# $f(n)=3n$: REPRESENTACIONES, ESTRATEGIAS Y ESTRUCTURAS POR ALUMNADO DE PRIMERO DE PRIMARIA

Sandra Fuentes y María C. Cañadas

*Este trabajo se enmarca en una investigación sobre pensamiento funcional en primeras edades realizada en España (www.pensamientoalgebraico.es). Presentamos parte de los resultados obtenidos en un estudio realizado con alumnado de primero de primaria (6-7 años). El objetivo general de esta investigación es describir el trabajo de estos alumnos al resolver una tarea que involucra a la función f(n)=3n. Nos centramos en las representaciones, las estrategias y las estructuras que evidencian. Destacamos la conformación de grupos utilizada por algunos alumnos, el predominio de la representación pictórica y la amplia gama de estrategias en la resolución de la tarea.*

*Términos clave*: Estrategias; Estructuras; Pensamiento funcional; Representaciones

*f(n)=3n*: Representations, strategies and structures by first grade students

*This work is part of a survey on functional thinking at an early age carried out in Spain (www.pensamientoalgebraico.es). We present part of the results obtained in a study carried out with first grade students (6-7 years). The general objective of this research is to describe the work of these students when solving a task that involves the function f(n)=3n. We focus on the representations, strategies, and structures they demonstrate. We highlight the formation of groups used by some students, the predominance of pictorial representation and the diversity of strategies in solving the task.*

*Keywords*: Functional thinking; Representations; Strategies; Structures

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2024). *f*(*n*)=3*n*: Representaciones, estrategias y estructuras por alumnado de primero de primaria. *PNA, 18*(2), 161-188. https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.27701

*f(n)=3n*: representações, estratégias e estruturas de alunos da primeira série

*Este trabalho faz parte de uma pesquisa sobre pensamento funcional em idades precoces realizada na Espanha (www.pensamientoalgebraico.es). Apresentamos parte dos resultados obtidos em um estudo realizado com alunos da primeira série (6-7 anos). O objetivo geral desta pesquisa é descrever o trabalho desses alunos ao resolver uma tarefa que envolve a função f(n)=3n. Centramo-nos nas representações, nas estratégias e nas estruturas que evidenciam. Destacamos a formação de grupos utilizada por alguns alunos, a predominância da representação pictórica e a diversidade de estratégias na resolução da tarefa.*

*Palavras-chave*: Estratégias; Estruturas; Pensamento funcional; Representações

Este trabajo se enmarca dentro de la línea *early algebra*, particularmente en el enfoque funcional. Este enfoque se centra en el establecimiento de relaciones entre variables que covarían. Específicamente, abordamos este estudio con estudiantes de primer curso de educación primaria en España (6-7 años), a través de la función lineal *f(n)=3n*.

Diferentes estudios evidencian que estudiantes de estas edades pueden abordar tareas que involucran estructuras multiplicativas con funciones (por ejemplo, Castro et al., 2017; Fuentes y Cañadas, 2021; Moss et al., 2011). La estructura multiplicativa se introduce en primero de educación primaria, principalmente a través de la utilización de series numéricas o de estructuras aditivas. Con diversas actividades, las estructuras multiplicativas se trabajan de forma intuitiva en los alumnos desde los primeros cursos de educación primaria (Fuentes y Cañadas, 2021). Ivars y Fernández (2016) trabajaron con niños de 6 a 12 años, introduciendo problemas que involucraban la estructura multiplicativa. Los alumnos de 6 a 8 años, a través de la modelización y conteo de dibujos, resolvieron con éxito las tareas planteadas, sin necesidad del algoritmo de la multiplicación. En cambio, los alumnos de 9 a 12 años, que ya conocen el algoritmo de la multiplicación, incurrieron en errores asociados al mal uso del mismo. Por tanto, esto apunta a que los estudiantes de primeros cursos de educación primaria podrían abordar problemas que involucren estructuras multiplicativas.

También se ha comprobado que la introducción del pensamiento funcional en alumnos de primaria tiene un efecto positivo a medio-largo plazo. Schliemann et al. (2012) concluyeron que la introducción de este tipo de pensamiento durante 3 años en educación primaria les fue útil en el álgebra de educación secundaria. Utilizar funciones de estructura aditiva o multiplicativa en las tareas que les plantearon a los alumnos ayudó a que los alumnos transitaran desde la matemática generalizada, llegando de manera intuitiva a la generalización (Blanton, 2019;

Carraher et al., 2005; Carraher et al., 2008; Manson, 2017; Kaput, 2008; Schliemann et al., 2007).

En este artículo introducimos la estructura multiplicativa a través de una función con la que no están familiarizados los alumnos, en el contexto de la propuesta *early algebra.* Esta investigación se desarrolla en España, donde se ha incluido recientemente el sentido algebraico en educación primaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022). El sentido algebraico "engloba los saberes relacionados con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades o la modelización de situaciones con expresiones simbólica" (p. 24.486). Para 1° y 2° de primaria, se proponen tareas de encontrar un término desconocido en una serie, extender una secuencia a partir de sus regularidades o modelizar situaciones cotidianas a través de diferentes representaciones. Esto justifica la necesidad de llevar a cabo este tipo de investigaciones.

En concreto, en esta investigación nos centramos en describir el trabajo que realizan los alumnos de primero de educación primaria (6-7 años) al resolver una tarea que involucra la función lineal $f(x)=3x$ desde el marco del *early algebra*.

## Marco conceptual y antecedentes

Los investigadores en *early algebra* tienen una visión amplia sobre la introducción de elementos algebraicos desde los primeros cursos de escolarización. El pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico. Se trata de un proceso cognitivo que se centra en establecer relaciones entre dos o más cantidades que varían simultáneamente (Smith, 2008). El pensamiento funcional se centra en la "construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 211).

Por medio del pensamiento funcional, se pretende que los alumnos detecten similitudes y diferencias entre los valores de las variables involucradas, ya sea identificando lo que se repite o estableciendo la relación entre parejas de valores. La realización de actividades en las que los alumnos puedan establecer relaciones funcionales entre dos o más variables ayuda al desarrollo del pensamiento algebraico y los prepara para el aprendizaje del álgebra formal (Blanton y Kaput, 2011).

Al igual que en el pensamiento algebraico, la generalización es la raíz del pensamiento funcional. Blanton y Kaput (2004) fueron pioneros, al abordar la generalización de niños desde los 3 años. A través de tareas que involucraban la función identidad y la función doble, describieron cómo los niños establecían algunas propiedades entre los números propuestos, como son la paridad, la multiplicación por 2 o sumando dos veces el número dado. Los autores llegaron a introducir el simbolismo algebraico y concluyeron que los alumnos evidenciaron pensamiento funcional antes de lo esperado, identificando relaciones entre las variables desde 1° de primaria.

Uno de nuestros principales antecedentes es el estudio de Cañadas y Fuentes (2015). Las autoras muestran que los alumnos de primero de primaria (6-7 años), establecieron relaciones funcionales en una tarea que involucró la función $f(n)=5n$. Analizaron las representaciones y estrategias que los alumnos utilizaron para realizar la tarea con éxito. La conformación de grupos fue una de las estrategias que los llevó a una solución correcta.

En este trabajo, profundizamos en las representaciones y estrategias en alumnos de estas edades, además de añadir la noción de estructura. Las abordamos a continuación.

## Representaciones

El estudio de las representaciones data de los años 80 (Goldin, 1993; Janvier, 1987). Duval (1993) plantea que, a un mayor número de representaciones distintas de un concepto matemático, más robusto es el significado que tenemos de él. Estos autores coinciden en que las representaciones ayudan a comprender un concepto matemático abstracto, contextualizándolo en la vida real. Diferentes investigadores concuerdan en que las representaciones ayudan a encontrar relaciones matemáticas y que diferentes representaciones pueden destacar características específicas del contenido matemático en cuestión (por ejemplo, Cañadas y Figueiras, 2011; Pinto et al., 2021; Rico, 2009). Algunas representaciones utilizadas en el trabajo de tareas que promueven el pensamiento funcional pueden incluir la utilización de letras, el lenguaje natural (oral y escrito), tablas o gráficos para establecer dichas relaciones funcionales entre las variables (Butto y Rojano, 2009). Cuando los alumnos son más pequeños, las representaciones más intuitivas son la pictórica o la verbal, aunque es posible guiarlos hacia otro tipo de representaciones.

En la tabla 1, describimos cada una de las representaciones.

Tabla 1
*Representaciones: Descripción de la categoría*

| Tipo | Descripción |
|---|---|
| Pictórica | Dibujos |
| Numérica | Números, operaciones o símbolos matemáticos |
| Verbal | Expresiones a través de palabras, escritas/orales |
| Tabular | Tablas para organizar y analizar información |
| Algebraica | Simbolismo algebraico |
| Múltiple | Utiliza dos o más de las representaciones antes descritas |

En la mayoría de los estudios donde se aborda el pensamiento funcional en los primeros cursos de educación primaria, a los alumnos se les plantea el trabajo con funciones de estructura aditiva. Brizuela, Blanton, Sawrey, et al. (2015) desarrollaron un trabajo con alumnos de 5 a 7 años. Les llegaron a introducir el simbolismo algebraico en el trabajo con tareas contextualizadas que involucran funciones lineales. Su objetivo era ver la viabilidad de utilizar letras para hacer referencia a una cantidad desconocida. Un error común fue relacionar las letras con la posición que ocupan las mismas en el abecedario. Los alumnos usaron la letra como variable y asumieron que la podían utilizar para generalizar una expresión, pero no descartaron utilizar valores específicos en las situaciones planteadas. Los investigadores concluyeron haber encontrado dificultades similares a las detectadas en alumnos de educación secundaria. Brizuela, Blanton, Gardiner et al. (2015) también incorporaron letras como variables en tres entrevistas a una niña de primero de primaria. A medida que el trabajo con la niña avanzó, ella fue complementando su comprensión de las letras como variables y de su utilización. Dificultades comúnmente encontradas en secundaria sobre el orden de las letras en el abecedario y su relación con los números naturales, no se observaron en esta niña. Castro et al. (2017) llevaron a cabo tres intervenciones con un grupo de 12 alumnos de 5 a 6 años (último curso de educación infantil). Los alumnos evidenciaron pensamiento funcional al establecer la relación entre las variables dependiente e independiente. También establecieron la relación "doble" cuando les plantearon que cada perro necesitaría 2 platos, y algunos reconocieron la función $f(n)=n+1$. En otro estudio, 39 alumnos de segundo de primaria trabajaron con tablas de funciones y descubrieron la relación funcional que existe entre los datos. Las investigadoras introdujeron tareas de relaciones aditivas. Los alumnos encontraron diferentes formas de representación para resolver las tareas propuestas (Brizuela y Lara-Roth, 2002). Por último, destacamos el diseño e implementación de un experimento de enseñanza, con un grupo de alumnos de 6 a 7 años durante cinco sesiones en los que trabajaron la función $f(n)=n+5$. Los investigadores analizaron las relaciones funcionales que establecieron los alumnos de manera tabular para después verbalizar esta relación las que podemos observar por pequeños extractos de las entrevistas realizadas (Morales et al., 2018).

Sin embargo, hay trabajos donde también se les introducen funciones que involucran la estructura multiplicativa. Al presentarles una tarea que involucra la función $f(n)=5n$ a alumnos de 6 años, en casos cercanos y continuos, utilizaron la representación pictórica. A medida que el tamaño de los casos aumenta, los alumnos buscaron representaciones numéricas, como lo son la utilización de series de números 5, según sea el caso consultado. La respuesta dependió de la representación de origen: si se les pedía que expresaran la respuesta con sus palabras, los alumnos tendieron a utilizar la representación verbal, en este caso, en la generalización de la tarea propuesta (Cañadas y Fuentes, 2015).

## Estrategias

Rico (1997) define las estrategias como las formas de actuación de los alumnos frente a una tarea matemática. Por lo tanto, consideraremos las diferentes formas y caminos que los alumnos establecen para llevar a cabo la resolución de la tarea.

Las siguientes investigaciones utilizan funciones de estructura aditiva. Morales et al. (2018) trabajaron con 30 alumnos de primero de primaria. El problema planteado involucraba la edad de 2 hermanos, uno 5 años mayor que el otro; y la función implicada era $f(n)=n+5$. Los alumnos evidenciaron estrategias de conteo, respuesta directa, conteo total y conteo desde el mayor de los sumandos. En operatoria identificaron las estrategias (a) hechos numéricos recordados, (b) descomposición de números y (c) modificación de los datos iniciales. La relación funcional más evidenciada por los alumnos fue la correspondencia, seguida por la covariación. Callejo et al. (2016), identificaron características del pensamiento algebraico en alumnos de primaria (6 a 12 años), en un contexto que involucra la función $f(n)=2n+2$. Las estrategias utilizadas por los alumnos fueron la estrategia gráfica, recursividad, funcional no proporcional y proporcional; la estrategia gráfica fue utilizada por todos los cursos, pero fue la única que utilizaron en 1° y 2°. Los alumnos de otros cursos utilizaron estrategias numéricas que involucraban la proporcionalidad.

En cuanto a las investigaciones en las que se involucran la estructura $f(n)=2n$, encontramos algunos ejemplos. Se puede apreciar que las estrategias utilizadas por los alumnos en la función $f(n)=2n$ son las de sumar el mismo número dos veces, la de duplicar la cantidad, seguir la serie de 2 en 2 o sumar de 2 en 2, según cuantos elementos sean requeridos (por ejemplo, Cañadas et al., 2016). Castro et al. (2017) trabajaron con 12 alumnos de último año de infantil (5 y 6 años), en tareas que involucraban las funciones $f(n)=n$, $f(n)=2n$ y $f(n)=n+1$. La tarea que involucraba la función $f(n)=2n$ la abordaron como una estructura aditiva ($f(n)=n+n$). La mayoría de los alumnos identificaron o estuvieron de acuerdo con las estructuras planteadas por sus compañeros en las tareas propuestas. En segundo de primaria, las estrategias que evidenciaron los alumnos son contar de dos en dos, duplicar o sumar el número a sí mismo, también se encontraron con alumnos que sumaron dos a la cantidad de mesas existentes (ver figura 1). Cañadas et al. (2016) trabajaron con 21 alumnos una investigación de diseño. Plantearon una situación problemática en la que había que sentar a los invitados a una fiesta de cumpleaños a cada lado de una mesa cuadrada, sin ocupar los extremos, asegurándose de que las sillas alcanzaran para todos, este problema involucra la función $f(n)=2n$.

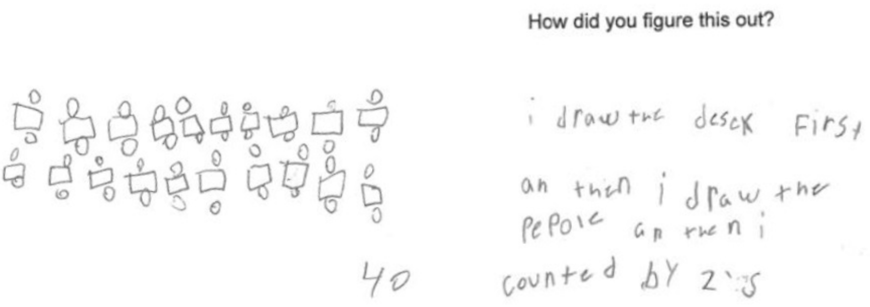



*Figura 1.* Estrategia “contar de dos en dos” (Cañadas et al., 2016)

En educación infantil y primaria (3 a 8 años), encontraron algunas estrategias como sumar de dos en dos, o la recursividad al agregar un elemento de la variable independiente, o agregaron dos de la variable dependiente, además conjeturaron respecto a la paridad de los valores encontrados. En primero de primaria (6 años), los alumnos contaron de 3 en 3 cuando la función involucrada es $f(n)=3n$, el uso de tabla fue innato y aparecieron expresiones como el triple y el doble. En segundo de primaria (7 años), la estructura multiplicativa fue usada con mayor frecuencia por los alumnos. En cursos superiores, se necesitó de menos datos para que generalizaran, utilizaron la estructura multiplicativa, ordenaron los datos en tablas y gráficos, llegando a la notación algebraica de $2n$ como expresión general. Este fue un experimento de enseñanza de Blanton y Kaput (2004), se les planteó encontrar la relación entre las colas y ojos de un grupo de perros, los alumnos más pequeños (3-4 años) contaron los elementos concretos que fueron relacionando en una tabla, en cambio los alumnos más grandes (5 años) lograron encontrar un patrón con el cual generalizar. Ya en último curso de primaria (11-12 años), encontramos una investigación que relaciona las estrategias y representaciones de un grupo de 33 alumnos, se les plantearon dos situaciones de generalización, las estrategias utilizadas en los casos específicos fue el conteo directo, a medida que los valores aumentaban llevándolos a la generalización diversificaron sus estrategias, utilizando primordialmente la de covariación, los alumnos lograron generalizar verbal y simbólicamente (Ureña et al., 2022).

Cañadas y Fuentes (2015) trabajaron con estructuras multiplicativas distintas a las vistas anteriormente. Alumnos de 6-7 años (1º de primaria) establecieron relaciones funcionales, en una tarea que involucraba la función $f(n)=5n$. Usaron la estrategia de conteo de dibujos en las preguntas por casos cercanos y consecutivos (3, 4 y 5). En cambio, para casos lejanos y no consecutivos (8, 10 y 20), las estrategias fueron establecer grupos de cinco elementos o escribieron tantos cincos como número les sean solicitado. Se analizaron los trabajos de 32 alumnos de primero de primaria con edades entre 6-7 años.

Con diferentes grupos de primero de primaria o cursos próximos se han trabajado en diferentes estudios las funciones de estructura aditiva, como por ejemplo *f(n)=n+5* (Morales et al., 2018) o *f(n)=n+1* (Castro et al, 2017) y también funciones de estructura multiplicativa, principalmente *f(n)=2n* (Cañadas et al., 2016). Al buscar en la literatura sobre otro tipo de estructuras multiplicativas, solo encontramos la función *f(n)=5n* (Cañadas y Fuentes, 2015), lo que deja abiertas líneas de investigación para aportaciones como la nuestra.

**Estructuras**

Las estructuras en matemáticas están asociadas a un conjunto de objetos matemáticos acompañado de una o más operaciones, describiendo las propiedades e interacciones que se generan entre ellos (Castro et al., 1997). Molina y Cañadas (2018) describen la noción de estructura para cada uno de los diferentes enfoques del *early algebra*. Específicamente nos centramos en el significado que se le da en el enfoque funcional, donde la estructura permite realizar conexiones entre los conceptos y procedimientos matemáticos, ayudando a establecer una regularidad y la posterior generalización.

Encontramos investigaciones que se enfocan en las estructuras que los alumnos utilizan al desarrollar las diferentes tareas que se le proponen. Merino et al. (2013) trabajaron con alumnos de 5° de primaria (11-12 años). Propusieron a los alumnos una tarea de generalización que involucraba un ejemplo genérico. Los alumnos debían ubicar mesas y sillas según el esquema propuesto (figura 2). Las estructuras fueron variadas, entre ellas encontramos Mx2+2, M+M+2, M+M+1+1, M+8, Mx4, con M=número de mesas, en las conclusiones se puede apreciar que muchas de estas estructuras llevaron a los alumnos a respuestas correctas y se evidenció pensamiento funcional.

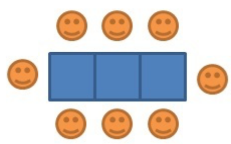


*Figura 2*. Ejemplo genérico

Torres et al. (2018; 2019) mostraron diferentes estructuras que 6 alumnos de 2º de primaria identificaron de forma verbal. Entre ellas se encuentran *n+n*, *n+1*, *n+2*, *n+3*. La tarea propuesta a los alumnos involucraba la función *f(n)=n+3*, utilizando una máquina de funciones. Finalmente, 5 de los 6 alumnos lograron establecer la relación funcional correcta. Los autores, en una publicación del año 2019, indagaron en las estructuras que los alumnos establecieron en tareas de contextos cotidianos, los cuales implicaron a las funciones *f(n)=2n*, *f(n)=1+2n* y *f(n)=n+3*. Concluyeron que los alumnos establecieron muchas más relaciones cuando los casos por los que se les preguntó eran particulares y que cuando se les indujo a la generalización fue un poco más difícil, aunque hubo alumnos que lograron establecer la generalización. En otra investigación sobre estructuras, entrevistaron a 4 alumnos de 2° de primaria (7-8 años), donde debían resolver una tarea que involucraba la función *f(n)=2n*. Para preguntas sobre casos particulares, los alumnos establecieron la estructura correcta. En cambio, solo uno de ellos logró establecerla al plantearle la generalización (Torres et al., 2022).

Al comparar las estructuras identificadas por alumnos de 3° y 5° de primaria, fueron los alumnos de 3° los que establecieron una mayor variedad de estructuras, utilizando en muchas de ellas una estructura aditiva. En cambio, los alumnos de 5° tendieron a utilizar estructuras multiplicativas en sus estrategias de resolución. Pinto y Cañadas (2017) identificaron 17 estructuras diferentes en las respuestas de los alumnos de 3° de primaria, para establecer una misma regularidad. De ellas, 5 eran la estructura correcta a la tarea planteada. En la siguiente figura, podemos ver las estructuras utilizadas por un alumno de tercero, donde identificó la estructura *3+3+n+n*.

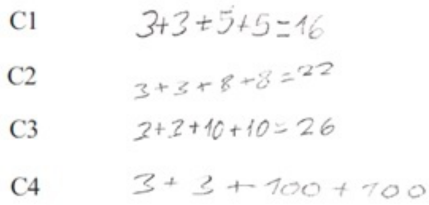



*Figura 3.* Estructura *3+3+n+n* (Pinto y Cañadas, 2017)

Con la revisión de la literatura, justificamos la necesidad de realizar investigaciones como la nuestra. Los trabajos antes mencionados se enfocan particularmente en algunos de los aspectos que abordaremos como son las representaciones, estrategias o estructuras. La mayor parte de los estudios previos se han centrado en el trabajo de niños de edades superiores a 7 años en estos aspectos. De ahí que nuestro objetivo general de investigación sea describir el trabajo que realizan los alumnos de primero de educación primaria (6-7 años) al resolver una tarea que involucra la función lineal *f(x)=3x* desde el marco del *early algebra*. Pretendemos contribuir al ámbito de estudio con evidencias del trabajo realizado por alumnos de cursos inferiores a los abordados por los antecedentes en lo referente a representaciones, estrategias y estructuras.

Desglosamos este objetivo general en tres objetivos de investigación específicos: (a) describir las representaciones utilizadas por los alumnos, (b) describir las estrategias que los alumnos emplean para establecer la relación funcional y (c) identificar las estructuras que los alumnos evidencian.

# Metodología

Llevamos a cabo una investigación de carácter descriptivo (Hernández et al., 2010), porque el análisis de los datos pretende describir los procesos de los alumnos en relación con el pensamiento funcional.

Trabajamos con un grupo de 32 alumnos de primero de primaria (6-7 años) de un colegio concertado de Granada (España), de nivel socioeconómico medio-bajo. La muestra fue intencional, según la disponibilidad del centro y de los docentes.

La mitad de los alumnos estaba iniciándose en la lecto-escritura y la otra mitad eran no lectores, por lo que la introducción a las diferentes tareas la hicimos de forma oral. Los alumnos no habían trabajado con patrones numéricos ni la generalización previamente, en consonancia con los contenidos curriculares vigentes para ese curso (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007). Sí habían trabajado con patrones figurales en educación infantil, y el conteo de 1 en 1 y de 2 en 2, pero no con tareas de pensamiento funcional o tareas en las cuales relacionaran diferentes variables.

Esta investigación se encuentra inmersa en un proyecto centrado en el pensamiento algebraico en educación infantil y educación primaria en España (www.pensamienteoalgebraico.es). Los investigadores implicados en el proyecto, expertos en Didáctica de la Matemática, diseñamos e implementamos una prueba con tres tareas que involucraban funciones lineales. La aplicación de la prueba tuvo una duración de 1,5 horas y estuvo a cargo de las autoras de este trabajo.

**Diseño y descripción de las tareas**

Diseñamos las tareas considerando los siguientes criterios específicos: (a) cotidianidad, de forma que se tratara de una situación que fuese cercana y familiar a cualquier alumno del grupo participante, como lo es una fiesta de cumpleaños; (b) contexto funcional en el que intervinieran 2 variables, creando parejas de datos relacionados; (c) función afín de la forma $ax+b$, con $a$ y $b$ constantes naturales implicadas en la tarea propuesta; (d) números naturales, los números utilizados en los apartados son números naturales, tanto en el dominio como en el recorrido; (e) conocimiento del contexto numérico, los números utilizados están dentro de su ámbito numérico de estudio y no dificultan las operaciones ni los resultados (con la intención de que los números presentados no añadieran una dificultad al tipo de tarea presentada). Estas variables de tarea fueron consideradas para que no hubiera dificultades añadidas a las relativas a la generalización en el contexto propuesto y se pudieran lograr los objetivos de investigación propuestos.

Tuvimos en cuenta una situación cotidiana como lo es una fiesta de cumpleaños y se les proponía comprar diferentes elementos para ella. La variable independiente fue el número de alumnos invitados a la fiesta. Las variables dependientes fueron el número de gorros ($f(n)=n$), el número de piruletas ($f(n)=3n$) y el número de globos ($f(n)=5n$), respectivamente. Cada tarea involucra una de estas funciones. A su vez, cada tarea contiene diferentes cuestiones donde se les preguntaba por casos particulares consecutivos y cercanos ($n=1, 2, 3, 4$ y $5$) y, gradualmente, por casos no consecutivos y lejanos ($n=8, 10, 20$). Para preguntar por la generalización, les planteamos encontrar el número de objetos que se necesitaban para 100 invitados y que expresaran cómo llegaban a ese resultado.

A continuación, en la tabla 2, resumimos las características de las tres tareas que propusimos en la investigación.

Tabla 2
*Tareas*

| Tarea | Función | Variable independiente | Variable dependiente | Valores dados | Valores por encontrar |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $f(n)=n$ | n. de niños | n. de gorros | 1 niño - 1 gorro | 2, 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100 |
| 2 | $f(n)=3n$ | n. de niños | n. de piruletas | 1 niño - 3 piruletas<br>2 niños - 6 piruletas | 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100 |
| 3 | $f(n)=5n$ | n. de niños | n. de globos | 1 niño - 5 globos<br>2 niños - 10 globos | 3, 4, 5, 8, 10, 20 y 100 |

En este artículo nos centramos en el trabajo de los estudiantes en la tarea 2. Decidimos centrarnos en esta tarea por la variedad de representaciones, estrategias y estructuras que observamos en las producciones. A continuación, describimos esta tarea en detalle.

*Tarea 2*
Introdujimos la tarea verbalmente y les pedimos establecer la relación entre el número de niños y número de piruletas que se deben comprar para la fiesta de cumpleaños. Mostramos a los alumnos la información que presentamos escrita en el folio (1 niño - 3 piruletas). La función que determina esta relación es $f(n)=3n$. Ante el gran grupo, hicimos explícito el caso particular 2 niños-6 piruletas, de la forma que recogemos en la figura 4.

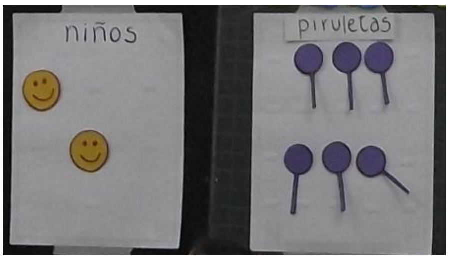



*Figura 4.* 2 niños - 6 piruletas

Les preguntamos por los siguientes casos particulares: 3, 4, 5, 8, 10 y 20 niños y cómo explicarían a la mamá la compra de piruletas si hubiera 100 invitados a la fiesta.

## Implementación

La implementación en el aula estuvo a cargo de las autoras de este trabajo. La primera autora dirigió la sesión, explicando la tarea a los alumnos y dirigiendo la discusión sobre los casos particulares propuestos al gran grupo. La segunda autora estuvo de apoyo. En cada parte de la sesión, comenzamos introduciendo la tarea con toda la clase, estableciendo dos parejas de datos, las relativas a $n=1$ y $n=2$. Luego, les explicábamos la tarea completa, incluido el último apartado, en el que les pedíamos que explicaran cuántos elementos se necesitaban para 100 invitados. Aclarábamos que podían resolver cada uno de los apartados como ellos quisieran —dando libertad en la representación y estrategia que utilizaran—. Posteriormente, continuaron con el desarrollo individual de la tarea. En el transcurso del trabajo individual, las investigadoras atendieron a las dudas de los alumnos de forma individual.

## Categorías de análisis

Analizamos las respuestas escritas de los estudiantes. Para este análisis, partimos de las categorías diseñadas por Merino (2012) y Fuentes (2014). Adaptamos esas categorías para dar cumplimiento a nuestros objetivos de investigación y de forma que permitieran describir nuestros datos en relación con: (a) representaciones, (b) estrategias y (c) estructuras.

### *Representaciones*

Las representaciones que hemos contemplado son: (a) pictórica, (b) numérica, (c) verbal, (d) tabular, (e) algebraica y (f) múltiples. Los valores de esta categoría no son excluyentes, pudiendo darse que un alumno use representaciones múltiples para resolver una tarea.

### *Estrategias*

Los valores de esta categoría son excluyentes. Las estrategias que consideramos son: (a) respuesta directa, (b) conteo de dibujos, (c) agrupación de elementos y (d) cambia el número de niños de la relación.

### *Estructuras*

Las estructuras son las expresiones matemáticas que se generan al resolver las tareas planteadas. Esta categoría es excluyente y las subcategorías emergerán de las producciones escritas de los alumnos. Las personas en los que no identifiquemos una estructura no serán consideradas en este conteo.

Las estructuras que consideramos para esta categoría emergieron de los datos de las pruebas escritas de los alumnos y son: (a) $f(n)=3n$, (b) $f(n)=n$, (c) $f(n)=n+3$, (d) $f(n)=3$, (e) $f(n)=3m$, (f) $f(n)=n+2$.

## Análisis de datos

Después de la recogida de las producciones escritas de los alumnos (folios de las 3 tareas), tabulamos todos los datos en hojas de datos Excel y procedimos a la codificación de las respuestas según cada una de las categorías antes descritas (representaciones, estrategias y estructuras) que cada alumno utilizó al resolver cada una de las tareas. En este artículo analizamos la información recogida del trabajo de los alumnos en la tarea 2. Asignamos a cada alumno un número según su orden alfabético, para resguardar su anonimato. Las hojas de datos permitieron registrar la información de forma esquemática en tablas de doble entrada. Creamos una tabla por cada categoría, en vertical registramos los códigos asociados a cada alumno y en horizontal las subcategorías de representaciones, estrategias y estructuras, automatizamos las hojas de datos para hacer más eficiente el conteo. Anexo se tenían a la vista las producciones escritas escaneadas. Realizamos una triangulación por pares de las respuestas. El equipo a cargo del análisis de las respuestas está compuesto por expertos en Didáctica de la Matemática.

## Análisis de datos, resultados y discusión

Describimos los resultados según los focos de interés en esta investigación (representaciones, estrategias y estructuras). Para cada foco, hacemos una descripción general y mostramos ejemplos de las producciones escritas de los alumnos, el análisis y discusión de estos.

Para nombrar a los alumnos, utilizamos la letra A acompañada por el número del registro al que corresponde la prueba escrita. Cada tarea se compone de siete apartados, etiquetados de la A a la G para los respectivos valores de $n$ (A=3, B=4, C=5, D=8, E=10, F=20 y G=100), que representan los niños asistentes a la fiesta de cumpleaños.

### Representaciones

Las representaciones utilizadas por los alumnos en el desarrollo de la tarea fueron: (a) pictórica, (b) numérica, (c) verbal y (d) múltiple.

Presentamos, en la tabla 3, ejemplos de las representaciones utilizadas por los alumnos al resolver la tarea.

Tabla 3
*Ejemplos de representaciones*

| Representación | Ejemplo |
|---|---|
| Pictórica |  (Alumno A10) |
| Numérica |  (Alumno A6) |

Tabla 3

*Ejemplos de representaciones*

| Representación | Ejemplo |
|---|---|
| Verbal | 8  (Alumno A9) |
| Múltiple: Numérica y pictórica | 2 ☺☺  (Alumno A14) |

Basándonos en las categorías anteriormente ejemplificadas, recogemos en la tabla 4 un resumen del número de representaciones usadas por los alumnos en cada uno de los apartados.

Tabla 4

*Representaciones*

| Representación | Apartado | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A (*n=3*) | B (*n=4*) | C (*n=5*) | D (*n=8*) | E (*n=10*) | F (*n=20*) | G (*n=100*) |
| Pictórica | 28 | 28 | 28 | 25 | 26 | 22 | 1 |
| Numérica | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 7 | 10 |
| Verbal | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 20 |

Como se puede apreciar en la tabla 4, la representación predominante fue la pictórica, la cual algunos alumnos combinaron con la numérica. La mayoría de estudiantes que emplearon la representación pictórica fueron dibujos de las piruletas (23/28), aunque nos encontramos con seis casos donde los dibujos eran puntos, palos o cuadrados. El número de alumnos que utilizaron las representaciones pictórica y numérica se mantiene en los casos de *n=3, 4, 5*. En cambio, la frecuencia de la representación pictórica disminuyó conforme aumentó el tamaño del caso particular. Aunque en la mayoría de las cuestiones no usaron la representación verbal o solo un alumno lo hizo, observamos que en el apartado G (*n=100*), en el que se les pidió explícitamente que explicaran su respuesta, la representación más usada fue la verbal (20 alumnos). Además, 10 alumnos trataron de explicar su respuesta utilizando algún símbolo o número (representación numérica), aunque no expresaron la respuesta correcta con esta representación.

Hubo alumnos que utilizaron más de una representación en su respuesta. En la tabla 5, mostramos un resumen de las representaciones múltiples que utilizaron los alumnos al responder a cada apartado.

Tabla 5
*Representaciones múltiples*

| Representación | Apartado | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A (*n=3*) | B (*n=4*) | C (*n=5*) | D (*n=8*) | E (*n=10*) | F (*n=20*) | G (*n=100*) |
| Pictórica-numérica | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 0 |
| Numérica-verbal | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| Pictórica-verbal | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 |

Lo primero que se observa es que las representaciones múltiples involucraron dos representaciones diferentes (no más). La combinación pictórica-numérica fue la más utilizada y se dio en preguntas sobre casos particulares hasta el 20. Los alumnos dibujaron los elementos correspondientes y escribieron el número total de elementos (ver ejemplo de la tabla 3). La siguiente representación múltiple más usada fue la numérica-verbal (en 10 ocasiones), únicamente en el caso particular *n=100* (ver figura 5).

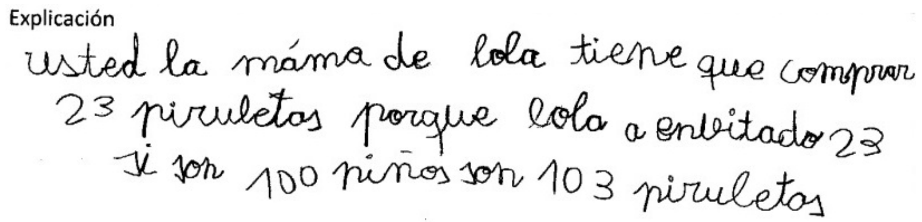
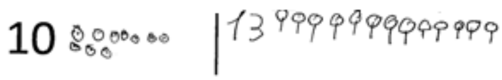
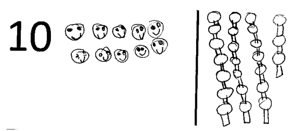



*Figura 5.* Representación numérico-verbal para *n=100*

**Estrategias**

Presentamos en la tabla 6 un ejemplo de las producciones escritas de los alumnos para cada una de las estrategias observadas en su trabajo.

Tabla 6
*Ejemplos de estrategias*

| Estrategia | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| Respuesta directa |  (A5)  (A17) | Un número, una expresión aritmética o una secuencia numérica por respuesta |
| Conteo de dibujos |  (A5)  (A20) | Dibujo de los elementos que corresponden al apartado solicitado |
| Agrupación de elementos |  (A19) | Ordenamiento de los elementos que necesita en filas, columna o grupos |
| Cambia el número de niños de la relación |  (A12) | El número de piruletas corresponde al valor de otro grupo de niños |

En la tabla 7 presentamos un resumen de las estrategias utilizadas por los alumnos en la resolución de esta tarea. En cada celda, podemos encontrar el número de alumnos que hacen uso de esa estrategia, entre paréntesis podemos observar el número de respuestas correctas correspondientes.

Tabla 7
*Estrategias*

| Estrategia | Apartado | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A (*n=3*) | B (*n=4*) | C (*n=5*) | D (*n=8*) | E (*n=10*) | F (*n=20*) | G (*n=100*) |
| Respuesta directa | 3 (2) | 4 (2) | 3 (1) | 4 (0) | 4 (0) | 6 (0) | 20 (0) |

Tabla 7
*Estrategias*

| Estrategia | Apartado | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A (*n=3*) | B (*n=4*) | C (*n=5*) | D (*n=8*) | E (*n=10*) | F (*n=20*) | G (*n=100*) |
| Conteo de dibujos | 26 (10) | 24 (8) | 24 (4) | 20 (1) | 22 (2) | 19 (0) | 1 (0) |
| Agrupación de elementos | 2 (1) | 2 (2) | 2 (2) | 1 (1) | 2 (1) | 8 (0) | 0 (0) |
| Cambia número de niños | 1 (0) | 2 (0) | 2 (0) | 5 (0) | 2 (0) | 3 (0) | 0 (0) |

En la tabla 7, se aprecia la gran variedad de estrategias que los alumnos establecieron, algunas de forma correcta (entre paréntesis) y otras erróneas; por ejemplo, en el conteo de dibujos apartado A, 26(10) significa que 26 alumnos utilizaron esta estrategia, de los cuales 10 tuvieron una respuesta correcta. Observamos que, en los primeros casos, cercanos y consecutivos (*n=3, 4* y *5*), muchos de los alumnos utilizaron el conteo de dibujos para encontrar la solución y que en el apartado G los alumnos utilizaron la estrategia de respuesta directa.

Al analizar los datos por alumno, percibimos que cuando encuentran una estrategia perseveran en ella, es así como los alumnos que forman grupos lo hacen en todos los apartados. En la figura 6, podemos observar las respuestas de A12, formando filas de 3 elementos.

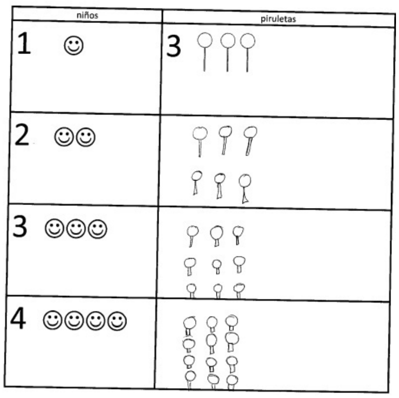
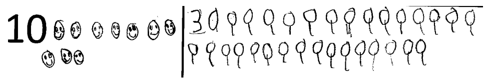
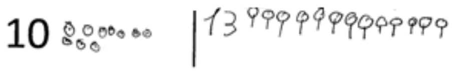
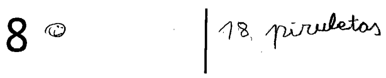
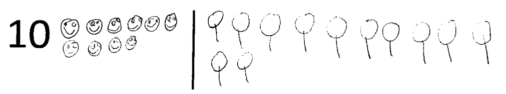



*Figura 6.* Conformación de grupos de A12

**Estructuras**

En cuanto a las estructuras que los alumnos utilizaron en la resolución de la tarea, tenemos: (a) *f(n)=3n*, (b) *f(n)=n*, (c) *f(n)=n+3*, (d) *f(n)=3*, (e) *f(n)=3m*, (f) *f(n)=n+2*. Estas estructuras son las que las investigadoras recogieron de las producciones escritas, ya que los niños no utilizaron expresiones algebraicas en su resolución. Estas categorizaciones son excluyentes, ya que la respuesta del alumno podía corresponder a una única estructura. Describimos y ejemplificamos las estructuras en la tabla 8.

Tabla 8
*Ejemplos de estructuras*

| Estructuras | Ejemplo | Descripción |
|---|---|---|
| *f(n)=3n* |  (A15) | Identifican la relación el triple de elementos, a cada niño le corresponden 3 piruletas |
| *f(n)=n* |  (A30) | Identifican la relación identidad, a cada niño le corresponde solo una piruleta |
| *f(n)=n+3* |  (A5) | Suman el número de piruletas de un niño a la variable independiente, al número de niños invitados a la fiesta le suman 3 piruletas |
| *f(n)=3* |  (A20) | Escriben o dibujan 3 elementos en cada caso pedido, sin importar el número de niños en la fiesta |
| *f(n)=3m* |  (A7) | Cambia el número de niños de la relación, se le pregunta por 8 niños, contesta 18 piruletas, que corresponde a 6 niños |
| *f(n)=n+2* |  (A3) | Suma dos piruletas al total de niños invitados a la fiesta |

Aunque el número 3 aparece involucrado en varias de las estructuras, únicamente una es correcta y no aparecen otras estructuras equivalentes a ella. Esta estructura correcta aparece con mayor frecuencia en los dos primeros apartados, pero no en otros en los que el caso particular involucrado aumenta. De hecho, la identidad es la que aparece con mayor frecuencia en un cómputo total.

En la tabla 9, presentamos un resumen del número de alumnos que utilizaron cada una de las estructuras antes ejemplificadas.

Tabla 9
*Estructuras*

| Estrategia | Apartado | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A ($n=3$) | B (n=4) | A ($n=3$) | D (n=8) | A ($n=3$) | F (n=20) | A ($n=3$) |
| $f(n)=3n$ | 13 | 12 | 7 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| $f(n)=n$ | 7 | 8 | 16 | 14 | 15 | 12 | 11 |
| $f(n)=n+3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| $f(n)=3$ | 6 | 6 | 3 | 3 | 2 | 2 | 0 |
| $f(n)=3m$ | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 |
| $f(n)=n+2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Total | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 3 |

Observamos que en promedio se utilizaron 5 estructuras distintas en cada apartado, siendo el apartado de generalización el que presenta un menor número de estructuras (3).

En la tabla 9 se observa que, para los primeros apartados, la estructura $f(n)=3n$ fue la más frecuentemente empleada. A medida que los números crecen o no son consecutivos ($n=8$, $10$ y $20$), los alumnos usaron la estructura $f(n)=n$ para responder. Que los números sean más grandes y no consecutivos, fue una forma de verificar si habían encontrado alguna relación entre las variables.

Encontramos respuestas de alumnos que establecieron la estructura $f(n)=n+3$. Asumieron que las 3 piruletas del enunciado debían ser sumadas al número total de niños invitados. Por ejemplo, para 10 niños se necesitan 13 piruletas. Algunos alumnos solo se quedaron con la relación $f(n)=3$ (figura 7) y fue su respuesta en todos los apartados.

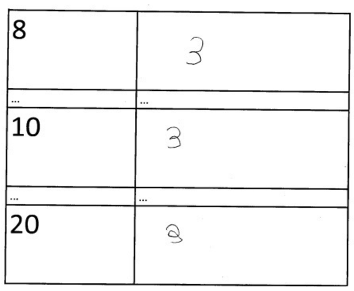
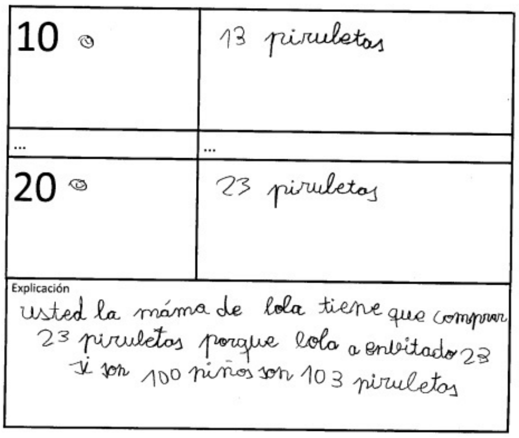



*Figura 7*. Estructura $f(n)=3$

Al igual que en las estrategias, los alumnos perseveraron en utilizar solo una estructura en todas las respuestas. Por ejemplo, los que ponen solo 3 (figura 7) o usan la estructura $n+3$ (figura 8). Esto se debe a que asumen que la estructura encontrada es la correcta.



| | |
|---|---|
| 10 | 13 piruletas |
| ... | ... |
| 20 | 23 piruletas |

Explicación
usted la máma de lola tiene que compvar 23 piruletas porque lola a enbitado 23 si son 100 niños son 103 piruletas

*Figura 8.* Estructura *f(n)=n+3*

En la tabla 10, presentamos la ubicación de los alumnos según la estrategia, estructura y representación utilizada al resolver la tarea. Cada alumno está representado por la letra A y la posición de su prueba escrita.

Se observa en la tabla 10 que hay alumnos que están en más de una celda. Esto se debe a que utilizaron diversas representaciones, estructuras y estrategias, a diferencia del alumno que está en una o dos celdas, que persevera y utiliza la misma representación, estructura y estrategia en todas sus respuestas. Por ejemplo, A26 (subrayado en la tabla 10) utilizó dos representaciones —pictórica y verbal— y dos estrategias, —conteo de dibujos y respuesta directa. Esto hace que se encuentre en varias celdas, pero en sólo una columna, ya que siempre establece la estructura *f(n)=n*. En cambio, A7 (marcado con un cuadrado) utilizó dos estructuras, tres representaciones y dos estrategias. Por eso, no sólo lo encontramos en varias celdas, sino también en varias columnas. A31 (entre asteriscos) solo lo encontramos en una celda. Para todas sus respuestas utilizó la representación pictórica, la estructura *f(n)=n* y la estrategia de conteo de dibujos.

En la tabla 10, observamos que los valores se agrupan principalmente en la estrategia de respuesta directa y la representación verbal, el conteo de dibujo y la representación pictórica, junto a las estructuras de *f(n)=3n* y *f(n)=n*. Esto se explica por el cambio de los valores de los datos de cercanos, consecutivos o no. También, se aprecia otra agrupación al final de la tabla cuando en la estrategia "cambia número de niños", en la que se utiliza mayoritariamente la representación pictórica, la estructura corresponde a *f(n)=3m*. Estas agrupaciones no son perceptibles en las tablas anteriores, ya que aquí tenemos una visión global y conjunta de los datos.

Tabla 10
*Relación representación, estrategia y estructura*

| Estrategias | R | Estructuras *f(n)=3n* | *f(n)=n* | *f(n)=n+3* | *f(n)=3* | *f(n)=3m* | *f(n)=n+2* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Respuesta directa | P | A15 | | $\boxed{\text{A7}}$ | | | |
| | N | A5-A6-A15 | A4-A16-A22-A24-A27 | A4-$\boxed{\text{A7}}$-A15 | A17 | A6 | |
| | V | | A1-A4-A6-A9-A10-A12-A16-A19-A22-A24-A26-A29 | A4-$\boxed{\text{A7}}$-A15 | | | A3 |
| Conteo de dibujos | P | A1-A2-A8-A11-A13-14-A15-A17-A18-A21 | A1-A2-A4-A8-A9-A10-A11-A13-A20-A21-A22-A23-A24-A25-A26-A27-A29-*A31*-A32 | A5 | A20-A24-A27-A29-A30-A32 | | A3 |
| | N | A1-A14-A15 | | A5 | | | |
| | V | | | | A30 | | |
| Agrupación de elementos | P | A12-A18-A19 | | | | | |
| | N | | | | | | |
| | V | | | | | A12 | |
| Cambia número de niños | P | | | | | $\boxed{\text{A7}}$-A8-A14-A19-A23 | |
| | N | | | | | A6-$\boxed{\text{A7}}$-A14 | |
| | V | | | | | | |

*Nota*. R=Representación; P=Pictórico; N=Numérico; V=Verbal.

# CONCLUSIONES

Nuestra investigación se enfoca en describir lo que alumnos de primero de primaria realizaron al resolver una tarea que involucraba la función $f(n)=3n$. Somos conscientes de que no podemos generalizar los resultados, por el tamaño de la muestra y por la intencionalidad de esta. Sin embargo, es esperable que los resultados sean equiparables a otros grupos de estudiantes de la misma edad en España, por las características del alumnado.

Respondimos a los tres objetivos de investigación específicos: (a) describir las representaciones utilizadas por los alumnos al resolver la tarea planteada, (b) describir las estrategias que los alumnos emplean para establecer la relación funcional y (c) identificar las estructuras que los alumnos evidencian al resolver la tarea.

En cuanto a las representaciones, los alumnos utilizaron la representación pictórica, numérica y verbal, apoyándose con dibujos, números o escribiendo su opinión. La representación pictórica fue la más utilizada, seguida de la numérica. Los alumnos más pequeños tienden a trabajar con la representación pictórica, por sobre la simbólica, esto ya había sido documentado en los trabajos de Castro et al. (2017) y Fuentes y Cañadas (2015). Se destaca que en el apartado de generalización se les pedía expresamente que escribieran lo que debía hacer la mamá para comprar piruletas para 100 niños, por lo que la representación verbal fue predominante en esta respuesta.

Al analizar las respuestas de los alumnos se evidencian estrategias distintas según los números consultados, cuando los datos son cercanos y consecutivos logran establecer la relación funcional correcta, en cambio cuando son lejanos y no consecutivos optan por establecer otra relación funcional. Esto ya había sido investigado por Ureña et al. (2022) y aunque las edades son diferentes, los alumnos también establecen relaciones funcionales dependiendo de los valores numéricos de los datos.

Al ser números pequeños, esperábamos que pudiesen establecer solo con el conteo de dibujos, el número exacto de piruletas que necesitaban para la fiesta, es decir, que evidenciaran la relación $f(n)=3n$. Cuando les preguntamos por números más grandes cambiaron de estrategia a la respuesta directa. Esto se evidenció aún más en el apartado sobre generalización ($n=100$), al ser un número mucho más alto que los demás. Fue enriquecedor que algunos alumnos crearan grupos de 3 elementos, en los cuales establecieron claramente la relación funcional de forma pictórica, organizando los datos, ya sea por filas, columnas o grupos de piruletas.

Coincidimos con Torres et al. (2018; 2019) en que los alumnos trataron de establecer alguna estrategia para resolver el problema. Esto generó diversidad en las estrategias que encontramos en el trabajo con el grupo completo. Aunque los alumnos de nuestro estudio eran de un curso inferior, buscaron maneras diferentes de resolver el problema. Muestra de ello es la conformación de grupos como estrategia de resolución.

Identificamos seis estructuras diferentes: $f(n)=3n$, $f(n)=n$, $f(n)=n+3$, $f(n)=3$, $f(n)=3m$ y $f(n)=n+2$, las cuales pueden ser adecuadas o no a la tarea. Cada alumno, a lo menos, utilizó tres veces la función para ser considerada una estructura. Las más frecuentes fueron $f(n)=3n$ y $f(n)=n$. Para números consecutivos y cercanos (*3, 4* y *5*), utilizaron $f(n)=3n$, cuando los números eran no consecutivos y se alejaban de su dominio numérico conocido (*8, 10, 20* y *100*). Los alumnos cambiaron de estructura a $f(n)=n$, ya que establecen que para muchos niños es recomendable solo darles una piruleta, este cambio en la relación fue una respuesta recurrente en ellos y creemos se debe a que los valores resultantes fueron muy grandes comparados con los que están acostumbrados a trabajar en clases o en sus casas. Puede que sea impensable necesitar una cantidad de piruletas tan grande.

En cuanto al tipo de función utilizada en esta investigación, es un aporte haber trabajado con $f(n)=3n$ ya que, en los trabajos previos consultados (Brizuela y Lara-Roth, 2002; Cañadas et al., 2016; Castro et al., 2017; Morales et al., 2018), las funciones eran aditivas, de la forma $f(n)=an+b$; y solo encontramos una de estructura multiplicativa con $f(n)=2n$. Plantear una tarea de estructura multiplicativa que no han trabajado previamente ayuda a que la resolución de la tarea fuera intuitiva, ya que también podía ser abordada como una estructura aditiva (Cañadas y Fuentes, 2015; Fuentes y Cañadas, 2021), logrando realizar con éxito varios de los apartados de la tarea.

Esta investigación es un aporte al enfoque funcional del *early algebra* por dos razones principalmente. Primero, porque identificamos las estructuras que los alumnos lograron establecer al resolver la tarea planteada, que implicaba una estructura multiplicativa desconocida para ellos. Y, segundo, por la diversidad de estrategias que emplearon en la resolución de una tarea que involucraba funciones de estructura multiplicativa.

Frente a toda la información entregada en este documento, podemos concluir, que los alumnos son capaces de establecer relaciones funcionales informales e innatas al ser expuestos a tareas donde hay dos grupos de elementos que covarían. Sugerimos a los maestros desarrollar en los alumnos el pensamiento funcional, proponiendo tareas que incluyan la variación entre variables.

## Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado como parte Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/, España y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional y Beca de doctorado en el extranjero n° 72210402, Gobierno de Chile.

## Referencias

Blanton, M. L., Isler-Baykal, I., Stroud, R., Stephens, A., Knuth, E. y Gardiner, A. M. (2019). Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships. *Educational Studies in Mathematics, 102*(2), 193-219. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09894-7

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. In M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Blanton, M. y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5-23). Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K., (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation / Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología: Studies in Psychology, 36*(1), 138-165. https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027

Brizuela, B. M., Blanton, M. L., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. (2015). Children's use of variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17,* 34-63. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 309-319.

Butto, M. y Rojano, M. (2009). Pensamiento algebraico temprano. *X Congreso Nacional de Investigación Educativa. Área 5: Educación y conocimientos disciplinares*. México.

Callejo, M. J., García-Reche, A., y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 10, 5-25. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.106

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 87-103. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015. 10.004

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje, 34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. (2005). Treating operations as functions. En D. Carraher y R. Nemirovsky (Eds.), *Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education*, XIII, CD-Rom Only Issue.

Carraher, D. W., Martinez, M. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM, 40,* 3-22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. Edma 0-6: *Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13. https://doi.org/10.24197/edmain.2.2017.1-13

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio* [Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España]. http://funes.uniandes.edu.co/6263/

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones *f(x)=3x* y *f(x)=5x* en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 267-275). SEIEM.

Goldin, G. A. (1993). The IGPME working group on representations. En I. Hirabayahi, N. Noluhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 96). University of Tsukuba.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación.* (5ª ed.). McGraw Hill.

Ivars, P. y Fernández, C. (2016). Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años. *Educación Matemática, 28*(1), 9-38. https://doi.org/10.24844/em2801.01

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? En James J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). Lawrence Erlbaum Associates.

Mason, J. (2017). Overcoming the Algebra barrier: being particular about the general, and generally looking beyond the particular, in homage to Mary Boole. En S. Stewart (Ed.), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 97-117). https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_6

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización* [Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, España]. http://funes.uniandes.edu.co/1926/

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40. http://dx.doi.org/10.24197/edmain.1.2013.24-40

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria. *Boletín Oficial del Estado, 293*, 43053-43102.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022). Real Decreto 157/2022, de 01 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 56*, 24386-24504.

Molina, M. y Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en el *early algebra*. En P. Flores, J. L. Lupiáñez e I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.

Morales, R., Cañadas, M., Brizuela, B. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional [Functional relationship and strategies of first graders in a functional context]. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(3), 59-78. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472

Moss, J. y London, McNab. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebrization, advances in mathematics education*. Heidelberg.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 1183-1202. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (15-38). Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Lawrence Erlbaum and Associates.

Schliemann, A. Carraher, D. y Brizuela, B. (2012). Algebra in elementary school. Enseignement *de l'algébre élémentaire, volumen especial, Recherches en Didactique des Mathématiques*, 107-122.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. Carraher y M. L. Blanton (Eds.*), Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Routledge.

Torres, M. D. Brizuela, B. M. Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-Grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics, 10*, 56. https://doi.org/10.3390/math10010056

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). SEIEM.

Ureña, J. Ramírez, R., Molina, M. y Cañadas, M. C. (2022). Generalisation strategies and representations among last-year primary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (pp. 1-21). https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2058429

Sandra Fuentes
Universidad de Granada, España
sandrafuentesm@gmail.com

María C. Cañadas
Universidad de Granada, España
mconsu@ugr.es

Recibido: marzo, 2023. Aceptado: agosto, 2023
doi: 10.30827/pna.v18i2.27701



ISSN: 1887-3987

# *f(n)=3n*: Representations Strategies and Structures by First Grade Students

Sandra Fuentes and María C. Cañadas

This work is part of a research on functional thinking in early ages carried out in Spain (www.pensamientoalgebraico.es). We present part of the results obtained in a study carried out with first grade students (6-7 years). The general objective of this research is to describe the work of these students when solving a task that involves a multiplicative structure unknown to them: $f(n)=3n$. Specifically, we focus on the representations, strategies and structures that they evidence. We gave them a contextualized task at a birthday party and they had to buy the necessary lollipops for 3, 4, 5, 8, 10, 20 and 100 guests, knowing that we would give each of them 3 lollipops. To analyze the students' productions, we designed a system of categories that emerged from the theoretical framework and from the students' own written productions. The results showed a wide range of strategies in solving the task. We highlight the formation of groups used by some students, although the most used was the drawing count. For the questions in which the values of the independent variable ($n$) were 3 and 4, the students used the structure $f(n)=3n$. On the other hand, for questions about larger values (5, 8, 10 and 20), the structure most used by students was $f(n)=n$. We describe the representations they used, highlighting the predominance of the pictorial.