

Estrategias y representaciones según el estilo de pensamiento de estudiantes de secundaria en una tarea de modelización

Strategies and representations according to the thinking style of high school students in a modeling task

Karen Porras **Lizano***

 ORCID iD 0000-0002-6572-2640

Elena **Castro-Rodríguez****

 ORCID iD 0000-0002-2560-8982

Juan Luis **Piñeiro*****

 ORCID iD 0000-0002-9616-3925

Resumen

A través de un enfoque cualitativo, identificamos y caracterizamos las estrategias y representaciones que realizan estudiantes de Educación Secundaria durante la resolución de una tarea de modelización, atendiendo a los estilos de pensamiento de los participantes. Encontramos el empleo del pensamiento analítico en estrategias como el uso de cálculos numéricos, correspondencias y patrones. Las representaciones asociadas a las dos primeras estrategias corresponden a la representación simbólica-numérica. Para la tercera estrategia, uso de patrones, se utilizó el sistema de representación tabular. Solo un grupo utilizó formas de pensamiento visual y analítico en sus estrategias y representaciones. Concluimos que la falta de uso de distintos sistemas de representación en las estrategias de resolución podría deberse a que la formación de los participantes pudo estar focalizada en el uso específico de representaciones simbólico-numéricas y lenguaje natural, incidiendo directamente en el tipo de estilo de pensamiento analítico al resolver la tarea de modelización. Destacamos la relevancia de la incorporación de herramientas más adecuadas en la enseñanza, que incidan en el uso de estrategias y representaciones que estimulen un estilo de pensamiento integrado y el empleo flexible de estos elementos para lograr un equilibrio entre la realidad y las matemáticas.

Palabras clave: Estrategias. Representaciones. Modelización matemática. Estilos de pensamiento. Educación Secundaria.

Abstract

Through a qualitative approach, we identify and characterize the strategies and representations carried out by High School students during the resolution of a modeling task, considering the participants' thinking styles. We found the use of analytical thinking in strategies such as the use of numerical calculations, correspondences, and patterns.

* Máster en Didáctica de la Matemática (UGR). Académica e Investigadora, Escuela de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional (UNA), Heredia, Costa Rica. E-mail: karen.porras.lizano@una.cr

** Doctora en Didáctica de la Matemática (UGR). Profesora Contratada Doctora, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: elenacastro@ugr.es.

*** Doctor por la Universidad de Granada (UGR). Profesor Asociado, Departamento Educación Diferencial, Facultad Filosofía y Educación, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), Santiago, Chile. E-mail: juanluis.pineiro@umce.cl.

The representations associated with the first two strategies correspond to the symbolic-numerical representation. For the third strategy, use of patterns, we used the tabular representation system. Only one group used forms of visual and analytical thinking in their strategies and representations. We conclude that the lack of use of different representation systems in resolution strategies could be due to the training of the participants could be focused on the specific use of symbolic-numerical representations and natural language, directly influencing the type of thinking style analysis when solving the modeling task. We emphasize the importance of incorporating more appropriate tools in teaching, which affect the use of strategies and representations that stimulate an integrated thinking style and the flexible use of these elements to achieve a balance between reality and mathematics.

Keywords: Strategies. Representations. Mathematical modelling. Thinking styles. Secondary education.

1 Introducción

La modelización matemática ha incrementado su atención en la comunidad de educadores e investigadores en las últimas décadas (STENDER, 2018). Muestra de ello, son los números especiales dedicados a este tópico en revistas como ZDM (véase v. 38, n. 2-3; v. 50, n. 1-2) o AIEM (véase n. 17), o la celebración del congreso *International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA). Además, se han generado grupos de trabajo en congresos como el *International Congress on Mathematical Education* (ICME) y el *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME). En ellos, han surgido diversas teorías sobre “el significado y papel de la modelización matemática en el campo de la educación matemática” (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2020, p. 5), que convergen en la concepción de la modelización como una transición entre la realidad y la matemática, al resolver un problema de contexto real (LEDEZMA; FONT; SALA, 2022).

La relevancia de la modelización no ha pasado desapercibida por los currículos de diversos países como en Costa Rica, donde en el año 2012, el Ministerio de Educación Pública (MEP) realizó cambios trascendentales en el currículo de matemática. En este documento se brinda especial relevancia a la resolución de problemas con entornos reales, físicos, sociales y culturales en el aula, siendo trascendental el uso de la modelización. Además, se sigue la noción de que las personas aprenden a resolver problemas a través de la creación de la matemática, es decir al construir modelos matemáticos, y externalizar sus soluciones a través de diversas representaciones (LESH; ZAWOJEWSKI, 2007). Aquí, se destaca la importancia de estudiar el estilo de pensamiento del resolutor, que involucra dos elementos relevantes, las estrategias de resolución de la tarea y las representaciones utilizadas para comunicar externamente los procesos matemáticos involucrados en ellas. Por ello, este trabajo pretende identificar y caracterizar ambos elementos al resolver una tarea de modelización matemática atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes de primer curso de educación secundaria.

2 Antecedentes de investigación

En relación con los estudios centrados en el uso de representaciones en la resolución de tareas de modelización la investigación es limitada. Algunos trabajos señalan las dificultades que presentan los estudiantes (GUERRERO; ORTIZ, 2012) y un desempeño bajo en su competencia al resolver tareas (GUERRERO; ORTIZ, 2012; RELLENSMANN; SCHUKAJLOW; LEOPOLD, 2017).

Guerrero y Ortiz (2012) implementaron una tarea de modelización con estudiantes de primer año de educación secundaria, cuya edad se encontraba entre doce y catorce años, encontrando que los sistemas de representación más usados son el lenguaje natural y el numérico, aunque para este nivel idealmente deberían haber utilizado el sistema algebraico. Además, los estudiantes no poseían todas las competencias para llevar a cabo un proceso de modelización de manera independiente (proceso intuitivo), presentando mayor dificultad en la etapa de construcción del modelo matemático. Los autores concluyen que las competencias de modelización podrían adquirirse con el tiempo y la práctica de aula.

Otras investigaciones se centran en las representaciones manifestadas durante la resolución de problemas matemáticos (e.g., BROWN; BOSSÉ; CHANDLER, 2016; SINGH, 2000). Por ejemplo, algunas destacan dificultades en el uso de sistemas de representación como el verbal y simbólico (GONZÁLEZ; CASTRO-RODRÍGUEZ; CASTRO, 2016) o conexiones entre el conocimiento previo y el nuevo (ROORDA; VOS; GOEDHART, 2015), lo que puede entorpecer el uso de las estrategias y su expresión a través de representaciones en la resolución de problemas (GONZÁLEZ; CASTRO-RODRÍGUEZ; CASTRO, 2016).

En particular, algunos trabajos sobre resolución de problemas de tareas de proporcionalidad revelan que los estudiantes utilizan el sistema de representación numérico en la construcción del concepto de unidad, de la estructura multiplicativa y de los esquemas de iteración o patrones (SINGH, 2000), y que usan técnicas centradas en brindar una respuesta mecánica, a través de cálculos, en lugar de reflexionar sobre cómo resolver el problema con sentido como se pretende en ambientes de modelización (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2020; VAN DOOREN *et al.*, 2006). Asimismo, diversas investigaciones en primaria (AVCU; AVCU, 2010; SÁNCHEZ, 2013) y secundaria (TJOE; DE LA TORRE, 2014) proponen olvidar el uso de algoritmos mecánicos al resolver problemas de proporciones y estimular la reflexión en el uso de diversas estrategias de enseñanza, como la utilización de distintas representaciones con el fin de mejorar el aprendizaje de los contenidos matemáticos (MORGAN; KYNIGOS, 2014;

OREY; ROSA, 2018), siendo esto último concordante con el objetivo de resolver problemas de modelización.

Con respecto a la investigación sobre el uso de estrategias en tareas de modelización, Rellensmann, Schukajlow y Leopoldo (2017) pidieron a 61 estudiantes que crearan un dibujo de la situación (dibujo situacional) y un dibujo del modelo matemático (dibujo matemático) antes de resolver una situación-problema de modelización. Los autores encontraron que el conocimiento sobre estrategias de resolución al usar el dibujo como medio de expresión, se relacionó positivamente con el desempeño al modelizar. Es decir, los estudiantes con mejores modos de proceder construyeron dibujos matemáticos de mayor precisión y resolvieron mejor los problemas de modelización. Dado que, al generar un dibujo situacional, el estudiante tiene que seleccionar y organizar los objetos y relaciones relevantes descritos en el problema, este profundiza en la comprensión de la situación del problema y lo ayuda a manejar la transición de la realidad a las matemáticas (RELLENSMANN; SCHUKAJLOW; LEOPOLD, 2017).

3 Marco teórico

En este apartado se presenta, en primer lugar, una síntesis de la perspectiva teórica de modelización propuesta por Lesh y Doerr (2003). En segundo lugar, se expone la teoría relativa a representaciones. En tercer y último lugar, se describe el referente teórico de estrategias de resolución según el estilo de pensamiento de los estudiantes.

3.1 Modelización Matemática

Los modelos matemáticos son considerados como sistemas conceptuales que se expresan usando sistemas de notación externos, y que se utilizan para construir, describir o explicar los comportamientos de otro(s) sistema(s) (LESH; DOERR, 2003; GALLART *et al.*, 2017). O sea, un modelo matemático es descrito como un proceso complejo que construye y representa una analogía entre un sistema desconocido o abstracto y un sistema previamente conocido o familiar (GALLART *et al.*, 2017). En efecto, Montejo-Gómez, Fernández-Ahumada y Adamuz-Povedano (2021) señalan que, para caracterizar un modelo matemático en un ámbito escolar, se debe contemplar la unión de tres elementos que le dan forma, como el sistema real a modelar, su matematización y las representaciones utilizadas para expresar ambos.

Atendiendo a Lesh y Doerr (2003), durante el proceso de modelización, se llevan a cabo cuatro etapas: descripción, manipulación, predicción y validación (ver Figura 1), en las que es

necesario un manejo flexible y espontáneo de representaciones de los contenidos matemáticos involucrados. En la primera etapa se identifica la situación-problema, se comprende y sistematiza la información importante, con el fin de elaborar una representación interna de esta. En la segunda etapa, se realiza la traducción de información relevante a lenguaje matemático, obteniéndose un modelo del problema (representación externa), con el fin de buscar la solución del modelo matemático. La tercera etapa, predicción, corresponde a la interpretación y análisis de los resultados en virtud de los conocimientos iniciales de la situación-problema. Por último, en la cuarta etapa, se evalúan los resultados obtenidos del modelo matemático, retroalimentando y juzgando la utilidad de la solución del problema matemático.

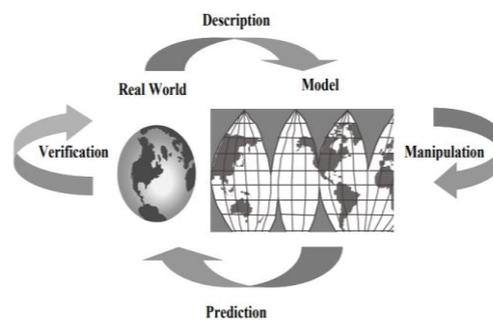


Figura 1 – Ciclo de modelización de la perspectiva Modelos y Modelización
Fuente: Lesh y Doerr (2003, p. 17)

En la perspectiva de modelos y modelización de Lesh y Doerr (2003) se enfatiza el uso de tareas matemáticas donde el resolutor crea, refina o adapta interpretaciones matemáticas, o formas de pensar y procedimientos, visualizados en sus estrategias al resolverla. Asimismo, es necesario que existan espacios de reflexión y análisis; incentivando, al mismo tiempo, habilidades de gran potencial como la imaginación, la creatividad o la invención en el estudiante (PORRAS; CASTRO-RODRÍGUEZ, 2021), es decir, tareas realmente problemáticas. Por tanto, el uso dado a las tareas matemáticas es distinto al que se realiza en un enfoque tradicional, donde se entrena al estudiante para dominar un concepto matemático previamente estudiado y, posteriormente, se aplica tareas diseñadas para requerir el uso de dicho concepto (LESH; ZAWOJEWSKI, 2007).

Este estudio considera tareas generadoras de modelos (MEAs por sus siglas en inglés, *Model-Eliciting Activities*), propuestas por Lesh *et al.* (2003). Estos se diferencian de los problemas tradicionales porque deben contemplar seis principios en su diseño: (1) significado personal, (2) construcción del modelo, (3) autoevaluación, (4) documentación, (5) prototipo simple, y (6) generalización del modelo. La actividad debe poseer un contexto de la vida real del estudiante, donde se construye, modifica y refina un modelo matemático con el fin de resolver el problema. Asimismo, poseen pautas para evaluar las conjeturas preliminares y

permiten plasmar explícitamente las representaciones internas obtenidas por el estudiante durante la resolución del problema. Además, se motiva al estudiante a formular situaciones similares, donde la solución propuesta del problema sirva, también, para resolverlas y se desafía al estudiante a ir más allá de producir una única solución, sino que sea capaz de producir otras maneras de pensar reutilizables. Es decir, el estudiante se enfrenta a un problema con una situación cercana, donde los sistemas conceptuales y estrategias no son condicionados a ningún método, son totalmente libres y dependientes de los conocimientos previos del estudiante.

En estas tareas, los tipos de representaciones desempeñan un papel crucial, pues permiten identificar y explorar diversas conexiones entre los conceptos y procedimientos matemáticos presentes en las estrategias de solución (SANTOS-TRIGO, 2002), generando formas significativas de aprendizaje de más profundidad que los obtenidos por una forma tradicional de enseñanza (LESH; DOERR, 2003).

3.2 Representaciones

En la resolución de tareas matemáticas, las descripciones, explicaciones y construcciones proporcionadas por los estudiantes son expresadas a través de distintas representaciones, por lo que constituyen un elemento central en el desarrollo de estrategias de resolución (MORGAN; KYNIGOS, 2014). Durante el proceso de modelización, las representaciones no solo se usan para producir una solución, sino que constituyen las componentes más importantes, donde se muestra el proceso de análisis y reflexión del estudiante (LESH; DOERR, 2003; MORGAN; KYNIGOS, 2014).

En educación matemática, el término representación ha adquirido distintos significados y connotaciones (RICO, 2009). Entre las distintas causas, se encuentra su doble naturaleza referida tanto al proceso de capturar un concepto o relación matemática, como al producto de la forma misma (NCTM, 2000) – así como la dualidad entre representación externa e interna – en forma de lenguaje hablado, símbolos escritos, imágenes u objetos físicos o ideas con las que la mente opera (HIEBERT; CARPENTER, 1992). En este trabajo, consideramos las representaciones como signos o gráficos específicos que permiten comunicar los conceptos y procesos matemáticos (LESH; DOERR, 2003). Estos signos y gráficos no pueden entenderse de forma aislada, sino dentro de un sistema de representación que satisface un conjunto de reglas con el que se puede identificar o crear representaciones, operar sobre y con ellas, y determinar relaciones (GOLDIN, 2002; KAPUT, 1991).

Dentro de los modos convencionales de representación de las estructuras numéricas, Castro y Castro (1997), Goldin (2002) y Kaput (1991) distinguen entre sistemas de representación los siguientes tipos:

1. *Simbólico-numérico*: formado por símbolos alfanuméricos con los cuales podemos relacionar y hacer operaciones con cantidades numéricas.
2. *Tabular*: tablas de valores, arreglos de filas y columnas es decir en forma matricial.
3. *Representación icónica-gráfica*: iconos, diagramas visuales, representaciones pictóricas, gráficos, figuras geométricas, gráficas, entre otros; que permiten la visualización de las ideas matemáticas.
4. *Representación lenguaje verbal (oral o escrito)*: consiste en expresar enunciados verbales orales o escritos en lenguaje tradicional.

3.3 Estilos de pensamiento y estrategias de resolución

Sobre los diferentes ciclos de modelización existentes en la educación matemática, hay consenso en que el proceso tiene características cíclicas y no-lineales (CZOCHER, 2017), pero debido a la complejidad del pensamiento de los individuos, dichas características pueden no cumplirse (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2020). Por ello, es necesario adoptar una visión cognitiva para profundizarse en dicho proceso, especialmente en lo que denomina Borromeo Ferri (2018) como las rutas individuales visibles de modelización.

Las rutas de modelización se consideran como el proceso individual (interno o externo) que realiza el sujeto según su preferencia al modelizar (BORROMEIO FERRI, 2018). Es decir, en la modelización “el individuo inicia este proceso durante una determinada fase, según sus preferencias, y luego pasa por diferentes fases varias veces o solo una, enfocándose en ciertas fases y/o ignorando otras” (BORROMEIO FERRI, 2007, p. 265). Además, se habla de rutas de modelización visibles, dado que el sujeto puede usar representaciones externas para expresar los pensamientos matemáticos generados durante el recorrido de las fases del proceso de modelización (BORROMEIO FERRI, 2007). Así, se debe tomar en cuenta el estilo de pensamiento matemático de los estudiantes, entendiendo este como “la forma en que un individuo prefiere presentar, comprender y pensar detenidamente, hechos matemáticos y conexiones, mediante ciertos pensamientos internos y/o representaciones externas” (BORROMEIO FERRI, 2010, p. 34).

Según sea el estilo de pensamiento del estudiante, serán los modos de proceder que selecciona y aplica el estudiante para abordar una tarea de modelización, es decir las estrategias

o caminos de resolución. Estos elementos, se entienden como el plan de acciones o guía en el camino de resolución que planifica y reflexiona para obtener una solución con sentido (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2020; STENDER, 2018), a la vez que desarrolla estructuras conceptuales matemáticas que ayudan a tomar decisiones para encontrar una solución (SCHOENFELD, 1985). En este estudio, consideramos las estrategias definidas por Borromeo Ferri (2018) en la modelización matemática basadas en el estilo de pensamiento del resolutor.

1. *Estrategias de pensadores analíticos*: realizan la transición del modelo real al modelo matemático y viceversa. Trabajan principalmente de manera formalista, es decir prefieren el uso de las representaciones externas utilizando el formalismo matemático y son mejores para *percibir* los aspectos matemáticos de una situación real dada. Son capaces de comprender hechos matemáticos idealmente a través de representaciones simbólicas o verbales existentes y prefieren proceder en una secuencia de pasos.

2. *Estrategias de pensadores visuales*: prefieren las características internas distintivas, imaginaciones y representaciones pictóricas externalizadas, así como una comprensión de hechos matemáticos y conexiones a través de representaciones holísticas. En su mayoría, representan mentalmente la situación en imágenes. Su razonamiento durante el proceso de modelización suele ser muy vívido, incluso mientras están trabajando dentro del modelo matemático. A menudo, siguen el ciclo de la modelización dado. Las imaginaciones internas se ven afectadas, principalmente, por fuertes asociaciones con situaciones que han experimentado.

3. *Estrategias de pensadores integrados*: combinan formas de pensamiento visual y analítico. Son capaces de cambiar en forma flexible entre las diferentes representaciones o formas de proceder. Muestran un equilibrio entre la realidad y las matemáticas.

Por tanto, el estilo de pensamiento matemático del individuo se basa en dos componentes relevantes: representaciones internas y externas, y un listado de estrategias o formas de proceder.

4 Objetivo de investigación

Dada la relevancia del uso de estrategias y representaciones adecuadas para expresar las ideas matemáticas al resolver una tarea de modelización (LESH; DOERR, 2003), y al limitado estudio centrado en el tema, se considera necesario realizar investigación que atienda a ambos elementos (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2020; OREY; ROSA, 2018). Por ello, en este trabajo nos planteamos la pregunta de investigación: ¿cuáles son las estrategias y representaciones que utilizan los estudiantes al resolver una tarea de modelización según su estilo de pensamiento?

Para dar respuesta, proponemos como objetivo de investigación identificar y caracterizar las estrategias y representaciones al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de estudiantes de primer curso de educación secundaria.

5 Método

El enfoque de investigación fue el cualitativo, pues la finalidad es comprender y analizar situaciones profundizando en su significado (HERNÁNDEZ-SAMPIERI; FERNÁNDEZ; BAPTISTA, 2014). En el estudio participó una clase de 24 estudiantes de la provincia de San José, en Costa Rica, pertenecientes a un mismo grupo de primer curso¹ de Educación Secundaria, cuya edad promedio fue de trece años y con un estatus socioeconómico medio-bajo. Según el currículo oficial, a lo largo de la educación primaria, los estudiantes han de haber sido instruidos en ambientes de modelización y sobre sus fases: descripción, manipulación, predicción y validación (LESH; DOERR, 2003).

5.1 Tarea

La tarea de modelización matemática proporcionada a los participantes, *Cocinando con mi mamá* (Figura 2), ha sido utilizada en investigaciones previas (PORRAS, 2013). Se construyó según los lineamientos del currículo de Costa Rica, y siguiendo los principios propuestos por Lesh *et al.* (2003) para las tareas de modelización. Es decir, la actividad posee un contexto familiar del estudiante, pero el método de resolución es desconocido para este. La actividad trata sobre la realización de una receta de cocina, donde idealmente se espera que los estudiantes utilicen el objeto matemático de las proporciones en el incremento las cantidades de los ingredientes dados, cuya única solución correcta corresponde a 5,5 tazas de leche y 110 panecillos.

¹ El séptimo curso es la numeración referente a la Educación General Básica de Costa Rica equivale al primer curso de Educación Secundaria (7° grado en K11 en colegios académicos o K12 en colegios técnicos).

A la mamá de Carlos le encanta cocinar para su familia. Un día decidió hacer pan casero. La receta específica que necesita 3 tazas de harina y una taza de leche, además de otros ingredientes para preparar 20 panecillos. Como su familia se deleita mucho con el pan casero, ella decide usar toda la harina con la que cuenta y cuando la mide descubre que tiene 16,5 tazas de harina. Ahora, el problema para ella es determinar la cantidad de leche y el resto de los ingredientes de manera exacta para cumplir con la receta. Como sabe que a Carlos le gusta realizar cálculos matemáticos, le pide ayuda para determinar las cantidades exactas que necesita.



Así, ¿cuántas tazas de leche debería usar? Además, ¿cuántos panecillos pudo preparar mi madre con la cantidad de ingredientes que usó?

Redacte un informe donde se describe el método de solución utilizado y sus conclusiones para cada una de las preguntas anteriores. Además, contesta a la siguiente pregunta, ¿en qué otras situaciones similares se podría aplicar el razonamiento a este problema?

Figura 2 - Tarea planteada a los grupos participantes
Fuente: PORRAS (2013, p. 56)

5.2 Implementación de la tarea

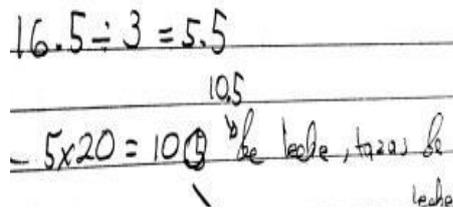
La tarea (Figura 2) se implementó durante dos sesiones de 40 minutos cada una. Se llevó a cabo en el horario habitual de la asignatura de matemáticas. Se les pidió a los estudiantes distribuirse en grupos. Los 24 participantes se dividieron en grupos de dos a tres estudiantes, esta configuración fue realizada por los mismos estudiantes como es habitual en su trabajo de aula, obteniendo nueve grupos en total. A continuación, se solicitó la escritura de todas las respuestas y soluciones en un informe detallado. Algunos, realizaron borradores de los procesos en los cuadernos, los cuales también fueron solicitados.

Una de las investigadoras ejerció el papel de guía en la aplicación de la tarea, pues la finalidad principal era que los estudiantes resolvieran las actividades de forma autónoma. El profesor oficial de la clase proporcionó datos de los sujetos del estudio y ayudó en la aplicación de la tarea. Los participantes debían estar capacitados en ambientes de modelización, dado que el currículo del Costa Rica contempla la modelización matemática como un elemento esencial de la contextualización activa en el aprendizaje de los estudiantes (MEP, 2012), implicando la resolución de problemas, donde se incluye el uso de estrategias de resolución y representaciones como medios de expresión de estructuras conceptuales como los modelos matemáticos de una situación real (LESH; DOERR, 2003), lo que proporcionó los datos para esta investigación.

5.3 Análisis

Los datos obtenidos fueron sometidos a un análisis de contenido (COHEN; MANION; MORRISON, 2007) que se llevó a cabo en dos etapas. La primera etapa consistió en la categorización de los datos realizada por la primera autora, en donde se analizó las rutas de modelización generadas por los estudiantes, buscando la identificación de las estrategias según

el estilo de pensamiento del resolutor: analítico, visual e integrado, utilizando las categorías propuestas por Borromeo Ferri (2018). Para categorizar una estrategia correspondiente al pensamiento analítico, se tomó en cuenta aspectos relacionados al uso de representaciones simbólico-numéricas, a través de los símbolos numéricos, los símbolos de las operaciones y flechas, entre otros (ver Figura 3(a)). En el caso del pensamiento visual, representaciones pictóricas, dibujos, entre otros (ver Figura 3(b)). Ambos tipos de estrategias fueron acompañadas con representaciones verbales escritas mostradas en frases o explicaciones.



(a) Estrategia de pensamiento analítico



(b) Estrategia de pensamiento visual

Figura 3 – Ejemplos de categorización de estrategias y representaciones
Fuente: elaboración propia

Posteriormente se analizaron las representaciones utilizadas en las estrategias, usando las categorías de sistemas de representación: simbólico-numérico, tabular, icónica-gráfica, y verbal-escrita, propuestas por Castro y Castro (1997), Goldin (2002) y Kaput (1991) presentadas en el marco teórico. Por ejemplo, en la Figura 3(a), observamos una estrategia que fue categorizada como de pensamiento analítico, por el uso representación del tipo simbólico-numérico, donde se muestra el uso del sistema de numeración arábigo, símbolos de operaciones como la división, multiplicación y la igualdad, entre otros. Para la Figura 3(b), se categorizó como una estrategia de pensamiento visual, dado que se usa el sistema de representación icónica-gráfica al dibujar cajas para representar las tazas de leche (en Costa Rica es tradicional vender la leche líquida en cajas) y circunferencias que representan las tasas de harina.

En una segunda etapa y para validar lo hecho, la segunda autora volvió a analizar los datos y discutieron entre ambas investigadoras los resultados hasta que no hubo discrepancias.

6 Resultados

En este apartado presentamos, en primer lugar, los resultados obtenidos sobre las rutas de modelización de preferencia. En segundo lugar, exponemos los resultados de las estrategias y representaciones según el estilo de pensamiento de los estudiantes al resolver la situación-problema propuesta. Por último, mostramos los resultados de los ejemplos que proporcionaron

los participantes sobre situaciones similares donde podrían aplicar el mismo razonamiento matemático de la actividad resuelta.

6.1 Rutas de modelización

Cada grupo de estudiantes planteó una respuesta a la tarea, por lo que se obtuvo un total de nueve respuestas de las que solo dos (G1 y G9) llegaron a una solución final correcta con distintas estrategias. La Figura 4 presenta las distintas rutas de modelización de preferencia según el estilo de pensamiento matemático de los grupos participantes al resolver la tarea propuesta.

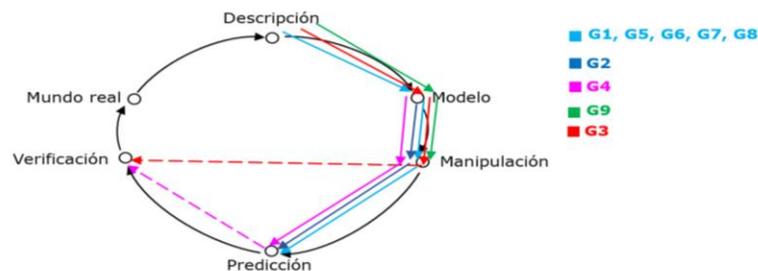


Figura 4 - Rutas de pensamiento al resolver la tarea de modelización
Fuente: elaboración propia

En la Figura 4 observamos que se obtuvieron cinco rutas distintas de modelización. Donde cinco de los grupos involucrados (G1, G5, G6, G7, G8), coincidieron en una misma ruta, es decir realizaron las mismas etapas del ciclo de modelización, específicamente: Descripción-Modelo-Manipulación-Predicción. El resto de los grupos realizaron rutas distintas a la anterior, usando más o menos etapas del ciclo en comparación a la primera ruta mencionada. Cabe destacar que en las rutas de modelización de los grupos G9 y G3, la última etapa fue realizada de forma incompleta, por ello aparece en la Figura 4 como flechas con línea discontinua.

Asimismo, se observa que ninguno de los grupos realizó todas las fases del ciclo de modelización, ni tampoco realizaron dicho ciclo varias veces, es decir que las soluciones no fueron mejoradas y ni retroalimentadas al recorrer varias veces las fases del ciclo (Cuadro 1).

Estrategias según pensamiento		RSN	RT	RIG	RVE
Análítico	Cálculos numéricos	G1, G3, G4, G5, G6, G7, G9			G1, G3, G4, G5, G6, G7, G9
	Correspondencias	G2, G8			G2, G8
	Patrones	G9	G9		G9
Visual	Diagramas	G1		G1	G1

Nota: RSN=Representación simbólica-numérica, RT=Representación Tabular, RIG=Representación icónica-gráfica, RVE=Representación verbal-escrita. Los Gi para i=1, ..., 9 corresponde a la codificación de cada uno de los grupos de estudiantes.

Cuadro 1 - Estrategias y representaciones realizadas por los grupos de estudiantes
Fuente: elaboración propia

En cada una de estas rutas, los participantes plasmaron diversas estrategias expresadas por medio de representaciones. El Cuadro 1 presenta las estrategias y representaciones presentes en las respuestas de cada grupo. Concretamente, se presentan los estilos de pensamiento analítico y visual, estilos usados de manera mayoritaria por los participantes. El grupo resaltado (G1) fue el único que utilizó un estilo de pensamiento integrado (mezcla de estilo visual y analítico), por lo que se ha ubicado en ambas filas.

6.2 Estrategias de pensadores analíticos

Uso de cálculos numéricos

El primer tipo de estrategia detectada de los resolutores de estilo de pensamiento analítico fue el uso de operaciones básicas aritméticas a través de cálculos numéricos para expresar procesos. Esta estrategia fue la más usada por los grupos al resolver la tarea, específicamente, estuvo presente en las respuestas de siete de los nueve grupos y se presentó al realizar operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y división, entre otros. La Figura 5 muestra ejemplos de respuestas pertenecientes a esta categoría.

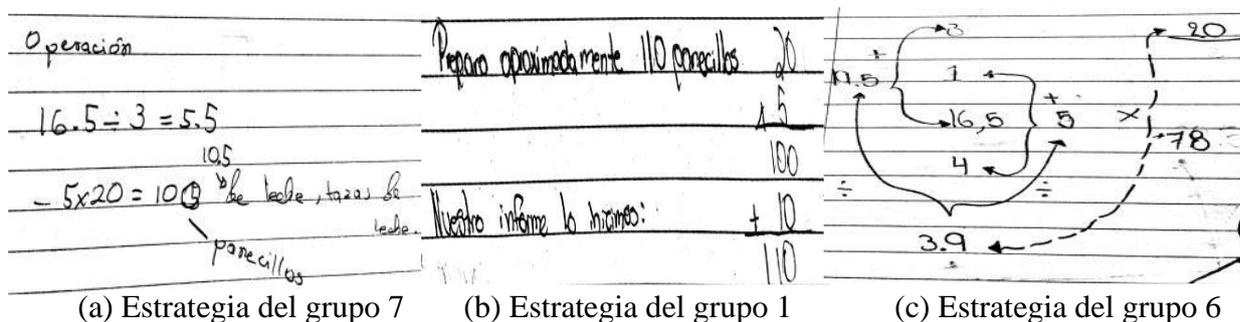


Figura 5 - Ejemplos de la estrategia uso de operaciones aritméticas básicas
 Fuente: elaboración propia

En la Figura 5(a) evidencia el uso de operaciones de división y multiplicación al buscar la cantidad de veces que crece la cantidad de harina, es decir la constante de proporcionalidad, obteniendo el resultado de 5,5. Los estudiantes de este grupo (grupo 7) la usaron para determinar la cantidad de tazas de leche. En la Figura 5(b), el grupo 1 usa la cantidad de tazas de leche correcta (5,5 tazas), realizan el producto de la cantidad de veinte panecillos por la cantidad entera de tazas de leche. A los resultados anteriores le suman la mitad de una taza de leche que hace falta y, la mitad de los panecillos a la cantidad anterior (diez panecillos), obteniendo como solución correcta los 110 panecillos. Por último, en la Figura 5(c) se muestra la respuesta del grupo 6, donde se utiliza la estrategia de cálculos numéricos, pero esta solución se mostró desordenada, no verifica las condiciones del problema y presenta errores

conceptuales. Además, no se aplicó la etapa de validación del proceso de modelización matemática.

En las respuestas correspondientes a esta estrategia de pensamiento analítico realizada por siete de los nueve grupos participantes, se observa una preferencia del uso de representaciones simbólica-numérica, a través de los símbolos numéricos, los símbolos de las operaciones y flechas. En menor medida se detectan representaciones verbales escritas.

Uso de correspondencias matemáticas

El segundo tipo de estrategia detectada en pensadores analíticos presenta una relación binaria entre dos conjuntos de elementos distintos. Esta estrategia se manifestó en dos de los nueve grupos participantes. Ambas soluciones se presentan en la Figura 6.

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1,5 = 16,5$$

5 tazas de leche y un cuarto de leche.

$$20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 7,5 = 107 \text{ panecillos}$$

(a) Estrategia del grupo 2

Tazas de harina:	3	Tazas de leche:	1
Panecillos:	20		
		3 = 1	
		3 = 1	
		3 = 1	
		3 = 1	
		3 = 1,5	
	$3 \times 16,5 = 5,5$	5 x 20	
		100	

(b) Estrategia del grupo 8

Figura 6 - Ejemplos de la estrategia uso de correspondencias

Fuente: elaboración propia

Un ejemplo del uso de esta estrategia se manifiesta en la Figura 6(a), donde se presenta la solución del grupo 2 que contiene la frase: *5 tazas de leche y un cuarto de leche*. De ella inferimos que el grupo de estudiantes considera la correspondencia de que cada tres tazas de harina equivalen a una taza de leche. Sin embargo, se presentan algunos errores cuando indican que 1,5 es la mitad de las tres tazas de harina, asumiendo, incorrectamente, que ese 1,5 corresponde a *un cuarto de leche*. Para encontrar la cantidad de panecillos, el grupo asume la correspondencia de que cada tres tazas de harina equivalen a veinte panecillos, pero de igual manera se equivocan en la cantidad de panecillos correspondientes a la mitad de las tres tazas de harina.

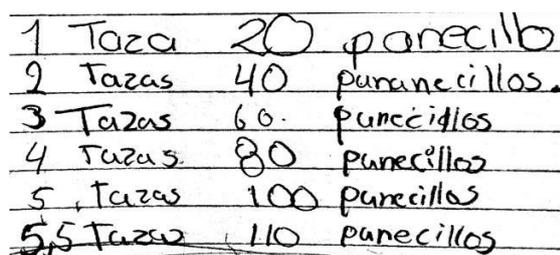
En la Figura 6(b), se observa que el grupo 8 asume la correspondencia incorrecta $3=1$, en vez de la equivalencia correcta $3:1$ que significa que por cada tres tazas de harina tenemos una taza de leche. En este caso, los elementos del primer conjunto corresponden a las cantidades de las tazas de harina, y los elementos del segundo serían las cantidades de tazas de leche. La solución de la imagen es incorrecta, debido a que aparece cuatro veces la correspondencia $3=1$. Al sumar los miembros izquierdos y derechos de las igualdades, respectivamente, se obtiene

una correspondencia de que quince tazas de harina es igual a 4,5 tazas de leche. Además, la correspondencia $3=0,5$ es errónea, pues en la parte derecha de la igualdad dividen por el número dos, obteniendo la mitad de uno, pero la parte izquierda se muestra invariante.

Las soluciones de los grupos que se presentan en la Figura 6 y que usaron este tipo de estrategia, prefirieron representaciones del tipo simbólico-numérico. Pero, a diferencia de las respuestas de la estrategia uso de cálculos numéricos donde el símbolo de igualdad se usa dentro de un cálculo, en la Figura 6(b) se usa el mismo símbolo para indicar una relación de proporcionalidad, utilizando una notación incorrecta al usar igualdades para representar proporcionalidad. Además, se detectó en menor medida el uso del lenguaje verbal-escrito.

Uso de patrones

El tercer tipo de estrategia detectada fue el uso de patrones donde se establece una serie o comportamiento recurrente entre valores numéricos que se repiten de una manera predecible (Figura 7).



1 Taza	20	panecillo
2 Tazas	40	panecillos
3 Tazas	60	panecillos
4 Tazas	80	panecillos
5 Tazas	100	panecillos
5,5 Tazas	110	panecillos

Figura 7 - Ejemplo de la estrategia de uso de patrones del grupo 9
Fuente: elaboración propia

Solamente uno de los nueve grupos participantes, específicamente el grupo 9, usó esta estrategia (Figura 7). En esta respuesta se presenta una tabla, en la cual la primera fila se observa la cantidad inicial de una taza de leche, que equivale a veinte panecillos. Luego, los estudiantes utilizaron una iteración o patrón al ir aumentando en una unidad las tazas de leche, y en el caso de la cantidad de los panecillos, duplica la cantidad anterior. Este comportamiento se mantuvo hasta el quinto caso, es decir hasta las cinco tazas de leche. En la siguiente fila el patrón utilizado cambia, pues a las tazas de leche se les realizó un aumento de 0,5 obteniendo como resultado final 5,5 tazas de leche. Esto mismo lo realizan con la cantidad de panecillos, aumentando la mitad de la cantidad que iba creciendo, es decir diez panecillos, obteniendo 110 panecillos, logrando una solución correcta de la tarea de modelización.

En la estrategia del grupo 9 (Figura 7), se observa un pensamiento más analítico al escoger una representación tabular utilizando la exploración de patrones y formulación de conjeturas en su solución, sin aplicar mecanismos de memorización o fórmulas para determinar la cantidad de tazas de leche y de panecillos correctas. Además, en la representación tabular se

utilizó una representación simbólica-numérica y verbal-escrita para explicar los procesos matemáticos, por lo que este grupo utilizó tres sistemas de representación distintos.

6.3 Estrategias de pensadores visuales

Uso de diagramas

El último tipo de estrategia detectada en los grupos participantes es la realización de un diagrama, específicamente en el grupo 1. Lo que constituye el único grupo que usó un estilo de pensamiento visual en la resolución del problema propuesto (Figura 8).

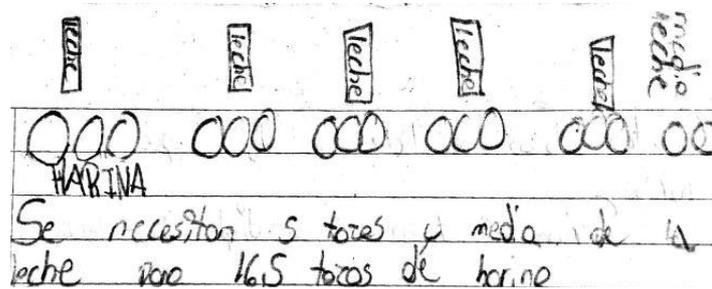


Figura 8 - Ejemplo de la estrategia de uso de diagramas
Fuente: elaboración propia

En la solución del grupo 1 (Figura 8) hay las tazas de harina representadas gráficamente como bolas y las tazas de leche como cajas. Además, se establece la relación gráfica de una taza de leche equivale a tres tazas de harina, deduciendo gráficamente que cinco tazas de leche equivalen a quince tazas de harina. También, los estudiantes expresaron la mitad de la taza de leche en lenguaje verbal-escrito *media leche*, pero realizaron gráficamente una y media circunferencia para representar esta situación. La respuesta final fue brindada en lenguaje verbal-escrito: *se necesitan 5 tazas y media de leche para 16,5 tazas de harina*. Por lo que, este grupo utilizó un sistema de representación icónico junto con un sistema numérico y verbal-escrito.

6.4 Estrategias de pensadores integrados

El mismo grupo anterior, el grupo 1, que usó la estrategia de pensamiento visual, utilizó una estrategia de pensamiento analítico para determinar la cantidad de panecillos. Es decir, este grupo usó estrategias de pensamiento integrado, dado que combinó formas del pensamiento visual y analítico en su resolución del problema. La estrategia de pensamiento analítico utilizada fue el uso de cálculos numéricos (ver Figura 5(b)), donde se utilizó el tipo de representación simbólico-numérico, logrando una solución correcta. Además, en ambas estrategias se presentó

en menor medida una representación verbal-escrita para fundamentar sus procesos matemáticos, por lo que este grupo, además de utilizar varias estrategias, utilizó tres sistemas de representación: simbólico-numérico, icónico-gráfico y verbal-escrito.

6.5 Ejemplos de situaciones similares

Al final de la tarea, se pidió a los estudiantes brindar ejemplos de situaciones similares, donde aplicarán el mismo razonamiento matemático de la actividad. Se obtuvo que solo tres grupos brindaron respuestas a través de representación verbal en lenguaje tradicional, visualizando claramente la utilidad de la matemática en situaciones de contexto laboral y cotidiano. Por ejemplo, el primer grupo (G2) propuso un contexto de construcción de edificios, donde se da el uso de un razonamiento similar, al calcular la cantidad de cemento, piedra, arena, agua, entre otros materiales al realizar edificaciones. El segundo grupo (G3) generó la situación de pintar las paredes de un departamento, donde se usa el mismo razonamiento para realizar el cálculo de la división de la pintura por cada pared, o también en el pago de los pintores al dividir el dinero. El ejemplo del tercer grupo (G7) fue muy similar a los dos anteriores.

7 Discusión

Los resultados mostraron el empleo de un estilo de pensamiento analítico mediante estrategias como el uso de cálculos numéricos, correspondencias y el uso de esquemas de iteración o patrones como en el estudio de Singh (2000). En particular, la estrategia más usada evidencia el predominio del uso de cálculos numéricos. Detectamos que solo uno de los grupos empleó un tipo de razonamiento integrado, al combinar formas de pensamiento visual y analítico, infiriéndose por el empleo de las estrategias uso de diagramas y uso de cálculos numéricos. Esto indica que solo un grupo usó estrategias estructuras conceptuales más complejas para resolver los problemas de modelización, mostrando el equilibrio entre la realidad y las matemáticas (RELLENSMANN; SCHUKAJLOW; LEOPOLD, 2017).

Las representaciones asociadas a las dos primeras estrategias – uso de cálculos numéricos y correspondencias matemáticas – corresponden al sistema de representación simbólico-numérico junto con el lenguaje natural (como apoyo al explicar sus procesos matemáticos), coincidiendo con los resultados de Guerrero y Ortiz (2012). Para la tercera estrategia, uso de patrones, se empleó el sistema de representación tabular. En la cuarta estrategia, uso de diagramas, ocurre lo mismo que en la segunda, pero además se usó el sistema

de representación icónico. Dos de los grupos (G1 y G9) mostraron un uso mayor de distintos sistemas de representación en sus estrategias, en comparación con el resto de grupos que solo usaron el sistema simbólico-numérico y lenguaje verbal-escrito, lo que sugiere un pensamiento más reflexivo y analítico, como se pretende idealmente en ambientes de modelización (MORGAN; KYNIGOS, 2014; TJOE; DE LA TORRE, 2014; VAN DOOREN *et al.*, 2006).

Los resultados anteriores no concuerdan con lo que propone el documento curricular de Costa Rica. En particular, con el limitado uso de estrategias y representaciones ideales al resolver situaciones-problema de modelización, pues al momento del estudio los participantes debían de haber sido instruidos en ambientes de modelización y debían contar con un amplio repertorio de estrategias de resolución y un manejo flexible de sistemas de representación para expresar sus pensamientos matemáticos. Unido a esto, se obtuvieron razonamientos desordenados y con errores que pudieron haberse detectado y evitado a través de acciones metacognitivas en todas las etapas del proceso de modelización, en especial en la fase de validación que no realizaron.

Por último, coincidiendo con los trabajos de Guerrero y Ortiz (2012) y Roorda, Vos y Goedhart (2015), los grupos no manifestaron en sus respuestas el uso del razonamiento proporcional, pues no incluyeron procesos o conceptos relativos a este tópico (como la regla de tres o el uso de porcentajes), conocimientos previos que los participantes debían manejar en el momento del estudio. Por lo que, no se obtuvieron evidencias del modelo matemático ideal que se esperaba que los estudiantes pudieran construir, según lo que se propone en el currículo.

8 Conclusiones

En este trabajo, identificamos y caracterizamos las estrategias y representaciones al resolver una tarea de modelización matemática, atendiendo al estilo de pensamiento de un grupo de estudiantes de primer curso de educación secundaria. Un aporte de este estudio radica en la necesidad de comprender la influencia de los estilos de pensamiento de los estudiantes al trabajar la modelización. Los resultados mostraron que la falta de uso de distintos sistemas de representación en las estrategias de resolución podría deberse a la formación de los estudiantes participantes. Concretamente, esta pudo estar focalizada en el uso específico de representaciones simbólico-numéricas y representaciones de lenguaje natural, incidiendo directamente en el tipo de estilo de pensamiento analítico al resolver la tarea de modelización. Además, son los sistemas de representación que en la educación escolar tradicional suelen considerarse como *correctos* y más comunes (SMITH, 2003).

Tras los hallazgos obtenidos, consideramos que es crucial generar oportunidades de aprendizaje que incidan en el uso de estrategias y representaciones en ambientes de modelización. Siendo, así, necesario incentivar el uso de estos elementos según un estilo de pensamiento integrado, apostando por el empleo flexible de ellos, lo que podría propiciar un equilibrio entre la realidad y las matemáticas. Además, el usar una diversidad de sistemas de representación en la enseñanza podría ayudar a fomentar el uso de un pensamiento más reflexivo y analítico, incidiendo directamente en las estrategias y las representaciones involucradas al resolver tareas de modelización.

Reconocimiento

Este trabajo ha sido desarrollado como parte de la tesis doctoral titulada *Conocimiento profesional de maestros de primaria en ejercicio sobre modelización matemática* dentro del Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, España.

Referencias

- AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA - AIEM. **Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. Madrid: SEIEM, 2012. ISSN 2254-4313. DOI: <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17>. Disponible en: <https://aiem.es/issue/view/359>. Acceso en: 21 oct. 2022.
- ÄRLEBÄCK, J. B.; DOERR, H. M. Moving beyond descriptive models: Research issues for design and implementation. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Madrid, [s.v], n. 17, p. 5-20, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.35763/aiem.v0i17.307>. Disponible en: <https://aiem.es/article/view/3906>. Acceso en: 24 abr. 2023.
- AVCU, R.; AVCU, S. 6th grade students' use of different strategies in solving ratio and proportion problems. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, Netherlands, v. 9, [s.n], p. 1277-1281, 2010. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.320>. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810024250>. Acceso en: 24 jun. 2023.
- BORROMEIO FERRI, R. Modelling from a cognitive perspective: Individual modelling routes of pupils. In: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (eds.). **Mathematical modelling: Education, engineering and economics**. Chichester: Horwood Publishing, 2007. p. 260-270.
- BORROMEIO FERRI, R. On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. **Journal für Mathematikdidaktik**, Berlín, v. 31, n.1, p. 99-118, 2010.
- BORROMEIO FERRI, R. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Cham: Springer, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9>. Disponible en: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-68072-9>. Acceso en: 24 jun. 2023.

BROWN, M.; BOSSÉ, M. J.; CHANDLER, K. Student errors in dynamic mathematical environments. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**, Plymouth, v. 17, n. 1, p.1-27, 2016. Disponible en: <https://www.cimt.org.uk/ijmtl/index.php/IJMTL/article/view/5>. Acceso en: 16 jul. 2022.

CASTRO, E.; CASTRO, E. Representaciones y modelización. *En*: RICO, L. (ed.), **Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria**. 2. ed. Barcelona: Horsori, 1997. p. 95-124.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. **Research methods in education**. 6. ed. Abingdon: Routledge, 2007.

CZOCHER, J. A. Mathematical modeling cycles as a task design heuristic. **The Mathematics Enthusiast**, Montana, v. 14, n.1, p. 129-140, 2017.

GALLART, C.; FERRANDO, I.; GARCÍA-RAFFI, L. M.; ALBARRACÍN, L.; GORGORIO, N. Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi problems. *In*: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education**. Cham: Springer, 2017. p. 265-275.

GOLDIN, G. A. Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. *En*: ENGLISH, L. D. (ed.). **Handbook of international research in mathematics education**. 2. ed. Abingdon: Routledge, 2002. p. 197-218. Disponible en: <https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9780203930236.ch9>. Acceso en: 24 jun. 2023.

GONZÁLEZ, F.; CASTRO-RODRÍGUEZ, E.; CASTRO, E. Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. **PNA**, Granada, v. 10, n. 4, p. 280-306, 2016. <https://doi.org/10.30827/pna.v10i4.6084>. Disponible en: <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6084/5404>. Acceso en: 24 jun. 2023.

GUERRERO, F.; ORTIZ J. Modelización matemática en Educación Media. Un estudio de competencias en un grupo de estudiantes. **Épsilon - Revista de Educación Matemática**, Andalucía, v. 29, n. 81, p. 27-40, 2012. Disponible en: https://thales.cica.es/epsilon_d9/sites/default/files/2023-02/epsilon81.pdf. Acceso en: 24 jun. 2023.

HERNÁNDEZ-SAMPIERI, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, M. P. **Metodología de la investigación**. 6 ed. México D.F: McGrall Hill, 2014.

HIEBERT, J.; CARPENTER, T. Learning and teaching with understanding. *In*: GROUWS, D. A. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992. p. 65-97.

MONTEJO-GÁMEZ, J.; FERNÁNDEZ-AHUMADA, E.; ADAMUZ-POVEDANO, N. A tool for the analysis and characterization of school mathematical models. **Mathematics**, Basilea, v. 9, n. 13, p. 1569, 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9131569>. Disponible en: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/13/1569>. Acceso en: 24 jun. 2023.

KAPUT, J. Notations and representations as mediators of construct live processes. *In*: VON GLASERSFELD, E. (ed.). **Radical constructivism in mathematics education**. New York: Springer, 1991. p. 53-74. DOI: <https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5>. Disponible en: <https://link.springer.com/book/10.1007/0-306-47201-5>. Acceso en: 24 jun. 2023.

LEDEZMA, C.; FONT, V.; SALA, G. Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. **Mathematics Education Research Journal**, Sídney, 16 feb. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13394-022-00411-3>. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-022-00411-3>. Acceso en: 24 jun. 2023.

LESH, R.; CRAMER, K.; DOERR, H. M.; POST, T.; ZAWOJEWSKI, J. S. Model development sequences. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (eds.). **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Association, 2003. p. 35-58.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. In: LESH, R.; DOERR, H. M. (eds.). **Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Association, 2003. p. 3-33.

LESH, R.; ZAWOJEWSKI, J. S. Problem solving and modeling. In: LESTER, F. (ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics**. Charlotte: Information Age Publishing, 2007. p. 763-804.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA (MEP). **Programas de estudio de matemáticas: I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado**. San José: MEP, 2012. Disponible en: <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>. Acceso en: 24 jun. 2023.

MORGAN, C.; KYNIGOS, C. Digital artefacts as representations: Forging connections between a constructionist and a social semiotic perspective. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 85, n. 3, p. 357-379, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9523-1>. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-013-9523-1>. Acceso en: 24 jun. 2023.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

OREY, D. C.; ROSA, M. Developing a mathematical modelling course in a virtual learning environment. **ZDM**, Berlín, v. 50, n. 1-2, p.315-326, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0930-8>. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-018-0930-8>. Acceso en: 24 jun. 2023.

PORRAS, K. Modelación matemática: Recurso de mediación pedagógica en el aprendizaje geométrico del tema de semejanza, en octavo año de secundaria. En: VIII CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA (CIEMAC). 2013, 3-6 de diciembre. Cartago. **Actas electrónicas**, Costa Rica: TEC, 2013. Disponible en: https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/08_memoria_1.pdf. Acceso en: 24 jun. 2023.

PORRAS, K.; CASTRO-RODRÍGUEZ, E. Errores manifestados por estudiantes de secundaria al realizar tareas de modelización matemática. **Revista Acta Scientiae**, Río Grande do Sul, v. 23, n. 2, p. 29-57, 2021. DOI: <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6193>. Disponible en: <http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/6193>. Acceso en: 24 jun. 2023.

RELLENSMANN, J.; SCHUKAJLOW, S.; LEOPOLD, C. Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. **Educ Stud Math**, v. 95, [s.n.], p. 53-78, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1>. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-016-9736-1>. Acceso en: 24 jun. 2023.

- RICO, L. Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. **PNA – Rev. De investigación en didáctica de la matemática**, Granada, v. 4, n. 1, p. 1-14, 2009. DOI: <https://doi.org/10.30827/pna.v4i1.6172>. Disponible en: <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6172>. Acceso en: 24 jun. 2023.
- ROORDA, G.; VOS, P.; GOEDHART, M. J. An actor-oriented transfer perspective on high school students' development of the use of procedures to solve problems on rate of change. **International Journal of Science and Mathematics Education**, Taiwan, v. 13, n. 4, p. 863-889, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9501-1>. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-013-9501-1>. Acceso en: 24 jun. 2023.
- SÁNCHEZ, E. A. Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. **Revista Sigma**, San Juan de Pasto, v. 11, n. 1, p. 10-25, 2013. Disponible en: <https://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/437>. Acceso en: 24 jun. 2023.
- SANTOS-TRIGO, M. Enhancing students' cognitive systems via the use of technology in mathematical problem solving. In: HITT, F. (ed.), **Representations and mathematics visualization**. México: IPN, 2002. p. 157-174. Disponible en: <https://acortar.link/2OYA3P>. Acceso en: 24 jun. 2023.
- SCHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving**. Londres: Academic Press, 1985.
- SINGH, P. Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 43, n. 3, p. 271-292, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1011976904850>. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1023/A:1011976904850>. Acceso en: 24 jun. 2023.
- SMITH, S. P. Representation in school mathematics: Children's representations of problems. In: KILPATRICK, J. (ed.). **A research companion to principles and standards for school mathematics**. Reston: NCTM, 2003. p. 263-274.
- STENDER, P. The use of heuristic strategies in modelling activities. **ZDM**, Berlín, v. 50, n. 1-2, p. 315-326, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0901-5>. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-017-0901-5>. Acceso en: 24 jun. 2023.
- TJOE, H.; DE LA TORRE, J. On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? **The Journal of Mathematical Behavior**, Ámsterdam, v. 33, n. 1, p.1-7, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.002>. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312313000679?via%3Dihub>. Acceso en: 24 jun. 2023.
- VAN DOOREN, W.; DE BOCK, D.; VLEUGELS, K.; VERSCHAFFEL, L. Pupils' reasoning on proportionality: Solving versus classifying missing-value word problems. In: NOVOTHÁ, J.; MORAOVÁ, H.; KRÁTKÁ, M.; STEHLÍKOVÁ, N. (eds.). **Proceedings of the Joint Meeting of 32nd PME and 30th PME-NA**. Prague: PME-NA, 2006. Vol. 5, p. 305-312. Disponible en: <https://www.emis.de/proceedings/PME30/5/305.pdf>. Acceso en: 24 abr. 2023.
- THE INTERNATIONAL JOURNAL ON MATHEMATICS EDUCATION – ZDM. Karlsruhe: Springer Verlag, 1997- ISSN 1615-679X. Disponible en: <https://www.emis.de/journals/ZDM/zdmcont.html>. Acceso en: 21 oct. 2022.

Submetido em 30 de Julho de 2022.
Aprovado em 21 de Novembro de 2022.