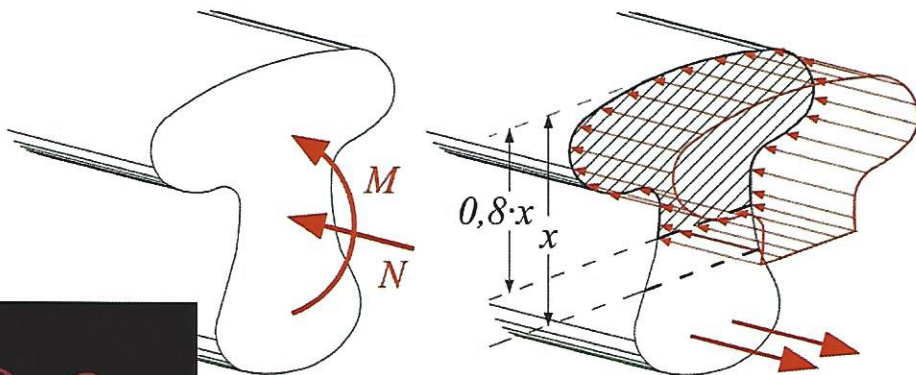


NOCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

PRÁCTICAS DE CURSO

Francisco Javier Suárez Medina

Carlos Chamorro Alfonso



NOCIONES DE HORMIGÓN ARMADO

PRÁCTICAS DE CURSO

Francisco Javier Suárez Medina

Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Profesor Titular de la Universidad de Granada

Carlos Chamorro Alfonso

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Profesor S. I. de la Universidad de Granada

2011

**NOCIONES DE HORMIGÓN ARMADO
PRÁCTICAS DE CURSO**

Francisco Javier Suárez Medina
Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Profesor Titular de la Universidad de Granada

Carlos Chamorro Alfonso
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos
Profesor S. I. de la Universidad de Granada

ISBN:
Nº Registro:
Depósito Legal:
Editor:
Diseño de portada:

ÍNDICE

TEMA 0 – Introducción al cálculo de estructuras de hormigón armado.....	5
0.1 Naturaleza del hormigón armado como sólido no homogéneo.....	5
0.2 Normativa de cálculo vigente, EHE 08.....	6
0.3 Método de los estados límites.....	6
0.4 Concepto de ambiente de exposición.....	6
0.5 El hormigón como material.....	7
0.6 Denominación de un hormigón.....	8
0.7 Diagrama tensión-deformación del hormigón.....	9
0.8 Curado, retracción y fluencia.....	11
0.9 Acciones y combinaciones de carga.....	12
0.10 El acero como material.....	12
TEMA 1 – Dominios de deformación en hormigón armado.....	17
1.1 Presentación del problema de cálculo de una sección.....	17
1.2 Hipótesis generales.....	19
1.3 Dominios de deformación.....	20
1.4 Resumen de los dominios de deformación.....	31
TEMA 2 – Dimensionamiento de secciones en flexión simple.....	33
2.1 Planteamiento del problema de dimensionamiento de una sección de hormigón armado.....	33
2.2 Relaciones entre la sección deformada según dominios y los esfuerzos.....	34
2.3 Ecuaciones del problema de dimensionamiento en flexión simple para secciones rectangulares.....	38
2.4 Ecuaciones del problema de dimensionamiento en flexión simple para secciones no rectangulares. Secciones en T.....	47
2.5 Ecuaciones del problema de comprobación en flexión simple para secciones rectangulares.....	54
TEMA 3 – Dimensionamiento de secciones en flexión compuesta.....	58
3.1 Planteamiento del problema de dimensionamiento en flexión compuesta.....	58
3.2 Dimensionamiento en flexión compuesta; caso de grandes excentricidades.....	62
3.3 Dimensionamiento en flexión compuesta; caso de pequeñas excentricidades.....	64
3.4 Dimensionamiento en flexión esviada, pilares.....	67
TEMA 4 – Disposiciones geométricas, cuantías mínimas, solapamiento y anclaje.....	71

4.1 Introducción.....	71
4.2 Disposiciones relativas a armaduras, cuantías mínimas.....	71
4.3 Disposiciones de colocación de armaduras.....	77
4.4 Disposiciones referentes a anclaje y empalme de armaduras.....	79
TEMA 5 – Dimensionamiento a esfuerzo cortante.....	84
5.1 Introducción.....	84
5.2 Planteamiento del problema.....	87
5.3 Formulación del cálculo de secciones a cortante.....	90
5.4 Disposiciones relativas a armaduras de cortante.....	99
PRÁCTICA 1.....	101
PRÁCTICA 2.....	111
PRÁCTICA 3.....	117
PRÁCTICA 4.....	121
PRÁCTICA 5.....	124
PRÁCTICA 6.....	127
PRÁCTICA 7.....	130
BIBLIOGRAFÍA.....	136

TEMA 0 – INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE LAS ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

0.1 Naturaleza del hormigón armado como sólido no homogéneo:

El material con el que se trabaja en toda esta asignatura es un sólido no homogéneo, que se constituye de dos materiales diferentes, siendo por tanto un sólido compuesto.

De un lado encontramos el hormigón, que está igualmente compuesto por áridos de distintos tamaños y una matriz que los envuelve, pero cuyo comportamiento es suficientemente homogéneo. Por otra parte encontramos el acero, distribuido en forma de barras y alambres, que se encuentra en unas posiciones concretas dentro de la masa de hormigón.

Ambos materiales, como ya veremos más adelante presentan muy diferentes características a nivel de resistencia y deformación (su comportamiento por separado quedará reflejado en una serie de curvas de tensión - deformación), pero al encontrarse solidarizados entre si, formando un mismo cuerpo, se formularán una serie de expresiones para compatibilizar ambos (al solidarizados, la deformación será la misma, pero no así la tensión).

Las hipótesis del cálculo serán tres:

- Hipótesis de Navier-Bernouilli: Secciones planas permanecen planas y perpendiculares a la directriz tras la deformación.
- Compatibilidad de deformaciones del acero y hormigón: $\varepsilon_s = \varepsilon_c$
- Ecuaciones de equilibrio en la sección.

El objetivo del cálculo del hormigón armado es optimizar las dimensiones y situación de las barras de acero, teniendo en cuenta igualmente el factor económico: el precio del acero es muy superior al del hormigón.

Podemos adelantar que el hormigón, es un material que aguanta muy bien las compresiones, pero sin embargo presenta una resistencia a tracción muy deficiente. De este modo, aguantaría a priori bien las solicitaciones en elementos a compresión pura, como pueda ser un pilar, mientras que en elementos a tracción como un tirante no trabajaría adecuadamente y posiblemente rompería. Del mismo modo, en elementos a flexión, como pudiera ser una viga o forjado, encontramos una fibra neutra, teniendo a un lado compresiones y a otro tracciones: en este caso podría soportar bien en un lado de la fibra neutra pero no sería competente al otro.

0.2 Normativa de cálculo vigente, EHE 08 (Deroga a la EHE-98 y EFHE-02):

A partir del 1 de diciembre del 2008 es de obligatorio cumplimiento la norma EHE-08, que viene a sustituir a la anterior EHE-98. El uso de dicha normativa es necesario tanto en esta asignatura como en el ejercicio normal de la profesión, y en este documento haremos mención continuamente a artículos de la norma. Igualmente invitamos a trabajar directamente con ella en lugar de con resúmenes o formularios: siempre es mejor utilizar el documento raíz que uno que se desprende de él con los consiguientes errores.

0.3 Método de los estados límites:

El sistema de cálculo que recoge la norma es el llamado “Método de los Estados Límites”. En el artículo 8 de la EHE-08, se nos define estado límite como “situaciones para las que, de ser superadas, puede considerarse que la estructura no cumple alguna de las funciones para las que ha sido proyectada”. En otras palabras, estos estados límites nos marcan las barreras que no hemos de superar para el correcto funcionamiento de la estructura, y se pueden clasificar en tres tipos:

- Estados Límite Últimos: Son aquellos que contemplan la pérdida de equilibrio, rotura o colapso de la estructura en su totalidad o en una parte de ella (aquí se contempla la rotura a flexión, compresión/tracción, cortante, rasante, torsión, pandeo,...).
- Estados Límite de Servicio: Son aquellos que contemplan los requerimientos en funcionalidad, comodidad o aspecto (aquí se contempla la fisuración y deformación, que en caso de ser excesiva inhabilita la estructura para un uso normal).
- Estados Límites de Durabilidad: Son aquellos que contemplan las acciones físicas y químicas, diferentes a las cargas, que pueden degradar las características del hormigón o las armaduras (aquí se contempla ataque por sales, ciclos de heladas, agentes químicos varios,...).

0.4 Concepto de ambiente de exposición:

El llamado ambiente de exposición define la agresividad del medio físico y químico al que va a estar sometida la estructura (se tratan de factores diferentes a las cargas: ácidos, deshielo,...) y puede causar su degradación (ver artículo 8.2 de la norma). En función de este ambiente, a la hora del cálculo estructural, se definirán una serie de parámetros destinados a garantizar la durabilidad estructural.

El ambiente se define mediante dos parámetros:

- Una clase general de exposición frente a la corrosión de armaduras, se recoge en la tabla 8.2.2 de la norma.
- Una clase específica de exposición que contempla otros procesos de degradación, se recoge en la tabla 8.2.3.a de la norma.

0.5 El hormigón como material:

El hormigón es un material de comportamiento y aspecto similar a una roca natural, que se crea mediante una mezcla de cemento, agua, áridos y aditivos. Los hormigones pueden tener un amplio abanico de resistencias una vez endurecido, pero todos presentan un comportamiento similar al de una roca: muy resistente a la compresión, pero frágil ante la tracción o flexotracción.

Debemos aclarar que la palabra resistencia se usa en varios contextos diferentes para el hormigón, y por tanto hay que aclarar siempre a que resistencia nos estamos refiriendo (para mayor detalle se pueden leer los artículos 86.3 y 86.5 de la norma):

En primer lugar, a nivel de proyecto, encontramos dos valores:

- Resistencia característica de proyecto (o resistencia de proyecto): es la que se adopta en proyecto como base para los cálculos, partiendo de un nivel de confianza del 95% (un 5% de las amasadas podrían dar un valor inferior, véase definición de resistencia característica en el artículo 15.1 de la norma). Se denomina f_{ck} .
- Resistencia de cálculo o resistencia minorada de cálculo (también se llama a veces de diseño): es la resultante de aplicar a la anterior un coeficiente de seguridad de minoración de resistencia. Se denomina f_{cd} y se determina según la expresión siguiente:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

Siendo α_{cc} un factor que tiene en cuenta el cansancio del hormigón por cargas de larga duración y que normalmente tomaremos igual a 1 (para más información ver el punto 39.4 de la norma).

El coeficiente γ_c es el coeficiente de minoración parcial que toma los valores de la tabla 15.3 de la norma (para acciones persistentes o transitorias $\gamma_c=1,5$ y para acciones accidentales $\gamma_c=1,3$).

En la construcción de la estructura encontraremos los siguientes valores:

- Resistencia a compresión de una amasada: cada una de las amasadas es caracterizada por la rotura de al menos dos probetas cilíndricas de 15 cm de diámetro y 30 de altura, que han sido curadas durante 28 días a una temperatura de 20°C y una humedad del 90%. El valor de resistencia para la amasada será la media de ambas probetas (artículo 86.3).
- Resistencia característica real o estimada (dependiendo de si se utiliza un control al 100% de las amasadas o un control estadístico será una u otra): es la resistencia del hormigón que se vierte en la estructura y que deberá ser siempre mayor a la resistencia característica del proyecto. Se determina por los medios que se presentan en los artículos 86.5.4 y 86.5.5 respectivamente.

En esta asignatura, a nivel de cálculo, usaremos directamente f_{ck} y f_{cd} , pero es muy conveniente saber cual es el proceso completo y el razonamiento del mismo.

El valor mínimo de la resistencia característica del hormigón según el artículo 31.4 será de 20 N/mm² para homigones en masa y de 25 N/mm² para hormigones armados o pretensados.

0.6 Denominación de un hormigón:

A la hora de definir un hormigón se crea una notación especial, que sirve por ejemplo a la hora de aclarar exactamente en proyecto el material que precisamos (no sólo es importante la resistencia). Este sistema de recoge en el artículo 39.2 de la norma, y pasamos a resumir brevemente:

En general un hormigón tiene una denominación del tipo T – R / C / TM / A , donde cada letra corresponde a lo siguiente:

T: Tipo, pudiendo ser HA (hormigón armado), HM (hormigón en masa) o HP (hormigón pretensado).

R: Resistencia característica en N/mm². Utilizar la serie normalizada: 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80, 90, 100.

C: Consistencia, pudiendo ser S (Seca), P (Plástica), B (Blanda), F (Fluida) o L (Líquida), según se define en el capítulo 31.5 de la norma.

TM: Tamaño máximo del árido en mm.

A: Ambiente de exposición, ya explicado

Como ejemplo, si leemos HA-30/B/25/IIa debemos saber que se trata de un hormigón para una pieza armada, con resistencia característica de 30 N/mm², consistencia blanda,

tamaño máximo del árido de 25 cm y que se empleará en una estructura situada en un ambiente IIa.

0.7 Diagrama tensión-deformación del hormigón:

El diagrama tensión-deformación característico del hormigón depende de muchas variables, entre ellas de la edad del hormigón, la duración de la carga, forma de la sección, tipo de árido,... Por tanto existe una necesidad de usar unos diagramas tensión-deformación simplificados a efectos de cálculo que son los que vamos a ver a continuación (artículo 39.5):

a) Diagrama Parábola – Rectángulo (artículo 39.5 de la EHE):

Se forma con una parábola de orden n que va del punto $(0,0)$ al vértice de la parábola que está en el punto (ϵ_{c0}, f_{cd}) y a partir del cual sigue una recta hasta el punto (ϵ_{cu}, f_{cd}) . Como se puede apreciar en el gráfico, la tensión de compresión máxima que soporta el hormigón es de f_{cd} (lógico si repasamos el apartado de las resistencias).

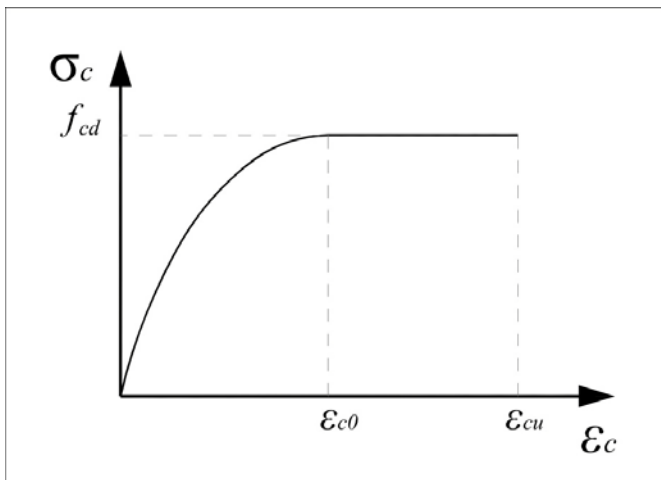


fig. 0.1

La coordenada ϵ_{c0} representa la deformación de rotura del hormigón a compresión simple, y vale:

$$\begin{aligned} \epsilon_{c0} &= 0,002 & \text{si } f_{ck} &\leq 50 \text{ N/mm}^2 \\ \epsilon_{c0} &= 0,002 + 0,000085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,50} & \text{si } f_{ck} &> 50 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

La coordenada ϵ_{cu} representa la deformación de rotura del hormigón a flexión, y vale:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cu} &= 0,0035 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2 \\ \varepsilon_{cu} &= 0,0026 + 0,0144 \cdot \left[\frac{(100 - f_{ck})}{100} \right]^4 & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

El grado de la parábola, n, será:

$$\begin{aligned} n &= 2 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2 \\ n &= 1,4 + 9,6 \cdot \left[\frac{(100 - f_{ck})}{100} \right]^4 & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Cabe aclarar que normalmente los hormigones empleados en edificación suelen estar por debajo de los 50 N/mm², pero independientemente de esto hay que conocer ambos casos y saber actuar en caso de que nos encontremos con un valor superior. Finalmente, la ecuación del diagrama será la siguiente:

$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^n \right] \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c0}$$

$$\sigma_c = f_{cd} \quad \text{si } \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$$

b) Diagrama Rectangular (artículo 39.5 de la EHE):

Se forma con un rectángulo de dimensiones $\lambda(x) \cdot h$ y $\eta(x) \cdot f_{cd}$, siendo h el canto de la sección estudiada. Los parámetros $\lambda(x)$ y $\eta(x)$ dependen de x, que en hormigón define la profundidad de la fibra neutra (distancia desde la fibra más comprimida a la fibra neutra de la sección) y de la resistencia característica mediante las expresiones que reproducimos a continuación (atención, existe por un lado el parámetro λ y por otro la función $\lambda(x)$, siendo cosas diferentes, y lo mismo pasa con la η):

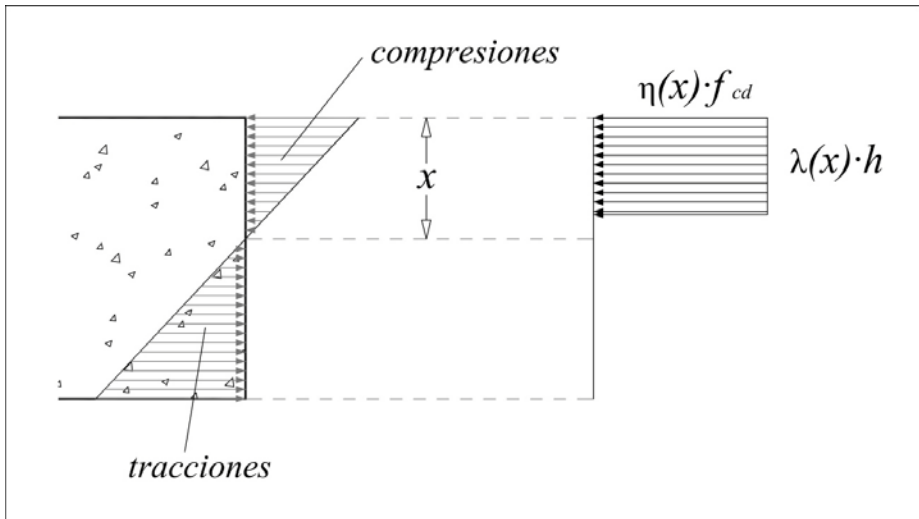


fig. 0.2

Los parámetros serán

$$\begin{aligned} \eta &= 1,0 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2 \\ \eta &= 1,0 - \frac{(f_{ck} - 50)}{200} & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2 \\ \lambda &= 0,8 & \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2 \\ \lambda &= 0,8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400} & \text{si } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Y las funciones:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \eta & \text{si } 0 < x \leq h \\ \eta(x) &= 1 - (1 - \eta) \cdot \frac{h}{x} & \text{si } h \leq x < \infty \\ \lambda(x) &= \lambda \frac{x}{h} & \text{si } 0 < x \leq h \\ \lambda(x) &= 1 - (1 - \lambda) \cdot \frac{h}{x} & \text{si } h \leq x < \infty \end{aligned}$$

0.8 Curado, retracción y fluencia:

Se define curado del hormigón como aquellos cuidados que se le aplican para controlar la pérdida de humedad que sufre durante su fraguado, que puede llevarle a valores de

agua inferiores a los recomendados, lo cual conllevaría problemas de retracción (lo veremos a continuación) y con ellos la aparición de fisuras.

El curado se puede realizar por varios sistemas: aporte de agua mediante el riego directo de la estructura, añadido de aditivos que mejoren el hormigón frente a la pérdida de agua y frente a la retracción o impermeabilización de las superficies libres mediante el proyectado de líquidos impermeabilizantes que eviten la desecación.

La retracción es una pérdida de volumen del hormigón que se produce al fraguar en contacto con el aire, y se debe a la diferencia de humedad entre dicho hormigón y el aire (más seco), que hace que esta se evapore.

El efecto más característico de la retracción es la aparición de fisuras en elementos que tengan impedido su movimiento, como puedan ser vigas de estructuras de pórticos, muros, o elementos de tipo superficial, en especial losas y forjados.

La manera de mitigar estos efectos es la combinación de juntas de retracción (en el caso de estructuras de gran tamaño donde sea posible instalar una junta que desacople completamente dos partes, permitiendo cierto movimiento entre ellas) y armados, ya sea armadura convencional (longitudinal de flexión, piel, montaje...) o armadura propiamente instalada a tal efecto, como puedan ser mayazos de pequeño diámetro que ayuden a reducir las fisuras.

La fluencia es el proceso de deformación que aparece en el hormigón a lo largo del tiempo como consecuencia de cargas permanentes (también se llama deformación diferida). Cuando una estructura se carga, aparece inmediatamente una deformación que se denomina instantánea. Tras este primer momento se va formando otra deformación que tiene una forma asintótica y por tanto tiende a estabilizarse con el tiempo, que es lo que se denomina deformación diferida.

0.9 Acciones y combinaciones de carga:

Las acciones y las combinaciones de estas se tratan con detalle en todo el capítulo 3 de la EHE-08, y por la suma importancia de estas, pues todo nuestro cálculo depende de la correcta identificación de las fuerzas que afectan a la estructura, su clasificación y por tanto su correcta mayoración según al grupo al que pertenezcan, preferimos que el alumno lea directamente de la instrucción estas páginas que componen los artículos del 9 al 13 inclusive.

0.10 El acero como material:

En el hormigón dispondremos fibras de acero, material muy resistente a la tracción, para compensar las debilidades del hormigón a este tipo de esfuerzos. Existen dos tipos de armaduras de acero:

- Armaduras pasivas: se trata de barras de acero que se dejan embebidas en el hormigón en un estado de reposo, solidarizándose con él por medio de estrías u otros medios. Constituyen el acero del hormigón armado normal.
- Armaduras activas: son una serie de tendones de acero con mayor resistencia que las armaduras pasivas, y que son utilizados para pretensados y postensados. Por tanto, incluso con la pieza en reposo, tienen aplicada una cierta tracción.

En esta asignatura nos centramos en el hormigón armado y por tanto en las armaduras pasivas. Se trata pues de barras o alambres corrugados (en algún caso también lisos) que se sitúan de manera que compensen determinados esfuerzos que el hormigón por si solo no es capaz de soportar.

Estas barras de acero están normalizadas en una serie de diámetros llamados nominales, que pasamos a enumerar (el número indica el diámetro nominal de la barra medido en milímetros):

6 – 8 – 10 – 12 – 16 – 20 – 25 – 32 – 40

Además de estos, existen diámetros menores, de hasta 4 mm, empleados sobre todo en mallas de forjados y losas, destinados principalmente a contener la fisuración superficial (por ejemplo la que produce la retracción).

En general el acero se comercializa en barras de 12 m de longitud (que es lo que puede transportar un camión normal), pudiendo encargarse también en barras de 14 y 16 m de longitud. Indicar también que en diámetros pequeños se puede encontrar comercializado en bobinas de muchos más metros.

Para calcular el área de acero que aporta una barra usaremos la fórmula de área de un círculo ($\pi \cdot r^2$) con radio la mitad del diámetro nominal.

En cuanto a las propiedades físicas y resistentes de los aceros, nos encontramos una larga descripción en el artículo 32 de la norma, destacando algunos valores relativos a la resistencia que pasamos a comentar:

El límite elástico del acero (punto a partir del cual ya no puede considerarse una relación lineal tensión-deformación) está fijado en aquella tensión que produce una deformación remanente del 0,2 por 100 (muchas veces se menciona un 2 por mil, o un 0,002 por uno). A este límite se le denota como f_y , y está comentado en el artículo 32.1 de la norma.

La pregunta siguiente a formularse sería cuánto vale la tensión para dicha deformación. Aquí debemos aclarar que existen dos variedades o calidades de acero diferentes, denominadas B400S y B500S que presentan un límite elástico característico (con una

confianza del 95%, como ya vimos para el hormigón) de 400 N/mm² y 500 N/mm² respectivamente. Este límite elástico característico se denomina como f_{yk} . Estos valores se pueden apreciar en la tabla 32.2.a de la norma.

A este valor característico, al igual que en el caso del hormigón le corresponderá un valor de cálculo debidamente minorado, y dicha resistencia de cálculo del acero valdría (ver punto 38.3 de la norma):

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

Siendo el coeficiente γ_s es el coeficiente de minoración parcial que toma los valores de la tabla 15.3 de la norma (para acciones persistentes o transitorias $\gamma_s=1,15$ y para acciones accidentales $\gamma_s=1,0$), siendo menor que el del hormigón puesto que el proceso de fabricación del acero está mucho más controlado y ofrece mayores garantías.

Esta resistencia de cálculo se relaciona con la deformación elástica mediante el módulo de Young o módulo de deformación longitudinal del acero de valor $E_s = 200.000$ N/mm².

Hasta aquí tenemos definida la parte elástica del diagrama del acero, pero nos quedaría por ver que pasa a partir de ahí. En general se construyen, igual que para el hormigón diagramas simplificados, donde esta segunda parte se asimila a una recta mucho más tumbada que la de la parte elástica, que acabaría en una tensión máxima, mayor que la elástica, denominada $f_{m\acute{a}x}$ y una deformación máxima mucho mayor que la elástica denominada $\epsilon_{m\acute{a}x}$ y que tiene como valor 0,01, es decir, un uno por ciento. La parte correspondiente a compresión resulta de realizar una simetría central de la parte de tracción con respecto al origen. Igualmente observar que la minoración de resistencia del material se realiza desplazando el punto de contacto entre la parte elástica y la plástica desde f_{yk} hasta la cota de f_{yd} a lo largo de la línea elástica. Con todo ello el diagrama quedaría así:

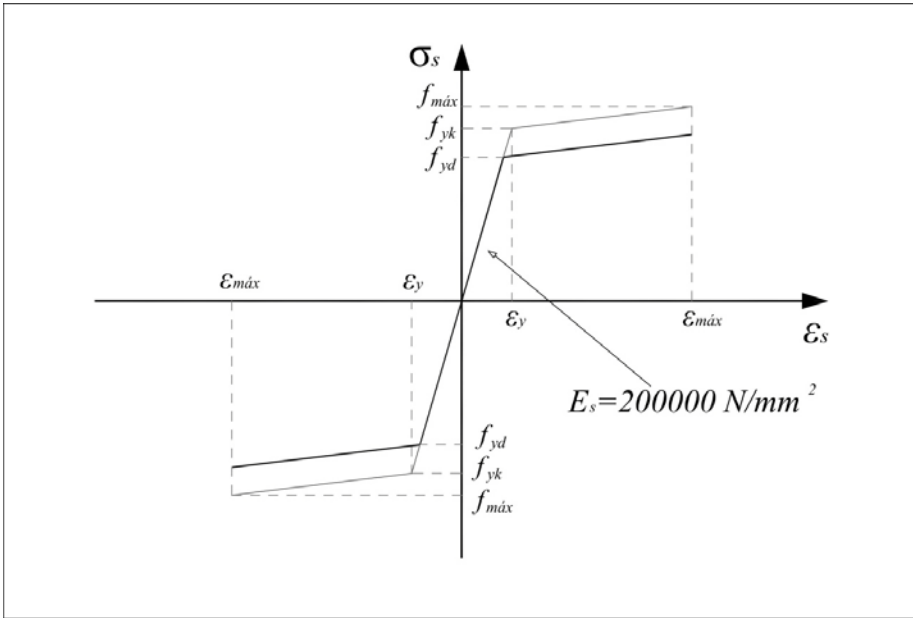


fig. 0.3

Sin embargo, por simplicidad se acostumbra a utilizar un diagrama donde la parte plástica es completamente horizontal, manteniendo siempre la cota f_{yd} y quedando por tanto como en la figura inferior:

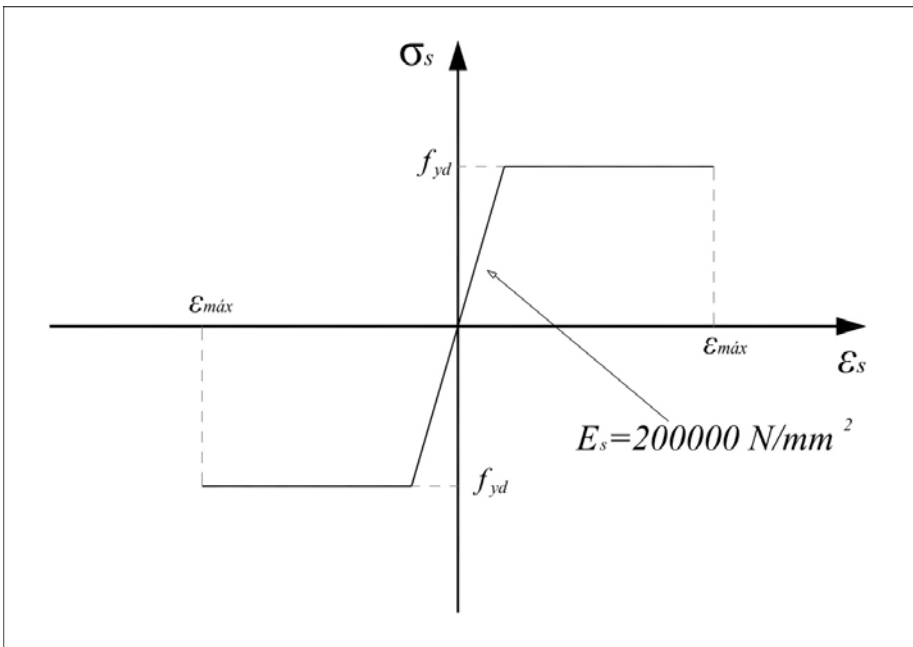


fig. 0.4

Con esto quedan analizados de manera individual los diagramas tensión deformación de ambos materiales, en sucesivos capítulos se tratará como considerar ambos diagramas en una sección en la que aparezcan los dos materiales.

TEMA 1 – DOMINIOS DE DEFORMACIÓN EN HORMIGÓN ARMADO

1.1 Presentación del problema de cálculo de una sección de hormigón:

En general, existen dos tipos de problemas muy habituales en el cálculo del hormigón armado.

El primer problema es el que se conoce como de dimensionamiento, y en el cual partiendo de unos ciertos valores de esfuerzos (momentos flectores y axiles) se determina el área de acero que debe llevar una cierta sección de hormigón para que esta resista dichos esfuerzos.

En segundo lugar tenemos el problema contrario: partiendo de una sección dada y con cierta armadura instalada, encontrar cual serán los esfuerzos “últimos” (o máximos) que es capaz de aguantar (introducimos el concepto de esfuerzo último, como aquel que produce la rotura de la sección).

Para resolver correctamente estos problemas, es necesario conocer y comprender una serie de valores que utilizaremos en el cálculo, tanto geométricos (dimensiones de la sección) como mecánicos (resistencias, esfuerzos).

En cuanto a los geométricos, el concepto más importante a introducir es el de recubrimiento del acero. Para garantizar una adecuada transmisión de esfuerzos y que sean solidarios en deformaciones el hormigón y el acero, este último ha de estar recubierto por el primero en su totalidad, y además que esta capa de cubrición tenga un espesor mínimo.

Esta capa de hormigón tiene igualmente la función de proteger el acero de los agentes ambientales que podrían dañarlo, y por tanto tendrá una dependencia del tipo de ambiente de exposición (el recubrimiento influye decisivamente en la durabilidad).

A esta distancia le hemos llamado recubrimiento, pudiendo ser un recubrimiento a la superficie del acero o recubrimiento a secas cuando se mide desde la superficie libre de la pieza a la superficie de acero más cercana; o recubrimiento al eje, o mecánico, cuando se mide desde la superficie de la pieza hasta el eje central de la barra de acero (lo nombraremos d' en los cálculos).

En los artículos de la norma 37.2.4 y 37.2.4.1 encontramos una serie de prescripciones para la elección del recubrimiento que pasamos a comentar:

Se establece como distancia mínima entre la superficie libre de la pieza y la superficie de acero más cercana a ella el recubrimiento nominal, que será suma de un recubrimiento mínimo dependiente del ambiente de exposición (que se obtiene de las

tablas de la norma 37.2.4.1.a, 37.2.4.1.b y 37.2.4.1.c) y de un margen de recubrimiento que depende del control en la ejecución y del tipo de elemento (in-situ o prefabricado):

$$r_{nom} = r_{min} + \Delta r$$

Siendo Δr el margen de recubrimiento, de valor:

0 mm en el caso de elementos prefabricados con control de ejecución intenso.

5 mm en el caso de elementos in-situ con control de ejecución intenso.

10 mm en el resto de los casos.

En cualquier caso habrán de respetarse igualmente las restricciones marcadas en el artículo 37.2.4.1, entre las cuales se indica que para aceros principales el recubrimiento no será menor que un diámetro si se trata de aceros simples o que el diámetro equivalente si se trata de grupos de barras (diámetro de la barra ficticia que tendría el mismo área de acero que el grupo de barras). Tampoco deberá ser menor a 0,8 veces el tamaño máximo del árido, con el fin de permitir la correcta penetración entre las barras del vertido de hormigón.

Igualmente se recomienda respetar dos diámetros en barras curvadas por efectos de empuje al vacío y 70 mm en el caso de que se hormigone directamente contra el terreno, para evitar mermas en determinadas zonas por la irregularidad de la excavación.

Por último mencionar que igualmente se aumentará el recubrimiento en casos de riesgo de incendio, con el fin de proteger más el armado interior del fuego, y que en cualquier caso, si el recubrimiento superase los 5 cm, se recomienda la instalación de una malla en medio del recubrimiento de la zona de tracción para evitar fisuras.

A la hora de pasar del recubrimiento a secas, al recubrimiento al eje, o mecánico, hemos de prever que habrá que añadir un radio de la armadura principal (o más, en el caso de grupos de barras como armado de tracción) más el diámetro del cerco de cortante en el caso en que este sea necesario. Como veremos posteriormente a la hora de dimensionar hemos de partir del dato de recubrimiento mecánico, pudiendo conocer el recubrimiento a la superficie, pero debiendo estimar el diámetro de la armadura principal y el del cerco de cortante. Se recomienda tomar valores un poco holgados para evitar que al terminar el cálculo nos encontremos con que el recubrimiento mecánico resultante de los armados obtenidos resulta mayor que el dato de partida que supusimos y por tanto debemos repetir todo el proceso. El diámetro del acero de tracción puede ser muy variable, sin embargo, como cerco de cortante un valor prudente puede ser un diámetro de 12 mm, sabiendo que luego podremos conseguir una mayor cuantía acercando los cercos entre si en el caso de ser necesario.

Por tanto hasta aquí hemos definido cuanto debe medir el recubrimiento a secas, es decir, la distancia de la superficie libre a la superficie del acero más cercana a ella y como se relaciona con el recubrimiento al eje o mecánico. Pasamos a definir el siguiente parámetro geométrico, al que denominaremos canto útil, que nombraremos con la letra d , y que representa la distancia entre la fibra más comprimida de la sección y el eje de la armadura de tracción. Nótese que esta distancia saldría de restar al canto total de la sección, que se suele denominar h , el recubrimiento al eje de los aceros de tracción (que como ya dijimos se suele nombrar d').

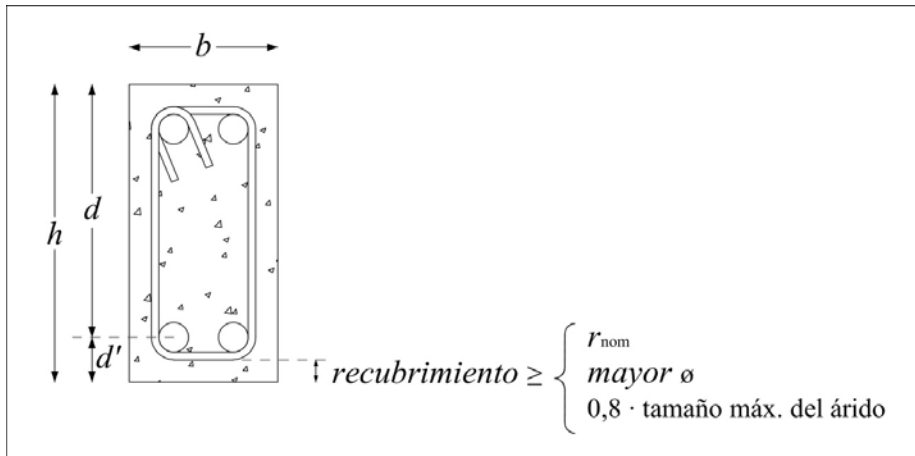


fig. 1.1

En cuanto a los parámetros mecánicos, se emplearán las resistencias de los materiales ya descritas en el tema 0, así como los diferentes esfuerzos debidamente mayorados de acuerdo con lo indicado en el mismo tema.

1.2 Hipótesis generales:

Se ha de partir de las siguientes hipótesis generales a la hora de abordar un cálculo de flexión en hormigón armado:

- La deformación de la sección de hormigón se considera plana (se trata de una hipótesis que ya se tomaba en cursos de Resistencia de Materiales: las secciones planas permanecen planas). Para que esto sea aceptable se requiere que la distancia entre puntos con momento flector nulo y el canto sea superior a 2 (en el resto de casos, al tratarse de secciones muy masivas o longitudes entre puntos de momento nulo muy cortas, se procederá al cálculo mediante el método de bielas y tirantes, siendo las llamadas regiones D).

- El agotamiento llega a una cierta sección cuando alguna de las fibras llega a su deformación máxima prevista en los diagramas de tensión-deformación, siendo esta un 0,01 en el caso del acero, y en el caso del hormigón, variará según nos encontremos en el caso de compresión simple o flexocompresión.
- Las armaduras embebidas en el hormigón serán totalmente solidarias a este y por tanto la deformación del acero será igual a la deformación del hormigón colindante.
- Los diagramas tensión deformación del hormigón y acero serán los estudiados a continuación, en cualquiera de sus posibilidades, destacando el hecho de que el hormigón no presenta resistencia de cálculo alguna a la tracción.
- A partir de las tensiones que dan los diagramas se calculará la resultante de las mismas y su punto de aplicación, aplicando posteriormente las ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas restantes.

1.3 Dominios de deformación:

Al considerar simultáneamente los dos materiales presentes en la sección, encontramos que según se van modificando las acciones sobre la sección, esta va respondiendo según unos patrones determinados, que compatibilizan las deformaciones de ambos materiales. A estos patrones se les llama dominios de deformación, y cualquier configuración de acciones sobre la sección debe corresponder con uno de ellos.

La variable que nos orienta sobre en que dominio nos encontramos y por tanto en que situación tenso-deformacional está cada material, es la profundidad de la fibra neutra, x , que ya mencionamos anteriormente.

Aunque se puede encontrar simplificado en el artículo 42.1.3 de la norma, a continuación procedemos a explicar cada uno de los dominios de deformación, esperando arrojar algo de claridad sobre este tema, que supone la base del cálculo de flexión del hormigón armado.

Dominio 1:

En el primer dominio encontramos que la sección se encuentra traccionada en todos sus puntos, y por tanto la fibra neutra (lugar geométrico donde los puntos de la sección pasan de estar traccionados a comprimidos) se encuentra fuera de la sección, o como situación extrema, se encuentra en un extremo de la sección (justo en el cambio del dominio 1 al 2).

Como ya dijimos el diagrama de deformación estará constituido por rectas, pues suponemos que la sección permanece plana, y en base a lo anterior todas estas posibles rectas no podrán tocar en este dominio la sección de hormigón original representada por una línea vertical, salvo en el caso particular en el que a punto de cambiar al dominio 2, toquen en un extremo de la sección.

Además, todas estas rectas tienen un punto en común (punto A), fijando que la armadura más traccionada tenga una deformación del 10 por 1000, es decir, está en su límite de rotura. Por tanto, las rectas de deformación girarán respecto a este punto: desde aquella que presenta la misma deformación del 10 por 1000 en todos los puntos, véase (1), y que por tanto tiene la armadura superior e inferior al límite de la rotura; a la que presenta la deformación del 10 por 1000 en la armadura más traccionada y toca a la sección en su extremo opuesto, véase (2).

La recta (1) tendrá una profundidad de la fibra neutra igual a menos infinito (véase la aclaración (*)), pues tocaría con la sección en el infinito pero por la parte más comprimida. La recta (2) tendrá una profundidad de la fibra neutra de 0 (véase la aclaración (**)), puesto que la deformada toca a la sección en el extremo más comprimido (borde superior en la figura), que es donde está el origen de medidas de la profundidad de la fibra neutra.

A continuación se presenta un dibujo en el que se puede ver este haz de rectas, indicando con números los casos comentados arriba:

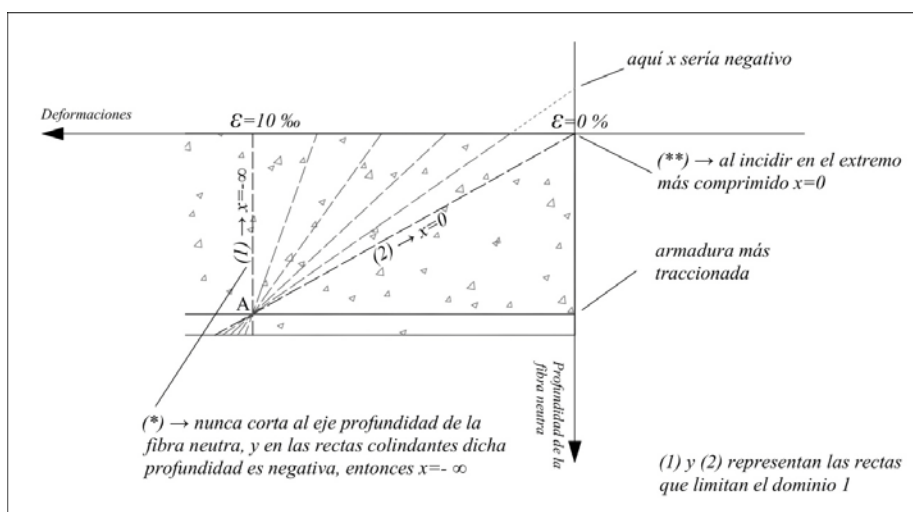


fig. 1.2

En la figura superior se ha considerado la fibra inferior como más la traccionada, representando igualmente la armadura inferior que se encarga de absorber esta tracción. La armadura superior no se ha representado puesto que como veremos no siempre

aparece, y debe ser hallada por cálculo, aunque en este caso en el que la fibra superior presenta cierta tracción si estaría presente.

Por tanto, a modo de resumen, podemos decir que en el dominio 1 la armadura más traccionada presenta el alargamiento a partir del cual se produce la rotura, la armadura opuesta tendrá una deformación que puede ir desde la de rotura a prácticamente 0 (nunca llegará a 0, pues la armadura no se encuentra justo en el borde de la pieza, hay un cierto recubrimiento). En cuanto al hormigón está traccionado en toda la sección, y por tanto fisurado y no trabaja. Eventualmente, en el caso de transición entre el dominio 1 y 2, la fibra del borde menos traccionado tendrá tracción nula (siendo pues la fibra neutra).

Dominio 2:

En este dominio las rectas de deformación seguirán girando con respecto al punto A, como en el dominio 1. La diferencia sustancial es que si recordamos, el dominio 1 terminaba con una recta que incidía en la sección a la altura de su extremo más comprimido, teniendo pues profundidad de fibra neutra igual a 0. En el dominio 2 empezamos con esa situación, de profundidad de la fibra neutra 0, en la cual la fibra más comprimida no presenta deformación alguna (véase recta (2)) y termina con la fibra más comprimida con deformación de valor ϵ_{cu} , que corresponde, como vimos ya en el tema anterior, a la deformación en la rotura del hormigón a flexión, y para hormigones de menos de 50 N/mm² de resistencia característica vale 0,0035 (véase recta (3) de la figura 1.3 y 1.4).

Por tanto, en este dominio tenemos un extremo de la pieza traccionado hasta el punto que su armadura está en el límite de rotura (el hormigón estará completamente fisurado) y el extremo opuesto, el más comprimido, varía desde tener la fibra del borde con deformación 0 a presentar la deformación de rotura del hormigón, por lo que en cualquier caso la fibra más comprimida de la sección presenta compresiones, excepto en el caso de transición entre los dominios 1 y 2 que tiene tensión nula.

La pregunta ahora sería: Sabemos cuanto vale la profundidad de la fibra neutra entre el dominio 1 y el 2 ($x=0$), pero, ¿y entre el dominio 2 y el 3? Podemos deducir dicho valor con una simple equivalencia de triángulos: las deformaciones en la fibra comprimida y en el acero de la parte traccionada serán respectivamente de ϵ_{cu} y 0,01, siendo la primera de compresión y la segunda de tracción; y la distancia entre estas dos fibras es igual al canto útil, por tanto el dibujo resultante sería:

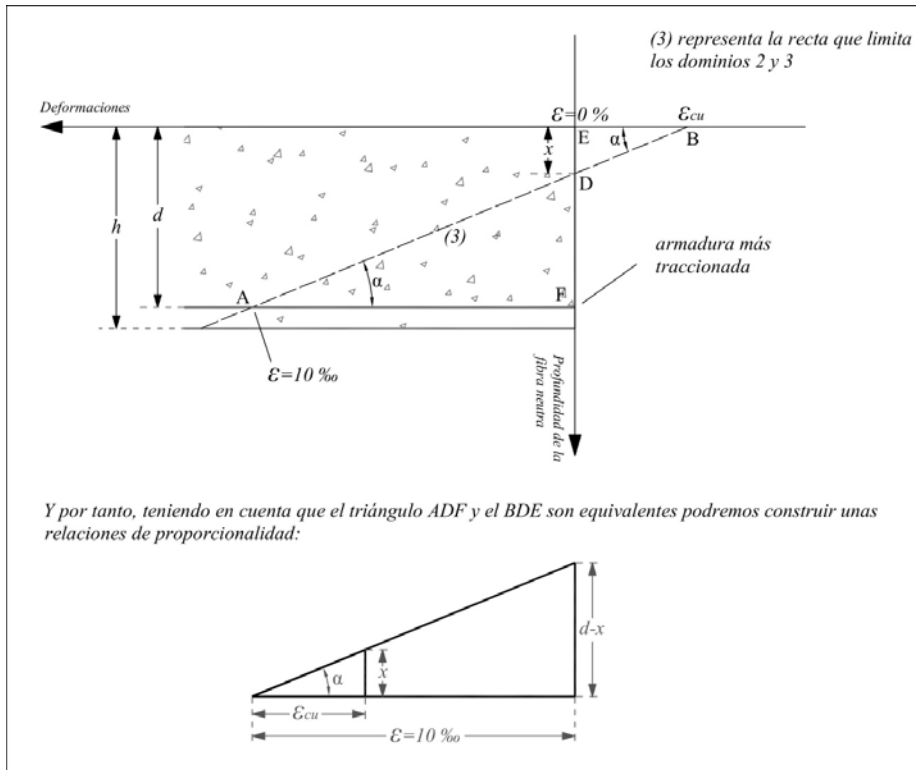


fig. 1.3

Por tanto, a partir del triángulo inferior de la figura podemos deducir la siguiente igualdad:

$$\frac{x}{\epsilon_{cu}} = \frac{d-x}{0,01}$$

Esta ecuación habría que resolverla para cada valor de ϵ_{cu} y d , pero en el caso concreto de hormigones de menos de 50 N/mm^2 con $\epsilon_{cu} = 0,0035$, podemos deducir lo siguiente (ojo, se trata de un caso concreto, nunca de una regla general):

$$\frac{x}{0,0035} = \frac{d-x}{0,01}$$

Con lo que:

$$x = \frac{0,0035 \cdot d - 0,0035 \cdot x}{0,01} = 0,35 \cdot d - 0,35 \cdot x \Rightarrow 1,35 \cdot x = 0,35 \cdot d$$

Y finalmente obtenemos:

$$x \cong 0,259 \cdot d$$

A continuación se presenta un dibujo en el que se puede ver este haz de rectas, indicando con números los casos comentados antes:

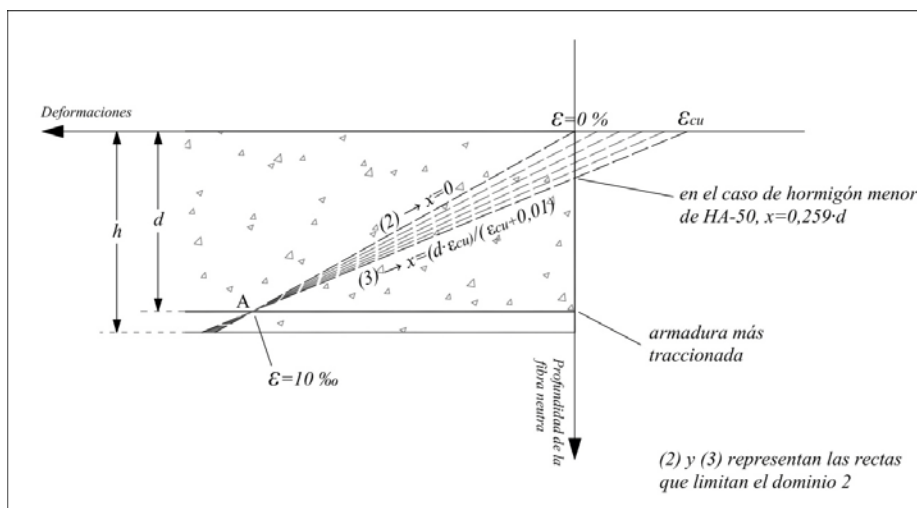


fig. 1.4

Como se puede apreciar en la figura, todas las rectas que forman el haz del dominio 2 tienen $x \geq 0$, y en el caso concreto de hormigones de menos de 50 N/mm^2 tenemos que $0 \leq x \leq 0,259$.

Dominio 3:

Si en este dominio las rectas de deformación siguieran girando con respecto al punto A, la deformación del hormigón en la fibra más comprimida sobrepasaría el valor ϵ_{cu} , y por tanto este rompería por flexión. Es por esto que en este dominio el diagrama se comporta manteniendo constante la deformación del hormigón en la fibra más comprimida en ϵ_{cu} , y relajando la deformación del acero más traccionado. En otras palabras, en el dominio 3 las rectas giran con respecto al punto B.

El dominio 3 comienza en la recta donde terminó el 2, es decir con la fibra más comprimida con deformación de valor ϵ_{cu} (rotura del hormigón a flexión) y la armadura más traccionada con una deformación del 10 por 1000 (su límite de rotura a tracción), la cual se puede apreciar en el gráfico 1.7 como recta (3); y terminará con el mismo valor ϵ_{cu} de deformación en la fibra comprimida y la armadura más traccionada con una deformación ϵ_y (su límite elástico), que en dicho gráfico sería la recta (4).

Por tanto en el dominio 3, cualquier configuración tiene siempre compresiones, llegando al valor ϵ_{cu} en la fibra más afectada, y tracciones en la otra parte. La armadura de tracción tendrá una deformación comprendida entre ϵ_y y un 10 por 1000, lo cual hace que el acero siempre esté trabajando en la rama horizontal de su diagrama tensión-deformación (se muestra a continuación el diagrama simplificado que emplearemos a efectos de cálculo), y por tanto entrega la mayor tensión posible por unidad de sección. Esto es muy importante, puesto que significa que el acero aprovecha al máximo su capacidad resistente, cosa que no pasa en el dominio 4, por ejemplo.

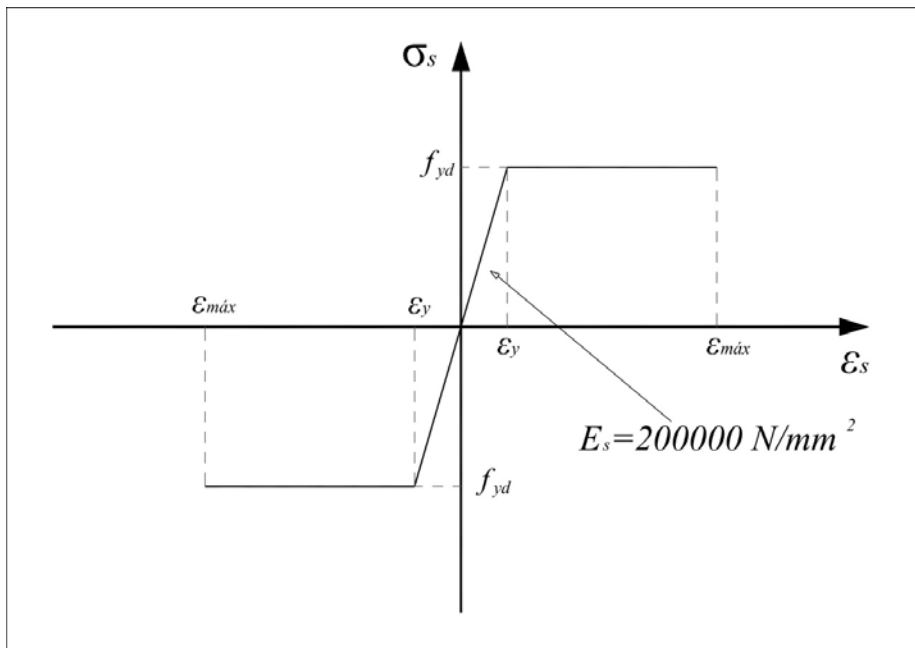


fig. 1.5

Volvemos a preguntarnos para este dominio: Sabemos cuanto vale la profundidad de la fibra neutra entre el dominio 2 y el 3, valor que calculamos por equivalencia de triángulos, pero, ¿y entre el dominio 3 y el 4? Hemos de volver a recurrir a la equivalencia de triángulos: las deformaciones en la fibra comprimida y en el acero de la parte traccionada serán respectivamente de ϵ_{cu} y ϵ_y , siendo la primera de compresión y la segunda de tracción; y la distancia entre estas dos fibras es igual al canto útil, por tanto el dibujo resultante sería:

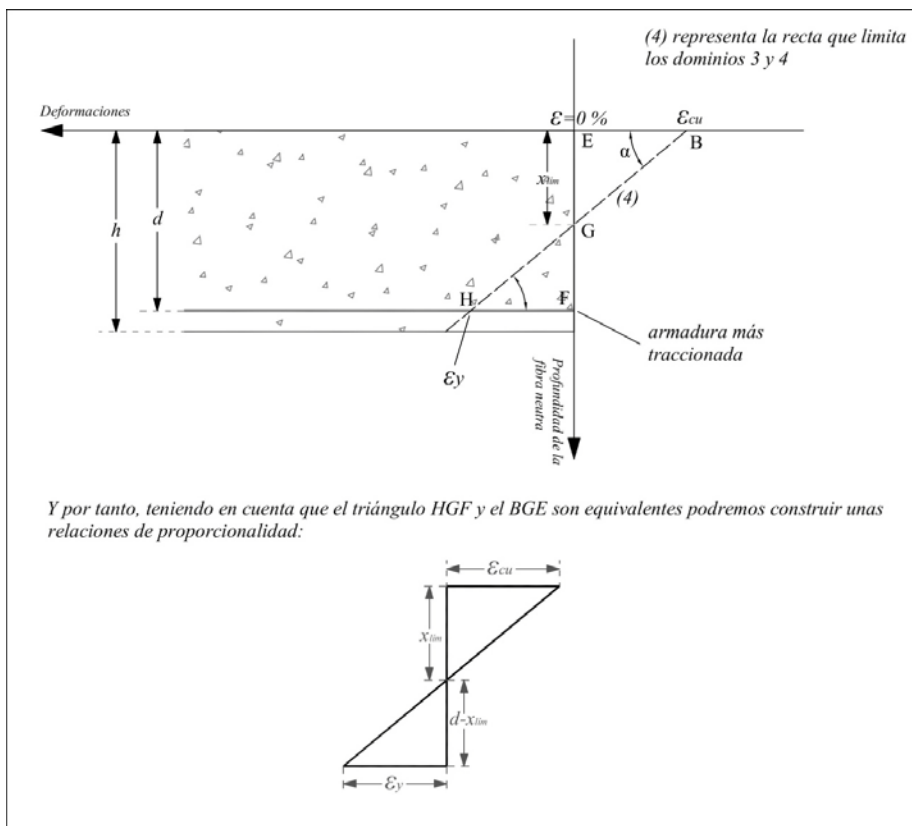


fig. 1.6

Como se puede apreciar en dicho dibujo aparece una cierta distancia x_{lim} , que significa profundidad de la fibra neutra límite, o x límite, y se define como aquella profundidad de la fibra neutra en la cual el acero trabaja a su límite elástico. Con valores de x menores que esta profundidad el acero estará en la rama horizontal plástica, y con valores mayores estará en la rama inclinada elástica pero sin llegar a su máximo. Como veremos este término es importantísimo a efectos de diseño, pues nos ayuda a saber si el acero está funcionando a su capacidad óptima.

Veamos pues cuanto valdría x_{lim} por equivalencia de triángulos:

$$\frac{x_{lim}}{\epsilon_{cu}} = \frac{d - x_{lim}}{\epsilon_y}$$

Igual que hicimos en el anterior dominio me centro en el caso particular de hormigones de menos de 50 N/mm^2 con $\epsilon_{cu} = 0,0035$ (ojo, se trata de un caso concreto, nunca de una regla general):

$$\frac{x_{lim}}{0,0035} = \frac{d - x_{lim}}{\varepsilon_y} \Rightarrow x_{lim} = \frac{0,0035 \cdot d - 0,0035 x_{lim}}{\varepsilon_y} \Rightarrow \varepsilon_y \cdot x_{lim} = 0,0035 \cdot d - 0,0035 x_{lim} \Rightarrow$$

$$(\varepsilon_y + 0,0035) x_{lim} = 0,0035 \cdot d \Rightarrow x_{lim} = \frac{0,0035 \cdot d}{\varepsilon_y + 0,0035} = \frac{d}{1 + \frac{\varepsilon_y}{0,0035}}$$

Ahora, recordando la ley de Hooke, tenemos que $f_{yd} = 200.000 N / mm^2 \cdot \varepsilon_y$, y por tanto quedaría:

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + \frac{f_{yd}}{0,0035 \cdot 200000 N / mm^2}}$$

Y finalmente la expresión quedaría como sigue, con f_{yd} en N/mm^2 y x_{lim} en las mismas unidades que d:

$$x_{lim} = \frac{d}{1 + 1,428 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}}$$

Por tanto, conociendo ya la situación de todas las rectas del dominio, lo representamos en el siguiente gráfico:

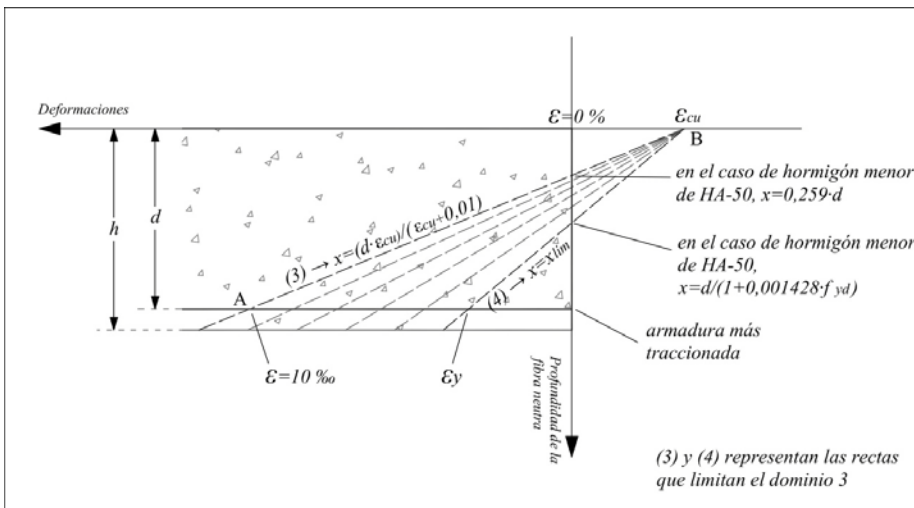


fig. 1.7

Dominio 4:

En este dominio las rectas de deformación seguirán girando con respecto al punto B, manteniendo por tanto la deformación del hormigón en la fibra más comprimida el valor ϵ_{cu} , y permaneciendo pues en el valor de rotura por flexión. Al girar con respecto a B dichas rectas, lo que va disminuyendo es la deformación del acero a valores inferiores a ϵ_y (su límite elástico), y por tanto dicho acero absorberá una tracción inferior a f_{yd} . Esto, como veremos en el próximo tema supone un cierto desperdicio de material, con su correspondiente coste económico, y por tanto se le tratará de encontrar una solución.

Sabiendo cual es la recta que separa el dominio 3 y 4 (recta (4)), que será la misma que estudiamos en el dominio 3 (hormigón más comprimido con deformación ϵ_{cu} , acero más traccionado con deformación ϵ_y , y profundidad de la fibra neutra de valor x_{lim}), lo que nos interesa ahora, por analogía con el tratamiento en los demás dominios, es saber en que recta se separa con el siguiente dominio.

Aquí se presenta una cierta anomalía, y es que en este dominio tenemos por un lado el dominio principal (dominio 4) y un pequeño subdominio (dominio 4a) que sirve para mostrar que algo importante cambia en cierto punto del dominio 4, pero sin darle la suficiente relevancia para crear un dominio propio. Por tanto estos dos casos los veremos en gráficos diferentes y estudiaremos a continuación también la separación entre ellos:

El dominio 4 propiamente dicho terminará en una recta que presenta por un lado, una compresión máxima del hormigón de valor ϵ_{cu} , y por otro lado, una deformación del acero más traccionado de valor 0, es decir, el acero del lado más traccionado está completamente relajado, y se encuentra por tanto situado sobre la fibra neutra. A partir de aquí deducimos que el valor de la profundidad de la fibra neutra es d . Esta recta se representa como (5) en el gráfico 1.8 y 1.9. A continuación el primero de dichos gráficos:

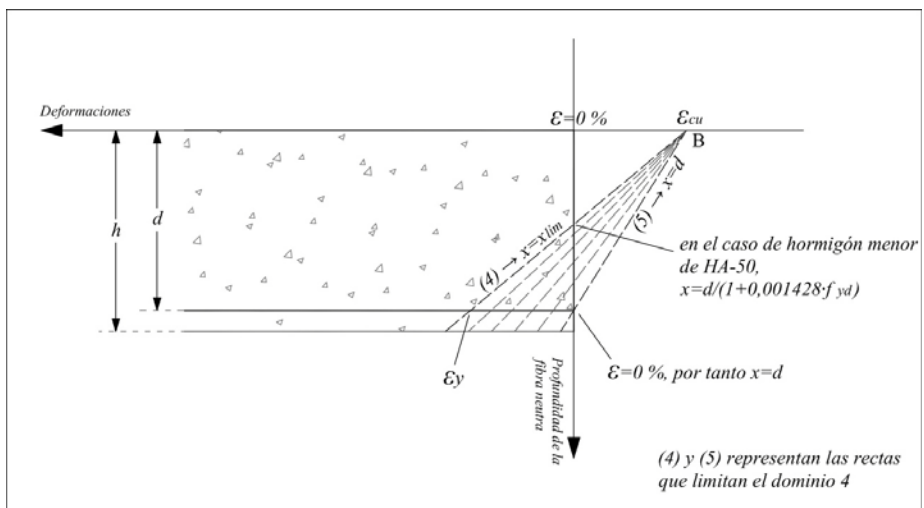


fig. 1.8

En cuanto al subdominio 4a, empezará como es lógico en la recta (5), explicada en el párrafo anterior, y terminará en una recta que posee una compresión máxima del hormigón de valor ϵ_{cu} , y en el lado opuesto una deformación 0 en el hormigón, es decir, que la fibra de hormigón opuesta a la que presenta una compresión ϵ_{cu} posee una compresión o tracción 0, esta recta está representada en el gráfico 1.9 como recta (6). Por tanto, al coincidir esta última fibra de hormigón con la fibra neutra tendremos que la profundidad de la misma tendrá valor h . ¿Qué importante cambio hay con respecto al dominio 4? Es cambio más sustancial es que la armadura principal, la más traccionada, pasa de estar sometida a una deformación por tracción de valor comprendido entre ϵ_y y 0 en el dominio 4, a estar sometida a una pequeña compresión en el dominio 4a.

A continuación el gráfico correspondiente al dominio 4a:

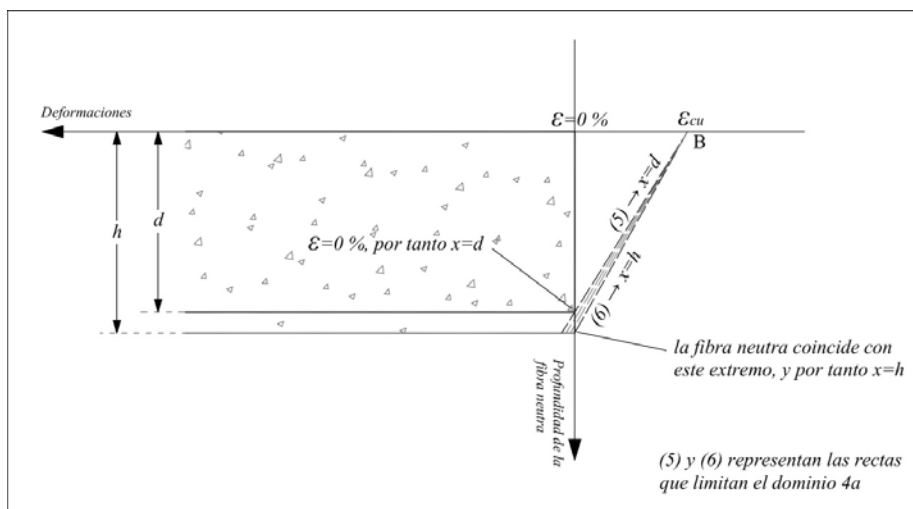


fig. 1.9

Dominio 5:

El dominio 5 es el último de todos y el único que presenta todas las fibras de la sección en situación de compresión. Va desde la situación que definimos como recta (6) en el gráfico 1.9 correspondiente al dominio 4a hasta una recta que representa la sección sometida a compresión simple (toda la sección tendría la misma deformación y tensión).

Aquí aparece un aspecto a tratar, pues hemos de recordar que, como ya se vio en el tema anterior, que el hormigón tiene una cierta deformación a compresión simple ϵ_0 , y sin embargo, en el momento en que aparece algo de flexión, la deformación máxima

cambia a ε_{cu} y resulta mayor. A continuación recordamos un poco los valores de estos dos parámetros:

$$\varepsilon_{c0} = 0,002 \quad \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{c0} = 0,002 + 0,000085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,50} \quad \text{si } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,0035 \quad \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,0026 + 0,0144 \cdot \left[\frac{(100 - f_{ck})}{100} \right]^4 \quad \text{si } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$$

Es por esto que si bien, al principio del dominio 5, cuando nos encontramos en la recta de deformación que presentaba $x=h$ (recta (6)) el hormigón se deforma hasta ε_{cu} conforme nos vayamos acercando al caso de compresión simple y por tanto la recta de deformación se haga más y más vertical la deformación máxima habrá de tener como valor ε_0 .

Debido a lo anterior, en el dominio 5 las rectas girarán respecto a un punto C, resultante de la intersección entre la recta (6), límite superior del dominio 4^a, hasta la recta (7), que es una recta de deformación vertical (lo cual conlleva que todos los puntos tendrán la misma deformación, como hemos visto, y dicha deformación tendrá un valor ε_0).

Vamos a deducir por equivalencia de triángulos, como ya lo hemos hecho anteriormente a que profundidad se encuentra el punto C con respecto a la fibra más comprimida. Este valor, al no tratarse de un parámetro fundamental lo llamaremos directamente distancia c. En el gráfico 1.10 se pueden apreciar los triángulos que utilizaremos, y en base a los cuales podemos obtener:

$$\frac{dist.c}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0} = \frac{h - dist.c}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \cdot dist.c = (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0)h - (\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0)dist.c \Rightarrow dist.c = \frac{(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_0)h}{\varepsilon_{cu}}$$

Todo lo anterior se encuentra plasmado en el gráfico que se muestra a continuación:

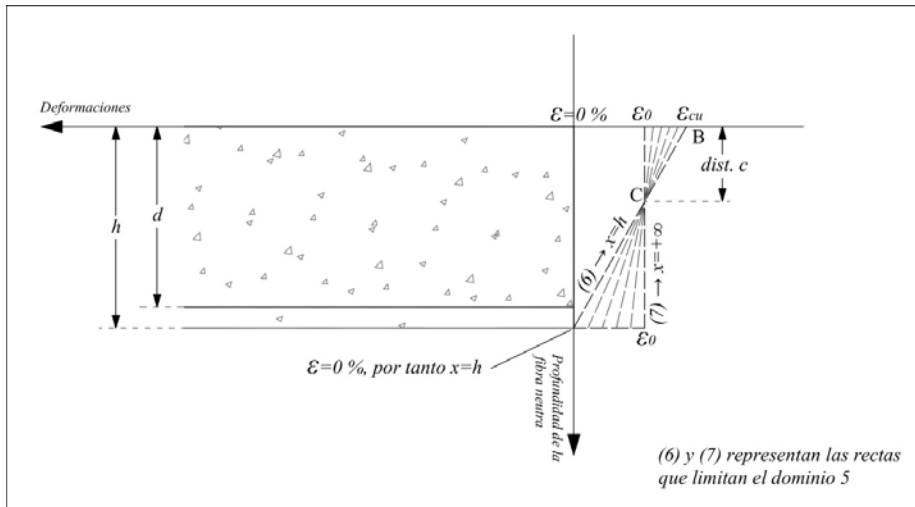


fig. 1.10

1.4 Resumen de los dominios de deformación:

Tras todas estas páginas y gráficos referentes a los dominios, y aunque todo lo anterior se debe de dominar, vamos a realizar un pequeño resumen recapitulativo para intentar arrojar un poco de claridad sobre el tema.

Para empezar comentar que en la norma encontramos el gráfico 42.1.3 referente a los dominios de deformación, pero que los muestra todos en una sola imagen, pudiendo complicar el proceso de asimilación, y es por esto que nosotros hemos decidido de desglosarlo por dominios. Sin embargo, a modo de recapitulativo, podemos superponerlos todos obteniendo el siguiente gráfico:

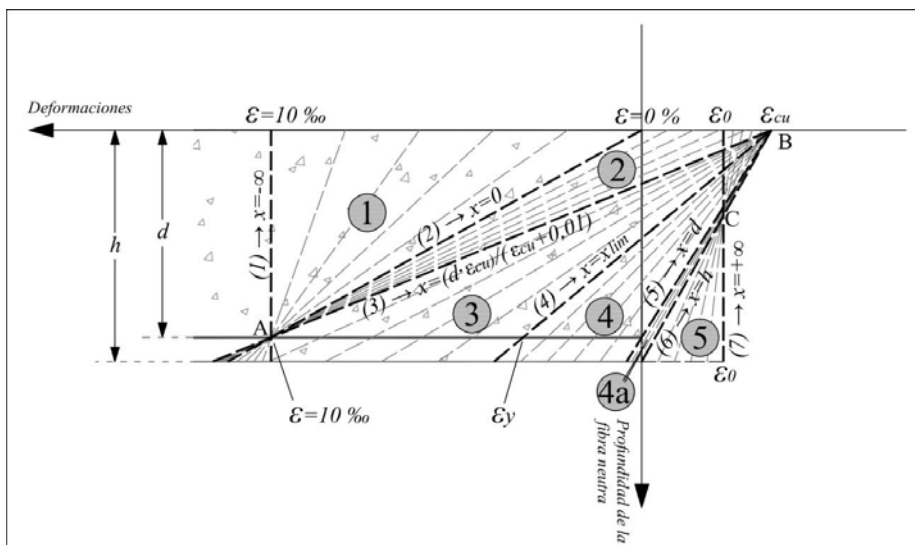


fig. 1.11

En base a este gráfico podemos hacer una última reflexión que nos permitirá en el futuro localizar en que dominio nos encontramos con cierta facilidad: el dominio donde nos encontremos queda definido unívocamente conociendo la profundidad de la fibra neutra. Tan sólo hay que calcular x y situarnos mediante el siguiente esquema:

Dominio 1: $-\infty \leq x \leq 0$

Dominio 2: $0 \leq x \leq \frac{\varepsilon_{cu} \cdot d}{\varepsilon_{cu} + 0,01}$

Dominio 3: $\frac{\varepsilon_{cu} \cdot d}{\varepsilon_{cu} + 0,01} \leq x \leq x_{lim}$

Dominio 4: $x_{lim} \leq x \leq d$

Dominio 4a: $d \leq x \leq h$

Dominio 5: $h \leq x \leq +\infty$

TEMA 2 – DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES EN FLEXIÓN SIMPLE

2.1 Planteamiento del problema de dimensionamiento de una sección de hormigón:

Como ya se introdujo en el apartado 1.1, para el hormigón armado existen dos tipos de problema “tipo”, que son el de dimensionamiento y el de comprobación (también llamado de peritaje). Empezaremos por el problema de dimensionamiento, puesto que entendemos que resulta más didáctico hacerlo así, y además constituye la gran mayoría de problemas de hormigón armado.

En este problema de dimensionamiento partiremos de los datos correspondientes a las solicitaciones a las que está sometida la sección (y a la naturaleza de las mismas si necesitamos mayorarlas), la geometría de la misma y las calidades de los materiales. Evidentemente, este es el punto de partida a nivel de asignatura, pues durante el ejercicio de la profesión el calculista no conoce tampoco la geometría, es a él fijarla (teniendo en cuenta para ello por un lado normativas y por otro funcionalidad, sin olvidar factores estructurales como la inercia que marca la deformación), lo mismo que pasa con la calidad de los materiales, que no le será dada generalmente y donde deberá encontrar un óptimo económico partiendo de que mejores materiales disminuyen las cantidades de los mismos pero aumentan su coste por unidad de medida. Igualmente consideraremos conocido el ambiente de exposición que nos permitirá calcular recubrimientos y con ellos parámetros como el canto útil.

Los resultados que se esperan son evidentemente las armaduras necesarias para soportar dichos esfuerzos en la sección dada, cumpliendo los criterios de seguridad exigidos. En la imagen inferior resumimos los datos que necesitamos conocer directa o indirectamente para abordar este problema:

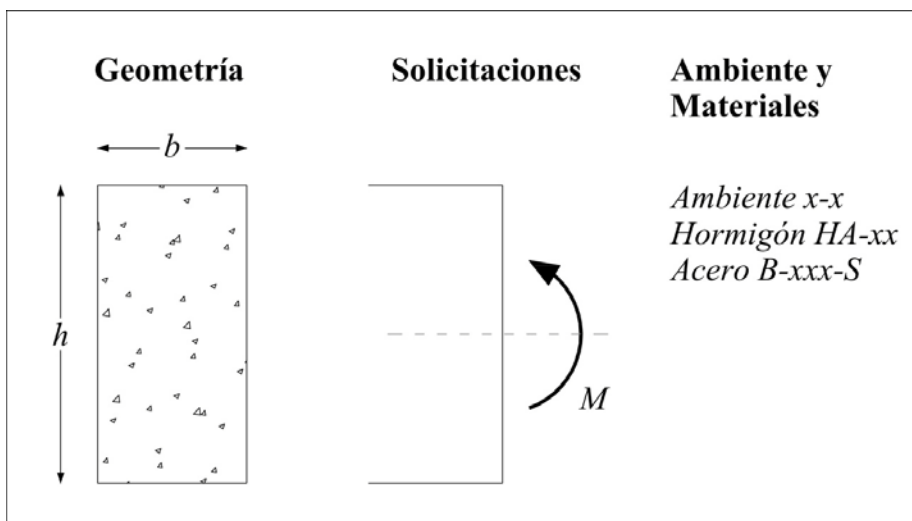


fig. 2.1

A partir de estos datos procederemos como sigue: En primer lugar se calculará a partir del ambiente el recubrimiento mínimo a la superficie del acero, y estimando un diámetro de acero de cortante y de acero de flexión determinaremos el recubrimiento al eje del acero de flexión (el recubrimiento al eje del acero de flexión será igual al recubrimiento a la superficie del acero, más el diámetro del acero de cortante, más medio diámetro del acero de flexión principal; esto es válido siempre que no haya grupos o varios niveles de aceros de flexión). Con esto podremos determinar el valor del canto útil, d , y con ello tendremos todos los parámetros geométricos necesarios.

Después plantearemos ecuaciones de equilibrio con objeto de calcular la profundidad de la fibra neutra. A partir de este valor de x , podremos determinar el dominio donde nos encontramos y con ello el plano de deformación en el momento de agotamiento de la sección.

2.2 Relaciones entre la sección deformada (recta) según dominios y los esfuerzos:

Las ecuaciones que plantearemos a continuación son tan sólo el resultado de aplicar la teoría de la estática a la sección de hormigón armado, equilibrando las sollicitaciones externas y las resultantes de las tensiones de los materiales (cada uno según su diagrama).

Otra cosa que se debería aclarar es que en el caso de flexión simple, tan sólo es posible que la sección se encuentre en los dominios 2, 3 o 4, puesto que la carencia de axil implica que, dada una configuración de sollicitaciones (momento flector en este caso) no nula, por un lado se ha de dar alguna tensión en los materiales para equilibrarla (por ejemplo una compresión en el hormigón). Por otro lado, ha de existir una tensión en otra parte de los materiales de signo opuesto para que al hacer que la sumatoria de fuerzas horizontales de cero y la pieza esté estática (recordamos que el momento no es una fuerza, y por tanto forma parte de esta sumatoria, lo cual implica que los esfuerzos de los materiales han de equilibrarse entre si y además no pueden ser nulos pues no compensarían el momento externo en la sumatoria de momentos). Para que existan tensiones en los materiales de signos distintos han de existir deformaciones de signos distintos (la tensión en el material se opone a la deformación), y la coexistencia de compresiones y tracciones tan sólo se da en los dominios antes citados. Esto para el alumno que empieza con el cálculo de hormigón puede parecer un poco difícil de comprender, pero seguramente al final de este tema, y con las ecuaciones delante, todo estará más claro.

A continuación vamos a dibujar la situación en la que se encuentra el hormigón y el acero para una configuración genérica de cada uno de los dominios anteriores, partiendo de que en el tema anterior ya se vio en profundidad la situación del diagrama de

deformación para cada uno de ellos, y añadiendo sobre este los esfuerzos de los materiales según dichas deformaciones (relacionaremos, como es lógico, deformaciones y tensiones con los diagramas tensión deformación ya vistos en el tema 0). Puesto que para el hormigón vimos dos posibles diagramas (parábola-rectángulo y rectangular), y con afán de que todo quede lo mejor explicado posible, realizaremos los gráficos con uno y otro diagrama.

Igualmente aclarar, que con objeto de dar una visión un poco más concreta, se ha supuesto que $f_{HA} < 50 \text{ N/mm}^2$, cosa que se puede dar o no, pero que a partir de aquí y a nivel de explicación (para el resto del tema, e incluso en el tema siguiente) lo daremos por cierto, con objeto de reducir el número de casos particulares. El alumno, ante un ejercicio, deberá asegurarse que esto sea correcto, y así construir un diagrama tensión-deformación correcto (a nivel de ejercicios o exámenes podrán aparecer hormigones de más de 50 N/mm^2).

Dominio 2 con diagrama parábola-rectángulo:

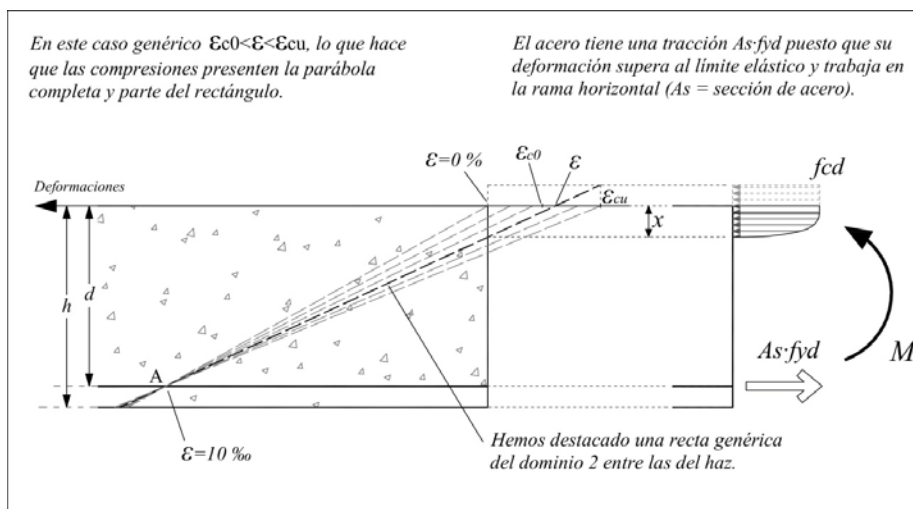


fig. 2.2

Dominio 2 con diagrama rectangular:

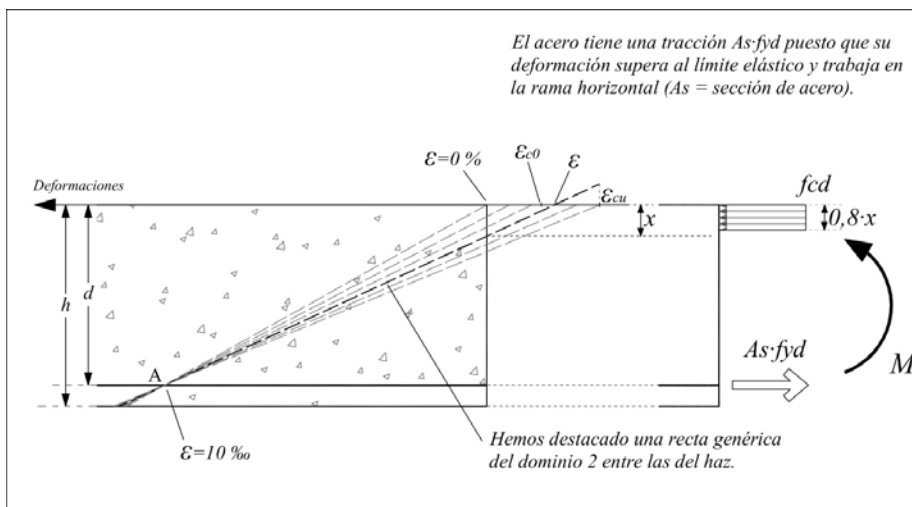


fig. 2.3

Dominio 3 con diagrama parábola-rectángulo:

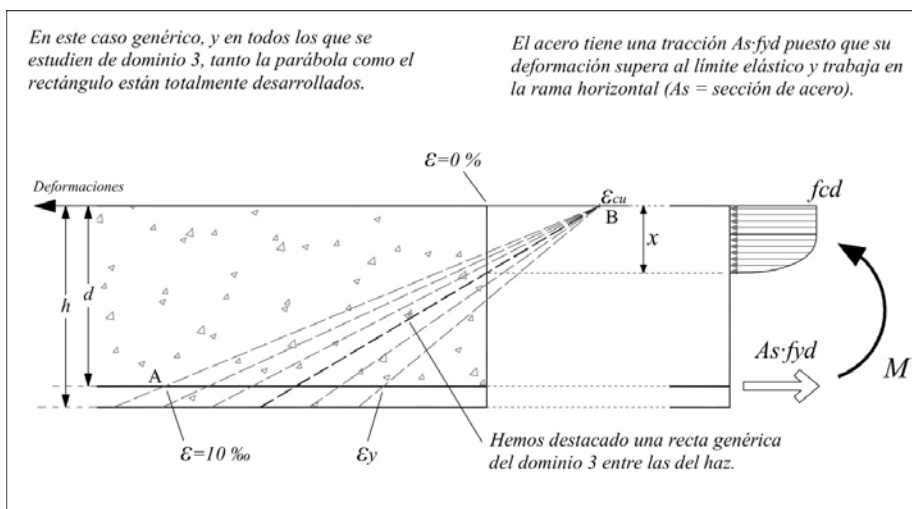


fig. 2.4

Dominio 3 con diagrama rectangular:

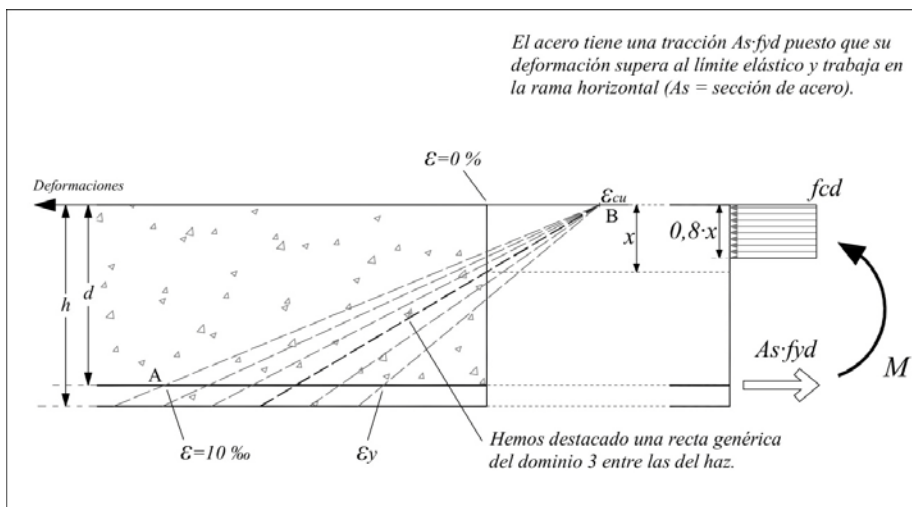


fig. 2.5

Dominio 4 con diagrama parábola-rectángulo:

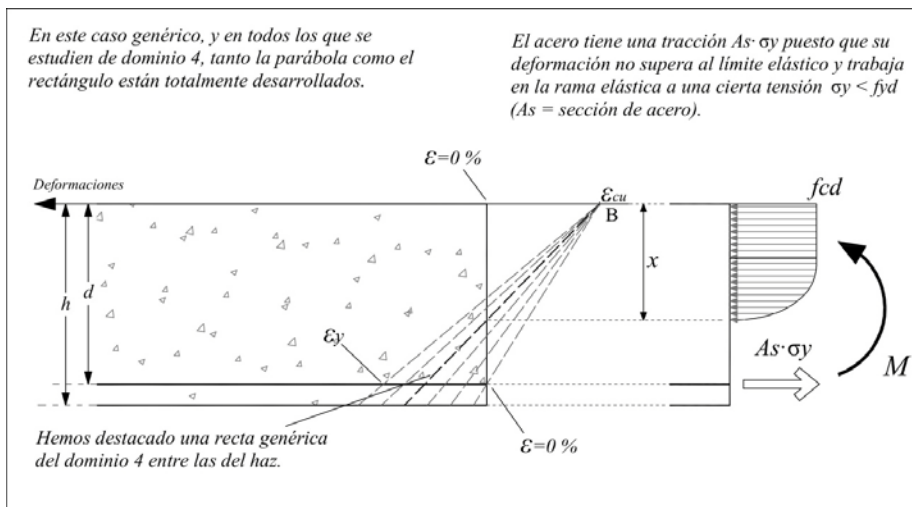


fig. 2.6

Dominio 4 con diagrama rectangular:

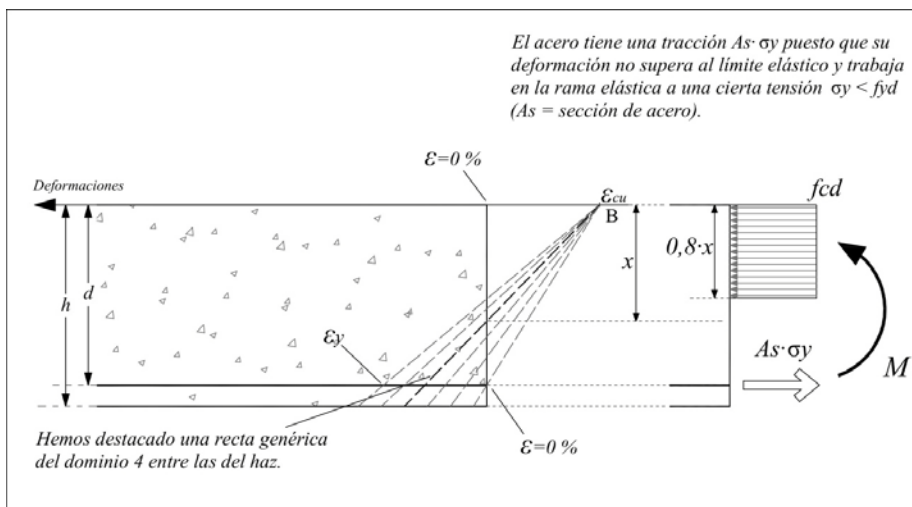


fig. 2.7

Por último añadir una aclaración referente al sentido de las solicitaciones y esfuerzos: lo razonable sería que las compresiones en el hormigón se opusiesen a la flecha del momento tal cual está colocada. Sin embargo, podemos apreciar que en el dibujo está al revés, con los esfuerzos con el sentido en el que están dibujados, realmente parece que el momento que generarían tiene el mismo signo que el momento externo, y por tanto al hacer la sumatoria de momentos se acumularían en lugar de anularse. Esto se debe a que es tradición dibujar el macizo de compresiones enfrente a la línea de la sección. Igualmente indicar que quizás fuese más lógico dibujar los esfuerzos en el interior de la sección de hormigón (a la izquierda de la línea vertical de la sección) y las solicitaciones en el exterior, y no como aquí, que se han dibujado las dos del mismo lado. Esto se ha hecho así por mantener el dibujo más limpio y claro, pues así podemos poner cotas del lado izquierdo y las líneas de proyección que nos relacionan los esfuerzos con el diagrama donde aparece la deformada. En cualquier caso creemos que comprender este equilibrio no es difícil, y una vez que el alumno tenga las ideas claras de cuales son los esfuerzos y solicitaciones externas y como funciona el equilibrio, le será indiferente como esté representado el gráfico.

2.3 Ecuaciones del problema de dimensionamiento en flexión simple en secciones rectangulares:

Como ya dijimos anteriormente, a nivel de cálculo tan sólo plantearemos las ecuaciones para el diagrama rectangular, pero el desarrollo para el diagrama parábola-rectángulo es equivalente, tan sólo hay que seguir las expresiones de dicho diagrama y tener los conceptos muy claros. Por tanto el hecho de que aquí se exponga todo para diagrama rectangular no exime al alumno de conocer el parábola-rectángulo y saber utilizarlo.

A continuación vamos a plantear las ecuaciones para el caso en el cual no se instala o se desprecia la armadura de compresión (siempre habrá alguna barra instalada, aunque sea como armadura de piel). Con este supuesto se puede trabajar en los tres dominios que nos ocupan, pero ya veremos que en el caso del dominio 4 no estamos aprovechando correctamente los materiales y por tanto posteriormente analizaremos esta situación y mostraremos como solucionarla mediante armado de compresión.

Cabe decir, que cuando nos enfrentamos a un problema de dimensionamiento de hormigón armado, dadas unas ciertas solicitaciones, no sabemos si la solución del mismo requiere armado de compresión o no (esto no es dato, es una consecuencia del cálculo), y por tanto, y dado que la situación sin armadura de compresión es más simple de tratar, siempre empezaremos el problema formulando la hipótesis de ausencia de armadura de compresión, y si llegado el caso vemos que sí se requiere, aclararemos que la hipótesis era falsa y continuaremos el problema ya sabiendo que se requiere armado en ambas caras.

Dimensionamiento a flexión simple en ausencia de armadura de compresión:

Vamos a dar por conocidos, ya sea directamente como datos del enunciado, o indirectamente (habiendo realizado algún cálculo previo: mayoración de cargas, determinación del recubrimiento,...), los siguientes datos de partida:

- M_d : Momento de diseño, mayorado según se vio en el tema 0.
- h , b , d : canto, ancho y canto útil (h – recubrimiento al eje de los aceros de flexión)
- f_{cd} : resistencia de cálculo del hormigón explicada en el tema 0.
- f_{yd} : resistencia de cálculo del acero explicada en el tema 0.
- E_s : módulo de Young del acero de valor 200000 N/mm^2 .

Siendo la incógnita a determinar A_s , que representa la superficie de acero de resistencia f_{yd} a instalar a una distancia d de la fibra más comprimida para que la sección no llegue al estado de agotamiento (estado de rotura), o lo que es lo mismo, para que todos sus materiales estén por debajo de sus deformaciones últimas.

Por tanto los datos necesarios serían los del gráfico inferior:

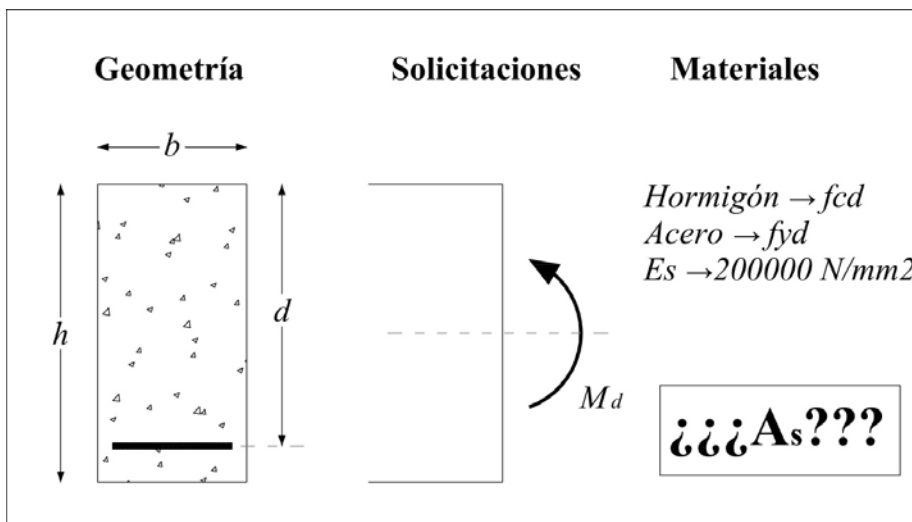


fig. 2.8

A partir de aquí lo que vamos a hacer es plantear un estado de esfuerzos genérico, que podría ser de cualquier dominio. Como vamos a emplear un diagrama rectangular esto es muy fácil (para cualquier dominio las compresiones serán un rectángulo de altura $0,8 \cdot x$ y ancho f_{cd}). En cuanto al acero, no sabemos si nos encontramos en el dominio 2 o 3, en los cuales trabaja a tensión f_{yd} o en el dominio 4, donde trabaja a una tensión genérica σ_y , y por tanto tomaremos como tensión la genérica, σ_y , y posteriormente veremos si la misma vale f_{yd} o menos. Conforme a lo anterior el diagrama de esfuerzos sería el representado en la siguiente figura:

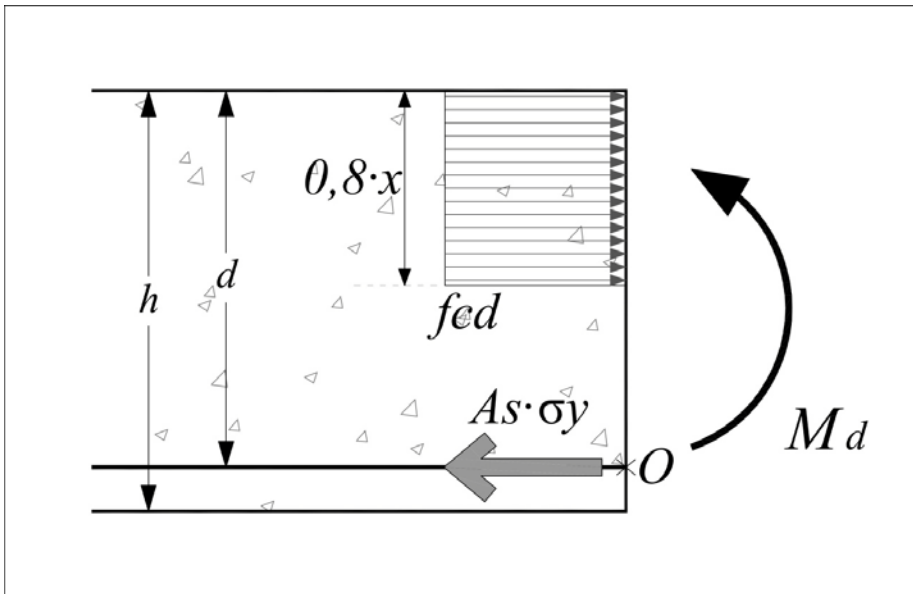


fig. 2.9

Ahora pasamos a plantear las ecuaciones de equilibrio, que en este caso serán de equilibrio de momentos y de fuerzas horizontales, puesto que no hay ninguna fuerza en el eje vertical. Empezaremos en ese orden, comenzando con los momentos respecto al punto O del dibujo. ¿Por qué con respecto a O?, pues porque de este modo $As \cdot \sigma_y$ que actúa en una recta que pasa por O no crea momento, eliminando la fuerza con la que trabajan los aceros, una de nuestras incógnitas. En cuanto a las compresiones del hormigón, estas valen el área del rectángulo de lados " $0,8 \cdot x$ " y " f_{cd} ", multiplicada por el ancho de la pieza b , puesto que estamos viendo un corte de la viga, pero este dibujo tiene profundidad " b ". Por tanto las compresiones del hormigón valdrán $0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b$, y su resultante estará aplicada en el centro de gravedad de dichas compresiones, es decir, si el rectángulo tiene $0,8 \cdot x$ de altura, pues a $0,4 \cdot x$. Con todo ello la figura 2.9 quedaría actualizada a como sigue:

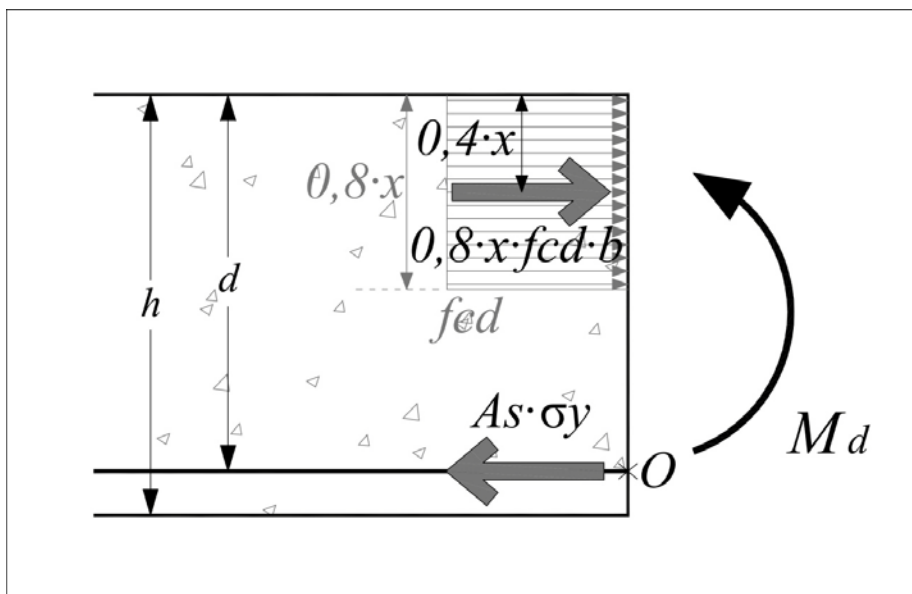


fig. 2.10

Ahora ya planteo el equilibrio de momentos:

$$\sum M_0 = 0$$

$$M_d = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x)$$

Como se puede apreciar, hemos igualado el momento externo al momento que crean las compresiones del hormigón, puesto que como dijimos, respecto a O la tensión del acero no crea momento, pues pasa por dicho punto. La distancia de O al centro de gravedad de las compresiones se saca del dibujo y vale $(d - 0,4 \cdot x)$. En esta ecuación conocemos M_d , f_{cd} , b y d , pues eran datos iniciales, y tan sólo nos falta por conocer la x , que es lo que despejaremos, dando lugar a un polinomio de grado 2 fácil de resolver:

$$\frac{M_d}{0,8 \cdot f_{cd} \cdot b} = d \cdot x - 0,4 \cdot x^2$$

Una vez aquí, con la x hallada, no tenemos más que comprobar con lo visto en el último apartado del tema anterior para determinar el dominio, y con ello saber si el acero trabaja a tensión f_{yd} (dominios 2 y 3) o a una tensión menor σ_y (en el caso del dominio 4).

En el caso de los dominios 2 o 3 la solución sale directa del equilibrio de fuerzas horizontales (lo único no conocido es el área de acero):

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \Rightarrow A_s = \frac{0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b}{f_{yd}}$$

Y a partir de aquí tan sólo habría que convertir el área de acero resultante en un número de redondos que diese un área de acero igual o superior a la obtenida.

En el caso del dominio 4 la cosa se complica un poco más, pues al aplicar equilibrio de fuerzas horizontales pasa lo siguiente:

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot \sigma_y = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \Rightarrow A_s = \frac{0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b}{\sigma_y}$$

Y en esta ecuación hay dos incógnitas, A_s y σ_y , debiendo calcular primero la última para hallar el área de acero. Esta tensión en el acero se obtiene a partir de la deformación del mismo, que sacaremos de la ley de deformación mediante una equivalencia de triángulos, puesto que conocemos el dominio en el que nos encontramos y la profundidad de la fibra neutra:

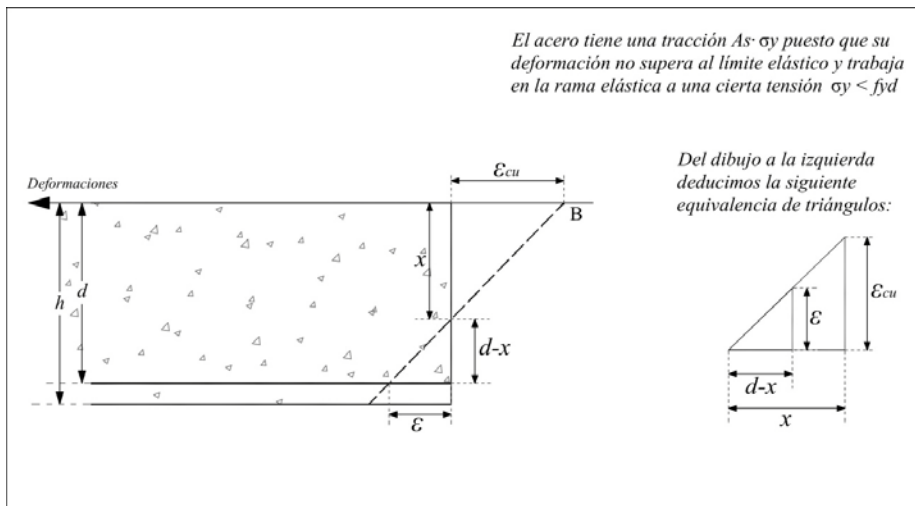


fig. 2.11

Por tanto, y según los triángulos de la figura superior:

$$\frac{\varepsilon}{d-x} = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (d-x)}{x}$$

A partir de esta deformación y puesto que sabemos que el acero se encuentra en la rama elástica de su diagrama tensión deformación (rama inclinada), podemos calcular gracias a la ley de Hooke la tensión a la que trabaja el acero:

$$\sigma_y = \varepsilon \cdot E_s$$

Y con dicha tensión ya es posible calcular, aplicando sumatoria de fuerzas horizontales, la sección de acero A_s :

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot \sigma_y = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \Rightarrow A_s = \frac{0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b}{\sigma_y}$$

Llegados a este punto, resulta muy ilustrador realizar un ejercicio de dimensionamiento en dominio 4 (en las prácticas aparece uno) y comprobar, que debido a que el acero no trabaja a su límite elástico, la cantidad de sección de acero a emplear se dispara considerablemente, llegando al punto de ser difícil de instalar en la sección.

Dimensionamiento a flexión simple pudiendo instalar armadura de compresión:

Para remediar este asunto, podremos instalar una armadura en la fibra comprimida llamada armadura de compresión, que no hace otra cosa que absorber parte de las compresiones del hormigón y con ello “subir la fibra neutra”, pudiendo “abandonar” el dominio 4 y “regresar” al dominio 3.

Cuando planteamos equilibrio de momentos, lo que intentamos es que el momento externo se equilibre con otro debido a las tensiones de los materiales comprimidos. Si el único material comprimido es el hormigón, este necesitará ejercer unos ciertos esfuerzos para equilibrar el momento externo, y esto determinará una cierta x . Si además de este hormigón aparece una cierta sección de acero que colabora a compresión, el hormigón deberá aportar menos esfuerzos, pues el acero aporta la otra parte, y con ello la x disminuirá.

El alumno pensará que el hecho de que el acero ocupe una parte del área comprimida de hormigón hace que quede menos espacio para las compresiones del hormigón, y aunque estas sean menores, al no poder usar las áreas ocupadas por los aceros, puede que la x

no disminuya. El hecho es que si instalamos el acero cerca de la fibra más comprimida del hormigón, tendrá una deformación cercana a ε_{cu} , y con ello muy superior a su límite elástico ε_y , por lo que el acero de compresión trabajará en la rama horizontal de la zona de compresión del diagrama, y por tanto a una tensión f_{yd} . Esta tensión es del orden de 10 o 15 veces superior a la f_{cd} del hormigón, lo cual equivale a decir que un cm^2 de acero absorbe las mismas tensiones que entre 10 y 15 cm^2 de hormigón, y es así que poniendo acero de compresión hacemos disminuir rápidamente el área de hormigón comprimido, y con ello la profundidad de la fibra neutra.

La pregunta ahora sería, ¿cuáles son los pasos a seguir? Y ¿cuál es la manera de determinar que área de acero de compresión es necesaria? Puesto que sólo contamos con dos ecuaciones (la de equilibrio de momentos y la de equilibrio de fuerzas horizontales), y tenemos dos incógnitas: la profundidad de la fibra neutra y A_s , el área de la armadura de tracción, en el momento que añadiésemos a este sistema A'_s , que es el área de armadura a compresión, el sistema se convertiría en indeterminado y no seríamos capaces de resolverlo (faltaría una ecuación).

Pero si lo pensamos un poco más, hay una cosa que conocemos: nosotros queremos que el acero esté totalmente aprovechado, es decir, que trabaje a capacidad mecánica (f_{yd} , o lo que es lo mismo que trabaje en la rama horizontal). Por el tema anterior sabemos que esto sólo ocurre cuando $x < x_{lim}$. También recordamos que la recta $x = x_{lim}$ equivale a la frontera entre el dominio 3 y 4, y por tanto si $x < x_{lim}$ ya estaríamos en el dominio 3. Es pues de aquí que sale la condición que necesitamos para resolver el sistema: daremos una de las incógnitas, la x , por conocida, y de valor $x = x_{lim}$, con lo que el acero de tracción estaría justo en su límite elástico (ε_y , punto donde se unen la rama inclinada y horizontal del diagrama tensión-deformación). ¿Por qué ir tan justos? Es decir, ¿por qué en vez de a la frontera del dominio 3-4 no “mando” la sección al dominio 2? Pues porque esto implica instalar más armadura de compresión, y en esta asignatura hemos de aprender a optimizar recursos: si con esto llego a mi objetivo de hacer que el acero de tracción trabaje a f_{yd} , es suficiente. Además, puesto que los aceros están normalizados, y la sección de acero a compresión que me salga de los cálculos difícilmente va a coincidir con un número exacto de barras, tendré que aproximar por exceso: ya tendremos ahí un pequeño margen que nos garantiza que en vez de en la frontera entre los dominios 3 y 4, la sección está en el interior del dominio 3.

Resumiendo, vamos a plantear el equilibrio igual que en el caso sin armadura de compresión, pero cambian las incógnitas: ahora lo desconocido es A_s y A'_s , y conozco que $x = x_{lim}$. Modifico la figura 2.10 para incorporar la armadura de compresión:

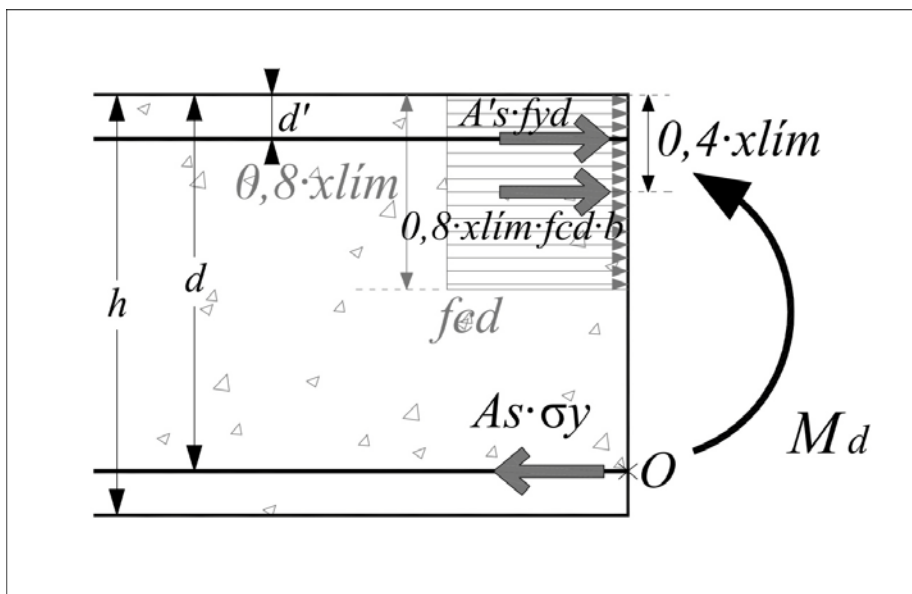


fig. 2.12

Aclarar, que d' representa el recubrimiento (que consideramos de manera genérica idéntico en la fibra comprimida y traccionada, en el caso de ser diferente, reescribir las ecuaciones con d'_1 y d'_2 no plantea la menor dificultad), y que x_{lim} se calcula a partir de una equivalencia de triángulos como ya se planteó en el tema anterior.

La manera de proceder sería la siguiente: definimos momento límite (M_{lim}) como el momento externo que daría en la sección, sin armado de compresión, una profundidad de la fibra neutra igual a x_{lim} . Este momento se puede calcular fácilmente por equilibrio de momentos:

$$M_{lim} = 0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim})$$

Donde la única incógnita es M_{lim} , con lo cual, puedo hallarla. Este sería el mayor momento externo para el cual la sección se encuentra en dominio 3, y por tanto no requiere armado de compresión. Todo lo que exceda de este momento límite deberá ser absorbido por el acero de compresión, es decir: si nos encontramos en el dominio 4 $M_d > M_{lim}$, y la diferencia $M_d - M_{lim}$ deberá ser equilibrada en la sumatoria de momentos por el momento que genera el armado de compresión, y el resto, es decir M_{lim} será lo que equilibre el momento generado por las tensiones del hormigón. Por tanto las ecuaciones serían las siguientes:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$M_{lim} = 0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim})$ El hormigón equilibra un momento de valor M_{lim} , con lo que la profundidad de la fibra neutra es x_{lim}

$M_d - M_{lim} = A'_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$ El acero de compresión equilibra lo que falta para M_d , es decir $(M_d - M_{lim})$

De esta última ecuación puedo obtener el armado de compresión, A'_s . Ahora obtengo mediante el equilibrio de fuerzas horizontales cuanto vale A_s (puesto que hemos forzado que $x = x_{lim}$, podemos asegurar que A_s trabaja a f_{yd}):

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b + A'_s \cdot f_{yd} \Rightarrow A_s = \frac{0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b + A'_s \cdot f_{yd}}{f_{yd}}$$

Podemos observar que en todo este proceso se ha realizado una pequeña simplificación, que es la siguiente: el rectángulo en el cual el hormigón presenta compresiones se ha considerado con dimensiones $0,8 \cdot x_{lim} \cdot b$, sin tener en cuenta que dentro de dicho rectángulo se han instalado unos aceros de compresión que ocupan parte de esa superficie. Por tanto, lo estrictamente correcto hubiese sido tener en cuenta estos huecos al calcular las compresiones del hormigón. El problema es que esto complica mucho las ecuaciones, puesto que, de tenerlo en cuenta, el centro de gravedad de las compresiones del hormigón ya no estaría a $0,4 \cdot x$ de la fibra más comprimida, y habría que calcularlo. Como el área ocupada por los aceros de compresión es del orden de algunos cm^2 y generalmente el área comprimida puede ser del orden de centenas de cm^2 , lo más normal es despreciar este efecto y tomar la aproximación como buena. Si no desea hacerse así, o bien se calculan las compresiones del hormigón y su centro de gravedad descontando los aceros, o bien, lo que sería bastante más fácil, aunque conceptualmente menos correcto, se calculan las compresiones del hormigón como si no hubiese aceros de compresión, y posteriormente se calculan las compresiones de los aceros tomando como tensión de trabajo de estos $f_{yd} - f_{cd}$, para descontar así la parte de tensión que ya hemos considerado en estos espacios para el hormigón. El resultado por estos dos métodos es el mismo.

2.4 Ecuaciones del problema de dimensionamiento en flexión simple en secciones no rectangulares. Secciones en T:

Hasta ahora tan sólo se han visto problemas de armado en secciones rectangulares, que si bien son muy abundantes en la práctica normal, también es cierto que hay múltiples casos que escapan a esta geometría. El problema de dimensionamiento siempre se realiza igual, independientemente de que forma tenga la sección, y por tanto, lo que

recomendamos, es que se comprenda bien en concepto y de donde salen las ecuaciones, y así podría realizarse cualquier problema de hormigón, para cualquier geometría (con más o menos esfuerzo, claro está).

En definitiva, al cambiar de geometría, lo que suele cambiar generalmente es para empezar, que la pieza ya no tiene un rectángulo donde se acumulan compresiones de dimensiones $0,8 \cdot x \cdot b$, sino que esta región tendrá cualquier otra forma. Este hecho crea dos problemas, que en el fondo es casi uno sólo: el área de dicha superficie será más difícil de hallar (un rectángulo tiene de área base \times altura, lo cual simplificó mucho el problema) y el centro de gravedad de las compresiones será también más complicado de conseguir (en el rectángulo el centro de gravedad se encontraba a mitad de la altura). En general, estos dos problemas se solucionan resolviendo dos integrales, a no ser, que la pieza que estemos calculando tenga una geometría formada a base de rectángulos y triángulos, que son figuras con área conocida y posición del centro de gravedad igualmente conocida, con lo cual podríamos sustituir dichas integrales por una sumatoria de las resultantes y otra de las coordenadas de los centros de gravedad de cada figura ponderados por su área.

En este apartado vamos a ver en profundidad el caso de las secciones en T, en las cuales podemos sustituir las integrales por sumatorias (en los casos en que las compresiones no llenen ni siquiera las alas de la T, no es necesario ni siquiera las sumatorias) puesto que son de gran utilidad en la práctica normal: vigas, forjados, incluso tubos son secciones en T o asimilables a una sección en T. Igualmente hablaremos de por qué se trata de una sección tan popular, razón que no es otra que porque permite un ahorro de material, en este caso de hormigón, en las zonas donde este no trabaja (zonas a tracción), o lo que es lo mismo, dada una misma cantidad de hormigón, esta sección otorga mayor inercia y mayor canto útil que la rectangular. En todo caso, antes de empezar con las T, veamos en el gráfico siguiente como se abordaría un problema general de una sección no rectangular:

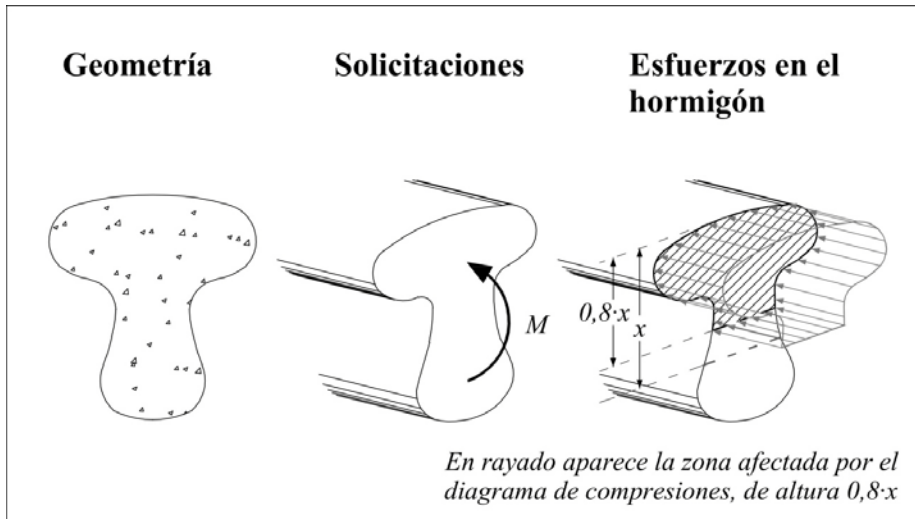


fig. 2.13

Como se puede imaginar, para la pieza de la figura, las ecuaciones se plantearían a partir de un diferencial de área multiplicado por f_{cd} (diferencial que estaría en el área que aparece rayada, la que tiene tensiones de compresión), y posteriormente integrando dicho diferencial en el área que aparece rayada. Con ello se obtendría el volumen global de compresiones.

Además de esto necesitaríamos el centro de gravedad de dichas compresiones, el cual se obtiene multiplicando el diferencial de área por su distancia a la fibra más comprimida, e integrando dicha expresión para todo el área rayada. El resultado obtenido deberá ser dividido por el área rayada (conseguida a partir de la primera integral, dividida entre f_{cd}) para obtener como resultado la distancia de la fibra más comprimida al centro de gravedad. Una puntualización importante: hemos partido de la idea, sin decirlo, que las piezas son simétricas con respecto a un eje vertical, puesto que si no, no sólo necesitaríamos la posición vertical del centro de gravedad de las compresiones, sino también la horizontal (que suponemos en el eje de simetría). En general todas las piezas que estudiemos cumplirán la hipótesis de geometría y carga simétricas respecto a un eje vertical, puesto que de lo contrario aparecerían una serie de torsiones que, aunque habituales en la vida profesional, no estudiaremos en esta asignatura.

Cálculo de la sección en T:

Después de este planteamiento general pasamos ya al cálculo de la sección en T como caso particular y muy abundante en la vida profesional. Vamos a estudiar a continuación una sección en T sin cartabones (pequeños triángulos que aparecen bajo el contacto entre la tabla y el nervio de la T). Por tanto nuestro problema obedece al dibujo siguiente:

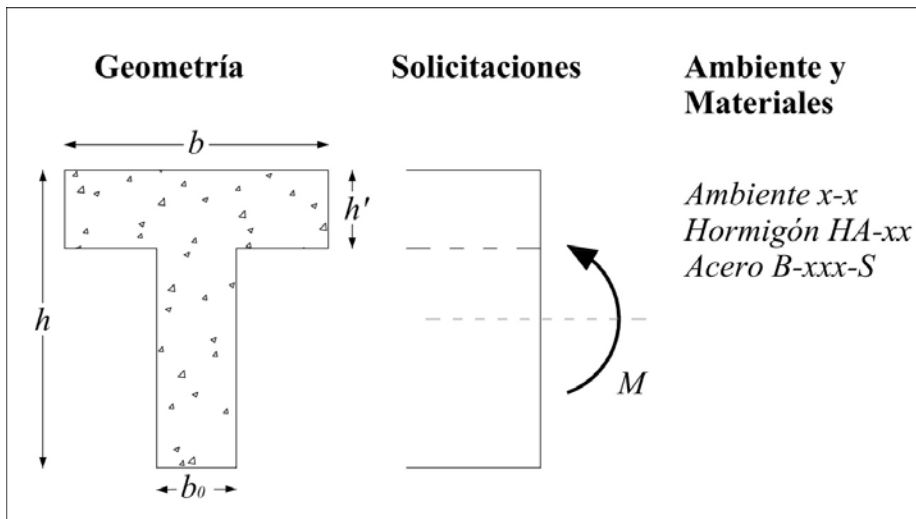


fig. 2.14

A partir de aquí empezaremos a plantear el problema de hormigón armado. En primer lugar vamos a aclarar un punto importante del funcionamiento de una sección en T: las secciones en T están pensadas para que la fibra más comprimida esté en la tabla (es decir, en el extremo que tiene como ancho b), y no en el nervio (extremo que tiene como ancho b_0), ¿Por qué es esto? Esto se debe a que nos interesa distribuir una cierta superficie de compresiones que necesitaremos para equilibrar la sección, cuyo centro de gravedad esté lo más alejado posible del acero de flexión, es decir, hemos de maximizar el término $(d-0,4 \cdot x)$. Veámoslo en la siguiente figura:

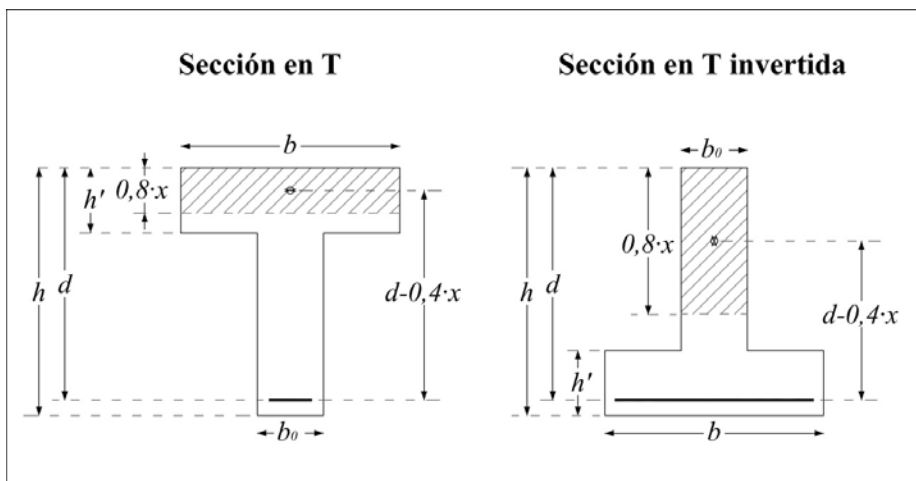


fig. 2.15

En la figura podemos apreciar una sección en T y otra en T invertida con las mismas dimensiones (la sección en T tiene la compresión máxima en la tabla y la sección en T invertida en el nervio, en cualquier caso la mayor compresión está en ambas en el extremo superior). En ambas se ha dibujado el mismo área de compresión con una trama rayada (en la T invertida, al tener menos ancho la parte comprimida, la altura de la misma ha de ser mayor), dicha área, igual en ambas la denominaremos $A_{\text{compresiones}}$. Es evidente que en la T invertida la distancia $d-0,4 \cdot x$ resulta inferior que en la T normal, y planteando nuestras ecuaciones, al hacer equilibrio de momentos obtendríamos la siguiente expresión:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$M_d = A_{\text{compresiones}} \cdot f_{cd} \cdot (d - 0,4 \cdot x)$$

Si en ambas secciones f_{cd} es igual, pues son del mismo hormigón, y como hemos planteado $A_{\text{compresiones}}$ es igual, en la sección en T invertida, al tener menor término $d-0,4 \cdot x$, el momento de diseño habrá de ser menor. Razonando a la inversa, para soportar el mismo momento de diseño, con una sección idéntica en dimensiones y calidad de hormigón, la sección en T invertida necesitará un $A_{\text{compresiones}}$ mayor que la sección en T. Si ahora planteamos el equilibrio de fuerzas horizontales tendríamos:

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot f_{yd} = A_{\text{compresiones}} \cdot f_{cd}$$

Lo que quiere decir, que si la sección en T invertida tiene para el mismo momento de diseño mayor $A_{\text{compresiones}}$ también necesitará una armadura mayor para compensarla. Por tanto el uso de secciones en T invertida es antieconómico, y sólo se empleará en casos donde una necesidad específica lo requiera.

Esto nos plantea una nueva pregunta, si el problema funciona así, ¿por qué no hacer secciones en T con alas de la tabla muy largas, de manera que acojan muchas compresiones y mantengan el centro de gravedad de las mismas muy lejos de la armadura? La respuesta es que a medida que vamos alargando las alas de la T, estas no consiguen comprimirse al máximo: en una pieza rectangular la compresión tiene como magnitud f_{cd} , en una pieza en T con alas moderadas podemos considerar que igualmente las compresiones poseen un valor f_{cd} , pero si las alas aumentan, la compresión valdrá f_{cd} junto al nervio, y a medida que nos vamos alejando hacia los extremos de las alas la compresión valdrá menos. Esto plantea un problema de cálculo, que es resuelto por la norma de la siguiente manera: se definirá una magnitud llamada ancho eficaz (b_e), si el ancho real (b) es menor que b_e conservaremos el valor b a efectos de cálculo, sin embargo, si $b_e < b$, entonces tomaremos como valor de ancho de la tabla a efectos de

cálculo el ancho eficaz (b_e). La definición del ancho eficaz se encuentra en el artículo 18.2.1 de la norma, y establece que en general, para piezas sin cartabones ni vigas de borde el ancho eficaz será igual al ancho del nervio (b_0) más un quinto de la distancia entre puntos de momento nulo de la viga (se determinan a partir de la ley de momentos de cargas permanentes). El resto de casos se recoge en el artículo citado de la normativa.

A partir de aquí, por simplicidad, escribiremos las ecuaciones partiendo de la idea de que $b < b_e$ y que por tanto no hace falta realizar corrección ninguna, y a efectos de cálculo usamos el ancho real, b . Esto lo hacemos en este documento por no duplicar formulación, pero es al alumno, comprobar para cada ejercicio o caso práctico que esta hipótesis se cumple, y en el caso de no ser así, sustituir b por b_e y continuar los cálculos con este valor.

Como hemos visto de las ecuaciones planteadas, el cálculo de una sección en T se enfoca exactamente igual que el cálculo de una sección rectangular, variando tan sólo el hecho de que, en el caso de que comparemos una sección en T con una rectangular con misma área (misma cantidad de hormigón empleado), el centro de gravedad de las compresiones se encuentra más alejado de la armadura en el caso de la T, ganando con ello canto útil y por tanto reduciendo la cantidad de acero.

Por tanto el cálculo para de secciones en T como las de la figura es idéntico al de las rectangulares, pero, ¿qué pasaría si las compresiones se meten en el nervio? Este caso no está recogido en lo anterior, y por tanto vamos a estudiarlo a continuación (en los casos que estudiamos a continuación consideramos que la armadura trabaja a capacidad mecánica, si no fuese así se opera igual que en secciones rectangulares):

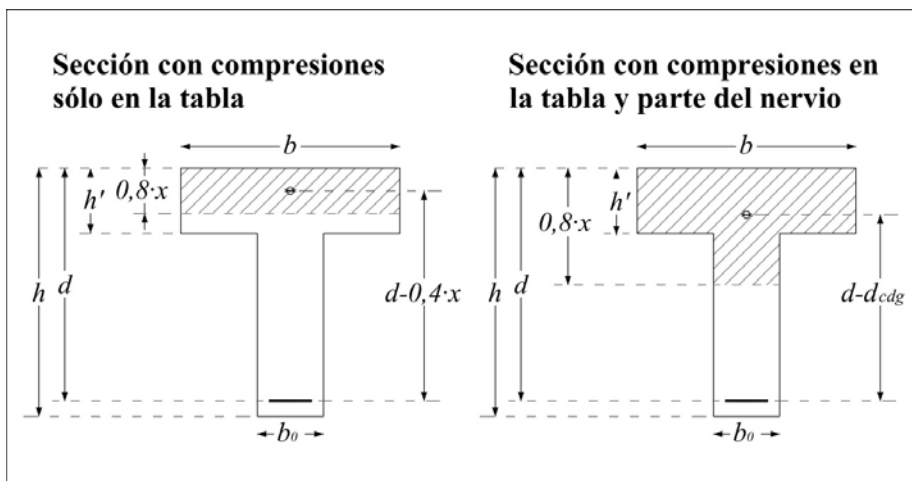


fig. 2.16

Por tanto vamos a estudiar ambos casos por separado, aunque cuando sólo existen compresiones en la tabla ya hemos visto que responde a la misma formulación que las secciones rectangulares:

Sección con compresiones sólo en la tabla:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$M_d = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x) \Rightarrow x?$$

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \Rightarrow A_s = \frac{0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b}{f_{yd}}$$

Sección con compresiones en la tabla y parte del nervio:

En este caso el área comprimida no obedece a $0,8 \cdot x \cdot b$, sino a la suma de dos rectángulos:

$$A_{compresiones} = h' \cdot b + (0,8 \cdot x - h') \cdot b_0$$

Del mismo modo, el centro de gravedad de las compresiones no se encuentra a $0,4 \cdot x$ de la fibra más comprimida, pues ya no es un rectángulo, sino a:

$$d_{cdg} = \frac{\sum A_i \cdot d_i}{\sum A_i} = \frac{h' \cdot b \cdot \frac{h'}{2} + (0,8 \cdot x - h') \cdot b_0 \cdot (h' + \frac{0,8 \cdot x - h'}{2})}{h' \cdot b + (0,8 \cdot x - h') \cdot b_0}$$

Y con esto ya podemos plantear el equilibrio:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$M_d = A_{compresiones} \cdot f_{cd} \cdot (d - d_{cdg}) \Rightarrow x?$$

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot f_{yd} = d_{cdg} \cdot f_{cd} \Rightarrow A_s = \frac{d_{cdg} \cdot f_{cd}}{f_{yd}}$$

2.5 Ecuaciones del problema de comprobación en flexión simple en secciones rectangulares:

Hasta ahora nuestro problema ha consistido siempre en calcular una cierta armadura resistente dada una sección con ciertas características y unas solicitaciones a resistir (en el caso de flexión simple tan sólo el momento flector). Es evidente que en el proceso de diseño este será el caso habitual, pues partiremos en cierto modo de un folio en blanco. Sin embargo, el problema inverso, en el que partiendo de una cierta cantidad de armado hemos de determinar cual será el momento máximo que es capaz de resistir (lo llamaremos momento último) es igualmente muy habitual. Por ejemplo, en el mercado existen multitud de elementos prefabricados, como por ejemplo vigas, cuyos armados están fijados, y aunque el fabricante suele suministrar los valores de carga admisible, puede ser interesante, y por seguridad necesario, realizar un recálculo. Igualmente en remodelación de edificios, puede ser normal un cambio de uso de los mismos, y con ello un cambio en las cargas a los que están sometidos, y por tanto habremos de verificar que el armado ya instalado es capaz de someterse a ellas.

El hecho de que presentemos aquí solamente la solución de estos problemas para el caso de secciones rectangulares, es debido a que se trata de presentar un procedimiento, y no un formulario, por tanto invitamos al alumno a hacer lo mismo para secciones en T o de diversas geometrías, pues el proceso es el mismo. En la presente asignatura es fundamental haber asimilado los razonamientos y ser capaz de obtener las ecuaciones a partir de sencillos esquemas de los esfuerzos y las solicitaciones, sería un despropósito memorizar o incluso trabajar con formularios para estos ejercicios. A continuación exponemos el problema tanto en el caso de ausencia o desprecio de armado de compresión, como en el que si contamos con dicho armado:

Caso con ausencia o desprecio de armadura de compresión:

Empezaremos de manera opuesta a como lo hacíamos en los problemas de dimensionamiento, es decir, empezaremos por la sumatoria de fuerzas horizontales en lugar de por la sumatoria de momentos. Aquí, habremos de hacer una suposición igual que la que hacíamos en dimensionamiento: supondremos que el acero trabaja a capacidad mecánica (f_{yd}), puesto que la tensión del acero aparece en esta ecuación y hay que fijarla de algún modo:

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b$$

Observamos que aquí conocemos todo menos la x , pues el armado, las características de los materiales y la forma de la sección son conocidos, despejamos pues la x :

$$A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \Rightarrow x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,8 \cdot f_{cd} \cdot b}$$

A partir de este valor de x obtenido, comprobaremos que nuestra hipótesis era correcta, es decir, comprobaremos que $x < x_{\text{lim}}$.

En el caso de que esto sea cierto, estaremos en los dominios 2 o 3, y calcular el momento último es muy simple mediante la sumatoria de momentos, una ecuación donde ya todo es conocido:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$M_u = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x)$$

En el caso de que la hipótesis no se cumpla, y estemos en el dominio 4, habremos de jugar con las ecuaciones no sólo de equilibrio, sino también las de compatibilidad, que obteníamos de la equivalencia de triángulos (véase de nuevo la imagen 2.11). Empezamos con la sumatoria de fuerzas horizontales, donde no conocemos ni x ni σ_y :

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot \sigma_y = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \quad [\text{I}]$$

De la equivalencia de triángulos obtenemos:

$$\frac{\varepsilon}{d-x} = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (d-x)}{x}$$

Y por la ley de Hooke:

$$\sigma_y = \varepsilon \cdot E_s \Rightarrow \sigma_y = E_s \cdot \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (d-x)}{x} \quad [\text{II}]$$

Por tanto, a partir de las expresiones I y II, tendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x, σ_y) que es perfectamente resoluble, y de él sacaremos la profundidad de la fibra neutra (que evidentemente pertenecerá al dominio 4), y que podremos aplicar en la sumatoria de momentos para obtener el momento último:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$M_u = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x)$$

Caso con armadura de compresión:

En este caso, igual que en el anterior, conoceremos las características geométricas y mecánicas de la sección, así como el tipo de acero. Además de esto conocemos A_s y A_s' , las secciones de acero a tracción y compresión respectivamente.

Lo primero es partir de la hipótesis de que tanto A_s como A_s' trabajan a capacidad mecánica, que posteriormente comprobaremos, y de no cumplirse rectificaremos el planteamiento. Empezamos con la sumatoria de fuerzas horizontales:

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b + A_s' \cdot f_{yd}$$

En esta ecuación todos los términos son conocidos excepto la x , por tanto es posible despejarla y comprobar que la hipótesis de partida es cierta, es decir, que $x < x_{lim}$. A partir de aquí es posible realizar el equilibrio de momentos y obtener el momento último:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$M_u = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x) + A_s' \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$$

Aquí se presenta un problema, y es que en el caso de x muy pequeño, la armadura de compresión puede trabajar a menor capacidad que la mecánica, incluso no trabajar o trabajar a tracción. Es por esto que como último paso a realizar, se ha de comprobar mediante equivalencia de triángulos como está trabajando la armadura de compresión, y en el caso de que no trabaje a compresión con capacidad mecánica, suprimir el término $A_s' \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$ de la ecuación anterior (esto va en el lado de la seguridad cuando la armadura de tracción trabaja a menos de capacidad mecánica o no trabaja, aunque es cierto que en el caso marginal de que trabaje a tracción no corresponde a la realidad).

En el caso en que la armadura de tracción no trabaje a capacidad mecánica, es decir, $x > x_{lim}$, habría que trabajar a la vez con las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad:

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$A_s \cdot \sigma_y = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b + A_s' \cdot f_{yd} \quad [III]$$

De la equivalencia de triángulos obtenemos:

$$\frac{\varepsilon}{d-x} = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (d-x)}{x}$$

Y por la ley de Hooke:

$$\sigma_y = \varepsilon \cdot E_s \Rightarrow \sigma_y = E_s \cdot \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (d-x)}{x} \quad [IV]$$

Con las expresiones III y IV, obtendremos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (x , σ_y) que es perfectamente resoluble, y de él sacaremos la profundidad de la fibra neutra (mayor que x_{lim} evidentemente). En este caso al estar en el dominio 4 no corremos riesgo de que la armadura de compresión no trabaje a capacidad mecánica. Este resultado lo utilizaremos en la sumatoria de momentos para obtener el momento último:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$M_u = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x) + A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$$

TEMA 3 – DIMENSIONAMIENTO DE SECCIONES EN FLEXIÓN COMPUESTA

3.1 Planteamiento del problema de dimensionamiento en flexión compuesta:

En la realidad existen bastantes situaciones en las que las estructuras trabajan a flexión simple, como es el caso de vigas apoyadas (no sólo bi-apoyadas, sino de múltiples vanos, como pueda ser un puente de tablero continuo) o piezas de hormigón prefabricado que en un cierto momento estén almacenadas antes de instalarse (una vigueta de edificación o una dovela de un túnel tras haberse fabricado posiblemente se dejen curando en fábrica antes de llevarse a su destino, y durante ese periodo trabajan a flexión simple). Igualmente hay muchas situaciones, en las que pese a que la estructura presenta un cierto axil, se desprecia por simplicidad o por que esté del lado de la seguridad hacerlo, como podría ser el caso de una zapata flexible, a la que la tierra le produce una cierta compresión lateral, pero que generalmente despreciaríamos. Sin embargo, la mayor parte de los cálculos estructurales que podamos realizar en la vida profesional, presentan una flexión compuesta (combinación de momento flector y axil): desde un pilar de un edificio, o una viga bi-empotrada de una estructura con cargas laterales, a un puente arco o la estructura inclinada de una grada de un estadio.

Al igual que en el caso de flexión simple, en flexión compuesta partiremos de los datos correspondientes a las solicitaciones a las que está sometida la sección (teniendo en cuenta la naturaleza de las mismas si necesitamos mayorarlas) que en este caso serán momento flector y axil, normalmente aplicado en el centro de gravedad de la sección, la geometría de la misma y las calidades de los materiales. Igualmente consideraremos conocido el ambiente de exposición que nos permitirá calcular recubrimientos y con ellos parámetros como el canto útil.

Los resultados que se esperan son, en el problema de dimensionamiento, las armaduras necesarias para soportar dichos esfuerzos en la sección dada, cumpliendo los criterios de seguridad exigidos. En la imagen inferior resumimos los datos que necesitamos conocer directa o indirectamente para abordar este problema:

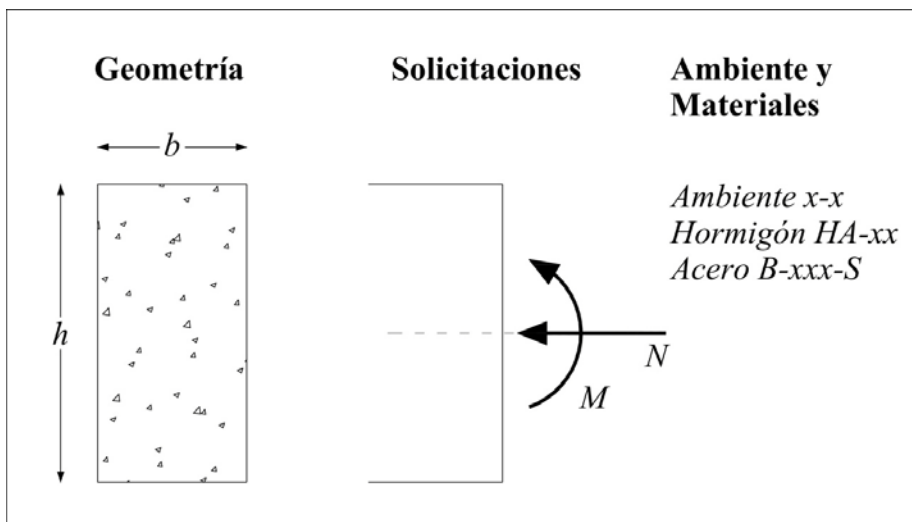


fig. 3.1

La primera diferencia que encontramos entre la flexión simple y la compuesta, es que en flexión simple la pieza podía presentar los dominios de deformación 2, 3 y 4, mientras que en flexión compuesta puede presentar cualquier dominio, desde la compresión pura a la tracción pura, pasando por cualquier estado de flexión. El planteamiento de los dominios 1 y 5 no es difícil, pero aún así vamos a desarrollarlo como hicimos con el resto de dominios en el tema anterior, e ilustrarlo con unos esquemas (los dominios 2, 3 y 4 pueden ser consultados en el tema 2):

Dominio 1 con diagrama parábola-rectángulo y rectángulo (al no haber compresiones coinciden):

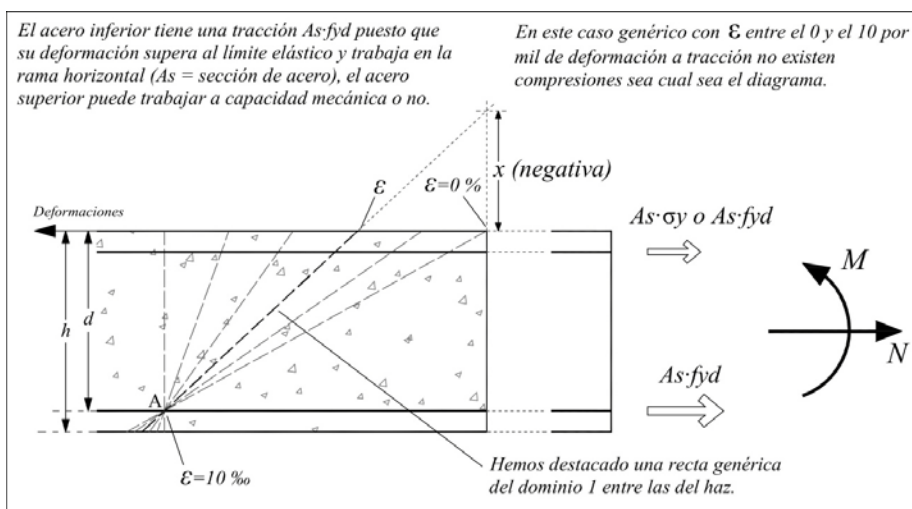


fig. 3.2

Dominio 5 con diagrama parábola-rectángulo:

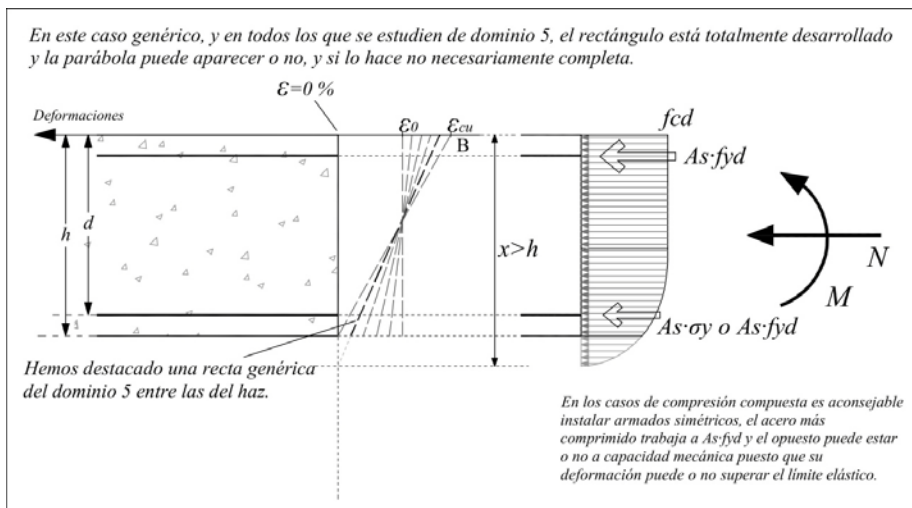


fig. 3.3

Dominio 5 con diagrama rectangular:

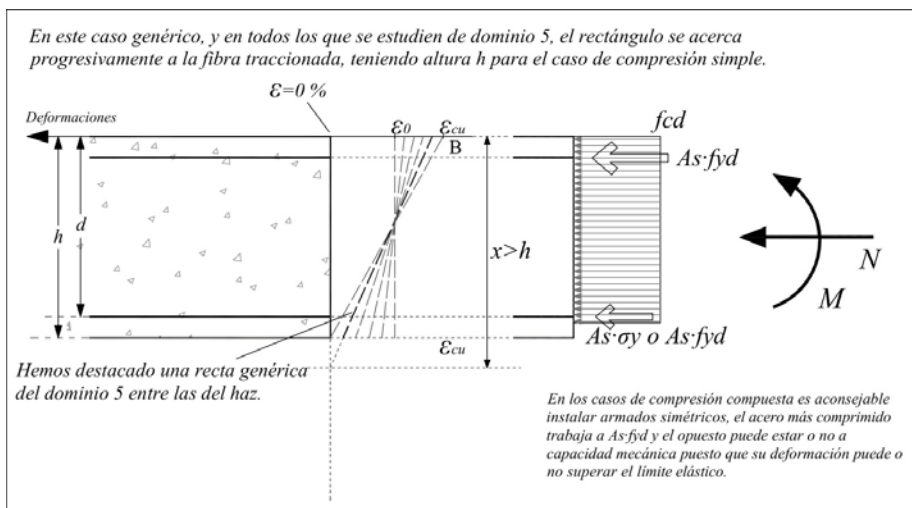


fig. 3.4

En el dimensionamiento en flexión compuesta que nos ocupa aparece una cierta casuística en función de la predominancia del axil sobre el flector o al contrario. Esta

predominancia se mide mediante la excentricidad del axil: en general, como datos se conocerá el momento y el axil aplicado en el centro de gravedad de la sección (es la manera en que aparecen los output de los programas de cálculo de estructuras); pero se podría sustituir este par momento-axil por el mismo axil aplicado a cierta distancia del centro de gravedad que produjese el mismo efecto, esta distancia se denomina excentricidad y obedece a la siguiente expresión:

$$e_0 = \frac{M_d}{N_d}$$

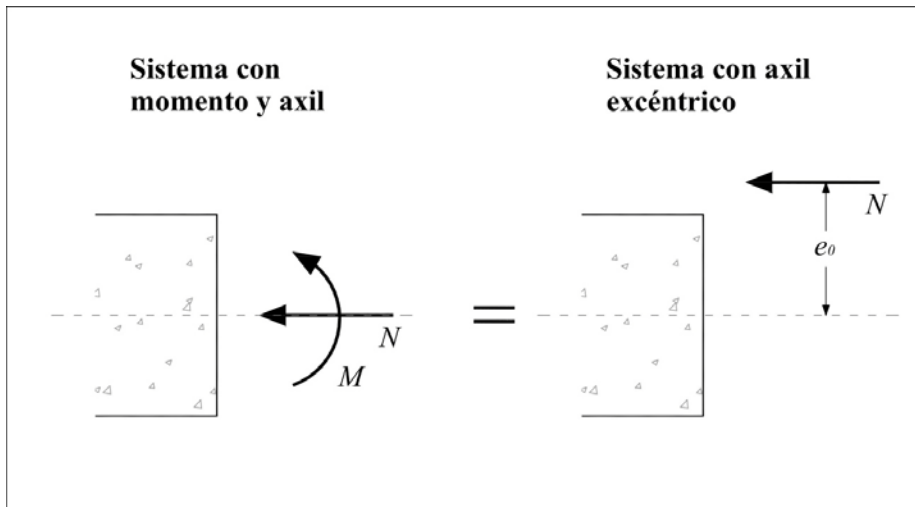


fig. 3.5

Esta excentricidad está medida con respecto al centro de gravedad de la sección, de tal modo que si calculásemos el momento que produce dicha excentricidad de axil obtendríamos de nuevo M_d , y por tanto podemos afirmar que dicho sistema es equivalente con el inicial, al tener igual axil e igual momento con respecto al centro de gravedad de la sección:

$$M' = N_d \cdot e_0 = N_d \cdot \frac{M_d}{N_d} = M_d$$

A partir de aquí se pueden distinguir dos casos:

- Grandes excentricidades: cuando el axil excéntrico está situado por encima del acero de compresión si existe o donde lo situaríamos en el caso de no existir (en el dibujo, teniendo en cuenta que la fibra inferior es la traccionada, de forma general, estaría situada sobre el acero de compresión). En este caso el proceso de dimensionamiento se asemeja mucho al de flexión simple.

- Pequeñas excentricidades: el caso contrario, cuando el axil excéntrico se encuentra por debajo de la armadura comprimida en caso de existir. En este caso aparecen variaciones en el método como veremos posteriormente.

A continuación pasaremos a exponer los dos problemas por separado, planteando sus ecuaciones del mismo modo que lo hicimos en flexión simple:

3.2 Dimensionamiento en flexión compuesta; caso de grandes excentricidades:

A la hora de plantear este problema de dimensionamiento hemos de introducir un nuevo concepto, el de momento de Ehlers. Ya hemos visto como se puede sustituir un par momento-axil por un axil excéntrico, sin variar en absoluto el equilibrio de la pieza. Esta excentricidad que hemos llamado e_0 estaba referida al centro de gravedad de la sección estudiada. Ahora lo que vamos a hacer es referirlo a la armadura traccionada, es decir, medir que distancia existe entre el axil excéntrico y dicha armadura traccionada, obteniendo el siguiente gráfico:

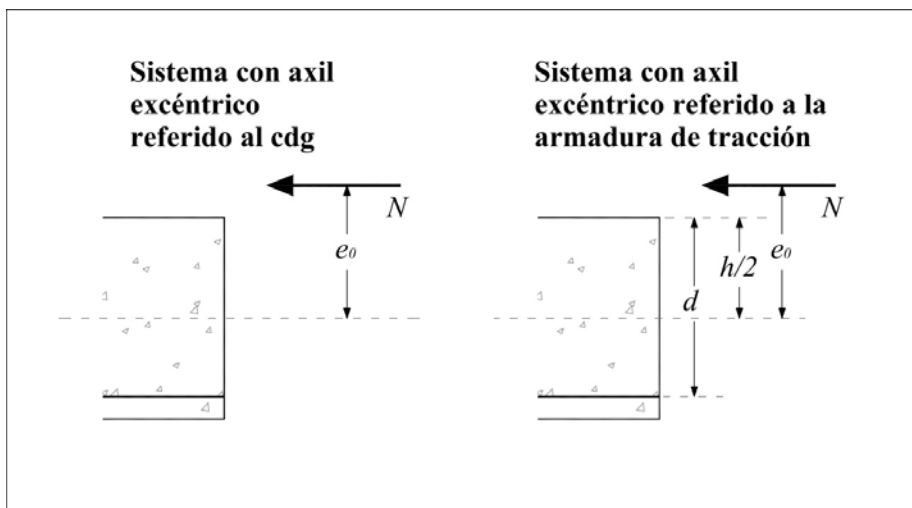


fig. 3.6

Por tanto, como se puede apreciar en la figura, la distancia entre la armadura traccionada y el punto de aplicación del axil excéntrico será: $d+e_0-h/2$. Con esta distancia podemos por tanto formular el valor del momento causado por el axil con respecto a la armadura de tracción:

$$M = N_d \cdot \left(d + e_0 - \frac{h}{2} \right)$$

Este momento será el denominado momento de Ehlers, y nos permitirá asimilar el problema a uno de flexión simple, planteando la ecuaciones de equilibrio de la sección del mismo modo que vimos en el tema anterior, empezando por el equilibrio de momentos y continuando con el de axiles.

En el caso de que la armadura de tracción trabaje a capacidad mecánica ($x < x_{lim}$) bastará con sustituir de las expresiones el momento de diseño por el de Ehlers en el equilibrio de momentos y añadir el axil a la expresión de equilibrio de axiles:

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$N_d \cdot \left(d + e_0 - \frac{h}{2} \right) = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x)$$

$$\frac{N_d \cdot \left(d + e_0 - \frac{h}{2} \right)}{0,8 \cdot f_{cd} \cdot b} = d \cdot x - 0,4 \cdot x^2$$

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$N_d + A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \Rightarrow A_s = \frac{0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b - N_d}{f_{yd}}$$

En el caso de que la armadura de tracción no trabaje a capacidad mecánica ($x > x_{lim}$) y por tanto sea recomendable acudir a armadura de compresión para aprovechar convenientemente toda la sección de acero, se procede de forma similar, obteniendo las siguientes expresiones:

$$M_{lim} = 0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim})$$

$$\boxed{\sum M_0 = 0}$$

$$M_{lim} = 0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim})$$

$$N_d \cdot \left(d + e_0 - \frac{h}{2} \right) - M_{lim} = A'_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d')$$

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$N_d + A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b + A'_s \cdot f_{yd} \Rightarrow A_s = \frac{0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b + A'_s \cdot f_{yd} - N_d}{f_{yd}}$$

Por tanto, como podemos apreciar, este caso de grandes excentricidades no plantea ninguna dificultad una vez dominada la flexión simple, pues con tan sólo conocer el concepto de momento de Ehlers y aplicar equilibrio en el mismo orden que ya lo habíamos hecho, se obtienen las soluciones. A continuación veremos el caso de flexión en pequeñas excentricidades, que introduce algunos cambios.

3.3 Dimensionamiento en flexión compuesta; caso de pequeñas excentricidades:

Como ya se dijo, en este caso el axil está situado por debajo de la línea donde se instalarían los armados de compresión. Cuando nos encontremos en casos de pequeñas excentricidades, es aconsejable optar por instalar ambas armaduras, superior e inferior idénticas, por lo que, en los casos que se exponen a continuación, se cogerá la mayor de ambas y se instalará en las dos caras.

A partir de aquí vamos a diferenciar entre dos casos posibles, según el momento del axil con respecto a la armadura comprimida sea o no mayor que el momento de las compresiones del hormigón si toda la sección estuviese afectada por el diagrama rectangular (caso de rotura en compresión simple) con respecto a la misma armadura. No se trata de una errata el considerar origen del momento la armadura comprimida, en pequeñas excentricidades cambiamos el origen de los momentos y los tomaremos siempre con respecto a este punto. Por tanto, vamos a ver cuando estamos en cada uno de los dos casos apoyándonos en la figura siguiente:

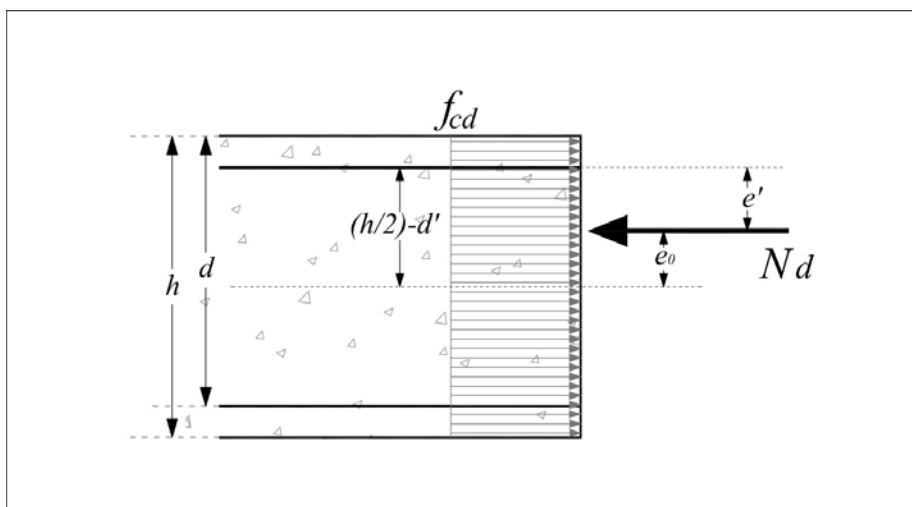


fig. 3.7

En definitiva, estaremos en un caso o en el otro según el valor de $N_d \cdot e'$, o dicho de otro modo, el valor de $N_d \cdot ((h/2) - d' - e_0)$ sea mayor o menor que $h \cdot b \cdot f_{cd} \cdot ((h/2) - d')$. A continuación pasamos a ver ambos casos por separado:

- Cuando $N_d \cdot e' < h \cdot b \cdot f_{cd} \cdot ((h/2) - d')$:

Planteamos el equilibrio tomando momentos con respecto a la armadura de compresión, sabiendo que ambas armaduras serán iguales, pero esto será a efectos de puesta en obra, pues a efectos de cálculo la armadura de tracción la consideraremos igual a 0 (ver ecuación de equilibrio de fuerzas a continuación). El hecho de tomar dicha armadura igual a 0 es porque en este caso nos encontramos en los dominios 4, 4a o 5, donde muchas veces dicha armadura no trabaja a capacidad mecánica y algunas veces trabaja pero muy poco, y en estos casos podemos plantear el equilibrio y resolverlo sin su colaboración. En la siguiente figura se representan los esfuerzos y las distancias a emplear en la formulación:

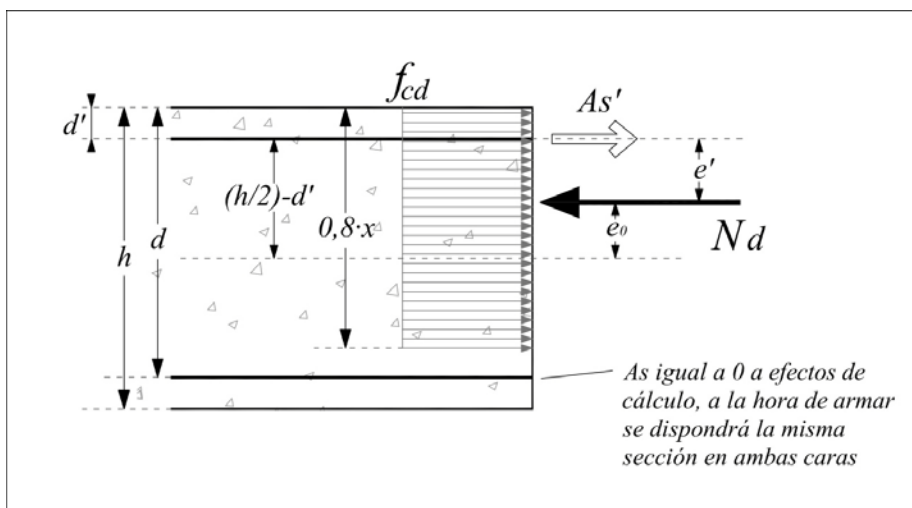


fig. 3.8

En base a este esquema, las ecuaciones de equilibrio quedan de la siguiente manera:

$$\boxed{\sum M_{Acompresión} = 0}$$

$$N_d \cdot e' = b \cdot 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot (0,4 \cdot x - d')$$

$$\boxed{\sum F_H = 0}$$

$$N_d = b \cdot 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} + A'_s \cdot f_{yd}$$

Cabe destacar una limitación especial: f_{yd} ha de ser menor a 400 N/mm^2 .

Esta limitación se aplica a los casos en los que el acero está sometido a compresión simple, pues el hormigón colindante deben de comprimirse solidario al acero. El problema es que como sabemos, el hormigón a compresión simple admite como mucho una deformación a compresión igual a ε_{c0} , que, como vimos en el tema 0 valía:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c0} &= 0,002 & \text{si } f_{ck} &\leq 50 \text{ N/mm}^2 \\ \varepsilon_{c0} &= 0,002 + 0,000085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,50} & \text{si } f_{ck} &> 50 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Quedémonos con el caso de hormigones que no sean de alta resistencia obtenemos $\varepsilon_{c0}=0,002$, y veamos ahora cuanto tiene que deformarse el acero para trabajar a capacidad mecánica, utilizando claro está la ley de Hooke:

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

Siendo el módulo de Young valor $E_s = 200.000 \text{ N/mm}^2$. Por tanto veamos cuanto vale esta deformación para los aceros B500S y B400S:

$$\text{B500S} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{500}{200000} = 0,0025$$

$$\text{B400S} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{400}{200000} = 0,002$$

Es por ello que en compresión simple limitamos la resistencia del acero a 400 N/mm^2 , ya que es justo en este valor de resistencia en el cual el hormigón y el acero llegarían respectivamente a su límite de rotura por compresión y su límite elástico a la vez. Es inútil tener un acero de mejores características trabajando a compresión simple, pues nunca podremos aprovecharlo completamente, dado que el hormigón romperá antes. Está claro que podremos instalar aceros más competentes, pero nunca podremos tener en cuenta ese extra de resistencia en el cálculo, y esa es la causa de la limitación.

- Cuando $N_d \cdot e' > h \cdot b \cdot f_{cd} \cdot ((h/2) - d')$:

En este caso obligamos a la sección a trabajar en compresión simple. Veamos la situación en el siguiente esquema:

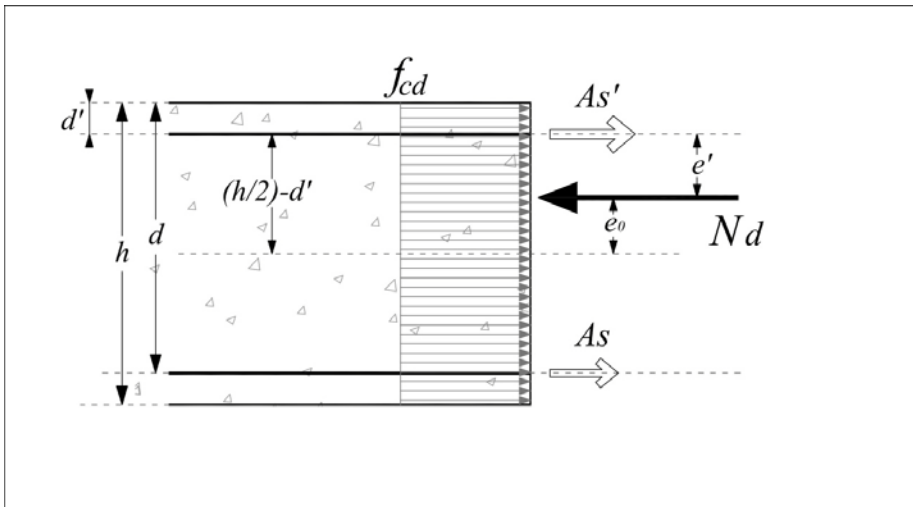


fig. 3.9

A partir de esta figura planteamos las ecuaciones de equilibrio, como en el caso anterior, tomando momentos con respecto a la armadura de compresión:

$$\sum M_{Acompresión} = 0$$

$$A_s \cdot f_{yd} \cdot (d - d') = N_d \cdot e' - b \cdot h \cdot f_{cd} \cdot (0,5 \cdot h - d')$$

$$\sum F_H = 0$$

$$N_d - A_s \cdot f_{yd} - b \cdot h \cdot f_{cd} = A'_s \cdot f_{yd}$$

Finalmente se instala armadura simétrica, tomando A_s y A'_s la mayor de ambas.

Igual que en el caso anterior, y por las mismas razones, f_{yd} ha de ser menor a 400 N/mm^2 .

3.4 Dimensionamiento en flexión esviada, pilares:

En el caso de un pilar, por ejemplo, si se trata de un pilar de esquina, este presentará una fibra neutra que no será paralela ninguna de las caras. Es decir, tendrá momento en dos direcciones diferentes, uno le vendrá de una viga y el otro de la otra viga, que forma 90 grados con la primera, y si sustituimos estos momentos por un axil con excentricidad, tendrá excentricidad no sólo en un eje, sino también en el otro (hasta ahora, el axil tenía una excentricidad, por ejemplo, hacia arriba, pero en lateral estaba centrado).

Estos casos que presentan una fibra neutra que no es paralela a ninguna cara, son los que constituyen la flexión esviada. Esto se puede dar por varias razones:

- Asimetrías en los armados, que desvían las tensiones hacia un lado u otro, pese a que la sección y las cargas sean simétricas.
- Secciones asimétricas, como pudiera ser una sección en L.
- Secciones simétricas pero en las cuales las acciones actúan fuera del plano de simetría, como por ejemplo el caso del pilar de esquina que mentábamos antes, o cualquier otro que esté sometido a cargas diferentes por cada lado, quizás por falta de simetría general del edificio.

En la figura adjunta resumimos dichos casos:

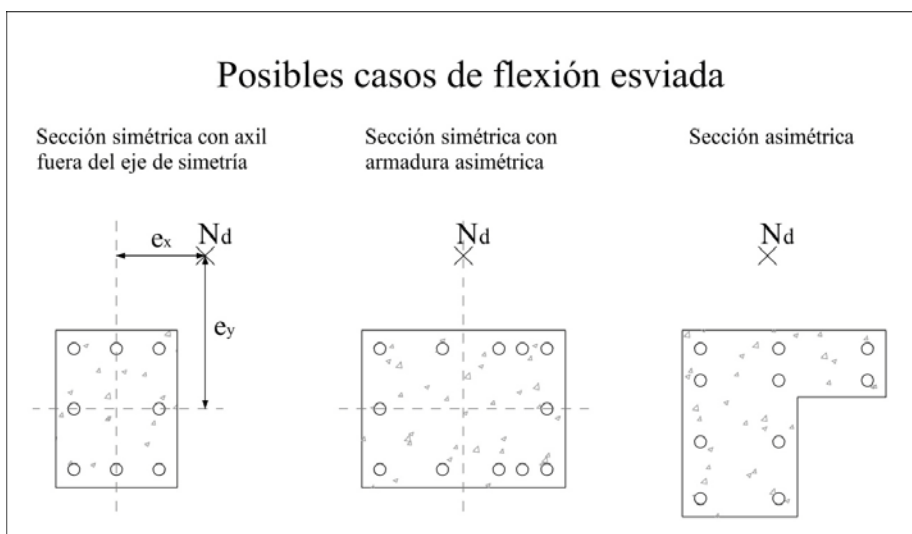


fig. 3.10

Para resolver un caso genérico (cualquier carga, cualquier forma), el procedimiento es bastante complicado, pues tendremos que recurrir a teoría de la elasticidad y resolver probablemente mediante cálculos informáticos, pero en el caso de secciones rectangulares si podremos resolver fácilmente nuestro problema:

Método de la EHE:

Se trata de un método aproximado expuesto en el capítulo 43.5.2 de la norma, y nos permite realizar en el caso se sección rectangular con armadura constante una

comprobación por separado según los dos planos principales de simetría en el caso en que el axil se sitúe en las siguientes zonas rayadas:

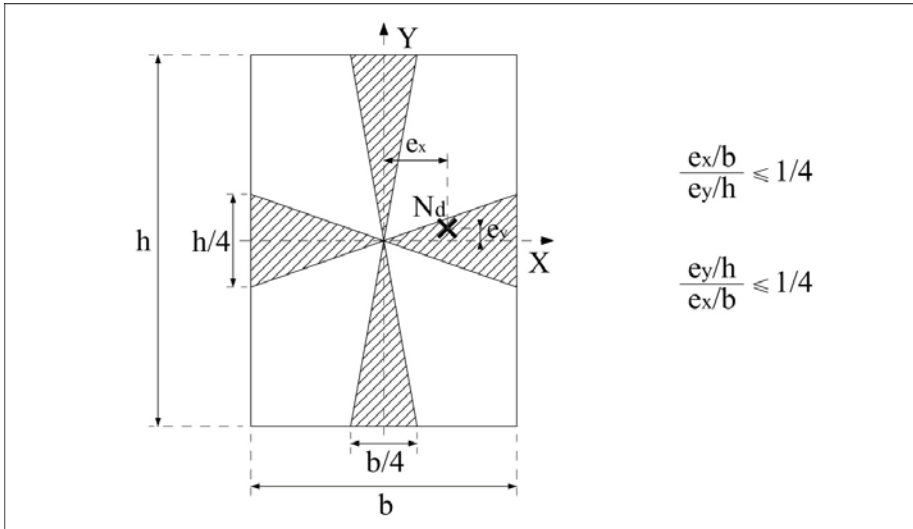


fig. 3.11

En el caso en que no se cumplan las condiciones anteriores, podremos usar también el método si se cumple la siguiente expresión, que comprueba si la sección se encuentra en buenas condiciones con respecto a pandeo:

$$\frac{M_{xd}}{M_{xu}} + \frac{M_{yd}}{M_{yu}} \leq 1$$

Siendo M_{xd} y M_{yd} los momentos de cálculo con respecto a la dirección x e y respectivamente, y M_{xu} y M_{yu} los momentos máximos en las dos direcciones resistidos por la sección.

Simplificación de la sección:

En algunas ocasiones resulta práctico sustituir la sección real por una inscrita en la misma, de tal modo que quedaremos evidentemente del lado de la seguridad. Evidentemente tendremos que procurar que la nueva sección sea simétrica y con la fibra neutra horizontal. Por ejemplo, en el caso de una sección en L, como la que se presentó en la imagen superior, la solución sería suprimir una de las alas y tomar como sección el resto, siendo ya simétrica (siempre que el axil quede así centrado, sino se puede jugar con el rectángulo resultante para conseguirlo).

Reducción a otras dos solicitaciones:

Es condición suficiente para que la sección resista un axil N posicionado en un punto P , que dicha sección sea capaz de resistir el mismo axil N posicionado en A y en B por separado, siendo A y B dos puntos cualesquiera de una recta que pase por P (evidentemente nos interesará que estén en los ejes de simetría). Es decir, a través de esta propiedad sustituimos una flexión esviada por dos problemas de flexión recta. Veamos como se posicionan los puntos en la siguiente figura:

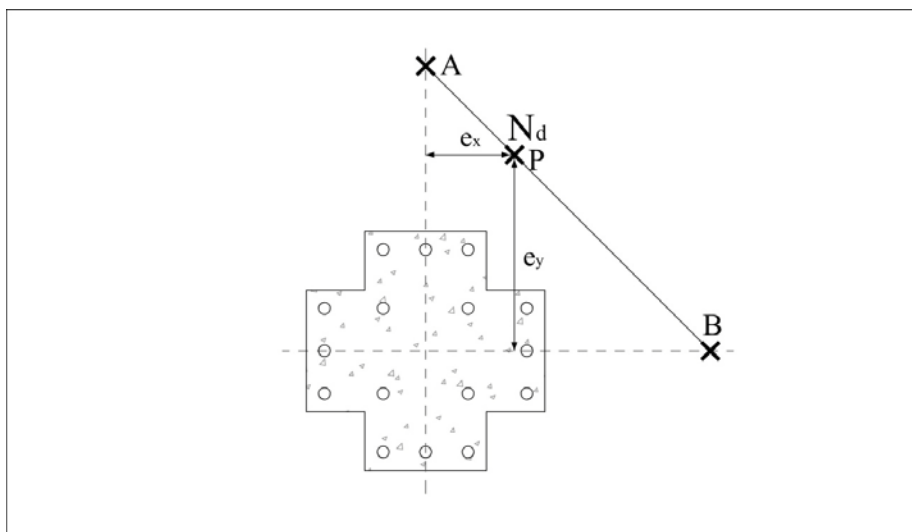


fig. 3.12

Cálculo por reducción a flexión recta, caso de pilares con mismo armado en las 4 caras:

En este caso, muy habitual, podemos emplear la fórmula simplificada de Jiménez Montoya, que nos permite reducir dicho problema a uno de flexión recta. En esta asignatura, por lo reducido del tiempo disponible, no abordaremos este método, pero recomendamos reiteradamente al alumno interesado que lo consulte en el apartado de Flexión Esviada del libro de Jiménez Montoya titulado Hormigón Armado.

TEMA 4 – DISPOSICIONES GEOMÉTRICAS, CUANTÍAS MÍNIMAS, SOLAPAMIENTO Y ANCLAJE:

4.1 Introducción:

En este tema nos centraremos en ciertas prescripciones que establece la norma de cara a “completar” o “matizar” lo calculado en temas anteriores. En concreto trataremos temas como las cuantías mínimas, áreas de armadura que hay que instalar en la pieza aunque no se llegue a ellas por cálculo, el solapamiento y anclaje, que establece como debemos unir armaduras cuando su longitud no sea suficiente y en que zonas de su longitud la armadura trabaja correctamente, o las distancias a respetar entre armaduras.

4.2 Disposiciones relativas a armaduras, cuantías mínimas:

La mayor parte de este apartado se refiere al concepto de cuantías mínimas, pero igualmente hablaremos de ciertas necesidades para la consideración en el cálculo de los armados a compresión, y es en dicho punto donde comenzamos:

En el caso de que de nuestro cálculo se desprenda la necesidad de adoptar armado pasivo de compresión, como por ejemplo en el caso en que encontráramos $x > x_{lim}$, la instrucción nos exige instalar una serie de cercos similares a los de cortante que se encarguen de arriostrar correctamente dichos aceros. ¿Por qué esta imposición? Pensemos en que los aceros de compresión están sometidos a un axil que los comprime fuertemente (la mayor parte de las veces se encontrarán a capacidad mecánica), y además que están separados tan sólo por el recubrimiento de la superficie exterior. Si nosotros tuviésemos un acero, de por ejemplo 20 mm de diámetro y 10 m de longitud al aire, fuera de la pieza de hormigón, y lo sometemos a una gran compresión, todo el mundo adivina que según vayamos incrementando el axil el acero pandeará, puesto que su esbeltez es enorme. En el caso de estar instalado como acero de compresión dentro de la pieza de hormigón, pese a estar confinado por el recubrimiento, al final dicho hormigón no es capaz de mantenerlo en su sitio y romperá dicho recubrimiento y pandeará hacia el exterior. Esta es la razón de arriostrar de una forma más eficaz la armadura de compresión mediante el uso de cercos.

La separación de los cercos y el diámetro que habremos de instalar (S_t y ϕ_t respectivamente) obedece a las siguientes expresiones, extraídas del artículo 4.2.3.1 de la EHE:

$$\phi_t \geq (1/4)\phi_{min}$$

Siendo ϕ_{min} el diámetro de la barra de compresión más delgada.

$$S_t \geq 15 \cdot \phi_{m\acute{a}x}$$

Siendo $\phi_{m\acute{a}x}$ el diámetro de la barra de compresión más gruesa.

Además la separación entre cercos debe ser en cualquier caso menor a la menor dimensión de la pieza. Aparte de cumplir estas separaciones y diámetros, la norma impone que para poder considerar dichos aceros en el cálculo, se ha de abrazar al menos una barra de cada dos, además de todas aquellas cuya distancia entre contiguas sea mayor de 15 cm. Se podrán adoptar disposiciones como las que siguen:

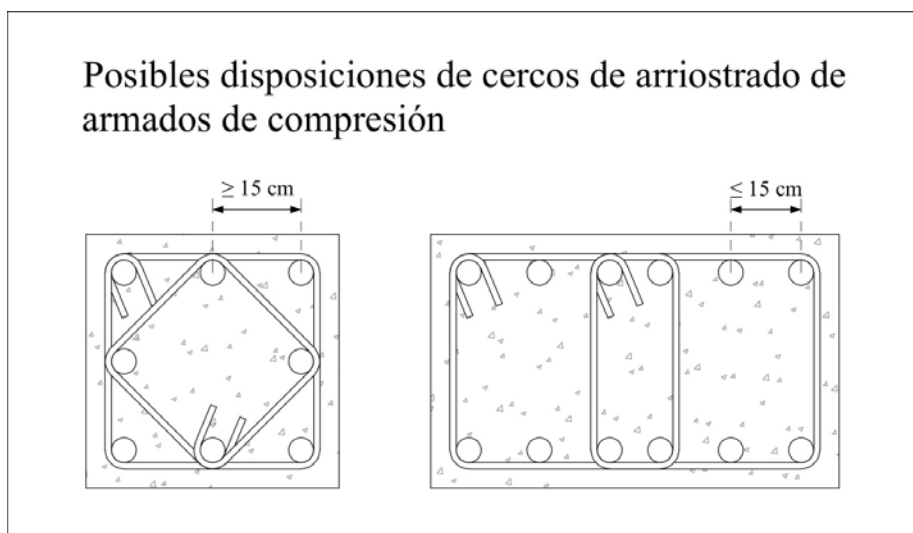


fig. 4.1

Igualmente indicar que en zonas de solapo de barras (cuando con una barra no seamos capaces de cubrir la distancia que necesitamos, no basta con poner otra a continuación, sino que es necesario que durante una cierta longitud ambas barras coexistan, como se verá en este mismo tema más adelante), o de doblado de barras (por efectos como el empuje al vacío, donde en barras a compresión o a tracción curvas aparece una componente perpendicular a la barra que tiende a romper el recubrimiento) puede ser necesario aumentar la cuantía de estos cercos o disminuir su espaciado.

Otra disposición básica relativa a armaduras establece que toda pieza de hormigón armado no debe presentar superficies libres de armadura en sus caras con alguna dimensión mayor a 30 cm o tres veces el espesor bruto de la parte del elemento donde estén situadas (se denomina espesor bruto al que resulta de las dimensiones reales de la pieza, sin descontar de ningún modo los huecos del armado, este tipo de cuestiones geométricas se recogen en el artículo 18.2.3 de la norma). A la armadura destinada a cumplir esta restricción se le denomina armadura de piel y no proviene por tanto del

cálculo. Su función principal es ayudar al control de fisuras por retracción y otras causas.

Tras haber visto esto, continuamos con las cuantías mínimas propiamente dichas. Lo primero que debemos saber es que existen dos tipos diferentes de cuantías mínimas: las geométricas y las mecánicas. En toda estructura de hormigón armado se han de comprobar y satisfacer ambas, si hubiese alguna que supere al armado de cálculo. Empezaremos con las cuantías mínimas geométricas (artículo 42.3.5 de la EHE):

Se trata de imponer un armado mínimo relacionado con el área de hormigón de la sección y del tipo de estructura que estemos proyectando. Este tipo de armado está destinado a asegurar una cuantía de armadura suficiente destinada a controlar fisuraciones que pudieran darse por retracción o cambios de temperatura en elementos donde alguna fibra se encuentre a tracción; en el caso de pilares su función es simplemente constructiva. Se calculan mediante la siguiente expresión:

$$A_s \geq \frac{g_m}{1000} \cdot A_c$$

Donde g_m es el coeficiente en tanto por mil recogido en la tabla 42.3.5 de la norma, y que es función del tipo de estructura y del tipo de acero, y A_c es la sección bruta de la pieza de hormigón (siendo esta $b \cdot h$ en el caso de una sección rectangular).

Igualmente instamos a que se lean las explicaciones que aparecen bajo la tabla, referidas a cada tipo de estructura, en especial destacamos que, en el caso de vigas, la armadura así obtenida es la cuantía mínima de la cara de tracción, y se recomienda instalar en la cara opuesta una armadura mínima que represente el 30% de la consignada.

Pasamos ahora a las armaduras mínimas mecánicas. En este caso habremos de diferenciar si nos encontramos en un caso de flexión (ya sea simple o compuesta), de compresión (igualmente simple o compuesta), o de tracción (también simple o compuesta). A estos casos se refieren los artículos 42.3.2, 42.3.3 y 42.3.4 de la norma respectivamente. Comenzamos a continuación con el primero de ellos:

Cuantías mínimas mecánicas en flexión simple o compuesta:

En el caso en el cual, nuestra sección se encuentre en flexión simple o compuesta (presencia de tracciones en alguna parte de la sección, presentando o no axil de cara al cálculo), habremos de respetar, en el caso general, la siguiente expresión:

$$A_s \cdot f_{yd} \geq \frac{W_1}{z} \cdot f_{ct,m,fl}$$

donde:

f_{yd} : es la resistencia de cálculo de la armadura empleada

z : brazo mecánico de la sección, para el cual adoptaremos generalmente $z = 0,8 \cdot h$

W_1 : módulo resistente de la sección bruta con respecto a la fibra más traccionada, se define como:

$W_1 = (\text{momento de inercia de la sección}) / (\text{distancia al cdg de la fibra más traccionada})$

$f_{ct,m,fl}$: es la resistencia media a flexotracción del hormigón, definida en el artículo 39.1 de la norma, según el cual:

$$f_{ct,m,fl} = \max\left\{(1,6 - h/1000) \cdot f_{ct,m}; f_{ct,m}\right\}$$

donde h es el canto del elemento en mm y $f_{ct,m}$ es la resistencia media a tracción, de valor:

$$f_{ct,m} = 0,30 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ct,m} = 0,58 \cdot f_{ck}^{1/2} \quad \text{si } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$$

En el caso de secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a flexión simple, y para hormigones con $f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$, se podrá adoptar la siguiente fórmula simplificada:

$$A_s \geq 0,04 \cdot A_c \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}}$$

con A_c la sección bruta de la pieza de hormigón (siendo esta $b \cdot h$ en el caso de una sección rectangular).

En los casos de flexión compuesta, se recomienda disponer de una armadura mínima de compresión según la siguiente expresión:

$$A'_s \cdot f_{yd} \geq 0,05 \cdot N_d$$

Siendo A'_s la armadura de compresión y N_d el axil de diseño.

Por último destacar que, salvo en forjados unidireccionales con elementos prefabricados (viguetas, prelosas,...), deberá continuarse hasta los apoyos finales al menos un tercio de la armadura necesaria para resistir el máximo momento positivo, y al menos un cuarto para los apoyos intermedios si los hubiese. Además, esta armadura de los apoyos finales será prolongada a partir del eje del apoyo al menos una longitud neta de anclaje (este valor lo estudiaremos más adelante en este mismo tema).

Cuantías mínimas mecánicas en compresión simple o compuesta:

En este caso nuestra sección se encuentra sometida a una flexión simple o compuesta, es decir, sus dos armaduras son de compresión, según el siguiente esquema:

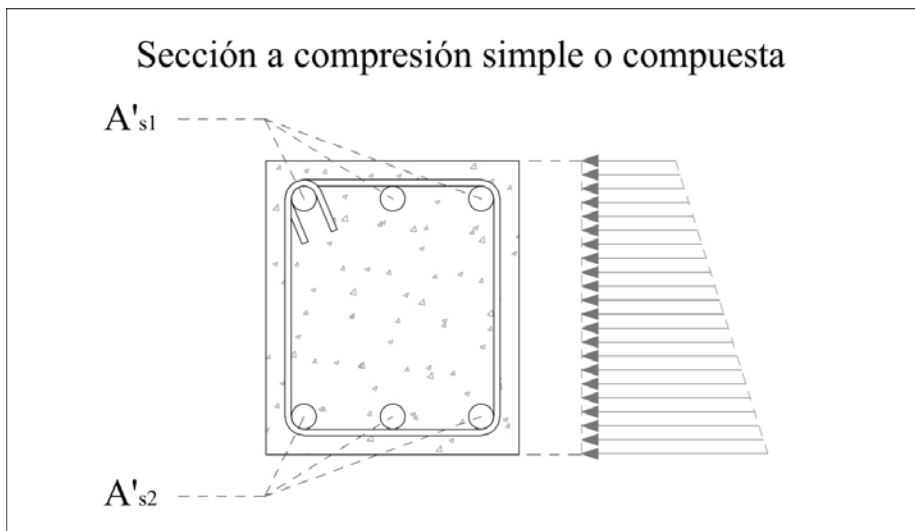


fig. 4.2

En estos casos habremos de cumplir dos limitaciones para cada armadura, una de cuantía mínima y otra de cuantía máxima (el exceso de armado en elementos sometidos a compresión puede producir problemas en el hormigón entre barras):

$$A'_{s1} \cdot f_{yc,d} \geq 0,05 \cdot N_d$$

$$A'_{s2} \cdot f_{yc,d} \geq 0,05 \cdot N_d$$

$$A'_{s1} \cdot f_{yc,d} \leq 0,5 \cdot f_{cd} \cdot A_c$$

$$A'_{s2} \cdot f_{yc,d} \leq 0,5 \cdot f_{cd} \cdot A_c$$

siendo:

N_d : axil de diseño de la sección

f_{cd} : resistencia de diseño a compresión del hormigón

A_c : área de la sección de hormigón

$f_{yc,d}$: resistencia de cálculo del acero a compresión, que será igual a f_{yd} pero limitándola como máximo a 400 N/mm^2 :

$$f_{yc,d} = f_{yd} \leq 400 \text{ N/mm}^2$$

Veamos a que se debe esta limitación de resistencia del acero: en los casos en los que el acero está sometido a compresión simple, este y el hormigón colindante deben de comprimirse como uno solo, si que haya diferencias entre ellos a nivel de deformación (en el caso de tracción el hormigón se fisura, compatibilizando así las deformaciones con el acero). El problema es que como sabemos, el hormigón admite como mucho una deformación a compresión igual a ε_{c0} , que, como vimos en el tema 0 valía:

$$\varepsilon_{c0} = 0,002 \quad \text{si } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{c0} = 0,002 + 0,000085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,50} \quad \text{si } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$$

Quedémonos con el caso de hormigones que no sean de alta resistencia, y por tanto $\varepsilon_{c0}=0,002$, y veamos ahora cuanto tiene que deformarse el acero para trabajar a capacidad mecánica, utilizando, claro está, la ley de Hooke:

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

Al módulo de Young le corresponde como valor $E_s = 200.000 \text{ N/mm}^2$. Por tanto veamos cuanto vale esta deformación para los aceros B500S y B400S:

$$\text{B500S} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{500}{200000} = 0,0025$$

$$\text{B400S} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{400}{200000} = 0,002$$

Y esta es la razón por la que en compresión simple limitamos la resistencia del acero a 400 N/mm^2 , ya que es justo en este valor de resistencia en el cual el hormigón y el acero llegarían a su límite de rotura por compresión y su límite elástico a la vez. Es inútil tener un acero de mejores características trabajando a compresión simple, pues nunca podremos aprovecharlo completamente, dado que el hormigón romperá antes. Está claro

que podremos instalar aceros más competentes, pero nunca podremos tener en cuenta ese extra de resistencia en el cálculo, y esa es la causa de la limitación.

Volviendo a las cuantías mínimas mecánicas y máximas mecánicas, en el caso de compresión simple y con armadura simétrica en ambas caras las fórmulas se quedan en lo siguiente:

$$A'_s \cdot f_{yc,d} \geq 0,1 \cdot N_d$$

$$A'_s \cdot f_{yc,d} \leq f_{cd} \cdot A_c$$

Siendo A'_s la armadura total de compresión (la suma de ambas caras).

Cuantías mínimas mecánicas en tracción simple o compuesta:

En este caso nuestra sección se encuentra sometida a una tracción simple o compuesta, es decir, todas sus fibras están traccionadas, teniendo pues ambas armaduras principales, se ha de cumplir la siguiente expresión:

$$A_s \cdot f_{yd} \geq A_c \cdot f_{ct,m}$$

Donde todos los parámetros ya han sido estudiados anteriormente. Teniendo en cuenta que en esta asignatura no se entra en cálculo de secciones pretensadas, y que tener toda la sección traccionada supondría la fisuración total de la misma, en principio este caso no será muy habitual en nuestros cálculos.

4.3 Disposiciones de colocación de las armaduras:

En el tema 1, ya introducimos cual habría de ser la magnitud del recubrimiento entre las barras de acero y la superficie libre de la sección, viendo cual era la medida habitual para los cercos de cortante, etc. En este apartado vamos a ver las limitaciones de separación mínima entre unas barras y otras, ya sean en “horizontal”, cuando están colocadas al mismo nivel, o en “vertical”, cuando, por necesidad de más armadura principal, hemos colocado varios niveles de barras. La separación mínima en ambos casos será la misma.

En el apartado 69.4.1 de la norma, se nos menciona literalmente lo siguiente: “cuando las barras se coloquen en capas horizontales separadas, las barras de cada capa deberán situarse verticalmente una sobre otra, de manera que el espacio entre las columnas de barras resultantes permita el paso de un vibrador interno”. Esta distancia, suficiente para el paso de un vibrador de aguja, no debería ser en ningún caso menor a 7 cm, aunque existen en el mercado vibradores de menor diámetro.

Aparte de lo que acabamos de comentar, la distancia libre entre dos barras, ya sea en vertical u horizontal habrá de ser mayor a:

- 20 mm (salvo viguetas y losas alveolares, donde se tomarán 15 mm).
- El diámetro de la mayor (o diámetro equivalente del grupo de barras mayor, concepto que veremos a continuación).
- 1,25 veces el tamaño máximo del árido.

Todas estas prescripciones las representamos en el gráfico inferior:

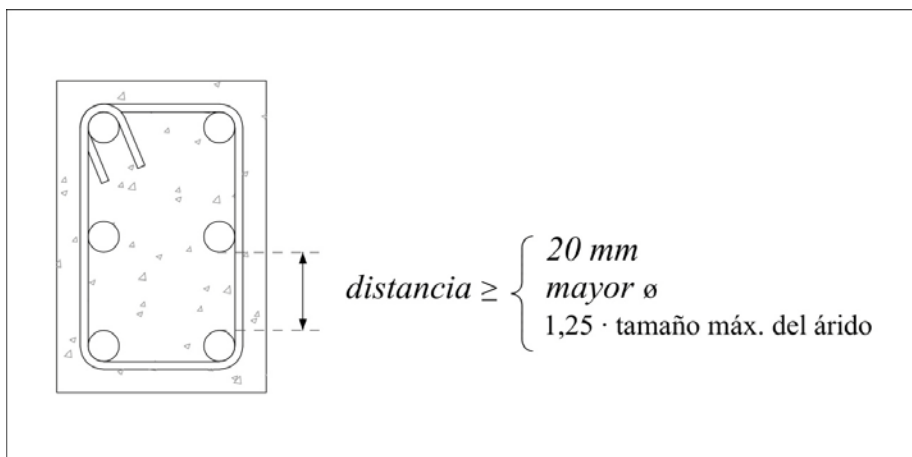


fig. 4.3

Del mismo modo, se nos indica que cuando nos encontramos en una zona de gran densidad de barras, podemos agrupar de dos en dos los cercos de cortante, ampliando así el espacio entre ellos (o manteniéndolo pero doblando la cuantía instalada de cortante). Esto es habitual cerca de pilares y apoyos, donde el cortante se hace máximo, pues también hay que tener en cuenta que las máquinas que doblan los estribos normalmente no pueden trabajar con barras de mayor diámetro que 12 mm, y rara vez con mayores a 16 mm.

Ya hemos nombrado anteriormente que existe lo que llamamos grupos de barras. Como es de esperar, se tratan de conjuntos de varias barras dispuestas una al lado de otra, con contacto directo entre ellas. En general es posible realizar grupos de hasta tres barras, y en algunos casos especiales, en concreto en elementos a compresión verticales sin empalmes, podríamos disponer hasta grupos de cuatro barras.

Estos grupos de barras se caracterizan por el diámetro equivalente del grupo, que es el diámetro que tendría un círculo de mismo área que la suma de las secciones de todas las

barras del grupo. En general, el diámetro equivalente máximo permitido son 50 mm, pudiendo llegar a 70 en el caso excepcional que comentamos antes (elementos a compresión verticales sin empalmes).

Este diámetro equivalente se utiliza para calcular el recubrimiento y la separación entre grupos de barras, sustituyendo al diámetro real en las prescripciones ya explicadas. A la hora de medir las distancias, sí se tiene en cuenta la superficie real del grupo, no la de la sección equivalente.

Cabe añadir, que a la hora de realizar solapes, aspecto que veremos a continuación, nunca podrá haber más de cuatro barras en contacto en una sección dada.

4.4 Disposiciones referentes al anclaje y empalme de armaduras:

En este apartado nos vamos a referir a un tema fundamental del hormigón armado, que entraría dentro de los aspectos constructivos, sin que por ello sea de menor importancia que los de cálculo. Se trata de cómo anclar y unir armaduras (aspectos que se recogen en el artículo 69.5 de la norma).

Ya sabemos como calcular a que tensión trabaja o puede trabajar una sección de armadura, y resulta lógico pensar que funciona transmitiendo estas tensiones a lo largo de la misma. El problema surge de que al terminar la barra, si se tratan de tracciones, no es capaz de transmitir estas tensiones a través de su extremo al hormigón, sino que ha de hacerlo mediante las estrías laterales a lo largo de una cierta distancia (como ejemplo, si tenemos una barra al aire con la punta sumergida 2 mm en hormigón, y tiramos de ella un poco, lógicamente la arrancaremos, necesitamos que la distancia de penetración en el hormigón sea mayor a cierto valor para que al tirar rompa la barra, y no sea arrancada). Por tanto, una vez que la barra deja de ser necesaria, no podemos cortarla y ya está, sino que hemos de prolongarla aún una cierta distancia para que pueda “deshacerse” de estas tensiones que aún tiene. Lo mismo ocurriría cuando las barras no ofrecen suficiente longitud, y por tanto necesitamos unir dos por sus extremos. No es suficiente con poner juntos sus extremos tocándose, pues, al existir una junta, las tracciones no pasarían de una a otra. La nueva barra ha de comenzar cuando a la otra aún le queda cierta longitud, debiendo pues coexistir cierta distancia, este método se llama solape de barras. Igualmente indicar que existen otros sistemas para unir armaduras que no veremos aquí en profundidad, como son el soldado o los “conectores” o “manguitos”, que son explicados en los artículos 69.5.2.5 y 69.5.2.6.

En primer lugar debemos introducir un parámetro fundamental tanto para el anclaje como para el solape, llamado longitud básica de anclaje, que se denota por l_b . Depende de las condiciones de adherencia de las barras, que están íntimamente relacionadas con el diámetro de la barra y la posición de esta, pudiéndose encontrar en dos tipos de posición:

- Posición I o de adherencia buena: se trata de armaduras que durante el hormigonado forman un ángulo con la horizontal comprendido entre 45 y 90 grados (al estar verticales es más difícil que se ocluya aire bajo ellas); o, en el caso de estar a menos de 45 grados, han de estar colocadas en la mitad inferior de la sección o a una distancia igual o mayor a 30 cm de la cara superior de la capa de hormigonado (al estar muy bajas en la sección, el peso del hormigón sobre ellas tiende a eliminar el aire que pudiera quedar ocluido).
- Posición II o de adherencia deficiente: serán aquellas armaduras que durante el hormigonado no se encuentran en las posiciones ya mencionadas.

La norma define la longitud básica de anclaje en prolongación recta y posición I como:

$$l_b = \frac{\phi \cdot f_{yd}}{4 \cdot \tau_{bd}}$$

Siendo τ_{bd} la tensión de adherencia que depende de varios factores, como el diámetro, las características del hormigón y la propia longitud del anclaje. Al complicarse esto sobremanera, la norma nos permite en el caso habitual de utilizar aceros certificados a partir del ensayo de la viga descrito en la norma UNE EN 10080 adoptar como valor de τ_{bd} el que aparece en el artículo 32.2 de la EHE, y por tanto reducir las expresiones de la longitud básica de anclaje a las siguientes:

- Barras en posición I:

$$l_{bI} = m \cdot \phi^2 \geq \frac{f_{yk}}{20} \cdot \phi$$

- Barras en posición II:

$$l_{bII} = 1,4 \cdot m \cdot \phi^2 \geq \frac{f_{yk}}{14} \cdot \phi$$

Siendo en ambos casos “ ϕ ” el diámetro de la barra en mm y “ m ” un coeficiente numérico experimental que se recoge en la tabla 69.5.1.2.a de la norma.

Esta longitud nunca será inferior a:

- 10 ϕ .
- 200 mm.

En el caso de poder existir efectos dinámicos se aumentarán estas longitudes en 10 ϕ .

A partir de esta longitud básica de anclaje, se define la longitud neta de anclaje a partir de la siguiente expresión:

$$l_{b,neto} = l_b \cdot \beta \cdot \frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} \cong l_b \cdot \beta \cdot \frac{A_s}{A_{s,real}}$$

en la cual:

- β es un factor de reducción definido en la tabla 69.5.1.2.b de la EHE. Está relacionado con la forma que presente el anclaje de la barra, que no ha de ser forzosamente en prolongación recta. Los distintos tipos se recogen en la figura 69.5.1.1 de la norma.
- σ_{sd} es la tensión de trabajo de la armadura que se desea anclar, pero normalmente emplearemos la expresión equivalente en función de los armados.
- A_s es la armadura necesaria por cálculo en la sección a partir de la cual se ancla la armadura.
- $A_{s,real}$ es la armadura realmente existente en la sección a partir de la cual se ancla la armadura.

Esta longitud no será en ningún caso inferior a los siguientes valores:

- 10 ϕ .
- 150 mm.
- La tercera parte de la longitud básica de anclaje para barras traccionadas y dos tercios de dicha longitud para barras comprimidas.

En el caso de grupos de barras existen una serie de disposiciones especiales, que se recogen en el artículo 69.5.1.3 de la EHE, y que son las siguientes:

- Siempre que sea posible los anclajes de barras pertenecientes a grupos se realizarán en prolongación recta.
- Cuando todas las barras del grupo dejen de ser necesarias en la misma sección, la longitud de anclaje de las barras será como mínimo:
 - 1,3· l_b para grupos de 2 barras.
 - 1,4· l_b para grupos de 3 barras.
 - 1,6· l_b para grupos de 4 barras.
- Cuando las barras del grupo dejen de ser necesarias en secciones diferentes, cada barra tendrá una longitud de anclaje según el siguiente criterio (teniendo en

cuenta que en ningún caso los extremos finales de las barras pueden distar entre sí menos de la longitud básica de anclaje, ver figura 69.5.1.3 de la norma):

- $1,2 \cdot l_b$ si va acompañada de 1 barra en la sección en que deja de ser necesaria.
- $1,3 \cdot l_b$ si va acompañada de 2 barras en la sección en que deja de ser necesaria.
- $1,4 \cdot l_b$ si va acompañada de 3 barras en la sección en que deja de ser necesaria.

Hasta aquí hemos hablado sobre anclaje de barras, a partir de este punto vamos a ver los aspectos relativos al empalme entre ellas. Se trata de conseguir asegurar una correcta transmisión de fuerzas entre una barra y la siguiente, sin que ello provoque daños al hormigón que las rodea. Se procurará siempre alejar dichos empalmes de las zonas donde el acero trabaje a su máxima carga. Además, cuando en la misma pieza encontremos varias barras a tracción que debamos prolongar mediante empalmes, se distanciarán unos de otros como mínimo una longitud básica de anclaje (las mediremos entre centros del solape, véase imagen 69.5.2.1 de la norma).

El empalme por solape se realiza colocando las barras una al lado de otra, dejando entre ellas como máximo 4 veces el diámetro. La longitud de solape se define como:

$$l_s = \alpha \cdot l_{b, \text{neta}}$$

Siendo $l_{b, \text{neta}}$ la longitud neta de anclaje ya estudiada, y α un coeficiente función del porcentaje de armadura solapada en una sección con respecto al total de acero dispuesto en dicha sección, y que se obtiene de la tabla 69.5.2.2 de la EHE.

Para barras de diámetro mayor a 32 mm sólo se podrán solapar armaduras en el caso de que dicho solape pueda justificarse mediante estudios especiales (se recomienda utilizar otro tipo de empalmes, especialmente aquellos que se basan en dispositivos tipo manguito).

En las zonas de solape habrán de disponerse igualmente armaduras transversales (cercos) con sección igual o superior a la de la mayor barra solapada.

En el caso de que se trate de grupos de barras, en primer lugar hemos de remarcar que en el caso de grupos de 4 barras, no se permite el empalme por solape. En otros casos habremos de añadir una barra de diámetro igual al mayor de los que forman el grupo, y que cubra toda la zona afectada por los empalmes. La separación entre empalmes y la prolongación de la barra suplementaria será:

- $1,2 \cdot l_b$ si es un grupo de dos barras.
- $1,3 \cdot l_b$ si es un grupo de tres barras.

(se recomienda recurrir como esquema a la figura 69.5.2.3 de la norma).

TEMA 5 – DIMENSIONAMIENTO A ESFUERZO CORTANTE:

5.1 Introducción:

Hasta aquí hemos estudiado como dimensionar una estructura para resistir esfuerzos de flexión combinados con tracción/compresión, pero no hemos hablado en absoluto sobre el cortante, que por otro lado casi siempre tendremos presente en nuestras estructuras. En las estructuras de hormigón el esfuerzo cortante produce una serie de grietas características por formar aproximadamente 45 grados con el eje de la pieza:

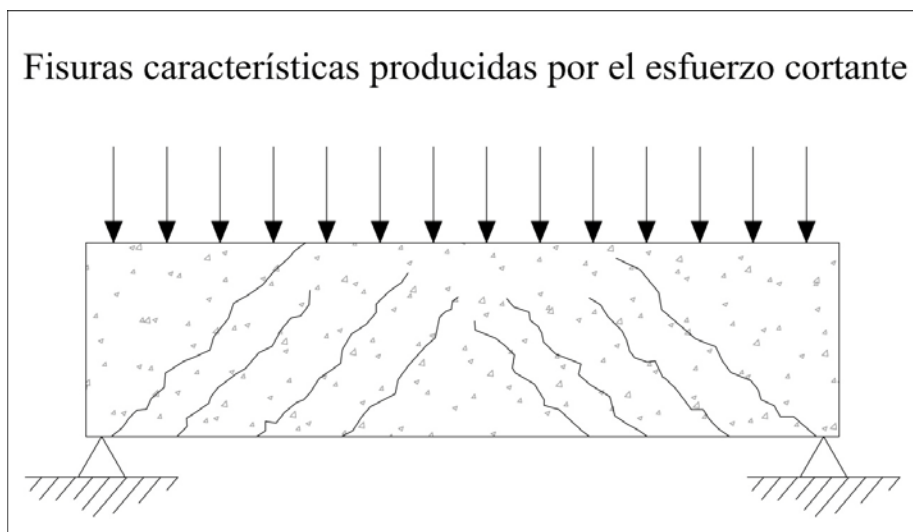


fig. 5.1

Estas grietas típicas del fallo por cortante, en una pieza convenientemente armada podrán aparecer pero estarán siempre controladas, no creando ningún riesgo para la misma. Dichas fisuras habrá que coserlas adecuadamente mediante el uso de aceros, sin embargo, el hormigón que se encuentra entre ellas mantendrá intacta su resistencia a compresión. Es de aquí de donde nace la llamada analogía de la celosía metálica, en base a la cual se ha formulado el método de dimensionamiento del hormigón armado a cortante: Imaginemos que necesitamos coser estas fisuras con aceros que las atraviesen: lo más directo sería ponerlos perpendiculares a las fisuras (formando igualmente otros 45° con la horizontal). Además de esto el hormigón entre fisuras (que también forma 45° con la horizontal, pero en el otro sentido) aún puede transmitir las compresiones que sean necesarias entre las fibras superiores e inferiores de la viga. Por último remarcar que en la parte inferior se encuentra la armadura principal de flexión que trabaja a tracción, y en la parte superior el hormigón está más o menos sano puesto que es una zona comprimida por la flexión (refiriéndonos siempre al ejemplo mostrado, claro está, en otros casos la ley de momentos puede estar invertida y cambiar todo el esquema) y

las fisuras de cortante no deben de haber llegado tan arriba, por tanto trabaja convenientemente a compresión.

Repasemos ahora como trabaja una celosía de acero sometida a la misma carga distribuida en la parte superior, y comparémosla con el esquema que hemos comentado arriba (aceros a 45° cosiendo fisuras, perpendicularmente a estas zonas de hormigón entre fisuras que soportan compresiones, aceros en la fibra inferior a tracción y fibras superiores a compresión):

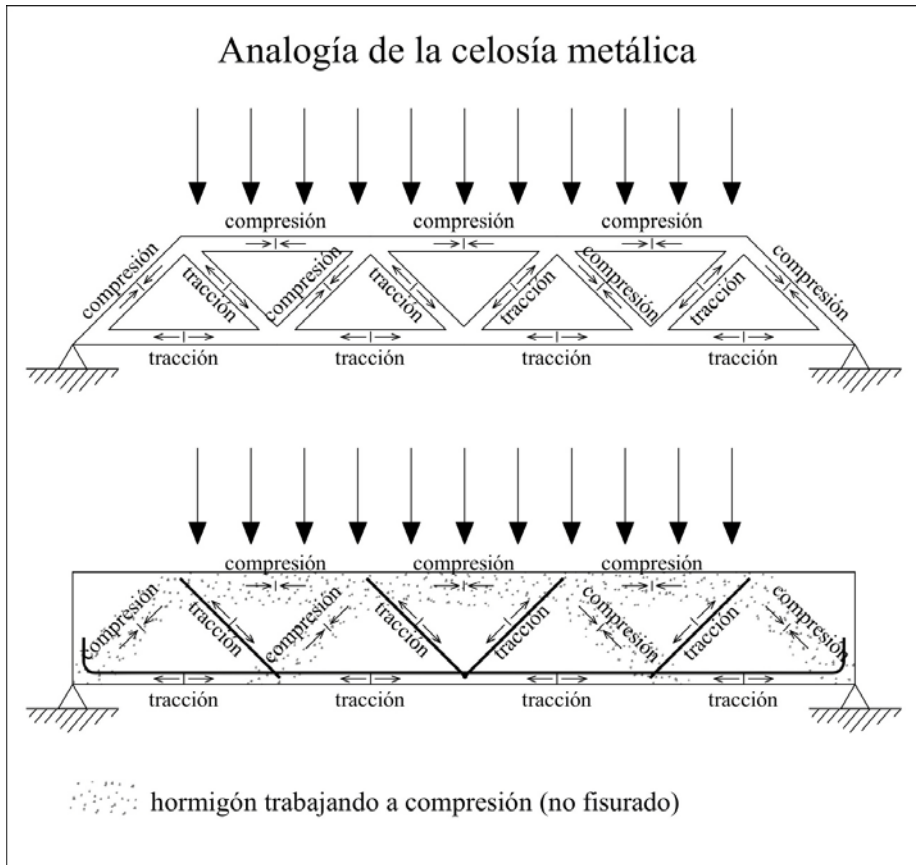


fig. 5.2

Como podemos apreciar, hay una total coincidencia entre las zonas que trabajan a tracción de la celosía y las barras de acero que se han instalado en la pieza de hormigón, y entre las zonas de compresión de la celosía metálica y las partes de hormigón que trabajan a compresión (antes hemos remarcado que no está fisurado, pero recordemos que un hormigón fisurado puede igualmente trabajar a compresión sin problema alguno). Basándonos en esto podríamos calcular la estructura a esfuerzo cortante con tan sólo dimensionar las armaduras y las zonas comprimidas descomponiendo las

fuerzas que recorren la estructura como si de una celosía metálica se tratase y despreciando el resto de hormigón de la pieza, como si hubiese huecos.

A este razonamiento que descompone la pieza en zonas a tracción pura y a compresión pura, despreciando el resto, se le llama método de “bielas y tirantes”, y se emplea habitualmente para estudiar el armado en aquellas partes de la estructura de hormigón que no cumplen las hipótesis necesarias en Resistencia de Materiales (Bernoulli-Navier y Kirchhoff). Esto puede suceder porque la longitud de la pieza no sea suficiente con respecto al canto de la misma, o que se trate de estudiar efectos locales de cargas, como pueda ser el caso de una carga concentrada. Estas zonas en general son llamadas regiones D (las zonas “normales” que hemos visto hasta ahora se llaman regiones B), y en la norma podemos encontrar información adicional sobre estas regiones y este método de cálculo en el artículo 24. En general hay una serie de casos típicos de aplicación de este método, como son las ménsulas cortas, las zapatas rígidas, las cargas concentradas o las esquinas y nudos.

Además de estos elementos estructurales, se estudian mediante este método el esfuerzo cortante (como estamos viendo en este apartado) y el torsor, que aunque no se estudia en este curso, podemos ver que posee un esquema de bielas y tirantes parecido al de cortante en la figura 24.1.2.a y b de la norma.

Aunque por la longitud de este curso no podemos entrar en más detalles, adjuntamos a continuación un esquema en el que se presentan algunos de estos elementos estructurales con sus bielas (zonas de hormigón a compresión) y sus tirantes (aceros a tracción) del mismo modo que lo hemos hecho en la viga a cortante, con objeto de mostrar como se procedería en otros casos:

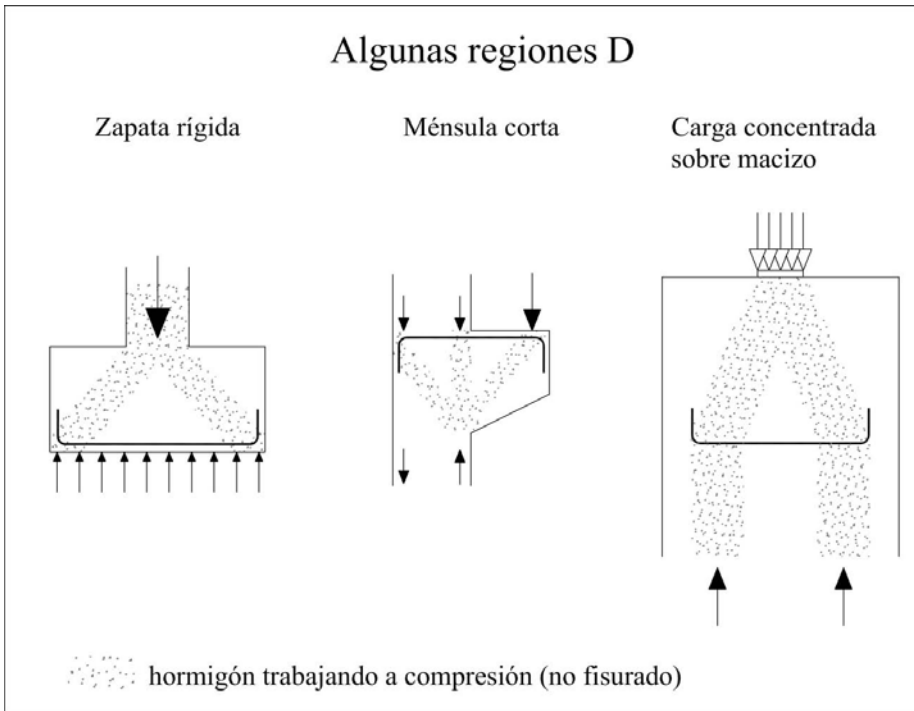


fig. 5.3

5.2 Planteamiento del problema:

Después de haber estudiado la modelización del problema mediante la analogía de la celosía metálica y el modelo de bielas y tirantes, veamos cuales son las bases del cálculo a esfuerzo cortante de secciones lineales. La formulación que veremos a continuación es válida por tanto en el caso de elementos lineales, que son aquellos cuya distancia entre puntos de momento nulo es mayor o igual a dos veces el canto de la sección, y cuyo ancho de sección es menor o igual a 5 veces el canto de la misma. Igualmente remarcar que la directriz de la pieza podrá ser recta o curva.

Lo primero que habremos de ver es cual es la sección que se empleará en el cálculo. En el caso de tener una sección rectangular el ancho será evidentemente el ancho del rectángulo, pero, ¿Qué pasará en el caso de una sección en T con un ancho en el alma no constante? En estos casos definiremos el ancho de cálculo b_0 como el menor ancho que presente la sección en una altura igual a los tres cuartos del canto útil contados a partir de la armadura de tracción. Veámoslo en la siguiente figura:

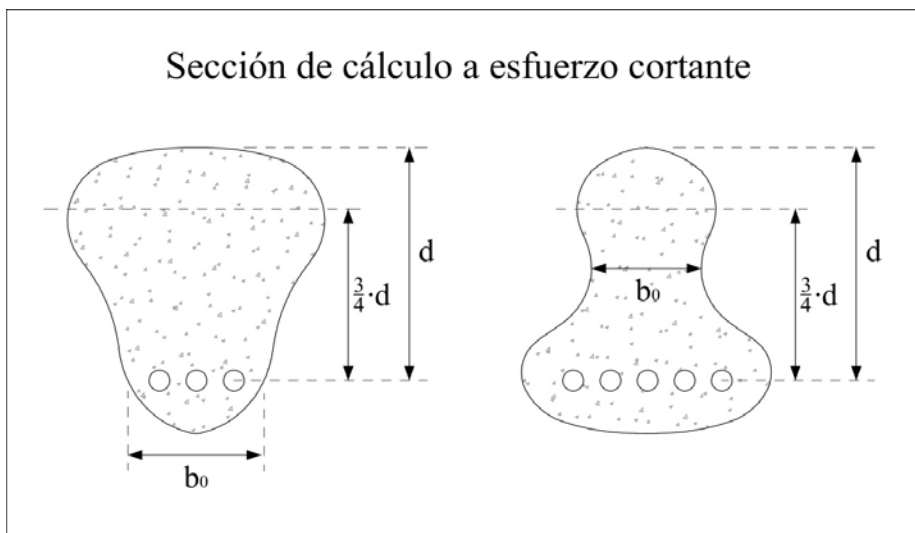


fig. 5.4

En piezas especiales donde la sección no tenga forma rectangular, de T o de I, se adoptará una forma ficticia de entre las anteriores, ajustando a la sección real por defecto, y asegurándose que los anchos de la real, y su resistencia, sean en todo momento superiores a los de la ficticia.

Una vez conocida la sección de cálculo, deberemos de obtener el cortante efectivo, a partir del cual aplicaremos toda la formulación. Para ello utilizaremos la siguiente expresión, dada en el apartado 44.2.2 de la norma:

$$V_{rd} = V_d + V_{cd}$$

Siendo:

V_{rd} : cortante efectivo para casos sin armadura activa, introduce en el cálculo el efecto del canto variable si se diese en la pieza.

V_d : valor de cálculo del esfuerzo cortante, una vez mayorado de la misma forma que el resto de las solicitaciones.

V_{cd} : En piezas de sección variable, representa el valor de cálculo de la componente paralela a la sección de la resultante de tensiones normales, tanto de compresión como de tracción en la armadura pasiva, sobre las fibras longitudinales de hormigón.

¿A que corresponde esta variación del cortante en el caso de piezas con canto variable? En dichos casos, tanto las caras de la pieza como la armadura presentan un cierto ángulo

con respecto al eje de la pieza, y por tanto, al traccionar la armadura o comprimir el hormigón de la fibra comprimida, estos esfuerzos de tracción y compresión se pueden descomponer en unas componentes paralelas al eje de la pieza que deben de anularse con el axil, y en unas componentes perpendiculares, que son las que se añadirían o sustraerían del esfuerzo cortante. Veamos en un dibujo el caso de una viga en canto variable no aligerada de hormigón armada en su parte inferior:

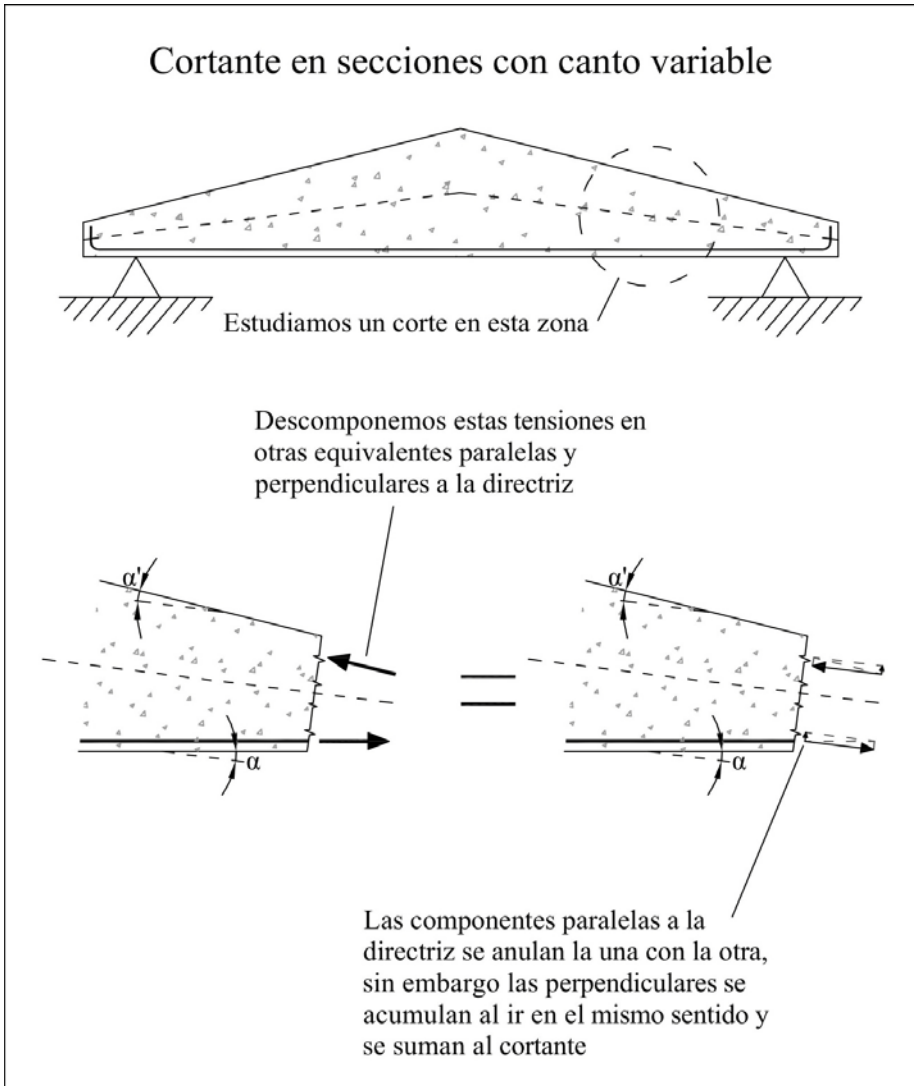


fig. 5.5

De esta figura podríamos deducir que en el caso en el que el canto de la pieza crece en el mismo sentido que crece el momento flector (más momento flector => más canto,

pieza proyectada de manera coherente), V_{cd} es negativo y por tanto el cortante efectivo se reduce. Evidentemente en el caso contrario aumenta.

La expresión que cuantifica el valor de V_{cd} es la siguiente (su signo será positivo o negativo dependiendo de lo visto anteriormente):

$$V_{cd} = \pm \left(-\frac{M}{d} \cdot \tan \alpha' - \left(\frac{M}{z} + N \right) \cdot \tan \alpha \right)$$

5.3 Formulación del cálculo de secciones a cortante:

Una vez obtenido el cortante efectivo, procedemos a comprobar que este es menor que dos valores relacionados con la resistencia de los elementos del modelo de bielas y tirantes:

$$V_{rd} \leq V_{u1}$$

$$V_{rd} \leq V_{u2}$$

Siendo:

- V_{u1} : Esfuerzo cortante de agotamiento por compresión oblicua del alma. Representa la resistencia a compresión de las bielas oblicuas del modelo que se plantea mediante la analogía de la celosía metálica. Esta comprobación no es necesaria en piezas sin armadura de cortante (se verá que piezas pueden permitirse esta ausencia). Esta comprobación se realiza en el borde del apoyo (donde se da el mayor cortante, cuidado, no en el eje del apoyo).
- V_{u2} : Esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alma. Representa la resistencia a tracción de los tirantes que unen fibra superior e inferior del modelo deducido mediante la celosía metálica. Presenta a su vez dos términos que veremos más adelante, uno de colaboración del hormigón y otro del acero. Esta comprobación se realiza en una sección separada un canto útil del borde del apoyo.

Igualmente el alumno recordará que las armaduras longitudinales obtenidas del problema de flexión también intervenían en el modelo de bielas y tirantes, como zonas de tracción. Esto produce un aumento de la sollicitación de tracción en dichas armaduras, y debe ser prevista en el armado. La norma recoge en el artículo 44.2.3.4.2 una formulación que prevé este incremento mediante el decalado de la ley de momentos. Este aspecto lo veremos en profundidad en este mismo apartado más adelante.

Obtención del esfuerzo cortante de agotamiento por compresión oblicua del alma V_{u1} :

Este esfuerzo V_{u1} se obtiene mediante la siguiente expresión (artículo 44.2.3.1 de la norma):

$$V_{u1} = K \cdot f_{1cd} \cdot b_0 \cdot d \cdot \frac{\cot g(\theta) + \cot g(\alpha)}{1 + \cot^2 g(\theta)}$$

Donde:

f_{1cd} es la resistencia a compresión del hormigón, de valor:

$$\begin{aligned} f_{1cd} &= 0,60 \cdot f_{cd} & \text{si} & \quad f_{ck} \leq 60 \text{ N/mm}^2 \\ f_{1cd} &= \left(0,90 - \frac{f_{ck}}{200} \right) \cdot f_{cd} \geq 0,50 \cdot f_{cd} & \text{si} & \quad f_{ck} \geq 60 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

b_0 es la anchura neta mínima del elemento, definida anteriormente.

α es el ángulo de las armaduras con el eje de la pieza, normalmente adoptaremos 90° .

θ es el ángulo de las bielas de compresión de hormigón con el eje de la pieza, normalmente adoptaremos 45° , pero se admiten valores que cumplan la siguiente expresión:

$$0,5 \leq \cot g \theta \leq 2,0$$

K es un coeficiente dependiente del valor del axil y del área total de la sección del siguiente modo:

$$\begin{aligned} K &= 1,00 & \text{para estructuras sin esfuerzo axil de compresión} \\ K &= 1 + \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} & \text{para} \quad 0 < \sigma'_{cd} \leq 0,25 \cdot f_{cd} \\ K &= 1,25 & \text{para} \quad 0,25 \cdot f_{cd} < \sigma'_{cd} \leq 0,5 \cdot f_{cd} \\ K &= 2,5 \cdot \left(1 - \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} \right) & \text{para} \quad 0,5 \cdot f_{cd} < \sigma'_{cd} \leq 1 \cdot f_{cd} \end{aligned}$$

Siendo σ'_{cd} la tensión axil efectiva en el hormigón, que en piezas que no sean pilares vale (compresión con signo positivo):

$$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c}, \quad (\text{con } N_d \text{ el axil de cálculo y } A_c \text{ el área total de la sección de hormigón})$$

Y en pilares ha de tener en cuenta las compresiones absorbidas por las armaduras comprimidas, respondiendo a la siguiente expresión:

$$\sigma'_{cd} = \frac{N_d - A'_s \cdot f_{yd}}{A_c}$$

Siendo A'_s el área total de armadura comprimida (en compresión compuesta sería toda la armadura instalada), y f_{yd} la tensión de cálculo del acero.

En el caso particular en que no haya axil ninguno, la resistencia del hormigón sea $f_{ck} < 60$ N/mm² y el ángulo α sea 90 y el ángulo θ sea 45, podemos adoptar la siguiente simplificación:

$$V_{u1} = 0,30 \cdot f_{cd} \cdot b_0 \cdot d$$

Obtención del esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alma V_{u2} en piezas sin armadura de cortante:

En el caso del parámetro V_{u2} habremos de distinguir dos casos diferentes, el primero el que abordamos en este sub-apartado, para piezas que pueden prescindir de armado de cortante. El proceso habitual es iniciar el cálculo partiendo de la hipótesis de que la pieza no presenta armado de cortante, y en el caso de que una vez calculado el parámetro V_{u2} no se cumpla el requisito $V_{rd} \leq V_{u2}$, entonces habremos de repetir el cálculo dando la hipótesis como falsa y siguiendo la formulación que prevé armado de cortante. En la norma encontramos este caso en el artículo 44.2.3.2.1.2, en el cual se aclara que se trata de una pieza fisurada (generalmente en elementos que no estén a compresión simple o compuesta y no se encuentren pretensados este será el caso). La formulación para la obtención de V_{u2} es la siguiente (atención no olvidar verificar el valor mínimo que ha de cumplir):

$$V_{u2} = \left[\frac{0,18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{cv})^{1/3} + 0,15 \cdot \sigma'_{cd} \right] \cdot b_0 \cdot d \geq \left[\frac{0,075}{\gamma_c} \cdot \xi^{3/2} \cdot f_{cv}^{1/2} + 0,15 \cdot \sigma'_{cd} \right] \cdot b_0 \cdot d$$

Siendo:

γ_c , el coeficiente de minoración de resistencia del hormigón.

f_{cv} , la resistencia efectiva del hormigón a cortante en N/mm^2 , que se tomará igual a f_{ck} , no siendo nunca superior en esta formulación a 60 N/mm^2 (incluso habrá de ser menor a 15 N/mm^2 en el caso de hormigones sometidos a control indirecto).

ξ , parámetro que se obtiene de la siguiente expresión (introducir en la misma d en mm):

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} < 2,0$$

d , canto útil.

σ'_{cd} , tensión axil efectiva en el hormigón ya vista anteriormente, pero que en este caso concreto está limitada de la siguiente forma:

$$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c} < 0,30 \cdot f_{cd} \leq 12 \text{ MPa}$$

N_d , axil de cálculo.

ρ_l , cuantía geométrica de la armadura principal de tracción anclada a una distancia igual o mayor que d con respecto a la sección de estudio. Se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\rho_l = \frac{A_s}{b_0 \cdot d} \leq 0,02$$

Obtención del esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alma V_{u2} en piezas con armadura de cortante, determinación de la contribución del hormigón a la resistencia a esfuerzo cortante:

En el caso de que al utilizar la formulación sin armado de cortante no se cumpla el requisito $V_{rd} \leq V_{u2}$, entonces habremos de repetir el cálculo con la formulación que adjuntamos a continuación:

En primer lugar, al existir armado de cortante, este habrá de ser tenido en cuenta en el cálculo del agotamiento por tracción del alma, que constará pues de dos componentes:

$$V_{u2} = V_{su} + V_{cu}$$

Siendo:

V_{cu} , la contribución del hormigón a la resistencia a esfuerzo cortante.

V_{su} , la contribución del acero a la resistencia a esfuerzo cortante.

El orden a seguir será el siguiente:

Conocido el valor V_{rd} que se obtiene a partir de los datos del problema, para garantizar la resistencia a cortante hemos de cumplir la expresión:

$$V_{rd} \leq V_{u2}$$

A partir de aquí, sustituyendo en la expresión la descomposición de V_{u2} queda:

$$V_{rd} \leq V_{su} + V_{cu}$$

El término V_{cu} puede ser calculado, pues depende del hormigón de la pieza, la armadura de tracción y la geometría, siendo todos datos conocidos. Una vez calculado, tan sólo he de determinar V_{su} , que tendrá el siguiente valor mínimo:

$$V_{rd} - V_{cu} \leq V_{su}$$

Como veremos más adelante, V_{su} depende de la cuantía de armado de cortante, y por tanto lo que habremos de hacer es ajustar esta para que se cumpla lo anterior.

- **V_{cu} :**

Así pues, siguiendo el orden marcado, la expresión de V_{cu} para el caso con armado de cortante será la siguiente:

$$V_{cu} = \left[\frac{0,15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{cv})^{1/3} + 0,15 \cdot \sigma'_{cd} \right] \cdot \beta \cdot b_0 \cdot d$$

Como se puede apreciar es muy parecida a la correspondiente al caso sin armado de cortante. Los distintos términos significan lo siguiente:

γ_c , el coeficiente de minoración de resistencia del hormigón.

f_{cv} , la resistencia efectiva del hormigón a cortante en N/mm^2 , que se tomará igual a f_{ck} , no siendo nunca superior en esta formulación a $100 N/mm^2$ (incluso habrá de ser menor a $15 N/mm^2$ en el caso de hormigones sometidos a control indirecto).

ξ , parámetro que se obtiene de la siguiente expresión (introducir en la misma d en mm):

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} < 2,0$$

d , canto útil.

σ'_{cd} , tensión axil efectiva en el hormigón ya vista anteriormente, pero que en este caso concreto está limitada de la siguiente forma:

$$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c} < 0,30 \cdot f_{cd} \leq 12 \text{ MPa}$$

N_d , axil de cálculo.

ρ_l , cuantía geométrica de la armadura principal de tracción anclada a una distancia igual o mayor que d con respecto a la sección de estudio. Se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\rho_l = \frac{A_s}{b_0 \cdot d} \leq 0,02$$

β , parámetro que se determina a partir de las siguientes expresiones:

$$\beta = \frac{2 \cdot \cot g\theta - 1}{2 \cdot \cot g\theta_e - 1} \quad \text{si} \quad 0,5 \leq \cot g\theta < \cot g\theta_e$$

$$\beta = \frac{\cot g\theta - 2}{\cot g\theta_e - 2} \quad \text{si} \quad \cot g\theta_e \leq \cot g\theta \leq 2,0$$

Donde:

θ es el ángulo entre las bielas de compresión del hormigón y el eje de la pieza, que ya vimos anteriormente.

θ_e es el ángulo de referencia de inclinación de las fisuras, que calculado a partir de la expresión simplificada que ofrece la norma en el apartado 44.2.3.2.2 se obtiene de la siguiente expresión:

$$0,5 \leq \cot g\theta_e = \frac{\sqrt{f_{ct,m}^2 - f_{ct,m} \cdot (\sigma_{xd} + \sigma_{yd}) + \sigma_{xd} \cdot \sigma_{yd}}}{f_{ct,m} - \sigma_{yd}} \leq 2,0$$

Con $f_{ct,m}$ la resistencia media a tracción del hormigón (apartado 39.1 de la norma), y σ_{xd} y σ_{yd} las tensiones normales de cálculo medidas en el centro de gravedad de la sección y paralelas a la directriz y al esfuerzo cortante respectivamente. En general, en los casos que abordamos en este curso y por supuesto sin pretensado, $\sigma_{xd} = \sigma'_{cd}$ ya visto en este mismo tema, y $\sigma_{yd} = 0$ (en general hay muy pocos casos en los que esta tensión no es nula, y en este curso los obviaremos). En dicho caso, con $\sigma_{yd} = 0$, la expresión se puede reducir a:

$$0,5 \leq \cot g\theta_e = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{xd}}{f_{ct,m}}} \leq 2,0$$

Obtención del esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alma V_{u2} en piezas con armadura de cortante, determinación de la contribución del acero a la resistencia a esfuerzo cortante:

A partir de este valor de V_{cu} ya se puede abordar el de V_{su} :

- V_{su} :

Como ya comentamos anteriormente, la manera de proceder en un problema de dimensionamiento a esfuerzo cortante nos lleva a conocer finalmente el valor mínimo que ha de respetar, con lo cual, hemos de obtener a partir de su expresión la sección de armado necesaria:

$$V_{su} = z \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\cot g \alpha + \cot g \theta) \sum A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d}$$

Expresión que se puede simplificar sabiendo que A_{α} es el área por unidad de longitud del grupo de armaduras que forma un ángulo α con la directriz, y $f_{y\alpha,d}$ es su resistencia de cálculo que en armaduras pasivas cumple que $f_{y\alpha,d} = \sigma_{sd} = f_{yd}$ limitando, por las mismas razones que ya se han expuesto varias veces en este texto, $\sigma_{sd} \leq 400 \text{ N/mm}^2$ al tratarse de un modelo de bielas y tirantes. Partiendo pues del caso en el que tan sólo se cuente con armado de cortante formando un único ángulo α con la directriz, y que todo este acero presente las mismas características mecánicas, podemos obviar la sumatoria:

$$V_{su} = z \cdot \text{sen} \alpha \cdot (\cot g \alpha + \cot g \theta) A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d}$$

Siendo:

z , brazo mecánico que en flexión simple y flexotracción puede asimilarse a $0,9 \cdot d$, y para otros casos se pueden consultar las expresiones que propone la norma en el apartado 44.2.3.2.2.

α , ángulo de los cercos de cortante con el eje de la pieza, ya visto anteriormente.

θ , Ángulo entre las bielas de compresión de hormigón y el eje de la pieza, se usará el mismo valor que se empleó en la comprobación por agotamiento a compresión oblicua del alma, cumpliendo igualmente:

$$0,5 \leq \cot g\theta \leq 2,0$$

En el caso habitual en el que α valga 90° y θ valga 45° , y nos encontremos en casos de flexión simple o flexotracción, se obtiene la siguiente simplificación de la expresión general:

$$V_{su} = 0,9 \cdot d \cdot A_{90} \cdot f_{y90,d}$$

De donde si despejásemos nuestra verdadera incógnita, el área de armadura, obtendríamos:

$$A_{90} = \frac{V_{su}}{0,9 \cdot d \cdot f_{y90,d}}$$

En esta expresión se recomienda disponer d (z en la formulación general vista antes) en metros, y el resto de los términos en N y mm^2 , de tal forma, que al resolver se obtiene como unidades (si se tiene cuidado de no eliminar los metros con los milímetros) mm^2/m , tras lo cual resulta evidente pasar a cm^2/m .

A partir de este valor de área por unidad de longitud, se determinan los cercos o estribos de cortante. Se ha de tener cuidado, pues esta área representa la suma de todas las secciones de acero verticales en un metro de longitud, por tanto, si un cerco tiene dos ramas (al ser cuadrado, tiene dos lados “verticales”), habrá que tener en cuenta estas dos secciones; y después multiplicar por el número de cercos que haya en un metro.

Mayoración del armado longitudinal de flexión:

En el modelo de bielas y tirantes del que hemos partido (analogía de la cercha metálica), aparecían tirantes (tracción) en la fibra inferior de la pieza, coincidiendo con los aceros principales de flexión. Aunque efectivamente en esta posición ya hemos colocado barras de acero, estas han sido tan sólo dimensionadas a flexión, y por tanto cabe la posibilidad

de que al añadir este esfuerzo extra producido por el cortante no sean capaces de resistirlo en las mejores garantías, y por tanto habrá que reforzarlas. Lo que haremos es decalar la ley de momentos de la pieza una cierta distancia, de tal manera que al calcular flexión a partir de la ley decalada, obtengamos ya un armado suficiente también para resistir el cortante (véase apartado 44.2.3.4.2 de la norma).

El incremento de tracción al que serán sometidas dichas armaduras será de:

$$\Delta T = V_{rd} \cdot \cot g\theta - \frac{V_{su}}{2} (\cot g\theta + \cot g\alpha)$$

Incremento que se resiste por la armadura principal de tracción si esta se calcula a partir de una ley de momentos decalada una distancia s_d que cumpla la siguiente expresión:

$$s_d = z \cdot \left(\cot g\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{su}}{V_{rd}} \cdot (\cot g\theta + \cot g\alpha) \right)$$

Esta distancia será decalada evidentemente en el sentido más desfavorable de cara al dimensionamiento, como ejemplo, en una viga bi-empotrada obtendríamos el siguiente esquema:

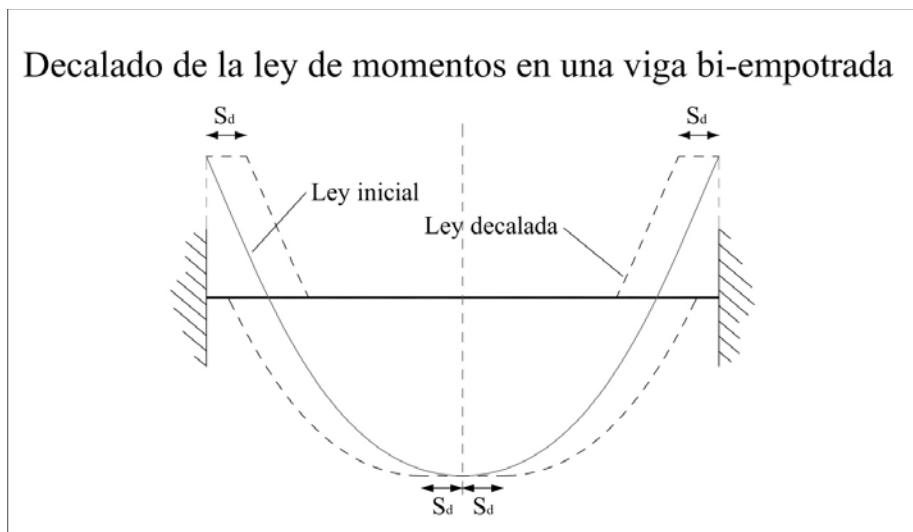


fig. 5.6

Indicar que como alternativa a esta formulación, la regla clásica de decalar una distancia igual al canto útil la ley de momentos está del lado de la seguridad para casos con $\theta=45^\circ$, siendo pues perfectamente válida.

5.4 Disposiciones relativas a armaduras de cortante:

Hasta aquí se han definido las expresiones para el cálculo del armado de cortante, en este apartado introduciremos una serie de restricciones que habrán de cumplir las mismas.

En primer lugar, indicar que la separación entre cercos de cortante no puede ser totalmente arbitraria, sino que habrá que cumplir con las siguientes expresiones, con el fin de asegurar el confinamiento del hormigón que funciona como biela, resistiendo compresión oblicua:

$$\begin{array}{ll}
 s_i \leq 0,75 \cdot d \cdot (1 + \cot g\alpha) \leq 600mm & \text{si} \quad V_{rd} \leq \frac{1}{5} \cdot V_{u1} \\
 s_i \leq 0,60 \cdot d \cdot (1 + \cot g\alpha) \leq 450mm & \text{si} \quad \frac{1}{5} \cdot V_{u1} < V_{rd} \leq \frac{2}{3} \cdot V_{u1} \\
 s_i \leq 0,30 \cdot d \cdot (1 + \cot g\alpha) \leq 300mm & \text{si} \quad V_{rd} > \frac{2}{3} \cdot V_{u1}
 \end{array}$$

Además de esto, la separación transversal entre ramas (separación entre las ramas del armado de cortante en una misma sección transversal) habrá de respetar:

$$s_{i,trans} \leq d \leq 500mm$$

En el caso de existir armado de compresión ya vimos una serie de restricciones en el tema anterior a cumplir, que se exponían igualmente en el artículo 42 de la norma.

La armadura de cortante se prolongará una distancia igual a la mitad del canto a partir de la sección donde dejan de ser necesarios, y en el caso de apoyos se dispondrán cercos hasta al menos el borde de los mismos.

Se dispondrá como mínimo una cuantía de armadura de cortante que satisfaga la siguiente expresión:

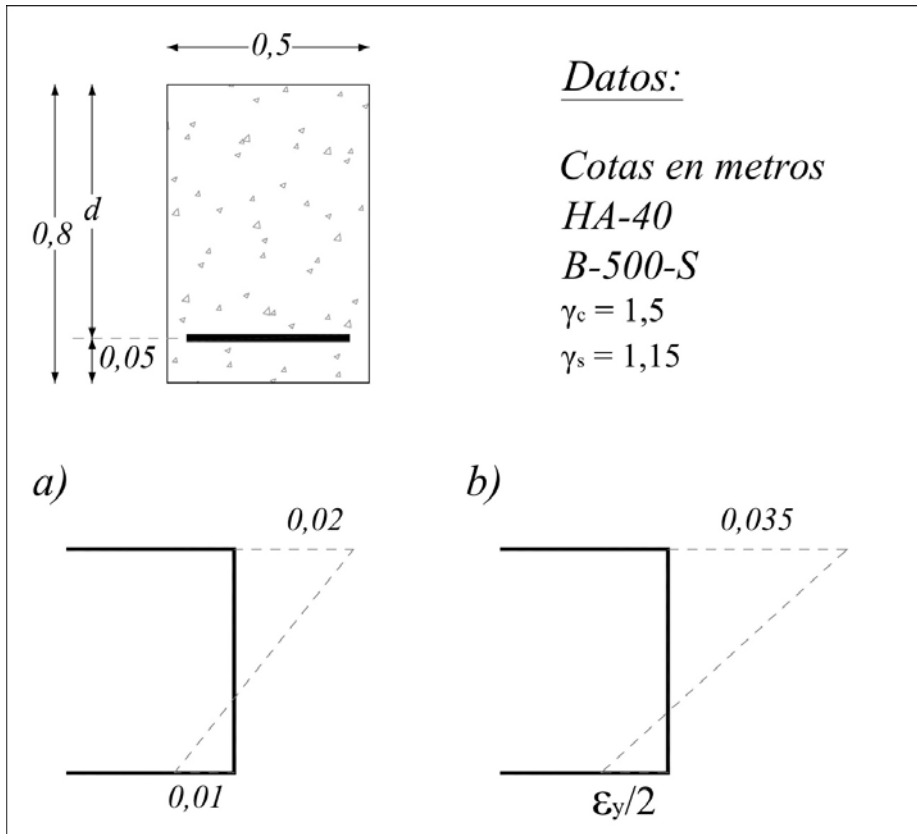
$$\sum \frac{A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d}}{\text{sen}\alpha} \geq \frac{f_{ct,m}}{7,5} \cdot b_0$$

En la cual conocemos ya el significado de todos los términos, y sabemos que en el caso de contar con armadura de cortante que forme el mismo ángulo con la directriz y tenga las mismas características mecánicas podemos evitar la sumatoria.

PRÁCTICA 1:

Enunciado:

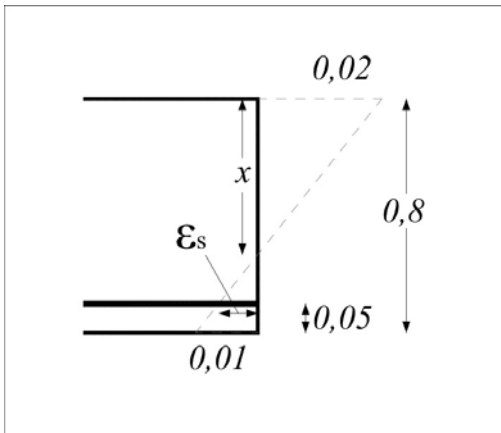
Obtener mediante diagrama rectangular y parábola-rectángulo la tensión del acero y las compresiones en el hormigón de la siguiente sección para las deformaciones de los apartados a y b:



Resolución:

a)

En primer lugar empleo triángulos equivalentes para obtener la profundidad de la fibra neutra:



$$\frac{0,002}{x} = \frac{0,01}{h-x} = \frac{0,01}{0,8-x} \Rightarrow$$

$$0,002 \cdot (0,8 - x) = 0,01 \cdot x \Rightarrow$$

$$0,002 \cdot 0,8 = (0,01 + 0,002)x \Rightarrow$$

$$x = \frac{0,002 \cdot 0,8}{0,01 + 0,002} \Rightarrow$$

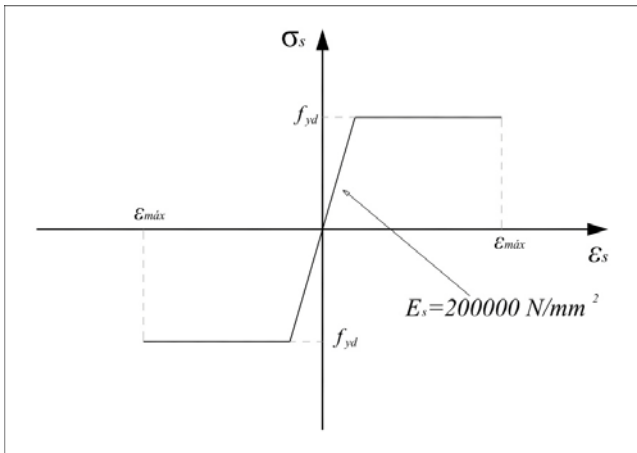
$$\boxed{x = 0,133}$$

A partir del valor de la fibra neutra y repitiendo equivalencia de triángulos sacamos la deformación en el acero y a partir de esta la tensión:

$$\frac{0,002}{0,133} = \frac{\varepsilon_s}{0,8 - 0,133 - 0,05} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_s = 0,00925}$$

Y ahora la tensión en el acero, mirando siempre cual es nuestra posición en el gráfico tensión-deformación:



$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s = 200000 \text{ N/mm}^2 \cdot 0,00925 = 1850 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \text{MAL}$$

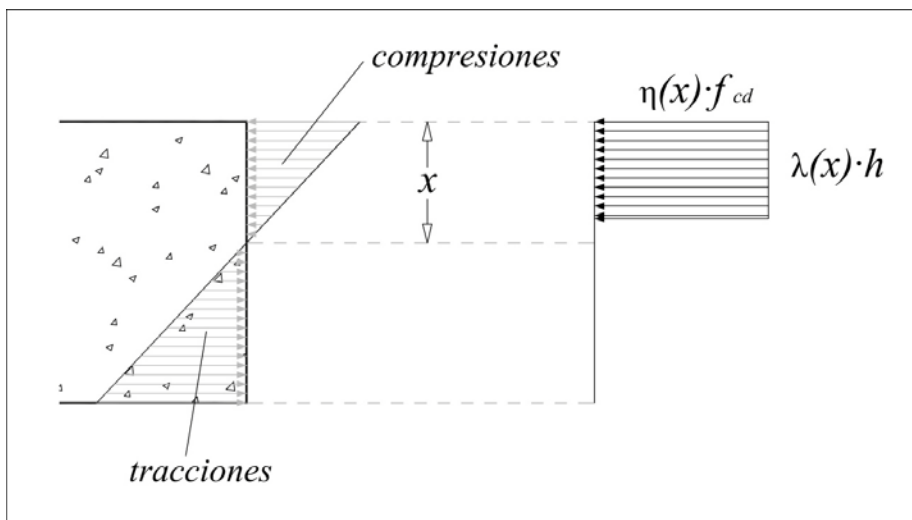
Como podemos observar partimos de la idea de que estábamos en el tramo inclinado y nos hemos pasado de él, pues la tensión máxima del acero será:

$$f_{yd} = \frac{500 \text{ N/mm}^2}{1,15} = 435 \text{ N/mm}^2$$

Por tanto estaré en el tramo horizontal, y por tanto la tensión será:

$$\sigma_s = 435 \text{ N/mm}^2$$

Las compresiones del hormigón empleando el diagrama rectangular serán, según el apartado 39.5 de la norma:



Donde, teniendo en cuenta que $f_{ck} < 50 \text{ N/mm}^2$, tenemos lo siguiente:

$$\eta = 1$$

$$\eta(x) = \eta, \quad \text{para } 0 < x < h$$

$$\lambda = 0,8$$

$$\lambda(x) = \lambda \cdot \frac{x}{h}, \quad \text{para } 0 < x < h$$

Y por tanto:

$$N_c = f_{cd} \cdot 0,8 \cdot x \cdot b = \frac{40}{1,5} \text{ N/mm}^2 \cdot 0,8 \cdot 133 \text{ mm} \cdot 500 \text{ mm} = 1418667 \text{ N} \Rightarrow$$

$$N_c = 1418,667 \text{ kN}$$

Y mediante el diagrama parábola rectángulo:

$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^n \right], \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c0}$$

$$\sigma_c = f_{cd}, \quad \text{si } \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$$

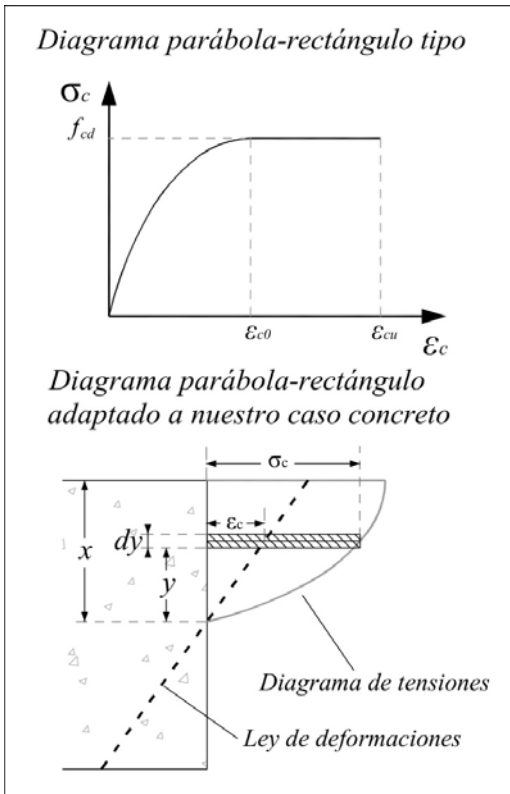
Teniendo en cuenta que $f_{ck} < 50 \text{ N/mm}^2$, tendríamos:

$$n = 2$$

$$\varepsilon_{c0} = 0,002$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,0035$$

En nuestro caso, puesto que la deformación máxima es 0,002, no tendremos parte rectangular, y todo será pues parábola. La variable en la expresión de la parábola es ε_c , que representa la deformación en el punto donde deseamos conocer la tensión. Como yo deseo integrar con respecto a la posición “y” (colocaré arbitrariamente su origen en la fibra neutra), adaptaré la expresión para que sea esta la que aparezca. A continuación un dibujo ilustrativo y la equivalencia entre ε_c e y:



Y de acuerdo con esto la relación entre deformación y posición “y” será:

$$\varepsilon_c = \frac{0,002 \cdot y}{133 \text{ mm}} \quad \text{con } y \text{ en mm.}$$

No queda más que sustituir esta expresión en la de la parábola e integrar la misma entre los valores $y=0$ e $y=133$ mm, y posteriormente multiplicar por la profundidad de la sección que es de 500 mm:

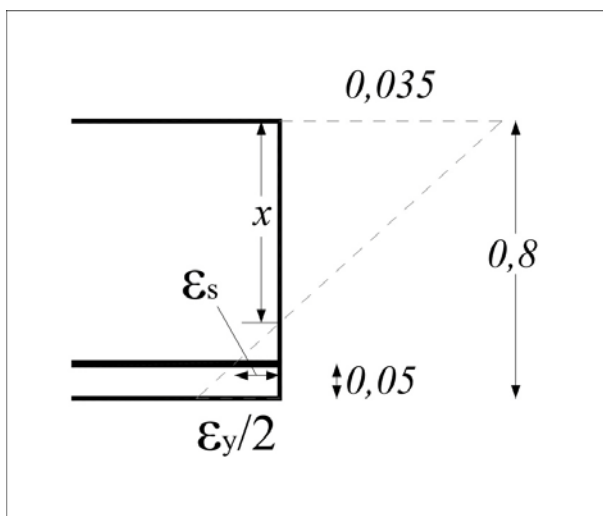
$$N_c = 500 \cdot \int_0^{133} \frac{40}{1,5} \left[1 - \left(1 - \frac{0,002 \cdot y}{0,002 \cdot 133} \right)^2 \right] \cdot dy = 1182370 \text{ N} \Rightarrow$$

$$N_c = 1182,37 \text{ kN}$$

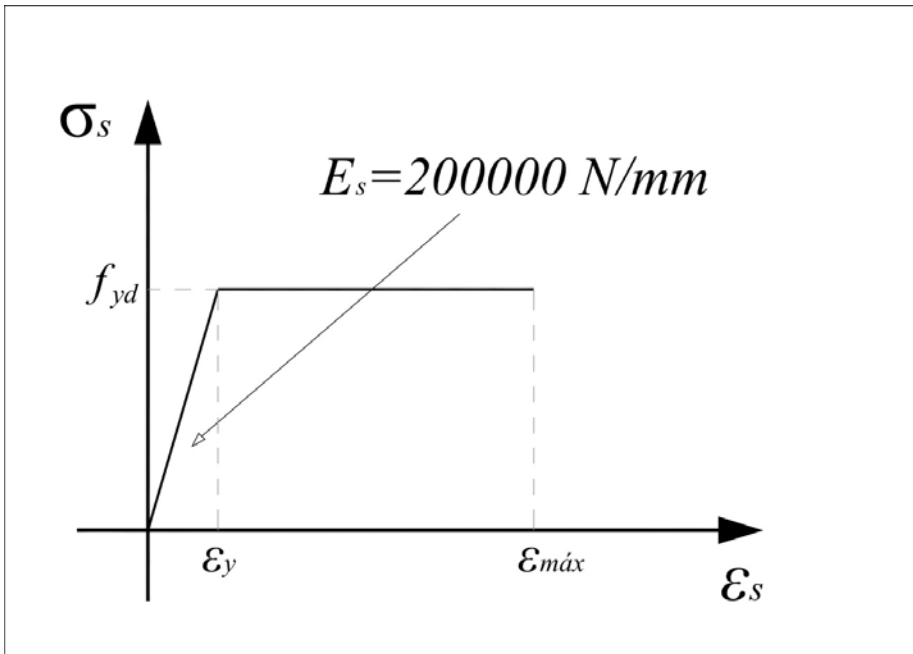
Como se puede apreciar, el resultado es del orden del obtenido mediante el diagrama rectangular.

b)

Como en el caso anterior empleo triángulos equivalentes para obtener la profundidad de la fibra neutra:



Pero en primer lugar habrá que determinar cual es el valor de $\varepsilon_y/2$, para lo cual partiremos del gráfico tensión-deformación del acero y sobre él aplicaremos la ley de Hooke:



$$f_{yd} = 200000 \text{ N/mm}^2 \cdot \varepsilon_y \Rightarrow$$

$$\varepsilon_y = \frac{500/1,15}{200000} = 0,00217 \Rightarrow$$

$$\frac{\varepsilon_y}{2} = 0,00109$$

Ahora ya podemos aplicar equivalencia de triángulos:

$$\frac{0,0035}{x} = \frac{\varepsilon_y/2}{h-x} = \frac{0,00109}{0,8-x} \Rightarrow$$

$$0,0035 \cdot (0,8 - x) = 0,00109 \cdot x \Rightarrow$$

$$x = \frac{0,0035 \cdot 0,8}{0,00109 + 0,0035} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 0,61}$$

Con este valor de la fibra neutra y repitiendo equivalencia de triángulos sacamos la deformación en el acero y a partir de esta la tensión:

$$\frac{0,0035}{0,61} = \frac{\varepsilon_s}{0,8 - 0,61 - 0,05} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon_s = 0,0008}$$

Las compresiones del hormigón siguiendo diagrama rectangular tienen el mismo esquema planteado en el caso anterior y los parámetros son también iguales, obteniendo:

$$N_c = f_{cd} \cdot 0,8 \cdot x \cdot b = \frac{40}{1,5} \text{ N/mm}^2 \cdot 0,8 \cdot 610 \text{ mm} \cdot 500 \text{ mm} = 6506666 \text{ N} \Rightarrow$$

$$\boxed{N_c = 6506,7 \text{ kN}}$$

Y mediante el diagrama parábola rectángulo, igual que antes:

$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^n \right], \quad \text{si } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c0}$$

$$\sigma_c = f_{cd}, \quad \text{si } \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$$

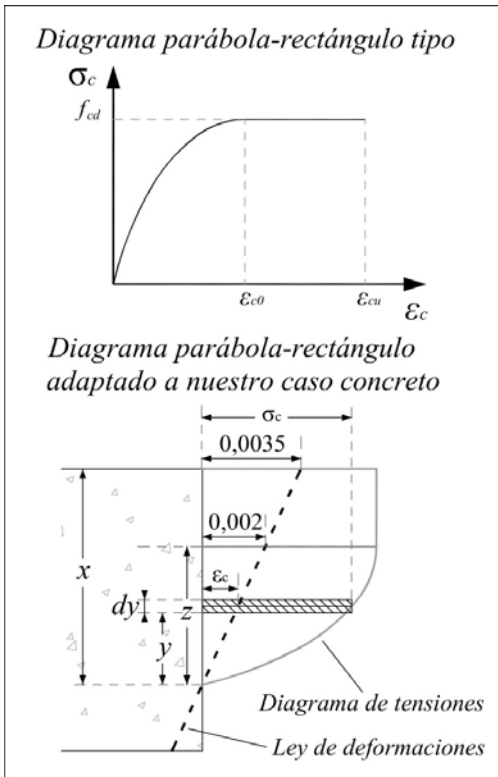
Teniendo en cuenta que $f_{ck} < 50 \text{ N/mm}^2$, tendríamos como en el apartado a):

$$n = 2$$

$$\varepsilon_{c0} = 0,002$$

$$\varepsilon_{cu} = 0,0035$$

En este caso, puesto que la deformación máxima es 0,0035, tendremos toda la parte rectangular. Igual que antes deseamos integrar con respecto a la posición "y" (colocaremos arbitrariamente su origen en la fibra neutra), para lo cual adaptaremos la expresión para que sea esta la que aparezca. A continuación un dibujo ilustrativo y la equivalencia entre ε_c e y:



Basándome en el dibujo obtengo por triángulos el valor de la altura de la parábola “z”:

$$\frac{0,61}{0,0035} = \frac{z}{0,002} \Rightarrow z = 0,3486m$$

Integraremos primero la parte parabólica y posteriormente la rectangular, para finalmente sumar ambas.

Por tanto integro la expresión de la parábola (idéntica al caso anterior) entre los valores $y=0$ e $y=348,6$ mm, y posteriormente multiplico por la profundidad de la sección que es de 500 mm:

$$N_c = 500 \cdot \int_0^{348,6} \frac{40}{1,5} \left[1 - \left(1 - \frac{0,002 \cdot y}{0,002 \cdot 348,6} \right)^2 \right] \cdot dy = 3099054N$$

En cuanto al rectángulo es suficiente una multiplicación:

$$N_c = 500 \cdot (610 - 348,6) \cdot \frac{40}{1,5} N/mm^2 = 3485333N$$

Y sumando ambos valores obtenemos que el total es:

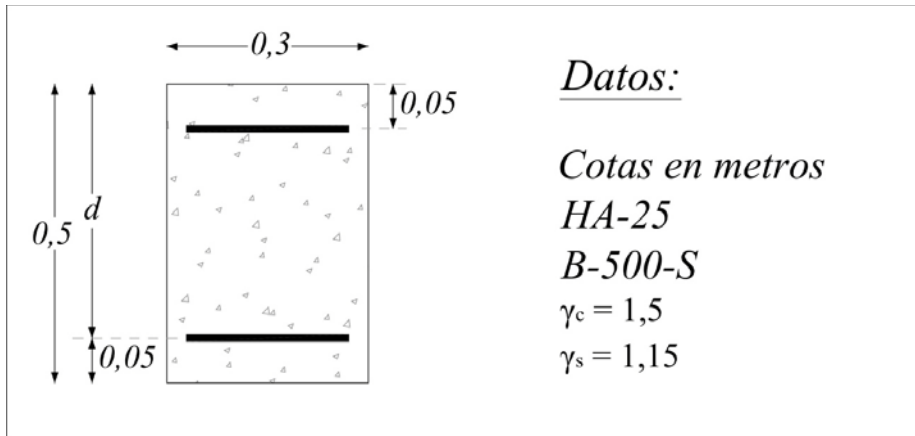
$$N_c = 6584,4kN$$

Que resulta igualmente similar al obtenido mediante el diagrama rectangular.

PRÁCTICA 2:

Enunciado:

Dimensionar la sección que se detalla a continuación para resistir las solicitaciones de los apartados a y b. Empléense sólo acero de diámetro 20mm. El recubrimiento facilitado está medido al eje de los aceros.



a) $M = 8Tn \cdot m$ (sin mayorar)

b) $M = 31,1Tn \cdot m$ (sin mayorar)

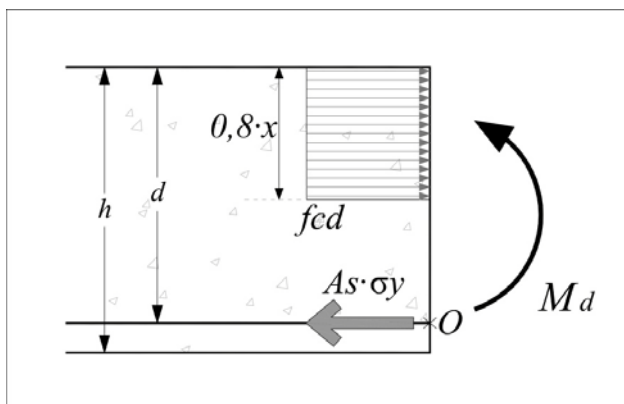
Resolución:

a)

En primer lugar mayoramos las acciones:

$$M_d = 1,5 \cdot 8Tn \cdot m = 12Tn \cdot m$$

Supondremos que no es necesaria armadura de compresión (equivalente a decir que nos moveremos en los dominios 2 o 3), y que por tanto la fibra neutra estará situada en la sección ($0 < x < h$). Nuestro esquema será el siguiente:



Tomamos momentos con respecto a la fibra inferior (punto O del dibujo), obteniendo:

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow$$

$$M_d = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$12 = 0,8 \cdot x \cdot \frac{2500}{1,5} \cdot 0,3 \cdot (0,45 - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$0,4 \cdot x^2 - 0,45 \cdot x + 0,03 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0,0711m$$

Necesitamos comprobar si la hipótesis de partida era cierta, por tanto calculamos la profundidad límite de la fibra neutra:

$$x_{lim} = \frac{1}{1 + 1,428 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \cdot d = 0,617 \cdot d = 0,278m$$

Con lo cual efectivamente, podemos dar por buena la hipótesis. Para saber exactamente en que dominio se está, se calcula la frontera entre el dominio 2 y 3:

$$lim_{2-3} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + 0,01} \cdot d = \frac{0,0035}{0,0035 + 0,01} \cdot d = 0,259 \cdot d = 0,117m$$

Con lo cual, al ser la x inferior a este valor, podemos afirmar que nos encontramos en **Dominio 2**.

Queda pues completamente verificado que no es necesario armado de compresión, y para determinar cual es la armadura de tracción hacemos equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$A_s \cdot f_{yd} = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \Rightarrow$$

$$A_s \cdot f_{yd} = 400 \cdot x \Rightarrow$$

$$A_s \cdot \frac{5,1}{1,15} = 400 \cdot 0,0711 \Rightarrow A_s = 6,42 \text{ cm}^2$$

Pasamos este valor a barras de diámetro 20:

$$\frac{6,42}{1^2 \cdot \pi} = 2,04 \Rightarrow \text{Serán necesarios } \underline{\text{tres aceros de diámetro 20 mm.}}$$

b)

En primer lugar mayoramos las acciones:

$$M_d = 1,5 \cdot 31,1 \text{ Tn}\cdot\text{m} = 46,66 \text{ Tn}\cdot\text{m}$$

Supondremos que no es necesaria armadura de compresión (equivalente a decir que nos moveremos en los dominios 2 o 3). El esquema será el mismo del caso anterior, calculamos la profundidad de la fibra neutra:

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow$$

$$M_d = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$46,66 = 0,8 \cdot x \cdot \frac{2500}{1,5} \cdot 0,3 \cdot (0,45 - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$0,4 \cdot x^2 - 0,45 \cdot x + 0,1167 = 0 \Rightarrow$$

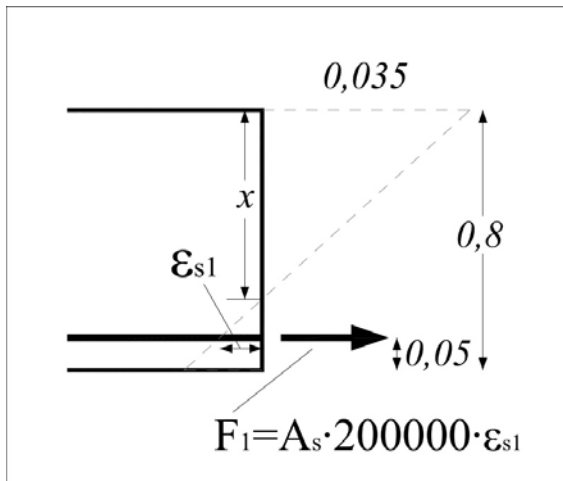
$$\boxed{x = 0,405 \text{ m} > x_{lim}}$$

Por tanto nos encontramos en **Dominio 4.**

Vamos a dimensionar en este dominio de dos formas diferentes, en primer lugar sin armado de compresión, y luego con él.

- Sin armado de compresión:

En este dominio, la armadura de tracción no trabajaba a capacidad mecánica, así que habré de determinar que deformación presenta mediante una equivalencia de triángulos para posteriormente aplicar compatibilidad:



Compatibilidad de deformaciones:

$$\frac{0,0035}{0,405} = \frac{\varepsilon_{s1}}{0,45 - 0,405} \Rightarrow \varepsilon_{s1} = 0,00039$$

Ahora aplico equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$F_1 = F_c \Rightarrow$$

$$A_{s1} \cdot 200000 \cdot 0,00039 = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \Rightarrow$$

$$A_{s1} \cdot 200000 \cdot 0,00039 = 400 \cdot 0,405 \Rightarrow$$

$$A_{s1} = 207,7 \text{ cm}^2$$

Pasamos este valor a barras de diámetro 20:

$$\frac{207,7}{l^2 \cdot \pi} = 66,11 \Rightarrow \text{Serán necesarios } \underline{\mathbf{67 \text{ aceros de diámetro 20 mm}}}.$$

Es interesante observar que sin utilizar armado de compresión, resultaría muy difícil o imposible instalar tantas barras de forma adecuada, y más respetando el brazo mecánico acordado.

- Con armado de compresión:

Como ya se vio en teoría, necesitamos calcular el llamado momento límite:

$$M_{lim} = 0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim}) \Rightarrow$$

$$M_{lim} = 0,8 \cdot 0,278 \cdot \frac{2500}{1,5} \cdot 0,3 \cdot (0,45 - 0,4 \cdot 0,278) \Rightarrow$$

$$M_{lim} = 37,67 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

En la fibra superior instalaremos suficiente armadura para resistir el momento, resultante de la diferencia del momento real y el momento límite:

$$U_2 \cdot 0,4 = M_d - M_{lim} \Rightarrow$$

$$U_2 = \frac{46,66 - 37,67}{0,4} = 22,47 \text{ Tn}$$

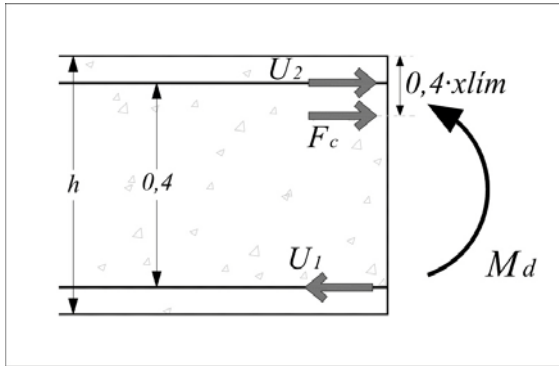
Puesto que la armadura superior trabaja a capacidad mecánica, el área necesaria será la siguiente:

$$A_{s2} = \frac{22,47 \text{ Tn}}{(50000 \text{ Tn/m}^2) / 1,15} = 0,0005169 \text{ m}^2 = 5,1 \text{ cm}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{5,1}{l^2 \cdot \pi} = 1,62 \Rightarrow$$

Serán necesarios dos aceros de diámetro 20 mm .

La armadura de la cara inferior se obtiene por equilibrio de fuerzas horizontales:



$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$U_1 = N_c + U_2 \Rightarrow$$

$$U_1 = \frac{2500}{1,5} \cdot 0,8 \cdot 0,278 \cdot 0,3 + 22,47 = 133,67 Tn \Rightarrow$$

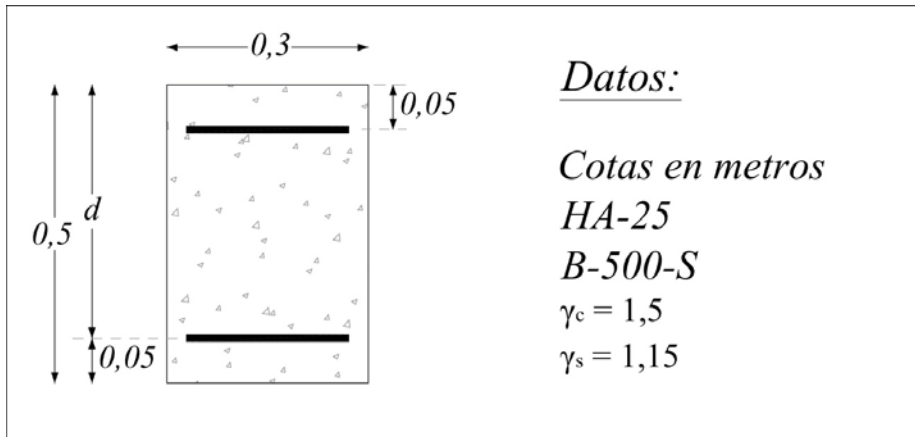
$$A_{s1} = \frac{133,67 Tn}{(50000 Tn/m^2) / 1,15} = 0,003074 m^2 = 31 cm^2 \Rightarrow$$

$$\frac{31}{1^2 \cdot \pi} = 9,82 \Rightarrow \text{Serán necesarios } \underline{\text{diez aceros de diámetro 20 mm.}}$$

PRÁCTICA 3:

Enunciado:

Dimensionar la sección que se detalla en el dibujo para resistir las solicitaciones que se indican a continuación. Empléense sólo acero de diámetro 20mm. El recubrimiento facilitado está medido al eje de los aceros.



$M = 25 \text{ Tn}\cdot\text{m}$ (sin mayorar)

$N = 15 \text{ Tn}$ (sin mayorar)

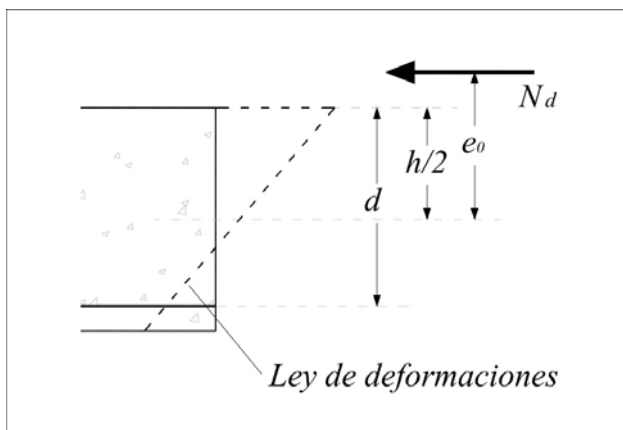
Resolución:

En primer lugar mayoramos las acciones:

$$M_d = 1,5 \cdot 25 \text{ Tn}\cdot\text{m} = 37,5 \text{ Tn}\cdot\text{m}$$

$$N_d = 1,5 \cdot 15 \text{ Tn} = 22,5 \text{ Tn}$$

Ahora veamos el valor de la excentricidad:



$$e_0 = \frac{M_d}{N_d} = 1,666m$$

Con lo cual estaremos en un caso de grandes excentricidades.

El siguiente paso es situar la fibra neutra con el fin de verificar en que dominio nos encontramos. Partiremos de la hipótesis de que no es necesaria la armadura de compresión:

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow$$

$$N_d \cdot (e_0 - cdg + d) = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$22,5 \cdot (1,866) = 0,8 \cdot x \cdot \frac{2500}{1,5} \cdot 0,3 \cdot (0,45 - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$0,4 \cdot x^2 - 0,45 \cdot x + 0,105 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 0,33m}$$

Compruebo el valor de la profundidad de la fibra neutra límite:

$$x_{lim} = \frac{1}{1 + 1,428 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \cdot d = 0,617 \cdot d = 0,28m$$

Por tanto, al ser la profundidad de la fibra neutra calculada superior a la límite, nos encontramos en dominio 4. Calculamos pues el momento límite:

$$M_{lim} = 0,8 \cdot x_{lim} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x_{lim}) \Rightarrow$$

$$M_{lim} = 0,8 \cdot 0,28 \cdot \frac{2500}{1,5} \cdot 0,3 \cdot (0,45 - 0,4 \cdot 0,28) \Rightarrow$$

$$M_{lim} = 38,11 Tn \cdot m$$

En la fibra superior instalaremos suficiente armadura para resistir el siguiente momento, resultante de la diferencia del momento real y el momento límite:

$$N_d \cdot (e_0 - cdg + d) - M_{lim} = 41,98 - 38,11 = 3,87 Tn \cdot m$$

Puesto que la armadura superior trabaja a capacidad mecánica, el área necesaria será la siguiente:

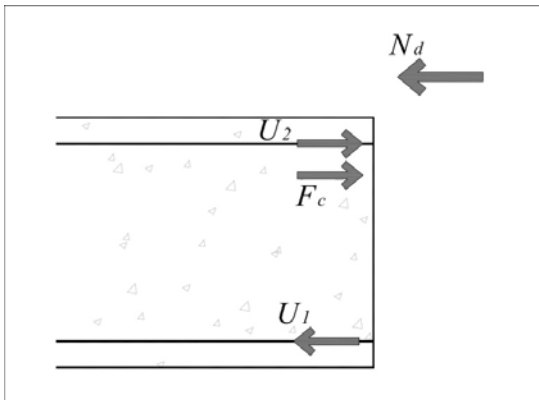
$$U_2 \cdot (0,45 - 0,05) = 3,87 Tn \cdot m \Rightarrow$$

$$U_2 = 9,69 Tn \Rightarrow$$

$$A_{s2} = \frac{9,69 Tn}{(50000 Tn / m^2) / 1,15} = 0,0002228 m^2 = 2,23 cm^2 \Rightarrow$$

$\frac{2,23}{1^2 \cdot \pi} = 0,71 \Rightarrow$ Pero serán necesarios **dos aceros de diámetro 20 mm** por cuestiones de simetría.

Ahora procedemos a dimensionar la armadura inferior, sabiendo que el cometido de esta es equilibrar al momento límite. Aplicamos sumatoria de fuerzas horizontales:



$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$U_1 = N_c + U_2 - N_d \Rightarrow$$

$$U_1 = \frac{2500}{1,5} \cdot 0,8 \cdot 0,28 \cdot 0,3 + 9,69 - 22,5 = 100,3Tn \Rightarrow$$

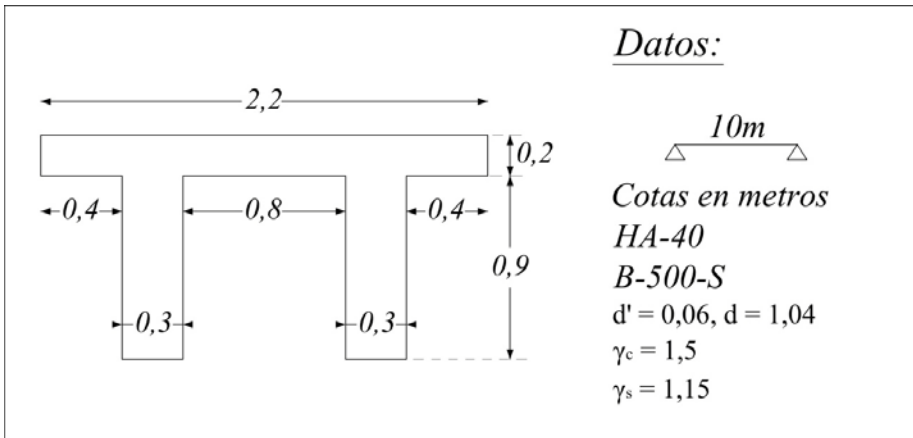
$$A_{s1} = \frac{100,3Tn}{(50000Tn/m^2)/1,15} = 2,31 \cdot 10^{-3} m^2 = 23,1cm^2 \Rightarrow$$

$$\frac{23,1}{1^2 \cdot \pi} = 7,35 \Rightarrow \text{Serán necesarios } \underline{\text{ocho aceros de diámetro 20 mm.}}$$

PRÁCTICA 4:

Enunciado:

Dimensionar la sección que se detalla en el dibujo para resistir las solicitaciones que se indican a continuación. El recubrimiento facilitado está medido al eje de los aceros.



$$M = 120 \text{ Tn}\cdot\text{m} \quad (\text{sin mayorar})$$

$$N = 175 \text{ Tn} \quad (\text{sin mayorar})$$

Resolución:

En primer lugar mayoramos las acciones:

$$M_d = 1,5 \cdot 120 \text{ Tn}\cdot\text{m} = 180 \text{ Tn}\cdot\text{m}$$

$$N_d = 1,5 \cdot 175 \text{ Tn} = 262,5 \text{ Tn}$$

Ahora veamos el valor de la excentricidad:

$$e_0 = \frac{M_d}{N_d} = 0,686 \text{ m}$$

Dicha excentricidad está medida a partir del centro de gravedad de la sección, que he de determinar. Por simplicidad lo haré para una sola T, la mitad de la sección, pues el centro del total estará a la misma cota. Tomo como referencia la fibra superior.

$$cdg = \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i} = \frac{1,1 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,65}{1,1 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,3} = 0,403m$$

Como ya hemos dicho esta distancia es medida respecto a la fibra superior y hacia abajo, por tanto estamos en un caso de grandes excentricidades.

Compruebo el ancho eficaz de la sección:

$$b_e = b_0 + \frac{1}{5}(\text{dist.momento.nulo}) \Rightarrow$$

$$b_e = 0,3 + \frac{1}{5}10 = 2,3m > 1,1m$$

Por tanto tomaremos toda la sección para el cálculo.

El siguiente paso es situar la fibra neutra con el fin de verificar en que dominio nos encontramos. Partiremos de las hipótesis de que no es necesaria la armadura de compresión y que todas las compresiones se encuentran en la parte de la tabla superior, y no afectan a los nervios:

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow$$

$$N_d \cdot (e_0 - cdg + d) = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$262,5 \cdot (1,04 - 0,403 + 0,686) = 0,8 \cdot x \cdot \frac{4000}{1,5} \cdot 2,2 \cdot (1,04 - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$0,4 \cdot x^2 - 1,04 \cdot x + 7,4 \cdot 10^{-2} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 0,0732m}$$

Efectivamente todas las compresiones están en la tabla.

Compruebo el valor de la profundidad de la fibra neutra límite:

$$x_{lim} = \frac{1}{1 + 1,428 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \cdot d = 0,679m$$

No hace falta armado de compresión, como supusimos en un principio, miro ahora si nos encontramos en el dominio 2 o 3:

$$0,259 \cdot d = 0,269 > x$$

Por tanto podemos afirmar ya que nos encontramos en el dominio 2.

Realizamos ahora el equilibrio de fuerzas horizontales para obtener la armadura principal:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$U_1 = N_c - N_d \Rightarrow$$

$$U_1 = \frac{4000}{1,5} \cdot 0,8 \cdot 0,0732 \cdot 2,2 - 262,5 = 81Tn \Rightarrow$$

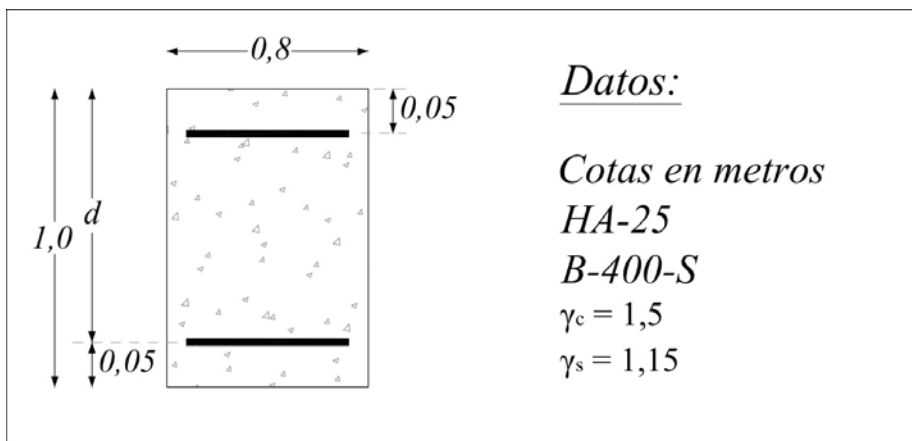
$$A_{s1} = \frac{81Tn}{(50000Tn/m^2)/1,15} = 0,001863m^2 = 18,63cm^2 \Rightarrow$$

Podría emplear por ejemplo **4 aceros de diámetro 25 mm**, con un área de 19,63 cm² que supera la necesaria por cálculo.

PRÁCTICA 5:

Enunciado:

Dimensionar la sección que se detalla en el dibujo para resistir las solicitaciones que se indican a continuación. El recubrimiento facilitado está medido al eje de los aceros.



$M = 25 \text{ Tn}\cdot\text{m}$ (sin mayorar)

$N = 1200 \text{ Tn}$ (sin mayorar)

Resolución:

En primer lugar mayoramos las acciones:

$$M_d = 1,5 \cdot 25 \text{ Tn}\cdot\text{m} = 37,5 \text{ Tn}\cdot\text{m}$$

$$N_d = 1,5 \cdot 1200 \text{ Tn} = 1800 \text{ Tn}$$

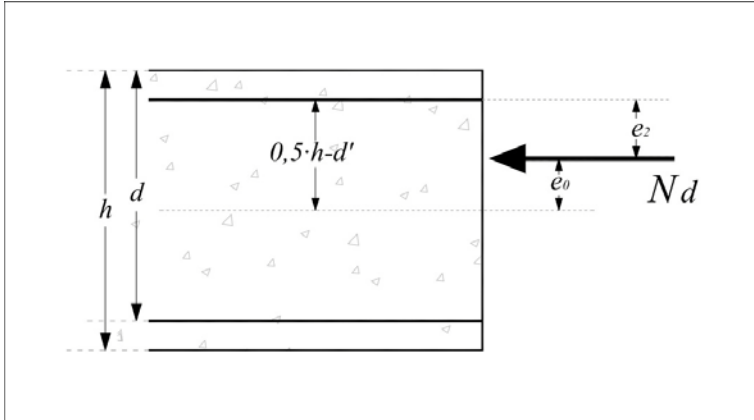
Ahora veamos el valor de la excentricidad:

$$e_0 = \frac{M_d}{N_d} = 0,0208 \text{ m}$$

Con lo cual es más que evidente que nos encontramos en un problema de pequeñas excentricidades. Veamos cual sería el momento de comparación:

$$f_{cd} \cdot h \cdot b \cdot (0,5 \cdot h - d') = 600 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Momento que habremos de comparar con el momento que produce el axil con respecto a la fibra superior (ver figura a continuación):



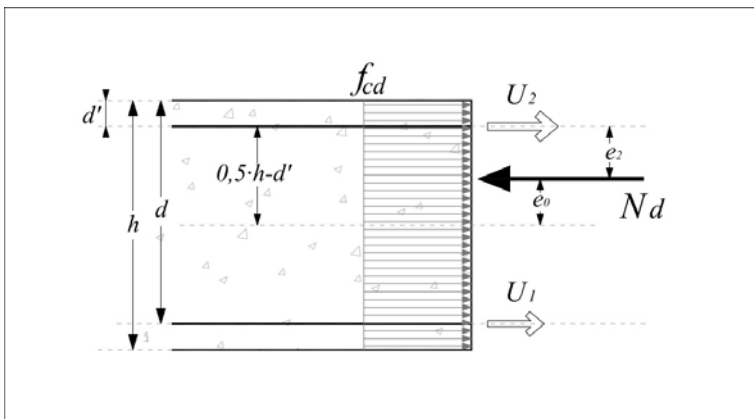
$$e_2 = 0,5 \cdot h - d' - e = 0,4292 \text{ m}$$

$$N_d \cdot e_2 = 772,56 \text{ Tn} \cdot \text{m}$$

Y por tanto nos encontramos en el caso en el que:

$$N_d \cdot e_2 > f_{cd} \cdot h \cdot b \cdot (0,5 \cdot h - d')$$

Con lo cual dimensionaremos en flexión simple:



Planteamos las ecuaciones del equilibrio de momentos (con respecto a la armadura superior) basándonos en la imagen anterior:

$$\sum M = 0 \Rightarrow$$

$$N_d \cdot e_2 = f_{cd} \cdot h \cdot b \cdot (0,5 \cdot h - d') + U_1 \cdot (d - d') \Rightarrow$$

$$1800 \cdot 0,4292 = 0,81 \cdot \frac{2500}{1,5} \cdot 0,45 + U_1 \cdot 0,9 \Rightarrow$$

$$U_1 = 191,73 \text{ Tn} \Rightarrow$$

$$\boxed{A_{s1} = 55,12 \text{ cm}^2}$$

Y a partir de este resultado, planteando el equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$N_d = U_1 + U_2 + f_{cd} \cdot h \cdot b \Rightarrow$$

$$U_2 = N_d - U_1 - f_{cd} \cdot h \cdot b \Rightarrow$$

$$U_2 = 274,93 \text{ Tn} \Rightarrow$$

$$\boxed{A_{s2} = 79,04 \text{ cm}^2}$$

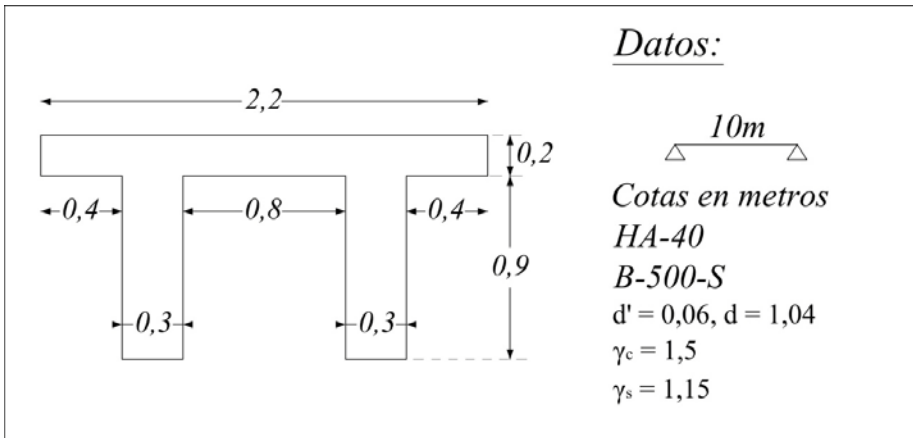
Y para terminar, sabiendo que en este tipo de casos es conveniente disponer de armadura simétrica, se adoptará:

$$\boxed{A_{s1} = A_{s2} = 79,04 \text{ cm}^2}$$

PRÁCTICA 6:

Enunciado:

Dimensionar la sección que se detalla en el dibujo para resistir las solicitaciones que se indican a continuación. El recubrimiento facilitado está medido al eje de los aceros.



$$M = 800 \text{ Tn}\cdot\text{m} \quad (\text{sin mayorar})$$

$$N = 66,66 \text{ Tn} \quad (\text{sin mayorar})$$

Resolución:

En primer lugar mayoramos las acciones:

$$M_d = 1,5 \cdot 800 \text{ Tn}\cdot\text{m} = 1200 \text{ Tn}\cdot\text{m}$$

$$N_d = 1,5 \cdot 66,66 \text{ Tn} = 100 \text{ Tn}$$

Ahora veamos el valor de la excentricidad:

$$e_0 = \frac{M_d}{N_d} = 12 \text{ m}$$

Con lo cual es más que evidente que nos encontramos en un problema de grandes excentricidades. Veamos cual sería el ancho eficaz:

$$b_e = b_0 + \frac{1}{5}(\text{dist.momento.nulo}) \Rightarrow$$

$$b_e = 0,3 + \frac{1}{5}10 = 2,3m > 1,1m$$

Por tanto tomaremos toda la sección para el cálculo.

La excentricidad está medida a partir del centro de gravedad de la sección, que he de determinar. Por simplicidad lo haré para una sola T, la mitad de la sección, pues el centro del total estará a la misma cota. Tomo como referencia la fibra superior.

$$cdg = \frac{\sum m_i \cdot r_i}{\sum m_i} = \frac{1,1 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,3 \cdot 0,65}{1,1 \cdot 0,2 + 0,9 \cdot 0,3} = 0,403m$$

Como ya hemos dicho esta distancia es medida respecto a la fibra superior y hacia abajo.

Ahora aplicamos sumatoria de momentos igual a cero para obtener la profundidad de la fibra neutra, suponiendo que no es necesaria la armadura de compresión y que las compresiones del hormigón se concentran en la tabla:

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow$$

$$N_d \cdot (e_0 - cdg + d) = 0,8 \cdot x \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (d - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$100 \cdot (1,04 - 0,403 + 12) = 0,8 \cdot x \cdot \frac{4000}{1,5} \cdot 2,2 \cdot (1,04 - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$0,4 \cdot x^2 - 1,04 \cdot x + 0,26925 = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0,2916m \Rightarrow mal$$

Por tanto hemos errado en las hipótesis de partida, hay compresiones en la tabla y hemos de replantear pues la ecuación:

Igualo el término $N_d \cdot (e_0 - cdg + d)$ a la suma de un término que represente las compresiones en la tabla y otro que represente las compresiones en los fustes:

$$100 \cdot (1,04 - 0,403 + 12) = \frac{4000}{1,5} \cdot 2,2 \cdot 0,2 \cdot (1,04 - 0,1) + \frac{4000}{1,5} \cdot 0,6 \cdot (0,8 \cdot x - 0,2) \left(1,04 - 0,2 - \frac{0,8 \cdot x - 0,2}{2} \right) \Rightarrow$$

$$1263,7 = 1102,93 + 1600 \cdot (0,8 \cdot x - 0,2) \cdot (0,94 - 0,4 \cdot x) \Rightarrow$$

$$0,10048125 = 0,752 \cdot x - 0,32 \cdot x^2 + 0,08 \cdot x - 0,188 \Rightarrow$$

$$0,32 \cdot x^2 - 0,832 \cdot x + 0,28848 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 0,412m}$$

Valor que parece lógico, al ser mayor que el anterior, y comprender consecuentemente además parte de los nervios. Veamos en que dominio estaríamos:

$$x_{lim} = \frac{1}{1 + 1,428 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \cdot d = 0,679m$$

No hace falta armado de compresión, como supusimos en un principio, miro ahora si nos encontramos en el dominio 2 o 3:

$$0,259 \cdot d = 0,269 > x$$

Por tanto nos encontramos en el dominio 3.

Ahora procedemos a aplicar equilibrio de fuerzas horizontales y con ello obtener el armado:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow$$

$$U_1 = N_c - N_d \Rightarrow$$

$$U_1 = 1173,3 + 207,36 - 100 = 1280,7Tn \Rightarrow$$

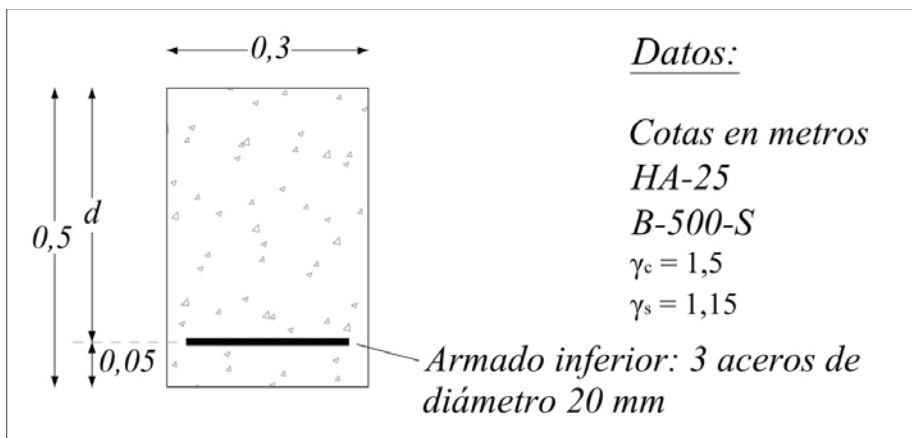
$$A_{s1} = \frac{1280,7Tn}{\left(50000Tn/m^2 \right) / 1,15} = 0,02945m^2 = 294,5cm^2 \Rightarrow$$

Podría emplear por ejemplo **19 aceros de diámetro 32 mm** en cada nervio, con lo cual no se conseguiría mantener el recubrimiento al centro de gravedad de los aceros del cual se ha partido, y habría que replantear las ecuaciones con uno más acorde y el uso de grupos de barras.

PRÁCTICA 7:

Enunciado:

Dimensionar los cercos de cortantes para que la sección que se detalla a continuación resista las sollicitaciones de cortante expuestas a continuación. En un segundo apartado determinar cual sería el cortante que soportaría sin instalar ningún tipo de cerco. El recubrimiento facilitado está medido al eje de los aceros.



$$M_d = 12 \text{ Tn}\cdot\text{m} \quad (\text{mayorado})$$

$$N_d = 0 \text{ Tn} \quad (\text{mayorado})$$

$$V_d = 12 \text{ Tn} \approx 120 \text{ kN} \quad (\text{mayorado})$$

Resolución:

En primer lugar hemos de calcular a partir del cortante de diseño el cortante efectivo con el cual se realizará el cálculo:

$$V_{rd} = V_d + V_{cd}$$

Siendo:

$$V_{cd} = 0 \text{ en este caso, puesto que la pieza no tiene canto variable.}$$

A partir de este cortante efectivo realizaremos las siguientes comprobaciones:

$V_{rd} \leq V_{u1}$ Esfuerzo cortante de agotamiento por compresión oblicua del alma.

$V_{rd} \leq V_{u2}$ Esfuerzo cortante de agotamiento por tracción en el alma.

Procedemos con la primera de las comprobaciones, V_{u1} :

$$V_{u1} = K \cdot f_{1cd} \cdot b_0 \cdot d \cdot \frac{\cot g(\theta) + \cot g(\alpha)}{1 + \cot g^2(\theta)}$$

Puesto que:

$$\sigma'_{cd} = \frac{N_d}{A_c} = 0$$

nos encontramos entonces en el caso:

$$0 < \sigma'_{cd} \leq 0,25 \cdot f_{cd}$$

Y por tanto:

$$K = 1 + \frac{\sigma'_{cd}}{f_{cd}} = 1$$

El resto de los parámetros serán:

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\theta = 45^\circ, \text{ escogido arbitrariamente cumpliendo } 0,5 \leq \cot g\theta \leq 2,0$$

$$d = 450 \text{ mm}$$

$$b_0 = 300 \text{ mm}$$

$$f_{1cd} = 0,60 \cdot f_{cd} = 0,6 \cdot \frac{25}{1,5} N/mm^2 = 10 N/mm^2 \quad \text{cumpliendo} \quad f_{ck} \leq 60 N/mm^2$$

Y por lo tanto, sustituyendo en la expresión:

$$V_{u1} = 1 \cdot 10 \cdot 300 \cdot 450 \cdot \frac{\cot g(45) + \cot g(90)}{1 + \cot g^2(45)} = 675,000 kN = 67,5 Tn$$

Que sería el mismo resultado que obtendríamos con la expresión abreviada:

$$V_{u1} = 0,30 \cdot f_{cd} \cdot b_0 \cdot d = 0,30 \cdot 10 \cdot 300 \cdot 450 = 67,5 \text{ Tn}$$

Como podemos comprobar se cumple la condición $V_{rd} \leq V_{u1}$

Procedemos ahora al cálculo del parámetro V_{u2} :

Puesto que nos indican que será necesaria la armadura de cortante, no tendremos que empezar suponiendo que no es necesaria, y posteriormente cambiar la formulación. Partimos directamente de:

$$V_{u2} = V_{su} + V_{cu}$$

Y la contribución del hormigón tiene como expresión:

$$V_{cu} = \left[\frac{0,15}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{cv})^{1/3} + 0,15 \cdot \sigma'_{cd} \right] \cdot \beta \cdot b_0 \cdot d$$

Donde:

$$\xi = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{450}} = 1,67 < 2,0$$

$f_{cv} = f_{ck} = 25 \text{ N/mm}^2$ cumpliendo $f_{cv} \leq 60 \text{ N/mm}^2$ (el control lo consideramos no indirecto)

$$\rho_1 = \frac{A_s}{b_0 \cdot d} = \frac{3 \cdot \pi}{30 \cdot 45} = 0,007 \leq 0,02$$

Para la obtención de θ_e utilizaremos el método simplificado:

$$0,5 \leq \cot g \theta_e = \frac{\sqrt{f_{ct,m}^2 - f_{ct,m} \cdot (\sigma_{xd} + \sigma_{yd}) + \sigma_{xd} \cdot \sigma_{yd}}}{f_{ct,m} - \sigma_{yd}} \leq 2,0$$

que realizando operaciones desemboca en la siguiente expresión:

$$0,5 \leq \cot g\theta_e = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{xd}}{f_{ct,m}}} \leq 2,0$$

Y puesto que $\sigma_{xd} = \frac{N_d}{A_c} = 0$ obtenemos:

$$0,5 \leq \cot g\theta_e = 1 \leq 2,0$$

Y por tanto el parámetro β resulta:

$$\beta = \frac{2 \cdot \cot g\theta - 1}{2 \cdot \cot g\theta_e - 1} = 1 \quad \text{puesto que} \quad 0,5 \leq \cot g\theta < \cot g\theta_e$$

Por tanto sustituyendo en la expresión inicial:

$$V_{cu} = \left[\frac{0,15}{1,5} \cdot 1,67 \cdot (100 \cdot 0,007 \cdot 25)^{1/3} + 0,15 \cdot 0 \right] \cdot 1 \cdot 450 \cdot 300 = 58522 N = 5,85 Tn$$

Ahora hemos de determinar cual es el acero necesario para que juntando colaboración de acero y hormigón se cumpla la expresión $V_{rd} \leq V_{u2}$:

$$V_{rd} - V_{cu} = 61478 N \leq V_{su}$$

Teniendo la colaboración del acero la siguiente expresión:

$$V_{su} = z \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\cot g\alpha + \cot g\theta) \cdot A_\alpha \cdot f_{y\alpha,d}$$

Con:

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\theta = 45^\circ, \text{ escogido arbitrariamente cumpliendo } 0,5 \leq \cot g\theta \leq 2,0$$

$$z = 0,9 \cdot d = 0,405 \text{ m}$$

$$f_{y\alpha,d} = \sigma_{sd} = f_{yd} = N/mm^2$$

Y por tanto, usando la expresión simplificada de la norma y resolviendo quedaría:

$$A_{90} = \frac{V_{su}}{0,9 \cdot d \cdot f_{y90,d}} = \frac{61478N}{0,405m \cdot 400N/mm^2} = 379mm^2/m = 3,79cm^2/m$$

Por ejemplo podríamos optar por armar con **cercos de 10 mm de diámetro cada 25 cm y saldrían 6,28 cm²/m.**

Comprobamos la cuantía mínima y la separación entre cercos:

$$\sum \frac{A_{\alpha} \cdot f_{y\alpha,d}}{\text{sen}\alpha} \geq \frac{f_{ct,m}}{7,5} \cdot b_0$$

Con:

$$\text{sen}\alpha = 1$$

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 2,56N/mm^2 \quad \text{puesto que} \quad f_{ck} \leq 50N/mm^2$$

$$b_0 = 300 \text{ mm}$$

Obteniendo al sustituir:

$$A_{\alpha} = \frac{2,56N/mm^2 \cdot 300mm}{7,5 \cdot 400N/mm^2} = 2,56cm^2/m$$

Por tanto la cuantía cumple, veamos la separación:

$$V_{rd} \leq \frac{1}{5} \cdot V_{u1} \quad \text{puesto que} \quad V_{rd} = 120kN \quad \text{y} \quad V_{u1} = 675kN$$

$$s_i \leq 0,75 \cdot d \cdot (1 + \cot g\alpha) = 337,5mm \leq 600mm$$

Por tanto cumple también dicha limitación.

Ahora realizaremos la segunda parte que nos pedían en el enunciado, cuantificar cual sería el cortante máximo que resistiría sin armadura específica, que resulta de la siguiente expresión:

$$V_{u2} = \left[\frac{0,18}{\gamma_c} \cdot \xi \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{cv})^{1/3} + 0,15 \cdot \sigma'_{cd} \right] \cdot b_0 \cdot d = 70226,4N = 70,22kN$$

Por tanto con esto el ejercicio queda resuelto.

BIBLIOGRAFÍA

- **COMISIÓN PERMANENTE DEL HORMIGÓN. EHE 08 Instrucción de Hormigón Estructural. Ministerio de Fomento Centro de Publicaciones, 2008.**
- **JIMENEZ MONTOYA P., GARCIA MESEGUER A., MORÁN CABRÉ F., ARROYO PORTERO J.C. Hormigón Armado. Gustavo Gili, 2010.**
- **CASTILLO LINARES A. Fundamentos de Hormigón Armado y Pretensado, Apuntes de Clase. 2003.**

