Razonamientos de estudiantes en tareas de comparación, ordenación y representación de fracciones y números decimales

Juan Manuel González-Forte y Ceneida Fernández

Se ha llevado a cabo un estudio transversal desde 5º de Educación Primaria hasta 4º de Educación Secundaria (ESO), en el que se analiza los niveles de éxito y razonamientos de los estudiantes en tareas de comparación de fracciones, comparación y ordenación de números decimales, y de representación en la recta numérica de fracciones y números decimales. Nuestro estudio aporta evidencias del uso de diferentes razonamientos incorrectos inferidos en estudios cuantitativos y, además, aporta información sobre su evolución. Los resultados muestran que, aunque disminuyó el razonamiento centrado en el uso del conocimiento del número natural, aparecen otros razonamientos incorrectos en este tipo de actividades.

Términos clave: Educación primaria y secundaria; Fracciones; Números decimales; Sesgo del número natural

Students' reasoning in comparison, ordering and representation of fractions and decimal numbers tasks

A cross-sectional study from 5th to 10th grade has been performed to analyse the levels of success and students' reasoning in fraction and decimal number comparison tasks, and tasks of representing fractions and decimal numbers in the number line. Our study provides evidence of the use of different incorrect reasonings inferred in previous quantitative studies and also provides information on how these reasonings are used along grades. Results show that, although the natural number-based reasoning decreased, other incorrect reasoning appears in these types of tasks.

Keywords: Decimal numbers; Fractions; Natural number bias; Primary and secondary education

González-Forte, J. M. y Fernández, C. (2024). Razonamientos de estudiantes en tareas de comparación, ordenación y representación de fracciones y números decimales. *PNA, 18*(2), 131-160. https://doi.org/10.30827/pna.v18i2.27218

Raciocínios dos estudantes em tarefas de comparação, ordenação e representação de frações e números decimais

Realizou-se um estudo transversal desde o 5º ano do Ensino Básico ao 4º ano do Ensino Secundário, no qual se analisam os níveis de sucesso e raciocínios dos alunos em tarefas de comparação de frações, comparação de números decimais e representação de frações e decimais na reta numérica. Nosso estudo fornece evidências do uso de diferentes incorretos raciocínios inferidos em estudos quantitativos e fornece informações sobre como eles evoluem. Os resultados mostram que, embora o raciocínio focado no uso do conhecimento do número natural tenha diminuído, outros raciocínios incorretos aparecem nesse tipo de atividade.

Palavras-chave: Ensino fundamental e médio; Frações; *Natural number bias*; Números decimais

El conocimiento de los números racionales y sus propiedades es esencial para desarrollar la comprensión de otros conceptos relacionados como proporción y razón, así como conceptos más avanzados de álgebra y cálculo (Behr et al., 1983; Kieren, 1992). Sin embargo, desde las investigaciones se ha mostrado que tanto estudiantes de primaria y secundaria, como universitarios, tienen dificultades con los números racionales (Behr et al., 1984; Cramer et al., 2002; Merenluoto y Lehtinen, 2002; Siegler y Lortie-Forgues, 2015; Vamvakoussi et al., 2012).

Una de las principales razones que explica las dificultades de los estudiantes con los números racionales es que se asume, implícita o explícitamente, que las propiedades de los números naturales se pueden aplicar a los números racionales (Resnick et al., 1989; Stafylidou y Vosniadou, 2004; Van Dooren et al., 2015). Por ejemplo, hay estudiantes que piensan que “en las multiplicaciones siempre se obtiene como resultado un número mayor” ya que este razonamiento siempre es cierto para la multiplicación de números naturales. Sin embargo, en el conjunto de los racionales, este razonamiento es a veces incompatible (Fischbein et al., 1985). Por ejemplo, en la multiplicación $5 \times 0{,}9$ el resultado es menor que 5. La tendencia de aplicar el conocimiento de los números naturales al conjunto de los números racionales se conoce en la literatura como sesgo del número natural (*natural number bias*) (Ni y Zhou, 2005; Van Dooren et al., 2015).

Las investigaciones previas sobre el sesgo del número natural han considerado principalmente tres dominios en los que los números racionales difieren de los números naturales: la magnitud (comparar y ordenar), la densidad y las operaciones aritméticas (González-Forte et al., 2022; McMullen y Van Hoof, 2020; Obersteiner et al., 2020; Vamvakoussi et al., 2018; Van Hoof et al., 2018). Además, otro aspecto relevante en el conjunto de los números racionales que difiere del conjunto de los naturales es que tienen diferentes representaciones (DeWolf y Vosniadou, 2011): fracción y número decimal (p. ej., 0,75 = 3/4).

Estas investigaciones han mostrado que los estudiantes tienen una alta tasa de acierto en tareas de números racionales que son compatibles con el conocimiento del número natural (en adelante, ítems congruentes); pero presentan más dificultades en aquellas donde dicho conocimiento es incompatible (en adelante, ítems incongruentes) (Nunes y Bryant, 2008; Van Hoof et al., 2015). Por ejemplo, ante la tarea de anticipar el resultado de la multiplicación de un natural por un racional, los estudiantes anticipan correctamente que el resultado de 5×3/2 será mayor que 5 (ítem congruente). Sin embargo, resuelven incorrectamente la multiplicación 5×1/2, anticipando que el resultado será también mayor que 5 (ítem incongruente).

Nuestro estudio se enmarca en esta línea de investigación, y en particular, en el dominio de la magnitud. A continuación, se presenta una revisión de los estudios acerca del sesgo del número natural en el dominio de la magnitud, y posteriormente se subraya la extensión de nuestro estudio con relación a estas investigaciones previas.

Sesgo del número natural en el dominio de la magnitud

Estudios sobre la comparación de fracciones

En la comparación de fracciones es necesario comprender que existe una relación multiplicativa entre el numerador y el denominador (Moss, 2005; Ni y Zhou, 2005; Smith et al., 2005). Sin embargo, muchos estudiantes no son capaces de identificar una fracción como un número en sí mismo, y tienden a interpretar el símbolo *a/b* como dos números naturales independientes separados por una barra (Stafylidou y Vosniadou, 2004). Esto les lleva al uso del siguiente razonamiento erróneo: una fracción es mayor cuando su numerador, denominador o ambos son mayores (por ejemplo, 18/24 es mayor que 12/20 porque 18 es mayor que 12 y 24 es mayor que 20) (Behr et al., 1984; González-Forte et al., 2023; Pearn y Stephens, 2004).

Usando ítems de elección múltiple de comparación de fracciones congruentes e incongruentes, los resultados de investigaciones cuantitativas previas han mostrado que los estudiantes de primaria, secundaria, e incluso universitarios tenían más éxito en los ítems congruentes (ítems compatibles con el conocimiento del número natural, por ejemplo, 4/5 vs. 7/8) que en los ítems incongruentes (ítems incompatibles con el conocimiento del número natural, como por ejemplo., 3/4 vs. 5/9) (DeWolf y Vosniadou, 2011; González-Forte et al., 2020; Vamvakoussi et al., 2012; Van Hoof et al., 2015). Desde los resultados cuantitativos de estas investigaciones se ha inferido que los estudiantes están usando un razonamiento erróneo centrado en el uso del conocimiento de los números naturales: una fracción es mayor si el numerador y denominador son mayores.

No obstante, durante los últimos años, diversas investigaciones usando el mismo tipo de ítems de elección múltiple de comparación de fracciones congruentes e incongruentes, han obtenido resultados en la dirección opuesta: algunos estudiantes de primaria, secundaria y universitarios, tienen más éxito en los ítems incongruentes que en los congruentes (Barraza et al., 2017; DeWolf y Vosniadou, 2015; Gómez y Dartnell, 2019; González-Forte et al., 2020; Obersteiner et al., 2020; Resnick et al., 2019; Rinne et al., 2017). Estos resultados ponen en cuestión si el sesgo del número natural es la única explicación, y manifiestan la necesidad de considerar otras explicaciones que involucran otros razonamientos comúnmente utilizados por los estudiantes para comparar fracciones (Gómez et al., 2017) como el razonamiento inverso o el razonamiento en diferencias.

El razonamiento inverso (*reverse bias,* González-Forte et al., 2020, 2023) consiste en comparar el denominador de cada fracción, considerando que cuanto menor es el denominador, mayor es la fracción (Fazio et al., 2016; Rinne et al., 2017; Stafylidou y Vosniadou, 2004). Este razonamiento se basa en que, a menor denominador, las partes son más grandes; por lo tanto, "2/3 es mayor que 3/5 porque 3 partes (entendidas como la división de una misma unidad) son más grandes que 5 partes" (Pearn y Stephens, 2004, p. 434). Este razonamiento, observado en estudiantes de educación primaria y secundaria (González-Forte et al., 2020) y atribuido sobre todo a universitarios (Barraza et al., 2017; DeWolf y Vosniadou, 2015; Gómez y Dartnell, 2015; Obersteiner et al., 2020) sería correcto en la comparación de fracciones con el mismo numerador, pero su aplicación a cualquier pareja de fracciones es incorrecta.

El razonamiento en diferencias (*gap thinking,* Gómez et al., 2017; González-Forte et al., 2020, 2023; Pearn y Stephens, 2004) se basa en comparar la diferencia (absoluta) entre el numerador y el denominador en ambas fracciones, interpretando esta diferencia como el número de partes que faltan para completar la unidad. Por lo tanto, se considera que una fracción es mayor que otra, si la diferencia entre el numerador y el denominador es menor (por ejemplo, 2/3 es mayor que 7/9 porque de 2 a 3 hay una diferencia de uno y de 7 a 9 hay una diferencia de dos). Usando el mismo razonamiento, los estudiantes pueden considerar que ambas fracciones son iguales si la diferencia es igual (por ejemplo, 4/5 y 6/7 son equivalentes porque ambas fracciones tienen la misma diferencia) (Clarke y Roche, 2009; Fazio et al., 2016; Moss, 2005). Este razonamiento, observado en estudiantes de educación primaria y secundaria (Clarke y Roche, 2009; González-Forte et al., 2020; Mitchell y Horne, 2010; Pearn y Stephens, 2004; Smith, 1995; Stafylidou y Vosniadou, 2004) y en universitarios (Fazio et al., 2016), evidencia la tendencia de algunos estudiantes a razonar en términos aditivos en lugar de multiplicativos (Clarke y Roche, 2009; Moss, 2005).

Los razonamientos centrados en el sesgo del número natural, inverso y en diferencias han sido inferidos en su gran mayoría desde estudios cuantitativos (niveles de éxito de los estudiantes en ítems de comparación de fracciones de elección múltiple, congruentes e incongruentes). En el estudio de González-Forte et al. (2023) se llevaron a cabo entrevistas con 52 estudiantes de 1º de ESO con el fin de obtener información cualitativa sobre el razonamiento empleado cuando comparaban fracciones. Sin embargo, existe una carencia de investigaciones de este tipo, con carácter transversal (desde la Educación Primaria a la Secundaria), que ayuden a respaldar, mediante evidencias cualitativas, los resultados obtenidos en estos estudios cuantitativos (por ejemplo, el estudio transversal de González-Forte et al., 2019, acerca del dominio de las operaciones aritméticas).

Estudios sobre la comparación de números decimales

La mayoría de los errores que cometen los estudiantes de primaria y secundaria al comparar números decimales se pueden explicar debido a que ignoran el separador decimal y consideran que los números decimales representados con un mayor número de dígitos son más grandes. Es decir, tratan a los números decimales como si fueran números naturales (Hiebert y Wearne, 1986; Moss, 2005; Resnick et al., 1989). Estos errores se han observado en investigaciones previas donde algunos estudiantes tuvieron dificultades a la hora de comparar dos números decimales cuando éstos tenían un número diferente de dígitos en la parte decimal (por ejemplo, 5,628 vs. 5,7), considerando erróneamente que 5,628 es mayor que 5,7 (González-Forte et al., 2020; Vamvakoussi et al., 2012; Van Dooren et al., 2015). El razonamiento que subyace de las respuestas de los estudiantes es que cuanto mayor es el número de dígitos en la parte decimal, mayor es el número: 5,628 es mayor que 5,7 porque hay tres dígitos en 5,628 mientras que solo hay un dígito en 5,7 (Durkin y Rittle-Johnson, 2015; Sackur-Grisvard y Léonard, 1985; Steinle y Stacey, 1998) o que comparan las partes decimales como si fueran números naturales: 5,628 es mayor que 5,7 porque 628 es mayor que 7 (Sackur-Grisvard y Léonard, 1985; Steinle y Stacey, 1998).

Otro error importante está relacionado con el cero. Cuando el cero ocupa la posición de las décimas, los estudiantes a menudo lo ignoran y tratan el siguiente dígito como si estuviera en el lugar de las décimas (por ejemplo, 0,09 = 0,9), así como también consideran que añadir un 0 al final de un número decimal aumenta su tamaño (p. ej., 0,440 es mayor que 0,44) (Durkin y Rittle-Johnson, 2015; Resnick et al., 2019; Steinle y Stacey, 1998).

No obstante, las investigaciones previas han sido de carácter predominantemente cuantitativo (identificando niveles de éxito), por lo que son necesarias evidencias cualitativas que validen los razonamientos empleados por los estudiantes durante la resolución de estas actividades.

Estudios centrados en las diferentes representaciones simbólicas de los racionales

Los números racionales se pueden representar simbólicamente como fracción y como decimal. Por ejemplo, 3/4 y 0,75 son representaciones simbólicas del mismo número racional. Sin embargo, conocer y comprender las relaciones entre las diferentes representaciones simbólicas de los números racionales no es una tarea sencilla para los estudiantes (Khoury y Zazkis, 1994). Las investigaciones han mostrado que éstos a menudo tratan a las fracciones y a los números decimales como conjuntos de números no relacionados, en lugar de representaciones intercambiables de los mismos números (Carpenter et al., 1993; González-Forte et al., 2022; Khoury y Zazkis, 1994; Vamvakoussi et al., 2011).

Las dificultades con la representación se han observado incluso entre fracciones equivalentes. En Braithwaite y Siegler (2018), ante la tarea de representar en la recta numérica las fracciones 16/20 y 4/5, la mayoría de los estudiantes de primaria no consideraron que ambas fracciones son equivalentes, y respondieron que 16/20 es mayor que 4/5. La recta numérica ha sido un recurso muy utilizado por la investigación para trabajar aspectos relacionados con la densidad (Vamvakoussi y Vosniadou, 2007) y la magnitud de los números racionales (Braithwaite y Siegler, 2018; Durkin y Rittle-Johnson, 2015; Siegler et al., 2011; Torbeyns et al., 2015). Sin embargo, es menos frecuente la existencia de investigaciones que explícitamente hayan utilizado la recta numérica para investigar si los estudiantes reconocen un mismo número racional representado como fracción y decimal.

Objetivo

Este estudio tiene como objetivo analizar los niveles de éxito y razonamientos de los estudiantes de educación primaria y secundaria en tareas de comparar fracciones, comparar y ordenar números decimales y representar, en la recta numérica, fracciones y números decimales.

Extendemos las investigaciones previas ya que (i) se realiza un estudio transversal en el dominio de la magnitud desde 5º de Educación Primaria hasta 4º de ESO, lo que nos permite observar los niveles de éxito y los razonamientos a lo largo de los cursos, y (ii) se lleva a cabo un estudio cualitativo de los razonamientos de los estudiantes que permite proporcionar evidencias cualitativas a las inferencias realizadas en estudios cuantitativos.

Método

Participantes

Los participantes fueron 438 estudiantes de Educación Primaria y Secundaria: 85 estudiantes de 5º de Educación Primaria, 81 estudiantes de 6º de Educación Primaria, 78 estudiantes de 1º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), 81 estudiantes de 2º de ESO, 57 estudiantes de 3º de ESO, y 56 estudiantes de 4º de ESO que pertenecían a dos centros públicos de Educación Primaria y dos centros públicos de Educación Secundaria. Aproximadamente había el mismo número de chicos que de chicas.

Instrumento

El instrumento de recogida de datos fue un test formado por 10 ítems: cuatro ítems de comparación de fracciones, tres ítems de comparación y ordenación de números decimales y tres ítems de representación de fracciones y números decimales en la recta numérica.

De los cuatro ítems de comparación de fracciones, dos ítems eran congruentes (ítems en los que el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales es compatible): 2/3 vs. 7/8, y 2/7 vs. 5/8. Es decir, la fracción mayor tiene mayor numerador y denominador. Los otros dos ítems eran incongruentes (ítems en los que el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales es incompatible): 5/3 vs. 9/7, y 2/3 vs. 5/8. Es decir, la fracción mayor tiene menor numerador y denominador. De este modo, los estudiantes que usen el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales resolverán correctamente los ítems congruentes e incorrectamente los incongruentes. Por el contrario, los que se basen en un razonamiento inverso (a menor denominador, mayor es la fracción), resolverán correctamente los ítems incongruentes e incorrectamente los congruentes.

De los dos ítems congruentes, un ítem tenía la misma diferencia entre numerador y denominador (2/3 vs. 7/8, en ambas fracciones la diferencia entre numerador y denominador es de uno), y el otro ítem tenía distinta diferencia (2/7 vs. 5/8, la diferencia entre numerador y denominador en 2/7 es de cinco y en 5/8 es de tres). Del mismo modo, de los dos ítems incongruentes, un ítem tenía la misma diferencia entre numerador y denominador (5/3 vs. 9/7, en ambas fracciones la diferencia entre numerador y denominador es de dos), y el otro ítem tenía distinta diferencia (2/3 vs. 5/8, la diferencia entre numerador y denominador en 2/3 es de uno y en 5/8 es de tres). De este modo, los estudiantes que se basen en la diferencia entre numerador y denominador (razonamiento en diferencias), resolverán correctamente los ítems con distinta diferencia, y considerarán iguales aquellas fracciones con la misma diferencia.

A los estudiantes se les pidió que rodearan la fracción mayor, o que, si creían que las dos fracciones eran igual de grandes, rodearan las dos. Además, después de cada ítem se les pedía que justificaran por qué la fracción elegida era la mayor. Esto nos proporciona evidencias del razonamiento empleado por cada estudiante.

Los tres ítems de comparación y ordenación de números decimales eran incongruentes, ya que el uso del conocimiento sobre los números naturales es incompatible. Un ítem era de comparación de dos números decimales: 0,37 vs. 0,5. En este caso, el número mayor (0,5) tiene un número menor en la parte decimal (es decir, 0,5 es mayor que 0,37, pero observando únicamente la parte decimal, 5 es menor que 37). Otro ítem era de ordenar los siguientes números de mayor a menor: 0,82, 0,835 y 0,95. Se trata también de un ítem incongruente, ya que el número mayor no es el que tiene el número mayor en la parte decimal. El último ítem estaba relacionado con el papel del cero, y se preguntaba si alguno de los siguientes números era el mismo: 0,53, 0,053 y 0,530. También es un ítem incongruente, ya que el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales lleva a considerar erróneamente que añadir un 0 a la izquierda del número no cambia el número, y a la derecha lo hace más grande. Además, en el primer y en el tercer ítem, los estudiantes tenían que explicar su respuesta. No preguntamos por el razonamiento en el ítem de ordenar los tres números decimales, pues con la forma en la que ordenen los tres números ya se puede inferir el razonamiento empleado.

Los tres ítems de representación de fracciones y números decimales en la recta numérica eran: (i) situar la fracción 1/2 en una recta numérica desde 0 hasta 1 donde ya se encontraba situado el número 0,5, (ii) situar los números 0,75 y 3/4 en una recta numérica desde 0 hasta 1 donde ya se encontraba situado el número 0,5, y (iii) situar los números 2,5 y 5/2 en una recta numérica desde 0 hasta 5.

Los estudiantes resolvieron el cuestionario en una sesión, durante el transcurso habitual de su clase de matemáticas, y dispusieron aproximadamente de 25 minutos para responder a estos 10 ítems. Fueron los propios investigadores los que pasaron los cuestionarios, con la ayuda de los profesores de cada centro. Los participantes contaban con el consentimiento de sus padres/tutores legales. La realización del cuestionario era individual, y no estaba permitido el uso de calculadora ni dispositivos móviles.

Análisis

El análisis se realizó en dos fases. En la fase 1, las respuestas de los estudiantes a los 10 ítems se codificaron siguiendo el siguiente criterio: *Correcto* si el estudiante respondió correctamente, *Incorrecto* si el estudiante respondió incorrectamente, y *Blanco* si dejó la respuesta en blanco. La fase 1 nos permitió obtener los niveles de éxito por ítem desde 5º de Educación Primaria a 4º de ESO. En la fase 2, las justificaciones de los estudiantes en los diferentes ítems fueron analizadas de manera inductiva, generándose categorías de razonamiento. Las categorías finales se muestran en el apartado de resultados.

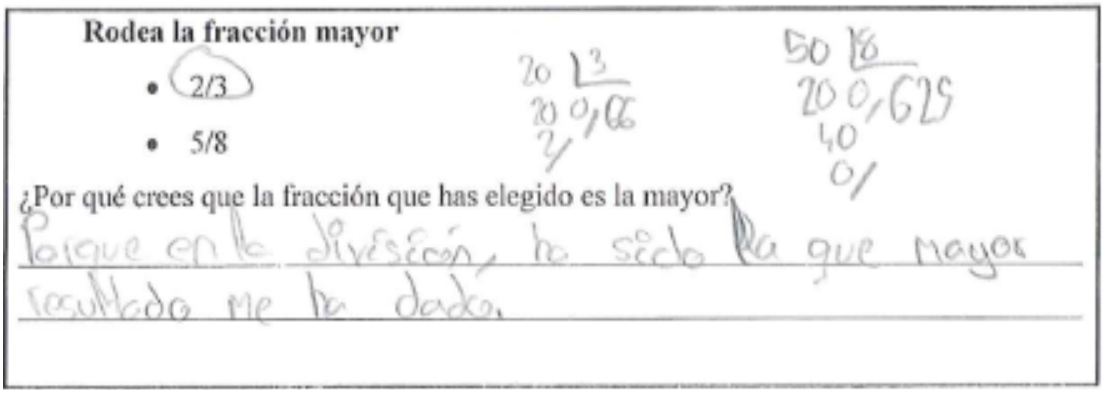
Resultados

Este apartado está dividido en cuatro secciones. En primer lugar, mostramos los razonamientos correctos e incorrectos identificados. En segundo lugar, los niveles de éxito de los estudiantes en los ítems de comparar fracciones desde 5º de Educación Primaria hasta 4º de ESO, y los razonamientos empleados. En tercer lugar, los niveles de éxito y los razonamientos empleados en los ítems de comparar y ordenar números decimales. Por último, mostramos los niveles de éxito en los ítems de representar fracciones y números decimales en la recta numérica y las categorías incorrectas identificadas.

Razonamiento correctos e incorrectos identificados

En los ítems de comparación de fracciones se identificaron cuatro categorías de razonamientos correctos y tres categorías de razonamientos incorrectos. Los cuatro razonamientos correctos identificados son:

- División: el estudiante hace la división entre el numerador y denominador y compara los cocientes.



Rodea la fracción mayor

- 2/3
- 5/8

20 | 3
20 0,6
2

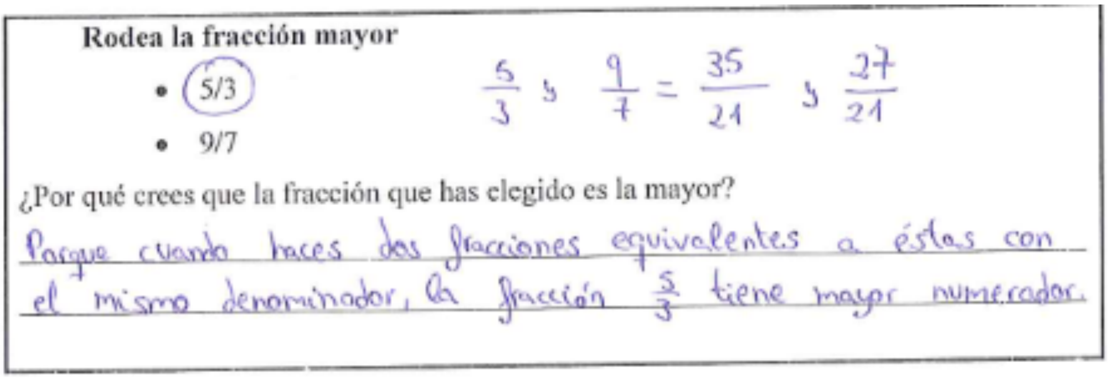
50 | 8
20 0,625
40
0

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Porque en la división, ha sido la que mayor resultado me ha dado.

Figura 1. Respuesta de un estudiante de 6º de Educación Primaria

- Fracciones equivalentes: el estudiante obtiene fracciones equivalentes con el mismo denominador para poder comparar los numeradores.



Rodea la fracción mayor

- 5/3
- 9/7

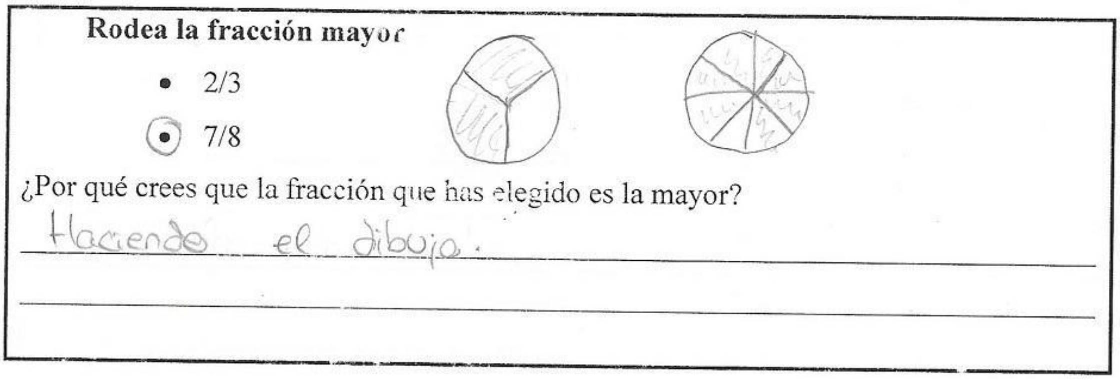
$\frac{5}{3}$ y $\frac{9}{7}$ = $\frac{35}{21}$ y $\frac{27}{21}$

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Porque cuando haces dos fracciones equivalentes a éstas con el mismo denominador, la fracción $\frac{5}{3}$ tiene mayor numerador.

Figura 2. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

- Dibujo: el estudiante representa gráficamente ambas fracciones y compara.



Rodea la fracción mayor

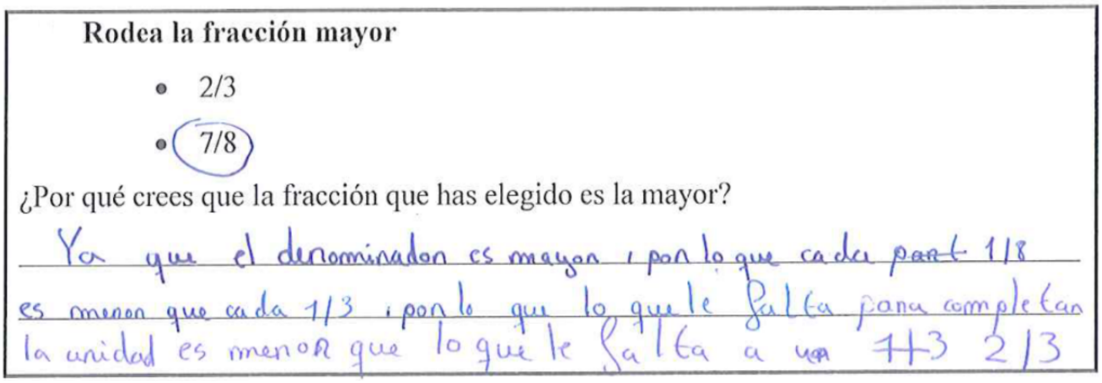
- 2/3
- 7/8

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Haciendo el dibujo.

Figura 3. Respuesta de un estudiante de 1º de ESO

- ♦ Completar la unidad: el estudiante compara la fracción que queda para completar la unidad en cada caso.



Rodea la fracción mayor

- 2/3
- 7/8

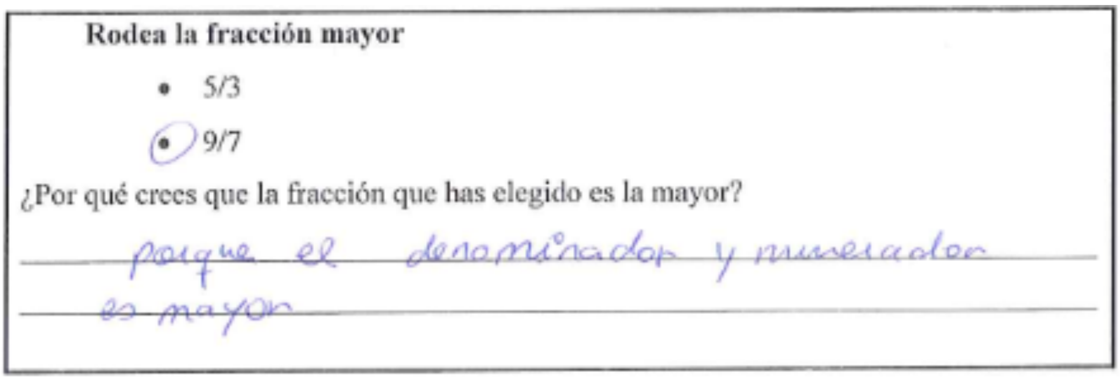
¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Ya que el denominador es mayor, por lo que cada part 1/8 es menor que cada 1/3, por lo que lo que le falta para completar la unidad es menor que lo que le falta a una ~~1/3~~ 2/3

Figura 4. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

Los tres razonamientos incorrectos usados por los estudiantes son:

- ♦ NNB: el estudiante usa el conocimiento sobre la ordenación de los números naturales. El razonamiento se centra en identificar como fracción mayor aquella con mayor numerador y denominador.



Rodea la fracción mayor

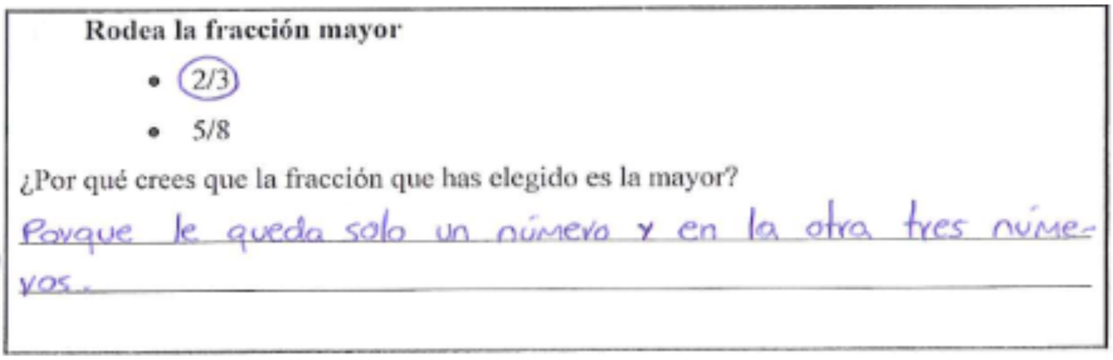
- 5/3
- 9/7

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

porque el denominador y numerador es mayor

Figura 5. Respuesta de un estudiante de 4º de ESO

- ♦ Razonamiento en diferencias: el estudiante compara la diferencia absoluta entre numerador y denominador. El razonamiento se centra en identificar como fracción mayor aquella que tiene menor diferencia entre numerador y denominador (Figura 6). Por otra parte, se identifica como fracciones iguales aquellas que tienen la misma diferencia entre numerador y denominador (Figura 7).

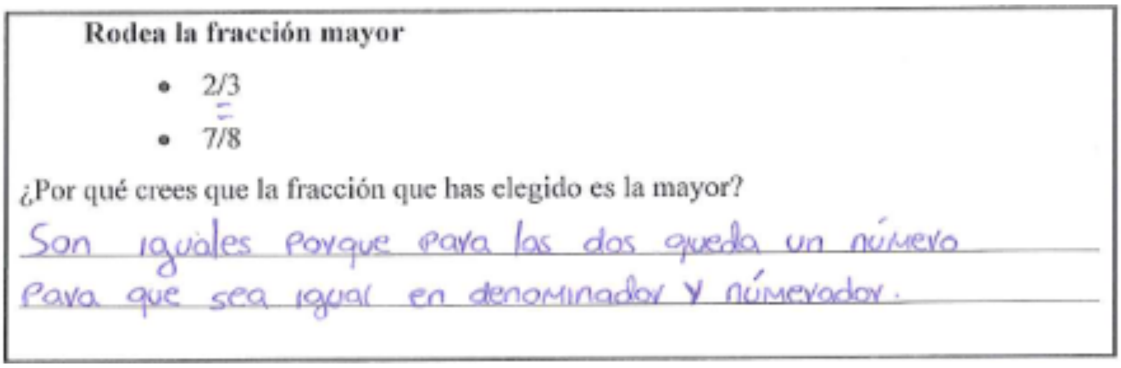

Rodea la fracción mayor

- 2/3
- 5/8

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Porque le queda solo un número y en la otra tres números.

Figura 6. Respuesta de un estudiante de 1º de ESO


Rodea la fracción mayor

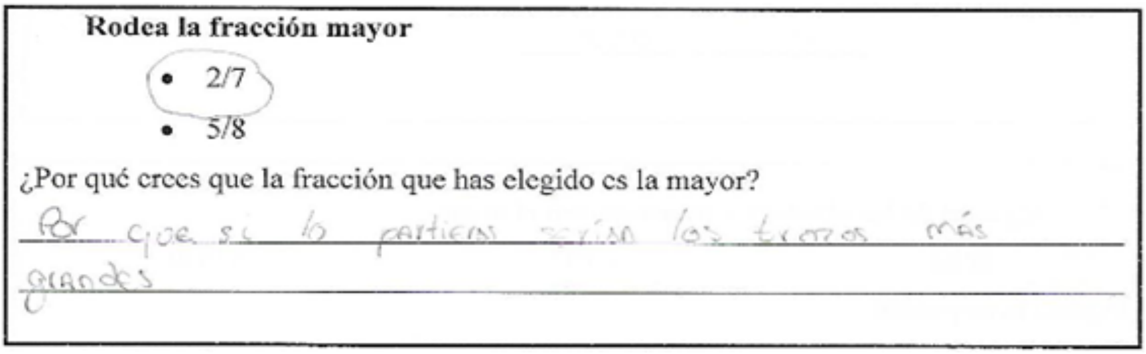
- 2/3
- 7/8

¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Son iguales porque para las dos queda un número para que sea igual en denominador y númerador.

Figura 7. Respuesta de un estudiante de 1º de ESO

- ♦ Razonamiento inverso: el razonamiento se centra en identificar como fracción mayor aquella con menor denominador, considerando que a menor número de partes en que se divide el denominador, mayor es el tamaño de las partes.


Rodea la fracción mayor

- 2/7
- 5/8

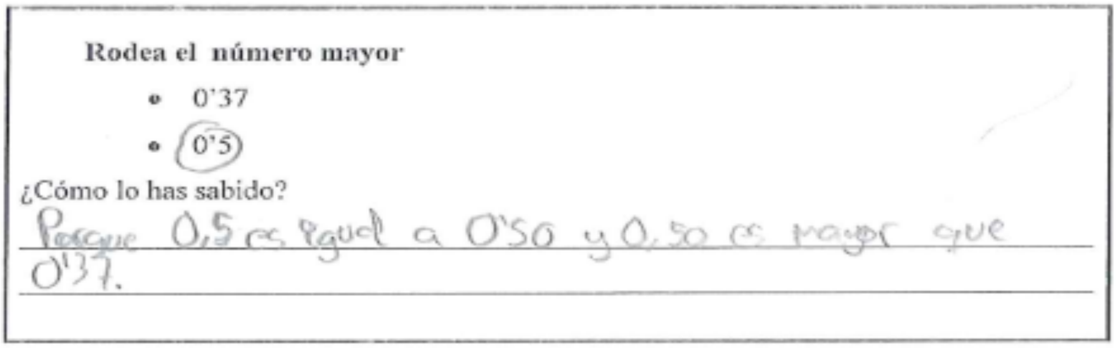
¿Por qué crees que la fracción que has elegido es la mayor?

Por que si lo partieras serían los trozos más grandes

Figura 8. Respuesta de una estudiante de 1º de ESO

En el ítem de comparación de los números 0,37 vs. 0,5, se identificaron dos razonamientos correctos:

- ♦ Comparar la parte decimal: el estudiante añade ceros en la parte decimal para que ambos números tengan la misma cantidad de dígitos.


Rodea el número mayor

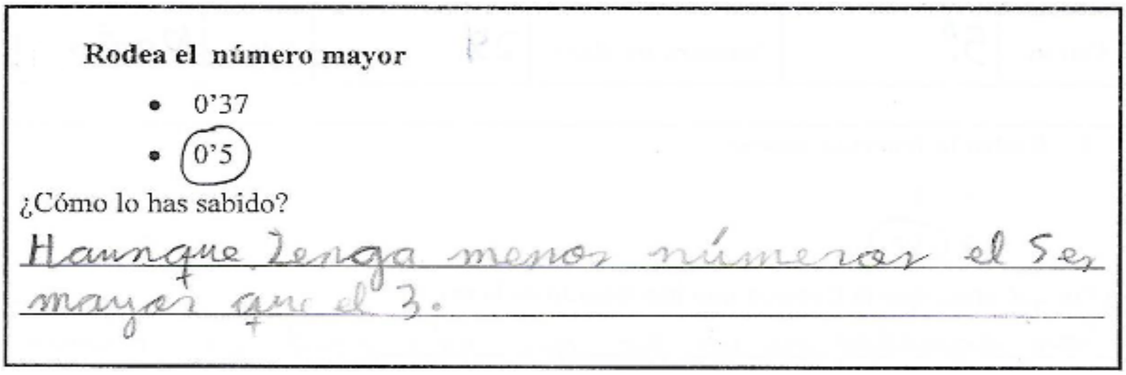
- 0'37
- 0'5

¿Cómo lo has sabido?

Porque 0,5 es igual a 0'50 y 0,50 es mayor que 0'37.

Figura 9. Respuesta de un estudiante de 6º de Educación Primaria

- ♦ Comparar la cifra de las décimas.


Rodea el número mayor

- 0'37
- 0'5

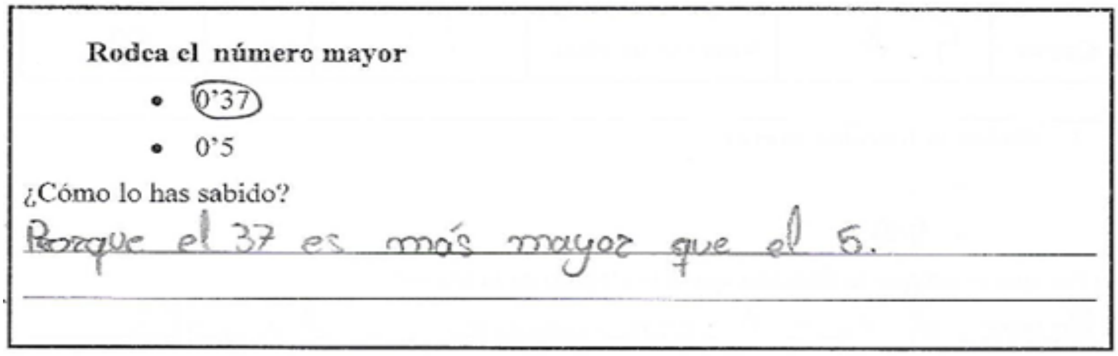
¿Cómo lo has sabido?

Haunque tenga menos números el 5 es mayor que el 3.

Figura 10. Respuesta de un estudiante de 5º de Educación Primaria

En cuanto a los razonamientos incorrectos identificados:

- ♦ NNB: el estudiante compara únicamente la parte decimal de ambos números como si se tratase de números naturales (“37 es mayor que 5”, Figura 11), o compara la cantidad de dígitos en la parte decimal de ambos números (“Tiene más decimales”, Figura 12).

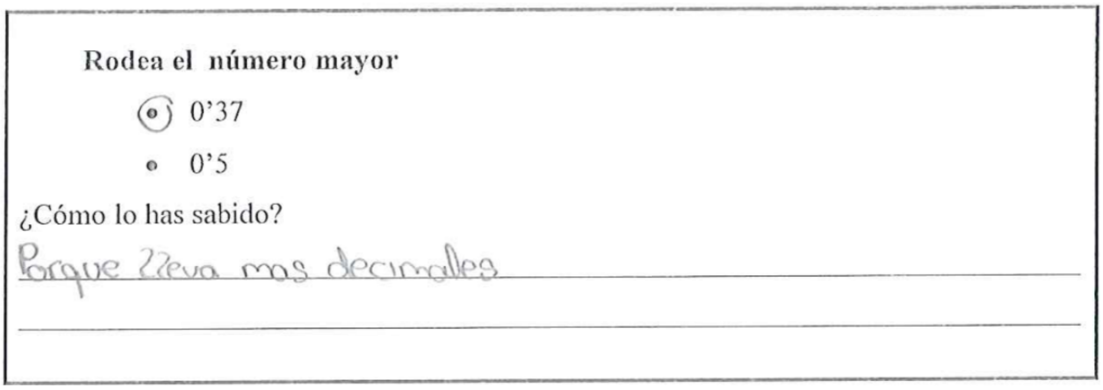

Rodea el número mayor

- 0'37
- 0'5

¿Cómo lo has sabido?

Porque el 37 es más mayor que el 5.

Figura 11. Respuesta de un estudiante de 5º de Educación Primaria



Rodea el número mayor

- 0'37
- 0'5

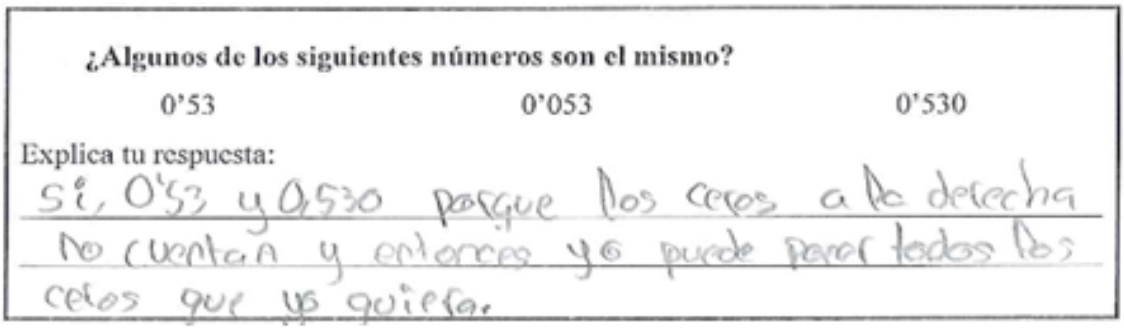
¿Cómo lo has sabido?

Porque lleva mas decimales

Figura 12. Respuesta de un estudiante de 5º de Educación Primaria

En el ítem sobre el papel del cero, se identificó un razonamiento correcto que se centra en:

- ♦ Reconocer que los ceros a la derecha de los números decimales no cambian el número.



¿Algunos de los siguientes números son el mismo?

0'53 0'053 0'530

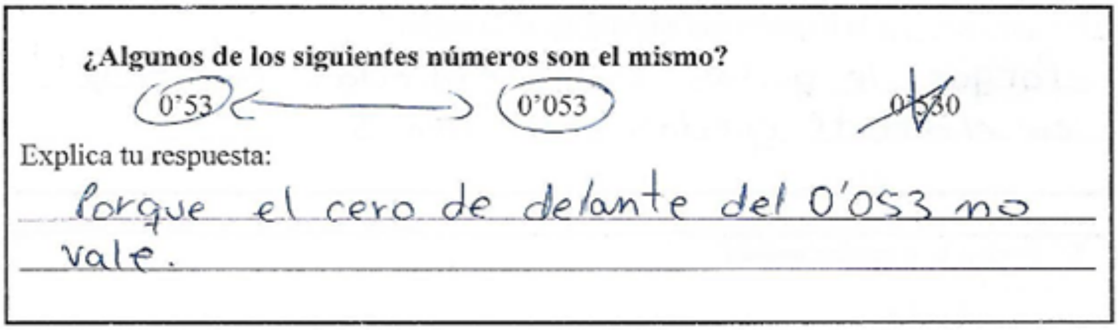
Explica tu respuesta:

Sí, 0'53 y 0'530 porque los ceros a la derecha no cuentan y entonces yo puedo poner todos los ceros que yo quiera.

Figura 13. Respuesta de un estudiante de 6º de Educación Primaria

Por otro lado, se identificó el razonamiento incorrecto centrado en el sesgo del número natural:

- ♦ NNB: el estudiante considera que los ceros a la izquierda no tienen ningún valor, mientras si se añaden a la derecha hacen a los números mayores, como en los números naturales.



¿Algunos de los siguientes números son el mismo?

0'53 ⟷ 0'053 ~~0'530~~

Explica tu respuesta:

Porque el cero de delante del 0'053 no vale.

Figura 14. Respuesta de un estudiante de 2º de ESO

En el ítem de ordenar números decimales, se identificaron dos tipos de respuestas incorrectas:

- ♦ NNB: el estudiante ordena los números comparando únicamente la parte decimal, como si se tratase de números naturales (835 > 95 > 82).

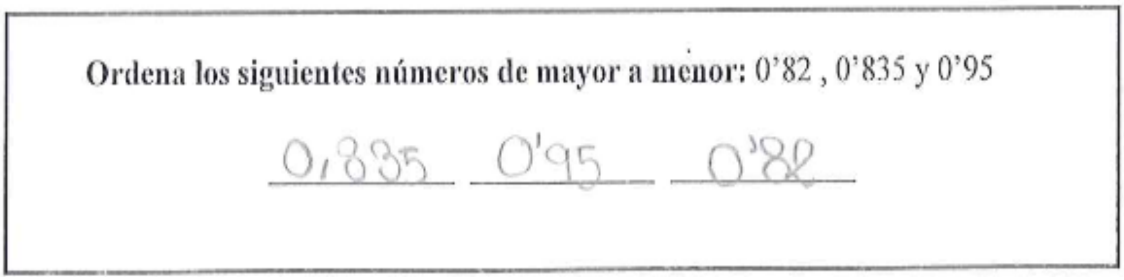


Figura 15. Respuesta de un estudiante de 6º de Educación Primaria

- ♦ Otros: el estudiante usa otra combinación errónea.

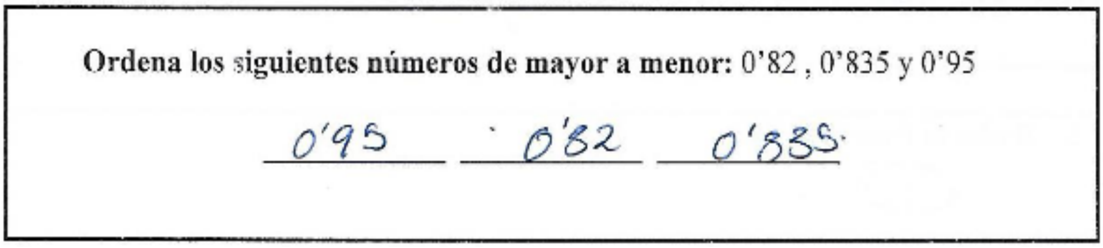


Figura 16. Respuesta de un estudiante de 3º de ESO

En los dos ítems de representar fracciones y números decimales en la recta numérica, se identificaron tres respuestas incorrectas:

- ♦ Decimal correcto: si el estudiante únicamente ubicaba de manera correcta el número decimal.

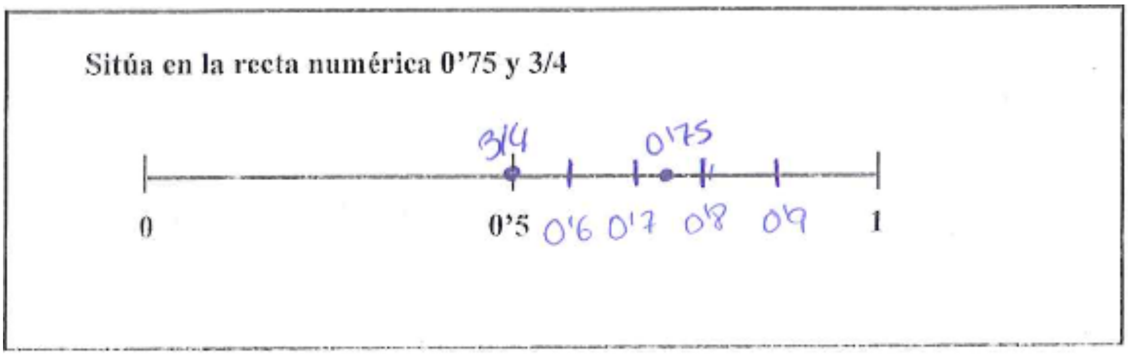


Figura 17. Respuesta de un estudiante de 5º de Educación Primaria

- ♦ Fracción correcto: Si el estudiante únicamente ubicaba de manera correcta la fracción.

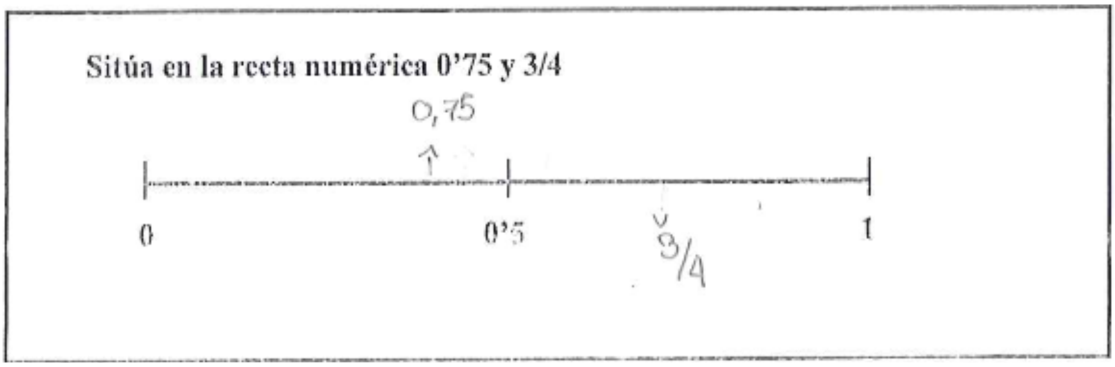


Figura 18. Respuesta de un estudiante de 1º de ESO

- Incorrecto: Si el estudiante no ubicaba ningún número correctamente.

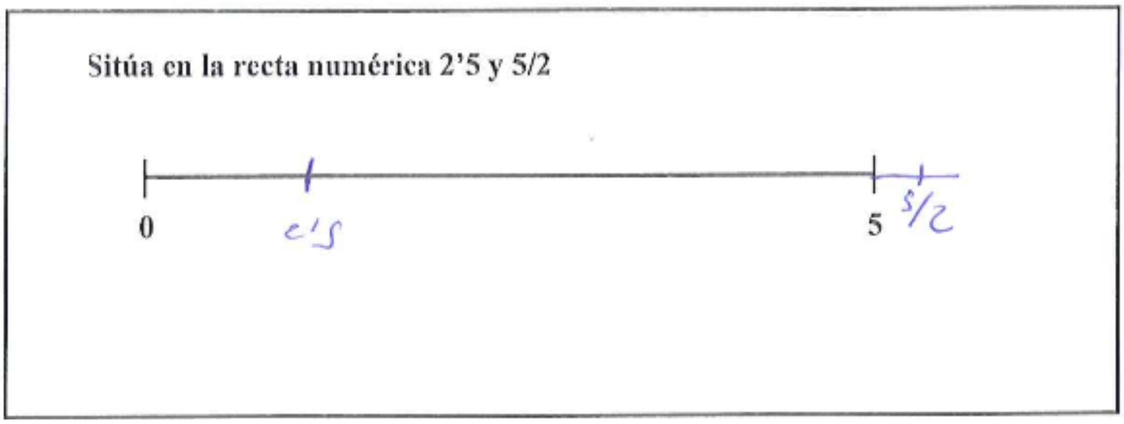


Figura 19. Respuesta de un estudiante de 4º de ESO

En todos los ítems, se identificó también la categoría *Blanco,* que eran las respuestas sin sentido o en blanco.

Niveles de éxito y razonamientos por curso en ítems de comparación de fracciones

Las tablas 1, 2, 3 y 4 muestran el porcentaje de uso de cada uno de los razonamientos correctos por ítem y curso. No se observan diferencias significativas en cuanto al uso de un razonamiento correcto u otro si comparamos los ítems congruentes e incongruentes. Cabe destacar que en 5º de primaria el razonamiento más usado fue el dibujo, pero en cursos posteriores el razonamiento más usado fue la división, junto con las fracciones equivalentes y completar la unidad a partir de 3º ESO.

Tabla 1

Porcentaje de cada razonamiento correcto en el ítem congruente 2/3 vs. 7/8 por curso

2/3 vs. 7/8	5º	6º	1º	2º	3º	4º
Dibujo	15,29	7,41	12,82	6,17	5,26	5,36
División	4,71	20,99	12,82	4,94	21,05	17,86
Fracciones equivalentes	5,88	4,94	8,97	17,28	15,79	21,43
Completar la unidad	1,18	4,94	2,56	6,17	15,79	12,50

Tabla 2

Porcentaje de cada razonamiento correcto en el ítem congruente 2/7 vs. 5/8 por curso

2/7 vs. 5/8	5º	6º	1º	2º	3º	4º
Dibujo	15,29	6,17	12,82	6,17	5,26	8,93
División	4,71	23,46	12,82	4,94	19,30	17,86
Fracciones equivalentes	5,88	4,94	8,97	17,28	17,54	17,86
Completar la unidad	0,00	1,23	2,56	6,17	15,79	12,50

Tabla 3

Porcentaje de cada razonamiento correcto en el ítem incongruente 5/3 vs. 9/7 por curso

5/3 vs. 9/7	5º	6º	1º	2º	3º	4º
Dibujo	15,29	6,17	12,82	6,17	3,51	10,71
División	4,71	23,46	12,82	4,94	22,81	16,07
Fracciones equivalentes	7,06	6,17	8,97	17,28	21,05	23,21
Completar la unidad	0,00	3,70	2,56	6,17	14,04	8,93

Tabla 4

Porcentaje de cada razonamiento correcto en el ítem incongruente 2/3 vs. 5/8 por curso

2/3 vs. 5/8	5º	6º	1º	2º	3º	4º
Dibujo	15,29	6,17	12,82	7,41	3,51	8,93
División	4,71	23,46	12,82	4,94	21,05	17,86
Fracciones equivalentes	5,88	4,94	8,97	17,28	17,54	17,86
Completar la unidad	0,00	2,47	2,56	4,94	15,79	10,71

Puesto que no se observaron diferencias significativas entre los razonamientos correctos al comparar los ítems congruentes e incongruentes, se agruparon todas las categorías de razonamientos correctos en la categoría Correcto. Las figuras 20 (ítems congruentes) y 21 (ítems incongruentes) muestran, a la izquierda, los niveles de éxito del ítem en los diferentes cursos, y a la derecha, los razonamientos usados por los estudiantes en el ítem en cada curso.

Comparando las figuras 20 a la 23 se observa que los estudiantes tuvieron, en general, más éxito en los ítems congruentes (84,92%) que en los incongruentes (57,09%). Además, esta diferencia en el nivel de éxito se mantiene en 5º curso (92,94% en congruentes, 34,12% en incongruentes), en 6º curso (94,44% en congruentes, 49,38% en incongruentes), en 1º (83,97% en congruentes, 48,72% en incongruentes), en 2º (73,46% en congruentes, 61,73% en incongruentes), y en 4º (89,29% en congruentes, 68,75% en incongruentes). Fue 3º el único curso en el que los estudiantes tuvieron más éxito en los ítems incongruentes (79,82%) que en los congruentes (75,44%). Estas diferencias se explican por el uso de razonamientos incorrectos que permiten al estudiante obtener la respuesta correcta en los ítems congruentes. Así se observa un uso del sesgo del número natural, razonamiento NNB (una fracción es mayor si el numerador y denominador son mayores) en todos los cursos. Este razonamiento permitió a los estudiantes resolver correctamente los ítems congruentes (2/3 vs. 7/8 y 2/7 vs. 5/8), pero incorrectamente los incongruentes (5/3 vs. 9/7 y 2/3 vs. 5/8). De esta manera se observa que un 88,24% de los alumnos de 5º curso resolvieron con éxito el ítem 2/3 vs. 7/8 y un 97,65% el ítem 2/7 vs. 5/8, sin embargo, un 62,35% de los estudiantes usaron un razonamiento basado en el sesgo del número natural (NNB) en el ítem 2/3 vs. 7/8 y un 54,12% en el ítem 2/7 vs. 5/8. En cambio, se observa que únicamente un 27,06% de los alumnos de 5º curso resolvieron con éxito el ítem incongruente 5/3 vs. 9/7 y 41,18% el ítem incongruente 2/3 vs. 5/8 (el uso del razonamiento NNB fue de 61,18% y de 52,94%, respectivamente). El uso del razonamiento NNB, aunque decreció a lo largo de los cursos, se mantuvo alrededor del 20% en los últimos cursos de la Educación Secundaria.

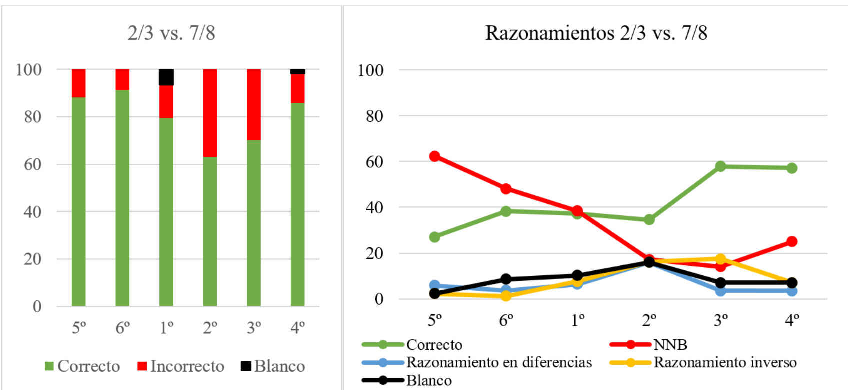


Figura 20. Nivel de éxito en ítem de comparación de fracciones (2/3 vs. 7/8) congruentes (izquierda) y razonamientos empleados (derecha)

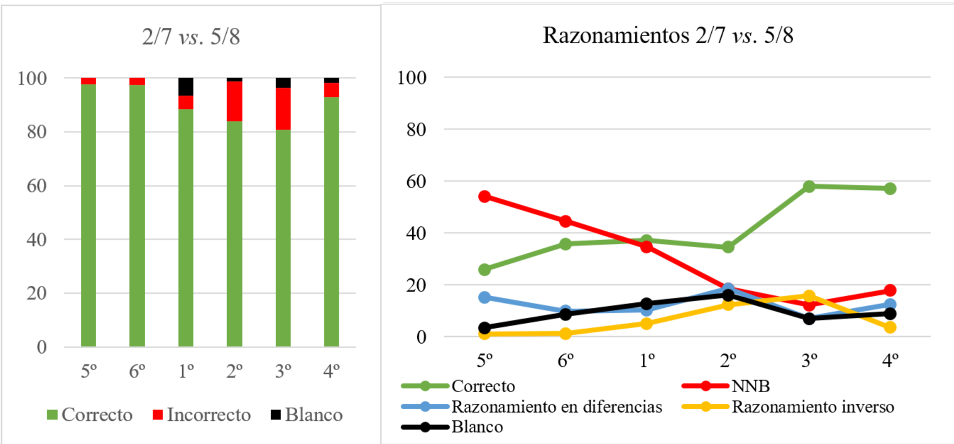


Figura 21. Nivel de éxito en ítem de comparación de fracciones (2/7 vs. 5/8) congruentes (izquierda) y razonamientos empleados (derecha)

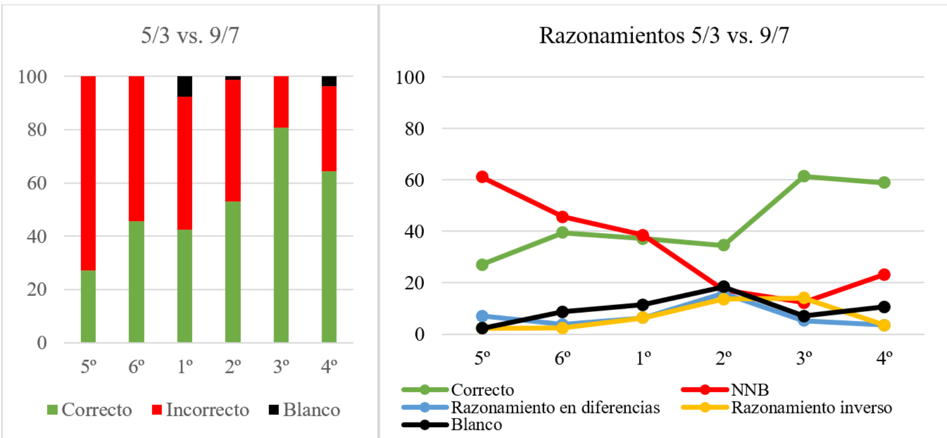


Figura 22. Nivel de éxito en ítem de comparación de fracciones (5/3 vs. 9/7) incongruentes (izquierda) y razonamientos empleados (derecha)

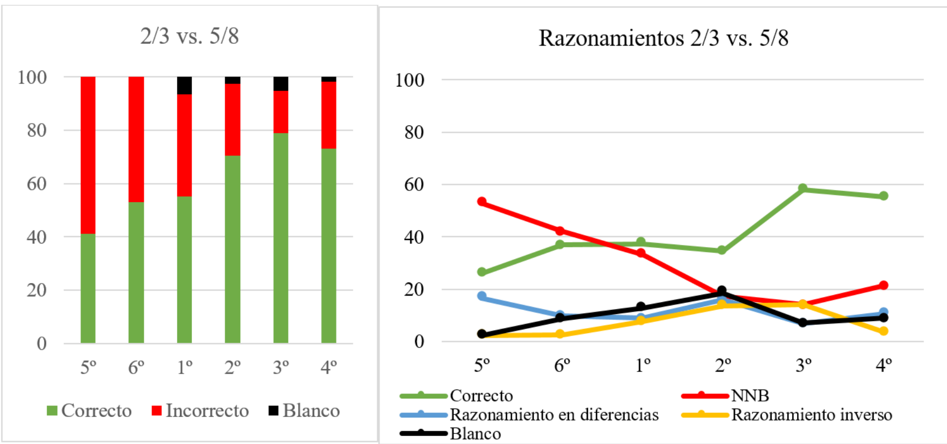


Figura 23. Nivel de éxito en ítem de comparación de fracciones (2/3 vs. 5/8) incongruentes (izquierda) y razonamientos empleados (derecha)

Por otro lado, se observa que el nivel de éxito en los ítems incongruentes fue creciendo de 5º curso de Educación Primaria a 3º de la ESO y, al mismo tiempo, el nivel de éxito en los ítems congruentes fue decreciendo (de hecho, 3º fue el curso con mayor nivel de éxito en ítems incongruentes que en congruentes). Esta tendencia se explica por el aumento en el uso de razonamientos correctos y por la disminución del uso del NNB, pero también por el uso del razonamiento inverso (una fracción es mayor si el denominador es menor) que permite al estudiante obtener una respuesta correcta en los ítems incongruentes y una respuesta incorrecta en los ítems congruentes. De 3º a 4º de la ESO aumenta el nivel de éxito en los ítems congruentes y disminuye el nivel de éxito en los ítems incongruentes. Esto se explica por un aumento de nuevo en el uso del NNB.

Por último, se observa que los estudiantes tuvieron menor nivel de éxito en los ítems en los que la diferencia entre numerador y denominador es la misma (2/3 vs. 7/8 y 5/3 vs. 9/7) que en los ítems con distinta diferencia entre numerador y denominador (2/7 vs. 5/8 y 2/3 vs. 5/8). Este comportamiento se explica por el uso del razonamiento en diferencias, que lleva a la respuesta correcta en los ítems con distinta diferencia y a la respuesta incorrecta en los ítems con la misma diferencia. Se evidencia cuando en 2º de ESO el nivel de éxito disminuyó en los ítems con la misma diferencia donde el uso de un razonamiento en diferencias llevaba a la respuesta incorrecta y aumentó el nivel de éxito en los ítems con distinta diferencia entre numerador y denominador en los que el uso de este razonamiento llevaba a la respuesta correcta.

Niveles de éxito y razonamientos por curso en ítems de comparación y ordenación de números decimales

La Figura 24 muestra, a la izquierda, los niveles de éxito en los tres ítems de comparación y ordenación de números decimales, y a la derecha, los razonamientos utilizados por los estudiantes a lo largo de los cursos. Se recuerda que en el ítem de ordenación se obtuvieron categorías de las respuestas incorrectas que permiten inferir el razonamiento empleado. Del mismo modo que en la sección anterior, nos referiremos a los distintos razonamientos correctos detallados en la sección de Análisis como razonamiento Correcto en general. Comparando el nivel de éxito en los tres ítems, se observa que tuvieron, en general, más éxito en el ítem de comparación de los números 0,37 y 0.5 (89,86%), que en el ítem de ordenación de los números decimales (76,84%) y que en el ítem del papel del cero (73,87%). El análisis de los razonamientos nos indica que los estudiantes usaban erróneamente el razonamiento NNB que lleva a la respuesta incorrecta en los tres ítems.

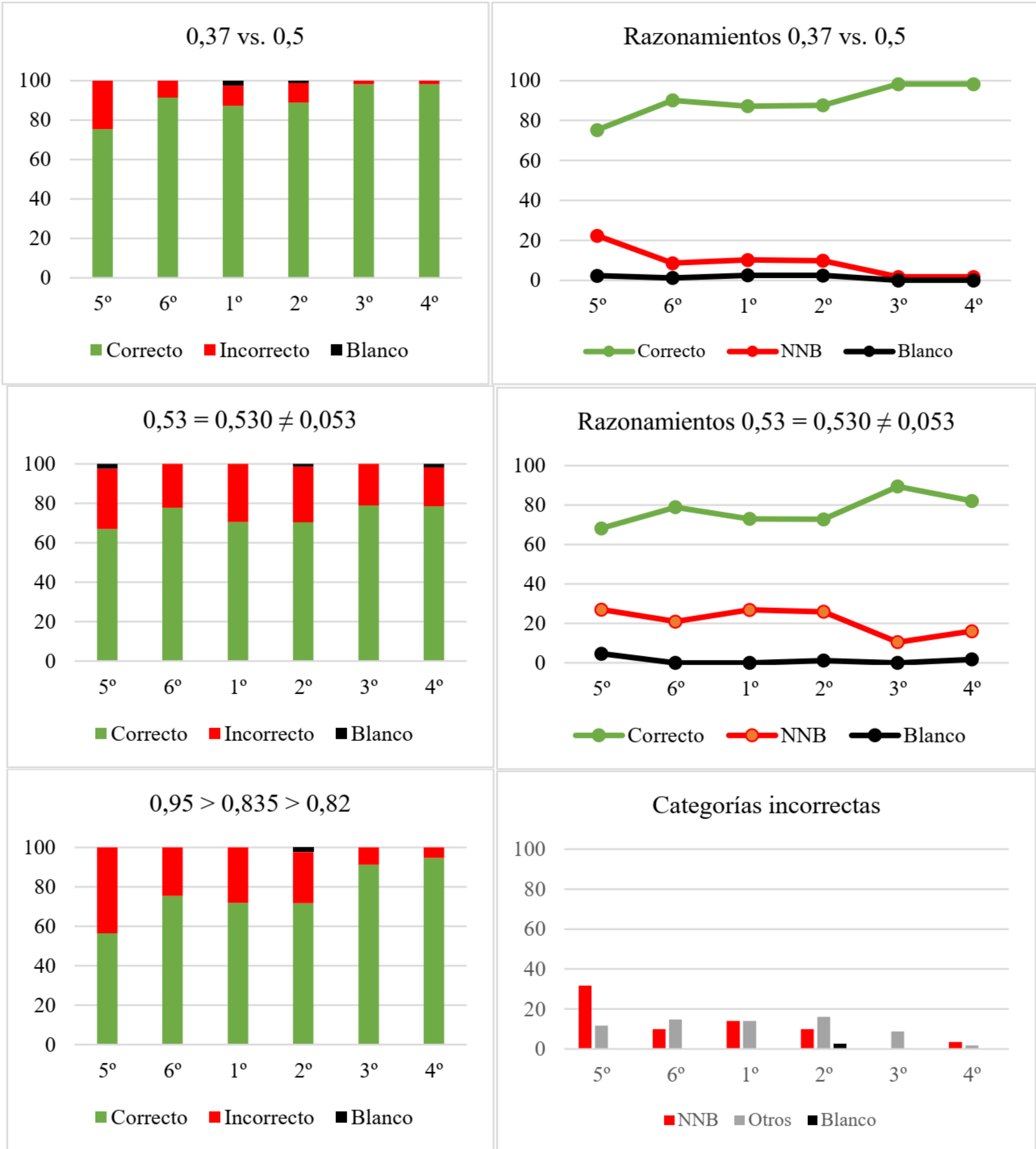


Figura 24. Nivel de éxito en los tres ítems de comparación y ordenación de números decimales (izquierda) y razonamientos empleados (derecha)

Por otra parte, también se observa que el nivel de éxito aumentó desde 5º de Educación Primaria hasta 4º de ESO en los tres tipos de ítems, y el uso del razonamiento NNB, aunque decreció a lo largo de los cursos, se observó en los últimos cursos de la Educación Secundaria (por ejemplo, el 16,07% de los estudiantes de 4º de ESO consideró 0,53 = 0,053).

Niveles de éxito y razonamientos por curso en ítems de representación de fracciones y números decimales en la recta numérica

La Figura 25 muestra, a la izquierda, los niveles de éxito en los tres ítems de representación de fracciones y números decimales en la recta numérica, y a la derecha, las categorías de las respuestas incorrectas identificadas.

Figura 25. Niveles de éxito en los tres ítems de representación de fracciones y números decimales en la recta numérica (izquierda) y categorías incorrectas identificadas (derecha)

Comparando el nivel de éxito en los tres ítems, se observa que tuvieron, en general, más éxito en el ítem de situar la fracción 1/2 (64,64%), que en el ítem de situar los números 0,75 y 3/4 (53,73%) y de situar los números 2,5 y 5/2 (45,32%). En los tres tipos de ítems, el nivel de éxito aumentó de 5º a 6º, decreció en 1º y 2º, y volvió a aumentar hasta 4º de ESO. El análisis de los razonamientos incorrectos identificados ayuda a explicar la disminución del nivel de éxito en 2º de ESO.

En el ítem de situar la fracción 1/2, la categoría incorrecta más identificada ha sido Incorrecto (23,74%), es decir, estudiantes que situaron de manera incorrecta la fracción 1/2 (y, por tanto, no identificaron que 0,5 y 1/2 son diferentes representaciones del mismo número). Esta categoría decrece a lo largo de los cursos. No obstante, el 8,93% de los estudiantes de 4º de ESO no fue capaz de contestar correctamente. El porcentaje de la categoría Blanco es menor (11,62%), sin embargo, es en 2º de ESO donde más respuestas en blanco se obtuvieron (22,22%). El aumento de esta categoría en 2º de ESO explica el decrecimiento del nivel de éxito en este curso.

En el ítem de situar los números 0,75 y 3/4, la categoría incorrecta más identificada ha sido Decimal correcto (35,34%), es decir, estudiantes que situaron de manera correcta únicamente el número 0,75 (y, por tanto, no identificaron que 0,75 y 3/4 son diferentes representaciones del mismo número). Esta categoría decrece desde 5º hasta 1º de ESO, aumenta en 2º de ESO (39,51%), y vuelve a decrecer hasta 4º de ESO. No obstante, el 19,64% de los estudiantes de 4º de ESO no fue capaz de situar correctamente los números 0,75 y 3/4 en la recta numérica. El aumento de esta categoría en 2º de ESO explica el decrecimiento del nivel de éxito en este curso. Es decir, en 2º de ESO, un mayor número de estudiantes que en 6º de primaria y 1º de ESO únicamente ubicó correctamente el número 0,75.

En el ítem de situar los números 2,5 y 5/2, de nuevo, la categoría incorrecta más identificada ha sido Decimal correcto (38,07%), es decir, estudiantes que situaron de manera correcta únicamente el número 2,5 (y, por tanto, no identificaron que 2,5 y 5/2 son diferentes representaciones del mismo número). Esta categoría se mantiene en torno al 40% desde 5º hasta 1º de ESO, aumenta en 2º de ESO (49,38%), y decrece hasta 4º de ESO. No obstante, el 28,57% de los estudiantes de 4º de ESO no fue capaz de situar correctamente los números 2,5 y 5/2 en la recta numérica. Del mismo modo que en el ítem anterior, el aumento de esta categoría en 2º de ESO explica el decrecimiento del nivel de éxito en este curso. Es decir, en 2º de ESO, un mayor número de estudiantes que en 5º y 6º de primaria y 1º de ESO únicamente ubicó correctamente el número 2,5. El porcentaje de otras respuestas incorrectas (estudiantes que no ubicaron ningún número correctamente) también fue generalmente bajo en todos los cursos, excepto en 5º de Educación Primaria, que representó el 20% de las respuestas.

Los resultados obtenidos en los ítems de situar los números 0,75 y 3/4 y los números 2,5 y 5/2 en la recta numérica, donde la mayoría de los estudiantes únicamente ubicaron correctamente los números decimales, evidencian dos aspectos relevantes. Por un lado, las dificultades que tienen los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria para identificar a las fracciones y a los números decimales como distintas representaciones de un mismo número. Por otro lado, las dificultades que tienen en determinar el tamaño/la magnitud de las fracciones, y en particular, en situar fracciones en la recta numérica. Estas dificultades han sido constatadas especialmente en los ítems de comparar fracciones.

Discusión y conclusiones

En este estudio se han analizado los niveles de éxito y razonamientos de estudiantes de Educación Primaria y Secundaria en tareas de comparar fracciones, comparar y ordenar números decimales y representar fracciones y números decimales en la recta numérica.

En relación con los ítems de comparación de fracciones, los estudiantes tuvieron más éxito en los ítems congruentes que en los incongruentes, coincidiendo con resultados de investigaciones cuantitativas previas (González-Forte et al., 2020; Vamvakoussi et al., 2012; Van Hoof et al., 2015). El análisis cualitativo muestra evidencias de que utilizaron un razonamiento basado en el sesgo del número natural (NNB) (una fracción es mayor si el numerador y denominador son mayores) (Behr et al., 1984; González-Forte et al., 2023; Pearn y Stephens, 2004). Este razonamiento se observa en todos los cursos, y aunque decrece a lo largo de estos, persiste al final de la Educación Secundaria.

Por otra parte, el nivel de éxito en los ítems incongruentes de comparación de fracciones fue creciendo desde 5º curso de Educación Primaria hasta 3º de ESO y, al mismo tiempo, el nivel de éxito en los ítems congruentes fue decreciendo. De hecho, 3º de ESO fue el único curso en el que tuvieron más éxito en los ítems incongruentes que en los congruentes (Gómez y Dartnell, 2019; González-Forte et al., 2020; Resnick et al., 2019; Rinne et al., 2017). El análisis cualitativo de los razonamientos reveló evidencias de que utilizaron un razonamiento inverso (una fracción es mayor si el denominador es menor) (Fazio et al., 2016; Rinne et al., 2017; Stafylidou y Vosniadou, 2004).

Además, nuestros resultados indican que los estudiantes tuvieron menor nivel de éxito en los ítems de comparación de fracciones en los que la diferencia entre numerador y denominador era la misma que en los ítems con distinta diferencia entre numerador y denominador (Gómez et al., 2017; González-Forte et al., 2020). El análisis cualitativo de los razonamientos muestra evidencias de que utilizaron un razonamiento en diferencias (una fracción es mayor si la diferencia entre numerador y denominador es menor, y si ambas fracciones tienen la misma diferencia, son iguales) (Clarke y Roche, 2009; Fazio et al., 2016; Moss, 2005; Pearn y Stephens, 2004).

Respecto a los ítems de comparación y ordenación de números decimales, en general tuvieron más éxito en estos ítems que en los ítems de comparación de fracciones. No obstante, el análisis cualitativo nos muestra también el uso de razonamientos incorrectos centrados en el conocimiento del número natural: considerar que los ceros a la izquierda no tienen ningún valor, o si se añaden a la derecha hacen a los números mayores, como en los números naturales (Durkin y

Rittle-Johnson, 2015; Resnick et al., 2019; Steinle y Stacey, 1998), comparar únicamente la parte decimal de ambos números como si se tratase de números naturales (Sackur-Grisvard y Léonard, 1985; Steinle y Stacey, 1998), o comparar la cantidad de dígitos en la parte decimal de ambos números (Durkin y Rittle-Johnson, 2015; Sackur-Grisvard y Léonard, 1985; Steinle y Stacey, 1998).

El uso del razonamiento incorrecto basado en el conocimiento del número natural (NNB) con números decimales decreció a lo largo de los cursos, hasta casi desaparecer en 4º de ESO en los ítems de comparación y ordenación. Sin embargo, las dificultades con el papel del cero persistieron al final de la Educación Secundaria.

Por último, en cuanto a las distintas representaciones simbólicas, el bajo nivel de éxito en los primeros cursos en los tres tipos de ítems evidencia las dificultades que tienen los estudiantes de Educación Primaria y Secundaria en reconocer distintas representaciones de un mismo racional (Khoury y Zazkis, 1994). Estas dificultades decrecen a lo largo de los cursos. No obstante, todavía son evidentes al final de la Educación Secundaria. Se subraya, por tanto, la necesidad de trabajar que las fracciones y los números decimales son distintas representaciones de un mismo número racional a lo largo de la Educación Primaria y Secundaria.

Los distintos razonamientos incorrectos obtenidos indican que la transición hacia el uso de razonamientos correctos no es una tarea fácil. En el estudio transversal se ha observado que, aunque había una disminución del razonamiento centrado en el uso del conocimiento del número natural a lo largo de los cursos, aparecen otros razonamientos como el razonamiento en diferencias o el razonamiento inverso cuando los estudiantes comparan fracciones. La información sobre los distintos razonamientos incorrectos que aparecen puede ser relevante para los maestros de Educación Primaria y profesores de Educación Secundaria cuando están enseñando las fracciones y los números decimales. Si son conscientes de los distintos razonamientos, pueden incluir ejemplos no compatibles con el uso de ese razonamiento, es decir, situaciones en las que se observe y analice que el razonamiento usado no es generalizable cuando se trabaja con fracciones y números decimales. Por ejemplo, ante la comparación de fracciones 1/3 vs. 7/9, un alumno que utiliza un razonamiento basado en el conocimiento de los números naturales puede considerar que 7/9 es mayor “porque los números son mayores”, obteniendo una respuesta correcta. Sin embargo, el uso de las fracciones 2/3 vs. 5/9, no compatible con su razonamiento, les llevaría a una respuesta incorrecta.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo con el apoyo de la Conselleria d’Educació. Investigació, Cultura i Esport (Generalitat Valenciana, España) (PROMETEO/2017/135) y con el apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación (PID2020-116514GB-I00).

REFERENCIAS

Barraza, P., Avaria, R. y Leiva, I. (2017). The role of attentional networks in the access to the numerical magnitude of fractions in adults/El rol de las redes atencionales en el acceso a la magnitud numérica de fracciones en adultos. *Estudios de Psicología*, *38*(2), 495-522. https://doi.org/10.1080/02109395.2017.1295575

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. y Silver E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, (pp. 91-125). Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post T. y Lesh R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(5), 323-341. https://doi.org/10.2307/748423

Braithwaite, D. W. y Siegler, R. S. (2018). Developmental changes in the whole number bias. *Developmental Science*, *21*(2). https://doi.org/10.1111/desc.12541

Carpenter, T. P., Fennema, E. y Romberg, T. A. (Eds.) (1993). *Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research*. Erlbaum.

Clarke, D. M. y Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 127-138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

Cramer, K., Post, T. y delMas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111-144. https://doi.org/10.2307/749646

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2011). The whole number bias in fraction magnitude comparisons with adults. En L. Carlson, C. Hoelscher y T. F. Shipley (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1751-1756). Cognitive Science Society.

DeWolf, M. y Vosniadou, S. (2015). The representation of fraction magnitudes and the whole number bias reconsidered. *Learning and Instruction*, *37*, 39-49. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.002

Durkin, K. y Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21-29. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.08.003

Fazio, L. K., DeWolf, M. y Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *42*(1), 1-16. https://doi.org/10.1037/xlm0000153

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*, 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

Gómez, D. M. y Dartnell, P. (2015). Is there a natural number bias when comparing fractions without common components? A meta-analysis. En K. Beswick, T. Muir y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 1-8). PME.

Gómez, D. M. y Dartnell, P. (2019). Middle schoolers' biases and strategies in a fraction comparison task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(6), 1233-1250. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9913-z

Gómez, D. M., Silva, E. y Dartnell, P. (2017). Mind the gap: congruency and gap effects in engineering students' fraction comparison. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh y B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 353-360). PME.

González-Forte, J. M., Fernández, C. y Llinares, S. (2019). El fenómeno *natural number bias*: un estudio sobre los razonamientos de los estudiantes en la multiplicación de números racionales. *Quadrante, 28*(2)*,* 32-52.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2020). Various ways to determine rational number size: an exploration across primary and secondary education. *European Journal of Psychology of Education, 35*(3)*,* 549-565. https://doi:10.1007/s10212-019-00440-w

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022). Profiles in understanding the density of rational numbers among primary and secondary school students. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, *22*, 47-70. https://doi.org/10.35763/aiem22.4034

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2023). Incorrect ways of thinking about the size of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*, 2005-2025. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10338-7

Hiebert, J. y Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 199-223). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Khoury, H. A. y Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(2), 191–204. https://doi.org/10.1007/BF01278921

Kieren, T. E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 323–372). Lawrence Erlbaum.

McMullen, J. y Van Hoof, J. (2020). The role of rational number density knowledge in mathematical development. *Learning and Instruction, 65.* https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101228

Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. En M. Limon y L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 233-258). Kluwer Academic Publishers.

Mitchell, A. y Horne, M. (2010). Gap thinking in fraction pair comparisons is not whole number thinking: Is this what early equivalence thinking sounds like? En L. Sparrow, B. Kissane y C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education* (Vol. 2, pp. 414–421). MERGA.

Moss, J. (2005). Pipes, tubs, and beakers: New approaches to teaching the rational-number system. En Donovan, M. S. y Bransford, J. D. (Eds.), *How students learn: History, Math, and Science in the classroom* (pp. 309-349). National Academies Press.

Ni, Y. y Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Nunes, T. y Bryant, P. (2008). Rational numbers and intensive quantities: challenges and insights to pupils' implicit knowledge. *Anales de Psicología/Annals of Psychology*, *24*(2), 262-270.

Obersteiner, A., Alibali, M. W. y Marupudi, V. (2020). Complex fraction comparisons and the natural number bias: the role of benchmarks. Learning and Instruction, 67. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101307

Pearn, C. y Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millenium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 430–437). MERGA.

Resnick, I., Rinne, L., Barbieri, C. y Jordan, N. C. (2019). Children's reasoning about decimals and its relation to fraction learning and mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology*, *111*(4), 604-618. https://doi.org/10.1037/edu0000309

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S. y Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 8-27. https://doi.org/10.2307/749095

Rinne, L. F., Ye, A. y Jordan, N. C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology*, *53*(4), 713-730. https://doi.org/10.1037/dev0000275

Sackur-Grisvard, C. y Léonard, F. (1985). Intermediate cognitive organizations in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. *Cognition and Instruction*, *2*(2), 157-174.

https://doi.org/10.1207/s1532690xci0202_3

Siegler, R. S. y Lortie-Forgues, H. (2015). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, *107*(3), 909-918. https://doi.org/10.1037/edu0000025

Siegler, R. S., Thompson, C. A. y Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273-296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Smith, C. L., Solomon, G. E. y Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive Psychology*, *51*(2), 101-140. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2005.03.001

Smith, J. P. (1995). Competent reasoning with rational numbers. *Cognition and Instruction*, *13*(1), 3-50. https://doi.org/10.1207/s1532690xci1301_1

Stafylidou, S. y Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. Learning and Instruction, 14(5), 503-518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Steinle, V. y Stacey, K. (1998). The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10. En C. Kanes, M. Goos y E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times* (pp. 548–555). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. y Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, *37*, 5-13. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L. y Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, *21*(5), 676-685. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.03.005

Vamvakoussi, X., Christou, K. P. y Vosniadou, S. (2018). Bridging psychological and educational research on rational number knowledge. *Journal of Numerical Cognition*, *4*(1), 84-106. https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.82

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. The Journal of Mathematical Behavior, 31(3), 344-355. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in a rational numbers interval? Constraints, synthetic models and the effect of the number line. En S. Vosniadou, A. Baltas y X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction* (pp. 265-282). Elsevier.

Van Dooren, W., Lehtinen, E. y Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. Learning and Instruction, 37, 1-4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, *61*, 99-108. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2017.11.010

Van Hoof, J., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: Characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 39-56. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9613-3

Juan Manuel González-Forte
Universidad de Alicante
juanma.gonzalez@ua.es

Ceneida Fernández
Universidad de Alicante
ceneida.fernandez@ua.es

Recibido: enero, 2023. Aceptado: julio, 2023
doi: 10.30827/pna.v18i2.27218

ISSN: 1887-3987

STUDENTS' REASONING IN COMPARISON, ORDERING AND REPRESENTATION OF FRACTIONS AND DECIMAL NUMBERS TASKS

Juan Manuel González-Forte y Ceneida Fernández

Previous research has shown that both primary and secondary school students, and even undergraduates, have difficulties with rational numbers. One of the main reasons for these difficulties is the tendency to apply natural numbers knowledge to the set of rational numbers (a phenomenon known as natural number bias). The present study is part of this line of research, and focuses on analysing primary and secondary school students' level of success and reasoning when comparing fractions, comparing and ordering decimal numbers, and representing both fractions and decimal numbers on the number line.

We extend previous research by performing a cross-sectional study from 5th to 10th grade, which allows us to observe the students' levels of success and reasoning along the grades. Furthermore, we carry out a qualitative study of the students' reasoning that allows us to provide qualitative evidence of students' reasoning inferred from previous quantitative studies.

Participants were 438 primary and secondary school students (from 5th to 10th grade). The instrument was a paper-and-pencil test with 10 items: four items of comparing fractions, three items of comparing and ordering decimal numbers, and three items of representing fractions and decimal numbers on the number line. Data analysis was carried out in two phases. In phase 1, the level of success per item was obtained. In phase 2, the students' justifications for the different items were inductively analysed, generating students' reasoning categories.

Results provide evidence of the use of different incorrect reasoning inferred in quantitative studies: natural number bias (reasoning based on natural number ordering, considering that "a fraction is larger if numerator and denominator are larger"), gap thinking (reasoning based on comparing the (absolute) difference between numerator and denominator in both fractions, considering that "a fraction is larger if the difference between the numerator and the denominator is smaller") and reverse bias (reasoning based on comparing the denominator of each fraction and considering that "the smallest the denominator, the largest the fraction"). Furthermore, it is observed that, although the natural number bias decreased along grades, it does not disappear at the end of secondary school, and other incorrect reasoning appeared (gap thinking and reverse bias reasoning) in these tasks. Furthermore, differences between fractions and decimal numbers have been evidenced since students have greater difficulties with fractions. Finally, students' difficulties in the task of representing fractions and decimal numbers in the number line highlight that students do not identify fractions and decimal numbers as different representations of the same rational number.