que ganó el primero, provendrán de 8. reales, y tanto fue el caudal del primero, los quales doblado, y añadiendo 8. serán 24. reales por el caudal del segundo.

508. Question 12. Dos hicieron compañia, exponiendo el primero 10. doblones, y èl segundo 30. al fin ganaron 160. doblones, pero admitieron á un factor, ó procurador, dandole de la ganancia á razon de 10 por 100. pidese quanto toca á cada uno? Lo primero se ha de saber lo que toca al factor, diciendo: Si 100. dán 10. luego 160. doblones, darán 16. doblones, y tanto ha de tener el dicho factor: Aora restense los 16. doblones de los 160. y quedarán 144 que se han de repartir entre los dos á razon de su caudal, como se hizo en la question 1.

509. Question 13. Quatro en compañia, han ganado 340 doblones, los quales de tal suerte se los han repartido ensre sí, que quantas veces el segundo ha tenido 5. otras tantas el tercero aya de tener 9. y quantas el tercero ha tenido 7. otras tantas el quarto aya de tener 11. Y finalmente, quantas veces el quarto ha tenido 9. otras tantas el primero aya de tener 13. El caudal del primero, fue 286. doblones, preguntase quanto es el caudal, y ganancia de los otros.

En esta question se expresan las proporciones de las ganancias, y por consiguiente de los caudales, pues son proporcionales: Y por que el primero tantas veces ha de tener 13. quantas el quarto 9. sera la razon de los caudales del primero, y quarto, como 13. á 9. Pues digase por regla de tres: Si 13. dán 286. doblones que puso el primero, luego 9. darán 198. doblones por el caudal del quarto: Donde se rve, que tantas veces se contiene el 9. en 198. quantas el 13. en 286.

Y porque el quatro ha de tener tantas veces 11. quantas el tercero 7. Pues si 11. dán 7. luego 198. darán 126. doblones por el caudal del tercero. Y tantas veces entra el 7. en 126. quantas el 11. en 198.

Otra vez; porque el tercero deve tener tantas veces 9. quantas el segundo 5. Será la razon de 126. doblones caudal del tercero, al caudal del segundo, como 9. á 5. Y asi si 9. dán 5. luego 126. darán 70. doblones por el caudal del segundo; y tantas veces entra el 5. en 70. quantas en el 9. en 126.

Hecho esto; yà están conocidos los caudales de cada uno; aora para saber las ganancias, se dispondrá la formula como parece, y se hallaràn por la question 1.

Cau. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias,
680.	340.	286.	143.
		70.	35.
		126.	63.
		198.	99.
		680.	

COMPAÑIAS COMPUESTAS.

Preceptos.

510. Quando en las Compañias ay tiempo, se multiplicará por los caudales de cada uno, y en los productos se formará la regla, como en las Compañias Simples, con tal, que el tiempo sea en todos los caudales de una especie; esto es, ó dias, meses, ó año; pero si en un caudal fueren meses, y en otro años, ó dias, se reducirá á una misma especie, y se obrará como antes. Quando la Compañia es para tiempo igual, no ay que cuydar del tiempo, porque siendo igual, no muda la proporcion.

511. Si alguno saca su caudal antes de cumplirse el tiempo; se contará solamente el tiempo que estuvo. Si saca parte del caudal, se han de hacer por él dos reglas de tres, la primera, por todo el caudal con el tiempo que estuvo; la segunda, por la parte del caudal, que quedó lo restante del tiempo.

512 Question 14. Dos Mercaderes en compañia, han ganado 250. doblones; el primero expuso 10. doblones, por 4. meses; el segundo diò 20. doblones por tres meses; preguntase quanto toca á cada uno de la ganancia, atendiendo al caudal, y al tiempo? Multipliquense los caudales por los meses; esto es, 10. por 4. y 20. por 3. y en los productos 40. y 60. se dispondrà la formula presente, la qual es la misma que en las Compañias Simples. Digase pues:

Cau. y tiemp. com.	Gan. com.	Cau. y tiemp.	Ganancias.
100.	250.	40.	100.
		60.	150.
		100.	

Si 100. suma de los productos de los caudales, y tiempo, dàn 250 ganancia comun, luego 40. darán 100. y 60. darán 150.

Demonstracion.

Solamente demostraré, que el candal de cada un compañero, se ha de multiplicar por el tiempo que le acompaña; pues lo restante de la regla, ya queda demonstrado en la question primera. Diga pues, que se ha de hacer dicha multiplicacion del caudal por el tiempo, para que los caudales estén reducidos á tiempo iguale, porque el que expone 10. doblones por 4. meses, hace lo mismo que dar quatro veces 10. doblones,

que

que son 40. por un mes, y el que pone 20. doblones por 3. meses hace lo mismo que si pusiera tres veces 20. doblones, que son 60. por un mes, pues tanto ganan 10. doblones en 4. meses, quanto 40. en un mes; y tanto 20. doblones en 3. meses, quanto 60. en un mes, con que lo mismo es exponer 10. doblones por 4. meses, que 40. doblones; y lo mismo 20. doblones por 3. meses que 60. doblones, todos por un mes; luego quitando el mes, por ser numero igual en las dos partes de la regla de tres (404) quedaràn solos los 40. y 60. doblones; luego multiplicando el caudal por su tiempo, está buena la regla.

Examen.

El examen mas seguro, que es provar las multiplicaciones del caudal, y tiempo por el partir; y despues examinar la operacion de la compañia, conforme se dixo en la question primera; porque multiplicando los caudales por los tiempos, la Compañia Compuesta, se reduce á Simple.

513. Question 15. Abiendo hecho compañia tres Mercaderes, ganaron 1000. reales; al primero le tocaron 500. reales de ganancia por 200. que puso por 8. meses, y 5 dias: al segundo le cupieron 300. reales de ganancia por 150. que expuso por cierto tiempo; y al tercero le tocaron 200. reales por cierto caudal que dió por 4. meses; preguntase quanto fue el tiempo del segundo, y caudal del tercero?

Para responder á esta question se reducirá el tiempo á dias, que es la menor especie, y se dirá por regla de tres compuesta: Si 200. que puso el primero, ganan 500. reales en 245. dias; luego 150 reales que puso el segundo para ganar 300. reales, aurán menester 196. dias (contiene inversion en el primero, y quarto termino) con que el tiempo del segundo, es 196. dias, que son 6. meses, y 16. dias.

Otra vez: Si 200. reales en 245. dias, ganan 500. quantos reales en 120. dias, ganaràn 200. del tercero; en esta proporcion falta el termino quarto, el qual es 163. reales, y un tercio, como se enseñó en los exemplos del modo facil para resolver qualquier regla de tres compuesta (414) con que el segundo compañero puso los 150. reales por 196. dias, y el segundo expuso 163. reales, y un tercio.

De otro modo, multipliquense lòs 200. reales que contribuyó el primero por 245. dias que estuvieron en la compañia, y será el producto 49000. Digase aora por regla de tres simple: Si 500. rea-

reales de ganancia del primero, vienen de 49000. los 300. reales de ganancia, del segundo, vendrán de 29400. que es el producto del caudal, y tiempo del segundo: y porque el caudal se sabe que es 150. reales, dividase del numero 29400. por 150. y saldrán 196. dias.

Otra vez: Si 500. reales de ganancia del primero, dán 49000. luego los 200. reales de ganancia del tercero, darán 19600. caudal, y tiempo, pues el tiempo del tercero es conocido, que es 4. meses, ó 120. dias, dividase el numero 19600. por el tiempo 120. y saldrá el caudal 163. reales, y un tercio, del tercero.

514 Question 16. Dos Mercaderes hicieron compañia por 2. años; el primero puso 1000. reales, pero despues de 10. meses, sacó 100. reales, y al fin de los 20. meses, bolvió à poner 500. reales; el segundo puso 3000. reales, al fin de 15. meses, sacó 2000. reales, ganaron en la compañia 2000. reales, preguntase quanto toca á cada uno?

Para respónder á esta question, es necesario saber el tiempo que cada uno tuvo su caudal. Y pues el primero en el principio de la compañia, puso 1000. reales, y los tuvo de todos 10 meses, multipliquense los 1000. por 10. y serán 10000. Y porque despues de aver pasado aquellos 10. meses, quitó 100. reales, hasta los 20. meses, es manifiesto, que tuvo en la compañia 900. reales por otros 10. meses, los quales multiplicados, son 9000. reales; ultimamente, porque al fin de los 20. meses, añadió 500. reales, es cierto que por 4. meses (que ay de 20. hasta 24. que son los 2. años que avia de durar la compañia) tuvo 1400. reales (que es la suma de 500. reales, que añadiò, y los 900. qne tenia) pues multipliquense los 1400. por 4. meses, y serán 5600. Sumense aora los tres productos 10000. 90000. y 5600. y serà todo 24600.

El segundo puso al principio 3000. reales, y al fin de 15. meses, sacó 2000. luego todos los 15. meses tuvo en la compañia 3000. reales, pues multipliquense por los 15. meses, y serán 45000. Y pues al fin de los 15. meses, sac6 200. reales, tuvo 1000. reales por 9. meses que ván de 15. á 24 y asi multipliquense 1000. por 9, y

Cau. y tiem p. com.	Gan. com.	Cau. y tiemp.	Ganancias
78600.	2000.	24600.	
		54000.	625. $\frac{175}{131}$.
		78600.	1374. $\frac{6}{131}$.

y serán 9000. Sumense los productos 45000. y 9000. y son 54000.

Dispongase ahora la formula en las sumas de los productos de los dos, como se vé, y resolviendola por la question primera saldrá la ganancia de cada uno.

515 Question 17. Tres Mercaderes en comun negociacion ganaron 190. doblones, los quales repartieron entre sí de tal modo, que la parte del primero, fué tresdoblada de la parte del segundo, y quarto doblada de la parte del tercero. El primero puso en la compañia 80. doblones por 12. meses, el segundo expuso cierto dinero por 8. meses. Y el tercero contribuyó tambieo con cierto caudal por 4. meses; preguntase quanta cantidad recibió cada uno de lol tres de la ganancia comun; y quanto dinero pusieron el segundo, y tercero?

Multipliquense los 80. doblones que expuso el primero por los 12. meses que los tuvo en la negociacion, y son 960. cuyo tercio 320. es el producto del caudal, y tiempo del segundo; porque como la ganancia del primero es tresdoblada de la del segundo; y las ganancias son proporcionales con el producto del caudal, y tiempo; luego tomando el tercio del producto del caudal, y tiempo del primero, será el producto del caudal, y tiempo del segundo, y asi partiendo los 320. por el tiempo del segundo, que son 8. meses, saldrá el caudal 40., doblones.

Asi mismo el quarto de los 960. que es 240. será el producto del caudal, y tiempo del tercero; luego dividiendo los 240. por el tiempo del tercero 4. meses, saldrá el caudal 60. doblones que expuso del tercero. Con que el primero puso 80. doblones por 12. meses: El segundo 40. doblones por 8. meses: Y el tercero 60. doblones por 4. Cuyas ganancias estarán conocidas por la question 14. las quales son 120. doblones del primero, 40. del segundo, y 30. del tercero.

516 Question 18. Un Mercader encomendó á un Pastor 120. ovejas con pacto, que ponga por su parte 20. y que guardandolas 5. años, se partan, caudal, y ganancia por mitad, esto concertado sucediò, que no las guardó sino 3. años, y medio, y al fin de los quales se hallaron 400. cabezas entre caudal, y ganancia; pidese quantas ha de aver cada uno.

Restense primaramente las 140. ovejas que los dos pusieron, de las 40. y quedarán 260. de ganancia, cuya mitad es 130. y tantas ha de tener cada uno; porque de la ganancia en todo tiempo pertenece à cada uno la mitad. Aora para saber las ovejas que ha de tener el Pastor de las 120. del Mercader, tomando la mitad dellas, que son 60. digase: Si 5. años, dán 60. ovejas; luego 3. años, y medio, darán 42. que tocan al Pastor.

Para saber quantas ovejas tocan al Mercader de las 20. que puse el Pastor, tomando la mitad, que son 10. digase: Si 5. años, dàn 10. luego 3. años, y medio daràn 7. y tantas ovejas han de aver el Mercader, y las restantes 13. son del Pastor; sumense estas 13. con las 42. que han de aver del Mercader, y con las 130 de la mitad de la ganancia, y son 185. tantas pues tocan al Pastor, y las restantes 215. al Mercader.

Reparticiones.

517 Hasta aqui hemos tratado de las reglas de Compañias, fundadas en la proposicion 12. del libro 5. de Euc. como queda advertido arriba (494). Esto es, quando un numero se ha de repetir en partes proporcionales á otras dadas; como si este numero 100. se ha de dividir en dos partes proporcionales á 6. y 4. serán 60. y 40. de suerte, que la misma razon ay de 6. á 4. que de 60. á 40.

Aora pues tratarémos de la division de un numero en partes proporcionales al todo; como si este numero 100. se ha de dividir en dos partes, que la una sea un quarto, y la otra tres quartos, del mismo 100. las quales son 25. y 75. donde la misma razon ay del todo 100. á su parte 25. y 75. que del todo quatro quartos (que es la suma de los quebrados un quarto, y tres quartos) á las suyas un quarto, y tres quartos.

518 La suma destas partes puede ser mayor, igual, ò menor que el todo, que es lo mismo que sumando los quebrados, salir el numerador de la suma mayor, igual, ó menor que el denominador, el qual representa al todo; como si 100. reales se han de repartir entre tres, de suerte, que el uno tenga la mitad, que son 50. el segundo tres quartos, que son 75. y el tercero tres quintos, que son 60. cierto está que las partes 50. y 6. sumadas, hacen 180. que es numero mayor que el todo 100.

Asi mismo, si los mismos 100. reales, se han de repartir entre dos, de suerte, que el uno tenga el decimo, que son 10. y el otro el quinto, que son 20. las partes 10. y 20. sumadas, hacen 30. numero menor, que el todo dividido 100. Pero si los 100. reales, se han de repatir entre dos, de modo, que el uno tenga los tres quartos, que son 75. y el otro un quarto, que son 25.

25. entonces las partes 75. y 25 juntas hacen justamente el todo 100.

Quando las partes justas igualen al todo dividido, toca á cada uno en el repartimiento la parte misma que se nombra; esto es el tercio, quarto, &c. Pero quando todas juntas no igualan al todo, entonces á cada uno no pertenece la parte expresada, sino otra proporcional; y asi, si 12. reales se han de repartir entre tres, de suerte que el primero tenga la mitad, el segundo el tercio, y el tercero el quarto, no dirémos que al primero tocan 6. reales, al segundo 4. y al tercero 3. porque 6. 4. y 3. son 13. sino que al primero toca á razon de la mitad, que son 5. y 7. 13. avos, al segundo à razon del tercio, que son 3. y 9. 13. avos; y al tercero á razon del quarto que son 2. y 10. 13. avos. De modo, que sumadas estas partes, hacen justamente 12. Lo mismo digo quando la suma de las partes es menor que el todo.

519. Question 19. Entre tres Mercaderes se han de repartir 1050. reales, con esta condicion, que el primero tenga à razon de los dos tercios; el segundo á razon de la mitad; el tercero á razon del tercio; preguntase quanto toca á cada uno. Reduzgase los quebrados á un comun denominador (154) y serán $\frac{12}{18}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{6}{18}$., cuya suma es $\frac{27}{18}$. y porque el numerador es mayor que el denominador, en la reparticion no saldrán las mismas partes señaladas, sino menores á proporcion, como se dixo en el parrafo antecedente.

Pues digase por regla de tres: Si la suma de los numeradores 27. dá 105. reales; luego el numerador 12. dará 466. reales, y dos tercios para el primero. Otra vez: Si 27. dán 1050. luego el segundo numerador 9. dará 350. reales para el segundo. Otra vez: Si 27. dàn 1050. reales; luego el tercer numerador 6. dará 233. reales y un tercio para el tercero.

520. Question 20. Entre quatro se han de repartir 366. reales, de modo, que el primero aya de tener la mitad, y mas 10. reales; el segundo tres quintos menos 20. reales; el tercero un tercio, y mas 8. reales el quarto un quarto menos 6. reales; preguntase quanto ha de haver cada uno. En esta, y semejantes questiones, restense de la suma los numeros, que se ha de tomar mas, y añadanse los numeros que se han de tomar menos; y asi, porque el primero ha de tomar 10. mas, y el tercero 8. restense 18. de los 396. y quedan 378. Añadanse á los 378. los 20. y 6. que tomar menos el segundo, y quarto, y son 404.

Esto

Esto supuesto, reduzganse los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{49}$, à un comun denominador, y seràn $\frac{60}{120}$ $\frac{72}{120}$ $\frac{40}{1209}$. $\frac{30}{120}$ La suma de numeradores es 202. Digase aora por reglas de tres, comun en las compañias: Si la suma de los numeradores 202. dà 404 (que es el numero nacido de lo añadido, y quitado); luego cada numerador 60. 70. 40. y 30. darán 120. 144. 80. y 60. y tanto pertenece à cada uno.

202.	404.	60.	120
		72	144
		40	80
		30	60

521 Question 21. Un Navio que llevava 26. personas apressò à otro, en el qual fueron hallados 7429. doblones, los quales por concierto se han de repartir en esta forma: que el Patron ha de saber dos porciones, ò partes y media; el Piloto, dos partes; el Escrivano- una parte, y dos tercios; los Marineros, que son 20. cada uno ha de tener una parte; los muchachos, que son tres, ha de aver cada uno un quarto; preguntase quanto pertenese á cada uno?

Porque los quebrados expresados en la reparticion son $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, multipliquense los denominadores, y el producto 24. serà un numero, que suponiendo por una porcion; tendrà mitad, tercio, y quarto. Pues porque el Patron ha de tener dos partes, y media, tomese el 24. otras tantas veces, y serán 60. El Piloto tiene dos partes; pues doblese el 24. y serán 48. El Escrivano tiene una parte, y dos tercios; pues juntando los dos tercios del 24. con el mismo 24. serán 40. A cada marinero pertenece una parte; pues por ser 20. multipliquense el 24. por 20. y serán 480. Ultimamente, cada muchacho tiene un quarto; y por ser tres, tomese tres veces el quarto de 24 serán 18. De suerte, que suponiendo que el 24. es una porcion, pertenecen á cada uno la cantidad señalada en la presente tabla; pero como en la verdad el 24. no es la porcion verdadera, se formarà una regla de compañia, de este modo.

Patron.	60.
Piloto.	48.
Escrivano.	40.
20. Marineros.	480.
3. Muchachos.	18.
	646.

Sumense las cantidades, que por la suposicion tocan á cada uno, y serán 646. Digase aora por regla de tres: Si 646. dan 7429. doblones; luego 60. darán 690 doblones para el Patron; los 48. darán 552. doblones al Piloto; los 40. darán 460. al Escrivano; los 480. darán 5520. doblones por los marineros; lo qual es por ser 20. dividanse los 5520. por 20. y tocarà à cada uno 276. doblones; los 18. daràn 207. á los muchachos, que por ser tres se dividiràn en tres partes, y caberá à cada uno 69. doblones. Con este Artificio se resolveràn otras questiones de reparticiones, particularmente de las que llaman Ecclesiasticas, y de Guerra.

Arrendamientos.

522 Los arrendamientos de Señorios, derechos, diezmos, &c. se suelen hacer por algunos años, sin poner dinero de presente, solo se dan fiadores, ò abonos; y repartiendo la cantidad en que se concertaron, ù trataron por los años del arrendamiento, se paga al fin de cada año una parte, ó de medio à madio año, ò por tercias, segun fuere el concierto; despues á lo ultimo se reparte la perdida, ó ganancia (sacados todos los gastos) entre los que arrendaron, á proporcion de la parte que tuvieron en dicho arrendamiento.

Quando la ganancia, ó perdida se ha de repartir igualmente, no ay dificultad, ni es menester otra regla mas que la del partir, dividiendola pero el numero de los compañeros, que estuvieron en el arrendamiento; por quando la reparticion ha de ser desigual, se guardarà el estilo de las reparticiones, ó compañias.

523 Question 22. Entre dos arrendaron ciertos diezmos por 10000. reales; huvo 1000. reales de gasto, y al fin del arrendamiento hallaron 10250. reales El primero tuvo en el arrendamiento los dos tercios de la perdida, ò ganancia, y el segundo un quarto; preguntase quanto toca á cada uno?

Lo primero, pera saber si hay ganancia, ó pérdida, resten los 1000. reales de gastos de los 10250. reales que se hallaron al fin del arrendamiento, y quedarán 9250. reales, los quales por ser menos que los 10000. en que fue concertado el arrendamiento, ay pérdida de 750. reales Aora reduzganse los quebrados dos tercios, y un quarto, que representan las partes, à un comun denominador, y serán 8. 12.avos, y 3. 12. avos. La suma de los numeradores es 11. Digase, pues, por regla de tres: Si 11. dàn 750. reales de pérdida; luego el numerador 8.darà 545 reales, y 5. 11. avos que ha de pagar el primero. Otra vez: Si 11. dàn 750. luego 3. daràn 204. reales, y 6. 11. avos, que ha de pagar el segundo.

524 Question 23. Tres arrendador los frutos de una Señoria por cierto tiempo, y cantidad: el primero quiere de la ganancia, ó pèrdida à razon de 8. por cierto; el segundo à razon de 10. por ciento, el tercero à razon 12. por ciento; ganaron mil reales, preguntase quanto toca á cada uno. Sumense los tres numeros 8. 10. y 12. Digase aora: Si 30. ganan 1000. quanto ganaràn 8. quanto 10.

y quanto 12. Siguiendo la regla salen 266. reales, y dos tercios por el primero; 333. reales, y un tercio por el segundo; y 400. reales por el tercero.

525. Question 24. Entre quatro arrendaron ciertos diezmos. El primero quiere de 16. partes la 7. á las quales llaman *Sesenas*. El segundo quiere 4. sesenas. El tercero quiere 4. sesenas, y media. El quarto quiere la media restante; ganaron 180. doblones, preguntase quanto tendrá cada uno. Digase por regla de tres: Si 16. ganan 180. doblones, que ganarán 7. qué 4. qué 4. y medio, que medio? Siguiendo las reglas, salen al primero 78. doblones, y tres quartos; al segundo 45. doblones; al tercero 50. doblones, y cinco octavos; al quinto, 5. y cinco octavos.

Testamentos.

Las questiones de testamentos que suelen poner los Autores, casi en nada se diferencian de las reparticiones; y aunque las mas son ficciones, pues raro es el testamento ordenado segun ellas dicen, y en particular en este Reyno de Valencia; pero eso no obstante, para que nada falte en esta Arithmetica, trasladaré algunas de ellas.

526. Question 26 Pedro dexó en su testamento 10000 reales, los quales repartió entre tres hijos; al primero dexó dos tercios; al segundo la mitad; y al tercero dos quintos; preguntase quanto toca á cada uno? Reduzganse los quebrabos á un comun denominador, y serán 20. 30. avos, 15. 30. avos, 12. 30. avos, cuyos numeradores sumados son 47. Digase aora por regla de tres: Si 47. dán 10000. reales, quanto darán los numeradores 20. 15. 12. Siguiendo la regla salen al primero 4255. reales, y 15. 47. avos; al segundo 3191. reales, y 23. 47. avos; al tercero 2553. reales, y 9. 47. avos.

527. Question 27. Pedro dexó en su testamento 10000. reales, que repartió entre dos hijos, una hija en esta forma: que al hijo mayor le dexa el tercio, y mas 100. reales; al hijo menor dos quintos; y á la hija el quarto, y mas 200. reales; pero antes de la reparticion se han de sacar 300. reales por el bien del alma; preguntase quanto toca á cada uno?

Restense primeramente de la hacienda los 300. reales del bien del alma, los 100. reales en que está mejorado el hijo mayor, y los 200. reales de la hija, y quedarán 9400. reales. Hecho esto reduzganse los quebrados á un denominador, y serán 20. 60. avos, 24. 60. avos, 15. 60. avos: cuyos numeradores sumados son 59. Digase aora

por

por reglas de tres : Si 59. dan 9400. quanto darán los numeradores 20. 24. y 15. Siguiendo las reglas salen al hijo mayor 3186. reales, y 26. 59.avos; al menor 3823. reales, y 43. 59.avos; y á la hija 2389. reales, y 49. 59. avos. Añadiendo, pues, 100. reales á la parte del hijo mayor, serán 3286. reales, y 26. 59. avos; añadiendo los 200. reales á la parte de la hija serán 2589. reales, y 49. 59. avos.

528. Question 28. Pedro teniendo ciertos hijos, dexó en su testamento cierta hacienda para repartir en partes iguales, en esta forma: que el primer hijo tuviese 100. reales, y mas la sexta parte de lo restante de la hacienda; el segundo tuviese 200. reales, y mas la sexta parte de lo restante; y asi prosiguiendo en dar á los demás hijos 100 reales mas á cada uno, y la sexta parte de lo que quedare; y lo restante sea para el ultimo hijo; preguntase quantos son los hijos, quanta la hacienda, y quanto toca á cada uno.

Restese 1. de 6. porque dice la sexta parte, y quedarán 5. y tantos hijos tenia. De suerte, que siempre que el numerador del quebrado es 1. como aqui, que el quebrado es $\frac{1}{6}$, supuesto que dice la sexta parte, se ha de restar el numerador del denominador. Aora multiplicando los 100. reales, que ha de tener el primer hijo, por el numero de los hijos 5. saldrán 500. reales, y tanto ha de tener cada hijo; y porque son 5. multiplicando 500. por 5. salen 2500 reales, y tanto era su hacienda.

529. Question 29. Pedro dexando su muger en cinta hizo testamento de 4200. reales, de suerte, que si paria hijo fuesen los dos tercios de la hacienda para el hijo, y el un tercio para la madre; pero si paria hija, los dos tercios fuesen de la madre, y el un tercio de la hija. Sucedió que parió hijo, è hija, preguntase como se ha de repartir la dicha hacienda.

Digo, que como consta de la ley *Si ita scriptum*, *ff. de liberis, & posth.* el intento del testador fue dexar doblado á la madre que á la hija, y doblado al hijo que á la madre, y asi busquense tres numeros, que continuamente uno sea doblado del otro, como son 1. 2. 4. cuya suma es 7. Dividase, pues, toda la hacienda en 7. partes, y la suma 600. será la parte de la hija: su duplo 1200. será la parte que pertenece à la madre; y el duplo desta parte 2400. será la herencia del hijo, segun la voluntad del testador. Lo mismo se puede hacer por regla de compañia, diciendo: Si 7. dán 4200. luego 1. 2. y 4. darán 600. 1200. y 2400.

De suerte, que el Consulto Iuliano en la ley citada quiere, que la madre sea como medida de las partes de la herencia del hijo, é hija, y que la hacienda se divida en 7. partes iguales, de las quales se dén una á la hija, dos á la madre, y quatro al hijo; porque la parte de la madre sea doblada de la de la hija, y la del hijo doblada de la de la madre; porque en caso de nacer hija, esta tenia una parte, y la madre dos; y en caso de nacer hijo tenia dos partes, y la madre una.

Pero si nacieran dos hijos, parece que la hacienda se abia de dividir en 5. partes, de las quales cada hijo abia de tener dos, y la madre una. Si nacieran dos hijas, se abria de dividir en 4. partes; cada hija tendria una, y la madre dos. Si nacieran un hijo, y dos hijas, dice Caramuel en su Mathematica trat. de Arith. que se abia de partir la hacienda en 7. partes, de las quales las 4. fuesen para el hijo, las dos para la madre, y media á cada hija. Pero otros Autores quieren, que en este caso se reparta la hacienda en 8. partes; las 4. sean para el hijo, las dos para la madre, y una para cada hija. Ultimamente, si nacieran una hija, y dos hijos, se repartiria en once partes; la una seria de la hija, las dos de la madre y 4. de cada hijo.

Todo esto está discurrido segun la ley citada; porque siempre la madre tendria doblado de la hija, y el hijo doblado de la madre: Pero si en esta materia pudieramos discurrir libremente, hariamos otro repartimiento, que no estaria fuera de razon.

530. Question 30. Pedro teniendo tres hijos testò de 1740. reales, para que despues de sus dias se los repartiesen igualmente. Muerto el padre riñeron los hijos, y cada uno tomó lo que pudo; pero abiendo hecho paz convinieron, en que el hijo mayor diese la mitad de los reales que abia tomado: el mediano diese el tercio; y el menor contribuyese con el quarto de lo que avia tomado; y sumando todas estas tres cantidades; se repartio la suma en tres partes iguales entre los tres hermanos; y con esto, y lo que les quedaba en su poder, tuvo cada uno el tercio de la hacienda de su padre; preguntase aora quanto tomò cada uno.

Para responder á esta pregunta se han de buscar tres numeros de tal condicion, que tomando la mitad del primero, el tercio del segundo, y el quarto del tercero, las restas sean iguales; como son 12. 9. 8. cuya suma es 29. Digase aora: Si 29. dan 1740. reales; luego 12. 9. y 8. darán 720. por los reales que tomò el mayor; 540. por los reales que tomò el mediano; y 480. por los reales que tomó el menor.

531. Question 31. Pedro hizo testamento en esta forma: Si naciere hijo (tenia su muger en cinta) tenga toda la herencia: si nacie-

cieren dos hijos, tenga cada uno la mitad: si hijo é hija, el hijo tenga las dos partes, y la hija sea heredera de la tercia parte. No sucedió ningun caso de los que previno el testador, sino que nacieron dos hijos, y una hija: preguntase como se ha de repartir la hacienda.

Esta question propone el Iurisconsulto Paulo en la ley *Clemens patronus* 81. *ff. de heredibus instituendis.* Y resuelve, que se hagan cinco partes de toda la hacienda: à cada hijo se darán dos, y á la hija una; porque el testador quiso dexar doblado al hijo que à la hija.

Questiones misellaneas.

532. Question 32. Un Artillero tiene 45. libras de polvora de quatro as y as: esto es de 4. partes de salitre: una de azufre, y otra de carbon: pregunta como sabrá la cantidad de cada especie de estas, que ay en las dichas 45. libras

Porque la polvora es de 4. as y as, cuyas partes sumadas hacen 6. Diga por regla de compañia: Si la suma 6 de las partes dá 45. libras; luego las partes 4. 1. y 1. darán 30. libras de salitre, siete libras, y media de azufre, y otras siete libras, y media de carbon, y tanto salitre, azufre, y carbon ay en las 45. libras de polvora de 4. as y as.

Asi mismo, si tiene 40. libras de polvora de 6. as y as. Sumense las partes 6. 1. y 1. y digase: Si la suma 8. dà 40. libras; luego las partes del mixto 6. 1. y 1. darán 30. de salitre, 5. de azufre, y otras 5. de carbon.

533. Question 33. Pedro tiene tres generos de polvora, es á saber, de 4. as y as, de 5. as y as, y de 6. as y as; preguntase quanto tomará de cada una, para que en todas aya porcion igual de salitre. Primeramente sumense las partes de la composicion; esto es, 4 1. y 1. del primer genero de polvora; 5. 1. y 1. del segundo genero; y 6. 1. y 1. del tercer genero, y serán 6. 7. y 8. despues determinense la porcion del salitre que se desea, la qual supongo que son 30. onzas Digase aora por regla de tres: Si 4. partes de salitre vienen del todo, ó suma 6. luego 30. onzas de salitre vendrán de 45. onzas. Otra vez: Si 5. partes de salitre vienen de 7. luego 30. onzas vendrán de 42. onzas. Otra vez: Si 6. partes de salitre vienen de 8. luego 30. onzas de salitre vendràn de 40. onzas de polvora.

Con que en 45. onzas de polvora de 4. as y as ay tanto salitre. como en 42. onzas de 5. as y as; y como en 40. onzas de 6. as y as. Y estos son los numeros que señalamos arriba (493.) para igualar una polvora con otra.

Pero si quiere tomar polvora de cada un genero: de suerte que aya partes iguales de carbon ó de àzufre, los mismos numeros 6. 7. y 8. serán las partes que ha de tomar. Y asi, tomando 6. onzas, libras, arrobas, &c. de polvora de 4. as y as; 7. onzas, libras, &c de polvora de 5. as y as; 8. onzas, libras, &c. de 6. as y as, tendrán iguales partes de azu[illegible], ò carbon; esto es, en los tres generos de polvora abrá una onza, libra, &c. de azufre, y otra de carbon.

534. Question 34. En el fondo de una cisterna ay tres caños desiguales; abierto solo el mayor, sale toda[illegible]l agua en dos horas; abierto solo el mediano sale toda el agua en 3. horas; abierto solo, el menor se vacia la cisterna en 8. horas preguntase en quanto tiempo se vaciará toda el agua, si desde el principio hasta el fin sale por todos los tres caños.

Busquese por regla de tres la parte de cisterna que vaciará cada caño en una hora, deste modo: si el caño mayor en 2. horas vacia una cisterna; luego en una hora vaciarà media. Otra vez: Si el caño mediano en 3. horas vacia una cisterna; luego en una hora vaciará un tercio. Otra vez: si el caño menor en 8. horas vacia una cisterna; luego en una hora vaciarà un octavo.

Estas mismas partes de la cisterna, que cada caño vacia en una hora se pueden conocer facilmente sin hacer regla de tres, poniendo el tiempo (quando es numero entero) en que cada caño vacia la cisterna por denominador de un quebrado, cuyo numerador es la unidad, como consta claramente de las operaciones antecedentes; porque como en cada regla de tres el segundo, y tercero termino son la unidad la qual no aumenta la multiplicacion; asi multiplicando segundo por tercer termino, el producto es 1. el qual partido por el primer termino, es el numero de las horas, hace quebrado en la forma referida.

Hecho esto, reduzganse los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, á un comun denominador, y seràn 24. 48. avos, 16. 48. avos 6. 48. avos, cuya suma 46. 48. avos señalará las partes de la cisterna que vacian los tres caños en una hora. Digase aora: Si 46. dan 1. hora; luego 48. que es el denominador, darán una hora, y 1. 23. avos; y en tanto tiempo se vaciará la cisterna.

Para saber la parte de agua que vaciará cada caño, digase: Si, en una hora vacia el caño mayor media cisterna; luego en una hora y 1. 23. avos vaciará 12 23. avos. Otra vez Si en una hora vacia el caño mediano un tercio de cisterna; luego en una hora, y 1. 23. avos vaciará 8. 23. avos. Otra vez: Si en una hora vacia el caño menor un octavo de cisterna; luego en una hora, y 23. avos vaciará 3. 23. avos.

Esta

Esta question se podia proponer de otro modo sin mudar la sustancia : Si tres Artifices , Segadores , Molinos , &c. hacen, siegan, muelen , &c. una cierta obra , ó cantidad ; el primero en 2. dias, el segundo en 3. y el tercero en 8. preguntase los tres juntos en quanto tiempo la acabarán ? Obrando como antes , se hallará 1. dia , y 1. 23. avos, y el primero abrá concluído 12. 23. avos de la obra ; el segundo 8. 28. avos , y el tercero 3. 23 avos.

535 Question 35. Dos correos, salen á un mismo tiempo, el uno de Madrid, y el otro de Valencia (cuya distancia es 50. leguas) el primero caminaria todas las 50. leguas en 5. dias, y el segundo en 3. dias ; preguntase , quando , y en que distancia se juntarán ?

Digase por regla de compañia : Si 8. suma de los dias , dá 50. suma de las leguas: Luego los tres dias del segundo, daràn 18. leguas, y tres quartos que abrá caminado el primero (es la regla permutada.) Otra vez : Si 8. dàn 50. luego 5. dias del primero, dará 31. legua, y un quarto por el camino del segundo.

Aora para saber el tiempo, digase: Si el primero corre 50. leguas en 5. dias ; luego para correr 18. leguas, y tres quartos , abrà menester 1. dia , y tres octavos. Y el mismo tiempo se hallará por el camino del segundo, diciendo: Sí el segundo corre 50. leguas en tres dias; luego para correr 31. legua , y un quarto , abrá menester 1. dia, y tres octavos , y un tanto tiempo se juntarán los dichos correos.

Lo mismo es , si una Isla tiene 50. leguas de circunferencia , y salen dos Navios á un mismo tiempo de un Puerto de dicha Isla por partes contrarias; el primero la circuye en 8. dias ; el segundo en 3. preguntase en quanto tiempo, y en que distancia se encontrarán?

536 Question. 36. Entre quatro Mercaderes compran cierta mercaderia : el primero contribuye con dos quintos del precio ; el segundo con quatro novenos , el tercero con un septimo , el quarto dió 300. reales. preguntase quanto vale la dicha mercaderia?

Reducidos los quebrados son, $\frac{126}{315}$. $\frac{140}{315}$. $\frac{45}{315}$. La suma 311. 315. avos es lo que dieron los tres primeros ; luego el quarto dió 4. 315 avos , que es lo que falta de dicha suma, hasta un entero , lo qual supone por los 300. reales que dió el quarto : Pues si 4. que es el numerador del quebrado correspondiente al quarto , supone por 300. reales que dió el quarto Mercader ; luego 315. que es el denominador , ó todo el precio darà 23625. reales , y tanto vale la dicha mercaderia.

PARTE III.

DE LAS REGLAS DE ALIGACIONES,

ò Mezclas.

538 ALIGACION es una mezcla de algunas especies, como de trigos, vinos, lanas, &c. Para que resulte otra especie media en perfeccion, ó valor. Como mezclando oro de 20. quilates con otro oro de 16. quilates; sladrà un mixto ó especie media de oro mas perfecto, que 16. quilates, y menos que 20. Y como las especies dadas, ó que se han de ligar, se pueden mezclar de diferentes modos, tomando mas de una, que de otra, por eso la especie media puede tener diferentes grados de perfeccion, ó valor; pero dentro de los terminos de las eepecies que se han de mezclar; de suerte, que la especie media, no puede ser mas perfeta, que la especie mayor, ni menos, que la menor.

Esta regla de Aligacion, es en dos maneras *Simple*, y *Compuesta*. En la Aligacion Simple, solas se mezclan dos especies, y concurren seis terminos, que son especie *Mayor*, *Menor*, y *Media*, que se declaran por sus precios, ó perfecciones, y las tres cantidades de la especie mayor, menor, y media. En la Aligacion, Compuesta ay mas de dos especies, y se pueden reducir à quatro clases de terminos, es asaber: *Especie media, Especies que se mezclan, Diferencias, y Cantidades de las especies.*

En todas las Aligaciones, es preciso poner los terminos en su debido lugar, pues deste modo se resolveràn facilmente muchas questiones, que de otra manera serian dificultosas. Escrivanse las especies como se vé en la formula, la Mayor arriba, la Menor debaxo, y la Media al lado izquierdo: Las diferencias estarán á la derecha, y las cantidades mas ácia la derecha, correspondencia á las especies, y diferencias. en el exemplo siguiente, estará todo manifiesto.

Un Platero tiene dos especies de oro de 20. y de 16. quilates, y queriendo hacer 24. onzas de oro de 17. quilates, desea saber quanto tomará de cada especie. Primeramente escribase la especie media,

dia, que es oro de [illegible]. quilates, y despues las otras especies que se han de Aligar, poniendo siempre la mayor arriba, y la menor debaxo; las diferencias destas especies á la media, se han de escribir en cruz al lado de dichas especies, y las cantidades, al lado derecho de las diferencias; ultimamente tirando una linea por baxo, se escrivirán las sumas de las diferencias, y de las cantidades debaxo las mismas diferencias, y cantidades, como todo se vé en la formula. Si en la question falta alguna cosa destas, se dexará en blanco lo que faltàre.

Espec. med.	Especies.		Diferencias.		Cantidades.
	20.		1.	——	6.
17.		⤫			
	16.		3.	——	18.
			4.		24.

ALIGACIONES SIMPLES.

Preceptos.

539 Primero Escribase la especie mayor arriba, la menor debaxo, y la media al lado izquierdo, como està dicho; despues restese la especie media de la mayor, y la diferencia, pongase al lado derecho de la menor, restese tambien la especie menor de la media, y la diferencia, escribase al lado de la mayor; de suerte, que las diferencias estèn en cruz; sumense las diferencias, y si la suma se hace todo, las mismas diferencias serán las partes de la mezcla.

540 Segundo: Si el mixto se desea en alguna cantidad determinada, se escribirá debaxo la linea al lado derecho de la suma de las diferencias, y aciendo tantas reglas de tres como diferencias ay, lo que saliere, serán las cantidades. El primer lugar de la dicha regla de tres, tendrá la suma de las diferencias. El segundo, la cantidad del mixto señalada. El tercero, cada diferencia. Y el quarto, las partes de la cantidad. De suerte, que son proporcionales la suma de las diferencias con la cantidad del mixto, y las mismas diferencias con las partes de dicha cantidad.

541 Tercero: Quando ay alguna especie que no tiene valor, ó alomenos no se hace caso dél, como quando se liga oro con cobre, vino con agua, &c. entonces pongase un zero por la especie menor, y se obrarà del mismo modo.

542 Question 1. un Platero tiene oro de 20. y de 16. quilates, y quiere mezaclarle de suerte, que salga oro de 17. quilates; preguntase quanto tomará de cada uno? Escriba los terminos como queda dicho: y si quiere el mixto en una quantidad indeterminada, la suma de las diferencias representa el mixto, y las mismas diferencias las partes del mixto, con que tomaràn una parte de oro de 20. quilates, y tres de oro de 16. quilates, y el mixto será de 17. quilates. Pero si quiere cantidad determinada como 24. onzas de oro de 17. quilates, escribalos debaxo la linea, y diga por regla de tres: Si la suma de las diferencias 4. dá 24. onzas; luego la diferencia 3. daràn 18. onzas; y la diferencia 1. dará 9. onzas; con que para hacer 24. onzas de 17. quilates, abrá de tomar 18. onzas oro de 16. quilates, y 6. onzas de 20. quilates.

	20.		1.	6.
71.		⋈		
	16.		3.	18.
			4.	24.

Demonstracion.

La diferencia 3. de la especie media 17. á la mayor 20. precisamente nace de la mezcla que ay de la especie menor en el mixto, por que si en el míxto no hubiera alguna porcion de la especie menor, el dicho mixto, ó especie media, seria la misma especie mayor, y no abria diferencia alguna; luego la diferencia 3. de la especia media á la mayor se ha de poner al lado de la especie menor, porque nace della. Asi mismo la diferencia 1. de la especie menor 16. à la media 17. nace de la mezcla de la epecie mayor en el mixto; luego se ha de escribir al lado de la especie mayor.

Con que la diferencia 3. de la especie media á la mayor representa, ó por mejor decir, es la porcion de la especie menor que ay en el mixto; la diferencia 1. de la especie menor à la media, es la parte de la mayor, que ay en el mismo mixto; luego son proporcionales, como la diferencia 3. á la diferencia 1. asi reciprocamente la porcion de la especie menor que ay en el mixto, á la porcion de la especie mayor que ay en el mixto; luego componiendo (314) como la suma 4. de las diferencias á cada diferencia, asi la suma de las partes de la especie mayor, y menor que ay en el mixto, que es toda la masa del mixto, à cada parte de la especie mayor, y menor. Y alternando (306) como la suma de las diferencias, á la suma de las partes de la mezcla, asi las diferencias à las partes de la mezcla, ó cantidad, luego la suma de las diferencias, representa al mixto, y cada diferencia es la parte de la mezcla.

Y asi queriendo alguna cantidad determinada del mixto, como 24. onzas, se dirá por regla de tres: Si la suma 4. de las diferencias que supone por el mixto, son 24. onzas, cada diferencia, quantas onzas serán? Siguiendo la regla, se hallarán las partes de la cantidad proporcionales à las diferencias.

Examen.

543. Multiplíquense la cantidad del mixto 24. onzas por las diferencias 1. y 3. y sumando los productos 24. y 72. saldrán 96. Multipliquese ahora la suma 4. de las diferencias por las partes de la cantidad 6. y 18. sumando los productos 24. y 72. han de salir los mismos 96. De suerte, que la suma de los productos de la cantidad por las diferencias, ha de ser igual à la suma de los productos de la suma de las diferencias por las partes de la cantidad.

La razon desto es manifiesta, porque como son proporcionales la suma de las diferencias 4. á la cantidad 24. asi una diferencia 3. á la parte de la cantidad 18. el producto 72. de los extremos, es igual al producto 72. de los medios: Asi mismo, como la misma suma 4. à la cantidad 24. asi la otra diferencia 1. à la otra parte de la cantidad 6. luego el producto 24. de los extremos, es igual al producto 24 de los medios (298);luego las sumas de cada dos productos, son iguales, porque en las dos proporciones, el primero, y segundo terminos, son los mismos. Tambien multiplicando las diferencias, y cantidades en cruz, han de salir iguales productos; y asi multiplicando 3. por 6. y 1. por 18. salen 18. Asi mismo, multiplicando la suma 4. de las diferencias por la especie media 17. ha de salir un producto 68. igual á la suma de los productos de las diferencias por las especies que tienen al lado.

Corona de Archimedes.

544 Por esta regla se puede facilmente resolver aquel famosisimo Problema, que el vulgo llama *de la Corona de Archimedes*. El caso fué este: Hieron Rey de Zaragoza, de Sicilia, habiendo prometido á los Dioses una Corona de oro purisimo, entregò á un platero oro de 24. quilates para fabricar dicha Corona; el oficial puso mezcla de plata; y el Rey temiendo el hurto, la entregó á Archimedes para averiguarlo sin deshacer la Corona. Archimedes usando de las reglas de la Hydrostatica, como comunmente se cree, tomó un pedazo de oro, y otro de plata, cada uno de igual peso con la Corona, la qual supongo que pesava 100. onzas, y llenando un vaso de agua, metió la Corona dentro, y pesó la agua que expelió,

que

que supongo fueron 81. onzas; bolvió á llenar el vaso, y metiendo el pedazo de oro, observó, que salieron 80. onzas. Otra vez llenó el vaso, y poniendo el pedazo de plata, salieron 90. onzas.

De donde conoció, que avia mezcla, porque la plata es menos pesada que el oro; de suerte, que en un mismo peso de plata, y de oro, tiene mayor magnitud la plata que el oro, como se vè en un real de á ocho, y un doblon de á ocho, que pesando los dos casi lo mismo tiene mayor quantidad el real de á ocho, que el doblon; luego mas agua expeliria el real de à ocho, que el doblon; pues viendo que la Corona expelia mas agua que el pedazo de oro de igual peso, tuvo por cierto que avia mezcla.

Esto supuesto, para conocer quanta plata avia en dicha Corona, se formará una regla de aligacion por la agua expelida deste modo, Tomese la agua que expelió la Corona por la especie media, y la agua que expelieron el oro, y la plata por las especies menor, y mayor; y escriviendo las diferencias en cruz, y debaxo la suma 10. digase por regla de tres: Si la suma de las diferencias 10. dá 100. onzas de peso de toda la Corona, luego la diferencia 9. de oro, dará 90. onzas de oro; y la diferencia 1. de plata, dará 10. onzas de plato, y tanta mezcla avia.

90.	1.	10.	Plata.
81.	✕		
80.	9.	90.	Oro
	10.	100.	

Pero adviertanse dos cosas; la primera, que la corona no avia de tener mezcla de otro metal mas que de Plata: Porque en una mezcla de tres, ó mas metales, no se puede saber la cantidad de cada metal, como lo demuestra el P. Jacobo Billy en su Algebra. Ni Archimides pudo conocer si la mezcla era de cobre, ó de plata, sino es que fuese costumbre de aquellos Plateros no mezclar en el oro otro metal, sino plata, como lo insinua Mersenno en su Hydraulica prop. 52. La segunda, que avia de ser sólida, porque si dentro tuviese alguna concavidad expeliria mas agua, como se vé en una bola vacia, la qual puesta en el agua, saca mayor porcion de agua, que la que corresponde à su peso, si fuera sólida.

545 Question 2. Cierta cantidad de oro de 17. quilates, tiene 18. onzas de oro de 16. quilates, y lo restante es de 20. quilates; preguntase quantas onzas de oro serán? dispuestos los termi-

20.	1.	
17.	✕	
16.	3.	18.
	4.	

nos,

nos, como queda dicho, dexando vacío el lugar donde faltan los que se buscan, y halladas las diferencias como antes, digase por regla de tres: Si la diferencia 3. dá 18. onzas; luego la suma 4. dará 24. onzas; que es toda la cantidad del mixto, y restando las 18. onzas de las 24. saldrán 6. onzas de 20. quilates.

546 Question 3. Si 6. onzas de oro de 20. quilates, se mezclan con 18. onzas de 16. quilates; de quantos quilates será la mezcla. Escribanse los terminos como antes, y restando la especie menor 16. de la mayor 20. saldrán 4. que es la suma de las diferencias, la qual se escrivirá en su lugar; de suerte que la resta de las especies, es la misma que la suma de las diferencias. Digase aora por regla de tres: Si la cantidad del mixto 24. dá la suma de las diferencias 4. luego la parte del mixto 18. dará la diferencia 3. de la especie mayor, y media; luego restando 3. de 20. quedarán 17. por la especie media, y de tantos quilates son las 24. onzas de mixto. Tambien se podia decir; Si 24. dán 4. luego 6. dará 1. que es la diferencia de la especie menor, y media; y asi sumando 1. con 16. salen los mismos 17. de la especie media.

20.		6.
	⋈	
16.		18.
4.		24.

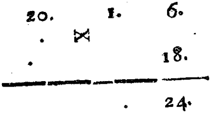
Adviertanse que en qualquier question dados dos terminos de las cantidades, se sabrà el tercero, y lo mismo es de las diferencias; y asi, si se dàn 6. onzas de oro de 20. quilates, y la suma 24. onzas, restando, se sabrá la otra cantidad 18. Si se dán 18. y 24. restando, saldrán 6. Si se conocen 18. y 6. sumando, saldrán 24. Lo mismo es en las diferencias, porque son proporcionales.

547 Question 4. Si mezclando 6. onzas de oro de 20. quilates con 18. onzas de oro de ciertos quilates, sale la mezcla de 17. quilates; preguntase de quantos quilates eran las dichas 18. onzas? O si 24. onzas de 17. quilates, tienen 6. onzas de 20. quilates, las restantes 18. onzas, de quantos quilates serán? Puestos en orden los terminos, digase: Si 18. dàn 3. de diferencia; luego 6. daràn 1. de diferencia de la especie menor á la media, y asi restando de la especie media 17. quedará la menor 16. y de tantos quilates serán las 18. onzas.

	20.	1.	6.
17.		⋈	
	4.		18.
		.	24.

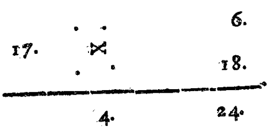
De otro modo: Si 18. dán 3. luego 24. darán 4. suma de las diferencias, ó diferencia de las especies; pues restando 4. de la especie mayor 20. (ó sumando, si fuese la menor) saldrá la especie 16. y de tantos quilates eran las 18. onzas.

548 Question 5. Si 6. onzas de oro de 20. quilates, se mezclan con 18. onzas de otro oro, y la diferencia de los quilates de la mezcla, y del oro de 18. onzas, es 1. preguntase de quantos quilates será la mezcla ó mixto, y las 18. onzas? Supongo que los 20. quilates, es la especie mayor: Digase pues: Si 6. dan 1. que darán 18. Siguiendo la regla, salen 3. que es la diferencia de la especie dada 20. y de la media, luego restando 3. de 20. quedan 17. por la especie media, que son los quilates de la mezcla. Aora restando la diferencia 1. de los 17. quedarán 16. por la especie menor, ó quilates de las 18. onzas.



De otro modo: Si 6. dan 1. luego 24. suma de las cantidades, darán 4. suma de las diferencias, ó diferencia de las especies; restense pues los 4. de 20. por ser esta la especie mayor como queda supuesto, que si fuera la menor, se abian de sumar, y quedarán 16. por la especie menor; sumando pues la diferencia 1. con 16. sale la especie media 17.

549 Question 6. Si 24. onzas de oro, son de 17. quilates, y hay 18. onzas de una especie, y 6. de otra, cuya diferencia de quilates es 4. preguntase de quantos quilates son las 18. y 6. onzas: Supongo que las 6. onzas son de la especie mayor, y las 18. de la menor? Dispuestos los terminos como está dicho, digase por regla de tres. Si 24. onzas, que es la suma de las cantidades, dán 4. suma de las diferencias, ó diferencia de los quilates; luego 18. darán la diferencia 3. de la especie mayor, y media; y asi sumados con 17. darán la especie mayor 20. que son los quilates de las 6. onzas, y restando 4. de 20. quedará la especie menor 16. que son los quilates de las 18. onzas.



Tambien, suponiendo que las 6. onzas, son de la especie mayor, se puede decir por regla de tres: Si 24. dán 4. luego 6. darán 1. que es la diferencia de la especie menor á la media, restando pues 1. de 17. especie media, quedará la especie menor 16. y de tantos quilates serán las 18. onzas.

En estas dos questiones, si no se determina la especie de las cantidades; esto es, si son de la mayor, y menor, puede suponerlo el Arithmetico á su arbitrio, y entonces tendrá la pregunta dos respuestas.

550. Question 7. Si 24. onzas de oro mixto tienen 6. de 20. quilates; las otras 18. onzas, y la mezcla 24. de quantos quilates serán? Esta question tiene muchas soluciones, y puede el Arithmetico determinar á su gusto los quilates de las 18. onzas, los quales supongo que sean 16. Luego ya se tiene la especie menor; y asi por la question 3. se sabrà de quantos quilates es la mezcla. Tambien se podian determinar los quilates de la mezcla, y por la question 4. hallar los quilates de las 18. onzas.

551. Question 8. Si 24. onzas de oro de 17. quilates se componen de oro de dos especies, las 18. onzas de una especie, y las 6. de otra; preguntase de quantos quilates es cada especie? Tan bien tiene muchas respuestas, pues puedo determinar la una especie á mi gusto; y asi supongo, que las 6. onzas sean de 20. quilates: Luego por la question 4. hallaré 16. quilates, que es la especie menor. Si hiciera suposicion que las 18. onzas son de 16. quilates, ordenados los terminos, digase: Si 6. dan 1. de diferencia; luego 18. darán 3. Luego porque se busca la especie mayor añado 3. á la especie media 17. y saldràn 20. quilates. Tambien pobia sumar las diferencias, y añadir la suma 4. à la especie menor 16. y saldria la misma especie mayor 20.

.	1.	6.
17.	⋈	
6	.	18.
		24.

Estas 8. questiones, y otras dos, que se comprehenden en ellas, pone el Padre Zaragoza en su *Arithm. lib.* 1. *cap.* 19. y dice, que en ellas se encierran todas las de esta materia. Veamoslo, y juntamente reduzgamos á mayor claridad algunas questiones que trahen los Autores.

552. Question 9. Un Platero tenia 30. onzas de oro, cuyos quilates no sabia; pero poniendole al fuego, y sacandole del, halló 28. onzas de 21. quilates, y tres septimos; pidese de quantos quilates serian las 30. onzas. Aqui se vé claramente, que en el fuego menguaron dos onzas, las quales eran de liga, que se supone que no tiene valor. Escribanse, pues, en el lugar de las cantidades las 28. y las 2. de liga, y debaxo la suma 30. onzas

21 $\frac{3}{7}$	.	28
	⋈	
0	.	0
	21. $\frac{3}{7}$	30

y porque las 28. onzas eran de 21. quilates, y tres septimos, y las 2. onzas de ningun quilate, escribanse los 21. quilates, y tres septimos por especie mayor, correspondiendo á las 28. onzas; y un cero por especie menor, correspondiendo á las 2. onzas; y pues la diferencia de las especies es igual á la suma de las diferencias, restese el cero de 21. y tres septimos, y quedarán los mismos 21. y tres septimos por suma de las diferencias, que se ha de escribir en su lugar.

Esto supuesto se vé claramente, que esta question es la misma que la tercera. Digase, pues, por regla de tres: Si 30. dan 21. y tres septimos; luego 28. darán la diferencia 20. la qual se sumará con la especie menor cero, por ser diferencia desta à la media, y saldrán los quilates 20. del mixto.

553. Question 10. Un Platero puso en el crisol 30. onzas de oro de 20. quilates, y despues halló solas 28. onzas; pidese de quantos quilates son. Esta question, aunque queda resuelta arriba (485), pero por regla de aligaciones se bolverá á resolver. En el fuego fueron consumidas 2. onzas de liga; luego las partes de la cantidad son 28. y 2. pues escribanse en su lugar, y debaxo la suma 30. y porque las 2. onzas de liga no tienen valor, pongase un cero por especie menor, correspondiendo á las dos onzas; y la especie media 20. que son los quilates de las 30. onzas se pondrá en su lugar; y tambien la diferencia 20. al lado de las 28. onzas.

	.	20	28
20		⋈	
	0	.	2
			30

Esto supuesto está manifiesto, que esta duda es la misma que la question 4. Pues diciendo por regla de tres: Si 28. dan 20. luego 2. darán 1. y tres septimos de diferencia de la especie mayor á la media; y asi, sumados con la especie media 20. saldrán 21. y tres quartos por especie mayor, que son los quilates de las 28. onzas.

554. Question 11. Un Platero puso al fuego ciertas onzas de oro de 14. quilates, y abiendole sacado halló 12. onzas de 20. quilates; pidese quantas eran las onzas que puso al fuego. En esta question se conocen los quilates del mixto, que es la especie media, mas una parte de la cantidad, y las especies, porque la mayor son 20. quilates, y la menor cero quilates, pues es la especie de las onzas de la liga. Y asi.

	20		14	12
14		⋈		
	0		6	
			20	

dispuestos los terminos conocidos, como se vé, es esta la question 2. pues sumando las diferencias digase: Si 14. dan 12. la suma de las diferencias 20. darán 17. y un septimo, y tantas onzas puso al fuego. Si resto 12. de 17. y un septimo quedarán 5. y un septimo, por las onzas de la liga.

555. Question 12. Un Platero quiere mesclar 33. onzas de oro de 20. quilates con 17. onzas de cobre, preguntase de quantos quilates será la mezcla. Aqui están conocidas las dos partes de la cantidad, y sus quilates, pues la una es de 20. quilates, y la otra, que es el cobre, es de ningun quilate; lo que se busca es la especie media, la qual se hallará por la question 3. de 13. quilates, y un quinto.

20.			33
	X		
0			17
	20		50

556. Question 13. Un Platero tiene 20. onzas de oro de 18. quilates, de las quales quiere sacar 6. onzas que sean de 24. quilates; preguntase las 14. onzas restantes de quantos quilates serán. En esta question están dadas las dos partes de la cantidad, y una especie; mas la cantidad 20. ò mixto, y su especie media; buscase la especie correspondiente á la otra parte de la cantidad 14 la qual se sabrá por la question 4. que es 15. y tres septimos, y de tantos quilates son las 14. onzas.

	24		6
18		X	
		6	14
			20

557. Question 14 Un Labrador tiene 80. cantaros de vino de 8. sueldos el cantaro, y quiere mezclar vino de á 12. sueldos el cantaro, para hacer la mezcla de 9. sueldos; preguntase quanto vino añadirá? Aqui están dadas las tres especies, y por consiguiente las diferencias, y una parte de la cantidad; buscase la otra, la qual se hallará por la regla de la question 2. que es 26. y dos tercios, y tantos cantaros de vino de 12. sueldos ha de añadir, para que la mezcla salga de 9. sueldos.

	12		1	
6		X		
	8		3	80
				4

558 Question 15. Un Platero compró 6. marcos de plata dorada por 800. reales; el oro le compró á razon de 1200. reales el marco; y la pala á razon de 80. reales el marco, preguntase quanto

oro

oro, y plata abia. Para ordenar los terminos es preciso saber quanto vale un marco de la mezcla, lo qual se conocerá partiendo los 800. reales que costaron los 6. marcos, por los mismos 6. marcos, y saldrán 133. reales y dos tercios que será la especie media. La especie mayor es el valor del marco de oro 1200. reales; y la menor los 80. reales del marco de la plata.

Hecho esto, y halladas las diferencias, digase por regla de trer: Si 1120. suma de las diferencias, dan 6. marcos de mezcla; luego la diferencia 53. y dos tercios darà 161. 560. avos de marco de oro; y la diferencia 1066. y un tercio darà 5. marcos, y 399. 560. avos de marco de lata. Y esta es la regla de la question primera; pero con la advertencia, que primeramente se ha de saber el valor de un marco de la mezcla.

	1200		$53\frac{2}{3}$	$0\frac{161}{560}$
$133\frac{2}{1}$		X		
	80		$1066\frac{1}{3}$	$5\frac{399}{560}$
			1120	6

559. Question 16. Un Labrador tiene 24. cahices de trigo, mezclado de dos especies, cuyo cahiz vale 60. reales; ignora los cahices, y el valor de cada especie; pero bien sabe que ay doblado trigo del de baxo precio, que del de alto, y que la diferencia de los precios cada especie es 30. preguntase quanto trigo ay de cada especie, y quanto es su valor?

En esta question solos están dados la cantidad, y su valor, que es la especie media 60. reales; mas la proporcion de las partes de la cantidad, que es dupla, como 2. á 1. y la diferencia 30. de los precios de las partes de la mezcla, que como está dicho, es la suma de las diferencias, y por eso se escribe en su lugar; pues para resolverla necesita de preparacion. Y asi, porque las partes de la mezcla están en razon dupla, como de 2. á 1. dividase la cantidad 24. en la misma razon sumando 2. y 1. diciendo por regla de tres: Si 3. dàn 1. luego 24 darán 8. Otra vez: Si 3. dán 2. luego 24. daràn 16. Con que las partes de la mezcla son 8. y 16. asi avia en los 24. cahices del mixto 16. cahices de trigo de mas baxo precio, y 8. del de mas alto.

	.		.	
60		X		
			.	.
			30	24

Y pues las diferencias son proporcionales con las partes del mixto, ó cantidad, tambien han de estàr en dupla proporcion; y asi, digase por regla de tres: Si 24. dan 30. de la suma de las diferencias; luego 8. daràn 10. y 16. darán 20. que son las difencias. Aora sumando la diferencia 20. con la especie media 60. saldrán 80. reales por el valor de los 8. cahices; y restando la diferencia 10. de los mismos 60. reales, quedará 50. por el valor de los 16. cahices, como se vé aqui figurado.

	80		10	8
60		X		
	50		20 .	16
			30	24

En esta duda, sin su debida preparacion, no se puede resolver por ninguna de las 8. primeras questiones.

560 Question 17. Ciertas onzas de oro de 16. quilates se componen de oro de 22. quilates, y de otro oro de menos quilates ay 24. onzas; la suma de las onzas del mixto, ò cantidad, y de la diferencia de las especies mayor, y menor (que es la suma de las diferencias), es 45. pidese quanto oro ay de 22. quilates, y las 24. onzas de quantos quilates son.

En esta question están dados los terminos que se vén en la formula, y mas la suma 45. del mixto, y diferencia de los extremos, que como està dicho, es la misma suma de las diferencias. Sumese la diferencia 6. con las 24. onzas que tiene al lado; luego por regla de tres: Si la suma 30. viene de 24. la suma dada 45. de quantos vendrá? Siguiendo la regla salen 36. y de tantas onzas es el mixto. Restando, pues, las 24. onzas de las 36. quedan 12. onzas por el oro de 22. quilates. Aora digase: Si 24 dan 6. de diferencia; luego 12. darán 3. por la otra diferencia; la qual por ser de la especie menor á la media, restese de dicha media 16. y quedará la especie menor 13. y de tantos quilates son las 24 onzas.

	22		.	.
62		X		
	.		6	24
			.	.

La razon de esto es manifiesta, porque la suma de las diferencias 9. el mixto 36. tiene la misma razon que una diferencia 6. á la parte del mixto correspondiente 24. como está dicho: Luego alternando como 9. á 6. asi, 36. á 24. (306); y pues la suma 45. de los antecedentes 9. y 36. á la suma 30. de los consequentes 6. y 24. es como el antecedente 9. al consequente 6. (318); esto es como 45. á 30. asi 9. à 6. y como 45. à 30. asi el otro antecedente 36. á su consequente 24. Luego invirtiendo como 30. á 45. asi. 24. á 36. (307), y alternando como 30. à 24. asi,

45. á 36. que es la regla de tres que hemos resuelto. Lo restante de la question por sí es manifiesto ; y queda explicado arriba.

Esta question, ni otras muchas, que á su semejanza podrá inventar el Aritmetico, tampoco està comprehendida en las 8. primeras.

561 Question 18. Pedro tiene polvora de 6. as y as y de 4. as y as; preguntase para hacer 42. libras de polvora de 5. as y as quanto tomarà de cada una. Escribanse las especies en forma de quebrado, poniendo por numerador al salitre de cada composicion, y por denominador á la suma de todas las partes de la composicion; y asi, en la polvora de 6. as y as, el numerador serà 6. y el denominador 8. que es la suma de 6. 1. y 1. Hecho esto, siguiendo la regla, y adreviando los quebrados para mayor facilidad, salen 24 libras de polvora de 6. as y as, y 18. libras de polvora de 4. as y as; y tanto salitre ay en las 24 libras de 6. as y as, y en las 18. de 4 as y as, como en las 42. de 5. as y as; que en lo que iguala las violencias de las polvoras, segun opinion de los Artilleros.

	$\frac{6}{8}$		$\frac{1}{21}$	24
$\frac{5}{7}$		X		
	$\frac{4}{6}$		$\frac{1}{28}$	18
			$\frac{1}{12}$	42

¶ Y advierto, que por seguir un mismo tenor, y combinar mejor todas las questiones, he puesto exemplos en el oro, pero lo mismo es en la plata, suponiendo, que asi como el oro puro, y sin liga, se dice que es de 24. quilates; el mismo modo, la plata pura, de copela, ó cendrada, se dice de 12. dineros, y cada dinero 24. granos Si tiene una parte de las 12. de liga es de 11. dineros; si tiene 2. es de 10. dineros, &c. Como si un Platero tiene plata de 10. dineros, y 12. granos de ley, y de 11. dineros, y 17. granos para saber 13. marcos de plata de 10. dineros, y 23 granos, qué cantidad pondrá de cada una, lo hará de este modo: Reduzga los dineros á granos, multiplicando por 24 y añadiendo los granos de cada ley; y asi la de 10. dineros, y 12. granos tendrá 252. granos, la de 11. dineros, y 17. granos tendrà 281. granos, y la especie media de 10. dineros, y 23 granos tendrá 263. granos. Esto supuesto, hará la aligacion por la question 1. Y lo mismo en todas las demàs questiones.

				Marc.	Onzas.	Quart.
	281		11	4.	7.	1. $\frac{23}{29}$.
263		X				
	252		18	8.	0.	2. $\frac{6}{79}$
			29	13.		

ALI-

ALIGACIONES COMPUESTAS.

En las aligaciones compuestas los terminos se escriben del mismo modo que en las simples. Pero las partes de la mezcla no están necesariamente determinadas, como en las aligaciones simples; pues se puede tomar mas de una especie que de la otra, y compensar la qualidad de una especie con la cantidad de la otra, como luego verémos. Se pueden hacer de dos modos. El primero, por muchas aligaciones simples; y el segundo, por una sola compuesta.

Modo primero.

Preceptos.

562 *Primero.* Haganse alomenos tantas aligaciones simples, quantas fueren menester, para que se liguen todas las especies de dos en dos con la comedia, aunque una misma especie se ligue, dos ò mas veces.

563 *Segundo.* Dividase la cantidad del mixto en tantas partes arbitrarias: esto es, del modo que se quisieren, quantas fueren las aligaciones.

564 *Tercero.* Si alguna especie se ha ligado muchas veces, sumense las partes de la mezcla que salieren en cada ligacion, para tener la parte de mezcla correspondiente á la tal especie. En los exmplos estarà todo manifiesto.

565 Question 19. Un Mercader tiene Ambar, que vale á 20. libras la onza: Amizcle, cuya onza vale 12. libras; y Algalia, cuya onza vale 8. libras, quiere mezclar todas estas tres olores, de suerte, que la onza del mixto valga 15. libras; pregunta quanto tomará de cada especie.

Aqui se han de hacer dos aligaciones; y pues son tres las especies dadas, necesariamente la una se ha de ligar dos veces, y asi divido la onza que se desea del mixto en dos qualquier partes, en un quarto, y en tres quartos. Aligo aora el Ambar, y Almizcle con la especie media 15. escribiendo de las diferencias 3. y 5. en cruz, y diciendo por regla de tres: Si la suma de las diferencias 8. dan un quarto (que es la una parte del mixto), luego 5. darà

	20		3	$\frac{3}{32}$
15		X		
	12		5	$\frac{5}{32}$
			8	$\frac{1}{4}$.

rà 5. 32. avos de onza de Almizcle ; y 3. dará 3. 32. avos de onza de Ambar.

Hago otra aligacion del Ambar, y Algalia, con la especie media 15. escribiendo las diferencias en cruz, y diciendo por regla de tres: Si la suma de las diferencias 12. dan $\frac{3}{4}$ de onza del mixto (que es la otra parte) ; luego la diferencia 7. dará 21. 48. avos de onza de Ambar; y la diferencia 5. dará 15. 48. avos de onza de Algalia. Y porque el Ambar se ha aligado dos veces, sumense las cantidades que han salido en las dos aligaciones, que son 3. 32. avos, y 21. 48. avos, ó 14. 32. avos de onza, y seràn 17. 32. avos. Con que para hacer una anza del mixto, se han de tomar 17. 32. avos de onza de Ambar, 5. 32. avos de onza de Almizcle; y 15. 48. avos, ó 10. 32. avos de onza de Algalia.

	20		7	$\frac{21}{48}$
15		X		
	8		5	$\frac{15}{48}$
			12	$\frac{3}{4}$

Podia aver dividido la onza que se desea del mixto en qualquiera otras dos partes, como en dos sextos, y quatro sextos, y haciendo primero la aligacion del Ambar, y Almizcle, respeto de los dos sextos, y despues del Ambar, y Algalia, respeto de los quatro sextos, saldrán (reducidos los quebrados) 37. 72. avos de onza de Ambar, 5. 18. avos de onza de Algalia ; y 5. 24. avos de onza de Almizcle.

566. Asimismo, si el mixto se desea en alguna otra cantidad, como en 20. onzas, le dividirè en dos partes arbitrarias 8. y 12 Y haciendo la aligacion del Ambar, y Almizcle, respeto de las 8. onzas, saldràn 3. onzas de Ambar, y 5. de Almizcle. Haciendo otra vez la aligacion del Ambar, y Algalia, respeto de las 12. onzas, saldrán 7. onzas de Ambar, y 5. de Algalia; y como el Ambar se ha ligado dos veces, sumando las 3. onzas de la una aligacion, y las 7. de la otra, saldrán 10. onzas del Ambar, 5. onzas del Almizcle; y 5. de la Algalia, que son las partes que se han de tomar de cada especie, para hacer las 20. onzas del mixto.

	20		3	3
15		X		
	12		5	5
			8	8

	20		7	7
15		X		
	8		5	5
			12	12

Podia tambien ligar el Ambar, y Almizlce, respeto de las 12.

onzas del mixto; y el Ambar; y Algalia respeto de las 8. onzas, y entonces saldrán 9. onzas y un sexto de Ambar; 7. onzas y media de Almizcle; y 3. onzas y un tercio de Algalia; con que la question tiene otra respuesta. Podia tambien aber dividido las 20. onzas del mixto en otras partes como en 4. y en 16. y entonces tendria la question otras dos respuestas.

Finalmente, como qualquier numero se podia dividir en infinitas partes, usando de quebrado quando importa, y respeto de cada parte, se pueden hacer alomenos dos Aligaciones (quando ay solas tres especies, porque si las especies son mas, tambien se pueden hacer mas Aligaciones) se podrán hacer infinitas Aligaciones; y la question tener infinitas respuestas: Y asi tres terminos se pueden aligar infinitamente, y mucho mejor si ay mas terminos.

Demonstracion.

Cada Aligacion simple está ya demonstrada arriba (542). Aora sólo falta probar, que dividiendo la cantidad del mixto en tantas partes arbitrarias, quantas han de ser las Aligaciones, saldrán las verdaderas partes del mixto, que son las cantidades de las especies que se han de poner en la mezcla, para que salga del valor señalado, lo qual pruebo asi; y porque la demonstracion no sea en numeros abstractos, y no esté implicada en quebrado, me valgo del exemplo inmediato propuesto (565), que es en numeros enteros.

Las 20. onzas del mixto, se han dividido en 8. y 12. onzas; las 8. constan de Ambar, y Almizcle, de suerte, que cada onza de las 8. vale 15. libras; y las 12. onzas restantes, se componen de Ambar, y Algalia, de suerte que cada onza, vale tambien 15. libras; y asi ay dos masas, ó mezclas iguales en perfeccion; esto es, que la onza de cada una, vale lo mismo; luego juntando las dos masas, ò mezclas, saldrán 20. onzas compuestas de Ambar, Almizcle, y Algalia, cuya onza valdrá 15. libras, porque juntando dos, ó mas mixtos de igual perfeccion, nace un todo del mismo valor, que cada mezcla de por sí, como juntando una porcion de oro de 20. quilates, con otra tambien de 20. quilates, saldrá oro de 20. quilates, pues que no ay causa por la qual se aumente, ó disminuya la perfeccion. Y asi juntando las 8. onzas de Ambar, y Almizcle, cuyo valor son 15. con las 12. de Ambar, y Algalia, cuyo valor son tambien 15. libras, saldrán 20. onzas tambien de 15. libras de valor.

Modo segundo.

Preceptos.

567. *Primero*: Escritas las especies como está dicho, liguense todas de dos en dos con la especie media, aunque una misma especie se liguen dos ó mas veces, de suerte que las especies que se ligan de dos en dos, no han de ser mayores, ni menores que la media, sino una mayor, y otra menor.

568. *Segundo*: Las diferencias de cada especie á la media, escribanse en cruz; es, la diferencia de la especie menor á la media, pongase al lado de la mayor; y la diferencia de la especie mayor á la media, escribase al lado de la menor.

569. *Tercero*: Sumense las diferencias, pero con esta advertencia, que si al lado de una especie huviere dos, ó mas diferencias, al tiempo de sumarlos, no se ha de hacer cuenta que son unidades, decenas, &c. sino unidades simples; esto es, no se han de sumar atendiendo al lugar de la numeracion.

570. *Quarto*: Instruyanse tantas reglas de tres, quantas diferencias hubiere, en las quales la suma dellas, tendrá el primer lugar; el segundo será de la quantidad del mixto; en el tercero estará cada diferencia, tomada como està dicho; y en el quarto, las partes de la mezcla. Aora lo practicaremos todo.

571. Question 20. Un Platero tiene oro de 24. 20. 18. 16. y 15. quilates, quiere mezclarle, y hacer 60. onzas de oro de 19. quilates; preguntase quanto tomarà de cada especie? Escribanse las especies como se vé, y ligando los 15. y 24. quilates con los 19. pongase la diferencia 4. de 15. á 19. al lado de las 24. y las diferencias 5. de 19. á 24. al lado de los 15. Liguense del mismo modo los 16. y 20. quilates, escribiendo las diferencias 3. y 1. encontradas. Liguense ultimamente los 18. y 24. porque como los 18. quedan solos, por fuerza, se han de ligar con otra especie ya ligada, y la diferencia 1. de 18. á 19. escribase en frente de los 24. y al lado de la diferencia 4. la otra diferencia 5. escribase al lado del 18.

Especies.	Diferencias.			
24.	4.	1.	15.	$\frac{15}{19}$.
20.	3.		9.	$\frac{9}{19}$.
19.				
18.	5.		15.	$\frac{15}{19}$.
16.	1.		3.	$\frac{3}{19}$.
15.	5.		15.	$\frac{15}{19}$.
	19.		60.	

He-

Hecho esto, sumense las diferencias 1. 4. 3. 5. 1. 5. tomando las dos 4. y 1. que están en una linea como unidades; esto es, como quatro, y uno, no como quarenta y uno: Y digase por regla de tres: Si 19. suma de las diferencias, dá 60. onzas; luego la diferencia 4. y 1. que es 5. dará 15. onzas, y 15. 19. avos de oro de 24. quilates; luego la diferencia 3. dará 9. onzas, y 9. 19. avos de oro de 20. quilates, y asi de las demás.

24.	4.	3.	1.	14. $\frac{2}{17}$.
20.	4.	3.	1.	14. $\frac{2}{17}$.
19.				
18.	5.	1.		10. $\frac{10}{17}$.
16.	5.	1.		10. $\frac{10}{17}$.
15.	5.	1.		10. $\frac{10}{17}$.
	34.			60.

Si se quieren hacer todas las Aligaciones posibles, liguense todas las especies quantas veces se puedan, ligando siempre la mayor, y menor con la media; como ligando los 15. y 24. quilates, son las diferencias 4. y 5. que se han de escribir encontradas; esto es, la diferencia 4. del 15. á 19. pongase al lado del 24. y la diferencia 5. del 19. al 24. escribase al lado del 15. Liguense tambien el 15. con el 20. escribiendo las diferencias 4. y 1 en cruz; esto es, la diferencia 4. del 15. al 19. al lado del 20. y la diferencia 1. del 19. al 20. al lado del 15.

Liguense los 16. y 24. quilates, escribiendo las diferencias 3. y 5. encontradas; liguense del mismo modo el 16. y 20. escribiendo las diferencias 3. y 1 en cruz. Asi mismo se ligarán el 18. con el 24. y otra vez el mismo 18. con el 20. Sumando pues las diferencias como está dicho, será la suma 34. Digase aora: Si 34. dan 60. onzas luego 8. (que es la suma de las diferencias 4. 3. 1., que están al lado de los 24. quilates) darán 14. onzas, y 2. 17. avos de oro 24. quilates.

Otra vez: Si 34 dán 60. luego 8. (que es la suma de las diferencias 4. 3. 1. que estàn al lado de los 20. quilates (darán 14. onzas, y 2. 17. avos de oro de 20. quilates. Otra vez: Si 34. dàn 60. luego 9. (que es la suma de las diferencias 5. 1. que están al lado de los 18. quilates daràn 10. onzas, y 10. 17. avos de oro de 18. quilates. Otra vez: Si 34. dàn 60. luego 6. (que es la suma de las diferencias 5. y 1. que están al lado de los 16. quilates) darán 10. onzas, y 10. 17. avos de oro de 16. quilates. Y asi mismo se hallaràn 10. onzas, y 10. 17. avos de oro de 15. quilates.

Con que tomando 14. onzas, y 2. 17. avos de oro de 24. quilates;

mas 14. onzas y 2. 17. avos de oro de 20. quilates; mas 10. onzas y 10. 17. avos de oro de 18 quilates; mas 10. onzas y 10. 17. avos de oro de 16. quilates; mas 10. onzas y 10. 27. avos de oro de 15. quilates, y mezclandolas, saldràn 60. onzas de oro de 19. quilates; de suerte, que aunque en esta resolucion las partes de la mezcla ayan salido diferentes de la antecedente, pero la suma, ó mezcla, siempre es la misma, recompensando la diversidad con tomar mas de una especie, que de otra.

Demonstracion.

Es la misma, que la del modo antecedente; porque en este modo de aligacion, se ligan las especies de dos en dos, que es hacer muchas Aligaciones; como en la operacion primera de la question immediata propuesta, ligando solos los 15. y 24. quilates; esto es, usando de las diferencias 4. y 5. sin atender á la otra diferencia 1. que està al lado de los 24. quilates, saldrian 12. onzas y 12. 91. avos de oro de 24. quilates, y 15. onzas y 15. 19. avos de oro de 15. quilates, las quales sumadas, hacen 28. onzas y 8. 19. avos de oro de 19. quilates, como està demonstrado en las Aligaciones simples.

Asi mismo, ligando los 19. y 20. quilates, salen 9. onzas y 9. 19. avos de oro de 20. quilates, y 3. onzas y 3. 19. avos de oro de 19. quilates, cuya suma 12. onzas y 12. 19. avos, es de oro de 19. quilates. Del mismo modo ligando los 19. y 24. quilates solos; esto es, atendiendo solamente á la diferencia 1. que está al lado de los 24 quilates, saldrian 3. onzas y 3. 19. avos de oro de 24. quilates, y 15. onzas y 15. 19. avos de oro de 18. qûilates, las quales juntas, hacen 18. onzas y 18. 19. avos de oro de 19. quilates; como todo està ya demonstrado en las Aligaciones simples.

Con que ligando las especies de este modo, saldrán diferentes mixtos todos de una misma perfeccion, pero compuestos de diferentes especies, como 28. onzas 8. y 19. avos de oro de 19 quilates, mixto de 24 y 15. quilates; mas 12 onzas y 12. 19. avos de oro de los mismos 19. quilates, compuesto de 16. y 20. quilates, mas 18. onzas y 18. 19. avos de oro, tambien de 19. quilates, mixto de 18. y 24. quilates. Y como estos tres mixtos, son de una misma especie, sumandolos, saldrá el mixto total de la misma especie de 19. quilates. ●

Examen.

572 *La prueba de las operaciones de Aligacion compuesta; es tambien la misma, que la de Aligacion simple (543) multiplican-

cando la cantidad del mixto 60. por cada diferencia tomada como está dicho, saldràn los productos 300. 180. 300. 60. 300. cuya suma es 1140. Multiplicando por otra parte la suma de las diferencias 19. por cada parte de la cantidad, saldrán los productos 300. 180. 300. 60. 300. cuya suma ha de ser igual á la otra suma 1140. como en efecto lo es.

573. Question 21. Pedro tiene tres generos de vino, uno de 15. sueldos el cantaro, otro de 10. y otro de 7. quiere mezclarlos, y añadir agua para hacer 80. cantaros que valgan 560. sueldos; preguntase quanto tomarà de cada uno? En esta question, y sus semejantes, lo primero se ha de saber quanto vale uno de los 80. cantaros que desea, partiendo los 560. sueldos por 80. y vendrán 7. sueldos, pues tanto vale el vino del mixto. Donde se ha de advertir, que si este quociente 7. fuere mayor que la especie mas alta, ò menor que la mas baxa; esto es, si estubiere fuera de los dos extremos, la question será imposible.

Hecho esto, disponganse los terminos como está dicho, poniendo un cero por la agua que ha de mezclar, y ligando las especies de dos en dos, de suerte, que ninguna diferencia aya cero, lo qual puede suceder siempre que ay una especie igual á la media (esto advierto, para que aya parte de cada especie en el mixto; porque si alguna diferencia fuese cero, la especie de su lado, no entraria en la composicion del mixto: (Y asi se ligarán los 15. y 0. poniendo las diferencias 7. y 8. en cruz; liguense los 10. y 0. poniendo tambien las diferencia 7. y 3. en cruz (este 3. ha de estàr al lado de la diferencia 8. como está dicho) liguense ultimamente el 10. y el 7. escribiendo las diferencias 0. y 3. en cruz.

	15.	7.	20.
	10.	7. 0.	20.
7.			
	7.	3.	8. $\frac{4}{7}$.
	0.	8. 3.	31. $\frac{3}{7}$.
		28.	80.

Aora digase por regla de tres: Si 28. suma de las diferencias, dán 80. cantaros, luego las diferencias 7. 7. 3. 11 darán 20. cantaros de vino de 15. sueldos; 20. cantaros de vino de 10. sueldos; 8. cantaros y quatro septimos de vino de 7. sueldos, y 31. cantaros, y tres septimos de agua; Y tantos ha de tomar de cada especie.

Aqui es preciso advertir, que quando entre las especies que se han de mezclar, ay alguna de igual valor, ó perfeccion, que la especie media, si esta tal es una de las extremas; esto es, la mayor, ó la menor, la question es imposible; como si de tres especies de vino de 15. 10. y 7. sueldos, se quiere hacer un mixto de 7. sueldos, será imposible, porque si la especie menor, es de igual valor que la media, luego añadiendo por poco que sea, de las otras especies mas perfectas, saldrá un mixto de mayor valor, y perfeccion, que la especie menor, y por consiguiente mas perfecta que la especie media, Asi mismo, mezclando vino de 15. 10. y 7. sueldos para hacer vino de 15. sueldos, se pretende un imposible, porque si la especie mayor, vale lo mismo que el mixto; luego añadiendo algo de las otras especies mas imperfectas, saldrà el mixto de menos valor que 15. sueldos.

574. Question 22. Pedro quiere comprar 10. onzas de varias especies por 10. sueldos, en los quales hay canela à 4. sueldos la onza, clavos á 3. sueldos la onza, y pimienta à 8. dineros la onza; preguntase quanto tomará de cada una? Primeramente se partirán las 10. onzas que quieren comprar por los 10. sueldos de todas, y saldrà un sueldo por el valor de una onza del mixto. Y porque en esta question el precio de la pimienta, es dineros, resuelvanse los precios de las otras especies en dineros, comprehendiendo tambien el un sueldo de la media; con que la onza del mixto, valdrà 12. dineros; la de la canela 48. dineros; la de los clavos 36. dineros; y la de la pimienta 8. dineros.

Hecho esto liguense las especies por qualquiera de los dos modos antecedentes, y siguiendo la regla, saldràn 10. 17. avos de onza de canela; 10. 17. avos de onza de clavos, y 8. onzas, y 14. 17. avos de pimienta, y tanto ha de tomar de cada especie.

	48.	4.			$\frac{10}{17}$.
12.	36.	4.			$\frac{10}{17}$.
	8.	36.	24.	8.	$\frac{14}{17}$.
		68.		10.	

575. Question 23. Un Platero tiene 12. onzas de oro de 24 quilates; mas 4. onzas de oro de 20. quilates; mas 2. onzas de cobre; quiere mezclarlo todo, y desea saber de quantos quilates saldrá el mixto. En esta question, dadas las especies, y las partes de la cantidad, se busca la especie media. Escribanse las especies, y cantidades como se vé, y multiplicando cada especie por su cantidad, saldrán los productos 288. 80. y 0. cuya suma 368. se partirá por la suma 18.

Especies.	Cantidades.	Productos.
24.	12.	288.
20.	4.	80.
0.	2.	0.
20. $\frac{4}{9}$.	18.	368.

de las cantidades, y el quociente 20. y quatro novenos, serà la especie media, ó los quilates de la mezcla que se desean saber.

Advierto aqui, que si esta question se examina por las antecedentes, esto es, escribiendo la especie media en su lugar, sacando las diferencias, y buscando las cantidades, como si no estuvieran conocidas, no siempre se hallaràn las mismas cantidades, aunque siempre todas juntas, harán la misma suma 18. porque como qualquier question de Aligacion Compuesta, puede tener infinitas respuestas, no es facil, que en la primera solucion se hallen las referidas cantidades.

576. Question 24. Un Platero tiene 56. onzas de oro de 16. quilates compuesto de quatro especies; de las quales solas conoce las tres, que son 12. onzas de oro de 22. quilates: 4. onzas de 20. quilates; y 16. onzas de 15. quilates, pidense los quilates, de la especie no conocida.

22.	12.	264.
20.	4.	80.
15.	16.	240.
16	56.	896.
	32.	384.
13.	24.	312.

Escribanse los tres especies, y cantidades conocidas como antes, tirese una linea, y debaxo las especies, ponganse los 16. quilates de la especie media, ò de las 56 onzas que tambien se escrivirán debaxo las cantidades, multipliquese cada especie por su cantidad, y tirando otra linea, escribase la suma 32. de las tres primeras cantidades debaxo ellas mismas, y asi mismo se escribirá la suma 584. de los tres primeros productos 294. 80. 240. debaxo tambien de los mismot productos.

Restense aora la suma 32. de los 56. y quedarán 24. onzas. Restese asi mismo el producto 584. del producto 896. y quedaràn 312. los quales partidos por 24. darán 13. con que la quarta especie son 24. onzas do oro de 13 quilates.

577. Question 25. Un congio, que es un vaso cubico de medio pié geometrico, lleno de miel, pesa 180 onzas; de agua, 120. onzas; de aceyte, 108. onzas, como consta por las 2. partes de los proeminales; preguntase: Si se llenase de estos tres licores juntos, quanto se pondria de cada uno, para que pesase 130. onzas? Siguiendo-

	180.	22.	10.	$31.\ \frac{68}{132}$.
130.	120.	50.		$49.\ \frac{32}{132}$.
	108.	50.		$49.\ \frac{32}{132}$.
		132.		130.

do-

do las reglas de Aligacion como se vé en la formula, saldràn 31. onzas, y 68. 132. avos de miel, 49. onzas y 32. 132 de agua; y 49. onzas y 32. 132. avos de aceyte.

Lo mismo es en las otras especies, y aunque no se aya de llenar el congio, sino hacer otro qualquier cuerpo; como si un cañon de artillaria calza una bala de plomo de 1361 onzas y un quarto, otra de cobre de 1065. onzas, y otra de estaño comun de 877. onzas y media, para saber la cantidad de cada metal, que se ha de mezclar para hacer una bala para el mismo cañon, que pese 1000. onzas, se obrará del mismo modo, que en la question antecedente.

578. Question 26. En cierta capilla ay una lampara de plata, que pesa 100. onzas, la qual se ha de vender, y hacer otra del mismo tamaño mezclada de cobre, laton, y estaño puro, preguntase quanto se mezclarà de cada especie? Para resolver esta question, y sus semejantes, primeramente se ha de saber quanto pesaria cada lampara de solo cobre, laton, ó estaño puro, lo qual se conocerá por la proporcion de los metales, como se hizo arriba (489.) diciendo por regla de tres; Si 1127. onzas y media de plata (que es el numero de la tabla de los Proemiales) son iguales en la magnitud, 1065. onzas de cobre; luego las 100. onzas de la lampara de plata, serán iguales á 94 onzas y 206. 451. avos, y tanto pesaria la lampara de cobre siendo del mismo tamaño, que la de plata.

Otra vez: Si 1127. onzas y media de plata, son iguales en el tamaño á 1012. onzas y media de laton, luego 100. onzas de la lampara, serán iguales à 89. onzas y 361. 451. avos, que es el peso de la lampara de laton de la misma magnitud, que la de plata. Ultimamente: Si 1127. onzas y media de plata, son iguales en la grandeza à 862 onzas y media de estaño puro; luego las 100. onzas de la lampara de plata, serán iguales á 76. onzas y 224. 451. avos, que es el peso de la lampara de estaño, puro del mismo tamaño, que la de plata.

Hecho esto, liguense los pesos de las lamparas de cada especie, y porque el peso del mixto no se señala, le puede el Arithmetico determinar á su gusto; pero con tal condicion, que sea medio entre los pesos de las especies dadas, y asi supongo, que la lampara mixta, ha de pesar 80. onzas: Sigo aora la regla de la question antecedente, y hallaré las cantidades, ó partes de la mezcla que deseaba.

579. Question 27. Un Polvorista tiene 10. libras de polvora de 6. as, y as; 12. libras de 5. as, y as; 20. de 4. as, y as, las quales quie-

quiere mezclar, y desea saber de que genero de polvora saldrà el mixto. Esta question es la misma que la 23. (575) solo con la diferencia, que aqui las especies se han de escribir en forma de quebrado; como en la question 18. (581). Multiplicando, pues, cada especie por su cantidad, sumense los productos, cuya suma (abreviando el quebrado) se partirà por la suma 42. de las cantidades, y el quocien te 1235 1764. avos, será el quebrado de la polvora mixta, cuyo numerador denota el salitre, y el denominador toda la composicion de la polvora.

Especies.	Cantidades	Productos.
$\frac{6}{8}$	10.	$\frac{60}{8}$
$\frac{5}{7}$	12.	$\frac{60}{7}$
$\frac{4}{6}$	20.	$\frac{80}{6}$
$\frac{1235}{1704}$	42.	$\frac{1235}{47}$

Y asi, restando el salitre 1235. de la composicion de la polvora 1764. quedarán 529. por la suma del carbon, y azufre. Dividase en dos partes iguales; la una 264. y media, será la porcion del carbon; y la otra el azufre. Partase el salitre 1235. por la porcion del carbon, y saldrán 4. y 354. 529. avos, y de tanto salitre as y as es la polvora mixta.

PARTE IV.

DE LAS REGLAS DE FALSAS POSICIONES.

580 REGLA de *falsa posicion*, ò *suposicion*, llaman comunmente los Arithmeticos á una regla de tres, fundada en uno, ò dos numeros supuestos, los quales procediendo segun el tenor de la question no la satisfacen, pero por la regla de tres se alcanza la verdad. Como si se pide un numero, que añadiendole su mitad haga 12. como por suposicion el 6. cuya mitad es la qual añadida al mismo 6. hace 9. Y pues abia de hacer 12. es cierto que la suposicion no satisface á la pregunta. Y asi digo por regla de tres: Si 9. provienen de 6. luego 12. vendrán de 8. que es el numero que se busca, cuya mitad 4. añadida al mismo 8. hace 12.

Esta regla, que como dice, comunmente llaman de falsa posicion, no está fundada en numero falso, porque en la realidad no ay tal numero, pues todos son verdaderos numeros, solo puede ser falso el acto de entendimiento que atribuye á un numero lo que no tiene, como quando uno dice *Pedro es Arbol*, entonces ni Pedro, ni el Arbol son cosas falsas, sino el acto de entendimiento, que atribuye á Pedro el ser Arbol. Ni quando un Pintor, siguiendo la proporcion, de una imagen pequeña, copía una grande, se dice, que la imagen pequeña es falsa, sino que ha servido de exemplar. Lo mismo digo de esta nuestra regla, por la qual no se que motivo han tenido los Arithmeticos para añadir aquella palabra *falsa*, bastaba decir *Regla de posicion*. Pero vamos al caso, que hemos de hablar conforme todos hablan.

La regla de falsa posicion es en dos modos: la una *Simple*, en la qual solo se supone un numero; y la otra es *Compuesta*, que necesita de dos suposiciones. Qualquier question de suposicion simple se puede resolver por la compuesta, pero no al contrario. Y asi parece que bastaria dar solamente la regla de posicion compuesta, pues en ella se encierra la simple; pero como por la simple se resuelven muchas questiones mas facilmente que por la compuesta, por eso explicarémos la una, y otra. Pero advierto, que estas reglas no son generalas; como algunos piensan, de suerte, que les parece que teniendo la pregunta alguna semejanza, ó apariencia de falsa posicion, ya se ha de poder resolver por esta regla; siendo asi que ay innumerables questiones de estas, que solo se pueden resolver por la Algebra, sin que alcance la industria, y sutileza de estas reglas.

Y para que el Arithmetico no se desvele en pretender imposibles, tenga esta advertencia general para entrambas posiciones, mientras que damos otras; que quando el numero que se busca ha de multiplicarse por si mismo, ó su parte, ó una parte suya por la otra comparte, ó se ha de sacar alguna raiz, entonces la question necesita de Algebra, y por ninguna de las posiciones se puede resolver.

POSICION SIMPLE.

581 TOmese un qualquier numero (el que pareciere mas à proposito) suponiendo que es el que se busca, y asi se llamará *Suposicion*, ò *Hypothesis*, en el qual se procederá obrando segun el tenor de la question; esto es, sumando, restando, &c. conforme lo expresa la pregunta. Y si el numero que saliere satisface á la question, es cierto que la suposicion es le mismo numero deseado;

do; pero si no, se ha de buscar por regla de tres, en cuyo primer lugar estará el numero, que obrando segun el tenor de la pregunta, procedió de la suposicion. En segundo lugar estará la suposicion. Y en el tercero el numero dado en la question. Pues resolviendo la regla el quarto numero, será el deseado.

Quando la pregunta procede por partes de un numero incognito, para facilitar la operacion reduzganse los quebrados á un comun denominador (154), y tomando el denominador nuevo, ó comun por suposicion, tendrá las partes deseadas, y se obrarà como antes.

Pero porque todas las questiones no se pueden resolver por simple posicion, será necesario atender á esta regla; que quando el numero hallado, segun el tenor de la pregunta, tiene á la suposicion la misma razon que el numero dado en la question, al que se busca, entonces la pregunta se puede resolver por una simple posicion, pero no se podrá resolver, sino guardan la dicha proporcion.

Y porque no siempre se puede claramente conocer si guardan la dicha proporcion, ó no, se entenderà à este señal mas manifiesto: Siempre que procediendo, segun el tenor de la question, se ha de sumar, ó restar algun numero dado en la misma question, es cierto que por simple posicion no se puede resolver la pregunta, sin reducirla primero.

582. Question 1. Uno, preguntando á otro quantos años tenia, respondió, que si á sus años añadia los dos tercios, serian 100. Preguntase aora quantos años tendria? Tomese un qualquier numero por suposicion, que tenga tercio, el qual puede ser el denominador 3. del quebrado señalado dos tercios; añadiendo, pues, los dos tercios del 3. al mismo 3. esto es, el numerador del quebrado al denominador, son 5. y pues habian de ser 100. es cierto que la suposicion, ó numero 3. no es el que se busca. Digase, pues, por regla de tres: Si 5. que es el numero hallado, provienen de la suposicion 3. luego 100. que es el numero dado en la question, vendrán de 60. y tantos años tenia.

Demonstracion.

El numero 5 que resulta de aber procedido en la suposicion 3. segun el tenor de la question, es semejante al numero dado 100. porque tiene las mismas partes proporcionales; esto es, asi como los dos tercios 2. de la suposicion 3. se han añadido al mismo 3. y han hecho 5. del mismo modo los dos tercios 40. del numero que se busca 60. se han añadido al mismo 60. y han hecho 100. con que 5. y 100. son numeros semejantes, cuyas partes 2. y 40. tambien son semejantes, y asi como la suposiposiciones 3. y 60 que son las compartes de los numeros 5. y 100. Luego son proporcionales como 5. á 3. asi 100. á 60. Luego por regla de tres se conoce el numero que se busca.

533. Question 2. Ay un Caliz de oro con su patena de lo mismo, cuyo pie pesa dos tercios de todo el oro; la copa pesa un quarto, tambien de todo el oro, la patena pesa 10. onzas; preguntase quanto pesa todo. Tomese un qualquier numero por suposicion, que tenga tercio, y quarto, el qual se hallará facilmente, multiplicando los denominadores 3. y 4. de los quebrados; y será 12. cuyos dos tercios, que suponen por el peso del pié, son 8. y el quarto, que supone por el peso de la copa es 3. que sumados hacen 11. restense de 12. y queda 1. que supone por el peso de la patena; y pues ésta pesa 10. onzas, es claro que el numero 12. tomado por suposicion, no satisfase à la pregunta. Digase, pues, por regla de tres: Si 1. vienen de 12. luego las 10 onzas de la patena vendrán de 120. y tantas onzas abia de oro en todo el Caliz, y Patena.

Mas facilmente se puede hacer lo mismo. Sumense los quebrados, y serán 11. 12. avos, restese el numerador 11. que supone por el Caliz sin la Patena (pues son las partes señaladas que constituyen el peso del Caliz solo) del denominador 12. que supone por el Caliz, y Patena, y en la resta 1, hagase la misma regla de tres. Pero advierto en esta, y sus semejantes, que si el numerador de la suma de los quebrados es mayor que el denominador, la question es imposible; porque entonces la suma de las dos partes del Caliz solo, pesaria mas que el mismo Caliz solo, lo qual es imposible, que es lo mismo pues decir, que quando la suma de las partes dadas en la question es mayor que la unidad, y se ha de restar del numero en ella expresado, es imposible la question; como si se pide un numero, del qual restado sus dos tercios, y tres quartos queden 10. si supongo que son 12. restando los dos tercios 8. y los tres quartos 9. de 12. no se puede.

535. Question 3. Cierto Mercader no pudiendo pagar con dinero los derechos de ciertas ropas, pagó los dós octavos con tafetan, los quartos novenos con lienzo, los dos septimos con rasos, y por lo que faltaba à cumplimiento de todos los derechos dió 10. varas de terciopelo á 30. reales la vara; preguntase quanto importaban los derechos. Esta question es como la pasada. La suma de los quebrados abreviada es 247. 252. avos restando el numerador del denominador quedan 5. y pues abian de quedar 300. (que es el valor de las 10. varas de terciopelo), digase por regla de tres: Si 5. vienen

del

del denominador 252. que es la suposicion; luego 300. reales vendrán de 15120. reales, tanto importaron los derechos.

585. Question 4. Uno pregunta á otro quantos años tenia, el qual respondiò que no lo sabia; pero que si á los años que tenia añadian su quinto, y dozabo, y de la suma quitaban el septimo, quedarian 54. Preguntase quantos eran los años? Reducidos los quebrados un quinto, y un dozabo á un comun denominador (154), seran 12. 60. avos; y 5. 60. avos; y tomando el comun denominador 60. por suposicion, tendrá quinto, y dozabo, que son los mismos numeradores 12. y 5. añadense á la suposicion 60. y serán 77. quitese el septimo, y quedarán 66. habian de quedar 54. luego la suposicion no satisface á la duda; y asi, por regla de tres, se hallará la solucion: Si 66. vienen de 60. luego 54. años vendrán de 49. años, y un onzeavo, y tantos años tenia.

586. Question 5. Entre tres Mercaderes deben 600. doblones; el primero debe doblado que el segundo, y el tercero tresdoblado que el segundo; preguntase quanto debe cada uno? Porque el primero debe doblado que el segundo, comienzo la operacion por el segundo, suponiendo, que debe 10. doblones: luego el primero deberà 20. y el tercero 30. La suma de las tres partidas es 60. al qual abia de ser 600. pues digo por regla de tres: Si 60. vienen de la suposicion 10. luego 600. doblones vendrán de 100. doblones que debia el segundo; los quales doblados son 200. que es la deuda del primero; y tresdoblados son 300. que es la deuda del tercero.

587. Question 6. De un Exercito mataron la tercera parte, tomaron prisioneros la quarta parte, huyeron 10000. Preguntase de quantos Soldados cosntaba el Exercito, quantos murieron, y quantos fueron los prisioneros? Tomese por suposicion qualquier numero que tenga las partes señaladas en la pregunta, y para hallarle con facilidad reduzganse los quebrados en tercio, y un quarto á un comun denominador, como se ha hecho en otras questiones, los quales son quatro dozavos, tres dozavos; pues el denominador comun 12. tendrá las partes señaladas en la pregunta, las quales son los mismos numeradores 4. y 3 que es el quarto, y tercio. Aora sumense los numeradoros, ó partes tercia, y quarta, y serán 7. que suponen por la suma de los muertos, y prisioneros, y restese el 7. de 12. y quedarán 5. que suponen por los huídos. Y asi, en esta suposicion los muertos fueron 4. los prisioneros 3. y los huídos 5. Y pues los huídos habian de ser 10000 digase por regla de tres: Si 5. vienen de la suposicion 12. luego 10000. vendràn 24000. y de tantos Solda-

dos

dos constava el exercito, cuyo tercio 8000. es de los muertos, y el quarto 6000. de los prisioneros.

588. Question 7. Si el numero de los soldados que ay en una Fortaleza se aumentára su tercio, y se añadieran 100. serian entre todos 3000. preguntase quantos Soldados hay en dicha Fortaleza? Esta question, y sus semejantes no se puede resolver por una simple posicion sin reducir primero los terminos; porque procediendo segun el tenor de la question, se ha de sumar el numero 100. que está dado en la misma pregunta. El modo de reducirla es este: Porque el numero 100. se ha de sumar, segun el tenor de la pregunta, restese de los 3000. y quedarán 2900. y si se hubiera de restar, entonces se sumaria con los mismos 3000.

Reducida ya la question, será del tenor siguiente: Si el numero de los Soldados se aumentára su tercio, serian 2900. preguntase quantos son? Aora tomase en numero que tenga tercio, como es el 3. cuyo tercio 1. añadido al mismo 3. hace 4. Digo, pues, por regla de tres: Si 4. vienen de 3. luego 2900. vendrán de 2175 que es el numero de los Soldados. La prueva es, que se añada su tercio 725. y harán 2900. y añadiendo 100. serán 3000.

La razon porque procediendo segun el tenor de la question, si se ha de sumar, ó restar un qualquier numero dado en la misma pregunta, no se puede resolver por una simple posicion sin reducirla, como queda advertido arriba, es manifiesta; porque procediendo en la suposicion, segun el tenor de la pregunta, se van buscando numero proporcionales à los que dice la pregunta; de suerte, que el numero hallado, segun el tenor de la pregunta tenga la misma razon al numero dado en la misma pregunta, que la suposicion al numero que se busca, que es alternar la proporcion que señalamos arriba (581). Y como añadiendo, ó restando numeros iguales á los terminos de qualquier razon de desigualdad se muda la dicha razon ( ), esta es la causa porque sumando, ó restando algun numero dado en la pregunta no se puede resolver por simple posicion, pues que no salen numeros proporcionales, como habian de salir. Pero haciendo la reduccion, se puede resolver por esta regla de posicion simple, que está ya quitado el impedimento.

589. Question 8. Un Mercader compró ciertas varas de tafetán por ciertos reales, y abiendole preguntado el numero de las varas, y reales, respondió, que si del numero de las varas quitasen sus dos septimos, y añadiesen 4. quedaria 60. pero si al numero de reales añadiese sus tres quintos, y un octavo, menos 40. harian 1340. reales; preguntase quantas eran las varas, y reales?

Para responder á la pregunta de las varas resto primero los 4. que dice que se añadan de los 60. y quedaràn 56. y la question será la misma que buscar un numero que restandoles sus dos septimos sea la resta 56. Tomo, pues, el denominador 7. por suposicion, y quitandole sus dos septimos, que es el numerador, quedarán 5. y porque habian de quedar 56. digo por regla de tres: Si 5. vienen de 7. luego 56. vendrán de 78. y dos quintos, que es el numero de las varas; del qual si se restan sus dos septimos, que son 22. y dos quintos, quedarán 56. y añadiendo 4. son 60.

Aora para conocer el numero de los reales, porque la pregunta dice menos 40 (que es lo mismo que restar 40.) añadanse á los 1340. reales, y serán 1380. y la question serà la misma que buscar un numero, que añadiendole sus tres quintos, y un octavo, sean 1380. Reducidos, pues, los quebrados à un comun denominador, serán 24. 40. avos, y 5. 40. avos; y tomando el comun denominador 40. por suposicion añadanse sus tres quintos, y octavo; esto es, 24. y 5. que son los mismos numeradores, y seràn 69. Digase aora por regla de tres: Si 69. vienen de 40. luego 1380. vendrán de 800. y tantos fueron los reales del empleo; pues añadiendo 480. que son los tres quintos, y 100. que es el octavo, hacen 1380. y quitando 40. quedan 1340. que es el numero dado en la question.

590. Question 9. Quatro Mercaderes ganaron en una compañia tal cantidad de reales, que de todos ellos cupo al primero tres septimos, al segundo tres octavos, al tercero un sexto, y al quarto 700. reales; pidese quantos eran todos los reales. Reducidos los quebrados á 144. 336. avos, 126. 336 avos 56. 336. avos, tomese el denominador comun 336. por suposicion, cuyos tres septimos, tres octavos, y un sexto son los mismos numeradores, suya suma resto de la dicha suposicion 336. y quedan 10. Y porque habian de quedar 700. para el ultimo Mercader, digo por regla de tres: Si 10. vienen de 336 luego 700. vendràn de 23520. y tantos reales ganaron los quatro Mercaderes.

591. Question 10. A un maestro preguntaron quantos discipulos tenia, al qual respondiò que si el numero de sus disipulos se añadian otro tanto, y mitad, tercio, y quarto del mismo numero, y uno mas, serian 112. preguntase quantos discipulos tenia. primeramente restese 1. de 112. porque dice *mas*, que es sumar, y quedarán 111. Aora reducidos los quebrados à un comun denominador, serán 12. 24. avos, 8. 24. avos, 6. 24., y tomando el 24. por suposicion, doblese primero, y despues añadanse su mitad 12. su ter-

cio 8. y su quarto 6. que son los mismos numeradores, y serán 24. Y pues habian de ser 111. digase por regla de tres: Si 74. vienen de 74. luego 111. vendrán de 36. y tantos discipulos tenia; pues si los doblamos serán 72. y añadiendo su mitad 18. su tercio 12. y su quarto 9. y mas 1. serán 112.

592 Question 11. un Labrador queriendo hacer moler 500. barchillas de trigo, fué à un molino donde habia 5. muelas; la primera de las quales en cada una hora muele 7. barchillas; la segunda 5. la tercera 4. la quarta 3. la quinta 1. Desease saber en quanto tiempo se molerá todo el trigo, si à todas las muelas se les da que moler à un tiempo, y quanto molerá cada una.

Supongo que todo el trigo se molerá en 4. horas. Multipliquese la suposicion 4. por el numero de las barchillas que muele cada muela, y saldrá las barchillas que molerá cada una en las 4. horas; y asi, la muela primera en las dichas 4. horas molerá 28. barchillas; la segunda molerá 20. barchillas; la tercera 16. la quarta 12. y la quinta 4. sumense todas, y serán 80. Pues porque habian de ser 500. es cierto que la suposicion 4. no satisface à la pregunta; y asi digo por regla de tres: Si 80. vienen de 4. horas, luego 500. vendrán de 25. horas, y en tanto tiempc molerán todas las cinco muelas las 500. barchillas de trigo.

Para hallar las barchillas que molerá cada muela, multipliquense las 25. horas halladas por las barchillas que muele cada muela en una hora, y se hallará, que la primer muela molerá 175. barchillas; la segunda 125. la tercera 100. la quarta 75. la quinta 25. y tantas barchillas se han de dar para moler à cada muela.

593. Question 12. Pedro se puso á jugar tres veces; en la primera tresdobló el dinero, de suerte, que halló tres veces mas dinero que el que tenia quando se puso à jugar; en la segunda halló cinco veces mas que quando comenzó el juego; en la tercera halló quatro veces mas, y habiendo contado el dinero, tenia 40. reales preguntase con quanto dinero se puso à jugar?

En esta question se busca un numero, que multiplicado por 3. por 5. y por 4. sea el producto 40. Supongo, pues, que el numero que se busca, es 10. el qual multiplicando por 3. hace 30. y este multiplicado por 5. produce 150. y ultimamente este multiplicado por 4. hace 60c Pero porque en la question se dice, que despues de los tres juegos tenia 40. reales, es cierto, que la suposicion tomada, no satisface á la pregunta. Pues digase por regla de tres: Si 600. vienen de 10. luego 40. vendrán de dos tercios de real, y con tanto dinero

se

se puso la primera vez á jugar. Y asi, porque multiplicando dos tercios por tres, salen 2. los quales multiplicados por 5. son 10. y ultimamente multiplicados por 4. salen los 40. reales que tenia despues de los tres juegos.

594. Question 13. Preguntaron à Pedro quantos reales tenia, el qual no queriendo responder claramente, dixo, que tenia tres partidas, la primera era la mitad de la suma de las otras dos, la segunda era el tercio de la suma de las otras dos, y la tercera de 189. reales; preguntase aora quantos reales habia en la primera, y segunda partida?

Si atentamente consideramos esta pregunta, verémos, que la primera partida, era el tercio de la suma de todas tres, por ser mitad de la suma de las dos; asi mismo, la segunda partida, es el quarto de todas tres porque es un tercio de las otras dos: Y asi se ha de buscar un numero que quitandole el tercio, y un quarto, queden 189. Reducidos, pues, los quebrados à un comun denominador, serán 4. dozavos, y 3. dozavos, y tomando el 12. por suposicion restense los denominadores 4. y 3. del mismo 12. y quedarán 5. digase aora por regla de tres: Si 5. vienen de 12. luego 189. vendrán de 453. y tres quintos por la suma de las tres partidas, de la qual se tomarán el tercio, y quarto, y saldrá la primera partida 151. y un quinto, la segunda 113. y dos tercios, la tercera, será 189.

595. Question 14. Pedro se jugó el un tercio de su dinero, dió de limosna el un quarto de lo que le quedaba; y allóse despues con 10. reales; preguntase quanto tenia antes? Reducidos los quebrados á un comun denominador, serán 4. dozabos, y 3. dozabos Aora tomo el comun denominador 12. por suposicion, y quitandole su tercio, que es 4. quedan 8. cuyo quarto es 2. restados del mismo 8. quedan 6. Digo pues: Si 6. vienen de 12. luego 10. vendran de 20. y tantos reales tenia al principio; lo qual es asi, porque, quitando el tercio de 20. de los mismos 20. quedan 13. y un tercio, cuyo quarto 3. y un tercio, restado de los mismos 13. y un tercio, quedan 10.

596. Question 15. Pidese que este numero 200. se reparta en tres partes, de suerte, que la primera sea doblada de la segunda, y esta tresdoblada de la tercera. En semejantes preguntas, es conveniente comenzar por la menor, suponiendo que sea 1. Supongo pues, que la parte tercera es 1. la segunda serà 3. y la primera 6. sumando 1. 3. 6. son 10. y porque habian de ser 200. digo: Si 10. vienen de

1. luego 200. vendràn de 20. que serà la parte tercera, tresdoblados, serán 60. por la parte segunda, y estos doblados, seràn 120. por la parte primera, y todos juntos son 200.

Posicion Compuesta.

597. Esta regla de suposicion compuesta, ó de dos falsas suposiciones, es mucho mas universal que la antecedente; porque como està dicho, todas las questiones que se pueden resolver por una simple posicion, se pueden tambien por dos, y à mas de ellas, otras muchas que no tienen lugar en la simple posicion, aunque muchisimas necesitan de Algebra, ó arte mayor. Pero antes que pasemos à explicar la regla, es necesario advertir, que los Arithmeticos aqui suelen usar de dos señales: El uno es este ✳ que significa *Mas, Suma ó Exceso*: En otro es este — que denota *Menos, Resta, ò Defecto*

598. Esto supuesto, asi se ha de ordenar esta regla: Tomese un qualquier numero por suposicion (aquel que pareciere mas conveniente) suponiendo que es el que se busca, y procediendo en èl segun el tenor de la question, ó satisfase à ella, ò no; Si satisface, está yá conocido el numero que se busca, el qual es la misma suposicion; pero si no satisface, ó falta, ó excede; si falta, escribase el defecto al lado derecho de la suposicion con el señal —. Si excede, escribase el exceso al dicho lado con el señal ✳.

Tomese otro qualquier numero por suposicion, el qual se escribirá debaxo la suposicion y primera, procediendo en èl, segun el tenor de la question, ó satisface á ella, ó no. Si satisface esta suposicion, es el numero que se busca, y no es menester pasar adelante la operacion; pero sino satisfaca, escribase, el defecto, ó exceso al lado de la suposicion con el señal ✳ ó — como está dicho antes.

Aqui es menester edvertir, que al sobredicho exceso, ó defecto, llaman los Arithmeticos *Error*. Y si en las dos suposiciones hay un mismo señal; esto es, si en entrambas hay defectos, ò excesos, los errores son semejantes, pero si hay diferentes señales; esto es, si en una suposicion hay exceso, y en la otra defecto, ò al contrario, son los errores desemejantes.

599. Esto supuesto, ó los errores son iguales, ó desiguales; si iguales (lo qual solamente puede suceder quando son desemejantes) se hallarà el numero que se busca facilmente, sumando las suposiciones y tomando la mitad de la suma: Pero si son desiguales, se hallarà por regla de tres, en cuyo primer lugar estará la diferencia

de

de los errores , si son semejantes , ó la suma de los mismos quando son desemejantes ; en segundo lugar , se pondrà la diferencia de las suposiciones ; en el tercero estará uno de los dos errores qualquier que sea. Y el numero que saliere por la regla de tres , se sumarà con la suposicion , cuyo error se ha tomado en tercer lugar si tiene el señal — y se restará si tiene el señal ✳ ; y la suma , ó resta , será el numero que se busca.

Esta regla replicada de otro modo , es la que traen algunos Autores , la qual es del tenor siguiente : Multipliquese la diferencia de las suposiciones por qualquiera de los errores : el producto dividase por la diferencia de los errores si son semejantes , ó por la suma , si desemejantes , y añadiendo el quociente à la suposicion que està al lado del error multiplicado , quando el dicho error es por defecto , ó restando el dicho quociente de la misma suposicion quando el error es por exceso , la suma , ò resta dará la verdad.

Para facilitar la operacion , será conveniente tomar numeros pequeños por suposiciones , que solo se diferencien en una unidad, porque quando la diferencia de las suposiciones es 1. se resuelve la regla de tres con sola division , como estará manifiesto á quien atentamente lo considerare. Pero sobre todo se han de tomar tales suposiciones , que sin quebrados puedan proceder , segun el tenor de la question , para evitar el cansancio.

600. Y para que el Arithmetico no se canse en querer resolver muchas questiones que no tienen lugar en esta regla , sepa , que por ella solamente se pueden resolver las questiones , en las quales la diferencia , ò suma de los errores (segun se dixo antes) tiene la misma razon á la diferencia de las suposiciones , que un qualquier error al defecto , ó exceso de su suposicion. Y porque esto no siempre está claro , advierta , á mas de lo que está dicho arriba (580) que siempre que de dos suposiciones salen mas de dos errores (como en esta question : Buscar un numero , que dividido por 2. 3. 4. 5. 6. reste siempre 1. y dividido por 7. quede cero) no se puede resolver la question por esta regla. Tampoco se podrá resolver , quando siendo los dos errores por defecto , el error de la suposicion mayor , es menor que el de la suposicion menor , ó quando siendo por exceso , el error de la suposicion mayor , es mayor , que el de la menor. Ultimamente , si procediendo en dos suposiciones , segun el tenor de la question , no se halla la verdad , tampoco se hallará por qualquiera otras suposiciones.

601 Question 16. Tres Mercaderes han ganado 400. rea-

les, pero claramente no se sabe quanto ha ganado cada uno; solo se tiene noticia, que la ganancia del segundo, excede á la ganancia del primero en 12. reales, y la gunancia del teraero excede á la del segundo en 16. reales; preguntase quanto ganó cada uno.

Supongo que la ganancia del primero es 100. y porque el segundo ganó 12. mas, añadoles, y será 112. la ganancia del segundo. Y pues el tercero ganó 16. mas, añadoles, y será 128. la ganancia del tercero. Sumo las tres ganancias, y son 340. los quales abian de ser 400. luego faltan 60. Escribo pues la suposicion 100. y á su lado el efecto 60. con el señal —. Toma otra suposicion, haciendo cuenta, que el primero ganó 140. luego el segundo ganaria 152 y el tercero 168. las quales sumadas, son 460. y pues habian de ser 400. excede en 60. Escribo la suposicion 140. y al lado el error 60. con el señal ✻.

100 — 60.
140 ✻ 60.

Esto supuesto, porque los errores son iguales, no tengo que gastar tiempo en pasar adelante la operacion, sino es sumar las suposiciones 100. y 140. y de la suma 240. tomar la nitad 120. y este es el numero que se busca; porque siendo los errores iguales, el numero que se busca necesariamente, ha de estar en medio de las suposiciones, porque distando los errores igualmente del medio, tambien han de distar las suposiciones.

602. Hagamos otras suposiciones, y primeramente supongo, que la ganancia del primero es 1. añadiendo 12. será 13 la ganancia del sumando; y añadiendo 16. serán 29. la ganancia del tercero, segundo las tres ganancias salen 43. reales, hasta 400. que habian de salir, ván 357. que es el error por defecto; escribo pues la suposicion 1. y à su lado el error 357 con el señal —. Otra vez supongo, que la ganancia del primero es 2. luego la del segundo será 14. y la del tercero 30. la suma de las tres es 46. habian de ser 400. luego se ha errado de 854. Escribo la suposicion 2. y à su lado el error 354. con el señal — porque es por defecto.

1 — 357.
2 — 354.

---

1 — 3.

Hecho esto, porque los errores son semejantes, restoles para hallar la diferencia, que es 3. la qual escribo debaxo los errores, escribo tambien la diferencia de las suposiciones, la qual es 1. Aora sigo la regla, diciendo: Si 3. diferencia de los errores, vienen de 1. diferencia de las suposiciones; luego un error 357. vendrà de 119. y pues el error que se ha tomado, tiene el señal — sumese el numero ro. 119. con la suposicion 1. cuyo es el error, y saldrá el numero 120. que es el que se busca.

Abiendo tomado la segunda suposicion diferente de la primera en sola una unidad, se evita la regla de tres, porque el segundo termino, es unidad, que no aumenta la multiplicacion, y asi basta partir el error 357. por la diferencia de los errores 3. saldrà el mismo numero 119.

Demonstracion.

603. Antes de entrar á la demonstracion, es necesario advertir la doctrina siguiente; originada de los Theoremas 29. 30. 31. 32 y 33 de la Theorica de las razones. Es á saber, que los errores de las posiciones, son proporcionales à los errores de los numeros que salen procediendo, segun el tenor de la question; como en el exemplo propuesto las suposiciones son 1. y 2. cuyos errores, ó diferencias, hasta el numero verdadero 120 son 119. y 118. los numeros que han procedido de dichas suposiciones, segun el tenor de la question, son 43. y 46. cuyos errores hasta el numero 400. que habia de salir procediendo en el numero verdadero 120. segun el tenor de la pregunta, son 357. y 354. Digo pues, que estos quatro numeros 119. 118. 357. y 354. son proporcionales; esto es, como 119. à 118. asi 357. á 354.

Porque procediendo segun el tenor de la question, solamente se pueden hacer quatro operaciones, que son sumar, restar, multiplicar, y partir; esto es, las suposiciones, se han de sumar con otro numero restar, &c. Sumando, pues, ó restando las diferencias, son las mismas (375). Multiplicando, y dividiendo, son las dichas diferencias proporcionales. (376) Luego siempre son proporcionales con razon de igualdad, ó desigualdad.

Esto supuesto, pasemos à la demostracion, y para declararla mejor, supongo que el numero que se busca, está conocido, y es 120. y asi los errores de las suposiciones son 119. y 118. como sumando cada error de estos con su suposicion, constituya el numero 120. serán estos quatro numeros 2. 1. 119. 118. arithmeticamente proporcionales; esto es, será la diferencia de las suposiciones 2. y 1. igual á la diferencia de los errores 119. y 118. (375). Y pues los errores 119. y 118. de las suposiciones, son proporcionales á los errores 357. 354. (603) serán como 119. á la diferencia 1. de 119. á 118. asi 357. á la diferencia 3. de 357. á 354. Y convirtiendo como 1. á 119. asi 3. à 357. y alternando como 1. á 3. asi 119. à 357. Aora invirtiendo como 3. á 1. asi 357. á 119. que es la regla que hemos dado.

604. Hagamos otras suposiciones. Supongo, pues, que la ganancia del primero es 124. reales, añadiendo 12. será 136. la ganancia del segundo, y añadiendo 16. será 152. la ganancia del tercero; sumando las 5. ganancias, salen 412. reales, porque habian de salir 400. reales, será el error 12. por exceso; y asi escribo la suposicion 124. y à su lado el error 12. con el señal ✱. Otra vez, supongo, que la ganancia del primero es 123. (una unidad menos para escusar la regla de tres) y siguiendo el tenor de la question, sale la suma de las ganancias 409 y pues abia de ser 400. excede en 9. y asi escribo la suposicion 123. y à su lado el error 9. con el señal ✱.

124.	✱	12.
123.	✱	9.
1		3.

Hecho esto, resto el error menor del mayor, porque son semejantes, y resto tambien las suposiciones. Digo aora; Si la diferencia de los errores 3. da la sentencia de las suposiciones 1. luego un error 12. dará 4. el qual restado de la suposicion correspondiente al error 12. porque tiene el señal ✱ dará el numero 120. que es el que se busca.

Demonstracion.

605. Supuesto conocido el numero que se busca 120. los errores de las suposiciones 124. y 123. son 4. y 3., y porque restando el numero 120. de las suposiciones, quedan los errores 4. y 3. supuesto que estos son por excese, ò tienen el señal ✱, abrá la misma diferencia de la suposicion 124. à 123. que del error 4. à 3 (375) y como los errores de las suposiciones, son proporcionales à los errores de los numeros que salen, procediendo segun el tenor de la question; esto es, como 4. à 3. asi 12 à. 9. (603) será convirtiendo, como el error 4. à la diferencia 1. de los errores 4. y 3. asi el error 12. à la diferencia 3. de 12. y 9. y alternando como 4. à 12. asi 1. à 3. invirtiendo como 12. à 4. asi 3. à 1. que es lo mismo, que como 3. à 1. asi 12. à 4. que es lo que habemos hecho en la operacion inmediate antecedente.

606. Hagamos otras suposiciones, y sea la primera 100. la ganancia del primero, añadiendo 12. será 112. la ganancia del segundo añadiendo 16. será 128. la ganancia del tercero, sumando las tres ganancias, salen 340. y porque habian de salir 400. será el error 90. por defecto, y asi escribo la suposicion 100. y à su lado 60. con el señal —. Otra vez supongo que la ganancia del primero, es 200. procediendo segun el tenor de la question, salen 640. y porque abian de salir 400. será el error 240. por exceso, y asi escribo la su-

100	—	60
200	✱	240
100		300

posicion 200. y à su lado el error 240. con el señal ✻.

Esto supuesto, sumo los dos errores, pues son desemejantes, y resto las suposiciones. Digo aora: Si la suma de los errores 300. da la diferencia de las suposiciones 100. luego el error 606. dará el error de las suposiciones 20. el qual añadido à la suposicion 100. correspondiente al error 60. porque tiene el señal — dará el numero 120. que se busca. O usando del error 240. digo: Si 300. dan 100. luego 240. darán 80. los quales restados de la suposicion 200. correspondiente al error 240. porque tiene el señal ✻ dará el mismo numero 120.

Demonstracion.

607 Supongo tambien, que el numero que se busca 120. está conocido, y asi los errores de las suposiciones, serán 20. y 80. la diferencia de las suposiciones es 100. la qual sumada con la suposicion menor 100. á la mayor 200. que es igual à la suma de 120. y del error 80. luego la suma de la diferencia de las suposiciones, y de la suposicion menor es igual à la suma de 120. y de 80. el numero pues 120. es igual à la suma de la posicion menor 100. y de su error 20. luego la suma de la suposicion menor y diferencia de suposiciones, que es 200. es igual à la suposicion menor 100. y á los dos errores 20. y 80. y quitando de cada parte la suposicion menor 100 quedará la diferencia de las suposiciones, igual à la suma de los errores 20. y 80. de las mismas suposiciones.

Y porque los errores de las posiciones 20. y 80. son proporcionales à los errores 60. y 240. que han procedido, obrando, segun el tenor de la question, serán componiendo; como la suma de 60. y 240. à un error 240. asi la suma de los errores 20. y 80. que como está dicho, es la misma diferencia de las suposiciones, á un error 80. de las suposiciones que es la regla que hemos dado.

En esta question he puesto todos los quatro casos, que pueden suceder, tomando diferentes suposiciones, cada uno con su demonstracion, para que el Arithmetico no tenga que desear: ahora solo falta que demuestre porque el numero que sale de la regla de tres que es un error de posiciones, se ha de sumar con posicion, cuyo es el error que tomó en la regla de tres, quando tiene el — y restar quando va acompañado con el señal ✻ lo qual pruebo asi.

El numero que sale por regla de tres, es el error, ò diferencia de la suposicion al numero que satisface à la pregunta, y quando está el señal — la suposicion es menor que dicho numero que satisface à la pre-

gun

gunta; luego se ha de añadir el dicho error à la suposicion. Y como quando está el señal ✻ la suposicion se ha tomado mayor, es cierto que se ha de restar el dicho error.

De otro modo.

608. Multipliquense en cruz las suposiciones por los errores, y partiendo la diferencia de los productos por la diferencia de los errores quando son semejantes; ó dividiendo la suma de los productos por la suma de los errores, quando son desemejantes, el quociente dará la verdad.

Sea la misma question, y suposiciones del segundo caso (602). como aqui se vé en el exemplo; Multiplico en cruz la suposicion 1. por el error 854. y la suposicion 2. por el otro error 357. los productos son 354. y 714. que escribo al lado; y pues los errores son semejantes, resto el menor producto del mayor, y tambien el menor error del mayor para hallar la diferencia de los productos 360. y la de los errores 2. divido la diferencia 360. por 3. y el quociente 120. es el numero que se busca.

1.——	357.	714.
	⋈	
2.——	354.	354.
	3.	360.

Sean otra vez las mismas suposiciones del tercer caso (604.) como aqui se ve. Multiplicando en cruz las suposiciones por los errores, salen productos 1476. 1116. y pues los errores son semejantes, divido la diferencia 360. de los productos por la diferencia 2. de los errores, y saldrá el mismo numero 120.

124.	✻	12.	1476.
	⋈		
123.	✻	9.	1116.
		3.	360.

Otra vez sean las mismas suposiciones del caso quarto (606) como está figurado. Multiplicanpo las suposiciones por los errores en cruz, salen los productos 12000. y 24000. y pues los errores son desemejantes, partase la suma 36000. de los productos por la suma 300. de los errores, y el quociente 120. será el numero que se busca.

100.——		60.	12000.
	⋈		
200.	✻	240.	24000.
		300.	36000.

No

No pongo la demonstracion de estas reglas, por no cansar al Arithmetico con su prolixidad, y porque con mediana aplicacion puede sacarla si hubiera percebido lo que hasta aora está dicho. A mas, que para mi intento basta haber demonstrado un modo de obrar.

609. Question 17. Un Exercito consta de Españoles, Italianos, y Alemanes; los Españoles son 10000. los Italianos son la tercera parte de los Españoles, y Alemanes juntos; los Alemanes son la mitad de los Españoles, é Italianos juntos; preguntase quantos son los Italianos, y Alemanes.

Tomo por suposicion un numero grande, como 90000. el qual supongo que es el numero de los Italianos, y tresdoblandole harà el numero 270000. de los Españoles, y Alemanes juntos; proque los Italianos son el tercio de estos juntos, y siendo los Españoles 10000. serán los Alemanes 260000. y porque estos son la mitad de los Españoles, è Italianos, doblando los 260000. serán los Españoles, é Italianos 520000. los quales habian de ser 100000. porque los Españoles, como se dice en la pregunta, son 10000. y los Italianos por la suposicion son 90000. que juntos son 100000. Luego se ha errado por exceso en 420000. Escribo la suposicion 90000. y á su lado el errar 420000. con el signo ✱.

Supongo otra vez, que los Italianos son 8000. Luego los Españoles, y Alemanes serán 24000. Y siendo los Españoles 10000. seràn los Alemanes 14000. los quales doblados hacen 28000. que es el numero de los Españoles, é Italianos. Los Españoles, pues, en la realidad son 10000. y los Italianos son 8000. por la suposicion, los quales juntos hacen el numero de 18000. Luego el numero 28000 que sale de la suposicion, excede al 18000. que habia de salir en 10000. y asi escribo la suposicion 8000. y á su lado el error 10000. con el señal ✱.

90000.	✱	420000.
8000.	✱	10000.
82000.		410000.

Resto aora los errores, y las suposiciones para hallar las diferencias 410000 y 82000. pues que los errores son semejantes, y digo por regla de tres: Si la diferencia 410000. de los erores, dà la diferencia 82000. de las suposiones; luego el error 10000. dará el error de las suposiciones 2000. el qual restado de la suposicion 8000. porque tiene el signo ✱ dá el numero 6000. de los Italianos. Y pues este es la tercera parte de los Españoles, y Alemanes, será el numero de estos juntos 18000. y siendo los Españoles 10000. serán los Alemanes

nes 8000. Con que todo el Exercito constaba de 24000. Soldados, de los quales los 10000. eran Españoles, los 6000. Italianos, y los 8000. Alemanes.

610. Question 18. Son tres Mercaderes, cuyas haciendas no se saben claramente; pero consta de que el primero tiene doblado que el segundo, y mas 4. doblones. El tercero tiene tanto como los dos, y mas 6. doblones, todos juntos tienen 6000. doblones; preguntase quanto tiene cada uno.

Supongo que la hacienda del segundo es 10. luego la del primero será 24. que es doblando 10. y añadido el 4. La del tercero será 40. que es la suma del primero, y segundo, y mas 6. Los tres juntos hacen 74. y porque habian de hacer 6000. se ha errado por defecto en 5926. Con que escribo la suposicion 10. y á su lado el error 5926. con el señal —. Otra vez. Supongo que la hacienda del segundo es 1000. Luego la del primero será 2004. y la del tercero será 3010. Sumando las tres haciendas saldràn 6014. que exede al numero 6000. que habia de salir, en 14. Escribo, pues, la suposicion 1000. y á su lado el error 14. con el señal ✱.

10.	—	5926.
1000.	✱	14.
990.		5940.

Y pues los errores son desemejantes, los tengo de sumar, y harán 5940. Resto despues las suposiciones para tener la diferencia 990. Aora digo: Si la suma de los errores 5940. dá la diferencia 990. luego el error 74. dará el error de las suposiciones 2. y un tercio; el qual restado de la suposicion 1000. porque su error, que se ha tomado en la regla de tres, tiene el señal ✱, dará el numero que se busca 997. y dos tercios, que es la ganancia del segundo; la qual, doblada, y añadido 4. serà 1999. y un tercio la ganancia del primero; y sumando las dos mas 6. serà 3003. la ganancia del tercero; y todas juntas hacen 6000. como dice la pregunta.

611 Question 19. Un Maestro tiene tantos dicipulos, que si cada uno le pagase 50. reales, le faltarian 300. para comprar la casa en que habita; pero si le diera cada uno 60. reales, le sobrarian 400. reales, pagado el precio de la misma; preguntase quantos discipulos tiene el maestro, y quanto es el valor de dicha casa.

Lo que se busca en esta pregunta es un numero, que multiplicado por 50. produzga otro numero, que añadiendo 300. haga la misma suma que hiciera el tal numero multiplicado por 60. y restando 400. del producto. Esta misma question mas facilmente està resuelta (237.), aunque en otra especie. Supongo, pues, que el numero de los discipulos es 300. el qual multiplicando por 50. hace 15000. y añadiendo 300. salen 15300. que es lo que costaria la casa, teniendo 300. discipulos, y pagando cada uno 50. reales veamos aora si pagando cada uno 60. reales sobrarán 400. reales. Multipliquemos, pues, el mismo numero de los discipulos 300. por 60. y salen 18000. que son 2700. mas del antecedente precio de la casa, y pues habian de sobrar 400. restense de los 2700. quedará el error 2300. por exceso; y asi escribase la suposicion 300. y à su lado el error 2300. con el signo ✱.

Otra vez supongo que los discipulos son 100. multiplicolos por 50. y al producto 5000. añadiendo 300. sale el valor de la casa 5300. teniendo 100. discipulos, y pagando cada uno 50. reales. Veamos aora si pagando cada uno de los 100. discipulos 60. reales, sobran 400. reales del mismo precio. Multipliquemos, pues, 100. por 60. y restando el valor 5300. de la casa del producto, que sale 6000. quedan 700. y pues habian de quedar 400. luego hemos excedido en 300. y asi escribo la suposicion 100. y à su lado el error 300. con el señal ✱.

300.	✱	2300.
100.	✱	300.
200.		2000.

Hecho esto, porque los errores son semejantes, resto el menor del mayor, y asi mismo, resto una suposicion de otra para hallar las diferencias 2000. y 200. Digo aora por regla de tres: Si la diferencia de los errores 2000. dà la diferencia de las suposiciones 200. luego el error 300. dará el error de las suposiciones 30. el qual restado de la suposicion 100. porque tiene el signo ✱, quedarán 70. que es el numero de los discipulos; el qual multiplicado por 50. reales, y añadiendo 300. hacen 3800. reales, que es el valor de la casa.

612 Question 20. Entre dos personas se abian de partir igualmente 100. reales; pero abiendose movido cierta contienda, cada uno tomó lo que pudo. Despues de compuesta la riña el primero restituyó un tercio de lo que habia tomado, y el segundo restituyó un quinto tambien de lo que habia tomado, con esto quedaron iguales, teniendo cada uno 50. reales; preguntase quanto tomó cada uno?

Supongo que el primero tomáse 30. reales, y por consiguiente el segundo los restantes 70. El tercio de los 30. son 10. los quales restituyendolos al segundo, le restarian 20. reales. El quinto de 70. son 14. los quales dandoselos al primero (que aora tiene 20.) tendrá 34. y porque abia de tener 50. se ha faltado en 16. Escribo, pues, la suposicion 30. y à su lado el error 16. con el señal —.

Otra vez. Supongo que el primero tomase 60. reales, y por consiguiente el segundo los restantes 40. El tercio del primero son 20. los quales restituidos al segundo le quedan 40. El quinto del segundo son 8. los quales restituidos al primero tiene 48. porque abia de tener 50. se ha faltado en 2. Escribo, pues, la suposicion 60. y à su lado el error 2. con el señal —.

30. —— 16.
60. —— 2.

---

30. 14.

Ahora porque los errores son semejantes, resto el menor del mayor, y hallo la diferencia 14. Digo pues: Si la diferencia de los errores 14. da la diferencia de las suposiciones 30. luego el error 2. darà el error de las suposiciones 4. y dos septimos; el qual añadido à la suposicion 60. porque tiene el señal —, salen 64. reales, y dos septimos: que tomó el primero; y por consiguiente, el segundo tomaria 35. reales, y cinco septimos, como se puede probar.

613. Question 21. En cierta Iglesia hay dos Calices de oro, y una Patena tambien de oro, de valor de 15000. reales, la qual puesta sobre el primer Caliz vale tresdoblado mas que el segundo; y puesta sobre el segundo, se hace valer tanto quanto vale el primero; preguntase quanto vale cada Caliz?

Aqui se buscan dos numeros, de los quales el primero sumado con 15000. sea tresdoblado del segundo; y este, sumado con los mismos 15000. sea igual al primero. Supongo, pues, que el primer Caliz vale 300. reales y añadiendole la Patena que vale 15000. será el valor del Caliz, y Patena 18000. reales; y pues este valor debe ser tresdoblado que el del segundo Caliz, valdrá este 6000. reales, que el tercio de 18000. al qual añadiendo la Patena, que vale 15000. reales, valdrá el segundo Caliz, con la Patena, 21000. reales. Y porque el valor 3000. del primero abia de ser igual à éste, se falta en 18000. y asi escribo la suposicion 3000. y à su lado el error 18000. con el señal —.

3000. —— 18000.
9000. —— 14000.

6000. 4000.

Otra vez supongo que el primer Caliz vale 9000. reales, al qual añadiendo 1500. de la Patena, valdrá con la Patena 14000. reales; y por consiguiente valdrá el segundo Caliz 8000. reales, y añadiendole la Patena valdrá 23000. reales. Y porque el valor del primero 9000. abia de ser igual à éste, se ha faltado en 14000. por lo qual escribe la suposicion 9000. y al lado el error 14000 con el señal —.

Ahora resto los errores, porque son semejantes, y digo: Si la diferéncia de los errores 4000. de la diferéncia de las suposiciones 6000. luego el error 14000. dará el error de las disposiciones 21000. el qual añadido à la suposicion 9000. dará el valor del Caliz primero 3000. reales; y por consiguiente el segundo valdrá 1500. reales.

Resolvamos esta misma question por el otro modo. Escritas las mismas suposiciones, y errores (en estos no se diferencian los dos modos) multipliquese en cruz cada suposicion por el error contrario; y porque los errores son semejantes, restense los errores, y los productos, y partiendo la diferencia de los productos por la diferencia de los errores, saldrá el mismo numero 30000.

3000	——	18000	162000000
	✕		
9000	——	14000	42000000
		4000	120000000

614 Question 22. Un Platero compró tantas perlas, que si al numero dellas añadieran su mitad tercio, y quarto, y mas, 22. serian todas 100. preguntase quantas perlas compró.

Tomese un numero por suposicion, que tenga metad, tercio, y quarto, el qual se sabrá multiplicando los denominadores, y será 24. Supongase, pues, que compró 24. perlas, cuya mitad son 12. el tercio 8. y el quarto 6. las quales partes añadidas al 24. y mas 22. son 72. y pues habian de ser 100. se ha faltado en 28. Escribase la suposicion 24. y à su lado el error 28. con el señal ——. Supongo otra vez, que ha comprado 48. perlas, cuya mitad es 24. el tercio 16. y el quarto 12. Sumando todo, y mas 22. son 122. y porque habian de ser 100. se ha excedido en 22. y asi se escribirá la suposicion 48. y à su lado el error 22. con el señal ✻.

24	——	28
48	✻	22
24		50

Ahora porque los errores son desemejantes, sumense, y por regla de tres: Si la suma de los errores 50. dá la diferencia de las suposiciones 24. Luego el error 22. dará el error de las suposiciones 10. y 14. 25. avos; el qual restado de la suposicion 48. porque el error tomado en la regla de tres tiene el señal ✻, dará el numero de las perlas 37. y 11. 25. avos, que compró.

615 Question 23. Dos tienen cierta suma de reales. Si el segundo dá al primero 12. tendrá el primero seis doblado mas que el segundo; pero si el primero dá 15. reales al segundo, tendrá el segundo diez veces mas que el primero; pretendese saber quantos reales tendrá cada uno.

Para que esta question, y sus semejantes se resuelvan sin entrar quebrados, será conveniente comenzar por el segundo, suponiendo que tiene 20. reales, de los quales dando al primero 12. tendrá el primero seis veces mas que lo que le queda al segundo, que es 8. y asi el primero ha de tener 48. que es 6. veces 8. Luego antes que recibiera los 12. del segundo, tendria el primero 36. Y si de estos 36. se le dan al segundo 15. tendrá el segundo 35. y al primero le quedarán 21. Multiplicando, pues, el 21. por 10. serán 210. à los quales habia de ser igual el 35. porque lo que tiene el segundo, ha de ser diez doblado de lo que tiene el primero: Luego se ha excedido en 175. que es el error por exceso.

Supongo otra vez, que el segundo tiene 40. reales, de los quales dando al primero 12. tendrá el primero seis veces mas de lo que le queda al segundo, que es 28. y asi el primero tendrá 168. Luego el primero tendria 156. antes que recibiera los 12. del segundo. Y si estos 156. se le dan al segundo 15. tendrá 55. y al primero le quedarán 141. Multiplicando, pues, el 141. por 10. salen 1410. à los quales habia de ser igual el numero 55. del segundo, supuesto que lo que tiene el segundo ha de ser diezdoblado de lo que tiene el primero: Luego se ha excedido en 1355. por exceso.

20	✻	175
40	✻	1355
20		1180

Ahora porque los errores son semejantes, resto el mayor del menor, y digo: Si la diferencia de los errores 1180. de la diferencia de las suposiciones 20. luego el error 175. dará el error de las suposiciones 2. y 57. 59. avos, el qual restado de la suposicion 20. porque tiene el señal ✻, quedarán 17. y 2. 59. avos, y tantos reales tenia el segundo.

616 Question 24. En el fondo de una cisterna hay tres caños desiguales; por el mayor sale toda el agua en 2. horas; por el mediano en 3. y por el menor en 6. preguntase por todos los tres caños juntos en quantas horas se vaciaria la cisterna.

Supongo que toda el agua saliese en 4. horas; digo ahora por regla de tres: Si el caño mayor vacia en 2. horas una cisterna, en 4. horas quantas cisternas vaciará? Siguiendo la regla salen 2. cisternas. Otra vez: Si el caño mediano vacía en 3. horas una cisterna; luego en 4. horas vaciará una cisterna, y un tercio. Otra vez: Si el caño menor en 6. horas vacía una cisterna, luego en 4. horas vaciará dos tercios de cisterna. Y asi, todos los tres caños abiertos en 4. horas vaciarian 4. cisternas, que es la suma de los tres numeros que han salido por las reglas de tres. Y pues solo pretendemos saber en quantas horas se vacía una cisterna, hemos excedido en 3.

Otra vez: Supongo, que en media hora sale toda el agua. Digo ahora: Si el caño mayor en 2. horas vacía una cisterna: luego en media hora vaciará un quarto de cisterna. Otra vez: Si el caño mediano en 3. horas vacía una cisterna; luego en media hora vaciará un sexto de cisterna. Otra vez: Si el caño menor en 6. horas vacía una cisterna; luego en media hora vaciará un dozavo de cisterna: Y asi todos los tres vaciarán media cisterna en media hora; y pues queremos que vacíe una cisterna; luego hemos faltado en media cisterna.

4	※	3
$\frac{1}{2}$	——	$\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$		$3\frac{1}{2}$

Digamos, pues, por regla de tres: Si la suma de los errores 3. y medio, porque son desemejantes, dá la diferencia de las suposiciones 3. y media; luego el error 3. dará el error de las suposiciones 3. qual restado de la suposicion 4. cuyo es el error tomado en la regla de tres, porque tiene el señal ※, quedará que todos los tres caños vaciarán la cisterna en una hora.

Lo mismo hallarémos por el segundo modo. Multiplicando las suposiciones por los errores en cruz, salen los productos 2. y 1. y medio, cuya suma es 3. y medio, porque los errores son desemejantes, la qual dividida por la suma de los errores 3. y medio, dará 1. que es la hora misma de antes.

4	※	3	$1\frac{1}{2}$
	⨯		
$\frac{1}{2}$	——	$\frac{1}{2}$	2
		$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$

617 Question 25. Una cisterna tiene un caño en la boca, por el qual se llena en 12. horas; pero en el fondo tiene otro, por el qual se vacía en 18. horas; preguntase si por el caño de arriba continuamente entrase el agua, y por el del fondo saliese siempre, en quantas horas se llenaría.

Suponiendo que se vacía en 20. horas, digo asi: Si en 18. horas se vacía una cisterna; luego en 20. horas se vaciará una cisterna, y un noveno. Luego es necesario que en las 20. se llenen 2. cisternas, y un noveno, para que vaciandose en el mismo tiempo una cisterna, y un noveno, quede una cisterna llena. Digo otra vez por regla de tres: Si en 12. horas se llena una cisterna, en 20. horas quantas se llenarán? Siguiendo la regla salen una cisterna, y dos tercios; pero porque en las mismas 20. horas se habian de llenar de cister-

20	——	$\frac{4}{9}$
40	※	$\frac{1}{9}$
20		$\frac{5}{9}$

nas, y un noveno, hemos faltado à la verdad en este numero qüatro novenos, que es la resta de 1. y dos tercios, à 2. y un noveno.

Supongo otra vez, que se vacía en 40. horas. Digo, pues: Si en 18. horas se vacía una cisterna; luego en 40. horas se vaciarán dos cisternas, y dos novenos; y asi es necesario que en las 40. horas se hayan de llenar 3. cisternas, y dos novenos, para que vaciandose las dos, y dos novenos en 40. horas, quede una cisterna llena. Ahora digo: Si en 12. horas se llena una cisterna; luego en 40. horas se llenarán 3. cisternas, y un tercio. Y pues en las mismas 40. horas se habian de llenar 3. cisternas, y dos novenos; luego se ha excedido en un noveno; y asi escribo la suposicion 40. y à su lado el error un noveno, con el señal ✱.

Esto supuesto, sumense los errores, pues son desemejantes, y restanse las suposiciones, digase: Si la suma de los errores cinco novenos, dá la diferencia de las suposiciones 20 luego el error un noveno dará el error 4. de la suposicion, el qual restado de la suposicion 40. porque tiene el señal ✱, quedarán 36. y en tantas horas se llenará la cisterna.

20	——	9 4	160 9
40	✱	1 9	20 9
20		9 5	180 9

Por el segundo modo. Multipliquense las suposiciones por los errores en cruz, y sumando los errores por una parte, y los errores por otra, pues que son desemejantes, dividase la suma de los productos por la suma de los errores, y saldrán las mismas 36. horas.

* * *

LIBRO III.

DE LA ANALYTICA DE LOS NUMEROS.

ANalityca, es una parte de la Arithmetica practica, que trata de la resolucion de las potestades en sus raíces; ò de la extraccion de las raíces, de las mismas potestades, que todo es uno, y contiene dos partes; la primera trata de la extraccion de dichas raíces; y la segunda de la invencion de diferentes medios proporcionales.

PARTE I.

DE LA EXTRACCION DE LAS RAICES.

EXPLICANSE LOS TERMINOS DE LAS POTESTADES, y raíces.

618 POtestad, ò *Potencia* de un numero, es el producto del mismo numero, multiplicado por sí mismo una, ò muchas veces. *Raíz*, ò *lado*, es el numero, que multiplicandose por sí mismo una, ò muchas veces, produce la potestad. Como el 9. es potestad del 3. porque multiplicando el 3. por 3. produce 9. y el dicho 3. es la raíz; asi mismo el 5. es raíz del 125. porque multiplicando 5. por 5. y el producto 25. otra vez por 5.

salen 125. Asimismo el 81. es potestad, y su raíz es 9. porque 9. veces 9. son 81. Del mismo modo el quebrado quatro novenos, es potestad de dos tercios. Dicese *Potestad*, porque es todo quanto puede la zaíz, ò lado, multiplicandose por sí misma; y asi es la potencia de la raíz.

619 La Potestad, es en dos maneras: *Simple y Compuesta*. La Potestad Simple, es el producto de un numero entero, ò quebrado por sí mismo, como está dicho simplemente, y sin afeccion, ò circunstancia alguna: Como 64. que es producto de 8. por 8. Item 82. que proviene de la multiplicacion de 3. por 3. y del producto 9. por 3. y otra vez del producto 27. por 3. Item 9. 25. avos que es el producto de tres quintos por sí mismo.

La Potestad compuesta, es la que tiene alguna circunstancia; ò afeccion; como 18. que es potestad compuesta de dos potestades 9. cuya raíz es 3. Item 20. que es potestad compuesta de la misma raíz; eſto es, de 16. y de su raíz 4. Item 12. que es la resta de la raíz 4. de su potestad 16. y otras muchas que dexo, porque mi intento, solo es tratar de las Potestades Simples, reservando las otras para el arte mayor.

620 La Potestad Simple, se divide en *Quadrado*; *Cubo*; *Quadrado quadrado*: *quadrado Cubo*: *Cubo Cubo*: *Quadrado quadrado Cubo*, &c. Y asi mismo la raíz se divide en *Quadrada*: *Cubica*: *Quadrado*, *quadrada*, *&c.* como se vé en la siguiente tabla, la qual tiene tres Colunas. La primera, es de los exponentes, que señalan el orden de las potestades, y raíces. La segunda contiene las potestades, suponiendo, que la raíz es 2. La tercera enseña los nombres de dichas potestades de dos modos; el uno por extenso; y el otro abreviando con solas las iniciales del nombre de cada potestad.

Exponentes.	Potestades.	Nombres de las Potestades.	
0	1		
1	2	Raíz.	R.
2	4	Quadrado.	Q.
3	8	Cubo.	C.
4	16	Quad. quad.	Q. Q.
5	32	Quad. Cubo.	Q. C.
6	64	Cubo cubo.	C. C.
7	128	Quad. quad. cubo.	Q. Q. C.
8	256	Quad. quad. quad. quad.	Q. Q. Q. Q.
9	512	Cubo cubo cubo.	C. C. C.
10	1024	Quad. quad. Cubo cubo.	Q. Q. C. C.

621 El *Quadrado*, es un numero producido de la multiplicacion de otro por sí mismo una vez sola: como 4. que procede de la multiplicacion de 2. por 2. Item 9. que procede de la multiplicacion de 3. por 3. Mas 25. que proviene de la multiplicacion de 5. por 5. La *raíz quadrada*, es aquel numero, que multiplicandose una vez sola, produce al quadrado como el 2. respeto del 4. Item el 3. respeto del 9. Item el 5. respeto del 25.

622 *Cubo*, es un numero que nace de la multiplicacion de la raíz por sí misma, y deste producto otra vez por la misma raíz; como el 8. que proviene de la multiplicacion de 2. por 2. y del producto 4. por la misma raíz 2. Item 27. que proviene de la multiplicacion de 3. por 3. y otra vez del producto 9. por la misma raíz 3. Con que la raìz multiplicando à su quadrado produce el Cubo. *Raíz cubica*, es el numero, que multiplicandose dos veces, produce al Cubo: como el 2. respeto del 8. y el 3. respeto del 27.

623 *Quadrado quadrado*, es un numero producido de la multiplicacion de la raíz por sì misma; del producto otra vez por la misma raíz, y otra vez deste producto por la misma raíz: como el 16. que proviene de la multiplicacion de 2. por 2. y del producto 4. por 2. y del producto 8. por 2. Item 81. que proviene de la multiplicacion de 3. por 3. y del producto 9. por 3. y otra vez del producto 27. por 3. con que la raíz multiplicando à su cubo, produce al Quadrado quadrado. *Raíz Quadrado quadrada* es la que multiplicandose tres veces, produce al Quadrado quadrado, como el 2. respeto del 16. y el 3. respeto del 81. Y asi de las demás potestades.

624 De suerte, que la primera potestad que es el Quadrado, produce de una multiplicacion de la raíz; la segunda, que es el cubo, procede de dos multiplicaciones; la tercera, que es el Quadrado quadrado, de tres; la quarta, de quatro, &c. Que es lo mismo, que decir que en el quadrado se toma dos veces la raíz deste modo 2. 2. (que es lo que denota el exponente 2. y por eso la raíz quadrada, se llama Raíz segunda, ò R. 2.) y se multiplica, con que hay sola una multiplicacion. En el cubo se pone tres veces la raíz deste modo 2. 2. 2. y multiplicandola continuamente, se forma dos multiplicaciones; su exponente es 3. por otras tantas veces que se escribe la raíz, y por eso la raíz cubica, se dice raíz tercera, ò R. 3. En el Quadrado quadrado, se toma la raíz quatro veces, asi 2. 2. 2. 2. (que es lo que significa su exponente 4 y por eso la raìz Quadrado quadrada, se dice raìz quarta, ò R. 4.) y multiplicandola continuamente, hay tres multiplicaciones. Y asi de las demás.

625 De las dos primeras Potestades *Quadrado*, y *Cubo*, toman las demás el nombre repitiendole tantas veces como lo denotan las partes del exponente: Y asi porque el exponente 4. se compone de dos exponentes 2. que es del quadrado, será la potestad correspondiente al dicho exponente 4. *Quadrado Cubo*; porque sumando el exponente 2. del quadrado, con el exponente 3. del cubo, hace 5. Del mismo modo la potestad, cuyo exponente es 6. se llama Cubo cubo, porque el exponente 6. consta de dos veces el 3. que es exponente del cubo. La potestad del exponente 7. es Quadrado quadrado cubo: ò Cubo quadrado quadrado; porque sumando el exponente 3. del cubo, con el exponente 4. del Quadrado quadrado hace 7. Y asi de las demás.

Algunos Autores dán diferentes nombres à las potestades, porque no atiendan à la suma de los exponentes, sino à la multiplicacion; y asi à la potestad, cuyo exponente es 6. la llaman Quadrado Cubo, porque multiplicando el exponente 2. del quadrado por el exponente 3. del cubo, sale el exponente 6. Los antiguos tambien usaron de otros nombres, y caracteres, para explicar las Potestades que ahora solo sirven de confusion. A la Raìz llamaron *Cosa*, y por eso á la Algebra dieron nombre de *Regla de la cosa*; al Quadrado, *Censo*; al Quadrado, quadrado *Censo de censo*; al Quadrado Cubo, *Surdesolido*, *Surdesolido*, ò *Primo relato*, &c. Estas noticias bastan para que no cause novedad el hallar diferentes nombres en algunos Autores.

626 Si lo que hasta aqui hemos dicho, se considera atentamente, estará manifiesto; lo primero, que un mismo numero, puede ser raíz de muchas potestades, como el 2. es raíz del Quadrado 4. del Cubo 8. del Quadrado quadrado 16. &c. pero toma el nombre de la potestad à quien se compára; y asi respeto del Quadrado, se llama *Raíz quadrada*; respeto de Cubo, *Raíz cubica*, &c.

Lo segundo, que una misma potestad, tiene diferentes raíces, como el 16. que tiene al 4. y al 2. por raíces, porque juntamente es quadrado, y Quadrado quadrado; en quanto es quadrado, tiene al 4. por raíz quadrada, y en quanto es Quadrado quadrado, tiene por raíz Quadrado quadrada al 2. Asimismo el 64. en quanto es Cubo cubo, tiene al 2. por raíz Cubo cubica; en quanto Cubo, tiene al 4. por raíz cubica; y en quanto quadrado, tiene al 8. por raíz quadrada.

627 Las potestades, una son *racionales*, y otras *irracionales*. Las racionales, son las que tienen verdadera raíz que se explica,

ca, y declara con algun numero entero quebrado, ò con ambos juntos; como 16. cuya raíz quadrada es 4. Item quatro novenos, cuya raíz quadrada es dos tercios. Item 6. y un quarto cuya raíz quadrada es 2. y medio; y lo mismo se ha de entender de las otras potestades. Las potestades irracionales son aquellas, cuya raíz no se puede explicar por numeros; porque no hay numero alguno, ni entero, ni quebrado, que la exprese, y declare; y por eso la dicha raíz de las potestades irracionales se llama *Sorda*, porque no pudiendose declarar, tampoco se puede oír; como el 32. que no tiene raíz quadrada en numeros; ni el 12. tiene raíz cubica; y otras innumerables.

Para la cabal inteligencia de esto es menester advertir, que asi como la potestad racional es el producto de un numero multiplicado por sí mismo una, ò muchas veces; del mismo modo la potestad irracional se supone, que es el producto de una raíz multiplicada por sí misma una, ò muchas veces; y asi pudo tomar qualquier numero por qualquier potestad; esto es por quadrado, cubo, &c. y entonces puede suceder, que segun una potestad tenga raíz, y segun otra no; como el 27. si le tomo por quadrado será irracional, porque no tiene raíz quadrada que se pueda explicar por numeros; pero si le tomo por cubo tendrá raíz cubica que es 3. y asi será racional.

628 De lo dicho se infiere, que sacar raíz de una potestad no es otra cosa, que buscar un numero, que multiplicado por sí mismo una, ò muchas veces, haga la dicha potestad, si es racional; ò la potestad proxime menor, si es irracional; como sacar raíz quadrada de la potestad 64. es buscar el 8. el qual multiplicado por sí mismo hace justamente 64. Pero sacar raíz quadrada de la potestad irracional 32. es buscar un numero, que multiplicado por sí mismo, constituya el quadrado racional proximo menor que el dicho 32. la qual es 5. y un quebrado que no se puede señalar; porque como se puede aproximar infinitamente, no es posible, señalar el ultimo. En el discurso de este libro tratarémos de esto mas largamente, ahora expliquemos otros terminos.

Del numero plano, y Sólido.

629 *Numero plano* es el producto de la multiplicacion de dos numeros, como el 12. que proviene de la multiplicacion de 4. por 3. y estos numeros se llaman lados del dicho plano, tomando el nombre de la quantidad continua; porque un rectangulo, que es figura plana, se forma del movimiento de un lado en el otro, que es lo mismo que la multiplicacion. Asimismo, el 36. es numero plano, cu-

cuyos lados son 4. y 9. porque 4. veces 9. son 36. Un mismo plano puede tener diferentes lados, porque puede provenir de la multiplicacion de diferentes numeros; como el 36. es producto de 18. por 2. Item, de 12. por 3. Item, de 9. por 4. Item, de 6. por 6. y entonces es quadrado; pero unos lados no pueden hacer diferentes planos.

630 El numero plano se puede dividir en infinitos generos de planos; es á saber, en triangular quadrangular, pentagono, &c. tomando las unidades del numero como puntos; asi como en la quantidad continua la figura plana se divide en triangulo, quadrangulo, &c. Y asi, el numero 3. es triangular, porque sus unidades se pueden disponer en forma de triangulo. El numero 6. es tambien triangular. Item, el 10. como todo se vé en las figuras.

```
   o
  o o

   o
  o o
 o o o

   o
  o o
 o o o
o o o o
```

El numero 12. es quadrangular, porque sus unidades, tomadas como puntos, se pueden disponer en forma de quadrangulo, y sus lados serán 4. y 3. Item, el 9. es quadrangular, y porque sus lados 3. y 3. son iguales, será tambien quadrado. Y lo mismo se entiende respectivamente en los otros numeros Planos, Pentagono, Hexagono, Circular, &c. que por no ser esto de mucha importancia, no prosigo en su explicacion.

```
o o o o     o o o
o o o o     o o o
o o o o     o o o
```

631 *Numero sólido* es el producto de la multiplicacion continua de tres numeros unos por otros, los quales se llaman lados como el 24. que proviene de la multiplicacion de los lados 2. 3. 4. porque dos veces 3. son 6. y 6. veces 4. son 24. Asi mismo, el 32. es numero sólido, porque proviene de la multiplicacion de los lados 2. 2. 8. Tambien el 27. es sólido, porque nace de la multiplicacion de los lados 3. 3. 3. los quales por ser iguales, sea el dicho 27. sólido cubico. Un mismo sólido puede tener diferentes lados, como se dixo en el numero plano, porque puede provenir de la multiplicacion de tres diferentes lados; como el 48. que es el producto de 2. 4. 6. y de 2. 3. 8.

El numero sólido se forma à semejanza de las figuras sólidas, tomando las unidades como puntos; y asi se puede dividir en diferentes figuras: Como *Colunar*, que nace de la multiplicacion de qualquier numero plano por un qualquier numero, como el tirangular 6. multiplicando por 4. hace al colunar 24. Item, *Pyramidal*, que es el tercio del colunar, como 8. y otros que dexo por no ser de mi intento, los quales podrá ver el curioso en las Arithmeticas de Jordano, y del Abad Maurolyco.

632 Advierto aqui dos cosas: La primera, que un mismo numero plano puede ser sólido, y al contrario; como el 24. el qual en quanto proviene de la multplicacion de 4. por 6. es plano; y en quanto nace de la multiplicacion de 2. 3. 4. es sólido; que es lo mismo que hemos dicho de las potestades, que una misma se puede considerar como à diferentes; esto es, como à quadrado, cubo, &c.

La segunda, que aunque el numero plano, y sóllido se divida en diferentes planos, y sólidos, como queda dicho: pero en las difiniciones del numero plano, y sólido (629. y 631.), solo hemos difinido con Euc. difin. 16. y 17. al plano, y sólido quadrangular, y rectangulo; esto es, al producto de dos, ò tres numeros, porque de estos solos hemos de tratar con Euclides, dexando los otros por no conducir mucho para la inteligencia de las Mathematicas, y trato comun que es nuestro principal intento. Y asi, siempre que adelante nombrarémos numero plano, ò sólido, entenderémos de los quadrangulares rectangulos.

De los planos, y Sólidos semejantes.

633 Numeros planos, ò sólidos semejantes son aquellos que tienen los lados proporcionales; y asi, el 6. y el 24. son planos semejantes; porque sus lados 2. 3.—4. 6. son proporcionales; esto es, como 2. à 3. asi 4. à 6. y como 2. à 4. asi 3. à 6. Asimismo, el 24. y el 192. son sólidos semejantes, porque sus lados 2. 3. 4. y 4. 6. 8. son proporcionales. Esta es la difin. 21. lib. 7. de Eucl.

Pero adviertase; que para que los numeros planos: ò sólidos sean semejantes, no es nesario que todos sus lados (algunos numeros planos, ò sólidos pueden tener muchos lados, como queda advertido) sean proporcionales, sino que basta que tengan algunos; y asi, los planos 15. y 60. son semejantes, aunque tomemos sus lados 3. 5. y 5. 12. porque aunque estos no sean proporcionales, pero lo son estos otros 3. 5. y 6. 10.

Todo lo que hasta aqui hemos dicho se ha de entender tanto en los numeros enteros como en los quebrados, ò enteros, y quebrados. Mas todo numero plano, ò sólido necesariamente ha de ser compuesto, y no puede ser primo; porque como proviene de la multiplicacion de dos, ò mas numeros, es preciso que tenga alguna medida à mas de la unidad.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA THEORICA DE LAS POTESTADES, y Raíces en general.

THEOREMA I.

LOS NUMEROS PLANOS TIENEN ENTRE SI LA RAzon compuesta de los lados.

634 SEan dos numeros planos AB. CD. semejantes, ò desemejantes, cuyos lados sean A. y B. C. y D. Digo, que la razon de AB. à CD. es compuesta de las razones de A. à C. y de B. à D. de suerte, que los lados de un plano sean antecedentes, y los del otro consequentes; y que multiplicando el denominador 1. y un tercio de la razon de A. à C. por el denominador tres octavos de la razon de B. à D. saldrá el denominador $\frac{1}{2}$ de la razon del plano AB. al plano CD. (290), que es la razon compuesta.

AB.	BC.	CD.
24.	18.	48.

A.	B.	C.	D.
4.	6.	3.	16.

Multipliquense B. por C. ò al contrario C. por B. que todo es uno, y saldrá el numero BC. Y pues el numero B. multiplicando à A. y C. produce los productos AB y BC. tendrán estos la misma razon que A. à C. (71). Asi mismo, porque C. multiplicando à B. y à D. produce los numeros BC.CD. tendrán estos la misma razon que B. à D. Con que AB. es à BC. como A. à C. y BC. es à CD. como B. à D. y asi AB. BC. CD. son proporcionales en la razon de los lados: Luego la razon de AB. à CD. se compone de las razones de AB. à BC. y de BC. à CD. (290), que son las mismas que las de los lados. Esta es la prop. 5. del 3. de Euc.

635 Si los numeros planos fueren semejantes, como 12. y 48. cuyos lados son 3. 4. y 6. 8. La razon del 12. al 48. será duplicada de la razon de los lados 3. à 6. de 4. à 8. porque como el 12. al 24. (que es el producto de 4. por 6.) tiene la misma razon que 3. à 6. y el 24. al 48. tiene la misma razon que 4. à 8. como queda probado: Luego siendo la razon de 3. à 6. la misma que la de 4. á 8. por ser lados proporcionales, será la razon de 12. à 24. la misma, que

AB.	BC.	CD.
12.	24.	48.

A.	B.	C.	D.
3.	4.	6.	8.

que la de 24. à 48. y los tres numeros 12. 24. 48. serán continuamente proporcionales; y así, la razon del 12. al 48. será duplicada de la razon de 12. à 24. (292), que es la misma que la de los lados, y el numero 24. será medio proporcional entre los planos semejantes; y al contrario si entre dos numeros hay un medio proporcional, serán planos semejantes. Esta es la prop. 18. del 8. de Euclides.

Consectarios.

636 Los numeros quadrados como 9. y 36. tienen la razon duplicada de sus raíces 3. y 6. porque los quadrados son planos semejantes, y las raíces lados proporcionales. Mas entre dos numeros quadrados necesariamente ha de haber un medio proporcional, que aqui es el 18. de suerte, que son continuamente proporcionales 9. 18. 36. como consta claramente, aplicando la demonstracion del parrafo antecedente à los numeros del exemplo propuesto; y esta es la prop. 11. del 8. de Eucl.

9. 18. 36.
3, 3. 6. 9.

637 Si de tres numeros 9. 18. 36. continuamente proporcionales el primero 9. fuere quadrado, tambien lo será el ultimo 36. porque siendo continuamente proporcionales, habrá un medio 18. entre ellos; y asi el 9. y el 36. serán planos semejantes (635). Y como à un quadrado no hay otro plano semejante sino otro quadrado, si el primer 9. es quadrado, tambien será quadrado el tercero 36. que es su semejante. Es la prop. 22. del 8. de Eucl.

638 Los planos semejantes tienen la misma razon que los quadrados; esto es, que hay dos planos semejantes como 6. y 54. habrá otros dos numeros quadrados como 4. y 36. que tengan la misma razon; porque siendo 6. y 54. numeros planos semejantes, entre ellos habrá un numero 18. medio proporcional (635). Hallense, pues, tres numeros minimos en la razon de 6. 18. 54. (370), los quales será 4. 12. 36. cuyos extremos 4. y 36. son numeros quadrados (371): Luego por igualdad de razon (317) como 6. à 54. asi el quadrado 4. al quadrado 36. Y esta es la prop. 26. del 8. de Eucl.

4. 12. 36.
6. 18. 54.
2. 3. 6. 9.

⁂

THEOREMA II.

LOS NUMEROS SOLIDOS TIENEN ENTRE SI LA razon compueſta de sus lados.

639 SEan dos numeros sólidos ABE. CDF. semejantes, ò no semejantes, cuyos lados sean A. B. E. y C. D. F. Digo, que tienen la razon compuesta de las razones de A. à C. de B. à D. y de E. à F. Porque si el producto de B. y E. (aqui es 12.) se multiplica por A. y por C. saldrán los productos ABE.BEC. en la misma razon de A. à C.(71. y 312.) Tambien porque los productos ABE. BEC. tienen entre sí la razon de los numeros significados por las letras A. y B. que son comunes, ò no se hallan en ambos productos (305).

ABE.		BEC.	ECD.		CDF.
24.		36.	48.		60.
A.	B.	E.	C.	D.	F.
2.	3.	4.	3.	4.	5.

Asi mismo, si el producto de E. por C. (que aqui es 12.) se multiplica por B. y D. producida los productos BEC. ECD. los quales tienen la misma razon que B. à D. que son los lados no comunes(305). Ultimamente, si el producto de C. y D. se multiplica por E. y F. saldrán los productos ECD. CDF. en la misma razon de E. à F. que son los lados no comunes, Con que los numeros ABE. BEC. ECD. CDF. tienen la misma razon que los lados. A. à C. Item, B. à D. Item, E. F. La razon, pues, de ABE. à CDF. se compone de las razones de los numeros intermedios (290), que son las mismas, que las de los lados: Luego los numeros sólidos tienen la razon compuesta de sus lados.

640 Si los numeros sólidos son semejantes, como 24. y 192. cuyos lados son 2, 3. 4. y 4. 6. 8. la razon de los sólidos será triplicada de la de los lados homologos 2. 4. ò 3. 6. ò 4. 8. Porque, como queda demonstrado, la razon de ABE. á BEC. es la misma que la de A. à C. La razon de BEC. à ECD. es la misma que la de B. à D. Y la razon de ECD. à CDF. es la misma que la de E. á F. Pues como las razones de A. à C. de B. à D. y de E. à F. sean iguales por ser los sólidos semejanes, y los lados proporcionales, serán los quatro numeros ABE.BEC. ECD. CDF. continuamen-

ABE.		BEC.	ECD.		CDF.
24.		48.	96.		192.
A.	B.	E.	C.	D.	F.
2.	3.	4.	4.	6.	8.

te proporcionales; y asi, la razon de ABE. à CDF. será subdupla de la de ABE. BEC. (292) que es la misma que la de A. à C. Y los numeros BEC. ECD. serán medios proporcionales entre los sólidos semejantes. Esta es la proposicion 18. del libro 8. de Euclides.

641 Al contrario. Si entre dos numeros hay dos medios proporcionales, los tales numeros son sólidos semejantes. Sean los dos numeros ABE. CDF. entre los quales hay dos medios proporcionales BEC. ECD. Busquense tres numeros G. H. K. continuamente proporcionales, y minimos en la razon de ABE. à BEC. (370), y serán G. y K. planos semejantes, pues que entre ellos hay un medio proporcional H. (635), y tambien quadrados (638). Sean A. B. lados de G. y C. D. lados de K. Y. como los numeros G. H. K. son minimos en la razon de ABE. BEC. ECD. los midirán por algun numero, que supongo que es E. (373) Por la misma razon, los mismos G. H. K midirán à BEC. ECD. CDF. por un numero que supongo es F. Luego E. multiplicando à G. H. K. producirá ABE. BEC. ECD. y F. multiplicando à los mismos G. H. K. producirá à BEC. ECD. CDE. Pues como G. sea del producto de sus lados. A. y B. Luego E. multiplicando à G. producirá ABE. numero sólido, y sus lados son A. B. E. Asi mismo, F. multiplicando à K. producirá al sólido CDF. cuyos lados son C. D. F. Multiplicando, pues, H. por E. y F. se producen los medios BEC. ECD. que tienen la misma proporcion que E. à F. (71) que es la misma que G. à H. ò que la de A. à C. ò B. à D. por ser lados proporcionales de los planos semejantes G. y H. Luego los lados A. B. E. son proporcionales à los lados, C. D. E. y asi, los sólidos engendrados de dichos lados, serán semejantes. Esta es la prop. 21. del lib. 8. de Euclides.

ABE.		BEC.	ECD.		CDF.
8.		12.	18.		27.
	G.	H.		K.	
	4.	6.		9.	
A.	B.	E.	C.	D.	F.
2.	2.	2.	3.	3.	3.

Consectarios.

642 Los numeros cubicos como 8. y 27. tienen la razon triplicada de sus raíces 2. y 3. Porquè los numeros cubicos son sólidos semejantes, y las raíces lados proporcionales: Luego tienen la razon triplicada de las raíces. ò lados (64), y entre ellos habrá dos medios proporcionales, que es la prop. 12. del 8. de Eucl.

643 Si de quatro numeros continuamente proporcionales, como 8. 12. 18. 27. el primero 8. fuere cubico, tambien lo será el ultimo 27.

Porque siendo continuamente proporcionales, habrá dos medios: Luego los extremos 8. y 27. son sólidos semejantes (641). Y como à un cubo no haya otro sólido semejante sino otro cubo; si el primero 8. es cubico, tambien el ultimo 27. Es la prop. 23. del 8. de Eucl.

644 Los numeros sólidos semejantes tienen entre sí la misma razon que un cubo à otro; esto es, que si hay dos sólidos semejantes como 10. y 80. habrá necesariamente dos cubos como 1. y 8. que tengan la misma razon. Porque como 10. y 80. son sólidos semejantes, habrá entre ellos dos medios proporcionales 20. y 40. (641); y así será continuamente proporcionales 10. 20. 40. 80. Hallense quatro numeros proporcionales minimos (370), que son 1. 2. 4. 8. de los quales el primero, y ultimo son cubos (371): Luego los sólidos semajantes son como los cubos. Es la prop. 27. del 8. de Eucl.

10.	20.	40.	80.
1.	2.	4.	8.

THEOREMA III.

LOS NUMEROS QUADRADOS TIENEN ENTRE SI LA razon duplicada de sus raíces; los cubos triplicada; los quadrado quadrados, quadruplicada, &c.

645 ESte Theorema, en quanto à los quadrados, y cubos está ya demonstrado arriba (636 y 642.) Ahora lo demonstrarémos universalmente, comprehendiendo todas las Potestades. Es à saber, que los quadrados tienen entre sí la razon duplicada de sus raíces; los cubos, triplicada; los quadrado quadrados, quadruplicada; los cubo cubos, quintuplicada, y asi prosiguiendo infinitamente.

A.	B.			
2.	3.			
AA.	AB.	BB.		
4.	6.	9.		
AAA.	AAB.	ABB.	BBB.	
8.	12.	18.	27.	
AAAA.	AAAB.	AABB.	ABBB.	BBBB.
16.	24.	36.	54.	81.

Sean, pues, dos raíces A. y B. las quales multiplicadas por sí mismas producen los quadrados AA. BB. entre los quales hay un medio proporcional AB. porque AA. à BB. tiene la razon de A. à B. (305). Asi mismo, AB. à BB. tiene la la razon de A. à B. Luego teniendo AA. à BB. la razon duplicada de AA. à AB. (292) tendrá la razon duplicada de la razon de las raíces A. à B.

Las mismas raíces A. B. multiplicando à los quadrados AA. y BB. producirán los cubos AAA. y BBB. como consta por la generacion de las potestades; y multiplicando las dichas raíces al medio AB. producirán à los numeros AAB. y AAB. los quales son medios proporcionales, porque AAA. à AAB. tienen la razon de A. à B. (305). Asimismo AAB. Item ABB. à BBB. tienen al aazon de A. à B. Luego AAA. AAB. ABB. BBB. son continuamente propoorcionales en la razon de las raíces A. à B. y asi, los cubos AAA. y BBB. que son los extremos, tienen la razon triplicada de las raíces (292), que como está dicho, es la misma que la de AAA. à AAB.

Mas las mismas raíces A. y B. multiplicando à sus cubos AAA. y BBB. producen los quadrado quadrados AAAA. y BBBB. como consta por la formacion de las potestades; y las mismas raíces, multiplicando à los medios AAB. AB. ABB. forman à AAAB. AABB. ABBB. que son medios proporcionales entre los quadrado quadrados referidos, pues que todos guardan la razon de las raíces A. à B. (305): Luego AAAA. AABB. AABB. BBBB. son continuamente proporcionales en la razon de las raíces A. à B. Luego los extremos, que son los quadrado quadrados, tienen la razon quadruplicada de AAAB. à AAAB. (292) que es la misma que la de A. à B.

Por la misma razon los cubo cubos tendrán la razon quintuplicada de las razones; los quadrado quadrado cubos, quintuplicada; y asi de los demás segun fuere su exponente. De suerte, que las potestades, cuyo exponente es 2. tienen entre sí la razon duplicada de sus raíces; las potestades, cuyo exponente es 3. triplicada; las que tienen el exponente 4. quadruplicada, &c.

Consectarios.

646 Entre los quadrados hay un medio proporcional; entre los cubos, dos; entre los quadrado quadrados, tres; entre los cubo cubos, quatro; y asi de los demás, uno menos siempre que el exponente. De suerte, entre las potestades que tienen 2 por exponente, cae un medio proporcional, entre las que tienen al exponente 3. hay dos medios proporcionales, entre las que tienen 4. por exponente hay tres medios, &c.

647 Las raíces tienen la razon subduplicada de los quadrados; subtriplicada de los cubos; subquadruplicada de los quadrado quadrados, &c. Porque teniendo las potestades la razon duplicada, triplicada, &c. de las raíces, tendrán las mismas raíces la razon subduplicada, subtriplicada, &c. de las potestades (292).

648 Si hay tres numeros continuamente proporcionales, si el pri-

BIBLIOTECA UNIV.

mero es quadrado, tambien lo será el tercero. Si son quatro los numeros continuamente proporcionales, y el primero fuere cubo, tambien lo será el quarto. Si son cinco, y el primero fuere quadrado quadrado, tambien lo será el quinto; y asi de las demás.

THEOREMA IV.

EN QUALQUIER SERIE DE NUMEROS CONTINUAMENTE proporcionales, que comienza de la unidad, el tercero, quinto, septimo, y asi alternativamente, son quadrados; el quarto, septimo, y asi entredexando dos, son cubos; el quinto, nono, y asi entredexando tres; son quadrado quadrados, y asi de las demás potestades.

649 LO primero demonstraré, que el numero segundo, que aqui es el 2. es raíz de todos los demas; y asi, el tercero 4. será quadrado, el quarto 8. cubo; el quinto 16. quadrado quadrado, &c. Porque como 1. 2. 4. son continuamente proporcionales, tantas veces entrará el 1. en el 2. quantas el 2. en el 4. Luego como el 1. mida el 2. por el mismo 2. esto es, dos veces, tambien el 2. medirá al 4. dos veces, que es tantas veces como unidades tiene el 2. y asi será lo mismo que multiplicandose asi mismo; con que el 2. es raíz quadrada respeto del 4.

Asimismo, como 1. 2. 4. 8. son continuamente proporcionales, tantas veces entrará el 1. en el 2. quantas el 4. en el 8. Luego como el 1. entra en el 2. tantas veces como tiene unidades; esto es, dos veces, tambien el 4. entrará dos veces en el 8. y asi, el 2. multiplicando al 4. produce al 8. y por consiguiente es cubo, como consta por la generacion de las potestades, y su raíz es el 2.

Del mismo modo, el 8. entra en el 16. tantas veces, como 1. en 2. y asi, el 2. multiplicando al 8. produce al quadrado quadrado 16. cuya raíz es el mismo 2. Y de este modo se demonstrará, que el 32. es cubo cubo, y que su raíz es el 2. Mas, que el 64. es quadrado quadrado cubo, cuya raíz es el mismo 2. y asi de las demás potestades.

1.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1.	2.	4.	8.	16.	256.	512.	1024.	2048.		

650 Esto supuesto digo lo primero, que contando de tres en tres numeros inclusive desde la unidad arriba, todos son quadrados; porque el tercero 4 ya queda probado que es quadrado: Luego tambien lo será el quinto 16. porque 4. 8. 16. son continuamente proporcionales; y siendo el 4. numero quadrado, tambien lo será el 16. (637). Asimismo 16. 32. 64. son continuamente proporcionales por la suposicion: Luego si 16. es quadrado, tambien lo será el 64. y asi de los demás.

Lo

Lo segundo, que contando de quatro en quatro numeros desde la unidad arriba inclusive, todos son cubos; que el quarto 8. lo sea; consta por la demonstracion antecedente; que el septimo lo sea, es manifiesto; porque 8. 16. 32. 64. son continuamente proporcionales por al suposicion: Luego si el 8. es cubo, tambien lo será el 64. (643), y asi de los demas.

Lo tercero, que contando de cinco en cinco numeros desde la unidad arriba inclusive, todos son quadrado quadrados. Que el quinto lo sea, ya queda probado; pero que el decimo sea quadrado quadrado, consta; porque 16. 32. 64. 128. 256. 512. son continuamente proporcionales por la suposicion: Luego si el 16. es quadrado quadrado, tambien lo será el 512. Y de este modo se probará el Theorema en todas las demás potestades. Esta proposicion es la 8. del 9. de Euclides, pero mas universal.

THEOREMA. V.

SI DOS POTESTADES SEMEJANTES SE MULTIPLICAN ò dividen unas por otras, los productos ò quocientes serán potestades del mismo genero, cuyas raíces serán los productos ò quocientes de las raíces de las potestades multiplicantes, ò dividentes. Exposicion.

651 SI dos quadrados como 4. y 36. se multiplican entre sí, el producto 144. será numero quadrado, cuya raíz 12. es el producto de la raíz 2. de un quadrado por la raíz 6. del otro. Y si el quadrado 36. se divide por el quadrado 4. el quociente 9. será tambien numero quadrado, cuya raíz es el quociente 3. de la division de la raíz 6. del quadrado 36. por la raíz 2. del quadrado 4. Asi mismo, si dos cubos como 8. y 64. se multiplican entre sí, el producto 512. será tambien cubo, cuya raíz cúbica 8. es el producto de la raíz 2. del cubo 8. por la raíz 4. del cubo 64. Y si el 64. se parte por el 8. el quociente 8. será numero cúbico, cuya raíz 2. es el quociente de la raíz 4. por la raíz 2. Y lo mismo proporcionalmente digo de todas las otras potestades.

Demonstracion.

Sean los quadrados multiplicantes AA. y BB. cuyas raíces son A. y B. y el producto AABB. Digo lo primero, que este producto es numero quadrado. Multipliquese AA. à así mismo, y producirá el quadrado AAAA. Y pues AA. multiplicando à sí mismo, y al quadrado BB. produce los numeros AAAA. y AABB. tendrán estos la misma de AA.

	1	
A		B
3		6
AA	AB	BB
9	18	36
AAA		AABB
81		324

à BB. (71). Y como AA. BB. son quadrados por la suposicion, habrá entre ellos un medio proporcional AB. (635): Luego entre AAAA. y AABB. habrá otro medio proporciona, por la 8. del 8. de Eucl. Luego siendo AAAA. quadrado, lo será tambien AABB. (632).

Digo lo segundo, que la raíz quadrada del quadrado AABB. es el producto AB. de las raíces A. y B. porque el producto AB. à una raíz B. tiene la misma razon, que la otra raíz A. à la unidad (57). Por lo mismo, el producto AABB. al quadrado BB. tiene la misma razon, que el otro quadrado multiplicante AA. à la unidad. La razon, pues, de AABB. à BB. es duplicada de la razon de sus raíces; esto es, de la raíz de AABB. à la raiz. B. por ser numeros quadrados (636). Asi mismo. la razon del quadrado AA. à la unidad quadrada, es duplicada de la raíz A. à la raíz de la unidad quadrada, que es 1. Luego la raíz de AABB. à la raíz B. tiene la misma razon; que la raíz A. à la unidad, porque entrambas tienen la razon subduplicada de sus quadrados, y las subduplicadas de iguales son iguales. Pues como AB. à B. tenga la misma razon que A. à la unidad, serán las razones de la raíz de AABB. à B. y la de AB. à B. iguales: Luego AB. y la raíz de AABB. son iguales. Y asi, la raíz del producto de dos quadrados, es el producto de sus raíces.

La misma demonstracion se ha de aplicar à todas las otras potestades, solo mudando lo que aqui se ha dicho, que los quadrados tienen entre sí la razon duplicada de sus raíces, y estas subduplicadas de los quadrados en razon triplicada, quadruplicada, &c. y en razon subtriplicada, subquadruplicada, &c. Y para qué esté manifiesta, volveré à repetirla en los cubos.

Sean dos cubos AAA. BBB. cuyas raíces son A. y B. Multipliquese el uno por el otro. Digo lo primero, que el producto AAABBB. es tambien numero cubico; porque multiplicandose AAA. à sí mismo, producirá el numero AAAAAA. (el qual es cubo, porque multiplicandose un cubo à sí mismo, sale cubo cubo, que es dos veces cubo por multiplicacion, como consta por la generacion de las potestades): Luego AAAAAA. y AAABBB. tendrán la razon de AAA. y BBB. (71). Y como AAA. y BBB. son cubos por la suposicion, habrá entre ellos dos medios proporcionales (642); y por consiguiente entre AAAAAA. y AAABBB. habrá tambien otros dos medios proporcionales, por la 8. del 8. de Eucl. y serán qua-

1
A. 2. 3. B.
AAA. 8. 126. BBB.
AAAAAA. 64. 1728. AAABBB.
AB.
6.

quatro numeros continuamente proporcionales, y asi, siendo el primero AAAAAA. cubo, tambien lo será el ultimo AAABBB. (643).

Digo lo segundo, que la raìz cubica del cubo AAABBB. es el producto AB. de las raìces A. B. Porque el producto AB à una raìz B. tiene la misma razon, que la otra raìz A. à la unidad (37); y tambien el producto AAABBB. (que como está dicho es cubo) al cubo BBB. tiene la misma razon, que el otro cubo multiplicante AAA. à la unidad. La razon, pues, de AAABBB. à BBB. es triplicada de sus raìces (642). Asimismo, la razon del cubo AAA. à la unidad cubica, es triplicada de sus raìces; esto es, de la raìz A. à la raíz de la unidad cubica, que es 1. Luego la raìz cubica de AAABBB. à la raìz B. tiene la misma razon que la raìz. A. la unidad; porque las dos tienen la razon subtriplicada de sus potestades, y las razones subtriplicadas de iguales son iguales (293). Pues como AB. à B. tenga la misma razon que A. à la unidad, serán las razones de la raìz de AAABBB. à B. y la de AB. à B. iguales: Luego AB y la raìz de AAABBB. son iguales. Y asi, la raìz cubica del producto de dos cubos, es el producto de sus raìces.

La segunda parte del Theorema, que dividiendo una potestad por otra semejante el quociente tambien es potestad semejante, y su raìz es el quociente de la division, se infiere de lo que hemos demonstrado, porque como multiplicando una potestad por otra semejante, sale una potestad semejante, cuya raíz es el producto de las raíces de las potestades multiplicantes: Luego dividiendo el producto por una de estas potestades multiplicantes, saldrá la otra potestad semejante; y dividiendo la raíz del producto por una de las raíces de las potestades multiplicantes, saldrá la raíz de la otra potestad. Esto se funda, en que la division deshace lo que la multiplicacion hace.

THEOREMA VI.

EN QUALQUIER SERIE DE NUMEROS CONTINUAMENTE proporcionales, que comienza de la unidad, del mismo genero de potestad que es el segundo, serán todos los demás.

652 SEA qualquier série de numeros continuamente proporcionales, que comienza de la unidad A.B.C.D.E. (en la qual se comprehenden quatro diferentes séries). Digo, que si el segundo termino B. es quadrado, todos los demás serán quadrados, como en la primera, si es cubo, como en la segunda, todos serán cubos si quadrado quadrado, como en la tercera, todos los demás será quadrado quadrados, &c.

Porque el segundo termino B. es raìz de todos los demás (640): Luego multiplicandose à sì mismo produce al tercero C. y multiplicando à este produce al quarto D. &c. Pues como por la suposicion el segundo es quadrado, cubo, &c. multiplicandose à sì mismo producirá tambien quadrado, cubo, &c. como queda demonstrado en el Theorema antecedente; y asi, el termino tercero será potestad semejante à la del segundo termino; y multiplicando el segundo por el tercero, saldrá el quarto del mismo genero de potestad que primero; porque como primero, y tercero son potestades de un mismo genero, tambien lo será el producto, que es el quarto por el Theorema antecedente; y asi de lo demás.

A.	B.*	C.	D.	E.
1.	4.	16.	64.	252.
1.	8.	64.	512.	4096.
1.	16.	256.	4076.	65196.
1.	32.	1024	12768.	408576.

THEOREMA VII.

SI UNA POTESTAD MIDE A OTRA, TAMBIEN SU RAIZ medirá à la raíz de la otra. Y si una raíz mide à otra, tambien la potestad medirá à la potestad.

653 SUpongo que el quadrado 9. mide al quadrado 36. esto es, que multiplicado algunas veces constituye al 36. Digo lo primero, que tambien la raìz quàdrada 3. del 9 medirá à la raìz quadrada 6. del 36. Porque siendo el 9. y el 56. numeros quadrados habrá entre ellos un medio proporcional 18. y asi serán continuamente proporcionales 9. 18. 36. en la razon de las raìces 3. à 6. Y como el quadrado 9. mida al 36. por la suposicion, luego el 9. tambien medirá al 18. por la prop. 7. del 8. de Eucl. Y pues 9. es à 18. como la raìz 3. à la raìz 6. si el 9. mide al 18. tambien la raìz 3. à la raíz 6. porque la misma especie de la razon submultiplice que tiene 9. à 18. dice tambien el 3. al 9.

3.		6.
9.	18.	36.

Digo lo segundo, que si la raìz 3. mide à la raìz 6. tambien el quadrado 9. medirá al quadrado 36. Porque si la raìz 3. mide à la raìz 6 tambien el quadrado 9. medirá al medio proporcional 18. por tener la misma razon, como está dicho: Luego el 9. medirá el 36 porque 9. mide al 18. y este al 36. Hasta aqui es la prop. 14. del lib. 8. de Eucl.

Estas mismas demonstraciones se aplicarán à los cubos, quadrado quadrados, &c. solo con la advertencia, que asi como se ha dicho que en-

entre los quadrados hay un medio proporcional, se ha de decir que entre los cubos hay dos medios; entre los quadradro quadrados tres, &c. En quanto à los cubos es la prop. 15. del 8. de Eucl.

Consectario.

654 De aqui se infiere, que si una potestad como 4. no mide à otra como à 9. ni tampoco la raíz 2. medirá à la raíz 3. Y si una raíz no mide à otra, tampoco la potestad medirá à la otra. Porque si una raíz mediera à la otra; tambien la una potestad mediria à la otra, lo qual es contra la suposicion. Asimismo, si una potestad mide à la otra, tambien la raíz ha de medir à la otra, que es contra la suposicion.

THEOREMA VIII.

EL NUMERO ENTERO, QUE NO TIENE RAIZ EN numero entero, tampoco la tendrá en entero, y quebrado, ni en quebrado solo.

655 SI algun numero entero como el 30. se toma por potestad, el qual no tiene raíz quadrada, ò cubica, ò quadrado, quadrada, &c. expresada en numero entero: digo, que tampoco tendrá raíz expresada en entero, y quebrado, ni en quebrado solo, y por consiguiente la tal potestad será irracional, y su raíz sorda.

656 Supongo que alguno dixera, que la raíz quadrada del 30. es 5. y un tercio. El intento, pues, es probar que no puede ser. Reduzgase el entero al quebrado, y será 16. tercios, cuyo denominador 3. no mide al numerador 16. porque si le midiera, el dicho quebrado contendria alguno, ò algunos entre justos, que es contra la suposicion que hice, de que la raíz sea entero, y quebrado. Multipliquense el 16. tercio por sí mismo, que es multiplicar el numerador, y denominador por sí mismo, y saldrá el quebrado quadrado 256. novenos, el qual, si la suposicion es verdadera, ha de igualar al entero 30. porque como la raíz de 30. se dice que es 5. y un tercio, ò 16. tercios, multiplicandola por sí misma ha de producir un numero igual al quadrado 30. lo qual es imposible; porque como la raíz 3. no mide à la raíz 16. del quebrado 16. tercios (los terminos deste quebrado son raíces de los terminos del 256. novenos, y todo el quebrado es raíz): Luego ni el quadrado 9. medirá al quadrado 256. (654); y asi, partiendo el numerador 256 por el denominador, no vendrá al quociente numero entero justo, como habia de venir; porque el dicho quebrado quadrado habia de ser igual al num. 30.

Del mismo modo se demonstrará, que la raíz quadrada del numero ro 30. no puede ser numero entero con otro qualquier quebrado; porque reduciendo el entero al quebrado, el denominador no podrá medir al numerador; y asi, quadrando el dicho quebrado, tampoco su denominador no podrá medir à su numerador; y por consiguiente el quebrado quadrado no será igual à numero entero justo, que es lo que se pretende. Y esta misma demonstracion se podrá aplicar al quebrado solo, y à las otras potestades, pues que si sus raíces no se miden, tampoco ellas se medirán.

CAPITULO SEGUNDO.

DEL NUMERO QUADRADO, Y SU RAIZ.

YA queda explicado arriba, qué sea numero quadrado, y raíz quadrada. Ahora pondrémos algunos Theoremas especiales de los quadrados, y despues pasarémos à sacar sus raices. El que solo gustáre de la practica, podrá omitirlos.

THEOREMA I.

EL NUMERO, CUYO PRIMER GUARISMO ES 2. 3. 7. 8. *no es quadrado.*

657 POrque el primer guarismo de un numero quadrado siempre es el mismo, que el primer guarismo del quadrado de un numero digito: v. gr. el primer guarismo 6. del quadrado 576. es el mismo que el primer guarismo del quadrado 16. del numero digito 4 Esto es, multiplicando el primer guarismo 4. de la raíz, 24. por sí mismo produce 16. cuyo primer guarismo es el mismo que el del quadrado total 576. Porque multiplicando 24. por 24. se multiplica 4. por 4. y el segundo producto parcial se escribe una casa mas adelante; y asi, el primer guarismo del producto de 4. por 4. que es 16. siempre queda en primer lugar. Pues como no haya numero alguno digito, que quadrandose produzca un numero, cuyo primer guarismo sea 2. 3. 7. 8. tampoco habrá quadrado alguno, cuyo primer guarismo sea 2. 3. 7. 8.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$$

Consectario.

658 Si un numero tiene al principio zeros impares; esto es, uno, tres, cinco, &c. como estos 210. 1000. 3500000. no es quadrado. Porque si el primer guarismo de la raíz es zero, necesariamente en su

qua-

quadrado ha de haber dos zeros; y si tiene la raiz dos zeros al principio, ha de tener el quadrado quatro; como consta por el multiplicar. Con que los zeros que puede haber al principio de un numero quadrado han de ser pares; esto es, dos, quatro, seis, &c.

659 El primer guarismo de un numero quadrado solo, puede ser uno destos 1. 4. 5 6. 9. 0. porque estos solos son los primeros guarismos de los quadrados de los numeros digitos, como se verá abaxo en su tabla. Pero por tener al principio uno destos guarismos, no se sigue que el numero sea quadrado: porque pueden provenir de la multiplicacion de dos numeros desiguales, ò ser numeros primeros, como se vé en estos 11. 19. &c. Lo que digo es, que un numero para ser quadrado, necesariamente ha de tener al principio uno destos guarismos 1.4 5. 6.9. 0. aunque teniendo esta circunstancia puede no ser quadrado. Pero si al principio no tiene uno de dichos guarismos, sino uno destos otros 2. 3. 7. 8. necesariamente no será quadrado.

THEOREMA II.

LA RAIZ QUADRADA DE UN NUMERO QUE TIENE dos guarismos: es solo un guarismo, la de un numero de tres, ò quatro guarismos, contiene dos guarismos; la de un numero de cinco, ò seis guarismos, tiene tres guarismos, &c.

960 ESte Theorema se puede proponer de otro modo, que es el siguiente. Qualquier numero quadrado que está entre 1. y 100. tiene por la raíz un guarismo solo. El quadrado que está desde 100. hasta 9999. ò hasta 10000. exclusive, tiene dos guarismos. El quadrado que está entre 9999. y 10000. tiene tres guarismos, &c.

La razon desto es, porque el numero 10. es el menor de los que tienen dos guarismos, y multiplicandose à sì mismo produce al quadrado 1000. que tiene tres guarismos: Luego qualquier quadrado que tenga dos guarismos, será menor que el numero 100. y por consiguiente tendrá menor raíz que 10. y asi constará de un guarismo solo. Mas, el numero 100. es el menor de los que tienen tres guarismos, y multiplicandose à sí mismo produce al quadrado 10000. que tiene cinco guarismos: Lugo el quadrado que tuviere quatro guarismos, será menor que el dicho quadrado 10000. y por consiguiente su raíz será menor que la raiz 100. y asi, necesariamente ha de tener dos guarismos, &c.

Consectario.

661 De aqui se infiere, que si qualquier numero se divide de

dos en dos guarismos, comenzando desde las unidades, en cada miembro está incluído un quadrado; y asi tendrá tantos guarismos la raíz de todo el numero, quantos miembros haviere. Como si este numero 12. 51. 29. se divide de dos en dos guarismos, comenzando por la derecha ácia la izquierda, su raíz tendrá tres guarismos; porque hay otros tantos miembros, y en cada uno está escondido un quadrado.

THEOREMA III.

SI UN NUMERO SE DIVIDE EN DOS QUALESQUIERA partes, el quadrado del todo es igual à los quadrados de las partes, y à dos rectangulos de las mismas partes.

Exposicion.

662 TOmese qualquier numero como el 10. el qual se divida en dos qualesquiera partes como en 6. y 4. Digo, que el quadrado 100. de todo el numero es igual à los quadrados 35. y 16. de las partes, juntamente con dos numeros planos 24. y 24. (que son los rectangulos) de la multiplicacion de las mismas partes. Asimismo, si este numero 32. se divide en 30. y 2. digo, que el quadrado 1024. es igual à los quadrados 900. y 4. de las partes, y à dos planos 60. y 60. de las mismas partes. Y asi de los demás.

36	900
16	4
24	60
24	60
100	1024

Demonstracion.

Este Theorema es el fundamento de la regla de sacar raíz quadrada, y le demostró Euclides en la quantidad continua en la prop. 4. del lib. 2. y el Padre Clavio en numeros en el escolio de la prop. 14. del 9. de Eucl. Pero si atendemos à la multiplicacion de los guarismos, segun su lugar, por sí mismo es manifiesto. En el ultimo exemplo, multiplicando el primer guarismo 2. del multiplicador 32. por el primer guarismo 2. del numero multiplicado 32. es evidente que nace el numero quadrado 4. Multiplicando el mismo 2. del multiplicador 32. por el segundo guarismo 3. del numero multiplicando 32. salen 6. decenas; esto es, 60. Multiplicando el segundo guarismo 3. del multiplicador, por el primer guarismo 2. del numero multiplicando, salen tambien 6. decenas, que son 60. Multiplicando, ultimamente el segundo guarismo 3. del multiplicador, por el segundo 3. del numero multiplicando; esto es, 30. por 30. es cier-

32
32
4
60
60
900
1024

cierto que saldrá el quadrado 900. Sumandolo todo hará el quadrado 1024. del numero 32.

En este otro numero 98. se verá lo mimo. Multiplicando las unidades 8. por las unidades 8. sale el quadrado 64. como es manifiesto. Multiplicando las unidades 8. por las decenas 9. sale el plano 720. Multiplicando las decenas 9. por las unidades 8. sale otra vez el mismo plano 720. porque lo mismo es multiplicar 8. unidades por 9. decenas, que estas por aquellas (59). Ultimamente, Multiplicando las decenas 9. por las decenas 9. sale el quadrado 8100. Sumandolo todo nace el quadrado 9604. de todo el numero 98. Y lo mismo se demonstrará en qualquier otro numero; porque todo consiste en la multiplicacion, sin guardar decenas, sino escribiendolas en su lugar; esto es cada producto de por sí, como se vé en los exemplos.

98
98
―――
64
720
720
8100
―――
9608

Consectarios.

663 De aqui se infiere, que el quadrado 9604. de todo el numero 98. no solamente es igual à los quadrados, y planos de sus partes, como está dicho, tomando los segundos guarismos como decenas, sino tambien tomandolos senci[illegible]mente como unidades, y escribiendo los productos un lugar, ò casa mas adelante, porque si bien se advierte, multiplicando el 8 por el 9. tomado en segundo lugar, ò como à decenas, produce 720. Y como el zero solo sirve de llenar lugar, y hacer pasar al numero una casa mas adelante, será lo mismo escribir el 720. que el poner una casa mas adelante el 72 que es el producto de 8. por 9. tomados como unidades; y asi de los demás, como se vé aqui figurado sin zeros.

98
98
―――
64
72
72
81
―――
9604

664. Si á un numero quadrado como al 9. se añade el duplo de su raíz, y mas la unidad, sale el quadrado 16 proxime mayor en numeros enteros; esto es, cuya raìz 4 es una unidad mayor que la raíz 3. del 9. Porque si à la raìz 3. del quadrado 9. se añade una unidad, será 4 y si el quatro se divide en dos partes 3. y 1. el quadrado del 4. que es 16. será igual al quadrado del 3. que es 9. à dos rectangulos, ò planos de las partes 3. y 1. que son 3. y 3. y

31
31
―――
1
3
3
9
―――
16

al

al quadrado de la otra parte 1. que es 1. (662): Luego el quadrado 16. consta del quadrado 9. del duplo de su raìz, y de la unidad, como se vé en el exemplo; porque multiplicando 1. por 1. hace 1. multiplicando 1. por 3. salen 3 multiplicando 3. por 1. salen tambien 3. y asi, los dos 3. hacen 6. que es el duplo de la raíz. Multiplicando ultimamente el 3. por el 3. hace al quadrado 9. Luego sumando todo sale el quadrado del 4. que es 16.

Pero advierto, que como el 4. que consta de un guarismo, se ha dividido en dos; esto es, en 3. y 1. el 3. aunque esté en segundo lugar, no representa decenas, sino unidades, supuesto que no hace 31. sino 3. y 1. Lugo tambien los produċtos que salieren no se han de poner en el lugar de las decenas, ò centenas, sino en las unidades, como se ve figurado.

665 Si de un numero quadrado como del 16. se quita el duplo de su raíz 4. menos unidad, quedará el quadrado 9. proxime menor; porque la raíz 4. excede à la raíz 3. del quadrado que queda en 1. y asi, el duplo de la raíz 4. que es 8. excede al duplo de la raíz 3. que es 6. en dos unidades: Luego si añadiendo el duplo de la raíz menor 3. que es 6. mas una unidad de aquellas dos del exceso, que todo es 7. al quadrado 9. de la raíz 3. sale el quadrado proxime mayor, como queda dicho. Si del duplo 8. de la raíz 4. se quita una unidad, que es la otra de las dos del exceso, quedará el duplo de la raíz 3. y una unidad; esto es, 7 y esto, si se resta del quadrado 16. se bolverá à restituír el quadrado proxime menor 9.

666 De estos dos consectarios nace un modo facil para hacer la tabla de los numeros quadrados sin multiplicar, la qual es de sumo descanso para hallar la raíz quadrada. Contiene dos colunas, en la primera están las raíces, y en la segunda los quadrados. Primeramente escribanse las raíces en la primera coluna, hasta donde la tabla se quiere continuar; y escribiendo 1. en la segunda coluna al lado de la raíz 1. doblese la raíz 1. y serán 2. añadase 1. y saldrán 3. los quales añadidos al quadrado 1. saldrá el quadrado proxime mayor 4. Despues doblando la raíz 2. y al duplo 4. añadiendo 1. son 5. los quales sumados con el quadrado 4. vendrá el quadrado proxime mayor 9. Otra vez doblese la raìz 3. y añadiendole una unidad será 7. sumense con el quadrado 9. y saldrá el quadrado 16. immediate siguiente, y asi de los demás.

Raìce[illegible]	Quadrados.
1	1
2	4
3	6
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256

Si la tabla se ha de comenzar del fin, como del quadrado 256. cuya raíz es 16. doblese esta raíz, y quitandose 1. quedarán 31. restese del quadrado 256. y quedará el quadrado proxime menor 225. cuya raíz es 15. una unidad menor que la raíz 19. y asi de los demás.

PROBLEMA I.

SACAR LA RAIZ QUADRADA DE QUALQUIER NUmero entero que conste de uno ó dos guarismos.

667 SAcar raíz quadrada de un numero, es hallar un numero, que multiplicado por sí mismo produzga al numero de quien es raíz. Como sacar raíz quadrada del 49. es hallar el 7. el qual multiplicandose á sí mismo produce 49 Es una especie de division, pero mas dificultosa, porque el partidor, y quociente han de ser iguales; como si el mismo 49. se divide por 7. saldrá el quociente 7.

Esto supuesto, para sacar raíz quadrada de un numero que consta de uno ò dos guarismos, la qual necesariamente ha de tener un solo guarismo (660), se buscará por la tabla antecedente, ò de memoria, qual quadrado iguala, ò es proxime menor que el numero propuesto, y restandole, si nada sobra, será la raíz del quadrado restado la que se busca; pero si sobra algo, pongase por numerador de un quebrado, cuyo denominador será la raíz doblada, y mas la unidad; y la dicha raíz, con este quebrado, será la raíz algo aproximada; pero menor que la verdadera, la qual no se puede hallar por ser sorda.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz quadrada del 64 Busco en la tabla antecedente, ò de memoria, qué quadrado hay igual, ò proxime menor que el 64. y hallo que 64. cuya raíz quadrada es 8. Resto 64. de 64. y porque nada sobra, digo, que la raíz quadrada de 64. es 8.

Exemplo II.

Busquese la raíz quadrada de 83. En la tabla antecedente el quadrado proxime menor que el 83. es 81. cuya raíz es 9. Resto el 81. del 83. y quedan 2. que pongo por numerador de un quebrado, cuyo denominador es 19 esto es, el duplo de la raíz 9. y mas la unidad, y asi digo, que la raíz quadrada proxime menor del 83. es 9. 2. 19. avos.

Demonstracion.

Toda la dificultad está en dar la razon; porque quando el numero de quien se ha de sacar raíz no es quadrado, se pone lo que sobra por numerador de un quebrado, cuyo denominador, es el duplo de la raíz del quadradrado proxime mayor que se incluye en tal numero, y. mas la unidad, porque lo demas por sí mismo es manifiesto. Asi lo demuestro.

El numero 83. (en este segundo exemplo) está entre el quadrado 81. cuya raíz es 9. y entre el quadrado 100. cuya raíz es 10. Luego su raíz ha de estár entre las raíces 9. y 10. que solo se diferencian en la unidad. Y como la diferencia del quadrado 81. al quadrado 100. es el duplo de la raiz 9. y mas la unidad, esto es, 19. porque añadiendo 19. al 81. hacen 100. (664) el residuo 2. será parte del 19. esto es, que en el numero 83. hay un quadrado 81. y sobran dos unidades de aquellas 19. que faltan para hacer al quadrado 100. Con que se forma el quebrado 2. 19. avos, el qual es numero plano; porque el numerador, y denominador, son, ò por mejor decir se entienden ser numeros planos, supuesto que pertenecen à la composicion de quadrado.

Ahora falta demonstrar, que el quebrado 2. 19. avos, en quanto es linear, es lado de sí mismo, en quanto es plano, porque con el lado del plano 19. es 1. que es la diferencia de las raíces 9. y 10. la razon del plano 19. al residuo plano 2. será casi la misma, que la del lado, ò diferencia 1. al lado 2. 19. avos; esto es, haciendo regla de tres Si 19. dan 2. luego 1. dará 2. 19. avos; porque aunque los planos no guardan la razon simple de los lados, sino compuesta de ellos; pero como el lado del mayor plano 19. es sola unidad, que es la diferencia de las raíces de los quadrados 81. y 100. la qual en entero no puede ser menor, será muy pequeña la diferencia que habrá del lado 2. 19. avos del plano menor 2. al lado verdadero, y asi, con poca diferencia guardan la misma razon los planos y lados, y por consiguiente la raíz 9. y 2. 19. avos es proxima, aunque no es la verdadera; porque los numeros enteros, que no tienen raíz en enteros; tampoco la tienen en entero y quebrado (656).

Pero si en la quantidad continua se consideran dos quebrados desiguales, de tal suerte puestos, que el uno esté dentro del otro, ajustandose los dos lados, será la diferencia una superficie al modo de esquadra, y como dos brazos de una cruz, á la qual llaman *Gnomon*, y representa al plano 19. en nuestro exemplo. Pues si su lado menor, que representa la unidad, se divide en 19. partes, y de estas se toman 2. tirando por alli lineas paralelas, que dividan al dicho Gnomon, es manifiesto que no le dividirán en partes proporcionales á las del lado, sino que la parte de dentro será menor proporcionalmente que la de afuera, y por esta causa el quebrado 2. 19 avos es menor que lo justo; y por consiguiente, tambien toda la raiz 9. y 2. 19. avos será menor.

Examen.

668 Multipliquense los enteros de la raíz hallada por sí mismos, y

al

al producto añadase el numerador del quebrado, que es el residuo, y ha de salir el numero de quien se ha sacado raíz; pero con advertencia, que el dicho residuo ha de ser menor que la raíz duplicada, juntamente con la unidad; porque si fuere igual, ò mayor, alomenos podrá tener la raíz una unidad mas. Y asi, en el exemplo segundo, multiplicando 9. por 9. salen 81. y añadiendo el residuo 2. son 83. que es el numero de quien se ha sacado raíz. Si no hay residuo, entonces el quadrado de la raíz ha de igualar al numero de quien se sacó la raíz; como en el primer exemplo, multiplicando 8. por 8 .salen 64.

PROBLEMA II.

SACAR LA RAIZ QUADRADA DE QUALQUIER NUMERO entero, que conste de mas de dos guarismos.

Preceptos.

669 PRimero: Divídase el numero con distinciones de dos en dos guarismos, comenzando de mano derecha, ò de las unidades hácia la izquierda, aunque el ultimo miembro tenga solo un guarismo; y tantos guarismos ha de tener la raíz, quantos fueren los miembros. Tirese una linea por encima del numero, sobre la qual se escribirán los guarismos de la raíz, cada una correspondiente à su miembro.

670 Segundo: Sáquese la raíz quadrada del primer miembro de la izquierda, como si fuera solo por el Problema antecedente, escribiendola sobre la linea, y su quadrado debaxo del dicho miembro para restarle. Hecha la resta escríbase el residuo debaxo del quadrado, advirtiendo, que ningun residuo puede ser mayor que la raíz duplicada; porque si fuera mayor, habria de ser la raíz tambien mayor lo menos una unidad.

671 Tercero: Abáxese el miembro siguiente, escribiéndole al lado del primer residuo, para hacer el miembro total. Doblese la raíz hallada, añadiendole siempre un zero, para guardar el debido lugar de los guarismos, á la qual, asi doblada con el zero, llamarémos divisor. Dividase el miembro total por este divisor, no dando al quociente todo lo que se puede dar, segun las reglas del partir, sino atendiendo à que el producto del divisor por el quociente, junto con el quadrado del mismo quociente, se pueda restar del miembro total, lo qual enseñará el exercicio; y asi, multipliquese el divisor por el quociente, y al producto añadase el quadrado del mismo quociente, cuya suma escribase debaxo del residuo total, y haciendo la resta escríbase

se el residuo debaxo. El quociente se escribirá por raíz encima de la linea sobre su miembro.

672 Quatro: Abaxese el miembro siguiente, escribiendole al lado del segundo residuo, se tendrá el tercer residuo total Doblase la raíz hasta entonces hallada, y añadiendole un zero se hará lo mismo que antes; y asi prosiguiendo, hasta que esté acabada la operacion. Si despues de abaxado el miembro siguiente no se pudiere partir el miembro total, por ser menor que el divisor, se pondrá zero por raíz, y se abaxará el miembro siguiente para hacer otro total, el qual se partirá por el divisor.

673 Quinto: Si al fin de la operacion sobráre algo, el numero de quien se saca raíz no tendrá raíz verdadera; y asi, escribase el residuo por numerador de un quebrado, cuyo denominador será el duplo de la raíz, y mas la unidad, como se dixo arriba (567). Esto es dificultoso, practiquemoslo.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz quadrada deste numero 1254. Dividase en miembros, como se vé en el exemplo. Saquese la raíz quadrada del primer miembro 12. de mano izquierda; buscando el quadrado mayor que se contiene en él, ò de memoria, ò por la tabla sobre escrita (656), el qual es 9. que se ha de escribir debaxo del 12. y encima la raíz 3. Restese el 9. del 12. y quedará el primer residuo 3. à cuyo lado se escribirá el miembro siguiente 54. y será miembro total 254.

3 5 $\frac{29}{71}$

12, 54

9

354

325

29

Para hallar el segundo guarismo de la raíz, doblese la raíz 3. hasta ahora hallada, y serán 6. añadase un zero, y será 60. el divisor. Dividase el miembro, residuo total 354. por 60. y saldrá el quociente 5. el qual se ha de examinar si es verdadero; porque no basta la division simple, sino que se ha de atender á lo siguiente. Multipliquese el quociente 5. por el divisor 60. y serán 300. Añadese el quadrado de 5. que es 25. y la suma restese de los 354. y porque se puede restar, y el residuo 29. no es mayor que el duplo de la raíz 35. será el 5. el verdadero quociente, el qual se escribirá sobre la linea, y miembro segundo. De lo que sobra se hará un quebrado, poniendolo por numerador, cuyo denominador será el duplo de la raíz con la unidad; esto es, 71.

Exemplo II.

Se ha de sacar raíz quadrada deste numero 67081. Dividido de dos en dos guarismos, saquese la raíz del primer miembro 6. la qual

es

es 2. que se escribirà sobre la linea, y su quadrado es 4. el qual se restarà del 6. y quedarán 2. à cuyo lado se pondrà el miembro siguiente 70. y serà el miembro total 270.

Para hallar el segundo guarismo doblese la raíz hallada 2. y añadiendo un zero serán 40. Dividanse los 270. por 40. y aunque siguiendo las reglas de la division se podria dar 6. al quociente; pero si se atiende á que se ha de multiplicar por el 40. y añadir su quadrado, no podrá ser 6. sino 5. el qual se escribirà sobre la linea enfrente del miembro segundo. Multipliquese el 5. por 40. y al producto 200. añadase el quadrado 25. del quociente, cuya suma 225. se restará del miembro 270. y quedará el residuo 45. menor que el duplo de la raíz 25. hallada hasta ahora.

2 5 9
6,70,81
4
270
225
4581
4581
0000

Para el tercer guarismo, abaxado el siguiente miembro 81. doblese la raíz 25. añadiendo un zero, y serán 500. Dividanse los 4581. por 500. y sale el quociente 9. que se escribirá sobre la linea. Multipliquese el 9. por los 500 y al producto 4500. añadase el quadrado 81. del mismo 9. y restando la suma 4581. del miembro 4581. no queda residuo alguno. Con que la raíz verdadera será 259. y el numero propuesto es quadrado racional; porque nada sobra.

Exemplo III.

Para sacar raíz quadrada deste numero 65768462. dividase de dos en dos guarismos, y porque tiene quatro miembros, tambien su raíz ha de tener otros tantos guarismos. Saquese la raíz del 65. buscando en la tabla el mayor quadrado que se contiene en el 65. el qual es 64. cuya raìz es 8. Escribase el 8. sobre la linea, y el 64. debaxo del 65. Restese, y quedará el residuo 1. á cuyo lado se escribirá el segundo miembro 76. para hacer el miembro total 176.

9 1 0 9
65, 76, 84,62
64
176
161
158462
145881
12581

Para hallar el segundo guarismo de la raíz, doblese la raíz 8. y al duplo 16. añadase un zero, para formar el divisor 100. Dividase el miembro 176. por 160. y sale 1. por quociente. Multipliquese el divisor 160. por 1. y al producto añadase el quadrado de 1. que es tambien 1. con que será 161. Restese del miembro 176. y quedará el segundo residuo 15. à cuyo lado se escribirá el otro miembro 84. y asi será el miembro total 1584.

Para hallar el tercer guarismo de la raíz, doblese la raíz 81. hasta aqui hallada, y al duplo 162. añadiendo un zero será 1820. Dividase el miembro 1584. por 1620. y porque no se puede, por ser menor el dividendo que el divisor, es señal que el quociente, ò tercer guarismo es zero, el qual se escribirá sobre la linea, y abaxando el siguiente miembro 62. será el total residuo 158462.

Para hallar el guarismo quarto, doblese la raíz 810. hallada hasta aqui, y al duplo 1620. añadiendo un zero será 16200. el divisor. Dividase el miembro 158462. por 16200. y saldrá el quociente 9. Multiplíquese por el divisor 16200. y al producto añadase el quadrado 81. del quociente 9. y serán 16281. Restense del miembro, y quedará el residuo ultimo 12481. el qual se escribirá por numerador de un quebrado; cuyo denominador será el duplo de toda la raíz, y mas la unidad.

Demonstarcion.

En este tercer exemplo está comprehendida qualquier dificultad que puede ocurrir en la extraccion de raíz quadrada; y asi, usaré dél en esta demonstracion, la qual para mayor claridad divido en partes.

Que el numero de quien se ha de sacar raíz se haya de dividir de dos en dos guarismos, y que la raíz conste de tantos guarismos, quantos fueren los miembros, consta por el Theorema 2. deste capitulo. Pero que la raíz esté bien sacada, siguiendo la regla sobredicha, es el principal asunto desta demonstracion, la qual se funda en la prop. 4. del 2. de Euclides, que hemos demonstrado en numeros en el Theorema 3. deste capitulo.

Considerémos al primer miembro solo 65. el qual atendiendo al lugar de los guarismos es 65000000. cuya raíz quadrada es 8000. y su quadrado es 64000000. el qual restado quedará el primer residuo 1000000. Y pues los zeros solo sirven de llenar lugar, la raíz de 65. es 8. y el residuo es 1. al qual añadiendo el segundo miembro 76. será 176. ò segun el lugar, 1760000.

En este residuo se incluyen dos rectangulos, cuyos lados son el guarismo hallado 8. de la raíz, y el que se busca; mas un quadrado del mismo guarismo que busca; porque si consideramos los dos ultimos guarismos de la raíz, que son 8. y 1. el quadrado de 81. que es el mayor que se contiene en los dos miembros 6576. es à saber 6561. es igual à los quadrados 64. y 1. de las partes 8. y 1. mas à dos rectangulos 8 y 8. de las partes, puestos en su debido lugar, como se dixo arriba (663), y habiendo sacado del numero 6576. el un quadrado 64. quedará el residuo 176. à los dos rectangulos, y mas un

qua-

quadrado de la otra parte. Pues doblando la raíz hallada 8. se hace el lado de los dos rectangulos, y el añadir zero es para guardar el orden de los lugares de los guarismos; porque, como está dicho (663), los numeros de los dos rectangulos se ponen en segundo lugar, y por eso se añade el zero para llenar el lugar. Partiendo, pues, el residuo 176. por el lado de los dos rectangulos, que es la raíz duplicada, de suerte, que multiplicando el quociente por el divisor (que es hacer los dos rectangulos), y añadiendo el quadrado del mismo quociente (que es lo que falta para el quadrado total 6561.) pueda restarse del miembro 176. sin sobrar residuo mayor que el duplo de la raíz, saldrá el guarismo del miembro segundo.

Por la misma razon, para hallar el otro guarismo correspondiente al tercero miembro, se dobla la raíz hasta entonces hallada, añadiendo zero, y se parte, &c. porque la parte de la raíz 810. se considera dividida en dos partes 81. y 0. El quadrado de 81. que es 6561. ya se ha restado de los primeros miembros, quedando el residuo 15. y abaxando el tercer miembro 84. es 1584. en el qual se contiene asimismo dos rectangulos de las partes 81. y 0. de la raíz, y mas un quadrado del 0. y por eso se dobla la raíz, se parte, &c. Del mismo modo se demonstrarà lo restante de la raíz. El ultimo quebrado queda ya demonstrado en la proposicion antecedente.

Examen.

674. El examen es el mismo que el del problema antecedente Multipliquese la raíz hallada por sí misma, y si hay algun residuo añadase al producto, y todo ha de ser igual al numero de quién se sacó raíz quadrada; como en el exemplo 3. multiplicando la raíz 8109. por sí misma, sale el quadrado 65755881. añadase el residuo 12581. y saldrá el numero 65768462. de quien se sacó la raíz. Pero se ha de advertir, que el residuo no ha de ser mayor que la raíz doblada; porque puede suceder, que se haya tomado una raíz menor, y haciendo el examen venga bien; pero entonces el residuo es mayor que la raíz doblada. Como si se huviera errado la raíz, tomado 8108. haciendo la multiplicacion de la raíz por sí misma, y añadiendo el residuo 28698. saldrá el mismo numero de quien se sacó raíz; pero el residuo es mayor que la raíz doblada, y por eso la raíz 8108. no es la verdadera, aunque venga bien à la multiplicacion.

PROBLEMA. III.

HALLAR LA RAIZ QUADRADA DE ENTERO, y quebrado, ò de quebrado solo.

preceptos.

675 PRimero: Si se ha de sacar raíz de entero, y quebrado, reduzgase el entero al quebrado, (162) y será lo mismo que si fuera quebrado solo, para sacar su raíz.

676 Segundo: Saquese la raíz quadrada del numerador, y denominador, haciendo quebrado, el qual será la raíz quadrada que se busca.

677 Tercero: Si los terminos del quebrado no tuvieren raíz, examinese si el mismo quebrado en otros terminos puede tener raíz justa multiplicando los terminos entre sí, y sacando raíz quadrada del producto, la qual si es justa sin sobrar algo, es señal que el quebrado se puede reducir à otros terminos quadrados. Lo mismo se sabrà partiendo el numerador por el denominador; y viendo si del quociente se puede sacar raíz quadrada justa. Reduzgase el quebrado à los minimos terminos (150), y estos serán quadrados.

678 Quarto: Si el quebrado no tuviera raíz justa, ni se pudiere reducir à terminos quadrados, se sacarà la raíz de cada termino con su quebrado, y reducidos los enteros de la raíz al quebrado del residuo se reducirán à un comun denominador (154), y de los numeradores se formará un quebrado, que será la raiz proxima Dificultosos son estos preceptos, y asi es preciso que los declarèmos con los exemplos.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz deste quebrado 36. 49. avos. Saquese la raíz quadrada de cada termino, haciendo quebrado, que será seis septimos el qual es la raíz deseada. Asi mismo, si se ha de sacar raíz de este otro quebrado 4. 100. avos, sacando raíz de cada termino será dos decimos.

Exemplo II.

Si se ha de sacar raíz quadrada de 5. y 1. 16. avos, reducidos los enteros al quebrado serán 81. 16. avos. Saquese la raíz quadrada de cada termino, y será nueve quartos, ò 2. y un quarto. Asi mismo, para sacar raíz quadrada de 72. y un quarto, reduzganse los enteros al quebrado, y serán 289. quartos. Saquese la raíz quadrada de cada termino, que será el quebrado 17. medios; esto es, 8. y un quarto,

Exemplo III.

Para sacar la raíz quadrada de este quebrado 2. 18. avos, se examinará primero si se puede reducir à terminos quadrados, porque del modo que está expresado no tiene los terminos quadrados. Multipliquese el numerador 2. por el denominador 18. y porque el producto 36. tiene raíz quadrada justa es señal que el dicho quebrado se puede reducir à terminos quadrados. Reduzgase, pues, à los minimos (150), y será un noveno en terminos quadrados. Ahora saquese la raíz quadrada del numerador, y denominador, que es un tercio.

Exemplo IV.

Se ha de sacar raíz quadrada de 6. y dos octavos. Reduzganse los enteros al quebrado (162), y será 50. octavos, el qual no consta de terminos quadrados; pues examinese multiplicando el numerador 50. por el denominador 8. y pues el producto 400. tiene raíz quadrada justa, es señal que el dicho quebrado se puede reducir à terminos quadrados, la qual reduccion se hará, reduciendole à los minimos terminos (150), y será 25. quartos. Ahora, pues, ya tiene los terminos quadrados. Saquese la raìz quadrada de cada termino, y será cinco medios, ò dos y medio.

Exemplo V.

Se ha de sacar raìz quadrada deste quebrado seis novenos. Porque no consta de ambos terminos quadrados, examinese si los puede tener, multiplicando 6 por 9. y pues el producto 54. no tiene raìz quadrada justa, es señal que el dicho quebrado no puede reducirse à terminos, que los dos sean quadrados; y asi no tendrá raìz verdadera. Pues para hallar una raìz proxima, saquese las raíces de cada termino, por los Problemas antecedentes, y serán 2. y dos quintos la del numerador, y 3. la del denominador. Reduzganse las dos raìces à quebrados, los quales seràn $\frac{12}{5}$, y $\frac{3}{1}$. Estos quebrados se reducirán à un comun denominador (154) $\frac{21}{5}$, y $\frac{15}{5}$, de cuyos numeradores 12. y 15. se ha de hacer quebrado en esta forma: El numerador del quebrado, que es raìz del numerador 6. serà numerador; y el numerador del quebrado, que es raìz del denominador 9. ha de ser denominador asi $\frac{12}{15}$. y esta es la raìz algo proxima.

Exemplo VI.

Para sacar raìz quadrada deste numero 6. y cinco septimos, se reducirán primero los enteros à su quebrado, y será el quebrado $\frac{47}{7}$; y pues no consta de terminos quadrados, ni los puede tener, porque el producto 329. de los terminos 47. y 7. no tiene raìz quadrada justa, saquese la raìz proxima del numerador 47. que será 6. y 11. 13. avos.

Saquese asi mismo la raiz proxima del denominador, y serà 2. y tres quintos. Reduzganse los enteros de estas raizes à sus quebrados (162), y seràn 89. 13. avos, y 13. quintos. Ahora reducidos à un comun denominador seràn 445. 65. avos. 269. 65. avos. Formese quebrado de los numeradores en la forma sobredicha en el exemplo antecedente, que serà la raiz algo proxima 445. 169. avos.

Demonstracion.

Que el numero entero se haya de reducir á su quebrado quando se ha de sacar raiz de entero y quebrado, es manifiesto; porque sino se reduxera avria de sacar dos raizes, la una del entero, y la otra del quebrado.

Que la raiz quadrada de un quebrado que consta de numeros quadrados sea quebrado, consta claramente; porque como el quebrado necesariamente se ha de expresar con dos numeros, es preciso que con otros tantos se declare la raiz. A mas, que la raiz multiplicandose á sí misma produce al quebrado: Luego si el quadrado consta de dos terminos (pues es quebrado) es preciso que prevengan de la multiplicacion de otros dos terminos, cada uno per sì mismo: Luego la raiz quadrada de un quebrado, tambien es quebrado.

Que sacando raiz de cada termino de un quebrado de terminos quadrados sea la verdadera raiz, consta por lo que acabamos de decir; porque multiplicando cada termino de la raiz por sì mismo, se produce el quebrado quadrado. Tambien porque en el quebrado, un quadrado, que es el numerador, dice respeto, ò relacion á otro quadrado, que es denominador: Luego la raiz del numerador tambien ha de decir respeto á la raiz del denominador.

Que un quebrado quadrado se pueda expresar con terminos no quadrados, es manifiesto, porque qualquier quebrado se puede declarar por otros terminos, multiplicandole por qualquier numero: Luego si consta de terminos quadrados, y se multiplica por un numero no quadrado, saldrá un quebrado igual, pero no tendrá los terminos quadrados.

Que el exámen para conocer si se puede reducir á terminos quadrados sea legitimo, lo demuestro asi: En el exemplo 3. multiplicando el 2. al 18. produce al quadrado 36. cuya raiz 6. multiplicandose á sì misma produce tambien al 36 seràn continuamente proporcionales 2. 6. 18. porque el producto de los extremos es igual al quebrado del medio (300): Luego los numeros 2. y 18. son planos semejantes, pues que entre ellos hay un medio proporcional. Y como los planos semejantes tienen entre sí la razon de un quadrado à otro, avrà dos quadrados en la misma razon de 2. à 18. y asi, el dicho quebrado se podrà reducir à otro quebrado igual, que conste de terminos quadrados, los quales son los minimos terminos.

Que dividiendo el numerador por el denominador, y sacando raíz quadrada justa del quociente, sea señal de que los terminos son quadrados, es manifiesto, si consideramos al quebrado como razon, porque el dicho quociente será el denominador de la razon, y como este sea semejante, y declare la dicha razon, si tiene raíz quadrada, tambien la podrá tener la razon, ò quebrado.

Ultimamente, que el modo de sacar raíz algo proxima de un quebrado que no tiene terminos quadrados, como en el exemplo 6. sea proximo, lo pruevo asi: Las raíces del numerador, y denominador, reducidas à sus quebrados son 89. 13. avos, y 13. quintos, las quales reducidas à un comun denominador tienen entre sí la razon de los numeradores (140): Luego haciendo quebrado de los numeradores en la forma referida, saldrá un quebrado igual à los quebrados sobre escritos; esto es, el numerador de este quebrado ultimo tendrá la misma razon à su denominador, que el quebrado 89. 13. avos à 13. quintos, y como estos expresan la raíz, tambièn la declarará aquel, pero no la verdadera, porque el quebrado de quien se sacó raíz era irracional.

El examen es el mismo que en los Problemas antecedentes, y asi por no alargarme en cosas superfluas no lo repito.

CAPITULO TERCERO.

DEL NUMERO CUBICO, Y SU RAIZ

NUmero cubico es el que proviene de la multiplicacion de un quadrado por su raíz; como si el quadrado 9. se multiplica por su raíz 3. sale el cubo 27. ò es el producto de un numero puesto tres veces; como si el 4. se escribe tres veces asi 4. 4. 4. y continuamente se multiplica, nace el cubo 64. Raíz cubica es aquel numero que se multiplica para producir al cubo. Ahora pondremos brevemente algunos. Theoremas, correspondientes à los del capitulo antecedente.

THEOREMA I.

LA RAIZ CUBICA DE UN NUMERO, QUE TIENE UNO, dos, ò tres guarismos; es solo un guarismo; la de un numero de quatro, cinco, ò seis guarismos, tiene dos guarismos; la de siete, ocho, ò nueve guarismos, consta de tres guarismos, &c.

679 ES lo mismo que decir, que qualquier numero cubico que está entre 1. 1000. tiene un guarismo por raíz. El cubo

que está entre 1000. y 1000000. tiene su raìz dos guarismos. El que está entre 100000. y 1000000000. consta su raìz de tres guarismos, y asi de los demás.

Porque el 10. es la raìz menor de las que tienen dos guarismos, y su cubo es 1000. Luego si hay algun cubo menor que 1000. tendrá por raíz un numero menor que 10. que enteros no puede ser menor que tener un guarismo solo. Asi mismo, el 100. es la raìz menor de las que tienen tres guarismos, cuyo cubo es 1000000. Luego si hay un cubo menor hasta 100. inclusive, su raìz tambien será menor, y por consiguiente tendrá un guarismo menos que son dos solos, &c.

Consectario.

680 De aqui consta, que si un qualquier numero se divide de tres en tres guarismos; comenzando de mano derecha ácia la izquierda, en cada miembro estará escondido un cubo; y asi, su raìz tendrá tantos guarismos, quantos fueren los miembros.

THEOREMA II.

SI UN NUMERO SE DIVIDE EN DOS PARTES, EL CUbo del todo es igual á los cubos de las partes, y à tres productos de la multiplicacion de la primer parte, por el quadrado de la segunda; mas à otros tres productos del quadrado de la primer parte, por la segunda.

Exposicion.

681 SEa el numero 24. dividiendo en 20. y en 4. Digo, que el cubo 13824. de todo el numero 24. es igual à los cubos 8000. y 64. de las partes 20. y 4. al producto 320. tresdoblado de la primera parte 20. por el quadrado 16. de la segunda, juntamente con el producto 1600. tresdoblado del quadrado 400. de la primera parte, por la segunda. Asi mismo, si el numero 426. se divide en dos partes 400. y 26. el cubo 77308776 de todo el numero, es igual à los cubos 64000000. y 17576. de las partes, y à tres productos 270400. de la multiplicacion de la primera parte 400. por el quadrado 676. de la segunda 26. juntamente con otros tres productos 4160000. de la multiplicacion del quadrado 260000. de la primera parte 400. por la segunda 26.

8000	64000000
64	17576
320	270400
320	270400
320	270400
1600	4160000
1600	4160000
1600	4160000
13824	77308776

De-

Demonstracion.

En este Theorema está fundada la regla de sacar raíz cubica, el qual demuestran algunos por Geometría, y otros por arte mayor, valiendose de los *Binomios*. Pero la demonstraré por el mismo multiplicar, atendiendo tambien al Theorema 3. del cap. 2. deste libro. Y para que la demonstracion no sea puramente abstracta, me valdré del primer exemplo.

Multiplicando la raìz à su quadrado se engendra el cubo, como se dixo arriba. Pues multipliquese el 24. por sì mismo, para hacer su quadrado en la forma que se dixo en el dicho Theorema 3. y saldrán los quadrados 16. y 400. de las partes, y dos rectangulos 80. y 80. de las mismas. Ahora todo esto se ha de multiplicar por el mismo 24. para hacer el cubo. Multiplicando, pues, el 4. del 24. por el quadrado 16. nace el cubo 64. de una la parte 4. Multiplicando el mismo 4. al rectangulo 80. sale el sólido (que se llama Paralelepipedo) 320. que provino de la multiplicacion de 4. por 20. y de su producto 80. otra vez por el 4. esto es, provino de la multiplicacion continua destos tres numeros 20. 4 4. y como multiplicando 4. por 4 sale quadrado, y este se ha de multiplicar por 20. que es la otra parte de la raíz 24. es manifiesto, que multiplicando la primera parte 20. del 24 por el quadrado de la segunda 4. sale el sólido 320. Asi mismo multiplicando el 4. del 24 al otro rectangulo 80. sale el mismo sólido 320. el qual por la misma razon es tambien el producto de la primer parte 20. por el quadrado de la segunda 4. Con que ya tenemos dos productos de la primera parte, por el quadrado de la segunda.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 16 \\ 80 \\ 80 \\ 400 \\ \hline 24 \\ 64 \\ \hline 320 \\ 320 \\ 1600 \\ 320 \\ 1600 \\ 1600 \\ 8000 \\ \hline 13824 \end{array}$$

Multipliquese ultimamente el mismo 4. del 24. por el quadrado 400. y saldrá el sólido, ò Paralelepipedo 1600. el qual es el producto de la segunda parte 4. por el quadrado de la primera 20. Con que ya tenemos un producto del quadrado 400. de la primera parte 20. por la segunda 4. y con esto están multiplicados los numeros que componen al quadrado del 24. por la segunda parte 4. Pasemos ahora à multiplicar los mismos por la primer parte 20. del mismo 24.

Mul-

Multiplicando , pues el 20 ò el 2. en segundo lugar al quadrado 16. produce al sólido 230 el qual es el producto de la primer parte 20. por el quadrado de la segunda 4. y asi ya tenemos tres productos de estos. Multiplicando aora el 20. por el rectangulo 80. sale el sólido 1600. el qual es el producto del quadrado de la primer parte 20. por la segunda 4 porque proviene de la multiplicacion continua destos tres numeros 4 20. 20.y asi es lo mismo que multiplicar 20. por 20. y el quadrado 400. (que es de la primer parte) multiplicar por la segunda 4.Con que ya tenemos dos productos destos; y si el mismo 20.se multiplica otra vez por el otro 80. saldrá el mismo sólido, y tendrèmos tres productos destos. Ultimamente , multiplicando el 20. por su quadrado 400. sale el cubo 8000. y sumandolo todo sale el cubo total 13824. del numero 24.

Ahora solo falta probar , que multiplicando deste modo no se muda el producto total. La razon es, porque quadrando el 24. en la forma sobredicha , salen los dos quadrados, y rectangulos (guardando el orden numerico de los lugares de los guarismos , pues por eso se ponen los zeros) los quales son partes del quadrado total ; y multiplicando los dichos quadrados , y rectangulos por el 24. es lo mismo que multiplicar el quadrado total, que es hacer cubo ; porque como consta por el mismo multiplicar , un numero no se multiplica todo junto , sino por partes , guardando las decenas para sumarlas con el producto siguiente , las quales aqui no se guardan , sino que se escriben en su lugar competente : Luego lo mismo es multiplicar deste modo , por partes , que por el modo ordinario.

Consectarios.

682 De lo dicho se infiere , que si cada parte del numero 24. se toma sencillamente , no atendiendo al lugar ; esto es , no se divide en 20. y 4 sino en 2. y 4 saldrà lo mismo, mientras que los prductos, ò sólidos se pongan una, ò dos casas mas adelante , dexando los lugares vacìos donde hay zeros, porque estos solo sirven de llenar lugar.

683 Si à un numero cubico , como al 8. se añade el triplo 6. de su raíz 2. mas el triplo 12. del quadrado 4. de la misma raìz , y mas la unidad , sale el cubo immediate mayor en numeros enteros ; esto es, que la raìz sea una unidad mayor. Porque si à la raìz 2. del cubo 8. se añade una unidad, será 3. y si el 3. se divide en dos partes 2. y 1. el cubo de toda la raìz 3 indivisa será igual al cubo de la primer parte 2. que es 8. mas à tres sólidos dos del quadrado de la primer parte por la

8
6
12
1
——
27

segunda (la qual por ser la unidad, no aumenta la multiplicacion, asi basta añadir los tres quadrados de la raìz 1.) mas á otros tres sólidos del quadrado de la segunda parte por la primera, (el qual quadrado por ser la unidad, no aumenta la multiplicacion, y asi basta añadir el triplo de la primera parte, que es la raìz del cubo 8.) y mas el cubo de la segunda parte 1. que es 1. Luego si à un cubo se añade el triplo del quadrado de su raíz, mas el triplo de la misma raìz, y mas la unidad, saldrà el cubo immediate mayor.

Raíces	Cubos
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000
11	1331
12	1728
13	2207
14	2744
15	3375
16	4096

684 De aqui nace un modo facil para hacer de nuevo, ó continuar la tabla de los numeros cubicos. Sumando el cubo 1. con el triplo del quadrado de su raìz, que es 3 mas con el triplo de la misma raìz, que tambien es 3. y mas con la unidad, sale el cubo 8. de la raìz cubica 2. Sumando el cubo 8. con el triplo 12. del quadrado 4. de su raìz 2. mas con el triplo 6. de la misma raíz, y con la mitad sale el cubo immediate siguiente 27. cuya raìz es 3. y asi de los demás.

PROBLEMA I.

SACAR LA RAIZ CUBICA DE UN NUMERO ENTERO, que tenga menos, que quatro guarismos.

685 SAcar la raíz cubica de un numero, es hallar otro, que multiplicando à su quadrado, produzga al numero de quien se saca raìz. Es mas dificil que la raìz quadrada, y por eso pide mayor atencion.

La raíz cubica de un numero, que conste de menos guarismos, que quatro, esto es, que tenga uno, dos, ò tres, necesariamente ha de tener un guarismo solo (679). Y asi busquese por la tabla antecedente, ò de memoria, el cubo proximo menor, ò igual al numero dado, del qual se restará, y si nada sobra, su raìz será la verdadera, pero si sobráre algo, pongase por numerador de un quebrado, cuyo denominador será la suma del triplo del quadrado de la raìz, del triplo de la misma raìz, y de la unidad; y la raíz con este quebrado,

ser

será algo proxima , pero menor que la verdadera.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz cubica de 64. Busquese en la tabla un cubo que sea igual , ò proxime menor , que el 64. y se hallará el 64. cuya raíz es 8. restese 64. de 64. y pues nada sobra , digo , que la raíz cubica verdadera de 64. es 8.

Exemplo II.

Para hallar la raíz cubica de 138. busquese en la tabla el cubo proxime menor , y se hallará 125. cuya raíz es 5. restese del 138. y quedan 13. que se han de poner por numerador de un quebrado; ahora para hallar el denominador , tripliquese el quadrado 25. de la raíz 5. y será 75. tripliquese la misma raíz , y será 15. Sumense 75. 15. y 1. y la suma 91. será el denominador ; con que la raíz algo proxima del 138. es 5. y 13. 19. avos.

Demonstracion.

El exemplo primero , por sí mismo , es manifiesto ; solo está la dificultad en el quebrado del exmplo segundo , la qual se hará llena siguiendo proporcionalmente lo que se dixo del quebrado de la raíz quadrada. El cubo 138. está entre los cubos 125. y 216. cuyas raíces 5. y 6. solo se diferencian en la unidad. Luego la diferencia de los cubos (que segun se dixo , es el triplo del quadrado de la raíz , mas el triplo de la misma raíz , y mas la unidad) ha de ser denominador de las partes que sobran , porque todo lo que el 138. excede al 125. es lo que se acerca al cubo 216. Luego ha de ser numerador , y su denominador la diferencia 91. de los dos cubos.

Examen.

686 Si la raíz es verdadera ; esto es , si no hay quebrado , multipliquese por su quebrado (que es cubicarla) , y el producto ha de ser igual al numero de quien se sacó raíz cubica. Y asi cubicando la raíz 4. en el primer exemplo ; salen 64. Pero si la raíz tiene quebrado , cubiquense los enteros de la raíz, y al cubo añadese el numerador del quebrado , ò el residuo , que es lo mismo ; la suma ha de ser igual al numero de quien se sacó raìz Y asi en el exemplo segundo cubicando al 5. salen 125. añadanse los 13. que sobran , y serán 138. Pero adviertase , que el residuo , ò numerador del quebrado , no ha de ser mayor que la suma del triplo del quadrado de la raìz , y del triplo de la misma raìz ; porque de otra suerte se habria de aumentar la raíz , alomenos una unidad.

PRO-

PROBLEMA II.

SACAR RAIZ CUBICA DE UN NUMERO ENTERO, QUE conste de mas que tres guarismos.

Preceptos.

687 PRimero: Dividase el numero con distinciones de tres en tres guarismos, comenzando de la derecha, hácia la izquierda, y quedará repartido en miembros; aunque el ultimo tenga uno, ò dos guarismos solos. Y tantos guarismos ha de tener la raíz, quantos fueron los miembros. Tirese una linea por encima del numero, sobre la qual se han de escribir los guarismos de la raíz, cada uno correspondiente à su miembro.

688 Segundo: Saquese la raíz cubica del primer miembro de mano izquierda, como si fuera solo por el Problema antecedente, y escribiendo sobre la linea, y su cubo debaxo del dicho miembro, restese, escribiendo el residuo debaxo. Advirtiendo, que ningun residuo puede ser mayor que el triplo del quadrado de la raíz, juntamente con el triplo de la misma raíz; porque en tal caso, se habria tomado la raíz menor, que lo justo.

689 Tercero: Para hallar el segundo guarismo, se abaxará el siguiente miembro, escribiendole al lado del residuo, para hacer el miembro total. Ahora tirense à parte seis lineas perpendiculares, de suerte, que distingan cinco espacios, ò colunas: En el primero, se escribirán estos numeros 3. y 3. uno encima del otro: En el segundo, se pondrá la raíz hallada, con un zero á la derecha, correspondiente al 3. inferior, y encima colateral al otro 3. se escribirá el quadrado de la raíz con el zero. Multipliquese cada 3. por el numero que tiene al lado, y los productos, se escribirán en el tercero espacio, y su suma, será el divisor. Dividase el miembro total por este divisor, pero no dando al quociente todo lo que cabe, sino atendiendo, á que la suma de los productos de los numeros del tercer, y quarto espacio, y mas el cubo del quociente, se pueda restar del miembro total, como ahora dirémos, y el quociente escribase en el espacio quarto, al lado del numero superior del espacio tercero; debaxo pongase su quadrado, y mas abaxo su cubo. Multipliquense los numeros del tercero, y quarto espacio, excepto los dos inferiores, escribiendo los productos en el quinto, cuya suma se restará del miembro total, y el residuo, se escribirá debaxo.

Quar-

690 Quarto: Abaxase el tercer miembro, poniendole al lado del residuo, y hagase la misma operacion, y deste modo continuando hasta el fin. Si sobra algo, se pondrá por numerador de un quebrado cuyo denominador, es el triplo del quadrado de la raíz, mas el triplo de la misma raíz, y mas la unidad como queda dicho en el Problema antecedente.

691 Quinto: Si el miembro que se divide, fuere menor que el divisor, ponga zero por guarismo de la raíz, y abaxando el miembro siguiente, prosigase la operacion como está dicho. Practiquemos estos preceptos.

Exemplo I.

Se ha de sacar la raíz cubica deste numero 21952. Dividase en miembros, comenzando de las unidades, ò de la derecha hácia la izquierda, y tirada la linea por encima, busque por la tabla antecedente (684) el mayor cubo que puede caber en 21. que es el primer miembro, el qual es 8. y su raíz 2. que se escribirá sobre la linea. Restese el 8. del 21. y quedará el residuo 13. á cuyo lado se escribirá el siguiente miembro para hacer el total 13952.

$$\begin{array}{r} 2\quad 8 \\ \hline 21{,}952 \\ 8 \\ \hline 13\,952 \\ 13{,}952 \\ \hline 00000 \end{array}$$

Ahora para hallar el otro guarismo de la raíz, se formarán las cinco colunas siguientes: En la pimera, se escribirá dos veces el 3. En la segunda, pongase la raíz 2. hallada hasta ahora con un zero, asi 20. enfrente del 3. inferior, y sobre la raíz 20. estará su quadrado 400. Multipliquese cada 3. de la primera coluna por su numero colateral, que es triplicar el quadrado de la raíz, y de la misma raíz, escribiendo los productos, ò triplos en la tercera coluna, cuya suma 1260. es el divisor. Dividase, pues, el miembro total 13952. por dicho divisor, y aunque siguiendo las reglas del partir, el quociente habia de ser 11. pero porque un miembro no puede tener dos guarismos de raíz, y tambien porque se ha de atender à la multiplicacion siguiente, no podrá ser el dicho quociente, sino 8 que se pondrá en la quarta coluna al lado del guarismo superior de la coluna tercera.

$$\left|\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right| \begin{array}{r}400\\20\end{array} \left| \underbrace{\begin{array}{r}1200\\60\end{array}}_{1260} \right| \begin{array}{r}8\\64\\512\end{array} \left| \underbrace{\begin{array}{r}9600\\3840\\512\end{array}}_{13952} \right|$$

Hecho esto, quadrese el 8. y su quadrado 64. escribase debaxo; cu-

cubiquese, y su cubo 512. escribase mas abaxo. Ahora multipliquese el 8. y su quadrado 64. por los numeros colaterales de la tercera coluna, sin multiplicar el cubo 512. y los productos escribanse en la coluna quinta debaxo los quales se pondrà el cubo 512. cuya suma 13952. restese del residuo total, y pues nada sobra, serà la raíz cubica verdadera 28.

Pero adviertase, que antes de escribir sobre la linea el guarismo mismo correspondiente al segundo miembro, ò à otros fuera del primero, serà conveniente concluír toda la operacion, hasta ver si la suma de los numeros de la coluna quinta, se pueden restar del miembro total; porque para hallar el quociente, no hay regla, sino tentando como el partir, y aun con mucha mas dificultad; pero hay estos dos señales: El primero, que si la dicha suma no se puede restar del miembro, es señal que el quociente se ha tomado mayor, y asi se habrá de repetir la operacion en los numeros de la quarta, y quinta coluna, tomando al quociente menor: El segundo, que si el residuo antes de abaxar el miembro siguiente, fuere mayor que la suma de los numeros de la coluna tercera; esto es, que es el divisor, se habrà tomado menor, y asi se ha de bolver à hacer la operacion, aumentando dicho quociente.

Exemplo, II.

Se ha de sacar raíz cubica deste numero 68430125. dividase en miembros de tres en tres guarismos, y porque los miembros son tres, avrá otros tantos guarismos en la raíz. Saquese la raíz cubica del miembro 68. buscando en la tabla el mayor cubo que puede caber en èl, y se hallarà el 64. cuya raíz cubica es 4. que se ha de escribir sobre la linea enfrente del miembro, y debaxo se pondrà el 64. restese el 64. del 68. y quedarà el residuo 4. à cuyo lado se podrà el otro miembro 430. para hacer el miembro total 4430.

Formense las cinco colunas como antes, escribiendo en la primera dos veces al 3. y en la parte inferior de la segunda, pongase la raíz 4. hallada hasta ahora con un zero, y encima su quadrado 1600. al lado del 3. superior. Multipliquense los numeros de la primera coluna por los de la segunda escribiendo los productos en la tercera, cuya suma 4920. será el

4 0 9 $\frac{12196}{503071}$

68,430,125
64

4430125
4417929

12196

di-

divisor. Dividase, pues, el miembro 4430. por 4920. y pues no se puede por ser mayor el divisor, es señal que el guarismo radical es zero, el qual se escribirá sobre la linea.

3	1600	4800	0	
3	40	120	00	
			000	
		4920		

Ahora para hallar el guarismo correspondiente al otro miembro, abaxese el dicho miembro, escribiendole al lado del miembro antecedente, y será el total miembro 4430125. y formense otras cinco colunas: En la primera se pondrá dos veces el 3. En la parte inferior de la segunda, se escribirá la raíz 40. hallada hasta aqui con un zero, y encima su quadrado; multipliquense los numeros de la primera, y segunda coluna, escribiendo los productos en la tercera, cuya suma 481200. será el divisor. Dividase el miembro 4430125. por este divisor, dando al quociente 9. tan solamente, aunque se le podia dar mas atendiendo à las reglas del partir, pero no si se considera lo siguiente. Pongase el quociente 9. en la coluna quarta, debaxo su quadrado 81. y mas abaxo su cubo 729. Multipliquense la raìz 9. y su quadrado 81. por los numeros colaterales de la tercera coluna, escribiendo los productos en la quinta, á los quales se añadirá el cubo 729. Y sumando las tres partidas, saldrá el numero 4417929. el qual se escribirá debaxo del dicho miembro, y hecha la resta, quedará el residuo 12196.

3	160000	480000	9	4320000
3	400	1200	81	97200
			729	729
		481200		
				4417929

El residuo 12196. se pondrá por numerador de un quebrado, cuyo denominador será la suma del triplo del quadrado de toda la raíz 409. mas del triplo de la misma raíz, mas una unidad; como se vé figurado.

Exemplo III.

Para sacar la raíz cubica deste numero 942056624690. se dividirá en miembros como lo enseña la formula; y buscando en la tabla (684) el mayor cubo que puede caber en el miembro 942. se hallará 729. cuya raíz es 9. que se ha de escribir sobre la linea correspondiente al dicho miembro, y debaxo pongase el dicho cubo para restarle, y quedará el residuo 213. á quien se juntará al lado el otro miembro, para hacer el total 213056.

9 8 0 3

942,056,624,690
729

213 056
212 192

864 624 690
864 624 627

63

Ahora para hallar el otro guarismo de la raíz, formense las cinco colunas, poniendo en la primera dos veces al 3. y en la segunda la raíz hallada 9. con un zero, y encima su quadrado. Multipliquense los numeros de la primer coluna por los de la segunda, escribiendo sus productos en la tercera, cuya suma 24570. será el divisor. Dividase pues el dicho miembro por este divisor, dando al quociente 8. el qual se escribirá en la coluna quarta, y debaxo su quadrado 64. y cubo 512. Multipliquese este quociente, y quadrado por los dos numeros de la coluna tercera, escribiendo los productos en la quinta, à los quales se añadirá el cubo 512. y la suma 212192. se restará del miembro, y quedará el residuo 864. à cuyo lado se abaxará el otro miembro 624. para hacer el total 864624.

3	8100	24300	8	194400
3	90	270	64	17280
		24570	512	512
				212192

Para hallar el otro guarismo radical, formense otra vez las cinco colunas, escribiendo en la primera dos veces al 3. En la segunda; la raíz hallada hasta aqui con un zero, que será 980. y encima pongase su quadrado 960400 que se multiplicarán por los dos numeros 3. escribiendo los productos en la tercer coluna, cuya suma 2884140. será el divisor. Partase pues el miembro sobredicho por él, y pues no se puede por ser el di-

3	960400	2881200	0	
3	980	2940	00	
		2884140	000	

visor mayor; Pongase zero por guarismo radical, y abaxase el otro miembro 690. para hacer al miembro total 864624690.

Ultimamente, para hallar el otro guarismo, formense otras cinco colunas, escribiendo en la primera dos veces al 3. En la segunda, la raìz hasta ahora hallada con un zero 9800. y encima su quadrado 96040000. Multipliquense por los numeros de la primer coluna, escribiendo los productos en la tercera; cuya suma 288149400. es el divisor: Divídase el miembro 864624690. por este divisor, dando 3. al quociente, el qual se escribirá en la quarta coluna, poniendo debaxo su quadrado, y cubo, como se vé en la fórmula. Multipliquense dicho quociente, y quadrado por los dos productos de la tercera coluna, escribiendo los productos en la quinta, y mas el cubo 27. La suma de las tres partidas desta quinta coluna, restese del miembro total, y quedará el residuo 63. el qual se pondrá por numerador de un quebrado, cuyo denominador es el triplo del quadrado de toda la raìz 9803. mas e! triplo de la misma raìz, mas una unidad, como se hizo antes.

3	96040000	288120000	3	864360000
3	9800	29400	9	264600
			27	27
		28814900		864624627

Demonstracion.

Contiene muchas partes que demonstraré de por sì, valiendome del exemplo 2. *Primo*: Que el numero se haya de dividir en miembros de tres en tres guarismos, y que la raìz haya de tener tantos guarismos, quantos fueren los miembros, consta por el Theorema 1. deste capitulo.

Segundo: Que la raíz esté bien sacada, siguiendo la regla sobredicha se funda en el Theorema 2. deste capitulo, deste modo: Considerémos al primer miembro solo 68. el qual atendiendo al lugar de los guarismos, es 68000000. pero no es necesario poner los zeros, porque tambien se quitan de su raíz, y asi basta considerar al 68. solo. El mayor cubo que cabe en 68. es 64. cuya raíz cubica, es 4. y sobran otros 4. por primer residuo, al qual añadiendo el segundo miembro 430. serà 4430. el miembro total.

En este miembro estàn incluídos tres sólidos comprehendidos, ò que provienen de la multiplicacion del quadrado de la raíz hallada 4. y del otro guarismo que se hallará por raíz; mas otros tres sólidos, que provienen de la multiplicacion de la raíz hallada por el quadrado del guarismo que se busca; y mas un cubo del mismo guarismo que se busca; porque si consideramos los dos guarismos 4. y o. de la raíz, correspondientes à los miembros 68., 430. El cubo 94000. de los dos considerados, como un numero 40. el qual cubo es el mayor que se contiene en los dos miembros 68.,430. (de la diferencia, ò residuo de dicho cubo à los dichos miembros, ahora no se hace caso, sino en la operacion siguiente) es igual à los cubos 64000. y o. de las partes, mas à tres sólidos de la multiplicacion del quadrado 1600. del guarismos 4.ò de la primer parte 40. (estando divida la raìz en dos partes como se dixo en el Theorema 2. deste capitulo) por la segunda parte zero mas á otros tres sólidos de la multiplicacion de la primer parte, por el quadrado de la segunda, como todo consta por el Theorema 2. deste capitulo.

Esto supuesto, queda manifieta la razon, porque se pone dos veces el 3. en la primer coluna de las cinco, y porque se escribe la raìz, y su quadrado en la segunda (el zero se añade à la raìz, para guardar el lugar numerico de los guarismos, porque la raìz del primer miembro, pertenece à las decenas) la razon, como digo, es; porque multiplicando la raìz, y su quadrado por 3. se producen el triplo del quadrado, y el triplo de la raìz, que vienen à ser los lados, y las bases de los seis sólidos esto es, la raìz triplicada, es la lado de la suma de los tres sólidos producidos de la multiplicacion de la primer parte de la raìz por el quadrado de la segunda, y el quadrado triplicado, es la base de la suma de los otros tres sólidos producidos de la multiplicacion del quadrado de la primer parte por la segunda que se busca, y asi, la suma de los numeros de la tercer coluna, será la suma de las tres bases, y lados referidos.

Pues como el miembro 4430. es igual à los seis sólidos, y mas al cubo de la ségunda parte, ò guarismo que se busca, si se parte por la suma de la tercer coluna, de suerte, que la base triplicada, se multiplique por el guarismo que se busca, para hacer la suma de unos tres sólidos, y la raìz triplicada, se multiplique por el quadrado del mismo guarismo, ò parte que se busca; y à mas desto, se añade el cubo del dicho guarismo que se busca: la suma destas tres partidas de la quinta coluna, se ha de poder restar del dicho miembro; pero como la particion no se puede hacer, es evidente, que el guarismo que se busca ha de ser zero; porque siendo la suma de la coluna tercera mayor que el miembro sobredicho, serà tambien mucho mayor la suma de la coluna quinta, y asi no podrà comprehenderse en dicho miembro; y por consiguiente habrá de ser zero el guarismo que se busca, y el dicho miembro, se habrá de tomar por residuo, à cuyo lado se debe escribir el otro miembro 125. para hacer el total 4430125.

Ahora si consideramos à la raíz (que tiene tres guarismos) dividida en dos partes, de las quales la primera consta de dos guarismos 40. hasta aqui hallados, y la segunda, es el guarismo que se busca; serà el cubo de todo igual á los cubos de las partes, y á los seis sólidos mencionados: Luego poniendo la una parte de la raíz 40. con un zero asi, 400. para guardar el orden de los Lugares numericos, y encima su quadrado en la segunda coluna, y multiplicando por los numeros de la primera, que es triplicar, saldrán los triplos de las bases de unos tres sólidos, y los triplos de los lados de los otros tres sólidos, cuya suma será el divisor, porque partiendo el sobredicho miembro) que incluye los seis sólidos, y un cubo del guarismo que se busca) por esta suma, saldrá el guarismo que se busca, atendiendo à que se puedan hacer las multiplicaciones de los dos numeros de la tercera coluna, por los dos de la quarta, y añadir al cubo de la raíz, ò quociente que se busca; y asi los tres numeros de la coluna quinta, serán la suma de los tres sólidos, mas la otra suma de los otros tres sólidos, y el cubo; cuya suma se ha de poder restar del miembro; y lo que quedáre, será numerador de un quebrado, cuyo denominador ha de ser la suma del triplo del quebrado de toda la raíz, mas el triplo de la misma raíz, mas la unidad, como se dixo en la demonstracion del Problema antecedente.

Este modo de sacar raíz cubica haciendo cinco colunas, es del P. Zaragoza en su Arithmetica universal, el qual es muy facil, y claro, y se puede aplicar á la raíz quadrada, como se verá en el capitulo siguiente.

PROBLEMA. III.

SACAR LA RAIZ CUBICA DE ENTERO, Y QUEBRADO, ò de quebrado solo.

Preceptos.

692 PRimero: Si se ha de sacar raíz de numero entero, y quebrado, reduzgase el entero, ò enteros à su quebrado, (162) y con esto se sacará la raíz por los preceptos siguientes, como si fuera quebrado sòlo.

693 Segundo: Saquese la raíz cubica del numerador, ò denominador por los Problemas antecedentes, haciendo quebrado, y será la raíz que se busca.

694 Tercero: Si los terminos del quebrado no tuvieren raíz cubica justa, (aunque alguno la tenga) examinese si el mismo que-

quebrado expresada en otros terminos, puede tener raíz cubica exacta, lo qual se sabrá multiplicando el quadrado del numerador, por el denominador, y viendo si el producto tiene raíz cubica justa, ó dividiendo el numerador, por el denominador, y examinando si el quociente tiene raíz cubica exacta. Y si la tuviere, reduzgase el quebrado à los minimos terminos, (150) los quales serán cubicos.

695 Quarto: Si el quebrado no tuviere raíz justa, ni se pudiere reducir à terminos cubicos, saquese la raíz cubica de cada termino con su quebrado, y reduciendo los enteros à sus quebrados, se reducirán à un comun denominador, (154) se formará un quebrado de los numeradores, y será la raíz cubica algo proxima.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz cubica de 8. 27. avos. Saquese su raíz de cada termino, y será dos tercios. Asi mismo para sacar raíz cubica de 64. 512. avos. Sacando la raíz cubica del 64. y del 512. se hallará el quebrado quatro octavos por raíz cubica.

Exemplo II.

Para sacar la raíz cubica de 11. Y 25. 64. avos, reduzganse los enteros à su quebrado, y serán 729. 64. avos. Ahora saquese la raíz cubica del numerador, y denominador, la qual será nueve quartos.

Exemplo III.

Para sacar la raíz cubica de 2. 16. avos, por quanto no consta de terminos cubicos, examinaré si se puede reducir à otro quebrado igual, pero que tenga los terminos cubicos, multiplicando el quadrado 4. del numerador 2. por el denominador 16. y sacando raíz cubica del producto 64. y porque la tiene cabal, que es 4. diré que el dicho quebrado, se puede reducir à terminos cubicos. Lo mismo puedo conocer dividiendo el numerador 2. por el denominador 16. y pues del quociente un octavo, puedo sacar raíz cubica justa, que es un medio, diré asi mismo, que se puede reducir. Reduzgo, pues, el dicho quebrado à los minimos terminos, y será un octavo en terminos cubicos, cuya raíz cubica es un medio.

Exemplo IV.

Se ha de sacar raíz cubica de 20. y 3. 27. avos. Lo primero; se reducirán los enteros al quebrado, y será 543. 27. avos. Lo segundo examinese si se puede reducir á terminos cubicos (es necesario que los dos sean cubicos) multiplicando el quadrado 294849. del numerador 543. por el denominador 27. y pues del producto 7960923. no se puede sacar raíz cubica justa, es señal que no se puede reducir á ter-

terminos cubicos. Y asi se habrá de sacar la raíz algo proxima por el precepto quarto: sacando la raíz del numerador 543. que es 8. y 31. 217. avos. Saquese asi mismo la raíz cubica del denominador 27. la qual es 3. Ahora reduzganse los 8. de la raíz à su quebrado, y serán 1767. 27. avos, reduzganse tambien los 3. (que es raíz del denominador) à quebrado asi $\frac{3}{1}$. Ultimamente estos dos quebrados, se han de reducir á un comun denominador, y serán 1767. 27. avos, y 81. 27. avos, hagase quebrado de los numeradores deste modo $\frac{1767}{81}$. y este será la raíz algo proxima.

Demonstracion.

La demonstracion, es la misma que la que dimos en el Problema 3. del capitulo antecedente, solo con aplicarla à los numeros, y raíces cubicas. El examen de un quebrado que no consta de terminos cubicos, para vér si se puede reducir à otro igual, pero de terminos cubicos, depende de sacar dos medios porporcionales, como lo enseñarémos en la Parte 2. deste libro, donde demonstrarémos, que multiplicando el un extremo por el quadrado del otro, y sacando raíz cubica del producto, es el un medio proporcional; y como si entre dos numeros hay dos medios proporcionales, son sólidos semejantes, los quales son proporcionales à algunos cubos. Si entre los terminos de un quebrado pueden caer dos medios, y serán sólidos semejantes, habrá dos cubos en la misma razon, que serán los numeros minimos en aquella razon, y por consiguiente el quebrado dellos, será igual al que está propuesto, y constará de terminos cubicos.

CAPITULO QUARTO.

DE LAS DEMAS POTESTADES, y sus raíces.

LAs Potestades, y sus raíces del cubo arriba, bastantemente quedan explicadas al principio deste libro. Ahora daré un methodo universal para sacar raìz de qualquier potestad, reduciendolo solamente à la practica sin demonstracion; porque facilmente se puede sacar de lo que está dicho hasta aqui; y no he de cansar al Aristhmetico en demonstraciones prolixas de cosa que no pertenece al arte menor, teniendo su lugar en el mayor, que siendo Dios servido espero sacar à luz.

PROBLEMA I.

SACAR LA RAIZ DE QUALQUIER POTESTAD.

696 Para sacar la raíz de qualquier Potestad, es conveniente tener hechas dos tablas, la una de las Potestades de los numeros digitos, que sirve para hallar el guarismo radical del primer miembro de mano izquierda; y la otra de los numeros propios de cada Potestad, que se han de poner en la primera coluna de las cinco, como en la extraccion de raíz cubica, para hallar los guarismos radicales de los demás miembros.

697 La primer tabla contiene los Potestades, y sus raíces en numeros digitos, y aunque solamente se ponen seis Potestades, pero con facilidad podrá el Arithmetico continuar la tabla en otras muchas, multiplicando las raíces por sí mismas para los quadrados: Multiplicando las raíces por sus quadrados, para hallar los cubos: Multiplicando las raíces por sus cubos, para los quadrado quadrados; y asi de las demás, segun se advirtió arriba en la formacion de las Potestades.

Raíces	Quadrados	Raíces	Quad. Quad.	Raíces	Cubo Cubos.
1	1	1	1	1	1
2	4	2	16	2	64
3	9	3	81	3	729
4	16	4	256	4	4096
5	25	5	625	5	15625
6	36	6	1296	6	46656
7	49	7	2401	7	117649
8	64	8	4096	8	262144
9	81	9	6561	9	531441

Raíces	Cubos	Raíces	Quad. Cubos	Raíz.	Quad. Q. Cub.
1	1	1	1	1	1
2	8	2	32	2	128
3	27	3	243	3	2187
4	64	4	1024	4	16384
5	125	5	3125	5	78125
6	216	6	7776	6	279936
7	343	7	16807	7	823543
8	512	8	32768	8	3097152
9	729	9	59049	9	4782969

698 La seg[illegible] la tabla, que llaman *Triangular*, por estar en forma de trian[illegible] enseña los numeros que [illegible] poner en la primer col[illegible] las cinco, para hallar los [illegible]arismos radicales en la operacion segunda, tercera, quarta, &c. Esto es, para sacar raíz quadrada, se ha de tomar el 2. para cubica 3. y 3. para quadrado quadrado 4. 6. 4. &c. Su fabrica proviene de la multiplicacion del numero 11. dexando los extremos del producto, y tomando los medios; como si el dicho 11. se multiplica por sí mismo, saldrá el quadrado 121. Dexense, pues, los extremos 1. y 1. y quedará el 2. por numero perteneciente al quadrado. Multipliquese el producto 121. por 11. (que es cubicar el 11.) y saldrá el producto 2331. quitando los extremos, quedan los medios 3. y 3. proprios del cubo. Multipliquese el 1331. por 11. y del producto 14641. quitando los extremos, quedarán 464. para el quadrado quadrado, y asi de los demás.

				1	1
				1	1
				1	1
			1	1	
			1	2	1
				1	1
			1	2	1
		1	2	1	
		1	3	3	1
				1	1
		1	3	3	1
	1	3	3	1	
	1	4	6	4	1
				1	1
	1	4	6	4	1
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Preceptos.

699 Esto supuesto, para hallar la raíz de qualquier potestad, dividase con distinciones de tantos en tantos guarismos, como fuere el exponente de la potestad, ò primer numero de los de la tabla triangular, esto es, el quadrado de dos en dos; el cubo de tres en tres; el quadrado quadrado de quatro en quatro, &c. comen-

2.	Quadrado.
3. 3.	Cubo.
4. 6. 4.	Quadrado quadrado.
5. 10. 10.5.	Quadrado cubo.
6. 15. 20. 15.6.	Cubo cubo.
7. 21.35.35.12.7.	Quad. quad. cubo.

zando siempre de la derecha àcia la izquierda, aunque en el ultimo miembro no haya mas que un guarismo.

700 Para hallar la raíz correspondiente al primer miembro de mano izquierda, busquese en la tabla de las potestades (696) la mayor potestad que puede cabar en el tal miembro, y escribiendola debaxo del miembro, y encima la raíz, restese para hallar el residuo, à cuyo lado se escribirá el segundo miembro, para hacer al miembro total.

701 Para hallar la raíz del segundo miembro, se formarán cinco colunas, como se hizo en la extraccion de la raíz cubica, y será conveniente tenerlas hechas en una falsa regla, de suerte que estén bien anchas, en particular la tercera y quinta, y deste modo no será necesario formarlas cada vez. En la primer coluna se pondrán los numeros de la tabla triangular, correspondientes à la potestad de quien se saca raíz. En la segunda estará la raíz hasta entonces hallada con un zero, la qual se escribirá en la parte inferior; esto es, correspondiendo al numero inferior de la primer coluna, y sobre ella se pondrán sus potestades quadrado, cubo, &c. corespondiendo à los otros numeros de la primer coluna, tantos quantos numeros huviere. Multipliquense los numeros de la primer, y segunda coluna, y escribanse los productos en la coluna tercera, cuya suma es el divisor, y por esto esta coluna se puede llamar de los ***Divisores***. En la quarta coluna se pondrá el quociente, que es el guarismo radical que se busca escribiendole en la parte superior, y debaxo se escribirán sus potestades colaterales à los numeros de la coluna tercera, hasta aquella de la misma especie de la que se saca raíz. Multipliquense los numeros de la tercera, y quarta coluna, exceptando el divisor y la ultima potestad, y los productos se escribirán en la quinta coluna, debaxo de los quales estará la ultima potestad de la quarta coluna; cuya suma se restará del miembro de quien se saca raíz, escribiendo debaxo el residuo, y abaxando el otro miembro, si le hay, para proseguir la operacion del mismo modo.

702 Si la potestad es irracional: esto es, si sobra algun residuo, se pondrá por numerador de un quebrado, cuyo denominador será el producto de la raíz; y sus potestades por los numeros de la tabla triangular propios de la tal potestad, y mas una unidad, como por los exemplos quedará todo manifiesto.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz quadrada deste numero 3864. Dividese en

miem-

miembros de dos en dos guarismos, porque el exponente del quadrado es 2. comenzando por la derecha. Búsquese el mayor quadrado que puede caber en el primer miembro de mano izquierda 38. y se hallará el 36. cuya raíz es 6. (597). Escribase la raíz 6. sobre la liena correspondienre al miembro 38. y el quadrado debaxo para hacer la resta, la qual hecha quedan 2. por residuo. Abaxese el segundo miembro 64. y será el miembro total 264.

$$\begin{array}{ll} 62 & \frac{20}{125} \\ \hline 38,64 & \\ 36 & \\ \ 2\,46 & \\ \ 2\,44 & \\ \hline 20 & \end{array}$$

Para hallar el guarismo correspondiente al miembro 264. se formarán las cinco colunas. En la pimera se escribirá el 2. que es el numero correspondiente al quadrado en la tabla triangular. En la segunda estará la raìz 6. hallada hasta ahora con un zero, que son 60. y pues en la primer coluna no hay mas que un numero, no se pondrán las potestades de dicha raìz. Multipliquese el 2. de la primer coluna por el 60. de la segunda; escribiendo el producto 120. en la tercera; y pues en esta coluna solo hay un numero, él mismo será la suma, ò divisor: Y asi, dividase el miembro 264. por 120. dando al quociente 2. el qual se escribirá en la parte superior de la coluna quarta, y en la inferior su quadrado, que es la potestad de la especie de la que se saca raìz. Multipliquense los numeros de la tercera, y quarta coluna, exceptando el quadrado, y escribiendo el producto en la quinta; al qual se añadirá el quadrado 4 de la coluna quarta, para hacer el restador 244. Restese, pues, del miembro 264. Y quedará el residuo 20.

2	60	120	2	240
			4	4
				244

Este residuo se escribirá por numerador de un quebrado, que tendrá por numerador al producto del numero 2. de la priner coluna por la raìz quadrada 62. y mas la unidad; que será 125. como se vé en la formula.

Exemplo II.

Para sacar raìz cubica deste numero 2195210O. se dividirá en miembros de tres en tres guarismos, porque el exponente del cubo es 3. Y buscando en la tabla de las potestades el mayor cubo que puede caber en el primer miembro 21. de mano izquierda, se hallará el 8. y su raìz 2. que se escribirá sobre la linea, y el 8. debaxo.

Restese el 8. del 21. y quedará el residuo 13. à cuyo lado se abaxará el miembro 952.

Para hallar el otro guarismo radical, formense las cinco colunas, escribiendo en la primera los numeros propios del cubo de la tabla triangular (698), los quales son 3. 3. En la segunda se pondrá la raíz hallada 2. con un zero, correspondiendo al 3. inferior, y encima estará el quadrado de 20. colateral al 3. superior. Multipliquense los numeros de la primer, y segunda coluna, escribiendo los productos en la tercera, cuya suma 1260. será el divisor. Dividase, pues, el dicho miembro por este divisor, dando al quociente no todo lo que se puede, segun el partir ordinario, sino atendiendo à que la suma de los productos de la quarta, y quinta coluna, con el cubo del quociente, se puedan restar del miembro; y asi basta darle à 8. Escribase, pues, en la parte superior de la quarta coluna, y debaxo su quadrado 64. y cubo 512. Multipliquense los dos primeros numeros de la tercera, y quarta coluna, escribiendo los productos en la quinta, y añadiendo el cubo 512. cuya suma se restará del miembro, y quedará el residuo zero.

```
2   8   0          100
                  236041
------------------------
21,952,100
 8
--------------
13 952
13 952
---------
    0100
```

Abaxese el otro miembro 100. y para hallar su guarismo radical formense las cinco colunas, escribiendo en la primera los mismos numeros 3. y 3. En la segunda pongase la raíz hasta ahora hallada con un zero, y sobre ella su quadrado. Multipliquense los numeros de la primer coluna por los de la segunda, escribiendo los productos en la tercera cuya suma es el divisor, dividase el miembro 100. por él, y pues no se puede, pongase zero por letra radical, y el mismo miembro 100. será el residuo, el qual ha de ser numerador de un quebrado, que tenga por denominador à la suma de los productos de toda la raíz 280. por 3. y de su quadrada por 3. y mas la unidad.

3	400	1200	8	9600
3	20	60	64	3840
			512	512
		1260		
				13952

Exemplo III.

Para sacar raíz quadrado quadrada deste numero 950007863.

Di-

Dividase de quatro en quatro guarismos , porque su exponente es 4.

Busquese en la tabla de las potestades (697) el mayor quadrado quadrado que puede caber en el primer miembro 9. el qual es 1. y su raíz tambien 1. Escribase la raíz sobre la linea , y el quadrado quadrado 1. debaxo; restese del 9. y quedarán 8. Abaxese el otro miembro 5000. à su lado , y será el miembro total 85000.

1 7 5

95000,7863
1

8 5000
7 3521

1 14797863
1 02680625

1211 7238

Para hallar su guarismo radical formense las cinco colunas , escribiendo en la primera los numeros 4. 6. 4. de la tabla triangular, que son propios del quadrado quadrado , y en la parte inferior de la segunda se pondrá la raíz 1. con un zero , y encima sus potestades , hasta que acompañen à los numeros de la primer coluna ; esto es , quadrado , y cubo. Multipliquese la coluna primera por la segunda , escribiendo las productos en la tercera , cuya suma será el divisor. Dividase el miembro 85000. por la suma 4640. dando al quociente 7. y no mas , para que la suma de la quinta coluna se pueda restar del dicho miembro. Escrivase el 7. en la parte superior de la coluna quarta , y debaxo sus potestades hasta el quadrado quadrado, que es la potestad de quien se saca raíz , las quales se hallan facilmente por la tabla de las potestades. Multipliquense todos los numeros de la quarta , y tercera coluna , exceptando los inferiores , y los productos se escribirán en la quinta , añadiendo el quadrado quadrado , que es la ultima potestad de la coluna quarta. La suma será el restador la qual restada del dicho miembro quedará el residuo 11479. à quien se juntará el miembro 7893.

4	1000	4000	7	28000
6	100	600	49	29400
4	10	40	343	13720
			2401	2401
		4640		73521

Ahora para hallar su guarismo radical , formense otra vez las cinco colunas , escribiendo en la primera los mismos numeros 4. 6. 4. y en la parte inferior de la segunda estará la raíz 17. hasta ahora hallada con un zero , sobre la qual se pondrán sus potestades , hasta que todos los numeros de la coluna primera tengan su colateral. Multi-

ti-

tipliquense los numeros de la primera, y segunda coluna, escribiendo los productos en la tercera, cuya suma será el divisor. Dividiendo, pues, el miembro por dicho divisor, le tocan 5. al quociente, que se escribirá en la coluna quarta, y debaxo sus Potestades. Multipliquense los numeros de la coluna tercera por los de la quarta, exceptando à los dos ultimos, cuyos productos se escribirán en la quinta coluna, poniendo debaxo el quadrado quadrado 625. que es la potestad inferior de la coluna quarta, porque esta potestad nunca se multiplica. La suma, pues, de los numeros de la coluna quinta, se restará del miembro de quien se sacan raíz, quedando el residuo 1558538. el qual se pondrá por numerador de un quebrado.

4	4913000	19652000	5	98260000
6	28900	173400	25	4335000
4	170	680	125	85000
			625	625
		19826080		102680625

Para hallar el denominador del dicho quebrado, se formarán tres colunas. En la primera estarán los mismos numeros 4. 6. 4. y en la segunda se pondrán la raìz 175. sin zero, y encima sus potestades, como antes. Multiplicando, pues los numeros de la primera, y segunda coluna, y à los productos (que se han de poner en la tercera coluna) añadiendo una unidad, será la suma de los numeros de la coluna tercera el denominador que se busca. Y este methodo se guardará en todas las potestades.

4	5259375	21437500
6	30625	183750
4	175	700
		1
		21621951

Exemplo IV.

Para sacar raíz quadrada cubica deste numero 87900000. dividase en miembro de cinco en cinco guarismos, porque el exponente desta potestad es 5. Busquese en la tabla de las potestades el mayor quadrado cubo, que puede caber en el primer miembro de mano izquierda, y se hallará el 243. cuya raíz es 3. Restese, y quedará el residuo 636 à cuyo lado se abaxará el otro miembro, para hacer al total 63600000.

Para hallar su guarismo de la raíz, formense las cinco colunas, escribiendo en la primera los numeros 5. 10. 10. 5. que son propios

del

del quadrado cubo, como consta por la tabla triangular. Despues en la segunda coluna, se escribirá la raíz 3. hallada, con un zero, de suerte, que esté colateral al 5. inferior de la primer coluna, y encima se pondrán sus potestades, hasta que todos los numeros de la primer coluna tengan sus colaterales. Multipliquense los numeros de la primera, y segunda coluna, escribiendo los productos en la tercera, cuya suma es el divisor: Dividiendo, pues, el dicho miembro por él, se dará 8. al quociente, el qual estará en la parte superior de la quarta coluna, y debaxo sus potestades, hasta el quadrado cubo. Multipliquense los numeros de la tercera, y quarta coluna fuera los dos ultimos, que son el divisor, y quadrado cubo, escribiendo los productos en la quinta, y añadiendo el quadra do cubo de la tercera coluna La suma se restará del miembro, y quedará el residuo que está en el exemplo, el qual se pondrá por numerador de un quebrado, cuyo denominador se hallará deste modo.

3 8

879,00000.
243

636,00000
549 55168

864 4832

5	810000	4050000	8	32400000
10	27000	270000	64	17280000
10	900	9000	512	4608000
5	30	150	4096	614400
			32768	32768
		4329150		54935168

Formense tres colunas, en la primera escribanse los mismos numeros 5. 10. 10. 5. en la segunda se pondrá la raíz 38. y encima sus potestades como antes; multipliquense los numeros colaterales de la primera, y segunda coluna, escribiendo los productos en la tercera, y añadiendo una unidad, cuya suma será el denominador que se busca.

5	2085136	10425680
10	54872	548720
10	1444	14440
5	38	190
		1
		10989031

Examen.

703 Multipliquese la raíz por sí misma , tantas veces como fuere la potestad; esto es, quadrese, cubiquese, &c. Y si hay algun residuo, añadese , y ha de ser todo igual al numero de quien se sacó raíz , como se dixo en el examen de la raíz quadrada , y cubica. Pero adviertase , que el ultimo residuo , ò numerador del quebrado , nunca ha de ser igual al denominador , sino menor.

Observaciones.

704 Ningun residuo puede ser igual , ni mayor que la suma de los productos de la raíz , y sus potestades por los numeros de la tabla triangular , peculiares de la potestad de quien se saca raíz , y mas la unidad : Esto es , formando las tres colunas antecedentes , escribense en la primera los numeros propios de la potestad de quien se saca raíz : En la parte inferior de la segunda coluna , pongase la raíz hasta entonces hallada , y sobre ella , estaràn sus potestades hasta que llenen todos los lugares colaterales à los numeros de la segunda coluna : Multipliquense la pimera , y segunda coluna , escribiendo los productos en la tercera à los quales se añadirá una unidad, pues ningun residuo puede ser mayor que la suma de la coluna tercera.

705 Si algun residuo fuere zero , y los miembros restantes tambien fueren zeros , se pondràn por guarismos radicales tantos zeros como miembros faltaren que correr. Y asi , sacando raíz quadrada de 10000. porque restando el quadrado 1. del miembro 1. queda zero; y los otros dos miembros son tambien zeros , se pondràn dos zeros en la raíz. Lo mismo es quando el residuo es zero , y el miembro siguiente tambien es zero , se pondrá un zero por raíz , aunque el otro miembro tenga guarismos significativos.

```
1 0 0
------
1,00,00
1
---
0
```

706 Si la potestad está expresada en enteros , y quebrado, se reducirán los enteros al quebrado, y quedará quebrado solo: Ahora saquese la raíz del numerador , y denominador , formando quebrado; y asi la raíz quadrado quadrada de 16. 81. avos , será dos tercios.

CAPITULO QUINTO.

DE LA APROXIMACION DE LAS raìces Sordas.

707 AProximar las raìces sordas, es hallar raìz de las Potestades irracionales, la qual aunque no sea la verdadera, porque esta no se puede hallar (656) pero es proxima á la verdadera; y se puede aproximar de tal suerte, que la diferencia de la raìz sacada, y de la verdadera, sea menor que qualquier quantidad determinada por pequeña que sea. Mas claramente: Las potestades que no tienen raìz en numero entero, tampoco la tienen en entero, y quebrado (656), y son irracionales; cuyas raìces son sordas, porque como no se pueden pronunciar, pues no hay numero que las exprese, tampoco se suelen oìr; y entones son las potestades irracionales, quando sobra algo despues de la extraccion de las raìces: Pues lo que se busca en este capitulo, es hallar una raìz de potestad irracional, que se acerque á la verdad tanto quanto se quisiere, pero nunca se pueda señalar la raìz verdadera.

708 Esto supuesto, para aproximar una raìz, añadase al ultimo residuo de la potestad un miembro de zeros, ò tantos zeros como fuere el exponente de la potestad; esto es, en el quadrado, dos zeros; en el cubo, tres; en el quadrado, quadrado, quatro, &c. Y continuando la operacion, el guarismo que saliere, serà decimas; esto es, se pondrá por numerador de un quebrado, cuyo denominador será 10. Otra vez al residuo de esta operacion (siendo la potestad irracional, siempre quedarà el residuo) añadense otros tantos zeros, y continuando la operacion, el guarismo que saliere junto con el antecedente, serà centesimas; esto es, los dos guarismos, se pondrán por numerador de un quebrado, tenga 100. por denominador, y deste modo se puede continuar infinitamente.

Exemplo I.

Se ha de aproximar la raìz quadrada deste numero 632. Saquese la raìz del primer miembro 6. que es 2. y restando su quadrado 4. de 6. quedan 2. por residuo, al qual se añadirá al lado el otro miembro 32. Ahora formando las cinco colunas, se pondrá en

la

la primera el numero 2. peculiar del quadrado, como consta por la tabla triangular. (698) En la segunda estarà la raíz 2. con un zero, Multipliquese la primer coluna por la segunda, escribiendo el producto en la tercera, el qual será divisor; dividase, pues, el miembro 232. por 40. dando al quociente 5. el qual se escribirá en la quarta coluna, y su quadrado 25. debaxo: Multipliquese el 40. por 5. escribiendo el producto. 200. en la coluna quinta, y debaxo el quadrado 25. cuya suma 225. resta la del miembro 232. queda el residuo 7.

2 5

6,3 2
4

2 3 2
2 2 5

7 0 0
5 0 1

1 9 9 0 0
1 5 0 6 9

4 8 3 1

2	20	40	5	200
			25	25
				225

A este residuo 7. añadase un miembro de zeros; esto es, dos zeros, porque se saca raìz quadrada, cuyo exponente, ò numero de la primer coluna, es 2. y será 700. Ahora formense las cinco colunas para sacar el guarismo radical correspondiente al 700. y será 1. quedando 199. de residuo, como todo se vé en la operacion siguiente. Pues si nos contentamos con esta aproximacion, se pondrá el guarismo radical 1. sobre una linea, haciendo quebrado, y debaxo habrá 10. Y asi la raìz será 25. y 1. 10. avos.

2	250	500	1	500
			1	1
				501

Pero si se quiere aproximar mas, al residuo 199. añadase un otro miembro de zeros, y será 19900. Formense las cinco colunas, escribiendo en la primera 2. En la segunda estará toda la raíz hallada hasta ahora, que es 251. con un zero. Multiplicando la primera, y segunda coluna, se escribirá el producto en la tercera, el qual será divisor: Dividase, pues, el miembro 19900. por el divisor 5020. dando al quociente 3. el qual se escribirá en la coluna tercera, y debaxo su quadrado 9. multiplicando los numeros de la quarta, y tercera coluna fuere del quadrado 9. saldrán 15060. à los quales se añadidirá el quadrado 9. y la suma restada del miembro total 19900. quedarán 4831. con que estos dos guarismos ultimos que provienen de los zeros añadidos, serán numerador de un quebrado que tenga por denominador 100. y asi la raíz será 25. y 13. 100. avos.

2	2510	5020	3	15060
			9	9
				15069

Si se quiere aproximar mas, añadese otro miembro de zeros al residuo 4831. y prosiguiendo en sacar raíz, se tendrán ya tres guarismos originados de los tres miembros de zeros añadidos, los quales serán milesimas; esto es, se pondrán por numerador del denominador, y deste modo prosiguiendo, se podrá aproximar la raíz, de suerte, que sea mas, y mas proxima à la verdad.

Exemplo II.

Para aproximar la raíz cubica de este numero 36879. se sacará primero la raíz cubica, como está dicho arriba, la qual es 33. y queda el residuo 942. al qual se añadirán tres zeros, y será el tercer miembro 942000. Prosigase en sacar la raíz del mismo modo, y se hallará 2. por guarismo radical del miembro sobredicho. Si alguno se contentáre con esta aproximacion, dirá que la raíz cubica algo proxima del numero 36879. es 33. y 2. 10. avos. Pero si quisiere mayor precision, añada otro miembro de zeros al residuo 284632. y prosiga en sacar raíz cubica, valiendose del guarismo radical antecedente, no como á numerador de quebrado, sino como á guarismo que acompaña à la raíz 33. deste modo 332. haciendo, pues, la operacion, hallará 7. por guarismo radical, y si se contentáre con esta aproximacion, dirá, que la raíz cubica del sobredicho numero, es 33. y 27 100. avos. Del mismo modo puede proseguir aproximando infinitamente.

3 3 2 7

3687,9
27

9879
8937

942,000
657 368

284632000
231958783

52673217000

Demonstracion.

Supongo lo primero, que añadir à las potestades tantos zeros como unidades tiene su exponente, es lo mismo que multiplicarlas por las potestades que consten de zeros, y una unidad; como el añadir el quadrado dos zeros, quatro, seis, ocho, &c. es lo mismo que multiplicarle por los quadrados 100. 10000. 1000000. 100000000. &c. Asimismo el añadir al cubo tres zeros, seis, nueve &c. es multiplicarle por los cubos 1000. 1000000. 1000000000. &c. Y asi de las demás potestades, como consta por las observaciones del multiplicar. (69) Supongo lo segundo, que multiplicando una potestad por otra de la misma especie, sale el producto potestad de la misma especie, como se demonstró en la Theorica de las potestades; y asi despues de añadidos los zeros, aun quedará la potestad de la misma especie que antes.

Supongo lo tercero, que si à la potestad antes de añadir los zeros, se le pone debaxo una unidad, se hace un quebrado, como consta de lo que se dixo en los quebrados. (128) Y si despues de añadidos los zeros, se pone debaxo de ella una unidad, y tantos zeros, quantos se han añadido, se formará otro quebrado igual al primero, porque multiplicando los dos terminos del primer quebrado por un mismo numero (que es añadir zeros) sale un quebrado del mismo valor, aunque en numeros mayores (152).

Esto supuesto, sea en el primer exemplo la potestad quadrada 632. (Lo mismo diré de qualquier otra potestad) la qual expresada en forma de quebrado, será A. y añadiendole quatro zeros que es lo mismo que multiplicar por el quadrado 10000. será 6320000. à la qual poniendole debaxo el denominador 10000. formará el quebrado B. igual à A. cuya raíz quadrada, será el quebrado D. la qual contiene 25. enteros, y sobra el quebrado 13. 100. avos. Y como el quebrado B. es igual à A. la dicha raíz, tambien será raíz de A. pero como la potestad B. está dividida en mas partes que A. la raíz D. será mas proxima, porque quanto mas menuda es la division, tanto mas se puede acercar à la verdad; y asi añadiendo mas zeros à la potestad, se acercará la raíz mas á la verdad, hasta que se diferencie en la cantidad mas minima que se puede señalar.

$$\begin{array}{ccc} A & B & D \\ \frac{632}{1} & \frac{6320000}{10000} & \frac{2513}{100} \end{array}$$

PARTE II.

DE LOS MEDIOS PROPORCIONALES.

709 NUmeros medios proporcionales, son aquellos, que estando entre dos extrémos, componen alguna proporcion; como en estos números 4. 8. 16. el 8. el medio proporcional, porque con los extremos, se formará la razon de 4. à 8. y de 8. à 16. Y aunque puede haber diferentes especies de medios, segun la diversidad de las proporciones, que constituyen con sus extremos, como se puede vér en Jordano, Boecio, y otros; pero comunmente los Arithmeticos les dividen en tres, es à saber en medio Arithmetico, Geometrico, y Harmonico; de los quales tratarémos en los Capitulos siguientes.

CAPITULO PRIMERO.

DEL MEDIO ARITHMETICO.

710 MEdio Arithmetico, es el que constituye con los extremos una tal proporcion, de suerte, que la diferencia del medio à los extremos, sea igual; como en estos numeros 3. 5. 7. el 5. es medio Arithmetico, porque la diferencia de 3. à 5. es 2. y la diferencia de 5. à 7. tambien es 2. Asimismo estos tres numeros 15. 10. 5. están en proporcion Arithmetica, y el 10. es medio, porque de 15. à 10. hay 5. y de 10. al extremo 5. tambien hay 5. Y asi en el medio Arithmetico, las diferencias tienen entre sí razon de igualdad.

PROBLEMA I.

DADOS DOS NUMEROS, HALLAR UN MEDIO Arithmetico.

711 SEan 4. y 8. los numeros, entre los quales se ha de hallar un medio Arithmetico: Sumense, y to-

mando la mitad de la suma 12. que es 6. será el medio deseado, de suerte, que formarán la proporcion Arithmetica de 4. 6. 8. Asimismo, si entre 16. y 9. se ha de hallar un medio Arithmetico de la suma de los terminos 25. tomese la mitad, que es 12. y medio, la qual será el medio que se busca. Pero si el medio ha de hallarse en numeros enteros, se dirá, que entre 16. y 9. no puede haber medio Arithmetico, porque la suma 25. no tiene mitad entera.

La razon desto es manifiesta, porque como las diferencias son iguales, el extremo mayor 8. (en el exemplo primero) excede al menor 4. es dos diferencias 2. y 2. luego la suma 12. de los extremos, será igual à dos extremos menores, y à dos diferencias; luego la mitad 6. de la suma dicha, será igual al extremo menor, y à una diferencia, que es el medio Arithmetico, el qual es igual al menor extremo, y à su diferencia.

El mismo medio Arithmetico, se puede hallar de otro modo, restando el menor extremo 4. del mayor 8. y añadiendo la mitad 2. de la diferencia al menor extremo 4. saldrá el medio 6. como por sí mismo es manifiesto.

PROBLEMA II.

DADOS DOS NUMEROS, HALLAR MUCHOS MEDIOS Arithmeticos.

712 Restese el numero menor del mayor, y partiendo la diferencia por el numero de los medios aumentado una unidad, saldrá la diferencia de los terminos, la qual añadida continuamente al numero, ò extremo menor, dará los medios. Como si entre 3. y 15. se han de hallar tres medios Arithmeticos, restese el 3. del 15. y la resta 12. dividase por 4. que es numero de los medios 3. y una unidad mas, y el quociente 3. será la diferencia de los terminos, lo qual añadida al menor extremo 3. dará un medio 6. y añadida á este medio, dará el otro 9. y añadida à este dará el tercero 12.

Otro exemplo: Se han de hallar seis medios entre 37. y 2. restese el 2. del 37. y partiendo la diferencia 35. por 7. que es el numero de los medios aumentado en una unidad, saldrá la diferencia 5. de los terminos, la qual añadida al menor extremo 2. dará el primer medio 7. y añadida à este, dará el segundo 12. y asi continuamente hasta hallarlos todos; y asi serán Arithmeticamente proporcionales

37. 32. 27. 22. 17. 12. 7. 2. la razon desto por sí misma es manifiesta.

PROBLEMA III.

DADOS EL MEDIO, Y UN EXTREMO ARITHMETICOS, hallar el otro extremo.

713 SI se busca el menor extremo, restese el medio del extremo mayor, y restando esta diferencia del medio, quedará el extremo deseado; como si son dados estos dos numeros 7. y 4. de los quales el 7. es el extremo mayor, y el 4. es el medio, restese 4. de 7. y quedará la diferencia 3. la qual restada del medio 4. quedará el menor extremo 1. con que serán proporcionales Arithmeticamente 7. 4. 1.

Pero si se busca el extremo mayor, restando el menor extremo del medio, y añadiendo la diferencia al mismo medio, saldrá el extremo mayor, como si dados estos numeros 2. 5. se busca el mayor extremo, restese el menor 2. del medio 5. y añadiendo la diferencia 3. al mismo 5. saldrá el mayor extremo 8. y serán los 3. numeros 2. 5. 8. como todo por sí mismo es bien claro.

Consectario.

714 De aqui nace el methodo de continuar qualquier serie de numeros Arithmeticamente proporcionales, que es, añadiendo la diferencia al ultimo termino quando la proporcion sube: como si se han de continuar, la proporcion Arithmetica en estos dos terminos 3. 5. añadase otra vez la misma diferencia 2. al 7. y será 9. el otro termino, y asi infinitamente.

Pero si la proporcion se ha de continuar baxando, se restará la dicha diferencia, aunque no se puede continuar infinitamente; como si son dados estos terminos 10. y 6. restando la diferencia 4. del 6. queda otro termino 2. y ya no se puede continuar mas, sin valerse de numeros defectivos.

CAPITULO SEGUNDO.

DEL MEDIO GEOMETRICO.

715 MEdio Geometrico, es el que estando entre dos extremos, constituye con el uno la misma ra-

zon,

zon, que el otro con él, y tambien las diferencias guardan la misma razon; como en estos numeros 2. 4. 8. el 4. es medio Geometrico, porque la misma razon (que aqui es subdupla) hay del 4. al 8. que del 2. al mismo 4. y las diferencias 2. y 4. tambien tienen la misma razon dupla. Asimismo en estos otros numeros 80. 20. 5. el 20. es medio Geométrico; porque tiene la misma razon con el 5. que el 80. con el mismo 20. y las diferencias 60. y 15. tambien guardan la misma razon. Este propiamente se llama medio proporcional, porque los otros son improprios. Si hay muchos medios entre dos extremos, la razon de unos à otros, es la misma, de suerte, que el medio, ó medios Geometricos constituyen muchos terminos continuamente proporcionales.

PROBLEMA I.

ENTRE DOS NUMEROS HALLAR UN MEDIO Geometrico.

716 MUltipliquense los numeros dados entre sì, y sacando la raíz quadrada del producto, será el medio proporcional que se busca; como si entre 8. y 32. se ha de hallar un medio proporcional, multiplicando 8. por 32. y sacando raíz quadrada del producto 256. será 16. el medio que se busca. Asimismo para hallar un medio Geometrico entre 64. y 9. multipliquense, y del producto 576. saquese la raíz quadrada, que será 24. la qual es el medio proporcional. Si del producto no se puede sacar raíz quadrada, no podrá haber medio alguno proporcional entre los numeros señalados; y para que entre dos numeros pueda haber un medio proporcional, es necesario que sean quadrados, ó planos semejantes.

Demonstracion.

El medio proporcional hallado con los extremos, hace tres continuos proporcionales, como por sì mismo es manifiesto: luego el producto de los extremos, es igual al quadrado del medio, (300) y asi sacando la raíz quadrada del producto de los extremos, será el medio proporcional entre dichos extremos, los quales si no fueren quadrados, ó planos semejantes, no podrán admitir medio alguno proporcional, como consta de lo que se dixo arriba en la Theorica de las potestades, y raìces.

PROBLFMA II.

ENTRE DOS NUMEROS DADOS, HALLAR MUCHOS *medios Geometricos.*

717 PAra ceñir este Problema à una regla general, será preciso escribir los numeros entre quien se han de hallar los medios bien distantes, poniendo à cada uno un señal como A. al primero, y B. al ultimo; despues pongase entre medio, tantos puntos, quantos medios se desean, debaxo los quales, escribanse las letras A. y B. con sus exponentes en esta forma: A. la primera A. de mano derecha, se escribirá 1. à la segunda 2. &c. y al contrario à la primera B. de mano izquierda, pongase 1. à la segunda 2. &c.

Esto supuesto, para hallar qualquier medio sin dependencia de los otros, multipliquense entre sì las potestades de A. y B. segun sus exponentes que están en el lugar del medio que se busca, y del producto se sacará la raíz que tenga por exponente la suma de los exponentes, la qual será el medio que se busca.

Como si entre estos dos numeros 4. y 1024. se han de hallar tres medios Geometricos continuamente proporcionales, señalense tres puntos, escribiendo à cada uno las letras con sus exponentes, como se vé en la formula: Esto supuesto, para hallar el primer medio, multipliquese el cubo de A. que es 64. (porque tiene el exponente 3. que denota cubo) por el numero B. que es 1024. (porque tiene el exponente 1. que no denota potestad, sino el mismo numero) y del producto 65536. saquese la raíz quarta, ò quadrada quadrada (que es la suma de los exponentes 3. y 1.) y será el primer medio 16.

Para hallar el medio segundo, multipliquese el quebrado de A. que es 16. (porque tiene el exponente 2.) por el quadrado de B. que es 1048576. (porque tambien tiene el exponente 2.) y sacando la raiz quarta (que es la suma de los exponentes) del producto 16777216. será 64. el medio deseado.

4	.	.	.	1024
A	A3	A2	A1	B
	B1	B2	B3	

Ultimamente, para hallar el tercer medio, multipliquese el nu-

numero A. que es 4. (porque tiene por exponente 1.) por el cubo de B. (porque tiene 3. por exponente) que será 4294967296. del qual sacando la raíz quarta (por la suma de los exponentes) saldrá el tercer medio 256.

718 De aqui sale una regla facil para hallar dos medios Geometricamente proporcionales, que es lo mas ordinario que se busca. Multipliquese el extremo menor por el quadrado del extremo mayor, y sacando raíz cubica del producto, será el medio menor; multipliquese el mayor extremo por el quadrado del menor, y sacando raíz cubica del producto será el segundo medio. Tambien hallado el primer medio, si se halla un medio proporcional entre el medio primero, y mayor extremo, será el medio segundo.

La demonstracion deste Problema, está fundada en el Theorema 3. deste Libro 3. y asi, quien huviere entendido bien dicho Theorema, verá manifiesta la razon en que estriva el methodo de sacar los sobredichos medios. Quando los extremos propuestos no son semejantes sólidos, plano sólidos, plano planos, sólido sólidos, &c. no pueden hallarse entre ellos medios algunos proporcionales.

PROBLEMA III.

DADOS EL MEDIO, Y UN EXTREMO GEOMETRICAmente proporcionales, hallar el otro extremo.

719 Multipliquese el medio por sí mismo, y partiendo el producto por el extremo dado, saldrá el otro extremo que se busca, como si dados el medio 8. y el extremo 4. se ha de hallar el otro extremo; multiplicando 8. por 8. salen 64. los quales divididos por 4. caben à 16. que es el otro extremo, y asi son tres continuos proporcionales 16. 8. 4.

Demonstracion.

El quadrado del medio, es igual al producto de los extremos (300). Luego si el quadrado del medio, se divide por un extremo, saldrá el otro; porque lo que la multiplicacion hace, la division deshace.

Consectario.

720 De aqui sale un modo de continuar qualquier proporcion, porque si el extremo hallado, se hace medio, dexando el extremo dado, se hallará otro termino, y si este se hace medio, dexando los

dos

dos primeros, se hallará otro termino, así infinitamente; como si se dá el medio 6. y el extremo 3. partiendo por 3. el producto 36. del 6. multiplicado por sí mismo, saldrá el extremo 12. el qual haciendole medio, y dexando el primer extremo 3. esto es, dado el extremo 6. y el medio 12. se hallará el otro termino 24. y dexando los dos primeros terminos, tomando solamente 12. y 24. se hallará el 48. y asi de los demás; tomando siempre los dos ultimos terminos.

Pero se ha de advertir, que no siempre se puede hallar el otro extremo, ni continuar la proporcion en numeros enteros, sino en enteros, y quebrados, ò en estos solos; porque no siempre el quadrado del medio, se puede partir enteramente por el un extremo, como por sí es manifiesta; y como consta en la *prop.* 16. *del lib.* 9. de Euclides, siempre que dos numeros dados fueren entre sí primos, no se puede hallar otro numero entero proporcional.

PROBLEMA IV.

DADO UN TERMINO PROPORCIONAL, Y EL DENOMINADOR de la razon, hallar los otros terminos proporcionales.

721 SI el termino dado, es el menor extremo, multipliquese por el denominador, y saldrá el medio, el qual multipliquese tambien por el mismo denominador, y saldrá el otro extremo, y asi infinitamente continuando la proporcion, como si se dá el menor extremo 4. y el denominador dos tercios multiplicando, salen 6. que es el medio, el qual multiplicado por dicho denominador, salen 9. que es el mayor extremo; con que serán 46. 9. continuamente proporcionales.

Si el termino dado, es el medio, multipliquese por el denominador, y saldrá el mayor extremo; pero si se parte por dicho denominador, saldrá el extremo menor; como en el exemplo propuesto, si el 6. se multiplica por dos tercios, saldrá 9. y si se divide por los mismos dos tercios, saldrá 4.

Ultimamente, si el numero dado es el mayor extremo, dividase por el denominador, y el quociente será el medio, el qual dividido por el mismo denominador, dará el menor extremo.

Demonstration.

El denominador de qualquier razon multiplicado por el termino menor, dá el otro termino mayor; y partiendo el termino mayor por dicho denominador, sale el termino menor, como consta de la Theorica de las razones.

Observacion.

722 Es digna de notar la discrepancia que tienen la Arithmetica, y Geometría en la invencion de los medios proporcionales, porque entre dos qualesquiera lineas, siempre se puede hallar una media proporcional por la *prop.* 13. *del lib.* 6. de Euclides; pero entre dos qualesquiera numeros, no siempre se puede hallar medio proporcional. Mas entre dos numeros se pueden algunas veces hallar dos medios proporcionales, y entre dos lineas, aun no se ha hallado arte para poner dos medios continuamente proporcionales; con que en esta materia en parte, es mas fecunda la Geometría, y en parte la Arithmetica.

CAPITULO TERCERO.

DEL MEDIO ARMONICO.

723. TRes numeros están en proporcion Harmonica, ò Musica, quando la misma razon hay del mayor extremo al menor, que de la diferencia del mayor extremo, y medio à la diferencia del medio, y menor extremo; como en estos numeros 3. 4. 6. la razon de 6. à 4. es dupla; asi como la razon de la diferencia 2. del 6. al 4. à la diferencia 1. del 4. al 3. asimismo estos otros tres numeros 42. 12. 7. están en proporcion Harmonica, porque la misma razon hay del 42. al 7. que de la diferencia 30. del 42. al 12. à la diferencia 5. del 12. al 7. pues entrambas razones son sextuplas. Llamase Harmonica, ò Musica, porque de ordinario en ella consisten las consonancias, y sirve para la division de los intervalos musicos.

PROBLEMA I.

ENTRE DOS NUMEROS DADOS, HALLAR UN MEDIO Harmonico.

724 MUltipliquese la diferencia de los extremos por el extremo menor, y dividiendo el producto por la suma

de los extremos, añadase el quociente al menor extremo, y saldrá el medio que se busca; como si entre 15. y 60. se ha de hallar un medio Harmonico, multipliquese la diferencia 45. de entrambos extremos por el menor extremo 15. y dividiendo el producto 675. por la suma de los extremos, saldrá el quociente 9. el qual añadido al menor extremo 15. dará el medio 24. y serán Harmonicamente proporcionales 15. 24. 60.

Demonstracion.

En el medio Harmonico el extremo menor 60. es al menor 15. como la diferencia 36. del medio al extremo mayor, à la diferencia 9. del extremo menor al medio; esto es, como 60. à 15. asi 36. à 9. Luego componiendo como la suma 75. de los extremos al extremo menor 15. asi la suma 45. de las diferencias 36. y 9. (que es la misma diferencia de los extremos) à la diferencia menor 9. Luego multiplicando la diferencia de los extremos por el extremo menor, y partiendo el producto por la suma de los mismos extremos, saldrá la diferencia menor (que es hacer regla de tres) la qual añadida al extremo menor hará el medio.

PROBLEMA. II.

DADO EL MEDIO, Y EL EXTREMO MENOR HALLAR el mayor extremo Harmonico.

725 Dividase el producto del medio, y extremo dados por el numero que queda restando la diferencia de los numeros dados del menor extremo, y el quociente será el mayor extremo. Como si se dá el menor extremo 12. y el medio 16. multipliquense, y el producto 192. dividase por 8. que es el numero que queda restando la diferencia 4. de los numeros dados del extremo menor 12. y el quociente 24. será el mayor extremo que se busca.

Demonstracion.

El mayor extremo al menor, tiene la misma razon que la mayor diferencia à la menor, ò al contrario: luego restando las diferencias de los extremos; esto es, la diferencia mayor del mayor extremo, y la menor del menor, quedarán los residuos en la misma proporcion. Luego será como 8. residuo menor à 12. entremo menor; asi el medio 16. que es tambien el mayor residuo, al extremo mayor; y por eso se hace la multiplicacion, y division, como en la regla de tres.

Ob-

Observacion.

726 Si la razon del menor extremo al medio es submultiplice, submultiplice superparticular, ò submultiplice superparciente, no se podrá hallar el mayor extremo, porque en todas estas razones la diferencia del menor extremo al medio, es mayor, ò á lo menos igual como en la subdupla, que el menor extremo, con que no se pondrá restar para que salga el residuo, ò divisor; con que este Problema solamente tiene lugar en las razones subsuperparticulares, y subsuperparcientes.

PROBLEMA. III.

DADOS EL MAYOR EXTREMO, Y EL MEDIO, HALLAR el menor extremo Harmonico.

727 MUltipliquese el mayor extremo por el medio, y partiendo el producto por la suma del mayor extremo, y de la diferencia dél al medio, saldrá el menor extremo que se busca: como si son dados el mayor extremo 24. y el medio 16 cuya diferencia es 8 multipliquense 24. por 16. y el producto 384. se partirá por 32. que es la suma del mayor extremo 24. y de la diferencia 8. el quociente 12. será el menor extremo.

Demonstracion.

Como el mayor extremo 24. al menor 12. así la mayor diferencia 8. à la menor 4. y alternando como 24. à 8. asi 12. 4. è invirtiendo como 8. à 24. asi 4. à 12. Ultimamente componiendo como 32. que es la suma del mayor extremo, y de la diferencia al medio, á 24. que es el mayor extremo; asi 16. que es la suma del menor extremo, y menor diferencia (la qual suma, es el mismo medio) à 12. que es el menor extremo.

Observaciones.

728 Multiplicando el medio Arithmetico por sus extremos, salen los extremos Harmonicos, y multiplicando los extremos Arithmeticos entre sì, sale el medio Harmonico, como lo demuestra Clavio en el Escolio à la *propos.* 17. *del lib.* 6. Y asi si son tres numeros 3. 5. 7. Arithmeticamente proporcionales, multiplicando 5. por 3. y 7. salen 15. y 35. multiplicando 3. por 7. salen 21. y son tres numeros 15. 21. 35. Harmonicamente proporcionales, 729 Y asi, si querémos tres numeros en proporcion Harmonica; de suerte, que los extremos tengan qualquier razon, como sesquialtera, tomarémos dos numeros en la dicha razon, como 6. y 4. entre los quales hallarémos un medio Arithmetico 5. y de estos saldrán dos Harmonicos 30. 24. 20.

CAPITULO QUARTO.

DEL EXERCICIO DE LAS RAICES, *potestades, y medios proporcionales.*

730 Question 1. Pidese que un qualquier numero quadrado como el 36 se divida en tantos quadrados quantos quisieren. Para la solucion desta dificultad se ha de suponer, que estos tres numeros 3. 4. 5. tienen esta propiedad, que la suma de los quadrados de los dos primeros, es igual al quadrado del 5. porque el quadrado del 3. es 9. y el quadrado del 4. 16. pues sumando 9. y 16. hacen 25. que es el quadrado del 5.

Esto supuesto, digase por regla de tres: Si 25. vienen de 9 luego 36. vendrán de 12. y 24. 25. avos, que es un quadrado, parte del 36. Otra vez: Si 25. vienen de 16. luego 36 vendrán de 23. y 1. 25 avos, que es el otro quadrado, el qual tambien, y mas facilmente se puede saber, restando el primer quadrado 12. y 24. 25. avos del 36 Con que está dividido el 36. en dos quadrados, cuyas raíces por regla de tres tambien se pueden conocer, obrando por las raíces deste modo: Si 5. dan 3. luego la raíz 6. del 36. dará 3. y tres quintos. Otra vez: Si 5. dan 4. luego 6. darán 4. y quatro quintos.

Para dividir al dicho 36. en otras partes, dividase cada quadrado en otras dos partes por la misma regla, diciendo: Si 25. vienen de 9. luego 12. y 24. 25. avos vendrán de 4. y 416. 625. avos. Otra vez: Si 25. vienen de 16. luego el quadrado 12. y 24. 25. avos vendrá de 8. y 184. 625. avos. Asimismo se dividirá en dos quadrados la otra parte quadrada 23 y 1. 25. avos, y cada quadrado se dividirá en otros dos infinitamente.

731 Question 2. Un Mercader dexó à otro 54. doblones por tiempo de 3. años, à razon de cierto interés por 100. cada año; pero con tal condicion, que la ganancia de cada año ganase al mismo respeto que el principal. Despues de los 3. años le bolvió entre caudal, y ga-

ganancia 128. doblones; preguntase à razon de quanto se gana por 100. al año ? Esta question se resuelve buscando medios geometricos, y despues usando de la regla de tres, deste modo: Busquense dos medios geometricos entre 54. y 128. porque siendo el empleo por 3. años y los 128. correspondiendo al tercer año, cierto está que faltan dos años, que son otros tantos medios. El medio, pues, menor entre 54. y 128. es 72. que es la ganancia junta con el empleo del primer año, y asi, si de 62. se quita el empleo 54. quedarán 19. por la ganancia sola del primer año. Con que los 54. doblones ganan 18. doblones en el primer año.

Ahora para saber quanto se gana por 100. en un año, diré por regla de tres: Si 54 ganan 18. en un año; luego 100. ganarán 33. y un tercio en el mismo año; y asi diré, que en el sobredicho contrato se gana à razon de 33. y un tercio por 100.

732 Question 3. Pedro pagó una deuda en 4. años en cierta proporcion geometrica; el primer año pagó 2. reales, y el quarto 128. preguntase en que razon estavan las pagas de cada año? Porque los años son 4. y se tiene la paga del primero, y del quarto, hallense dos medios geometricos entre 2. y 128. y en rigor basta hallar el medio menor, que es 8. al qual se dividirá por el primer termino 2. y saldrá 4. que es el denominador de la razon de las pagas. Con que cada paga fue quadrupla de la antecedente.

733 Question 4. Pidense dos numeros quadrados, que la suma de ellos sea tambien numero quadrado. Para resolver esta question se ha de suponer, como se dixo en la question 1. que estos quadrados 9. 16. sumados hacen numero quadrado 25. Esto supuesto, tomese qualquier numero quadrado como 4. y digase por regla de tres: Si 9. dan 16. luego 4. darán 7. y un noveno, que es el otro quadrado; y sumando 4. con 7. y un noveno sale numero quadrado 11. y un noveno.

Esta misma question resuelven Puig, y Ventallol de otro modo. Tomese un qualquier quadrado impar como 25. del qual quitese una unidad, y quedaràn 24. cuya mitad es 12. quadrese el 12. y serà 144. el otro quadrado; y sumando 25. con 144. salen 169. tambien numero quadrado.

734 Question 5. En un aposento hay una ventana prolongada, que tiene 6. palmos de ancho, y 10. y dos tercios de alto, la qual se ha de cerrar, y hacer otra quadrada, de suerte que entre la misma luz; preguntase quantos palmos tendrá por cada lado? Hallese un medio geometrico entre los lados de la ventana prolongada, mul-

tiplicando 6. por 10. y dos tercios, y del producto 64. saquese la raíz quadrada 8. la qual será el lado de la ventana quadrada. Por esta regla se reducirá qualquier figura rectangula prolongada á quadrado, sacando un medio geometrico entre los lados, el qual será el lado del quadrado.

735 Question 6. Pidense tres numeros quadrados, que la suma de ellos será tambien numero quadrado. Tomense dos numeros quadrados como 9. y 16. que sumados hagan numero quadrado por la question 4. y dado el numero quadrado 25. que es la suma de los dichos quadrados, hallese por la misma question 4. otro quadrado, de suerte, que la suma de los dos sea numero quadrado.

736 Question 7. Pidense dos numeros, que multiplicandos cada uno por sì mismo, y juntos los dos productos, hagan una unidad. Busquense dos numeros quadrados, que la suma de los dos sea numero quadrado como 9. y 16. cuya suma es 25. y formense dos quebrados, que tenga por denominador la raíz de la suma 25. y por numeradores las raíces de los quadrados 9. y 16. como son tres quintos, quatro quintos; y estos serán los que se piden.

Si se piden tres numeros, que multiplicados cada uno por sí mismo, y sumados los productos hagan asi mismo la unidad: busquense tres numeros quadrados, cuya suma sea numero quadrado como 9. 16. 144. cuya suma es 169. Formense ahora tres quebrados, cuyo denominador sea la raíz quadrada 13. de la suma 169. y los numeradores sean las raíces de los otros quadrados, así $\frac{3}{13}$ $\frac{4}{13}$ $\frac{12}{13}$.

737 Question 8. Pidense dos numeros quadrados, cuya suma sea igua à la suma de sus raíces. Tomense dos qualquiera numeros, como 2. y 4. cuya suma es 6. la qual partida por 20. que es la suma de sus quadrados, salen 6. 20. avos; y multiplicando este quadrado por los numeros tomandos 2. y 4. salen raíces 12. 20. avos, 24. 20. avos, cuyos quadrados son 144 400. avos, y 576. 400. avos. La suma de los quadrados es igual à la suma de las raíces.

Si se piden tres numeros quadrados, cuya suma sea igual à la suma de sus raíces, tomense qualesquiera numero 1. 2. 4 cuya suma 7. se partirá por la suma 21. de sus quadrados, y saldrá el quebrado 7. 21. avos, el qual multiplicado por los dichos numeros, serán las raíce 7. 21. avos, 14. 21. avos, y 28. 21. avos, cuyos quadrados sumados igualan á la suma de dichas raíces.

738 Question 9. Pidense dos numeros cubicos, cuya suma sea igual à la suma de sus raíces cubicas. Tomense estos dos numeros 5. y 8. los quales tienen tal propriedad, que la suma de sus cubos,

par-

partida por la suma de ellos mismos, viene al quociente numero quadrado. Sumense, pues, 5. y 8. la suma 13. se dividirá por 637. que es la suma de sus cubos, para que salga el quebrado 1. 49. avos, del qual se tomará la raíz quadrada, que será un septimo, la qual multiplicada por 5. y 8. dará las raíces cubicas cinco septimos, ocho septimos, cuya suma es igual à la suma de los cubos de dichas raíces.

739 Question 10. Dos Mercaderes van à una feria, el uno lleva 36. piezas de lienzo, y el otro lleva 900. reales de à ocho para emplear en el mismo genero de lienzo; quando estuvieron en la feria à tal precio compró el uno como vendió el otro, y tantas piezas compró el uno, quantos reales de à ocho se llevó el otro; preguntase quanto valia la pieza del lienzo; y quantas piezas se compraron con los 900. reales de à ocho.

Esta question resuelve Ventallol desta suerte. Hallase un medio Geometrico entre 36. y 900. el qual será 180. tantas piezas de lienzo se compraron con los 900. reales de à ocho, y otros tantos reales de à ocho se llevó el que vendió las 36. piezas. Ahora para saber quanto valia cada pieza de lienzo, dividanse los 180. por 36. y saldrán 5. Con que 5. reales de à ocho valia cada una.

LIBRO IV.

DE LAS PROGRESSIONES, Y COMBINACIONES.

AUnque este libro sirve de poco provecho para el trato mercantil, y por tanto puede dexarle el que solo se contentáre con la Arithmetica vulgar; pero por los admirables, y reconditos usos que tiene en la Matematica, y Filosofia, merece el primer lugar en esta obra. Porque à mas de las sutilisimas proposiciones, qne nacen de las progressiones, las acreditan la *Algebra*, à quien llaman *Arte Mayor*, y la prodigiosa fabrica de los Logarithmos, pues tienen todo su fundamento en las mismas progressiones. En las combinaciones estriva la arte, que llaman *Combinatoria*, que es una principal parte de la Filosofia, de quien hacen mucho aprecio, y con razon, los Llulistas. Contiene este libro dos partes, la primera trata de las *Progressiones*, y la segunda de las *Combinaciones*.

PARTE I.

DE LAS PROGRESSIONES.

740 PRogression numerica es una série de numeros continuada alomenos por tres terminos, con algun exceso, ò diferencia proporcional, que es lo mismo que una razon continuada por

muchos terminos ; los quales, como queda dicho, han de ser lo menos tres , para que haya dos diferencias , que son menester para hacer una *razon Mathematica.* La Progression es en dos maneras, una Arithmetica , quando las diferencias de los terminos son iguales, ò tienen entre sí razon de igualdad , como 2. 4. 6. 8. &c. ò como 8. 6. 4. 2. La otra es *Geometrica* , quando las diferencias son desiguales , ò guardan entre sí alguna razon de desigualdad , como 1. 2. 4. 8. 16. &c. ò como 16. 8. 4. 2. 1.

741 Qualquiera destas Progressiones Arithmetica , ò Geometrica puede ser *Ascendente* , ò *Descendente.* En la Ascendente los terminos van creciendo como 3. 8. 13. 18. &c. ò como 1. 6. 36. 216, &c. En la Descendente van menguando como 12. 9. 6. 3. ò como 27. 9 3. 1. Mas qualquiera de estas dos progressiones Ascendente , ò Descendente , se puede continuar por infinitos , ò por mejor decir, por indefinitos terminos; pero con esta diferencia , que la progression Arithmetica Ascendente se puede continuar indefinitamente por terminos positivos ; pero la Arithmetica Descendente no se puede continuar por terminos positivos , sino por negativos , de este modo 6. 4. 2. 0.—2.—4.—6. &c. en la qual los numeros que tienen este señal— son negativos , que son menos que nada , como lo explican los que tratan de Algebra, y de los Logarithmos. La progression Geometrica Ascendente , siempre se puede continuar por numeros enteros , ò por enteros y quebrados; pero la descendente Geometrica solo se puede continuar infinitamente por numeros quebrados. La progression Arithmetica que comienza del zero , y la diferencia de los terminos , es la unidad , como 0. 1. 2. 3. 4. &c. se dice progression natural.

742 Denominador de una progression Geometrica (la progression Arithmetica propriamente no tiene denominador , sino que la diferencia de sus terminos se llama denominador , aunque no con toda propriedad) es el mismo denominador de la razon , que dicen entre sí los terminos de la misma progression; pero con esta advertencia, que aunque los terminos tengan razon de menor desigualdad; esto es , que la progression sea Ascendente, siempre se nombra la razon de mayor desigualdad , comparando el mayor con el menor ; y asi , esta progression 3. 9. 27. 81. no se dirá suptripla , sino tripla. Asi mismo, esta progression 1. 4. 16. 64. será quadrupla, aunque los terminos tengan entre sí razon subquadrupla; porque de este modo de hablar usan los Autores , pues el ser la razon de mayor , ò menor desigualdad , bastantemente se explica con decir progression Ascendente, ò Descendente.

743 En qualquier progression finita , y terminada se deben

considerar cinco cosas. La primera es el termino menor, el qual siempre señalaremos con este señal *Me*. La segunda el termino mayor señalado *Ma*. La tercera el numero de los terminos, cuyo señal será *N*. La quarta la de la progression, que señalaremos con *S*. La quinta el denominador de la progression, que se significará con una *D*.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA PROGRESSION ARITHMETICA.

PROBLEMA. I.

CONTINUAR UNA PROGRESSION ARITHMETICA.

744 Si la progression es ascendente, añadase la diferencia, ò denominador al ultimo; termino; y si es descendente, restese, y asi procediendo se continuará; como si se dá la progression 2. 5. 8. 11. cuya diferencia es 3. añadola al 11. y salen 14. que es otro termino; añado 3. à 14. y salen 17. añado 3. à 17. y salen 20. y asi infinitamente. Pero si la progression es descendente, como 20. 17. 14. 11. resto la diferencia 3. del 11. y quedará el siguiente termino 8. asimismo, resto 3. del 8. y quedará el siguiente termino 5. resto 3. de 5. y saldrá el 2. resto 3. de 1. y saldrá el termino negativo——1. resto el 3. y saldrá——4. &c. con que será la progression continuada 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2.——1.——4.

Demonstracion.

En la Progression Arithmetica la diferencia de los terminos siempre es igual (740): Luego añadiendo continuamente la dicha diferencia al termino mayor, ò restandola del termino menor se continuará infinitamente.

Observacion.

745 En qualquier progression Arithmetica, como 5. 7. 9. 11. 13. un termino mayor como 11. contiene à otro menor, como al 5. y mas tantas veces á la diferencia 2. quantos son los terminos desde 11. hasta 5. porque como añadiendo la diferencia 2. al 5. continuamente, se ha pro-

producido el 11. Luego contendrá al 5. y à tantas diferencias quantas se han añadido. Con qué en la progression Arithmetica finite, el mayor termino contiene el menor, y à tantas diferencias, quantos son los terminos, menos uno.

THEOREMA I.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA LA SUMA de los extremos es igual à la suma de qualesquiera dos terminos igualmente distantes de los extremos.

746 SEa una qualquier progression Arithmetica A. B. C. D. E. F. G. cuya diferencia sea Z. Digo que la suma de los extremos A. y G. es igual à la suma de B. y F. igualmente distantes de los mismos extremos, ò por mejor decir, immediatos à los mismos extremos. Porque si del extremo mayor C. se quita la diferencia Z. quedarán F. y G. iguales, pues G. excede à F. en la dicha diferencia, la qual si se añade al menor extremo A. serán A. y B. iguales; y considerando los terminos deste modo, si cada uno de los dos iguales A. y B. se añade à cada uno de los dos iguales F. y G. las sumas necesariamente han de ser iguales: Luego la suma de los extremos A. y G. es igual à la suma de dos terminos B. y F. immediatamente distantes de dichos extremos.

Z. 4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.
3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.

Por la misma razon, la suma de B. y F. es igual à la suma de sus terminos immediatos C. y E. Luego la suma de los extremos es tambien igual à la suma de C. y E. y asi de otros qualesquiera terminos, precediendo siempre por los immediatos: Luego absolutamente la suma de los extremos es igual à la suma de qualesquiera dos terminos igualmente distantes.

Y generalmente la suma de dos terminos de una progression Arithmetica, es igual à la suma de qualesquiera otros dos terminos igualmente distantes, ahora sea ácia al medio de la progression, ò ácia los extremos, como consta por la misma demonstracion.

*** *** ***

*** *** ***

THEOREMA II.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DE TERminos impares, la suma de los extremos es igual al duplo del termino medio.

747 SEa qualquier progreſsion Arithmetica de terminos impares A. B. C. D. E. F. G. cuya diferencia es Z. Digo, que la suma de los extremos A. y G. es igual al termino medio D. doblado: Porque si se toman los terminos C. y E. immediatos à D. la suma de ellos es igual à la suma de los extremos, por el Theorema antecedente: Luego probaré que la suma de C. y E. es igual al duplo de D. quedará probado, que la suma de los extremos es igual al mismo duplo de D. lo qual pruevo asi: Si del termino E. se quita la diferencia Z. quedarán D. y E. iguales; y si la diferencia quitada se añade à C. será C. y D. iguales; con que los tres C. D. E. serán iguales: Luego sumando C. y E. se toman dos terminos iguales: Luego la suma de C. y E. es igual al duplo de D.

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.
1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.

Z. 3.

Y generalmente, el duplo de qualquier termino es igual à la suma de dos qualesquiera terminos igualmente distantes; ò qualquier termino es la mitad de la suma de dos qualesquiera terminos igualmente distantes.

THEOREMA III.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, SI DE LA suma de dos terminos se resta un qualquier otro termino, el residuo será un termino distante tanto del uno de los sumados, quanto el restado dista del otro.

743 SEa la progreſsion Arithmetica A. B. C. D. E. F. G. en la qual se suman los dos terminos A. y. F. Digo, que si de dicha suma se resta un qualquier termino C. que dita dos terminos de A. quedará el termino D. distante tambien dos terminos de F. Porque como las sumas de dos terminos igualmente distan-

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.
20.	18.	16.	14.	12.	10.	8.

tantes son iguales, si de la suma de A. y F. se resta C. quedará D. igualmente distante de F. para que la suma de C. y D. sea igual à la de A. y F.

THEOREMA IV.

LAS SUMAS DE LOS TERMINOS DE LAS PROGRESSIOnes Arithmeticas forman Progression Arithmetica.

749 SEan dos, ò mas progressiones Arithmeticas A. y B. Digo, que la suma de sus terminos forma la progression Arithmetica D. Porque siendo ambas progressiones ascendentes, los segundos terminos 6. y 5. exceden á los primeros 4. y 2. en las diferencias 2. y 3. Los terceros terminos 8. y 8. exceden à los segundos 6. y 5. en las mismas diferencias; y asi de los demás. De suerte, que cada termino excede à su antecedente en la diferencia de la progression: Luego cada termino de la suma tambien excede à su antecedente en la suma de las dos diferencias; y asi la suma constituye progression Arithmetica.

A.	4.	6.	8.	10.
B.	2.	5.	8.	11.
D.	6.	11.	16.	21.

Quando las progressiones son descendentes, los primeros terminos exceden à los segundos en la diferencia de la progression: Luego tambien los primeros terminos de la suma exceden à los segundos en la suma de las diferencias; y asi es progression Arithmetica.

Pero quando la una progression es ascendente, y la otra descendente, los segundos terminos de la ascendente exceden à los primeros en la diferencia de la progression, y los segundos terminos de la descendente son excedidos de los primeros en la diferencia de su progression: Luego los terminos de la suma se exceden en la diferencia de las diferencias de las progressiones; y asi dicha suma forma progression Arithmetica.

A.	4.	6	8.	10.
B.	11.	8.	5.	2.
D.	15.	14.	13.	12.

Consectario.

750 Quando ambas progressiones son ascedente, ò descendentes, la diferencia de la progresion D. es la suma de las progressiones; pero quando la una es ascendente, y la otra descendente la diferencia de la progression D. es la diferencia entre las diferencias de las progressiones A. y B.

THEOREMA V.

LAS RESTAS DE LOS TERMINOS DE LAS progressiones Arithmeticas forman progression Arithmetica.

751 SEan dos, ò mas progressiones Arithmeticas A. y B. Digo, que restando los menores terminos de la una de los de la otra, sale la progression Arithmetica D. Porque quando las progressiones A. y B. son ascendentes, cada termino excede à su antecedente en una diferencia; y por consiguiente, los segundos terminos exceden à los primeros en una sola diferencia; los terceros exceden à los primeros en dos diferencias, &c. Y si estas diferencias se quitasen de dichos terminos, quedarian iguales à los primeros, y asi la resta serian terminos iguales à la resta del primero menor del primero mayor, que aqui es 6. Pues como los segundos terminos exceden à los primeros en una diferencia, el segundo mayor excederá al segundo menor en el residuo de los primeros, que aqui es 6. y mas en el residuo de las diferencias 3. y 1. que es 1. Asimismo, el tercero mayor excederá al tercero menor en el residuo 6. y en dos residuos de las diferencias, que aqui es 4. ò excederá al menor en el numero antecedente 8. y un residuo de las diferencias, y asi de los demás: Luego las diferencias de la resta son iguales, y asi forman progression Arithmetica.

8.	11.	14.	17.	A.
2.	3.	4.	5.	B.
6.	8.	10.	15.	D.

Quando ambas progressiones son descendentes, los segundos terminos son excedidos de los primeros en una diferencia; y asi es la misma demonstracion. Pero quando la una es ascendente, y la otra descendente, crecen, y menguan igualmente: Luego tambien las restas de los terminos han de crecer, ò menguar igualmente, y por consiguiente han de formar progression Arithmetica.

Consectario.

752 Siendo ambas progressiones ascendente, ò descendentes, la diferencia de la resta D. es la diferencia entre las diferencias de las progressiones A. y B. Pero quando la una es ascendente, y la otra descendente, entonces la diferencia de D. es la suma de las diferencias de A. y B.

9.	6.	3.	0.	A.
2.	4.	6.	8.	B.
7.	2.—	3.—	8.	D.

PROBLEMA II.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS dos extremos, y el numero de los terminos hallar la suma.

753 EN este, y en los Problemas siguientes, se ha de advertír, que de las cinco cosas que en cada progression se deven considerar (743) las tres han de ser conocidas, para que se puedan saber las otras.

Esto supuesto, multipliquense la suma de los extremos por el numero de los terminos, y tomando la mitad del producto, será la suma de todos los terminos de la progression; como si Pedro destribuye cierta cantidad de reales en los pobres en progression Arithmetica por espacio de 7. dias; en el primero dá 3. reales, y en el ultimo 33. Pidese quanta es toda la cantidad que dá de limosna.

Me. Ma.	N.	S.	D.
3. 8. 13. 18. 23. 28. 33.	7.		5.

Sumando los terminos mayor; y menor 33. y 3. son 36 la qual suma, mustipliquese por 7. que es el numero de los dias, ò terminos, y del producto 252. tomese la mitad 126. la qual es la suma de la progression, ò los reales que destribuyó en los pobres.

Demonstracion.

Las sumas de los terminos de dos en dos igualmente distantes de los extremos, son iguales entre sí; esto es, todos los pares de terminos, hacen suma igual, y quando el numero de los terminos es impar, se toma el termino medio dos veces, como consta de los Theoremas antecedentes. Y si todos los pares de terminos, hacen la suma de la progression luego si un par de terminos, que es la suma de mayor, y menor, se multiplica por el numero de los pares de terminos, esto es, se toma tantas veces quantos son los dichos pares, saldrá la suma de la progression; y si se multiplica por el numero de los terminos, el qual es doblado del numero de los pares, saldrá numero doblado de la suma de la progression; y por eso multiplicando la suma de los extremos por el numero de los terminos, y tomando la mitad del producto, sale la suma que se busca.

Consectarios.

754 La misma suma se sabrá multiplicando la suma de los ex-

extremos por la mitad del numero de los terminos; ò multiplicando la mitad de la suma de los extremos por el numero de los terminos; como se infiere de la demonstracion antecedente.

755 Quando el numero de los terminos es impar; se hallará la suma de la progression, multiplicando el termino medio por el numero de los terminos, porque el termino medio, es la mitad de la suma de los extremos; luego lo mismo es multiplicar la mitad de la suma de los extremos por el numero de los terminos, que multiplicar el termino medio por el mismo numero de los terminos.

756 En la progression natural como 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. Si el mayor termino 6. se multiplica por el que se habia de seguir, si prosiguiera la progression, que es el 7. y del producto se toma la mitad, será la suma de todos los terminos; porque el dicho numero que en la progression natural se sigue al 6. es el numero de los terminos.

757 En la progression natural de los numeros impares, como 1. 3 5. 7. 9. &c. La suma es igual al quadrado 25. del numero de los terminos; porque el producto de la mitad de la suma de los extremos por el numero de los terminos, es la suma de la progression como se dixo antes; el numero pues de la mitad de la suma de los extremos es igual al numero de los terminos; porque el termino mayor 9. tomese al menor 1. y tantas veces à la diferencia 2. de los terminos, quantos son los mismos terminos menos uno (745); y asi si al mayor termino 9. se añade el menor 1. la suma 10. contendrá tantas veces à la diferencia 2. quantos son los terminos, y por consiguiente será doblada del numero de los mismos terminos: Luego la mitad de la suma de los extremos, será igual al numero de los terminos; luego multiplicando la dicha mitad por el numero de los terminos, saldrá la suma de la progression numero quadrado, cuya raiz es el numero de los terminos.

PROBLEMA III.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS extremos, y el numero de los terminos, hallar la diferencia.

758 Restese el extremo menor del mayor, y el residuo dividase por el numero de los terminos menos uno, el quociente será la diferencia que se busca: Como si un Mer-

cader ha de pagar à otro una cierta cantidad en progreſsion Arithmetica; esto es, que las pagas se exceda. igualmente por espacio de 5. años, en el primer año paga 2. doblones, y en el ultimo 22. Pidese quanto ha de pagar cada año. Restando el menor 2. del mayor 22. quedarán 20. divididos por 4. que es el numero de los años menos uno, porque los dichos años son 5. y quitando 1. quedan 4. sale la diferencia 5. de las pagas; la qual añadida al menor termino 2. saldrá la paga 7. del segundo año; y añadiendo la misma diferencia 5. saldrá la paga 12. del tercer año, y asi de las demás.

Me.	N.	S.	D.
2. 7. 12. 17. 22.	5.	60.	

Demonstracion.

El termino mayor, contiene al menor, y tantas veces à la diferencia, quantos son los terminos menos uno, como consta por la misma naturaleza de la Progression Arithmetica; luego restando el menor del mayor, y dividiendo la resta por el numero de los terminos menos uno, saldrá la diferencia.

PROBLEMA IV.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LA suma, y los extremos, hallar el numero de los terminos.

759 EL duplo de la suma de la progression, dividase por la suma de los extremos, y saldrá el numero de los terminos; como si Pedro ha de pagar 70. libras en progression Arithmetica cada año; en el primer año paga 19. y en el ultimo paga 1. preguntase en quantos años pagará las dichas 70. libras. Doblese la suma 70. y el duplo 140. dividase por la suma 20. de los extremos, y saldrán 7. que es el numere de los terminos, ò años en que ha de pagar las dichas 70. libras en progression Arithmetica.

Ma. Me.	N.	S.	D.
19. 16. 13. 10. 7. 4. 2.		70.	3.

Demenstracion.

Para saber la suma de la progression, se multiplica la suma de los extremos por el numero de los terminos, y sale el duplo de la suma (749); luego si el duplo de la suma de la progression, se divide por la suma de los extremos, saldrá el numero de los terminos.

PROBLEMA V.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS extremos, y la suma, hallar la diferencia.

760 HAllado el numero de los terminos por el Problema 4. estarán conocidos los extremos, y el numero de los terminos; por los quales se hallará la diferencia por el Problema 3.

PROBLEMA VI.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS extremos, y la diferencia hallar el numero de los terminos.

761 REstese el extremo menor del mayor, y dividiendo el residuo por la diferencia, saldrá un quociente, el qual si se añade una unidad, será el numero de los terminos. Como si un correo camina ciertas leguas en progression Arithmetica cada dia, el primer dia camina 13. leguas, y el ultimo 3. pero cada dia camina dos leguas menos; preguntase en quantos dias concluirá todo el viage. Quitese el extremo menor 3. del mayor 13. y el residuo 10. dividase por la diferencia 2. al quociente 5. añadase 1. y serán 6. los dias del viage.

Ma.					Me.	N.	S.	D.
13.	11.	9.	7.	5.	3.		48.	2.

Demonstracion.

El extremo mayor contiene al menor, y à tantas veces la diferencia, quantos son los teminos menos uno, como por sí mismo es manifiesto. Luego si del extremo mayor se resta el menor, y el residuo se divide por la diferencia, saldrá el numero de los terminos menos uno, y añadiendo al quociente 1. será todo el numero de los terminos.

PRO.

PROBLEMA VII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS extremos, y la diferencia, hallar la suma.

762 POr el Problema antecedente, hallese el numero de los terminos, y entonces conocidos los extremos, y dicho numero de los terminos, se hallará la suma por el Problema 2.

PROBLEMA VIII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL extremo menor, el numero de los terminos, y la suma de la progression, hallar el extremo mayor.

763 DIvidase el duplo de la suma de la progression por el numero de los terminos, quitando el extremo menor del quociente, quedará el mayor extremo: como si un Artifice hace una estatua en 8. dias por precio de 144. reales, pero le han de pagar en progression Arithmetica, dandole el primer dia 10. reales que es la menor paga; preguntese quantos reales ha de cobrar el ultimo dia. Doblense los 144. reales, que es toda la paga, ò suma de la progression, y serán 288. los quales divididos por 8. que es el numero de los dias, ò terminos, darán el quociente 36. del qual restado el menor extremo 10. quedará el mayor extremo 26. que es la paga del ultimo dia.

10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26.

Demonstracion.

Para saber la suma de la progression, se multiplica la suma de los extremos por el numero de los terminos, y del producto se toma la mitad (749(: Luego si se dobla la suma dada, y el duplo se divide por el numero de los terminos, saldrá la suma de los extremos, de la qual quitando el extremo menor, quedará el mayor.

* * *

PROBLEMA IX.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL menor extremo, el numero de los terminos, y la suma de la Progression, hallar la diferencia.

764 PRimeramente se hallará el mayor extremo por el Problema antecedente, y despues se hallará la diferencia por el Problema 5.

PROBLEMA X.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL menor extremo, numero de los terminos, y la diferencia, hallar el mayor extremo.

765 MUltipliquesè la diferencia por el numero de los terminos menos uno, y al producto añadase el menor extremo, para que salga el mayor: Como si Pedro pagó en 6. años una cierta deuda en progression Arithmetica, cuya diferencia es 3. En el primer año pagó 5. libras, que es la menor paga; preguntase quanto pagó el ultimo año: Quitese 1. del numero de los terminos 6. y quedarán 5. Multipliquese ahora la diferencia 3. por 5. y al producto 15. añadase el menor extremo, ò paga del primer año 5. y serán 20. las libras que ha de pagar el ultimo año.

Demonstracion.

El mayor extremo contiene al menor, y à tantas veces la diferencia, quantos son los terminos menos uno, como queda dicho antes: Luego si la diferencia se multiplica por el numero de los terminos menos uno, y al producto se añade el menor extremo, saldrá el mayor.

PROBLEMA XI.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL menor extremo, el numero de los terminos, y la diferencia, hallar la suma.

766 HAllese primeramente el extremo mayor por el Problema antecedente; despues se hallará la suma de la progression por el Problema 2.

PROBLEMA XII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL mayor extremo, el numero de los terminos, y la suma, hallar el menor extremo.

767 EL duplo de la suma, dividase por el numero de los terminos, y quitando el mayor extremo del quociente, quedará el extremo menor que se busca. La demontracion es la misma que la del Problema 8.

PROBLEMA XIII.

EN LA PROGESSION ARITHMETICA, DADOS EL mayor extremo, el numero de los terminos, y la suma, hallar la diferencia.

768 PRimeramente se hallará el extremo menor por el Problema antecedente, despues dados los dos extremos, y el numero de los terminos, se sabrá la diferencia por el Problema 3.

PROBLEMA XIV.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA DADOS EL mayor extremo, el numero de los terminos, y la diferencia, hallar el menor extremo.

769 MUltipliquese la diferencia por el numero de los terminos menos uno, y quitando el mayor extremo del producto, quedará el menor: La demonstracion es la misma que la del Problema 10.

PROBLEMA XV.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL extremo mayor, el numero de los terminos, y la diferencia, hallar la suma.

770 HAllase el extremo menor por el Problema antecedente, y despues hallase la suma por el Problema 2.

PROBLEMA XVI.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL numero de los terminos, la suma, y la diferencia, hallar los extremos.

771 DIvidase el duplo de la suma por el numero de los terminos, y el quociente será la suma de los extremos, como consta de la demonstracion del Problema 8. Despues multipliquese la diferencia por el numero de los terminos menos uno, y el producto será el extremo mayor menos el menor, ò la difetencia entre los extremos, como consta de la demonstracion del Problema 10. Ultimamente quitese esta dsferencia entre los extremos de la suma de los mismos extremos, y quedará el duplo del extremo menor, el qual se añade à la dicha diferencia de los extremos, saldrá el mayor extremo.

Como si un correo en 6. dias caminó 75. leguas en progression Arithmetica, cuya diferencia es 3. preguntase quantas leguas caminó el primero, y ultimo dia. La suma es 75. la qual doblada son 150. leguas, que divididas por 6. dias, sale la suma de los extremos 25. Despues multipliquese la diferencia 3. por el numero de los terminos menos uno, que son 5. dias, y el producto 15. será las leguas que corrió el ultimo dia menos las del primero. Ultimamente restense estas 16. leguas de la suma de los extremos 25. y quedarán 10. cuya mitad es 5. que son las leguas que corrió el primer dia; las ~~quales si se~~ añaden à las 15. leguas, que es la diferencia de los extremos, será el mayor extremo 20.

Me.					Ma.	N.	S.	D.
5.	8.	11.	14.	17.	20.	6.	75.	3.

PROBLEMA XVII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL menor extremo, la suma, y la diferencia, hallar el mayor extremo, y el numero de los terminos.

772 EL duplo de la suma de la progression, multipliquese por la diferencia, y guardese el producto, des-

despues quitese la mitad de la diferencia del extremo menor, ò este de aquella, y el quadrado del residuo, se sumará con el producto guardado de la cuya raíz quadrada restando la mitad de la diferencia, saldrá el extremo mayor que se buscava: Y dados los dos extremos, y la suma, se hallará el numero de dos terminos por el Problema 4.

Como si Pedro pagó 45. libras en progression Arithmetica, cuya diferencia es 4. el primer año pagó la menor paga 1. libra; preguntase quanto pagó el ultimo, y en quantos años. Doblense las 45. libras, y serán 90. las quales multiplicadas por la diferencia 4. son 390. Despues restando el menor extremo 1. de la mitad de la diferencia, que es 2. quedará 1. cuyo quadrado es 1. el qual se sumará con el producto 360. y serán 361. cuya raíz quadrada es 19. de la qual se restará la mitad 2. de la diferencia, y saldrá el extremo mayor, ò paga 17. libras.

1.	5.	9.	13.	17.
Me.				Ma.

N.	S.	D.
	45.	4.

Para saber los años, dividase el duplo 90. de la suma, por la suma 18. de las dos pagas extremas, y saldrá el numero de los años 5. Y asi digo, que en 5. años pagará las 45. libras en progression Arithmetica, cuyo primer termino es 1. y la diferencia 4.

Este Problema, y el siguiente, son de la Algebra, y tiene su fundamento en la extraccion de raíz afecta, por lo qual no puedo poner sus demonstraciones hasta que tratemos del arte mayor.

PROBLEMA XVIII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL extremo mayor, la suma, y la diferencia, hallar el extremo menor, y el numero de los terminos.

773 SUmese el extremo mayor con la mitad de la diferencia, y quadrase la suma: Despues multipliquese la suma de la progression por la diferencia, y restando el duplo del producto del quadrado sobredicho, saquese la raíz quadrada del residuo, à la qual se añadirá la mitad de la diferencia quando la raíz es mayor que dicha mitad, pero si fuere menor, se restará la raíz de la mitad de la diferencia, y saldrá el extremo menor; el

qual conocido, se sabrá el numero de los terminos por el Problema 4.

Como si Pedro pagó 45. libras en progression Arithmetica, cuya diferencia es 4. La paga mayor fue 17. libras. Preguntase quanta fue la menor, en quantos años pagó. Sumense las 17. libras de la mayor paga con la mitad 2. de la diferencia, y será la suma 19. cuyo quadrado es 361. Multipliquense ahora las 45. libras por la diferencia 4. cuyo producto 180. se doblará, y será 360. el qual restado del quadrado 361. quedará 1. cuya raíz quadrada es 1. la qual restada de la mitad 2. de la diferencia, porque es menor que dicha mitad, quedará 1. que es la paga menor.

Para hallar el numero de las pagas, dividase el duplo de 45. que es 90. por 18. que es la suma de los extremos, ò pagas mayor, y menor, y saldrán 5. que es el numero de las pagas.

PROBLEMA XIX.

DADA LA SUMA DE DOS, O MUCHAS PROGRESSIONES Arithmeticas justas de igual numero de terminos, y dados el un extremo, y la diferencia de cada una, hallar el numero de los terminos.

774 COntinuese cada progression dada à lo menos por dos terminos por el Problema 1. escribiendo la una debaxo la otra, y sumando los terminos correspondientes para conocer la diferencia, cuyas sumas formarán tambien progression Arithmetica (749) en la qual dados el un extremo, la diferencia, y la suma, se conocerá el numero de los terminos por el Problema 17. ò por el 18.

Exemplo I.

Dos Correos salen à un mismo tiempo; el uno de Madrid para Valencia camino de 50. leguas, y camina cada dia 8. leguas; el otro de Valencia para Madrid, y camina cada dia 10. leguas; preguntase quando se encontrarán. Continuese las dos progressiones por algunos terminos, como se vé, los quales se sumarán, y saldrá la progression 18. 18. 18. &c. cuya diferencia es zero, en la qual se conoce la suma 50 leguas, el un extremo 18. y la diferencia zero, y asi se conocerá

8.	8.	8.
10.	10.	10.
18.	18.	18.

el

el numero de los terminos por el Problema 17. que es 2. dias, y siete novenos de dia, que es el tiempo quando se encontrarán despues de la partida. Pero porque esta progression es de numeros iguales, se hallará el mismo tiempo mas facilmente. Doblese la suma 50. y serán 100. dividase por el duplo del primer termino 18. que es 36. y vendrán los mismos dias.

Exemplo II.

Una Ciudad tiene 3600. pasos de ambito, y dos hombres salen à un mismo tiempo caminando por partes encontradas para rodearla, el uno camina cada hora 1000. pasos, y el otro camina la primer hora 100. pasos, la segunda 200. la tercera 300. &c. Preguntase en quantas horas se encontrarán. Escribanse las dos progressiones, sumando los terminos correspondientes, y saldrá la progression 1100. 1200. &c. En la qual se conoce el menor extremo 1100. la diferencia 100. y la suma 3600. y asi se hallará en numero de los terminos por el Problema 17. que es 3. y asi digo, que en 3. horas se encontrarán.

1000.	1000.
100.	200.
1100.	1200.

Exemplo III.

En un granero hay 186. cahices de trigo, los quales han de sacar dos hombres en progression Arithmetica, el uno saca en la primer hora 3. cahices, en la segunda 8. &c. el otro saca en la primer hora 8. cahices, en la segunda 11. &c: Preguntase en quantas horas le sacarán todo. Escribanse algunos terminos destas dos progressiones, y sumandose, saldtá la progression 11. 19. &c. cuya diferencia es 8. Conocidos, pues, el menor extremo 11. la diferencia 8. y la suma 186. se hallará el numero de los terminos 6. por el Problema 17. Y asi digo, que en 6. horas sacarán todo el trigo.

3.	8.	13.
8.	11.	14.
11.	19.	27.

Exemplo IV.

Entre tres hombres han de llenar una cisterna, en la qual caben 550. cantaros de agua: El primero cada dia echa 50. cantaros: El segundo pone el primer dia 60. cantaros, el segundo 50. &c. El tercero echa el primer dia 20. cantaros, el segundo 35. &c. Preguntase en quantos dias llenarán dicha cisterna. Escribanse algunos terminos de las tres

50.	50.	50.
60.	50.	40.
20.	35.	50.
130.	135.	140.

progressiones, los quales sumados, hacen la progression 120. 135. &c. cuya diferencia es 5. Dada pues la suma 550. el menor extremo 130. y la diferencia 5. se hallará el numero de los terminos por el Problema 17,

Demonstracion.

Entre todas las progressiones juntas de leguas, pasos, cahices, cantaros, &c. se hace toda la obra; esto es, se caminan todas las leguas, ò pasos se vacía el granero, ò se llena la cisterna: Luego sumando los terminos de las progressiones, saldrá una progression tambien Arithmetica (749) que contiene toda la misma obra; en la qual progression se conoce la suma, el un extremo, y la diferencia, y asi se podrá conocer el numero de los terminos por los Problemas 17. 18 los quales representan las horas, ò dias de camino, ò trabajo. Y que estos terminos en todas las progressiones de leguas; pasos, &c. hayan de ser iguales, es manifiesto; porque el trabajo, ò camino se comienza, y acaba à un mismo tiempo.

775 Si se quieren saber las leguas, pasos, cahices, cantaros, que cada uno ha corrido, sacado, echado, se hallarán por el Problema 11. ò 15. pues que se conocen el numero de los terminos, la diferencia, y el un extremo; como si dos correos salen à un mismo tiempo, el uno de Madrid para Valencia caminando en progression Arithmetica, cuya diferencia es zero en el primer dia 8. El otro sale de Valencia para Madrid tambien en progression Arithmetica, cuya diferencia es zero caminando en el primer dia 10. leguas, los quales se encuentran en 2. dias, siete novenos de dia, preguntase quantas leguas camina cada uno, ò à quantas leguas se encontrarán. Se hallará, que el primero camina 22. leguas, y dos novenos, y el segundo 27. leguas, y siete novenos. Este exemplo por ser de progression es de numeros iguales, se hará mas facilmente multiplicando el primer termino, ò leguas que camina cada uno por los dias.

Asi mismo, conocidas las leguas que camina cada uno, los dias, y el primer termino, se sabrá la diferencia de la progression, y por consiguiente se conocerán los terminos de la misma progression por los Problemas 9. ò 13. Y con esto tiene el Arithmetico campo abierto, para ir combidando todos los Problemas antecedentes, è inventar inumerables questiones.

PROBLEMA XX.

EN DOS, O MUCHAS PROGRESSIONES ARITHMETICAS de igual suma, dados el un extremo, la diferencia, y la suma de cada una, hallar el numero de los terminos.

776 ESte Problema no contiene otra dificultad mas que resolver el Problema 17. quando el extremo dado es el menor, ò el Problema 18. quando es el mayor; pero aplicados à la practica, contiene muchas questiones curiosas, de las quales resolveré algunas en los exemplos siguientes.

Exemplo I.

De Barcelona à Madrid hay 100. leguas, y un Correo sale de Barcelona para Madrid caminando cada dia 10. leguas; otro Correo se atreve à caminar cada dia 16. leguas; preguntase quantos dias saldrá despues este segundo, para que entren los dos juntos en Madrid? Siguiendo la regla del Problema 17. se hallará, que el primer Correo caminará las 100. leguas que hay de Barcelona à Madrid en 10. dias; y el segundo las caminará en 6. dias y un quarto de dia, los quales se restarán de los diez dias que ha de menester el primer Correo, y quedarán 3. dias y tres quartos de dia, y tanto tiempo saldrá el segundo despues del primero, para que entren los dos juntos en Madrid. Este exemplo por contener progressiones de los terminos iguales se hará mas facilmente, dividiendo las 100. leguas por las 10. del primer Correo, y saldrán 10. dias, dividiendolas por las 16. del segundo Correo, saldrán 6. dias y un quarto, como antes.

Exemplo II.

Pedro ha de pagar 140. libras en progression Arithmetica, el primer año paga 8. libras, el segundo 12. &c. Preguntase si el primer año pagára 50. libras, el segundo 40. &c. si acabaria mas presto, ò mas tarde de pagar? Busquense los terminos de cada progression, y se hallará, que la primera se acaba en 7. años, y la segunda en 4. años.

La demonstracion deste Problema por sí misma, es manifiesta pero se ha de advertir, que algunas veces son tales las progressiones dadas, que no tiene lugar el Problema.

PROBLEMA XXI.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL UN extremo, y la diferencia, hallar el numero de los terminos, de suerte, que la suma de la progression sea igual al producto del numero de los terminos por un numero dado.

777 DEl duplo del numero dado, restese del extremo conocido, y quedará el otro extremo; despues dados los extremos, y la diferencia, se hallará el numero de los terminos por el Problema 6.

Exemplo I.

Dos Navios parten à un mismo tiempo, y por un mismo rumbo; el uno camina cada dia 30. millas; el otro camina el primer dia 10. millas, el segundo 15. &c. Preguntase en quantos dias alcanzará el segundo al primero? Doblense las 30. millas que camina cada dia el primero, y serán 60. de las quales se restarán las 10. millas que camina el segundo en el primer dia, y quedarán 50. que es el otro extremo. Ahora dados los extremos 10. y 50. la diferencia 5. se hallará el numero de los terminos por el Problema 6. quitando 10. de 50. y dividiendo la resta 40. por la diferencia 5. saldrán 8. à los quales añadiendo 1. serán 6. los dias que se buscan.

Si se desea saber à quantas leguas del Puerto se alcanzarán: multipliquense las 30. millas que camina el primero por los 9. dias, y saldrán 270. leguas.

Exemplo II.

Una Isla tiene de ambito 50. millas, y salen de un Puerto della dos Navios para rodearla caminando por una misma parte; el uno camina cada dias 20. millas, y el otro camina el primer dia 30. millas; el segundo 28. &c. Preguntase en quantos dias alcanzará el Navio primero al segundo? Del duplo de las 20. millas, que es 40. restense las 30. millas, quedarán 10. que es el ultimo extremo. Dados, pues, los extremos 30. y 10. y la diferencia 2. se sabrá el numero de los terminos, ò dias restando 10. de 30. y partiendo el residuo 20. por la diferencia 2. y al quociente 10. añadiendo 1. con que en 11. dia se encontrarán los Navios.

Si se quiere saber à quantas millas será el alcance: Multipliquense las 20. millas que camina el primer Navio cada dia por los

11. dias y saldrán 220. millas. Para saber quantas veces habrá rodeado la Isla cada Navio, dividanse las 220. millas por el ambito 50. y saldrán 4. veces, y sobran 20. millas que denotan la distancia del alcance desde el Puerto.

Demonstracion.

Las 20. millas que camina el primer Navio cada dia; multiplicadas por los 11. dias hasta el alcance, hacen toda la suma de la progression; y la suma de los extremos en la progression del segundo Navio, multiplicada por los mismos 11. dias, hace el duplo de la misma progression (son de igual suma las dos progressiones): luego el duplo de las 2. millas, que son 4. es igual à la suma de los extremos en la progression del Navio segundo; con que si de dicho duplo se resta el un extremo, quedará el otro, y estarán conocidos los dos extremos; á mas desto se sabe la diferencia: luego se conocerá el numero de los terminos por el Problema 6.

PROBLEMA XXII.

DADOS EL UN EXTREMO, Y DIFERENCIA DE CADA una de dos progressiones Arithmeticas de iguales sumas, y numero de terminos, hallar el dicho numero de terminos.

778 ESte Problema, es mas universal que el antecedente, porque se extiende à qualquier progression Arithmetica mientras sea proporcionada à la question propuesta, lo qual se conocerá por el mismo tenor de la question.

Escribanse à lo menos dos terminos de cada progression correspondientes unos à otros, los mayores arriba, y los menores debaxo, restense, y quedará una progression Arithmetica, (751) en la qual se han de buscar los teminos hasta el zero, deste modo: Dividase el primer termino (que siempre ha de ser el mayor, pues esta progression necesariamente ha de ser descendente para poderse resolver el Problema (por la diferencia, añadiendo 1. al quociente, dará el numero de los terminos hasta el zero, el qual doblado menos uno, será el numero de todos los terminos de la progression.

Exemplo I.

Dos caminantes salen à un tiempo de un mismo lugar, y ván por un mismo camino en progression Arithmeticas ; el uno camina en el primer dia 3. leguas; en el segundo 7. &c. el otro camina en el primer dia 1. legua en el segundo 6. &c. Preguntase quando se encontrarán? Escritos los terminos , y restados como se vé en la formula, saldrá la progression 2. 1. &c. cuya diferencia es 1. dividase el primer termino 2. por la diferencia 1. y al quociente 2. se añadirá 1. y serán 3. los terminos hasta el zero , doblense , y quitese 1. y quedarán 5. los terminos de toda la progression, por lo qual digo , que en 5. dias se alcanzarán.

$$\begin{array}{cc} 3. & 7. \\ 1. & 6. \\ \hline 2. & 1. \end{array}$$

Si se quiere saber à quantas leguas será el alcance , siganse las reglas de los Problemas 11. ò 15. en cada progression , y se hallarán 55. leguas.

Exemplo II.

Entre dos Oficiales hacen una obra , ganando en progressiones Arihmeticas ; el uno gana en el primer dia 4. reales , en el segundo 8. &c. El otro gana en el primer dia 10. reales , en el segundo 12. &c. Preguntase quanto habrá ganado tanto el uno como el otro ? Escritos los terminos de las progressiones , y restados como antes , sale la progression 6. 4. &c. cuya diferencia es 2. dividase , pues , el primer termino 6. por 2. y al quociente 3. añadase 1. serán 4. doblense , y quitese 1. y será 7. ò mas facilmente doblese el quociente 3. y al duplo 6. añadase 1. con que en 7. dias habrán ganado igualmente.

$$\begin{array}{cc} 10. & 12. \\ 4. & 8. \\ \hline 6. & 4. \end{array}$$

Demonstracion.

Para la inteligencia de la demonstracion , continuese las progressiones de un exemplo destos , y sean del primero , donde restando los terminos de una progression de los terminos de la otra , al tercer termino se igualan , y por consiguiente el termino de la resta , es zero. Digo , pues , que donde las progressiones se igualan , es el medio de las dichas progressiones , para que en ambas la sumas , y numeros de terminos sean iguales ; porque quando la primera progression lleva ventaja à la segunda hasta los terminos iguales , tanto de alli la segunda excede à la primera ; luego los terminos iguales están en medio ; y asi hallado el numero de los terminos hasta el zero , se sabrá todo el numero de los terminos.

$$\begin{array}{ccccc} 3. & 7. & 11. & 14. & 17. \\ 1. & 6. & 11. & 16. & 21. \\ \hline 2. & 1. & 0. & & \end{array}$$

Estos Problemas bastan para que el Arithmetico pueda resolver las questiones de Arte Menor que se le puedan ofrecer, pues discurriendo sobre ellos, y combinando unos con otro, juzgo que no habrá question de las referidas en que no halle cabal solucion. Pero advierta, que en estos ultimos Problemas, no todas las progressiones Arithmeticas tienen lugar.

CAPITULO SEGUNDO.

DE LA PROGRESSION GEOMETRICA.

THEOREMA I.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA EL PRODUCTO de los extremos, es igual al producto de qualesquiera dos terminos igualmente distantes de los extremos.

779 SEa la progression Geometrica A. B. C. D. E. F. G. Digo, que el producto A. G. 256. de los extremos A. y G. es igual al producto de B. F. y al producto de C. E. porque la progression Geometrica, es una razon continuada, y asi son proporcionales A. à B. como B. à C. y como C. à D. y como D. à E. y como E. à F. y como F. à G. con que son proporcionales A. à B. como F. à G. luego el producto de A. por G. es igual al producto de B. por F. (298).

2.	4.	8.	16.	32.	94.	128.
A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.

Asimismo son proporcionales B. à C. como E. à F. luego el producto de B. F. es igual al producto de C. E. y por consiguiente igual al producto de A. por G. luego el producto de dos terminos igualmente distantes de los extremos, es igual al producto de los extremos.

Consectarios.

780 Generalmente el producto de qualesquiera dos terminos de una progression Geometrica, es igual al producto de otros dos terminos igualmente distantes de los primeros ahora sean extremos, ò medios.

781 En la progression Geometrica de terminos impares, el quadrado del medio, es igual al producto de qualesquiera dos terminos igualmente distantes: porque C. D. E. son continuamente proporcionales: luego el quadrado de D. es igual al producto de C. y E. (300) y como este producto sea igual al producto de B. F. tambien el quadrado de D. será igual al producto de B. F. y asi de los demás. Y no es necesario que la progression sea de terminos impares, sino que tomando qualquier termino, su quadrado es igual al producto de qualesquiera dos terminos igualmente distantes.

THEOREMA II.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, SI EL PRO- de los terminos, se divide por un qualquier termino, el quociente será un termino distante, tanto del uno de los terminos multiplicados, quanto el partidor dista del otro.

782 EN la misma progression Geometrica, multipliquense los terminos A. F. y el producto dividase por el termino E. digo que el quociente será B. que dista tanto de A. como E. de F. porque el quociente multiplicando al divisor, restituye al numero dividendo. luego el producto de B. E. es igual al producto de A. F. Y como los productos de los terminos igualmente distantes son iguales, si el producto de A. F. se divide por E. saldrá el otro termino B. igualmente distante.

THEOREMA III.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA TERMINADA, la misma razon tiene la diferencia minima al menor extremo, que la diferencia entre los extremos à la suma de la progression menos el mayor extremo.

783 SEa una qualquier progression Geometrica 2. 8. 32. 128. 512. cuyas diferencias sean 6. 24. 96. 384. Digo que la misma razon tiene la menor diferencia 6. al menor extremo 2. que la diferencia 510. que hay entre los extremos à la suma de la progression menos el mayor extremo, la qual es 170. esto es, à

2.	8.	32.	128.	512.
	6.	24.	96.	384.

la suma de los terminos 2. 8. 32. 128. Porque el mayor extremo 512. se compone de la diferencia 6. 24. 96. 384. y del menor extremo, 2. de suerte, que la diferencia 510. de los extremos, es la misma suma de dichas diferencias, como por sí es manifiesto. A mas desto los terminos de la progression, son proporcionales; esto es, como 512. à 128. asi 128. à 32. y asi 32. à 8. y asi 8. à 2. pues que la progression Geometrica es una razon continuada; luego dividiendo como la diferencia 384. à 128. asi la diferencia 96. à 32. y asi 24. à 8. y asi 6. à 2. luego como un antecedente 6. que es la menor diferencia è un consequente 2. que es el menor extremo; asi la suma de todas las diferencias, antecedentes, que es la diferencia entre los extremos, à la suma de todos los consequentes, (318) que es la suma de todos los terminos, ò de la progression fuera el ultimo.

Esta es la proposicion 35. del libro 9. de Euclides, de la qual deduxeron misteriosos arcanos en la progression infinita el P. Gregorio à S. Vincencio, y el P. Andrés Tacquet, ambos de la Compañia de Jesus; pero los Mathematicos, antiguos, no advirtieron su fecundidad.

Consectario.

784 En la progression Geometrica, la misma razon tiene el denominador menos la unidad à la unidad, que la diferencia de los extremos à la suma de la progression menos el mayor extremo. Porque el denominador á la unidad, tiene la misma razon que el mayor termino de una razon al menor; esto es, en el exemplo arriba, supuesto el denominador 4. à la unidad, es como 8. à 2. luego dividiendo (315) como 4. menos 1. à 1. esto es, como 3. à 1. asi 8. menos 2. esto es, asi 6 à 2. El 6. pues es la menor diferencia, y el 2. es el menor extremo, los quales tiene la misma razon que la diferencia de los extremos à la suma de la progression menos el mayor extremo, como consta por el Theorema: luego como el denominador menos la unidad à la misma unidad; asi la diferencia entre los extremos à la suma de la progression menos el menor extremo.

THEOREMA IV.

DADAS DOS PROGRESSIONES GEOMETRICAS, SI EL primer termino de la una, se multiplica por el primero de la otra, el segundo, por el segundo sale una progression Geometrica.

785 SEan las progressiones dadas 3. 9. 27. &c. y 1. 2. 4. &c. Digo, que multiplicando 1. por 3. mas 2. por 9. mas

4. por 27. &c. sale progression Geometrica 3. 18. 108. &c. porque si el primero, y segundo termino de cada progression, se ponen en forma de quebrado, como se suelen poner las razones para sumarlas, restarlas, multiplicarlas, &c. serán tres novenos y medio, las quales multiplicadas, saldrán 3. 18. avos, que es multiplicar primer termino por primero, segundo por segundo.

3.	9.	27.	81.
1.	2.	4.	8.
3.	18.	108.	648.

Asimismo, multiplicando los segundos, y terceros terminos en forma de quebrado, saldrá la razon de 18. à 108. y como la razon del primer termino de cada progression al segundo, sea la misma que la del segundo al tercero, y por consiguiente los quebrados, serán los mismos, tambien saldrán los productos en una misma razon, y asi harán una progression Geometrica.

Consectario.

786 El denominador de la progression producida, es el producto de los denominadores de cada progression; porque como el denominador de cada razon enseña la cantidad de las razones, multiplicando los denominadores, se hace el denominador de las razones producidas.

THEOREMA V.

DADAS DOS PROGRESSIONES GEOMETRICAS, SI EL primer termino de la una, se divide por el primer termino de la otra, el segundo por el segundo, &c. sale una progression Geometrica.

787 Dividanse los terminos de la progression 3. 18. 108. &c. por los terminos de la progression 3. 9. 27. &c. Digo que saldrá progression Geometrica 1. 2. 3. &c. porque si de los primeros, y segundos terminos, se hacen quebrados como antes, serán 3. 18. avos, y tres novenos, y partiendo el primer quebrado por el segundo, saldrá un medio, que son los primeros terminos de la progression de los quocientes; lo mismo será partiendo los otros terminos, porque todos guardan una misma razon.

3.	18.	108.	648.
3.	9.	27.	81.
1.	2.	4.	8.

PROBLEMA I.

CONTINUAR UNA PROGRESSION GEOMETRICA.

788 SI la progression es ascendente, multipliquese el denominador de la progression (que es el mismo que el de la razon de los primeros dos terminos) por el mayor termino, y saldrá el immediate siguiente; y asi infinitamente. Pero si la progression fuere descendente, dividase el mismo termino por el denominador, y saldrá el menor siguiente, y asi continuamente.

Porque el denominador enseña quantas veces el antecedente contiene à su consequente, ò es contenido: Luego en la progression ascendente, que es razon de menor desigualdad; multiplicando el mayor termino por el denominador, sale su consequente; y en la descendente partiendo, sale el otro termino.

789 Pero se ha de advertir, que como demuestra Euclides en la prop. 17. del lib. 9. La progression cuyos extremos son numeros entre sí primos, no se puede continuar por numeros enteros.

PROBLEMA II.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS LOS extremos, y el denominador, hallar la suma, y el numero de los terminos.

790 REstese el extremo menor del mayor, y dividiendo el residuo por el denominador menos 1. saldrá la suma de la progression menos el mayor extremo, el qual si se añade, se tendrá toda la suma. Como si Pedro pagó una deuda en progression Geometrica, cuyo denominador es 4. en el primer año pagó 2. libras, y en el ultimo 2048. Preguntase quanta era la deuda. Restese el menor extremo, ò paga 2. del mayor 2048. y quedarán 2046. quitese 1. del denominador 4. y quedarán 3. Dividanse ahora las 2046. libras por 3 y saldrá el quociente 982. al qual se añadirá el mayor extremo 2048. y será toda la suma de la progression, ò toda la deuda 2730.

Demonstracion.

Como el denominador menos 1. à la unidad, asi la diferencia de los extremos à la suma de la progression menos el mayor extremo; esto es, como 3. à 1. asi 2046. à 682. (784) que es hacer regla de tres, y como el termino segundo, es la unidad que no aumenta la multiplicacion, basta partir el tercer termino 2046. por el primero 3. y saldrá el quarto, al qual añadiendo el mayor extremo de la progression, saldrá toda la suma.

Para hallar el número de los terminos, multipliquese el extremo menor por el denominador tantas veces, hasta que el producto sea igual al extremo mayor, como por sí mismo es manifiesto.

Consectario.

791 Si la progression fuere dupla, basta restar el menor extrema del mayor, y añadir al residuo el mismo mayor extremo; ò doblar el mayor extremo, y del duplo restar el menor extremo, para que salga la suma; porque entonces el denominador es 2. del qual quitando 1. queda la unidad, que no muda la division.

PROBLEMA III.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS LOS extremos, y la suma, hallar el denominador, y el numero de los terminos.

792 Restese el menor extremo del mayor, restese tambien el mayor extremo de la suma, y partiendo el mayor residuo por el menor, añadase una unidad al quociente, y saldrá el denominador. Como si un oficial en una obra gana 242. reales en progression geometrica, en el primer dia 2. reales, y en el ultimo 162, para saber en que progression geometrica procede la ganancia, restense los 2. reales de los 162. y quedarán 160. Restense tambien los 162. de los 242. y quedarán 80. Dividase los 160. por 80. y al quociente 2. se añadirá 1. para que salga el denominador 3. Y asi digo, que en progression tripla ganó los 242. reales.

Demonstracion.

Si la diferencia de los extremos se divide por el denominador menos 1. saldrá la suma de la progression menos el mayor extremo (790); esto es, saldrá el residuo de la resta del mayor extremo de la suma total. Luego si la misma diferencia de los extremos se divide por dicho residuo, saldrá el denominador menos uno.

Pa-

793 Para hallar el numero de los terminos, hallese primero el denominador por la regla antecedente, y despues se sabrá el numero de los terminos por el Problema antecedente.

PROBLEMA IV.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA DADOS EL MEnor extremo, la suma, y el denominador, hallar el mayor extremo y el numero de los terminos.

794 QUitada una unidad del denominador, multipliquese el residuo por la suma de la progression, y añadiendo el menor extremo al producto, dividase todo por el denominador, y saldrá el mayor extremo. Como si un limosnero repartió 8190. reales en los pobres en progression geometrica quadrupla; el primer dia dió 6. reales, que fue la menor limosna; preguntase quanto repartió el dia ultimo. Quitese 1. de 4. que es el denominador, y quedarán 3. los quales multiplicados por los 8190. que es la suma, hacen 24570. à los quales añadanse los 6. reales que dió el dia de la menor limosna, y serán 24576. dividase por el denominador 4. y saldrá la mayor limosna, mayor extremo 6144.

Demonstracion.

Para hallar la suma se resta el menor extremo del mayor, y el residuo se divide por el denominador menos 1. y al quociente se añade el mayor extremo (790). Luego si la suma se multiplica por el denominador menos uno, y al producto se añade el menor extremo, y todo se divide por el denominador, saldrá el mayor extremo, que es resolver lo que se hizo en la suma.

795 Conocidos, pues los extremos, y la suma, se hallará el numero de los terminos por el Problema antecedente; ò dado el denominador, y los extremos, se hallará el numero de los terminos por el Problema 2.

PROBLEMA V.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL MAyor extremo, la suma, y el denominador, hallar el extremo menor, y el numero de los terminos.

796 MUltipliquese la suma, menos el mayor extremo, por el denominador menos 1. y quitando el producto del

ma-

mayor extremo, quedará el menor. Como si un Mercader ha de cobrar 468. libras en progression Geometrica quintupla, el primer año cobra 375. libras por mayor paga; preguntase quanta será la ultima paga. Restense las 375. libras de toda la paga 468. y quedarán 93. libras, que es la suma de los terminos de la progression menos el mayor, restese tambien 1. del denominador 5. y quedarán 4. Multipliquense las 93. libras por 4. y el producto 372. restese de la mayor paga 375 y quedará la menor 3. libras, y tanto cobrará el ultimo año.

Demonstracion.

Si el mayor extremo menos el menor; esto es, la diferencia de los extremos, se divide por el denominador menos uno, sale la suma da la progression menos el mayor extremo (790): Luego si la suma menos el mayor extremo se multiplica por el denominador menos uno, saldrá el mayor extremo menos el menor, ò la diferencia de los extremos, la qual quitada del mayor extremo, quedará el menor; porque la multiplicacion compone lo que la division resuelve.

797 El numero de los terminos, se hallará el Problema 2. conocidos los extremos, y el denominador.

PROBLEMA VI.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL menor extremo el denominador, y el numero de los terminos, hallar el mayor extremo, y la suma.

798 Escribase el denominador tantas veces, quanto fuere el numero de los terminos menos una, y multiplicando continuamente, multipliquese el ultimo producto por el menor extremo, y saldrá el mayor. Como si Pedro pagó una deuda en 6. años en progression quadrupla, el ultimo año, que fue la menor paga, pagó 6. libras: para saber la primer paga, escribase el denominador 4. cinco veces, que es una menos que el numero de los años, asi 4 4. 4 4. 4. y multiplicando continuamente, saldrán 1024. los quales multiplicados por la menor paga 6. libras, saldrán 6144. por la paga mayor.

Demonstracion.

La progression Geometrica ascendente, se continua multiplicando

do

do de un termino por el denominador continuamente (788): luego si el mismo denominador se multiplica continuamente tantas veces, quantas son las diferencias, las quales siempre son una menos, que el numero de los terminos, y el producto se multiplica por el menor extremo, saldrá el mayor; porque lo mismo es multiplicar continuamente el menor extremo por el denominador, que multiplicar muchas veces el denominador, despues por el menor extremo.

799 La suma de la progression, se hallará por el Problema 2. conocidos los extremos, y denominador.

PROBLEMA VII.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL MAyor extremo, el denominador, y el numero de los terminos, hallar el menor extremo, y la suma.

800 EScribase el denominador tantas veces, quantos fueren los terminos menos una, y multiplicando continuamente, se partirá el mayor extremo por el producto, para que salga el menor. Como si un navio camina en progression Geometrica descendente sesquialtera; esto es, cuyo denominador es uno, y medio, viage de 5. dias, el primer dia camina 81. milla; preguntase quanto caminará el dia ultimo, que es el menor extremo. Porque los dias son 5. escribo el denominador quatro veces asi 1. y medio, 1. y medio, 1. y medio, 1. y medio, y multiplicando continuamente, salen 81. 16. avos, y partiendo las 81. milla del primer dia por dicho producto, saldrán 16. millas por el camino del dia ultimo.

Demonstracion.

Si el menor extremo se multiplicára por el denominador puesto tantas veces, quantos son los terminos menos una, se produciria el mayor extremo: Luego si el mayor extremo se parte por el producto del denominador puesto las dichas veces, saldrá el menor extremo.

801 Para hallar la suma, restese el menor extremo 16. del mayor 81. y el residuo 65. dividase por medio, que es el denominador menos 1 y. saldrán 130. à los quales añadiendo el mayor extremo 81. será toda la suma 211. millas.

PROBLEMA VIII.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL denominador, suma, y numero de los terminos, hallar los extremos.

802 COntinuarse una progression del mismo denominador, que la que es dada, que comienza de la unidad hasta tantos terminos como tiene la progression, cuyos extremos se buscan, y dividiendo la suma dada por la suma desta progression, saldrá el menor extremo. Como si Pedro pagó 8190. libras en 6. años en progression quadrupla; para saber quanto pagó en la menor paga, formese una progression quadrupla, que comience de la unidad continuada por 6. terminos por otros tantos años (788), la qual será 1. 4. 16. 64. 256. 1024. cuya suma es 1365. por la qual se partirá la suma dada 8190. y saldrá la menor paga 6. libras.

Demonstracion.

Supongo que la progression dada en la pregunta es A. y la que se ha formado en la solucion es B. ambas quadruplas. Esto supuesto, el primer termino de la progression B. es al primero de A. como el segundo de B. al segundo de A. y asi de los demás: Luego como 1. que es un antecedente à 6. es su consequente, así toda la suma 1365. de la progression B. que es la suma de los antecedentes de B. à la suma 8190. que es la suma de los consequentes de A. que es lo mismo que como 1365. à 8190. así 1. à 6. y como el tercer termino desta regla de tres, es la unidad que no aumenta la multiplicacion, basta partir 8190. por 1365. y saldrá el menor extremo 6. ò primer termino de la progression.

6.	24.	96.	384.	1536.	6144.	A.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	B.

803 Conocido, pues, el menor extremo, el denominador, y la suma, se hallará el mayor extremo por el Problema 4.

⁂

PRO-

PROBLEMA IX.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL mayor extremo, y la suma, hallar el menor extremo, y el denominador.

804 Restese el mayor extremo de la suma, y partiendo el mayor extremo por el residuo, lo que sobra será el menor extremo, y añadiendo 1. al quociente, será el denominador. Como si un oficial en una obra ganó 1023. reales en progression Geometrica, cuya mayor paga fueron 768. reales; para saber quanta fue la menor, y en qué progression procedia la ganancia, se restará la mayor ganancia 768. de toda la ganancia 1023. y quedarán 255. Ahora dividanse los 768. que es la mayor ganancia por el residuo 255. y será el quociente 3. y sobran 3. Digo, pues, que los 3. que sobran es la menor ganancia, ó extremo menor; y si al quociente 3. se añade 1. será 4. el denominador de la progression.

Demonstracion.

Dividiendo la diferencia de los extremos por el denominador menos uno, sale la suma menos el mayor extremo (790) que es el residuo de la resta del mayor extremo à la suma. Luego dividiendo la dicha diferencia por el dicho residuo, saldrá el denominador menos uno. Y como no se ha dividido la dicha diferencia, sino todo el mayor extremo, que incluye à la diferencia, y al menor extremo, necesariamente ha de sobrar el menor extremo, que es lo que incluye mas que la diferencia

PROBLEMA X.

DADO EL DENOMINADOR, Y MAYOR EXTREMO DE una progression Geometrica infinita descendente, hallar la suma de todos los terminos infinitos.

805 No es el intento de este Problema dexar por asentado que hay progression actualmente infinita, ò continuada por terminos infinitos, porque es contra lo comun de la Filosofia; sino dar regla para hallar la suma de todos los terminos de una progression, continuada por toda una eternidad; esto es, que si se toma una qualquier progression geometrica descendente, como es-

ta 64. 32. 16. 8. &c. y por toda la eternidad continuamente se van añadiendo terminos, hallar la suma de todos aquellos terminos que se pueden añadir, los quales necesariamente han de ser infinitos.

El misterio, pues, de la progresseon infinita todo está encerrado en el Theorema tercero, y su consectario, que es la prop. 35. del 9. de Euclides: porque la misma razon tiene el denominador menos uno à la unidad, que la diferencia de los extremos à la suma de la progression, menos el mayor extremo; y asi, si el menor extremo se resta del mayor, y el residuo, que es la diferencia de los extremos, se parte por el denominador menos uno, saldrá la suma de la progression menos el mayor extremo, como se hizo, y demonstró en el Problema 2. Pues como en la progression infinita el menor extremo se hace tan pequeño, que se desvanece despues de continuada por infinitos terminos, no se hace caso dél. Con que el mismo mayor extremo es la diferencia de los extremos; el qual partido por el denominador menos uno, y al quociente añadiendo el mayor extremo, dará la suma de la progression.

Sea, pues, la progression geometrica descendente A. cuyo denominador es 4. y se quiere saber la suma de todos los terminos posibles. Dividase el mayor extremo 32. por 3. que es el denominador menos uno, y saldrán 10. y dos tercios, à los quales añadiendo el mayor extremo 32. sale la suma 42. y dos tercios, de todos los terminos infinitos. Con que la suma de todos los terminos de la dicha progression, aunque se continue infinitamente, es solamente 42. y dos tercios.

32. 8.$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{8}$. &c. A.

Otro exemplo. Supongo que un Angel comience à moverse oy, y prosiga su movimiento por toda una eternidad en progression tripla descendente, y que oy camine 30. millas; preguntase quantas millas podrá correr en la dicha progression por toda la eternidad; ò por mejor decir, quantas serán el menor numero de millas que no acabará de correr por toda la eternidad. Dividase el 30. por 2. que es el denominador menos uno, y al quociente 15. añadanse las mismas 30. millas, y harán 45. millas, las quales no acabará de correr, aunque esté eternamente corriendo; esto es, siempre se acercará à haber corrido 45. millas, pero nunca llegará, lo qual parece increíble.

806 El P. Gregòrio á S. Vincencio, en la prop. 80. de las progressiones geometricas, pone otra regla para hallar la misma suma

sin el denominador. El quadrado del primero, ó mayor extremo, dividase por la diferencia entre los dos primeros terminos, y el quociente será la suma de la progression; como en el primer exemplo, quadrese el primer termino 32. y será 1024. dividase por 24. que es la diferencia de los dos primeros terminos 32. y 8. y saldrá la suma 42. y dos tercios. Porque la diferencia de los dos primeros terminos al termino mayor, tiene la misma razon que la diferencia de los extremos á la suma de toda la progression; y como el ultimo termino se desvanece, el mismo mayor extremo será la diferencia entre los extremos; y asi, será la diferencia de los dos primeros terminos al mayor extremo, como el mayor extremo, à la suma: Luego multiplicando el mayor extremo por sí mismo, y partiendo el producto por la diferencia de los dos primeros terminos, saldrá la suma de toda su progression.

Consectarios.

807 Quando la progression es dupla, basta doblar el primer termino, y saldrá la suma; porque como el primer termino se ha de dividir por el denominador menos uno., siendo el denominador 2. se habrá de dividir por uno, que no disminuye la division; y como al quociente, que aqui es el mismo mayor termino, se ha de añadir el mayor termino, basta doblarle

808 En la progression tripla basta añadir al mayor termino su mitad; porque siendo el denominador 3. se ha de partir por 2. que es tomar la mitad, à la qual se ha de añadir el mismo mayor extremo. En la progression quadrupla basta añadir al mayor extremo su tercio. En la quintupla su quarto, &c. Con que la suma de la progression dupla es dupla del primer termino; la suma de la tripla es sesquialtera del primer termino; la suma de la quadrupla es sesquitercia, &c.

809 Quando la diferencia de los dos primeros terminos es la unidad, entonces para hallar la suma basta quadrar el primer termino; porque como por el segundo modo el quadrado del primer termino se ha de dividir por la diferencia de los dos primeros terminos, si esta es 1. no disminuye la division, sino que queda el mismo quadrado por la suma de la progression; como en esta 2. 1. $\frac{2}{1}$, &c. toda la suma es 4.

810 Entendiendo el fundamento de la progression infinita, se pueden resolver algunas questiones de los Problemas antecedentes; como si un Angel corrió por toda una eternidad 25. millas en pro-

gression quintupla ascendente; preguntase quanto correrá el dia de oy que es el mayor termino. Multipliquense las 25. millas por 4. que es el denominador menos 1. y el producto 100. dividase por el denominador 5. para que salga el camino de oy que son 20. millas; porque por el Problema 4. al producto de la suma, por el denominador menos 1. se ha de añadir el menor extremo; y como en la progression infinita no hay menor extremo, basta dividir dicho producto por el denominador.

811 Asimismo, si un Angel moviendose por toda la eternidad corrió 25. millas, y en el dia de oy corrió 20. para saber en que progression se movia, restese el mayor extremo 20. de la suma 25. y partiendo el mayor extremo 20. por el residuo 5. saldrá 4. y añadiendo 1. es el denominador 5. Con que se movia en progression quintupla, como consta por el Problema 9.

812 Quando dos, ò mucha s progressiones infinitas son semejantes; estos es, que tienen un mismo denominador, la misma razon hay de la suma de una progression à otra, que del primer termino de la una al otro. Como si son dos progressiones 64. 32. 16. &c. 8. 4. 2. &c. la suma 128. de la primera á la suma 16. de la segunda, tiene la misma razon, que el primer termino 64. al primero 8. por la razon que se dió en el Problema 8. Con que la suma de todos los infinitos terminos de la primera progression, à la suma de los infinitos de la segunda, está en razon octupla.

CAPITULO TERCERO.

DE LA PROGRESSION ARITHMETICA, y Geometrica entre sí.

EN este capitulo comparo la progression Arithmetica con la Geometrica, y al contrario, poniendo algunas propriedades, que de su mutua correspondencia resultan en particular, en orden à los Logarithmos; y para que no canse al Arithmetico, reduciré esta materia à la mayor brevedad, que su dilatada extension permitiere.

813 Si los terminos de la progression Arithmetica corresponden à los de la Geometrica, la suma, y resta de los de la Arithmetica equivale à la multiplicacion, y division en la Geometrica.

Sean

Sean la progression Arithmetica Z. y la Geometrica X. Digo, que sumando dos terminos C. y G. de la Arithmetica, y de la suma 28. restando un qualquier termino A. de la misma Arithmetica, saldrá el termino I. distante tanto de G. quanto A. dista de C. Y si los mismos terminos C. y G. de la Geometrica se multiplican, y el producto 2304. se parte por el mismo A. de la Geometrica, saldrá el mismo termino I. en la misma Geometrica, distante tanto de G. quanto A. dista de C. como consta del theorema 3. cap. 1. y del theorema 2. cap. 2. de este libro. Luego si las dos progressiones se correspondan, no es necesario multiplicar, y partir en la Geometrica, para hallar algun termino; sin sumar, y restar en la Arithmetica, y saldrá el termino correspondiente.

	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
Z	2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.	26.
X	3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.	184.	768.

814 De aqui nace una propiedad admirable, y es que si una progression Arithmetica natural, que comienza del zero acompaña otra progression Geometrica, que comienza de la unidad, la multiplicacion de los terminos Geometricos tendrá el mismo lugar que la suma de los Arithmeticos. Como si se suman los terminos C. G. de la progression Arithmetica, saldrá el termino I. y si se multiplican los mismos terminos C. G. de la Geometrica, saldrá el mismo termino I. Porque si de la suma de C. y G. se resta A. saldrá el termino I. distante tanto de G. y como A. dista de C. y como A. es zero, la restará la misma suma de C. y G. asi mismo, si el producto de C. y G. en la progression Geometrica se parte por A. saldrá I. distante tanto de G. quanto A. dista de C. y como A. es la unidad que no disminuye la particion, será I. el mismo producto de C. por G.

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.	K.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1.	1.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.

815 Con que en la progression Geometrica, que comienza de la unidad, multiplicando dos terminos, el producto estará en la misma progression, y distará tanto de uno de los multiplicantes; quanto el otro dista de la unidad; y en el exemplo propuesto, serán proporcionales como A. à C. asi G. à I. Asi mismo, si qualquier termino de la dicha progression Geometrica se mutiplica por sí mismo, el quadrado estará tan disante de su raíz, como dicha raíz

dista de la unidad, y asi, multiplicando 9. por 9. saldrán 81. distante tres terminos inclusive del 9. como tambien el 9. dista otros tres terminos de la unidad. Y si en la progression Arithmetica se dobla un termino como C. el duplo 4. será E. que denota el quadrado 81. Del mismo modo, si el termino C. de la progression Arithmetica se tresdobla, saldrá el termino G. correspondiente al cubo de C. en la progression Geometrica.

816 Y asi, si las dichas progressiones se corresponden para hallar el producto de los terminos Geometricos no hay mas que hacer que sumar los terminos correspondientes Arithmetico, y la suma enseñará al producto. Asi mismo, para hallar las potestades de qualquier termino Geometrico, doblese el Arithmetico correspondiente, y al duplo enseñará al quadrado; tresdoblese, el triplo manifestará al cubo; quatro doblese, y el quadruplo señalará al quadrado quadrado, &c.

817 La correspondencia que hasta ahora se ha observado en la suma, y multiplicacion, se ha de entender tambien la resta, y division, porque si un termino E. se resta de otro G. en la progression Arithmetica, el residuo C. señalará el quociente de la division de C. por E. en la progression Geometrica. Asi mismo, si de G. en la progression Arithmetica se toma la mitad, será D. y si de G. en la Geometrica se saca la raíz quadrada será tambien D. Tambien si de G. se toma el tercio, será C. en la Arithmetica; y sacando la raíz cubica de G. en la Geometrica será tambien C. y asi de las demás raíces. Con que todos los terminos Arithmeticos que tienen mitad, sus correspondientes Geometricos tienen raíz quadrada; y todos los Arithmeticos que tienen tercio, sus correspondientes Geometricos tienen raíz cubica, &c. Pero esto se ha de entender en las progressiones que señalamos en el ultimo exemplo (814).

818 En estas propriedades están fundados los Logaristhmos que son unos numeros artificiales en progression Arithmetica, los quales corresponden, y acompañan à otros numeros en progression Geometrica. Y asi, los terminos de qualquier progression Arithmetica, que corresponde à una qualquier progression Geometrica, son Logarithmos, respeto de los terminos de la Geometrica. Pero en las tablas Logarithmicas, para mayor facilidad se suele elegir una progression Arithmetica natural, que comienza del zero; pero que á los guarismos significativos acompañen algunos zeros, como esta 00000000. 10000000. 20000000. &c. y una Geometrica decupla, que comience de la unidad, como 1. 10. 100. &c.

Son los logarithmos una de las mayores invenciones de este siglo; facilitan sumamente las operaciones trigonomericas , porque con sumar , y restar (y aun con sumar solo) se escusa la multiplicacion , y division de numeros de ocho guarismos lo menos , por cuya invencion se dixo que eramos mas sabios que nuestros antecesores. Su inventor fue Don Juan Nepero Inglés ; pero despues otros les han perficionado , aunque el mismo Nepero conoció su imperfeccion.

PARTE II.

DE LAS COMBINACIONES.

819 COmbinacion es una disposicion de una , ò muchas cosas , en orden à otra , ù otras. A tres clases se pueden reducir todas las combinaciones. La primera es, quando se mudan las cosas en orden al lugar , pero considerandolas todas juntas. La segunda es , quando se toman las cosas de dos en dos , de tres en tres , &c. sin atender al lugar. La tercera es compuesta de las dos , tomando las cosas de dos en dos , de tres en tres , &c. y juntamente atendiendo à la disposicion del lugar. En cada clase pueden ser todas las cosas semejantes , ò desemejantes , ò compuestas de unas , y otras. Todo estará manifiesto en los Problemas siguientes.

PROBLEMA I.

DADO EL NUMERO DE COSAS , HALLAR LAS DISPOsiciones , que todas juntas pueden tener en orden al lugar.

820 LAs cosas que se han de combinar , ò son semejantes , ò desemejantes , ò parte semejantes , y parte desemejantes , como se dixo arriba ; y asi tendrá tres cosas cada uno destos Problemas , advirtiendo , que usarémos de las letras del Abecedario, en lugar de las cosas.

Caso I.

821 Quando todas las cosas son semejantes , como A. A. A. no pueden combinar en orden al lugar ; porque por mas que se muden, siempre quedan en la misma disposicion , como es manifiesto.

Caso II.

822 Quando las cosas son desemejantes, se formará la tabla combinatoria de este modo. Escribase una progression Arithmetica natural, que significa el numero de las cosas que se han de combinar. Al lado se pondrán los productos de todos los terminos Arithmeticos desde el primero que es la unidad, los quales denotan las combinaciones; esto es, al lado de la unidad de la progression Arithmetica escribase 1. Al lado del segundo termino 2. pongase tambien 2. que es el producto de 1. por 2. Al lado del tercer termino 3. pongase 6. que es el producto de 1. 2. 3. ò del 2. de arriba de la coluna de las combinaciones por el 3. de abaxo de la progression. Al lado del 4. escribanse 24. que es el producto de los terminos 1. 2. 3. 4. de la progression; ò del 6. de arriba de la coluna de las combinaciones, por el 4. de la coluna de la progression. Al lado del 5. pongase 120. que es el producto de los terminos 1. 2. 3. 4. 5. de la progression; ò el producto del 24. de arriba, por el 5. y asi de los demás.

1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5040	7
40320	8
362880	9
3628800	10
39916800	11
479001600	12
6227020800	13
87178291200	14
1307674368000	15
20922789888000	16

823 Esto supuesto, para saber el numero de las combinaciones que en orden al lugar pueden tener muchas cosas desemejantes, busquese el numero de ellas en la coluna de la progression Arithmetica, y al lado se encontrará el numero de las combinaciones; y asi, una cosa no admite combinacion alguna, porque es una sola, y la combinacion dice correspondencia, y respeto à otras. Dos cosas se pueden mudar de dos modos, como las letras de esta diccion La, pueden combinarse asi LA, AL, como por sí mismo es manifiesto.

Tres cosas tienen seis combinaciones, como se vé en las letras de esta diccion LAS, porque no mudandose la primera letra L. las otras dos pueden mudarse dos veces; no mudandose la segunda A. las restantes dos pueden tambien combinarse de dos modos, y ultimamente no mudandose la tercera S. pueden las dos restantes mudarse de otros dos modos, con que todos son seis; y por eso para hacer la tabla antecedente, se han multiplicado las combinaciones correspondientes al 2. por el numero de las cosas 3. porque quedando inmutables cada una de las tres letras, las otras dos se pueden combinar dos veces.

L A S
L S A
A L S
A S L
S A L
S L A

Quatro cosas se pueden combinar 24. veces, como se vé en las letras deste nombre AMOR, porque quedando la primer letra A. en primer lugar, las otras tres se pueden mudar 6. veces: Estando la segunda letra M. en primer lugar, las otras tres se pueden combinar otras 6. veces, con que son 12. mas estando la tercer letra O. primer lugar, las otras tres se pueden mudar otras 6. veces, y asi son 18. Ultimamente, estando la ultima letra R. en primer lugar, las otras tres se pueden combinar otras 6. veces, y con esto serán 24. las combinaciones que pueden admitir quatro cosas diferentes. Porque como cada cosa pueda estar en primer lugar, y las otras combinarse de 6. modos, habrá quatro veces seis combinaciones, que son 24.

A M O R	M O R A	O R A M	R O M A
A M R O	M O A R	O R M A	R O A M
A O M R	M R O A	O A M R	R M O A
A O R M	M R A O	O A R M	R M A O
A R O M	M A R O	O M R A	R A M O
A R M O	M A O R	O M A R	R A O M

Cinco cosas pueden tener 120. combinaciones; porque estando cada una en primer lugar, las restantes quatro, pueden tener 24. combinaciones; con que todas serán 120. que es el producto de 5. por 24. Seis cosas pueden mudarse de 720. modos; porque estando cada una dellas en primer lugar, las otras quatro pueden combinarse 120. veces; y asi multiplicando 6. por 120. salen 720. combinaciones. Siete cosas admiten 5040. combinaciones, y asi de las demás. Y con esto queda entendido el artificio de la tabla combinatoria.

Caso III.

824 Pero quando entre las cosas que se han de combinar, hay algunas semejantes, como en este nombre MARIA, donde hay cin-

co letras, de las quales las dos son semejantes; busquese primeramente el numero de las combinaciones de las cinco letras, que es 120. (822) despues busquese el numero de las combinaciones de las dos letras semejantes, que es 2. partiendo pues 120. por 2. saldrá el numero 60. de las combinaciones que se buscan. Asimismo en esta diccion LAMPARA, partase el numero 5040. de las combinaciones de todas las siete letras por el numero 6. de las combinaciones de las tres letras semejantes, y el quociente 840 dará el numero de los modos en que se pueden mudar las siete letras de la diccion referida.

Si huviere dos, ò mas especies semejantes como en esta diccion MAñANA, donde hay dos N. N. y tres A. A. A. dividase el numero de las combinaciones de todas las letras, que es 720. por el numero de las combinaciones de unas especies semejantes, como por 6. que son las disposiciones de tres cosas, y el quociente 120. se partirá otra vez por el numero de las combinaciones de las otras especies semejantes que es 2. y el quociente 60. señalará las combinaciones que se desean. Asi mismo en esta otra diccion MAGNANIMIDAD, donde hay 12. letras, de las quales hay cinco ordenes de semejantes, que son tres A. A· A. dos M M. dos N. N. dos I. I. y dos D. D. Las combinaciones, pues de las 12. letras, son 47900. 500. las quales divididas por 6. que son las combinaciones de las tres A. A A. dán 79833600. y dividiendo este numero por 2. que son las combinaciones de las dos M. M. salen 39916800. los quales partidos por 2. que son las combinaciones de la dos N. N. salen 19958400. que divididos por 2. que son las combinaciones de las dos I. I. salen 9977200. Ultimamente divididos por 2. que son las combinaciones de las dos D. D. salen las combinaciones diferentes de todas las letras de dicha diccion 4989600.

Lo mismo se puede hacer con sola una particion, multiplicando primeramente entre sí las combinaciones de las especies semejantes, esto es 6. por 2. y el producto 12. por 2. el producto 24. por 2. y el producto 48. otra vez por 2. y saldrán 96. partense pues las combinaciones de todas las 12. letras por 96. y saldrá el mismo numero, como por sí es manifiesto.

* * *

PROBLEMA II.

DADO EL NUMERO DE COSAS, HALLAR LAS DISposiciones que pueden tener, tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c. sin orden al lugar.

Caso I.

825 QUando las cosas son semejantes como A. A. A. A. A. A. A. no se pueden tomar mas que una vez de una en una, de dos en dos, &c. esto es, si se pide que se elijan dos cosas, no se pueden tomar mas que unas dos, porque siendo semejantes, no hay que escoger; asi mismo, si se pide que se elijan tres cosas de las siete señaladas, no se pueden escoger mas que unas tres, porque siendo todas semejantes, no hay otra eleccion, y asi de las demás, como por sí es manifiesto. Pero el numero de todas las elecciones es tanto como el numero de las cosas; esto es, habrá tantas elecciones de una en una, dos en dos, tres en tres &c. quantas fueren las cosas, como aqui se vé claramente, A. AA. AAA. AAAA. AAAAA. AAAAAA. AAAAAAA. y el numero de las conjunciones, ò veces que se podrán juntar las cosas entre sí, será tanto, como el mismo numero de las cosa menos uno, que es la cosa tomada de una en una por estár sola. Con que si hay dos cosas semejantes, habrá dos elecciones, y una conjuncion. Si hay tres cosas semejantes, habrá tres elecciones, y dos conjunciones Si hay quatro cosas semejantes, habrá quatro elecciones, y tres conjunciones, &c.

Caso II.

826 Quando las cosas que se han de combinar tomadas de dos en dos, tres en tres, &c. sin atender al lugar, son todas desemejantes, como las letras desta diccion IOSEPH, se èscribirá una progression Arithmetica natural ascendente, que comience de la unidad, y otra descendente de tantos terminos, quantas fueren las cosas, de suerte, que el primer termino de la una, corresponda al ultimo de la otra, el segundo al penultimo, &c.

y porque las cosas son seis, se escribirá la progression 1. 2. 3. 4. 5. 6. y la misma, se pondrá al revés, como se vé figurado. La primera progression denota las veces que se toman las cosas; esto es, el primer termino 1. significa las cosas tomadas de una en una, el segundo termino 2. significa las cosas tomadas de dos en dos, &c.

1	6	6
2	5	15
3	4	20
4	3	15
5	2	6
6	1	1
		63

Esto supuesto, para saber las combinaciones de seis cosas tomadas de una en una quantas son; estos es, si de seis cosas se ha de elegir una, quantas elecciones puede haber? Se partirá el 6. que es el numero de la segunda progression correspondiente al 1. de la primera, porque las cosas se han de tomar de una en una, por el mismo 1. y el quociente 6. señalará las elecciones de seis cosas tomadas de una en una; esto es, en seis cosas tomadas de una en una, puede haber seis elecciones.

Para seber las mismas seis cosas tomadas de dos en dos quantas elecciones admiten; multipliquense todos los terminos, unos por otros de la primera progression desde el primero, hasta el 2. esto es 1. por 2. y serán 2. asi mismo se multiplicarán todos los terminos unos por otros de la segunda progression desde el 6. hasta el 5. que corresponde al 2. y será el producto 30. el qual dividido por el producto 2. de la primera progression, dará 15. elecciones, y asi seis cosás diferentes tomadas de dos en dos, se pueden combinar 15. veces, ò puede haber 15. elecciones; esto es, de seis cosas desemejantes, se pueden elegir 15. pares diferentes, como IO. IS. IE. IP. IH. OS. OE. OP. SE. SP. SH. EP. EH. PH.

Para saber las elecciones de las mismas seis cosas tomadas de tres en tres, se multiplicarán entre sí todos los terminos de la primera progression hasta el 3. y será el producto 6. multipliquense asi mismo los terminos de la segunda progression, hasta el termino 4. que corresponde al 3. y partiendo el producto 120. de la segunda progression por el producto 6. de la primera, será el quociente 20. y tantas elecciones habrá, tomando las cosas de tres en tres, como en las letras de la diccion IOSEPH, serán IOS. IOE. IOP. IOH. IEP. IEH. IPH. ISE. ISP. ISH. OSE. OSP. OSH. OEP. OEH. OPH. SEP. SEH. SPH. EPH.

Para

Para saber las elecciones de las mismas seis cosas tomadas de quatro en quatro, multipliquense los terminos de la primera progression unos por otros, hasta el 4. esto es 1. por 2. y el producto 2. por 3. y el producto 6. por 4. y será el ultimo producto 24. multipliquense asi mismo los terminos de la segunda progression, hasta el termino correspondiente al 4. que es hasta al 3. esto es 6. por 5. y el producto 30. por 4. y el producto 120. por 3. y será el ultimo producto 360. el qual dividido por el producto 24. de la progression primera, dará 15. elecciones, como se vé aqui IOSE. IOSP. IOSH. IOEP. IOEH. ISEP. ISEH. ISPH. IEPH. IOPH. OSEP. OSPH. OEPH. OSEH. SEPH.

Para saber las elecciones de las mismas seis cosas tomadas de cinco en cinco, multipliquense todos los terminos de la primera progression unos por otros, hasta el 5. esto es 1. por 2. y el producto 2. por 3. y el producto 6. por 4. y el producto 24. por 5. y será el producto 120. asi mismo se multiplicarán lo terminos de la progression segunda, hasta el termino correspondiente al 5. y el producto 720. se partirá por 120. y el quociente 6. será el numero de las elecciones que se busca, como IOSEP. IOSEH. IOSPH. IOEPH. ISEPH. OSEPH.

Ultimamente, si todos los terminos de cada progression se multiplican unos por otros, y se parte el producto de la segunda por el producto de la primera, saldrá 1. que es el numero de las elecciones de seis cosas tomadas de seis en seis, como IOSEPH. porque no se pueden tomar mas que una vez.

Con que el numero de las combinaciones de seis cosas desemejantes sin atender al lugar tomadas de una en una, es 6. tomadas de dos en dos, es 15. de tres en tres, es 20. de quatro en quatro, es 15. de cinco en cinco, es 6. y de seis en seis, es 1. y todas juntas son 63. elecciones. Si del numero 63. de las elecciones, se quita el numero de las cosas 6. quedará el numero 57. de las conjunciones; esto es, seis cosas diferentes, se pueden juntar entre sí 57. veces.

827 El mismo numero de todas las elecciones, se hallará formando una progression dupla ascendente de tantos terminos, quantas fueren las cosas diferentes, porque en el exemplo propuesto arriba son seis, será la progression 1 2. 4. 8. 16. 32. doblese el ultimo termino 32. y del duplo 64. se quitará 1. por regla general, y quedarán 63. elecciones como antes.

828 Pero para saber quantas veces una de las seis cosas desemejante, se juntará con las otras tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c. dividase el numero de las elecciones, tomando las cosas de dos en dos; de tres en tres, &c. por el numero de las cosas, y multiplicando el quociente por 2. si se toman de dos en dos, ò por 3. si se toman de tres en tres, &c. saldrá el numero de las conjunciones que se busca; como si se desea saber la letra E. de la misma diccion IOSEPH, en quantas conjunciones se hallará tomando las letras de dos en dos, dividase el numero 15. de las eleciones tomadas de dos en dos por 6. que es el numero de las cosas, y el quociente 2. y medio, multipliquense por 2. porque se toman de dos en dos, y el producto 5. dará el numero de las conjunciones asi IE. OE. SE. EP. EH. con que de 15. eleciones que señalamos arriba de las dichas seis letras en 5. pares, tan solamente se hallará la letra E. y lo mismo es qualquier otra letra de las 6. El mismo estilo se guarda quando hay mas, ò menos cosas que seis.

829 Para reducir estas combinaciones à la practica, se pondrá la letra que se quisiere en primer lugar, como la I. en la misma diccion IOSEPH, y pasando una linea para mayor distincion, se pondrá la segunda letra O. en el segundo lugar, despues se repartirá la O. y à su lado la primer letra I. Tirando otra linea, se pondrá en tercer lugar la tercer letra S. despues se repitirá la misma letra, y à su lado todas las combinaciones hechas hasta ahora. Corrase otra linea, y se pondrá la letra E. y despues se repitirá tantas veces, quantas fuere necesario, para que à su lado estén todas las combinaciones hechas hasta ahora. Y deste modo se irá prosiguiendo como se vé en la formula.

Dispuestas de este modo las cosas, se vé claramente; que tomadas de una en una, hay 6. elecciones; tomadas de dos en dos, hay 15. elecciones, porque hay otros tantos binarios, y las conjunciones de cada letra, serán 5. Tomadas de tres en tres, se hallan 20. elecciones, pues hay otros tantos ternarios, y las conjunciones de cada letra, serán 10. Tomadas de quatro en quatro, se hallan 15. quaternarios, y 10. conjunciones de cada letra. Tomadas de cinco en cinco hay 6. elecciones, y 5. conjunciones; ultimamente tomadas de seis, hay sola una eleccion. Vease la formula en la pagina siguiente.

Caso III.

830 Quando hay cosas semejantes, y desemejantes, se escri-

bivirá el numero de cada una, y añadiendo á cada uno una unidad, se multiplicarán continuamente, del producto se quitará uno, y quedara el numero de todas las combinaciones ó elecciones, si deste numero se quita el numero de las cosas, quedará el numero de las conjunciones.

Sean las letras que se han de combinar las deste nombre MARIA, donde hay dos semejantes, y las otras son desemejantes, escribase el numero 2. por las semejantes, y 1. por cada desemejante asi, 2. 1. 1. 1. Añadiendo á cada uno una unidad, serán 3. 2. 2. 2. y multiplicando unos por otros, saldrà el producto 24. del qual restando 1. quedarán 23. que es el numero de las combinaciones, del qual si se restan 4. que es el numero de las cosas, contando las semejantes por una sola, saldrán las conjunciones 19.

Otro exemplo: Sea esta diccion PARARA, donde hay tres semejantes de una especie, dos semejantes de otra especie, y una desemejante; pues escribanse los numeros 3. 2. 1. á los quales añadido una unidad, serán 4. 3. 2. y multiplicando continuamente, saldrán 24. quitando 1. quedarán 23. que es el numero de las combinaciones, del qual restando 3. que es el numero

I
—
O
OI
—
S
SI
SO
SOI
—
E
EI
EO
EOI
ES
ESI
ESO
ESOI
—
P
PI
PO
POI
PS
PSI
PSO
PSOI
PE
PEI
PEO
PEOI
PES
PESI
PESO
PESOI
—

H
HI
HO
HOI
HS
HSI
HSO
HSOI
HE
HEI
HEO
HEOI
HES
HESI
HESO
HESOI
HP
HPI
HPO
HPOI
HPS
HPSI
HPSO
HPSOI
HPE
HPEI
HPEO
HPEOI
HPES
HPESI
HPESO
HPESOI
—

de las cosas, contando cada especie desemejantes por una sola, restarán 20. que es el numero de las conjunciones.

831 Para reducir estas combinaciones á la practica, donde claramente se verá el numero de los binarios, terminos, &c. se hará asi: escribase una de las letras semejantes en primer lugar: despues se pondrán dos, despues, tres, &c. hasta que se pongan tantas letras semejantes, quantas hubiere en la diccion, que es lo mismo que poner todas las elecciones que pueden tener las cosas semejantes (825). Despues se pondrá en segundo lugar la otra letra semejante si la hubiere, y combinandola con todos los modos hasta aqui hechos, se pondrá duplicada despues, y se combinará con los primeros modos, &c.

Como en la primer diccion MARIA. se escribirá en primer lugar la A. y despues duplicada, tirando una linea, se pondrá la M. y despues MA. y MAA. que es combinarla con los modos antecedentes; tirese una linea, se escribirá la otra letra R. y despues se escribirá tantas veces, hasta que à su lado estén todas la combinaciones antecedentes, y deste modo se proseguirá, como se vè en la primer formula, donde tomadas las letras de una en una, hay 4. elecciones; tomadas de dos en dos, hay 7. elecciones por otros tantos binarios, y 3. conjunciones. Tomadas de tres en tres, hay 7. elecciones, y 4. conjunciones. Tomadas de quatro en quatro, hay 4. elecciones, y 3. conjunciones; ultimamente tomadas de cinco en cinco, hay sola una eleccion.

A
A A

M
M A
M A A

R
R A
R A A
R M
R M A
R M A A

I
I A
I A A
I M
I M A
I M A A
I R
I R A
I A R A
I R M
I R M A
I R M A A

A
A A
A A A

R
R A
R A A
R A A A

R R
R R A
R R A A
R R A A A

P
P A
P A A
P A A A
P R
P R A
P R A A
P R A A A
P R R
P R R A
P R R A A
P R R A A A

En la otra diccion PARARA, se escribirá primeramente la A. sencilla, despues duplicada, y despues triplicada, que son las elecciones de tres cosas semejantes, y tirando una linea, se escribirá la R. sencilla, y despues se combinará con todos los modos hasta aqui hechos; tirese otra linea, y escribiendo dos veces la R. se combinarà despues con solo el primer miembro de letras semejantes: Ultimamente se escribirá la P. sensilla, y se combinará con todos los modos hechos hasta ahora. Y deste modo se pueden combinar otras dicciones.

PROBLEMA III.

DADO EL NUMERO DE COSAS, HALLAR LAS COMbinaciones que pueden tener tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c. atendiendo al lugar.

Caso I.

832 Quando las cosas dadas, son todas semejantes como A. A. A. A. A. no pueden tener mas combinaciones, que las que se señaláren, quando solamente se comvinaban en orden á la sustancia sin atender al lugar (825) deste modo A. AA. AAA. AAAA. AAAAA. porque siendo semejantes, lo mismo es que se pongan á la derecha, que á la izquierda, y asi en orden al lugar, no admiten combinaciones alguna.

Caso II.

833 Quando las cosas son todas desemejantes, como las letras deste nombre JOSEPH, busquense las combinaciones sin atender al lugar tomadas de dos en dos, de tres en tres (826), y porque se han de combinar tambien en orden al lugar, busquense las combinaciones en orden al lugar (822) y multiplicando las unas por las otras, saldrà el numero que se busca. Como si se toman de una en una, tienen 6. elecciones, y una cosa no se puede mudar mas que de un modo, pues multiplicado 6. por 1. salen los mismos 6. que son las elecciones, que se buscan.

Si las letras de dicho nombre se han de tomar de dos en dos, habrà 15. elecciones, y tomadas en orden al lugar dos cosas, se pueden variar de 2. modos, pues multiplicando 15. por 2. serán 30. las elecciones que se pueden hacer de las letras del dicho nombre atendiendo al lugar.

Si se toman de tres en tres, admitirán 20. elecciones (826), Y porque tres cosas se pueden combinar de 6. modos, atendiendo solo al lugar (822) se multiplicarà el 20. por 6. y el producto 120. enseñará las elecciones que pueden hacer de las letras del dicho nombre tomadas de tres en tres, y atendiendo al lugar.

Si las seis letras del referido nombre, se toman de quatro en quatro, admiten 15 elecciones (826) y en orden al lugar 4. cosas se pueden combinar de 24. modos (822) luego multiplicando 15. por 24. saldrán 360. elecciones atendiendo al lugar. Tomadas de cinco en cinco, tienen 6. elecciones, y cinco cosas se pueden mudar de 120. modos (822) y asi multiplicando 6. por 120. salen 720. elecciones. Ultimamente las seis cosas tomadas de seis en seis, no tienen mas que una eleccion, y seis cosas se pueden combinar de 720. modos, los quales multiplicado por 1. son los mismos, con que serán 720. elecciones, que todas juntas hacen 956. elecciones en orden al lugar, y sustancia.

Caos III.

835 Quando se han de combinar en quanto à la sustancia, y lugar cosas semejantes, y desemejantes se hará la combinacion por la practica del Problema antecedente (831) deste modo. En el nombre MARIA hay cinco letras, de las quales las dos son semejantes; pues tomese la A. como si fuera una sola, y asi habrá 4. elecciones tomadas de una en una; y como una cosa no se puede mudar mas que un de modo, serán solas 4. elecciones en orden á la sustancia y lugar. Tomadas de dos en dos, admiten 7. elecciones, en las quales hay una de letras semejantes AA. que no puede variarse en orden al lugar, y asi se tomaràn las 6. y pues dos cosas se pueden mudar de dos modos en orden al lugar (822) multiplicando 6. por 2. y el producto 12. añadiendo 1. por el binario semejante, serán 13. las combinaciones atendiendo à la sustancia y al lugar.

Las mismas letras tomadas de tres en tres, admiten 7. elecciones (831) en las quales hay tres que tienen dos letras semejantes, y asi se han de contar como si tuvieran dos letras solas, con que quedaràn quatro de tres letras; las combinaciones pues de tres cosas en orden al lugar son 6. multiplicando 6. por 4. ternarios son 24. á mas desto, las combinaciones de dos cosas en orden al lugar, son 2. multiplicando pues 2. por los tres terminos semejantes, son 6. que juntos con los 24. hacen 30. elecciones de tres en tres en orden al lugar y sustancia.

Si

Si se toman de quatro en quatro, tienen 4. elecciones, de las quales hay tres quaternarios que tienen dos letras semejantes, pues se han de tomar como si fueran ternarios, y sobra un quaternario, que en orden al lugar, admite 24. combinaciones; cada ternario tiene 6. combinaciones en orden al lugar, que multiplicadas por 3. por ser tres los ternarios, hacen 18. combinaciones, las quales juntas con las 24. son 42. combinaciones. Ultimamente tomadas de cinco en cinco, admiten sola una eleccion, y porque hay dos letras semejantes, se tomarán como si fuesen 4. letras, las quales en orden al lugar, tienen 24. combinaciones, y como no es mas que un quaternario, (contadas las dos letras semejantes como una) y la unidad no aumenta la multiplicacion, serán 24. las elecciones en orden al lugar. Con que las letras deste nombre MARIA, se pueden combinar de 113. modos, atendiendo á la sustancia, y lugar. Lo mismo se hará en qualquier otra diccion de letras semejantes, y desemejantes, contando las semejantes por una, atendiendo á la combinacion del lugar.

APPENDICE.

PARA que en esta obra nada falte de lo que suelen traer los Autores en sus Arithmeticas, y de que hacen algunos mucho aprecio, como son juegos por numeros, reglas Geometricas resueltas por numeros, y otras cosas curiosas, me ha parecido recogerlas en este appendice, donde hallará el que gustáre desto en que entretener su apetito.

CAPITULO PRIMERO.

DE ALGUNOS MODOS ARTIFICIOSOS para adivinar numeros ocultos.

AEstos modos de adivinar numeros que uno ha pensado, llaman comunmente *juegos de numeros*, los quales de ordinario se resuelven por alguna multiplicacion, y particion disimulada, ó exercitando alguna otra operacion Aritmetica que se hacen en las preguntas, y respuestas. Pongo aqui los mas principales de los que traen los Autores.

ADIVINAR EL NUMERO QUE UNO HA PENSADO.

836 Algunos suelen poner regla para adivinar los dineros que uno tiene, las horas à que ha comido, ó se ha acostado, &c. pero lo mismo es que adivinar el numero que ha pensado. Hagase pues, que el numero pensado se tresdoble, y despues de tresdoblado, se preguntarà si el triplo es par, ò impar; si respondieron que par, digase que tomen la mitad. pero si fuere impar, hagase que se añada 1. y que se tome la mitad: Hecho esto, digase que se triplique esta mitad, y del triplo que se quiten todos los nueves que se pue-

puedan, y que digan quantos nueves han quitado: Sabidos los nueves, tomese 2. por cada uno; tomese tambien una unidad quando el primer triplo es impar, y saldrá el numero pensado.

Como si se pensaron 4. haganse tresdoblar, y serán 12. cuya mitad es 6. la qual tresdoblada, hace 18. donde hay dos nueves, pues tomando 2. por cada uno, hacen 4. que es el numero que se pensó.

Otro exemplo: Supongo que se han pensado 5. digase que se tresdoble, y serán 15. al qual numero porque es impar, y no tiene mitad justa, se añadirà 1. y seràn 16. cuya mitad 8. tresdoblada, hace 24. donde hay dos nueves, por los quales se tomarán 4. esto es 2. por cada uno, y á mas desto, se tomarà una unidad por ser impar el primer triplo, y averse añadido 1. y asi seràn 5. que es el numero pensado.

Otro exemplo: Supongo que se pensaron 2. el qual tresdoblado hace 6. cuya mitad 3. tresdoblada, son 9. donde hay solo un nueve, por lo qual diré que se pensaron 2.

Otro exemplo: Se pensó 1. cuyo triplo 3. no tiene mitad, pues añadiendo 1. serán 4. cuya mitad 2. tresdoblada, hace 6. donde no hay nueve alguno, y asi tampoco se tomarà 2. alguno, pero se ha de tomar 1. por la unidad añadida, que serà lo que se pensò.

De otro modo.

837 Digase que el numero pensado se tresdoble, y que en el triplo se vea quantos nueves hay, tomando 3. por cada nueve, despues se preguntarà si sobra algo, y si es par, ó impar; si dixeren que par, se tomaràn 2. y si impar 1. pero si nada sobra, no se tomará unidad alguna. Si del triplo no se puede quitar nueve alguno, preguntese si dicho triplo es par, ó impar, si fuere par, será 2. el numero pensado, y si impar 1.

Como si se pensaron 8. digase que tresdoblen, y serán 24. donde hay dos nueves, y sobran 6. que es numero par; pues tomando 3 por cada nueve, seràn 6. y mas 2. porque sobró numero par, saldrán los 8. que se pensaron.

Otro exemplo: Se han pensado 9. su triplo es 27. donde caben tres nueves, y nada sobra, pues tomando 3. por cada nueve, serán los 9. pensados. Otro exemplo: Se pensó 1. su triplo es 3. donde no cabe el nueve, pues porque es impar, será 1. lo que se pensó. Otro exemplo: Se pensaron 2. su triplo es 6. donde no cabe el nueve, pues por que es par se tomarán solos 2. por el numero pensado.

De otro modo.

838 El numero pensado, multipliquese por 5. y en el producto vease quantas veces entra el 10. y si sobra algo, pues por cada 10. se tomarán 2. y por lo que sobra 1. como si se han pensado 6. se multiplicarán por 5. y serán 30. donde hay tres dieces, y nada sobra, pues tomado 2. por cada diez, diré que es 6. el numero pensado.

Otro exemplo: Se han pensado 7. multiplicados por 5. son 35. donde hay tres dieces, y sobrá algo, pues tomando 2. por cada diez, serán 6. y 1. por lo que sobra seràn 7. Otro exemplo: Se pensò 1. multiplicando por 5. hacen 5. donde no entra el 1. pues es señal que se pensò 1. porque el mismo 5. se ha de tomar por residuo.

De dos numeros par, é impar, adivinar quien pensó el par, y quien el impar.

839 Supongo que haya dos cantidades de dinero, de las quales la una es par, y la otra impar, las quales se repartieron entre Pedro, y Juan, para conocer quien tomò la que era par, y quien la impar, tomense dos qualesquiera numeros par, é impar, como 2. y 3. despues digase, que Pedro, y Juan, multipliquen su cantidad por uno destos numeros el que quisieren; esto es, que cada uno multiplique su cantidad por el numero destos que quisiere: Hecho esto, preguntese si la suma de los productos es par, ó impar; si dixeren que par, aquel que abrá multiplicado por 2. tendrà impar el otro par; pero si dicha suma fuere impar, quien habra multiplicado por 2. tendrà par, y el otro impar.

Como si las cantidades son 5. y 8. y Pedro tomó el 5. y Juan el 8. Digase que Pedro multiplique su cantidad por 2. y Juan por 3. y serán los productos 10. y 24. cuya suma 34. es par; pues porque Pedro ha multiplicado por 2. que es par, tendrà la cantidad impar 5. y Juan la otra 8. Asi mismo, si se dice que Pedro multiplique su cantidad por 3. y Juan por 2. saldrán los productos 15. y 16. cuya suma 31. es impar, por lo qual conoceré, que Juan que multiplicò por 2. tendrá la cantidad, par, y Pedro la impar. Ultimamente, haiendo sabido quien tiene la cantidad par, y quien la impar, se sabrá quanta es la cantidad de cada uno por las reglas antecedentes de adivinar el numero pensado.

Adivinar los numeros que muchos han pensado, con tal, que sean menos que 10.

840 Pongase orden entre las personas de primero, segundo, &c. despues digase al primero que doble el numero que pensò, y al duplo añada 5. y la suma multiplique por 5. y al producto añada 10. Despues digase al segundo que à esta ultima suma añada el numero que él pensò (el primero ha de decir ocultamente al segundo la ultima suma) y que lo multiplique todo por 10. Digase tambien al tercero, que á este ultimo producto añada el numero que pensò, y multiplique la suma por 10. y deste modo precediendo hasta 10. personas; pero la ultima no debe multiplicar por 10. sino solo añadir su numero al ultimo producto. Esto supuesto, se enseñará todo el numero producido, del qual se quitarán 35. si las personas fueren dos, 350. si fueren tres, 3500. si quatro, 35000. si cinco, &c. y los guarismos de la resta enseñarán los numeros que cada uno pensó; esto es, el primer guarismo de la izquierda, enseñará el numero que pensò la primera persona; el segundo el de la segunda, &c. y por eso el numero pensado no ha de exceder de 10.

Como si son seis personas, y la primera pensó 7. la segunda 6. la tercera 5. la quarta 4. la quinta 3. y la sexta 2. Digase á la primera que doble su numero, (que serán 14.) y al duplo añada 5. y que multiplique la suma (que es 19.) por 5. y al producto que es 95.) añada 10. y seràn 105. Este numero ha de decir el primero el segundo sin que lo entienda el que ha de adivinar los numeros pensados. Ahora digase al segundo que añada el numero que pensò 6. á la dicha suma del primero (y serán 111.) y que todo lo multiplique por 10. (que serán 1110.) el qual numero ha de comunicar al tercero. Hecho esto, digase al tercero que añada su numero al que le han comunicado, y serán 1115. y que le multiplique por 10. (y seràn 11150.) al qual numero comunicarà al quarto.

Digase al quarto que añada su numero al que le han comunicado, y serán 11154. el qual multiplicado por 10. saldrán 111540. que ha de manifestar ocultamente al quinto. Digase al quinto que añada su numero 3. al que le han manifestado, y la suma 111543. multiplique por 10. y serán 1115430. que tambien ha de manifestar al sexto. Ultimamente digase al sexto que añada su numero 2. al numero que le dixo el quinto, y serán 1115432. del qual numero se restarán 350000. porque son seis las personas, y quedarán 765432. y asi diré que el primero pensó 7. que es el primer gurismo de mano izquierda; el segundo pensó 6. que es el segundo guarismo; el tercero pensó 5. por ser el tercer guarismo, &c.

Juego de la Sortija.

841 Si de muchas personas una toma una sortija, y la pone en la mano, dedo, y ñudo que quiere, se puede saber quien la tiene, y en que mano, dedo, y ñudo por la regla siguiente, la qual es casi la misma que la pasada. Primeramente pongase orden entre las personas, determinando qual sea la primera, segunda, &c. Despues se ha de suponer, que la mano derecho es la primera, y la izquierda la segunda; pongase tambien orden en los dedos, que el pulgar sea el primero, el indice el segundo, &c. Ultimamente determinese el orden de los ñudos, siendo el extremo el primero, el siguiente el segunda, &c.

Esto supuesto, supongo que son 30. personas, de las quales la vigesima en orden tomò la sortija, y la puso en la mano izquierda en el dedo anular, que es el quarto en orden, y en el ñudo segundo. Digase que secretamente doblen el numero de las personas hasta la que tiene la sortija, y al duplo 40. añaden 5. y que toda la suma 45. multipliquen por 5. luego que al producto 225. añadan el numero de la mano en que estuviere la sortija, que es 2. por estar en la mano izquierda, y la suma 227. multipliquen por 10. y al producto 2270. añadan el numero de los dedos que es 4. la suma 2274. multipliquen por 10. y al producto 22740. añaden el numero del ñudo, que es 2. Ultimamente digase, que de la ultima suma 22742. resten este numero 2500. y que enseñen la resta 20242. en la qual los mismos guarismos manifiestan lo que se busca, porque el primero de mano derecha, que es 2. denota que la sortija está en el ñudo segundo, el siguiente guarismo 4. indica que está en el dedo quarto, el siguiente 2. manifiesto la mano izquierda, que como està dicho, es la segunda en orden, y los restantes 20. señalan el numero de personas.

Adivinar quien de muchas personas escondió una cosa.

842 Supongo que hay muchas personas, y que una dellas escondió una qualquier cosa, ó tomó una moneda, &c. para conocer la persona que la tomò, pongase orden entre las personas; esto es, determinese qual sea la primera, segunda, &c. Hecho esto, supongo que la nona persona en orden tomó la tal cosa: Digase que se doble el numero de las personas hasta aquella que la tomó, y que al duplo (que es 18.) se añadan 5. y la suma (que es 23.) se multipli-

plique por 5. despues del producto 115. quitese el primer guarismo de la derecha 5. y de los 11. que quedan, quitense 2. la resta 9. dará el numero de las personas.

Juego de los moros, y Christianos.

843 Supongo que en un Navío pequeño hay 15. Christianos, y 15. Moros, el qual peligrando por el sobrado peso, determina el Patron echar 15. personas al mar, pero para quitar altercados, dice, que se pongan todos de una hilera, y que comenzando á contar hasta nueve, despues prosiguiendo en contar hasta nueve, aquel en quien cayere el nueve vaya á fondo; pues para que queden salvos todos los Christianos, y solos los Moros perescan, se pueden disponer en la forma siguiente fundada en las vocales deste verso.

Populeam Virgam Mater Regina tenebat.

Donde comenzando por los Christianos, y alternando con los Moros, cada vocal denota el numero de los que se han de poner, segun el lugar que la dicha vocal tuviere en las cinco vocales; tomando la A. por primera, la E. por segunda, la I. por tercera, la O. por quarta, y la V. por quinta.

Y asi la primera silaba PO. pertenece á los Christianos, y porque tiene O. que es la quarta vocal, pongase 4. Caristianos en hilera, como se vé en la formula siguiente, representados por las letras C. La segunda silaba PV. es de los Moros, y porque tiene la vocal V. que es la quinta, se pondrán despues 5. Moros, como lo denotan las cinco M. La tercera silaba I. E. pertenece á los Christianos, y pues tiene E. que es la segunda vocal, se pondrán dos Christianos. La quarta silaba AM. que es de los Moros, tiene A. y asi se pondrà un Moro. La quinta VIR. es de los Christianos, pues porque tiene I. que es la tercera vocal, se pondràn tres Christianos; y asi alternando las silabas en Moros, y Christianos, y poniendo tantos, como el lugar que la vocal tuviere en las cinco vocales, como se vé en la siguiente serie

CCCCMMMMMCCMCCCMCMMCCMMMCMMCCM.

Donde contando desde el principio hasta 9. y prosiguiendo siempre en contar de 9. en 9. caerán todos los nueves en Moro, como se puede probar. Pero adviertase, que esta regla solo vale quando el numero de las personas es 30. y la mitad son Christianos, y la otra Moros;

ros; pero si fuera otro numero, ó se hubieran de contar de ocho en ocho, ó de siete, en siete, &c. entonces no hay otra regla mas que disponer tentando una serie de letras que representen Moros, y Christianos, de suerte que cayga el 9. 8. 7. &c. siempre en Moro, y entonces disponer un verso à semejanza del que está dado.

Juego de las tres prendas.

844 Supongo que tres personas toman tres cosas diferentes como A. E. I. para adivinar quien tiene cada cosa, se ha de poner en orden las personas, y cosas; esto es, qual sea la primera, segunda, &c. y de las cosas sea A. la primera, E. la segunda, y I. la tercera. Hecho esto: se han de poner 24. dineros, avellanas. &c. de los quales se darán 1. à la primera persona, 2. à la segunda, y 3. á la tercera, y quedaràn 18. Despues desto, cada persona tomará ocultamente la cosa que mejor la pareciere, pero con esta advertencia, que quien tomáre la primer cosa A. ha de tomar tantos dineros de los 18. restantes como tuviere; quien tomàre la segunda cosa E. ha de tomar de los dineros restantes doblado de lo que tiene; y quien tomáre la tercer cosa I. ha de tomar quatrodoblado. Y necesariamente han de quedar uno, ó dos, ó tres, ó cinco, ó seis, ó siete; porque 4. jamàs pueden quedar.

Esto supuesto, para adivinar quien tiene cada cosa de las tres, considerese el verso siguiente.

1 2 3 4 5 6
Pallentis Evandri Siguien Feritas Immane Vigebat.

El qual tiene seis dicciones correspondientes à los dineros, ó calculos que pueden quedar, esto es, la primera *Pallentis*, si queda un dinero; la segunda *Evandri*, si quedan 2. &c. como lo enseñan los guarismos que están sobre ellas. Cada diccion tiene tres vocales, de las quales la primera correspondiente á la primer persona; la segunda á la sègunda, y la tercera à la tercera; y asi segun el orden de las vocales, enseñarán quien tómo cada cosa.

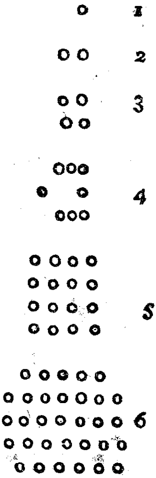
Supongo pues, que la primer persona tomó la E. la segunda la I. y la tercera la A. esto supuesto, el que tomó la primera cosa A. ha de tomar de los 18. dineros otros tantos como tiene, y pues es la tercera persona á quien se le han dado 3. dineres, tomarà otros tres, y quedarán 15. Asi mismo, porque la primer persona tomó la segunda cosa E. ha de tomar de los 15. dineros restantes doblado de lo que tiene, y pues al principio le dieron 1. dinero, ha de tomar 2.

y quedaràn 13. Ultimamente, porque la segunda persona (que tiene 2. dineros) toma la tercera cosa I. ha de tomar quatro doblado; esto es 8. y quedarán 5. los quales se han de manisfestar à quien hace el juego, porque todo lo demàs se ha de hacer ocultamente.

Sabiendo pues que sobran 5. dineros, ó calculos, se recurrirà al verso antecedente á buscar la diccion que corresponde al 5. la qual es *Feritas*; donde la primer vocal E. denota, que la primera persona tomò la segunda cosa E. la segunda vocal I. significa, que la segunda persona tomó la tercer cosa I. y la tercera vocal A. declara, que la tercera persona tomò la primer cosa A.

Adivinar numero de calculos que hay en un monton, solo verle, y sin preguntar cosa alguna.

845 Este juego si se hace con artificio, y diligencia, es el mas curioso de todos, porque no molesta con preguntas. Se han de formar diferentes montecillos de dineros, avellanas, &c. que estèn en progresion dupla; esto es, en el primer montoncillo habrá 1. en el segundo 2. en el tercero 4. el quarto 8. en el quinto 16. &c. Esto supuesto, digase que ocultamente se haga un monton de quantos montoncillos quisieren, comenzando desde el primero sin interpolar alguno; esto es, que se recojan, ó los dos montoncillos primeros, ó los tres, ó los quatro, &c. Y entre tanto el que hubiere de adivinar, harà otros montoncillos en la misma progresion de calculos iguales á los que ha de adivinar, y se harán en parte oculta, de suerte que no los puedan ver: Esto supuesto, reconocerá el monton que ha de adivinar, y formará otro igual á la vista, recogiendo tantos montoncillos, quantos fueren menester; habiendo igualado el monton (en lo qual no puede haber engaño, porque á cada montoncillo que se añade, crece doblado) doblará los calculos del ultimo montoncillo que añadió, y del duplo quitando la unidad, serà el numero de los calculos que habrá en el monton que ha de adivinar.



Como

Como si se recogen los cinco primeros montoncillos (los que quedan, se han de apartar) y se hace un monton de ellos, entre tanto se formará otra progresion aparte, y habiendo reconocido muy bien la magnitud del monton, recogerá quatro montoncillos, y porque no igualan con el monton, pondrá un montoncillo mas, con el qual igualará; y porque en el ultimo montoncillo, que fue el 5. halla 16. calculos, les doblarà, y del duplo 32. quitando 1. quedarán 31. y tantos calculos hay en el monton.

CAPITULO SEGUNDO.

DE REGLAS GEOMETRICAS RESUELTAS por numeros.

DEstas reglas Geometricas, las que enseñan medir superfices planas, son necesarias á los Agrimensores para medir los campos; los quales tienen diversas medidas en diferentes Reynos, como en Castilla se mide por Estadales; en Valencia por Canas, que cada una tiene 9. palmos. Aqui las pongo por palmos, dexando al cuydado del Agrimensor, que sepa lo que se estila en su Reyno.

Dado el diametro de un circulo, hallar la circunferencia.

846 La razon que tiene el diametro de un circulo á su circunferencia (diametro es la linea recta que pasa por el centro, y está terminada en la circunferencia) aun no está conocida, pero se han hallado algunas muy proximas, à la verdad, y en la practica bastantes para no cometer yerro de consideracion, como es la de Archimedes de 7. á 22. esto es, que si el diametro se divide en 7. partes iguales, tendrá 22. de estas la circunferencia, y esta razon de 7. à 22. aunque es la mas vulgar, pero no la mas precisa, porque es menor que la verdadera. Mejor, y mas conveniente es la razon de Rudulfo Ceulen de 100. à 314. esto es, si el diametro tiene 100. partes iguales, tendrá la circunferencia 314.

Esto supuesto, sea un circulo cuyo diametro tenga 20. palmos, digase por regla de tres: Si 7. dan 22. luego 20. palmos de diametro, darán 62. y seis septimos de circunferencia; ó si 100. dan 314. luego 20. darán 62. y quatro quintos.

Dada la circunferencia, hallar el diametro.

847 Sea la circunferencia de un circulo 44. palmos, digase por regla de tres: Si 22. dán 7. luego 44. darán 14. palmos de diametro; ó por la proporcion de Ceulen: Si 314. dán 100. luego 44. darán 14. palmos, y 2. 157. avos. Pero adviertase, que como estas razones del diametro à la circunferencia, ó al contrario, no son justas, tampoco concuerdan entre sí.

Hallar la Area, ó superficie de un circulo.

848 Primeramente se han de conocer el diematro, y circunferencia, despues se multiplicará la mitad del diametro por la mitad de la circunferencia, y saldrá la superficie del circulo: Como si un circulo tiene 14. palmos de diametro, y 44. de circunferencia, multiplicando 7. que es la mitad del diametro por 22. que es la mitad de la circunferencia, salen 154. palmos quadrados de superficie.

De otro modo.

849 La superficie de un quadrado circunscrito al circulo; esto es, techo del diametro, tiene à la superficie del circulo la razon proxima de 14. á 11. como consta por demonstracion de Archimedes; luego formando una regla de tres: Si 14. dán 11. luego el quadrado del diametro, darà la superficie del circulo, se sabrà la dicha superficie: Como si un circulo tiene 10. palmos de diametro; multipliquense 10. por 10. que es quadrar el diametro, y seràn 100. digase ahora: Si 14. dan 11. luego 100. daràn 78. palmos, y quatro septimos de superficie del circulo.

Dada la superficie del circulo, hallar el diametro.

850 Un circulo tiene 49. palmos quadrados de superficie, para saber el diametro, digase por regla de tres: Si 11. dán 14. luego 49. darán 62. y 4. 11. avos, cuya raíz quadrada, será el diametro.

Hallar la superficie de una Elipse, ó figura oval plana.

851 Archimedes demonstró que la superficie de un circulo, cuyo diametro es medio proporcional entre los diametros del ovalo, es igual á la superficie de dicho ovalo: Luego si se multiplican entres sí los diametros del ovalo; esto es, la longitud y la latitud, y del producto se saca la raíz quadrada, será el diametro del circulo, cuya

area,

area ò superficie, se hallará por la regla antecedente (848) y será igual á la superficie que se busca.

Como si un ovalo tiene 16. palmos por mayor diametro ò longitud, y 4. por menor diametro ó latitud multiplicando 16. por 4. salen 64. cuya raíz quadrada 8. es diametro de un circulo de igual superficie con el ovalo; busquese pues la circunferencia (846) que serà 25. y un septimo, multiplicando la mitad 4. del diametro por la mitad 12. y quatro septimos, saldrán 50. palmos y dos septimos de superficie del circulo, que es igual á la superficie del ovalo.

Pero mas facilmente se puede hacer por el segundo modo de hallar la superficie de un circulo (849) sin sacar raíz quadrada, multiplicando los diametros del ovalo entre sí, y formando regla de tres: Si 14. dàn 11. luego el producto 64. dará 50. y dos septimos como antes.

Medir la superficie de un triangulo rectilineo.

852 La superficie de un triangulo rectilineo, se puede medir de muchos modos segun la diversidad de los triangulos, y de lo que está conocido; y para no multiplicar reglas, esta será general para todos, aunque se puedan medir algunos por regla mas facil. Midanse primeramente los tres lados del triangulo, y supongo que por un lado tiene 10. palmos, por el otro 17. y por el otro 21. cuya suma es 48. y su mitad 24. restese cada lado desta mitad, y quedarán las diferencias 14. 7. y 3. las quales se multiplicarán entre sí, y el ultimo producto 294. se multiplicará por dicha mitad 24. esto es, multipliquense continuamente las diferencias y mitad sobredicha, y sacando la raíz quadrada del ultimo producto 7056. que es 84. será la superficie del triangulo.

Otro exemplo: Sean los lados de un triangulo 4. 6. 8. cuya suma es 18. y la mitad 9. restese cada lado desta mitad, y saldrán las diferencias 5. 3. 1. las quales multiplicadas entre sí, y el producto 15. multiplicado por la mitad 9. sobredicha, hacen 135. cuya raíz quadrada 11. y 14. 23. avos, es la superficie del triangulo.

853 Si en qualquier triangulo rectilineo está conocida la perpendicular de un angulo al lado opuesto, facilmente se hallarà la superficie del dicho triangulo, multiplicando los palmos de dicha perpendicular por la mitad de los palmos que tiene el lado sobre quien cae, y el producto serà la superficie que se busca.

Medir la superficie de un quadrilatero rectangulo.

854 El quadrilatero rectangulo (dicese asi, porque tiene quatro lados en angulos rectos, ó perpendiculares unos á otros) es en dos maneras, el uno es quadrado, que tiene todos los quatro lados iguales, y el otro es prolongado, que tiene dos lados mayores que los otros dos, como es la superficie de esta llana. Multipliquese el lado del quadrado por sí mismo, ó uno de los lados mayores del prolongado por otro de los menores, y el producto será la superficie.

Como si un quadrado tiene 9. palmos por lado, multiplicando 9. por 9. saldrá la superficie 81. Palmos quadrados. Hay una figura rectangula prolongada, que tiene 12. palmos por un lado mayor, y 5. palmos por un lado menor, multiplicando 12. por 5. salen 60. palmos quadrados de superficie.

Medir la superficie de qualquier figura plana rectilinea.

855 Resuelvase la figura rectilinea en triangulos, tirando lineas de un angulo á los otros, ó de un punto de en medio á todos los angulos, y midiendo la superficie de cada triangulo (852) sumense todas las superficies de los triangulos, y saldrá la superficie que se busca.

Medir la superficie de qualquier figura plana irregular.

856 Si las figuras irregulares son rectilineas, se medirán sus superficies por la regla antecedente; (855) pero si son curvilineas, ó mixtas de lineas rectas, y curvas, no tienen regla cierta que sea general para todas, aunque se puede acercar mucho á la verdad. Describase dentro de ellas un quadrilatero, ò sea quadrado, ó prolongado, segun fuere menester, y en los vacíos que quedan à los lados, se harán otros quadrilateros, ó triangulos; y si à los lados hay otros vacíos, describanse otros hasta que toda la figura esté llena de quadrilateros, ó triangulos; hecho esto, midanse las superficies de todos los quadrilateros, y triangulos, y la suma de todos, será la superficie proxime de la figura irregular.

Aumentar, ó disminuir una figura plana en qualquier razon.

857 Por el diametro, ó lado de la figura se aumenta, ó disminuye en la razon que se quisiere, suponiendo que los quadrados de los lados, ó diametros de las figuras semejantes, son pro-

porcionales con los terminos de la razon dada.

Como si un circulo tiene 4. palmos de diametro, y se quiere hacer otro, de suerte, que la superficie del primero á la de este, tenga la razon de 6. á 3. Digase por regla de tres: Si 6. dan 3. luego el quadrado 16. del diametro 4. del primer circulo, dará 8. cuya raiz quadrada 2. y quatro quintos, será diametro del circulo que se busca.

Otro exemplo: Un triangulo tiene por un lado 5. palmos, y se quiere hacer otro semejante, que el primero tenga á este la razon de 4. á 9. Digase por regla de tres: Si 4. dán 9. luego 25. buadrado del lado, darán 56. y un quarto, cuya raiz quadrada 7. y siete quince avos, será el lado del triangulo semejante que busca.

Otro exemplo: Hay una ventana prolongada, que tiene por un lado 6. palmos, y por el otro 9. se ha de hacer otra semejante, de suerte, que entre tres veces mas luz. Digase por regla de tres: Si 1. dán 3. (que es la razon que han de tener) luego 36. quadrado del lado menor, dará 108. cuya raiz quadrada 10. y 8. 21. avos, será el lado menor de la ventana, que se ha de hacer. Otra vez: Si 1. dán 3. luego 81. quadrado del lado mayor, dará 243. cuya raiz quadrada 15. palmos, y 18. 31. será el lado mayor. Este mismo estilo se guardará en todas las figuras rectilineas semejantes, para hallar todos los lados, pero con tal que los angulos se hagan iguales.

Dado un circulo, hacer un quadrado igual, y al contrario.

858 No pretendo quadrar el circulo, porque aun no se ha hallado su quadratura, sino dar regla proxima á la verdad, que en la practica no induzga error sensible. Supongo que un circulo tiene 14. palmos de diametro, y 154. de superficie; saquese la raíz quadrada de 154. que será 12. palmos, y dos quintos, la qual será el hado del quadrado, igual al circulo.

859 Al contrario hay un quadrado, cuya superficie es 100. y su lado 10. para hallar un circulo igual, supongase que la superficie 100. es la del circulo, por la qual se hallará su diametro. (850)

Dado el diametro de una Esfera, ó Globo, hallar la superficie, y solidéz.

860 Conocido el diametro, busquese la circunferencia, (846) despues multipliquese el diametro por la circunferencia, y el producto será la superficie de la esfera. Como si una esfera tiene 21. palmo

de diametro, y 66. de diferencia, multiplicando 21. por 66. salen 1386. palmos quadrados de superficie.

De otro modo.

861 Sabido el diametro, hallese la superficie del circulo (848) la qual se multiplicará por 4. y saldrá la superficie de la Esfera: Como si un Globo, ó Esfera tiene 21. palmo de diametro, la superficie del circulo correspondiente al dicho diametro, es 346. palmos, y medio que multiplicados por 4. dán los mismos 1386. palmos.

862 Para hallar la solidèz de la Esfera multipliquese la superficie por la tercera parte del semidiametro, como en los exemplos antecedentes, el diametro es 21. cuyo semidiametro es 10. y medio, y la superficie 1386. multiplicando 1386. por 3. y medio, que es la tercera parte del semidiametro, saldrán 4851. palmos cubicos de solidéz.

Dada la superficie, ó solidéz de la Esfera, hallar el diametro.

863 Dividase la superficie de la Esfera por 4. y el quociente será la superficie del circulo maximo, por lo qual se sabrá el diametro (850) como si la superficie de la Esfera es 1386. dividida por 4. salen 346. y medio por superficie del circulo maximo. Digase ahora por regla de tres: Si 11. dán 14. luego 346. y medio, darán 441. cucuya raíz quadrada 21. es el diametro.

864 Para hallar el diametro por la solidéz; supongo que un Globo tiene 4851. palmos cubicos de solidéz; tomense estos numeros 1000. y 238. por regla generàl; y digase: Si 1000. dán 238. luego la solidéz 4851, dará 1154. y 269. 500. avos, cuya raiz cubica es el semidiametro, que doblado hará el diametro que se busca.

Medir la solidéz de los Prismas y Cylindros.

865 Prisma es una coluna de lados, triangular, quadrangular, &c. igualmente gruesa, y que tiene las basas paralelas: Cylindro es una coluna redonda, tambien igualmente gruesa, y que tiene las basas paralelas, ó equidistantes. Para conocer la solidéz de entrambas, midase primeramente la superficie de la basa, la qual multiplicada por los palmos de la altura del Prisma, ó Cylindro, dará la solidéz; y esto tanto que sean perpendiculares, como inclinados, ú obliquos mientras la altura se mida por linea perpendicular à la basa inferior, alargada si importa.

Medir la solidéz de los Pyramides y Conos.

866 Como es una Pyramide redonda ; la solidèz de todas las Pyramides se mide , multiplicando la superficie de la basa por la tercera parte de la altura , ahora sean rectas , ò inclinadas mientras la altura se mida por la perpendicular del vertice á la basa , alargada si importa.

Medir la solidéz de una Pyramide ó Cono truncado.

867 Pyramides , y Conos truncados , son los que les falta la cuspis por una leccion paralela à la basa ; esto es , quitando un pedazo de la parte de la punta , de suerte que quede la parte mas gruessa de la Pyramide , ó Cono , pero que las basas sean paralelas. Para saber su solidéz , se medirán primeramente las basas por las reglas de medir superficies planas , y multiplicando el numero de la una por el de la otra , se sacará raíz quadrada del producto , la qual será una basa media proporcional Geométrica entre las dos : Súmense las tres basas , y multiplicando la suma por el tercio de la altura de la Pyramide , ó Cono truncados , saldrá la solidéz ; y esto que sean rectos , ú obliquos mientras la altura se tome por linea perpendicular de la basa superior à la inferior , alargada si importa.

Aumentar ó disminuir una figura solida en qualquier razon.

868 Los cubos de los lados , son proporcionales con los numeros de la razon en que se han de aumentar , ó disminuir los sólidos semejantes. Sea una esfera , cuyo diametro es 4. y se ha de hacer otra , que la primera à la segunda , tenga la razon de 2. á 5. Digase por regla de tres : Si 2. dán 5. luego 64. cubo del diametro de la primera esfera , dará 160. cubo del diametro de la esfera segunda , cuya raíz cubica 5. y 35. 91. avos , será el diametro de la esfera que se busca.

Reducir la esfera á cylindro.

869 Si el diametro de la basa del cylindro , ha de ser igual al diametro de la esfera , tomense los dos tercios de dicho diametro, y será la altura del cylindro : Como si un globo , ó esfera tiene 6. palmos de diametro , y se ha de hacer un cylindro igual , que su basa tenga tambien 6. palmos de diametro , se tomarán los dos tercios de 6. que son 4. palmos ; y esta será la altura del cylindro.

Si el diametro de la basa del cylindro ha de ser mayor , ó menor , divídase la solidéz de la esfera por la superficie de dicha basa , y

sal-

saldrá la altura del cylindro; como si un globo tiene 21. palmo de diametro, cuya solidéz es 485. palmos cubicos, y se ha de reducir á cylindro que tenga 14. palmos de diametro su basa; busquese la superficie de circulo, cuyo diametro es 14. y será 154. (848) y dividiendo la solidéz del Globo 4851. por 154. saldrán 31. palmos, y medio de altura.

Pero si la altura del cylindro ha de ser determinada como 9. palmos, dividase la solidèz del Globo por la dicha altura, y saldrá la superficie de la basa del cylindro, por la qual se sabrá el diametro (850).

Estas reglas bastan por ahora, porque no son de este lugar, sino de la Geometrica practica, quando trataré de ella si Dios es servido, las daré por mas extenso, y con sus demonstraciones. Solo advierto, que las que se fundan en la proporcion del diametro del circulo à la circunferencia, ó en su quadratura, no son justas, porque hasta ahora aun no se han hallado con demonstracion, y usando de diferentes proporcionales, no convendràn entre sí, pero para la practica son bastantes, porque no inducen hierro de consideracion.

CAPITULO TERCERO.

DE LOS INTERVALOS Musicos.

ALgunos Autores han tratado en sus Arithmeticas de los intervalos Harmónicos, ó Musicos, pues se fundan en la razon de los numeros, y porque han gustado muchos de esto, he tenido por conveniente escribir algo de esta materia.

870 ***Intervalo Harmónico***, es la misma razon, ó distancia que tienen entre sí los sonidos. *Consonancia*, es la proporcion de los sonidos apacible, y agradable al oído. *La disonancia*, es al contrario. Las consonancias, y disonancias, que son los mismos intervalos harmónicos, se expresan, y declaran por numeros; porque si hay un sonido doblado alto que otro, se dice que concuerdan en octava; si es una vez, y media mas alto que otro, concuerda en quinta, &c. como luego lo dirémos. Los practicos declaran los intervalos Harmónicos mas comunes, y cantables con estas silabas *Ut*, *Re*, *mi*, *Fa*, *Sol*, *La*, que llaman *Puntos*. Los intervalos Harmonicos, unos son

simples, y otros compuestos; los simples nacen de la division Harmonica de la octava; y los compuestos se componen de aquellos, y en particular de la octava, y de los simples.

Del Diapason.

871 El Diapason, á quien los practicos llaman *Octava*, porque los sonidos distan entre sí ocho puntos inclusive, es el principio, y raíz de los intervalos Harmonicos; porque todos nacen de su division. Consiste el Diapason en la razon dupla de los sonidos; esto es, que quando un sonido es doblado alto que otro, entonces concuerdan en octava, ó hacen la consonancia, que se llama Diapason, ú octava.

872 Para explicar los intervalos Harmonicos, no hay sonidos mejores que los de las cuerdas, porque siendo igualmente gruessas, representan lineas que tienen una sola dimension. Sean pues dos cuerdas iguales en lo grueso, largo, y tenso, que no haya en ellas parte alguna falsa, las quales necesariamente han de hacer un sonido que se llama *unisonancia*, y si en la mitad de la una se pone un puentecillo, y se toca la una entera, y la mitad de la otra harán la octava, porque están las longitudes de las cuerdas en razon dupla. Pero porque en la practica no se pueden facilmente poner las cuerdas con las condiciones que hemos dicho, se pondrán dos cuerdas en una vihuela, que no tengan parte falsa, y templandolas en unisonancia, de suerte, que el mismo sonido haga la una, que la otra, estarán como es menester para explicar los intervalos Harmonicos, supliendo la tension por lo grueso, ó por otros accidentes; entonces, pues si se pone un puentecillo en la mitad de la una, y se toca la una entera, y la mitad de la otra consonarán en octava.

873 El Diapason, es la consonancia mas perfecta, porque mientras la cuerda mayor hace una vibracion, ó temblor, la cuerda menor hace dos (las vibraciones son en razon reciproca de las longitudes de las cuerdas) con que muy à menudo las dos cuerdas impelen el ayre, por lo qual pe cibe una consonancia muy apacible.

874 Dividese el Diapason en *Diapente*, y *Diateseron*, que los practicos llaman quinta, y quarta, hallando un medio Harmonico (724) entre 2. 1. ó entre 4. y 2. ó entre 6. y 3. ó entre qualesquier numeros en razon dupla; y sale el Diapente en la parte grave, y el Diateseron en la aguda, que es lo natural: Pero mas facilmente se hace la misma division, hallando un medio Arithmetico (711), aunque el Diapente sale en la parte aguda, y el Diateseron en

la grave. Como si tomamos estos dos numeros 4. y 2. en razon dupla (es conveniente tomar numeros pares para evitar quebrados) que representan al Diapason , se hallará un medio Arithmetico sumandolos , y sacando la mitad de la suma que será 3. y serán Arithmeticamente proporcionales 4. 3. 2. pues la razon de 3. á 2. es la del Diapente , y la de 4. á 3. del Diateseron.

Del Diapente, y Diateseron.

875 El Diapente á quien los practicos llaman quinta , porque consta de cinco puntos inclusive , consiste en la razon sesquialtera de 3. á 2. de suerte, que si una de las cuerdas que hemos dicho , se divide en tres partes , y se pone un puentecillo à las dos , tocando la una entera , y los dos tercios de la otra , concordarán en quinta , que es consonancia perfecta , pero menos que la octava ; porque mientras la cuerda mayor hace dos vibraciones , la menor concluye tres , con que algo mas tarde se impele el ayre hácia una parte que en la octava, y por eso no es tan perfecta ; pero como no es mucha la distancia de tiempo con que se impele el ayre hácia una parte , el oído no advierte disonancia alguna , antes percibe gusto en seta harmonía.

876 El Diateseron , ó quarta , está en la razon de 4. á 3. esto es , que si de las cuerdas referidas (872) la una se divide en quatro partes iguales , y se pone un puentecillo en las tres partes , tocando la que no se dividió , que por ser igual á la dividida , se imagina que tiene 4. partes , y los tres quartos de la otra , harán la quarta , la qual tambien es consonancia , pero mas imperfecta que la quinta ; aunque los practicos comunmente niegan que sea consonancia. Fundo mi dictamen en estas razones : La primera , porque toda la causa fisica de las consonancias , y disonancias , es la frequente , ó tarda uniformidad de impeler al ayre hácia una parte , de suerte , que cada cuerda con sus vibraciones , ó temblores impele el ayre , y el oído no puede hallar gusto con el diforme temblor del ayre , sino quando uniformemente tiembla , y por eso quanto mas á menudo se unen los temblores del ayre hácia una parte , tanto mayor gusto percibe el oido , y quanto mas tarde , mas disgusto tiene , como sucede en todos los intervalos que admiten consonancias , pues como en la quarta dentro de tres vibraciones de la cuerda mayor , se impela el ayre hácia una parte , no se unen muy tarde los temblores del ayre, y por consiguiente no será disonancia.

La segunda, porque todos los complementos de los intervalos, al Diapason, son de la misma especie de los intervalos, cuyos son complementos; esto es, si la tercera es consonancia, su complemento que es la sexta, tambien lo es, si el tono, ó segunda, es disonancia, su complemento que es la septima, tambien es disonancia, y asi de los demas; luego si la quinta es consonancia, tambien lo será su complemento que es la quarta. A mas de esto, si atendemos á la practica sin pasion que perturbe los sentidos, hallarémos que la quarta no disuena tanto como les parece á algunos, antes forma una consonancia apacible.

877 El Diateseron, ó quarta, no se divide harmonicamente en otros intervalos, aunque podia dividirse sacando un medio entre 4. y 3. ó entre 8. y 6. que seria 7. siendo el un intervalo de 7. á 6. y el otro de 8. á 7. pero no está puesto en uso.

878 El Diapente, ó quinta, se divide en *Ditono*, ó tercera mayor, y en *Semiditono*, ò tercera menor, hallando un medio Harmonico entre 3. y 2. ò entre 6. y 4. que es la razon del Diapente; pero mas facil es sacar medio Arithmetico entre 6. y 4. que son numeros pares, aunque salen los intervalos trocados: Sumando pues 6. con 4. salen 10. cuya mitad 5. es el medio Arithmetico, asi 6. 5. 4. y la rozon de 5. á 4. es la tercera mayor, y la de 6. à 5. es de la tercera menor.

Del Tono, y Semiditono.

879 El Ditono, ó tercera mayor, consiste en la razon de 5. á 4. como acabamos de decir que tambien es consonancia; porque dentro de 4. vibraciones se impele el ayre hàcia una parte, aunque no es tan perfecta como la quinta por ser mas tarde el concurso de las vibraciones, y por esta misma razon el Semiditono, ó tercera menor, es tambien consonancia, pero mas imperfecta que la tercera mayor.

880 El Semiditono no se divide harmonicamente hallando un medio, aunque tiene otra division: Pero si entre 5. y 4. ó entre 10. y 8. por ser numeros pares, que son los terminos que constituyen la tercera mayor, se halla un medio Harmonico, ó Arithmetico, el qual es mas facil, aunque salgan trocados los intervalos, sumando 10. y 8. y tomando la mitad de la suma de esta suerte, 10 9. 8. saldrán dos intervalos de 9. á 8. que se llama Tono mayor, y de 10. á 9. que se dice Tono menor; de suerte, que la tercera mayor, se divide en Tono mayor, y en Tono menor.

Del

Del Tono mayor , y menor.

881 El Tono mayor á quien llaman segunda mayor , consiste en la razon de 9. à 8. como hemos visto antes , y es disonancia , porque á cada ocho vibraciones de la cuerda mayor , se une el ayre hàcia una parte que es muy tarde , y el oído puede facilmente percibir la diformidad de los temblores del ayre.

882 El Tono menor , ó segunda menor , está en la razon de 10. à 9. y tambien es disonancia por la misma razon , y aun peor que la del tono mayor.

De la Coma.

883 Si se resta el tono menor del mayor , sale un intervalo á quien llaman *Coma* , de la qual se componen todos los demas invalos , como los numeros de la unidad. El modo de restar intervalos Harmonicos , es el mismo que partir quebrados , (191)ó razones (353). Y asi, si de la razon de 9. á 8. que es el tono mayor, se resta la razon de 10. á 9. que es el tono menor multiplicando en cruz , saldrá la razon de 81. á 80. en la qual consiste la coma, que es la diferencia del tono menor al mayor.

$$\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \quad \frac{81}{80}$$

Del Hexacbordo mayor , y menor.

884 Hexachordo es lo mismo que *Sexta* , la qual es complemento de la tercera hasta la octava ; y como hay dos terceras mayor , y menor , tambien hay dos sextas mayor , y menor , las quales son muy parecidas à las terceras. La sexta mayor , se halla restando la tercera menor de la octava ; esto es , la razon de 6. á 5. de la razon de 2. á 1. multiplicando en cruz como en el partir quebrados, y sale la razon de 10. á 6. ò de 5. á 3. que es la sexta mayor , la qual es consonancia , porque no tardan mucho las vibraciones en juntarse.

$$\frac{2}{1} \times \frac{6}{5} \quad \frac{10}{6}$$

885 La sexta menor , es el complemento de la tercera mayor , y se halla restando la dicha tercera mayor de la octava , esto es , quitando la razon de 5. á 4. en que consiste la tercera mayor de la razon de 2. á 1. que es la octava , y sale la razon de 8. á 5. que constituye á la sexta menor.

$$\frac{2}{1} \times \frac{5}{4} : \frac{8}{5}$$

De la septima mayor, y menor.

886 La septima es complemento de la segunda, ó tono á la octava, y como hay tono mayor, y menor, tambien hay septima mayor, y menor, las quales son disonancias. Restando pues el tono mayor de la octava, que es la razon de 9. á 8. de la razon de 2. á 1. sale la razon de 16. á 9. que es la septima menor. Y restando el tono menor de la octava, que es la razon de 10. à 9. de la razon de 2. á 1. sale la razon de 18 á 10. que abreviada es de 9. á 5. la qual constituye á la septima mayor.

$$\frac{2}{1} \bowtie \frac{9}{8} \quad \frac{16}{9}$$

$$\frac{2}{1} \bowtie \frac{10}{9} \quad \frac{18}{10}$$

Del semitono mayor, y menor.

887 Restando la tercera mayor de la quarta; esto es, la razon de 5. á 4. de la razon de 4. á 3. sale la razon de 16. á 15. que es la del semitono mayor. Y si se resta la tercera menor de la tercera mayor; esto es, la razon de 6. á 5. de la de 5. á 4. sale la razon de 25. á 24. que constituye al semitono menor, que es lo que excede la tercera mayor á la menor.

$$\frac{4}{3} \bowtie \frac{5}{4} \quad \frac{16}{15}$$

$$\frac{5}{4} \bowtie \frac{6}{5} \quad \frac{25}{24}$$

De la Diesis.

888 Diesis, es la diferencia del semitono mayor al menor, y asi restando el semitono menor del mayor; esto es, la razon de 25. á 24. de la razon de 16. á 15. sale la razon de 384. á 375. ó mas abreviada de 128. á 125. que es la Diesis, ó diferencia entre los semitonos, la qual sirve para el genero Enharmonico.

$$\frac{16}{15} \bowtie \frac{25}{24} \quad \frac{384}{375}$$

De los intervalos compuestos.

889 Sumando cada uno de estos intervalos con la octava, salen otros intervalos compuestos; y aun sumando algunos de ellos entre sí, forman otros intervalos de los referidos. El sumar aquí, es lo mismo que multiplicar quebrados, (180) ó multiplicar razones (351) multiplicando antecedente por antecedente, y con-

sequente por consequente. Y asi sumando una quinta con la octava; esto, es la razon de 3. á 2. con la razon de 2. á 1. sale la razon de 6. á 3. que abreviada es de 3. à 1. la qual constituye á la duodecima.

2 —— 2 —— 6
2 —— 1 —— 1

890 Asi mismo, sumando una octava con otra; esto es la razon de 2. á 1. con la razon de 2. à 1. sale la razon de 4. á 1. que es la decima quinta. Del mismo modo sumando una tercera mayor de 5. à 4. con la quarta de 4. à 3. sale la sexta menor de 8. à 5. y sumando la tercera menor con la misma quarta, sale la sexta mayor. Y asi de los demás.

$\frac{2}{1}$ — $\frac{2}{1}$ $\frac{4}{1}$

Tabla de los intervalos Harmonicos.

Octava	de	2 à 1	Dupla
Quinta	de	3 à 2	Sesquialtera
Quarta	de	4 à 3	Sesquitercia
Tercera Mayor	de	5 à 4	Sesquiquarta
Tercera menor	de	6 à 5	Sesquiquinta
Sexta mayor	de	5 à 3	Superbiparciente tercias
Sexta menor	de	8 à 5	Supertriparciente quintas
Tono mayor	de	9 à 8	Sesquioctava
Tono menor	de	10 à 9	Sesquinona
Septima mayor	de	9 à 5	Seperquadruparciente quintas
Septima menor	de	16 à 9	Superseptuparciente nonas
Semitono mayor	de	16 à 15	Sesquinquindecima
Semitono menor	de	25 à 24	Sesquivigesima quarta
Coma	de	81 à 80	Sequioctuagesima
Diesis	de	128 à 125	Supertrip. ciento viges. quintas
Novena mayor	de	9 à 4	Dupla sesquiquarta
Novena menor	de	20 à 9	Dupla superbiparciente nonas
Decena mayor	de	5 à 2	Dupla susquialtera
Decena menor	de	12 à 5	Dupla superbiparciente quintas
Undecima	de	8 à 3	Dupla superbiparciente tercias
Duodecima	de	3 à 1	Tripla
Decim. tercia may.	de	10 à 3	Tripla sesquitercia
Decim. tercia men.	de	16 à 5	Tripla sesquiquinta
Decim. quar. may.	de	18 à 5	Tripla supertriparciente quintas
Decim. quart. men.	de	32 à 9	Tripla superquintus pare nonas

De.

Decima quinta	de	4	à	1	Quadrupla
Decima sexta may.	de	9	à	2	Quadrupla sesquialtera
Decima sexta men.	de	40	à	9	Quadrup. superquadrupare. nonas
Decima sept. may.	de	5	à	1	Quintupla
Decima sept. men.	de	24	à	5	Quadrup. superquadrup. quintas
Decima octava	de	16	à	3	Quintupla sesquitercia
Decima nona	de	6	à	1	Sextupla
Vigesima mayor	de	20	à	3	Sextupla superbiparcient. tercias
Vigesima menor	de	32	à	5	Sextupla superbiparcient. quintas
Viges. prima may.	de	36	à	5	Septupla sesquiquinta
Viges. prima men.	de	64	à	9	Septupla sesquinona
Vigesima segunda	de	8	à	1	Octupla

891 En esta tabla están todos los intervalos del genero diatonico hasta tres octovas: Quien quisiere proseguirla, sume los intervalos simples nacidos de la division de la octava, que son los primeros de la tabla con la razon de 8. á 1. que son tres octavas, y tendrá todos los ietervalos hasta quatro octavas, que es la razon de 16. á 1. con la qual si vuelve á sumar los mismos intervalos simples, tendrá los compuestos hasta cinco octavas, que es la razon de 32. à 1. y asi continuamente.

Observaciones.

892 Los intervalos compuestos, son de la misma especie que los simples; porque si los simples son consonancia, tambien los compuestos de ellos, y si aquellos son disonancia, tambien estos; como porque la quinta es consonancia, tambien lo será la duodecima que es compuesta de octava, y quinta, y si la septima es disonancia, tambien lo es la decimaquarta, y asi de los demas.

893 Pero es digno de observacion, que todos los intervalos que consisten en razon multiplique, como dupla, tripla, quadrupla, quintupla, &c. son consonancias cantables, y comunes, y solo el que consiste en razon septupla de 7. á 1. que está entre la vigesima primera, y vigesima segunda, no es cantable de los comunes, ni se puede expresar facilmente por voces, é instrumentos sino por el Tetrachordo, ó del modo que hemos dicho por las cuerdas de la vihuela; aunque tengo por cierto que es consonancia.

La

894 La mas perfeta consonancia de todas, es la octava; porque dista menos que en ninguna otra el impelarse el ayre hácia una parte, pues que á cada vibracion de la cuerda mayor se juntan los temblores del ayre. Y la disonancia mayor que puede haber, es, quando las cuerdas igualmente tirantes gruesas, &c. tienen entre sí la razon de la diagonal al lado del quadrado, porque esta razon no se puede expresar por numeros, y asi jamas se juntarán hácia á una parte las vibraciones del ayre.

895 La coma en los intervalos Harmònicos, es como la unidad respeto de los numeros, porque todos se componen de ella. Y asi quien quisiere entretenerse en sumar comas; esto es, sumar la razon de 81. á 80. con la misma razon de 81. á 80. multiplicando 81. por 81. y 80. por 80. tendrá dos comas, que es la razon de 6561. á 6400. las quales si sumáre con otra coma, saldrán la razon de 531441. á 212000. que son tres comas, y asi continuamente hallará que la razon que tiene ocho comas, aun no es como 10. á 9. y la razon de nueve comas, pasa de 10. á 9. con que el tono menor tiene mas de ocho comas, y menos que nueve. Verá tambien como nueve comas no hacen aun la razon de 9. á 8. y diez comas pasan, y asi el tono mayor tiene mas que nueve comas, y menos que diez; y de este modo hallará las comas de todos los demás intervalos hasta que llegue à 55. comas, que aun su razon no es dupla, y á 56. comas ya pasa de dupla con que la octava consta de mas que 55. comas, y menos que 56.

FIN.

¶ Con esto ya es tiempo de poner fin à esta corta navegacion que hemos emprendido en el inmenso pielago de los numeros, recogiendo las velas del discurso, y fixando la ancora de la pluma en el tintero. Quien quisiere descubrir mas senos, podra tomar otro navio mejor de los muchos que nos dexaron los Autores, ó de ellos formarse uno à su intento, porque nosotros descansamos en este puerto, hasta que despleguemos las velas para caminar por otro rumbo. Feliz habrà sido nuestra navegacion, y con incorporable ganancia, si de tal suerte aplicamos nuestros discursos á escudriñar los arcanos de los numeros, que pensando siempre en aquel numero sin numero de innumerables siglos de siglos, que necesariamente hemos de pasar sin jamas llegar al termino, ó de vida bienaventurada, ó de infelice muerte, ajustemos tanbien nuestras cuentas, que gocemos de aquella vida interminable de inmensos gozos, que es ver á Dios por una eternidad. Aquel será perfecto, y dichoso Arithmetico que resolviere este Problema.

INDICE

DE LO QUE SE CONTIENE EN ESTE LIBRO.

PROEMIALES.

PARTE I.

Expliquense algunos terminos.

PARTE II.

De las Monedas, Pesos y Medidas.

LIBRO

Indice de lo contenido.

LIBRO I.

De la logística de los numeros.

PARTE I.

De la logística de los Enteros.

PARTE II.

De la logística de los Quebrados.

PARTE III.

De la logística de los numeros denominados.

PARTE IV.

De la logística de las partes decimas.

LIBRO II.

De la analogía de los numeros.

PARTE I.

De los numeros proporcionales, ó regla de Tres.

PARTE II.

De las reglas de Compañias.

PARTE III.

De las reglas de Aligaciones, ó Mezclas.

PARTE IV.

De las reglas de falsas posiciones.

Indice de lo contenido.

LIBRO III.

De la analítica de los numeros.

PARTE I.

De la extraccion de las raices.

PARTE II.

De los medios proporcionales.

LIBRO IV.

De las Progresiones, y Combinaciones.

PARTE I.

De las Progresiones.

PARTE II.

De las Combinaciones.

APENDICE.