ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

Conocimientos didáctico-matemáticos de profesores de educación secundaria en formación sobre inferencia estadística

Prospective secondary school teachers' didactic-mathematical knowledge on statistical inference

Silvia M. **Valenzuela-Ruiz**[*]

ORCID iD 0000-0001-7467-8672

Carmen **Batanero**[**]

ORCID iD 0000-0002-4189-7139

Nuria **Begué**[***]

ORCID iD 0000-0003-1369-8711

José A. **Garzón-Guerrero**[****]

ORCID iD 0000-0002-9397-3439

Resumen

Actualmente, la inferencia estadística es un tema enseñado en el Bachillerato español y evaluado en los exámenes de acceso a la universidad, pero la preparación didáctica específica no es suficiente para los profesores encargados de la enseñanza del tema. El objetivo del trabajo es evaluar el conocimiento matemático común de este contenido y las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento didáctico en una muestra de futuros profesores españoles. Con esta finalidad se les plantea la resolución de una tarea tomada de las pruebas de acceso a la universidad para estudiantes de Bachillerato y se les pide resolverla, identificar los objetos matemáticos requeridos en su solución y los posibles errores de los estudiantes en este proceso. Los resultados muestran un buen conocimiento matemático de los futuros profesores y un inicio de conocimiento en las facetas epistémica y cognitiva. No obstante, su identificación de objetos matemáticos y errores es escasa y prácticamente se restringe al aspecto procedimental. Concluimos la necesidad de reforzar la preparación en la didáctica de la inferencia de los futuros profesores.

Palabras-clave: Conocimiento didáctico-matemático. Futuros profesores. Facetas epistémica y cognitiva. Inferencia estadística.

Abstract

Statistical inference is a currently taught topic in Spanish high school classes and is assessed in the university entrance exams, but the specific didactic preparation is not enough for the teachers in charge of the topic. The aim

[*] Doctora en Estadística e Investigación Operativa por la Universidad de Granada (UGR) en 2011. Profesora ayudante doctora en la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: svalenzuela@ugr.es.

[**] Doctora en Matemáticas por la Universidad de Granada (UGR) en 1983. Catedrática jubilada y profesora colaboradora en la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: batanero@ugr.es

[***] Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada (UGR) en 2019. Profesora interina en la Universidad de Zaragoza (UNIZAR), Zaragoza, España. E-mail: nbegue@unizar.es.

[****] Doctor en Física por la Universidad de Granada (UGR) en 2012. Profesor Ayudante Doctor en la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. E-mail: jgarzon@ugr.es.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

of the study was to evaluate the common mathematical knowledge of this content and the epistemic and cognitive facets of didactic knowledge in a sample of prospective Spanish teachers. To achieve this purpose, they were asked to solve a task taken from the university entrance exams for high school students and to identify the mathematical objects required in its solution and the possible errors encountered by the students in this process. The results show a good mathematical knowledge of the prospective teachers and an initial knowledge in the epistemic and cognitive facets. However, their identification of mathematical objects and errors is scarce and practically restricted to the procedural aspect. We conclude that there is a need to reinforce the preparation of prospective teachers in the didactics of inference.

Keywords: Didactic-mathematical knowledge. Prospective teachers. Epistemic and cognitive facets. Statistical inference.

1 Introducción

Asistimos, en la actualidad, a un auge de la investigación sobre la formación del profesor de matemáticas (ver, por ejemplo, BURGOS; GODINO, 2019; FONT; SÁNCHEZ; SALA, 2022; LLINARES, 2021; KAISER; KÖNIG, 2019; SCHEINER *et al.*, 2019), debido a la influencia que su preparación adecuada tiene sobre el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, encontramos pocos referentes que se centren, específicamente, en el conocimiento o la preparación del profesor para enseñar inferencia estadística.

Actualmente, este tema se incluye en el Bachillerato español de Ciencias Sociales (MECD, 2015), pues muchas de las carreras universitarias que seguirán posteriormente estos estudiantes requieren de un conocimiento profundo de la inferencia estadística. Más concretamente, los contenidos fijados dentro de la asignatura Matemáticas II aplicada a Ciencias Sociales son los siguientes (MECD, 2015, p. 389):

> Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra. Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos obtenidos a partir de una muestra. Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal con desviación típica conocida. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

Estos contenidos se han considerado hasta la fecha en la evaluación de los estudiantes en las pruebas de acceso a la universidad, que siempre incluyen un problema de inferencia (LÓPEZ-MARTÍN *et al.*, 2016). Además, son muchos los errores descritos en los estudiantes en este tema (BATANERO *et al.*, 2020; CASTRO-SOTOS *et al.*, 2007; HARRADINE *et al.*, 2011). El profesorado debería conocer estas dificultades, así como tener un conocimiento sólido de inferencia y ser capaz de realizar un análisis de las tareas propuestas a sus estudiantes.

El objetivo de este trabajo es completar la investigación sobre el tema, algunas

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

componentes del conocimiento didáctico-matemático (GODINO, 2009; GODINO *et al.*, 2017) de futuros profesores españoles sobre la distribución muestral y el intervalo de confianza, que son dos temas básicos de inferencia incluidos en el currículo de Bachillerato (MECD, 2015). Concretamente, se evalúa su conocimiento matemático común y las facetas epistémica y cognitiva de estos contenidos.

Para alcanzar este objetivo, se analizan las respuestas a una tarea abierta en una muestra de estudiantes que se preparan como profesores de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato en un programa de Máster que es obligatorio en España para concursar a una plaza de profesor en estos niveles educativos.

En la siguiente sección se describen los fundamentos del trabajo y, seguidamente, la metodología utilizada y sus resultados, finalizando con algunas conclusiones e implicaciones para la formación de profesores.

2 Fundamentos

La investigación se apoya en el marco teórico sobre conocimiento didáctico-matemático y los antecedentes que se resumen a continuación.

2.1 Conocimiento didáctico-matemático

En la actualidad el conocimiento del profesor y su formación constituyen una de las líneas de investigación más amplias y productivas en educación matemática. Algunos referentes los encontramos en los trabajos de Beswick y Goos (2018), Llinares (2021), Kaiser y König (2019) y Scheiner *et al*. (2019) o en revistas como *Journal of Mathematics Teacher Education*. Dichos estudios resaltan el carácter multidimensional del conocimiento del profesor y proponen diferentes modelos para describirlo.

En este trabajo se utiliza el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, en el que se consideran tres componentes: el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico y el meta didáctico (GODINO, 2009; GODINO *et al.,* 2017; PINO-FAN; GODINO, 2015; PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015; SCHEINER *et al.*, 2019). Dicho marco teórico ha sido utilizado en el análisis del conocimiento de profesores de diferentes niveles educativos sobre temas de probabilidad y estadística (ej., ARTEAGA *et al.,* 2017; VÁSQUEZ; ALSINA, 2015).

El conocimiento matemático del profesor consta del conocimiento matemático común, que sería relativo para ese tema en el nivel educativo donde se imparte la docencia (es decir, el

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

que debe enseñar a sus estudiantes), y al conocimiento ampliado del contenido matemático, que es más extenso que el conocimiento matemático común del contenido y permite articularlo con los niveles superiores (GODINO *et al.,* 2017).

Además, el profesor ha de tener un conocimiento didáctico-matemático especializado, que incluye diferentes facetas que han de tenerse en cuenta para una enseñanza eficaz de la matemática. Dichas facetas son las siguientes: epistémica (conocimiento específico del profesor sobre el propio contenido, es decir, sobre los significados institucionales del tema), ecológica (aspectos curriculares, contextuales etc., relacionados con la enseñanza del tema), cognitiva (comprensión y razonamiento del estudiante, así como sus conocimientos), afectiva (actitud, emociones, creencias y valores del estudiante en relación al tema), mediacional (recursos, medios y distribución temporal) e interaccional (negociación de significados para identificar y solucionar los problemas que encuentran los estudiantes).

La faceta epistémica se refiere al conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, es decir, además del conocimiento matemático per se, el profesor debe conocer y articular la diversidad de significados de un objeto matemático y ser capaz de resolver una tarea a través de diferentes procedimientos, proporcionar varias justificaciones e identificar el conocimiento involucrado durante el proceso de resolución de una tarea matemática (GODINO *et al.,* 2017).

La faceta cognitiva es parte del conocimiento didáctico y se refiere al conocimiento que tiene el profesor de cómo los estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas, de sus estrategias de resolución de problemas y de los errores que cometen en el proceso de aprendizaje, así como sobre su progreso a lo largo del mismo (PINO-FAN; GODINO, 2015). Por tanto, incluye la competencia para evaluar el grado de aprendizaje de los estudiantes (conocimientos personales), comprender su forma de razonar y reconocer sus dificultades y errores en la resolución de problemas.

La evaluación abordada en este trabajo se centra en el conocimiento matemático común sobre la distribución muestral e intervalo de confianza y a las facetas epistémica y cognitiva relacionadas con la distribución muestral y el intervalo de confianza. Es decir, en primer lugar, se evalúa el conocimiento matemático de estos contenidos que debe enseñar el futuro profesor, en el nivel de Bachillerato, pidiéndoles resolver un problema. La faceta epistémica se aborda proponiendo al futuro profesor que identifique los contenidos matemáticos requeridos para resolver una tarea. La faceta cognitiva se evalúa pidiendo a los futuros profesores que identifiquen los posibles errores de sus estudiantes en las mismas tareas que se les ha pedido resolver.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

2.2. Antecedentes de la investigación

Hay muy poca investigación sobre el conocimiento de inferencia del profesor de matemáticas, que generalmente se enfoca en su conocimiento matemático común, es decir, su comprensión de los contenidos de inferencia que debe enseñar. Más aún, el tema que ha centrado especialmente la atención es el del contraste de hipótesis (BATANERO *et al.*, 2018; HALLER; KRAUSS, 2002; LIU; THOMPSON, 2009).

Por otro lado, el trabajo de Abu-Ghalyoun (2021) ha analizado la comprensión de la relación entre la variabilidad muestral y el tamaño de la muestra de un futuro profesor de primaria, mientras trabaja el muestreo mediante una simulación. La comprensión de la representatividad y variabilidad muestral también ha sido analizada en profesores de educación primaria (DE VETTEN *et al*., 2018; WATSON; CALLINGHAM, 2013). Estos trabajos se interesan por la inferencia informal, que no emplea los conceptos formales de distribución muestral y sus propiedades, sino únicamente ideas intuitivas sobre la variación de los estadísticos muestrales (como la media o proporción) al repetir la toma de muestras.

Respecto al intervalo de confianza, Yáñez y Behar (2009) realizaron un estudio con quince estudiantes que se preparaban como profesores de matemáticas de educación secundaria en Colombia, a los que plantearon algunas preguntas sobre el tema. Los resultados indican algunas interpretaciones incorrectas del intervalo de confianza, como incomprensión de los pasos en su construcción y extrapolación incorrecta de la probabilidad asociada al nivel de confianza a la probabilidad de que un intervalo contenga el valor del parámetro que se estima.

Batanero y López-Martín (2020) llevaron a cabo una investigación con 73 profesores españoles de secundaria, en formación, a los cuales pidieron calcular e interpretar los resultados obtenidos al haber calculado un intervalo de confianza. Aunque el 87% plantearon correctamente la fórmula del intervalo, sólo el 61,7% lo completaron correctamente, debido, bien a errores en la identificación de los datos o bien a errores de cálculo. Tan sólo el 28% de los participantes proporcionaron la interpretación correcta, mientras el 11% dieron una interpretación determinista, suponiendo que el intervalo incluía con seguridad el valor del parámetro. Otros 17,8% interpretaron el coeficiente de confianza como la probabilidad de que el valor del parámetro estuviese en los límites del intervalo, considerando éstos como fijos.

Respecto a la faceta cognitiva, destacamos el trabajo de López-Martín *et al.* (2019), que investigan el conocimiento de setenta futuros profesores españoles de ESO y Bachillerato sobre los errores de sus estudiantes en el contraste de hipótesis e intervalo de confianza, después de haber resuelto ellos mismos un problema de cada uno de estos tipos. Los principales errores en

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

el planteamiento del intervalo de confianza fueron la identificación incorrecta de la distribución muestral (7,1%) o del tipo de intervalo (unilateral o bilateral) (5,7%). Entre los errores conceptuales, 28% indicaron la confusión entre estadístico y parámetro, dificultad citada por Schuyten (1991) y en algunas investigaciones en las que los estudiantes usan los estadísticos muestrales, en lugar de los parámetros, al resolver problemas de inferencia (ESPINEL; RAMOS; RAMOS, 2007; VALLECILLOS, 1999). El 6% mostró una comprensión incorrecta del teorema central del límite y el 5,7% interpretación incorrecta del nivel de confianza.

Los errores procedimentales más citados fueron el error en la identificación de datos (22,9%), determinación del estadístico (4,3%), error de tipificación (54,3%), lectura incorrecta de las tablas estadísticas (30%) y error en el cálculo de los extremos del intervalo (14,3%) o uso de los símbolos (7,1%). Finalmente, se indicaron como errores interpretativos la interpretación del nivel de confianza (17,1%), considerar los extremos del intervalo como fijos (44,3%), considerar el parámetro dentro del intervalo (8,6%) e interpretación incorrecta de factores que afectan al intervalo (10%). Las autoras indican que la mayor parte de los errores señalados por los futuros profesores coincidieron con los identificados anteriormente en la literatura, por ejemplo, en las investigaciones de Belia, Fidler y Cumming (2005). Asimismo, se explicitan errores de tipificación y lectura de la tabla normal, descritos por Ramos, Espinel y Ramos (2009) y confusión entre estadístico y parámetro (HARRADINE *et al*., 2011).

En nuestro trabajo completamos las anteriores investigaciones, evaluando algunas facetas del conocimiento didáctico-matemático sobre la distribución muestral e intervalo de confianza de futuros profesores de ESO y Bachillerato españoles, por lo que se aporta nuevo conocimiento en un tema en el que la investigación es escasa.

3 Metodología

La muestra participante estuvo formada por 62 estudiantes de un programa de máster, que es obligatorio en España para concursar a una plaza de profesor de matemáticas en ESO (estudiantes de doce a quince años) y Bachillerato (dieciséis y diecisiete años). Este master se realiza una vez que se ha finalizado un grado sobre una disciplina específica, como matemáticas o ingeniería y se orienta a salvar la carencia de conocimientos pedagógicos en la formación inicial del profesor (MUÑIZ-RODRÍGUEZ *et al*., 2016).

3.1 Tarea propuesta y análisis a priori

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

A los participantes se les propuso la tarea presentada en la Figura 1, donde se debe resolver un problema sobre distribución muestral, estimación puntual e intervalo de confianza, similar a los planteados los años anteriores en las pruebas de acceso a la Universidad para estudiantes de Bachillerato. Es decir, se trata de un tipo de problema que los futuros profesores de la muestra deberán enseñar a sus estudiantes. En consecuencia, la resolución del problema evalúa el conocimiento matemático común del contenido por parte de los futuros profesores, ya que ellos serán encargados de enseñar a resolver estos problemas a sus estudiantes.

Problema. A la salida de unos grandes almacenes se ha tomado una muestra aleatoria simple de 100 clientes, a los que se ha preguntado por el gasto realizado, obteniéndose una media de 110 euros. Se sabe que el gasto sigue una distribución normal con desviación típica 20 euros.

a. ¿Qué distribución sigue la media muestral?
b. ¿Cuál es la mejor estimación de la media en la población?
c. Obtenga un intervalo de confianza al 90% para el gasto medio de todos los clientes que han comprado ese día.
d. Si deseamos que el error máximo cometido con el mismo nivel de confianza sea 2 euros ¿cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra?

Figura 1 – Problema propuesto a los participantes
Fuente: elaborado por los autores

Los autores del trabajo realizaron un análisis a priori del problema, para obtener la respuesta correcta esperada en cada apartado, que fue consensuada por los autores y se describen a continuación.

- *Apartado a.* Puesto que la distribución normal es reproductiva respecto a los parámetros, la media muestral también sigue la distribución normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ y como n=100, sustituyendo los datos, deduce que la media muestral tiene una distribución N (μ, 2). Además, en este caso se puede aplicar el Teorema Central del Límite, por ser una muestra de suficiente tamaño.
- *Apartado b.* Se espera que el estudiante responda que la mejor estimación de la media de la población es la media muestral, que en el problema dado toma el valor 110, debido a sus propiedades de insesgadez y mínima varianza. Además, el tamaño de la muestra y el hecho de ser aleatoria hace que ésta sea representativa.
- *Apartado c.* Para calcular el intervalo (a, b) tal que $P(a \leq \mu \leq b) = 0{,}9$ se tipifica la variable, esto es, $P(a - \bar{x} \leq \mu - \bar{x} \leq b - \bar{x}) = 0{,}9$. De aquí se deduce que: $P\left(\frac{a-\bar{x}}{2} \leq \frac{\mu-\bar{x}}{2} \leq \frac{b-\bar{x}}{2}\right) = 0{,}9$. Puesto que $Z = \frac{\mu-\bar{x}}{2}$ es la distribución normal tipificada N(0,1), $P\left(\frac{a-\bar{x}}{2} \leq Z \leq \frac{b-\bar{x}}{2}\right) = 0{,}9$. Buscando en una tabla de la distribución normal tipificada los valores centrales de Z que corresponden al 90%, obtenemos el valor 1,65

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

(que corresponde al percentil de 0,9505, es decir, aproximado en dos decimales). Por consiguiente, tenemos: $P(-1{,}65 \leq Z \leq 1{,}65) = 0{,}9. \frac{a-\bar{x}}{2} = -1{,}65,$ y despejando a=106,7; $\frac{b-\bar{x}}{2} = 1{,}65$, por lo que b=113. Otra forma de calcular el intervalo de confianza sería aplicando directamente la fórmula: $\left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

- *Apartado d*. La amplitud del intervalo de confianza viene dada por (b-a) y se desea que el error máximo (b-a)/2 sea igual a 2. Puesto que los extremos del intervalo se calculan como $\bar{x} \pm Z\sigma/\sqrt{n}$, 2 = $\frac{(b-a)}{2} = \frac{Z\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}65\cdot 20}{\sqrt{n}} = \frac{32{,}9}{\sqrt{n}}$, de donde, $n = \left(\frac{1{,}645.20}{2}\right)^2$= 270,6. Se deben tomar al menos 271 elementos.

En una segunda sesión, a una parte de los participantes (49 futuros profesores) se les plantearon dos tareas adicionales: a) analizar los conceptos, propiedades y procedimientos que utilizaron para resolver el problema propuesto en la primera sesión; b) describir los errores que podrían cometer sus futuros estudiantes en la resolución del problema.

La pregunta a) analiza la competencia de análisis epistémico de los futuros profesores y, por tanto, evalúa un componente de la faceta epistémica de su conocimiento. Un análisis a priori de la solución al problema, realizado y consensuado por los participantes sirvió para identificar los siguientes conceptos, propiedades y procedimientos en su solución.

- *Conceptos*: Variable estadística y variable aleatoria, sus medidas de posición central y dispersión, distribución de la variable en la población, distribución muestral de una media de cien elementos. Distribución normal, parámetros. Estimador. Probabilidad. Intervalo de confianza, amplitud y extremos, coeficiente de confianza. Error máximo de estimación.
- *Propiedades:* Aleatoriedad de la muestra, simetría de la función de densidad de la distribución normal. Representatividad muestral. Teorema central del límite. Relación entre la desviación típica muestral y poblacional y entre la media muestral y poblacional. El área total bajo la curva normal es igual a la unidad. Probabilidad del suceso complementario. Insesgadez y mínima varianza de la media muestral como estimador. No sabemos si el intervalo de confianza construido contiene a la media de la población, pero si el tanto por ciento de intervalos construidos con el mismo tamaño de muestra que la contienen. El intervalo de confianza siempre contiene a la media muestral. El error máximo de estimación es igual a la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.
- *Procedimientos:* Cálculo de la desviación típica (o varianza) de la media muestral. Tipificación y cambio de variable. Cálculo de probabilidades utilizando la distribución

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

normal. Lectura de las tablas de la distribución normal. Construcción del intervalo de confianza. Cálculo del tamaño mínimo de muestra. Manejo de desigualdades. Resolver inecuaciones.

Por otro lado, la pregunta b) evalúa parte de la faceta cognitiva, pues se refiere al conocimiento de los posibles errores de los estudiantes en el tema (PINO-FAN; GODINO, 2015). Un análisis *a priori* de los errores previsibles revela los siguientes:

- *Errores de interpretación del enunciado.* Para resolver el problema, se debe interpretar correctamente su enunciado, identificando las preguntas planteadas y los datos disponibles, que son los siguientes: tamaño de la muestra, media muestral, distribución normal de la población y su desviación típica, coeficiente de confianza y error máximo admisible. Cualquier error en este proceso producirá resultados incorrectos.
- *Errores de tipo conceptual.* La resolución del problema precisa reconocer los tres tipos de distribuciones implícitas en el muestreo (HARRADINE *et al*., 2011) y diferenciar entre estadístico y parámetro (ESPINEL *et al.,* 2007; SCHUYTEN, 1991; VALLECILLOS, 1999). Es importante recordar que la distribución muestral de la media es normal e identificar sus parámetros (BATANERO *et al.,* 2004). Puede haber error al reconocer el mejor estimador de la media muestral o tener confusiones en los conceptos intervalos de confianza, coeficiente de confianza, extremos y error máximo admisible. Igualmente se podría extrapolar incorrectamente la probabilidad asociada al nivel de confianza a la probabilidad de que un intervalo contenga el valor del parámetro que se estima o confundir error máximo de estimación con amplitud del intervalo (YÁÑEZ; BEHAR, 2009). También se pueden cometer errores al interpretar la simetría de la distribución normal, que es necesario utilizar para calcular la probabilidad pedida (BATANERO *et al*., 2004). Finalmente, al igual que lo ocurrido en algunos futuros profesores, se podría dar un tamaño de muestra no entero en la última pregunta.
- *Errores de tipo procedimental.* Se podría tener dificultad al leer la tabla de la distribución normal N (0,1), puesto que hay que interpolar para hallar el valor pedido. Pueden producirse errores en la tipificación y al despejar las desigualdades que intervienen en las dos últimas preguntas. Finalmente, se podrían realizar errores de tipo aritméticos al completar los cálculos.

Toda la actividad formó parte de un taller sobre inferencia estadística y su didáctica con dos sesiones de dos horas cada una de duración. Posteriormente a la recogida de las soluciones a las tareas, se corrigieron y discutieron colectivamente y se trabajaron algunos recursos didácticos para la enseñanza del tema basados en la simulación. Todo ello con la finalidad de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

desarrollar el conocimiento didáctico-matemático de los participantes sobre la inferencia estadística.

Las respuestas de cada futuro profesor fueron sometidas a un análisis de contenido (DRISKO; MASCHI, 2016), técnica que permite estudiar sistemática y objetivamente textos. Se trata de un proceso cíclico, en que el texto se divide en unidades de análisis que son examinadas para deducir de ellas categorías. En este caso, la unidad de análisis fue la respuesta de cada profesor a cada apartado de la tarea. Para formar las categorías se partió del análisis *a priori* de las tareas y de algunas categorías esperadas *a priori*, deducidas de la investigación previa que se ha descrito en la Sección 2. La codificación de los resultados fue llevada a cabo, independientemente, por dos de los autores, quienes discutieron los casos en discordantes y a partir de varias revisiones, llegaron a un consenso sobre las diferentes categorías utilizadas y la codificación de las respuestas.

4 Resultados

Se presentan, a continuación, los resultados de la evaluación del conocimiento matemático común y de la faceta epistémica y cognitiva.

4.1. Conocimiento matemático común

En primer lugar, se analizan las soluciones aportadas por los participantes a cada una de las partes del problema mostrado en la Figura 1. Se describen las categorías de respuesta, incluyendo para cada una la transcripción literal de la respuesta de uno de los participantes, como ejemplo. La respuesta se considera correcta si es la esperada descrita en el análisis a priori de la tarea, parcialmente correcta, si tiene algún fallo de poca importancia e incorrecta si contiene errores importantes.

Resultados en el apartado a. Distribución de la media muestral

Las respuestas a la determinación de la media muestral se han clasificado con el siguiente criterio:

- *Respuesta correcta:* el participante diferencia claramente la distribución muestral de la poblacional, así como sus medias, superando la confusión consistente en no discriminar estas distribuciones, que es frecuente entre los estudiantes (ESPINEL *et al.,* 2007; HARRADINE *et al*, 2011; SCHUYTEN, 1991; VALLECILLOS, 1999). Identifica que la población sigue una distribución normal y que la desviación típica es 20 euros, y

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

deduce que la media muestral tiene una distribución N (μ, 2). Un ejemplo se da a continuación.

P1: Por el teorema central de límite sabemos que la distribución de las medias muestrales de una población que sigue una distribución $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$ *para muestras de tamaño* n *seguirá una distribución* $\mathrm{N}\,(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. *En nuestro caso y como la media de la población es desconocida, tenemos que* $\mathrm{N}\,\left(\mu, \frac{20}{\sqrt{100}}\right) = \mathrm{N}(\mu, 2)$ (Comentario del estudiante P1).

- *Respuesta correcta, utilizando la varianza* en vez de la desviación típica en la expresión de la distribución normal, como el siguiente ejemplo, que directamente da la distribución, aunque no explica el razonamiento seguido.

  P2: $X \sim N\ (\mu, 4\ )$ (Comentario del estudiante P2).

- *Respuesta parcialmente correcta.* Se expresa la distribución muestral correctamente, pero no se sustituyen los datos del problema para determinar su desviación típica, posiblemente por no identificar la desviación típica y/o tamaño muestral en el enunciado. Sin embargo, la respuesta y notación utilizada indican que se diferencia la distribución y la media muestral y poblacional.

  P3: La distribución muestral sigue la ley normal, $\bar{X} \sim N\ (\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ (Comentario del estudiante P3).

- *Respuesta incorrecta, confundiendo la media muestral y poblacional*. Se identifica la desviación típica y la normalidad de la distribución muestral, y se distingue la distribución muestral de la poblacional. Sin embargo, se supone que la distribución muestral es N(110, 2). Por tanto, se muestra la confusión entre estadístico y parámetro (ESPINEL *et al.,* 2007, HARRADINE *et al.*, 2011; SCHUYTEN, 1991; VALLECILLOS 1999) propia de muchos estudiantes:

  P4: Sea $\bar{X}$ *el gasto medio de los clientes. La variable sigue la distribución* $N\ (110, 2)$ (Comentario del estudiante P4).

En la Tabla 1 se exponen los resultados obtenidos en la pregunta sobre determinación de la distribución muestral de la media.

Tabla 1 – Resultados en la determinación de la distribución muestral

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	8	12,9
Correcta. Utiliza la varianza	1	1,6
Parcialmente correcta. No identifica datos	3	4,8
Incorrecta Confunde media muestral y poblacional	49	79,0
Incorrecta y confusa	1	1,7

Fuente: elaborada por los autores

Identificamos que menos del 20% de los participantes dieron la respuesta correcta o parcialmente correcta, siendo mayoría los que tomaron la media muestral como media de la

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

población, un error frecuente en los estudiantes (ESPINEL *et al.,* 2007; HARRADINE *et al.,* 2011; SCHUYTEN, 1991; VALLECILLOS, 1999). Teniendo en cuenta que el problema planteado fue tomado de las pruebas de selectividad (LÓPEZ-MARTÍN *et al*., 2016) es factible que esta confusión se transmita a los estudiantes, por lo que será importante mejorar la formación del profesor en este punto concreto.

Resultados en el apartado b: estimación de la media de la población

En el segundo apartado se pregunta por el mejor estimador de la media de la población. Las respuestas obtenidas se han clasificado de acuerdo a los siguientes criterios:

- *Respuesta correcta.* El estudiante responde que la mejor estimación de la media de la población es la media muestral, que es la respuesta esperada en este apartado.

  P5: La mejor estimación de la media en la población sería la media muestral (Comentario del estudiante P5).

- *Respuesta incorrecta.* Se hace referencia al intervalo de confianza sin indicar cuál es el mejor estimador puntual que, o bien no se conoce, o se confunde la estimación puntual y por intervalos.

  P6: Para hacer una estimación de la media en la población podemos construir un intervalo de confianza con un nivel de confianza de $1-\alpha$, *que, de forma general, viene dado por la siguiente expresión:* $\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, *siendo* $z_{\alpha/2}$ *el valor de una distribución normal* $Z\sim N(0,1)$, *que deja a su derecha una probabilidad de* $\alpha/2$, es decir, $P\ (Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}})=\frac{\alpha}{2}$ (Comentario del estudiante P6).

En la Tabla 2 se presentan los resultados obtenidos en la pregunta sobre la mejor estimación de la media de la población. En este apartado casi la totalidad de los estudiantes da la respuesta correcta, por lo que este punto fue bien comprendido por los futuros profesores. No tenemos antecedentes para comparar este resultado con otras investigaciones.

Tabla 2 – Resultados en la determinación del mejor estimador de la media

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	52	83,9
Incorrecta: da el intervalo de confianza	4	6,4
No responde	6	9,7

Fuente: elaborada por los autores

*Resultados en el apartado c: Cálculo del intervalo de confianza****

Las respuestas al cálculo del intervalo de confianza se han codificado en la forma siguiente:

- *Respuesta correcta.* Se calcula correctamente el intervalo de confianza, bien por pasos, como se mostró en el análisis a priori o aplicando directamente la fórmula: $\left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, como en el siguiente ejemplo:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

P7: El intervalo de confianza para la media viene dado por: $\left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. *En este caso* 1-α=0,9, *luego* α=0,1. *Por tanto,* 1-α/2=0,95 *y buscando en la tabla de la* N(0,1) t*enemos* $1{,}64 \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \leq 1{,}65$. *Luego interpolando se tiene que* $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$. *Luego, el intervalo de confianza al 90%* $(110 - 1{,}645\frac{20}{100}, 110 - 1{,}645\frac{20}{100}) = (106{,}71, 113{,}29)$ (Estudiante P7).

- *Respuesta correcta,* pero no interpola en la tabla de la distribución, obteniendo un intervalo ligeramente diferente.
- *Parcialmente correcta. No se calcula el intervalo, pero se escribe su expresión* $\left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. El futuro profesor no llega a identificar los datos que necesita, error también detectado por Batanero y López-Martín (2020) y López-Martín *et al*. (2019), pero conoce la forma de calcularlo.

En la Tabla 3 se resumen los resultados obtenidos en el cálculo del intervalo de confianza, donde, de nuevo, son mayoría los futuros profesores que dan la respuesta correcta, mostrando, por tanto, un buen conocimiento matemático del tema. Sólo hay un futuro profesor que, aunque escribe la fórmula, no identifica los datos y un 11,3% no llega a realizar la interpolación, mostrando dificultad en el uso de la tabla normal, lo que ocurre en algunos estudiantes, según López-Martín *et al.* (2019). Los resultados fueron mejores que los de Batanero y López-Martín (2020), puesto que, en su estudio, 61,7% de los futuros profesores finalizaron correctamente la construcción del intervalo. Los problemas en la identificación de los datos fueron muy escasos y menores que los encontrados por López-Martín *et al.* (2019), donde 7,1% no identificaron la distribución muestral y 5,7% el tipo de intervalo a construir.

Tabla 3 – Resultados en la determinación del intervalo de confianza

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	54	87,1
Correcta: No interpola	7	11,3
Parcialmente correcta. Solo escribe fórmula	1	1,6

Fuente: elaborada por los autores

Resultados en el apartado d. Cálculo del tamaño de muestra para un error dado

La última pregunta del problema pide calcular el tamaño de muestra requerido para un error máximo de estimación. Las respuestas se han clasificado en la forma siguiente:

- *Respuesta correcta.* Se calcula correctamente el tamaño de muestra, siguiendo los pasos previstos en el análisis a priori e indicando que se deben tomar al menos 271 elementos.

P8: Calculamos el tamaño mínimo de la muestra E=2=$\frac{1{,}645x20}{\sqrt{n}}$; *por tanto* $n = \left(\frac{1{,}645.20}{2}\right)^2$=270,6. *Se deben tomar 271 clientes* (Estudiante P8).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

- *Respuesta parcialmente correcta,* pues el futuro profesor toma como valor de $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.64$ en vez de 1.645. No interpola y obtiene 272 elementos.
- *Respuesta parcialmente correcta*, donde el futuro profesor realiza los cálculos correctos pero no redondea los resultados a n≥271; es decir, no tiene en cuenta que al estar considerando personas, el tamaño de muestra no puede tener valores decimales.

  P9: Imponemos en el cálculo del error que $Z\alpha/_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2$. *Es decir,* $1{,}645\frac{20}{\sqrt{n}} \leq 2$; $16{,}45 \leq \sqrt{n}$; $270{,}6 \leq n$ (Estudiante P9).

- *Respuesta incorrecta,* con errores en el manejo de desigualdades al despejar el valor de n, por lo que obtiene un valor erróneo del tamaño de muestra.

  P10: E$\leq n$, *entonces* E$=1{,}645\frac{10}{\sqrt{n}} \leq 2$, *despejamos y* $67{,}65 \leq n$, luego $68 \leq n$ (Estudiante P10).

En la Tabla 4 se exponen los resultados obtenidos en la pregunta sobre determinación del tamaño de muestra necesario para un error máximo de estimación. De nuevo, la mayor parte de participantes en el estudio responde correctamente, aunque se observan algunos errores de interpretación, manejo de desigualdades o interpolación. No tenemos antecedentes para comparar nuestros resultados en este punto.

Tabla 4 – Resultados en la determinación del tamaño mínimo de muestra

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	50	80,6
Parcialmente correcta: no interpola	2	3,2
Parcialmente correcta: mal interpretado	6	9,7
Incorrecta: error al despejar n	4	6,5

Fuente: elaborada por los autores

En definitiva, los futuros profesores de la muestra manifiestan un buen conocimiento matemático común del contenido, excepto en la confusión de estadístico y parámetro (apartado b) y algunas dificultades de tipo algebraico, como el manejo de desigualdades y la interpolación. No se observa, en el estudio, la incomprensión de los pasos en la construcción del intervalo de confianza, citada por Yáñez y Behar (2009). Al comparar con la investigación de Batanero y López-Martín (2020), el porcentaje de futuros profesores que llega a construir correctamente el intervalo es mayor en el presente estudio. Estas autoras no pidieron hallar el tamaño mínimo de muestra para un error dado de estimación, ni hallar el mejor estimador de la media poblacional, por lo que los resultados en estos apartados son novedosos.

4.2 Conocimiento en la faceta epistémica

Para evaluar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático se propuso a

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

una submuestra de 49 futuros profesores, que previamente habían resuelto el problema analizar los objetos matemáticos necesarios para realizar la tarea. El análisis de la respuesta esperada se ha incluido en la Sección 3.1.

En la Tabla 5 se presentan algunos resúmenes estadísticos del número de conceptos, propiedades y procedimientos identificados por cada futuro profesor en esta tarea. Se obtuvo una media de 11,4 objetos correctamente determinados por cada participante, y, aunque se cometen algunos errores, el número total de objetos incorrectos no llegó a 1 por profesor. Hubo mucha variabilidad en el número de objetos correctamente identificados, llegando en un caso a 25.

Tabla 5 – Resúmenes estadísticos de objetos matemáticos identificados por participante

	Mínimo	**Máximo**	**Media**	**Desviación típica**
Número de conceptos correctos	1	18	7.8	3.3
Número de propriedades correctas	0	2	0,6	0,9
Número de procedimentos correctos	0	7	2,7	1,9
Total objetos correctamente identificados	3	25	11,4	4,8
Objetos incorretamente identificados	0	6	0,31	0,6

Fuente: elaborada por los autores

Los conceptos más frecuentemente identificados fueron los de muestreo, muestra, población (en total 103 referencias a alguno de estos conceptos), intervalo de confianza y sus límites o coeficiente de confianza (73 casos), variable estadística o aleatoria (51 referencias), distribución muestral (48 participantes), medidas de dispersión (40 citas) o posición central (34), y con poca frecuencia, distribución normal (4 casos) y error de estimación (5). No se cita la distribución de la variable en la población, la probabilidad, parámetro o estimador. Pero, la mayor parte de los conceptos identificados en el análisis *a priori* de la tarea fueron citados, algunos con alta frecuencia, por lo que los futuros profesores mostraron una buena competencia en la identificación de conceptos dentro de la tarea.

Respecto a los conceptos incorrectamente identificados, hay 21 referencias al teorema central del límite, que se toma como concepto y no como propiedad. Algunas propiedades consideradas como conceptos son la desigualdad (nueve casos) y proporcionalidad (un caso). Un estudiante considera que la tipificación es un concepto, en vez de un procedimiento y otros cinco resolver la ecuación de primer grado, que, además, no se requiere en la tarea.

El segundo tipo de objeto matemático mejor identificado son los procedimientos, llegando, en algún caso, hasta siete, y en promedio tres por cada futuro profesor. Lo más sencillo fue observar la necesidad de calcular el intervalo de confianza (26 casos) y usar cálculos de tipo algebraico (27 futuros profesores), así como la lectura de la tabla de la distribución normal (21 citas) y tipificación (quince participantes). Con menor frecuencia se alude al cálculo de media o desviación típica (trece participantes), cálculo de probabilidad (nueve casos), cálculo de error

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

admisible (seis) o cálculo del tamaño de la muestra (nueve casos). No se hace referencia al manejo de desigualdades o resolución de inecuaciones.

Son muy pocos los procedimientos incorrectamente identificados, al ser innecesarios en la solución de la tarea, entre otros, procedimientos combinatorios, sumatoria, recoger datos o representarlos en tablas. Un participante toma la simetría de la normal que es una propiedad como procedimiento e igualmente la distribución muestral, que es un concepto, como procedimiento. En resumen, fue menor la competencia de los futuros profesores para identificar los procedimientos requeridos en la tarea propuesta, aunque son pocos los que los identifican incorrectamente.

Fue muy escasa la referencia a propiedades, la más citada la simetría de la distribución normal (nueve casos) y dos o tres citas de cada una de las siguientes: aleatoriedad o variabilidad de la muestra, propiedades de la distribución normal o de la normal tipificada, propiedades de la probabilidad, relación entre media muestral y poblacional, probabilidad del suceso contrario o que la media es el mejor estimador.

Este es el punto en que la competencia de los futuros profesores en la faceta epistémica fue menor, pues nuestro análisis a priori muestra un gran número de propiedades requeridas en la solución de la tarea y vemos que son pocos estudiantes (un a tres) los que citan alguna de ellas. De hecho, ninguno cita el teorema central del límite como propiedad, aunque vimos, en el punto anterior, que varios lo clasifican como concepto. Tampoco se hace referencia a la relación entre la desviación típica muestral y poblacional, y entre la media muestral y poblacional o que el área total bajo la curva normal es igual a la unidad, insesgadez y mínima varianza de la media muestral como estimador. Tampoco las propiedades referidas al intervalo de confianza, ni la relación entre su amplitud y el error máximo de estimación son consideradas en el análisis de los participantes.

No contamos con investigaciones previas que analicen la faceta epistémica del profesor en inferencia, por lo que el trabajo aporta resultados originales en este punto.

4.3 Conocimiento en la faceta cognitiva

Para evaluar la faceta cognitiva del conocimiento didáctico-matemático de los participantes en el estudio, se propuso a la misma submuestra de 49 futuros profesores describir los errores previsibles del estudiantado de bachillerato al realizar la tarea que ellos habían resuelto previamente.

En la Tabla 6 analizamos cuáles de estos errores fueron identificados por los

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

participantes en el estudio. Se puede constatar el pequeño número de errores previsibles que fueron capaces de predecir los futuros profesores, no llegando a cinco en promedio, siendo los errores procedimentales los más frecuentemente citados. Sin embargo, algunos futuros profesores, como el siguiente ejemplo, citaron una buena parte de los errores previstos en el análisis previo de la tarea:

> *P11: Los errores más típicos en este tipo de problemas pueden ser tanto de planteamiento del procedimiento, errores conceptuales y procedimentales, y en la interpretación de los resultados. Más concretamente, en la identificación de la media muestral, comprender bien el concepto de intervalo de confianza, saber aplicarlo, saber obtener la fórmula a partir de la tipificación e interpretarlo. También, puede haber dificultades en la aplicación de la fórmula para conseguir el tamaño mínimo de la muestra mediante el error máximo admisible y en la interpretación del resultado obtenido* (Comentario del estudiante P11).

Tabla 6 – Resúmenes estadísticos del número de errores identificados por participante

	Mínimo	**Máximo**	**Media**	**D. típica**
Errores interpretación	0	3	0,5	0,6
Errores conceptuales	0	13	1,6	0,6
Errores procedimentales	0	7	2,5	1,6
Número total de errores	0	15	4,5	2
Incorrectos	0	4	0,6	0,9

Fuente: elaborada por los autores

Errores de interpretación del enunciado

Apenas uno de cada dos participantes en el estudio fue capaz de citar un posible error de interpretación del enunciado o de los resultados obtenidos en las diferentes partes del problema planteado, siendo 28 los que no nombraron ninguno y sólo un participante pudo citar tres de ellos. Lo más frecuente fue indicar que podría haber errores al interpretar los datos, sin indicar específicamente qué datos (dieciséis casos), seguidos por la identificación incorrecta del coeficiente de confianza (diez participantes). Con siete citas se menciona la interpretación incorrecta de las preguntas planteadas, dos a no identificar la variable en estudio y otra a interpretar incorrectamente el intervalo de confianza. Ninguno indicó dificultades posibles en la identificación del dato sobre error máximo admisible, tamaño de muestra, distribución de la población o sus parámetros. Fue mayor la detección de errores de interpretación en la investigación de López-Martín *et al.* (2019), donde los futuros profesores citaron, también, la posibilidad de error de interpretación del nivel de confianza.

Errores conceptuales

A pesar del gran número de conceptos y propiedades que se requiere comprender para resolver el problema, los participantes en el estudio no prevén dificultades con los mismos, no llegando a citar dos errores de este tipo en promedio. Lo más frecuente fue prever la confusión entre estadístico y parámetro (26 citas), denunciada por Espinel et al. (2007), Schuyten (1991) y Vallecillos (1999) y también identificada en el estudio de López-Martín *et al.* (2019). Catorce participantes indicaron que los estudiantes podrían tener dificultades de comprensión de las propiedades o forma de la distribución normal, aunque olvidan posibles problemas en identificar sus parámetros parámetros (BATANERO *et al.*, 2004). Otros diez indicaron que se podría confundir error máximo de estimación con amplitud del intervalo de confianza; ocho señalaron no identificar el mejor estimador de la media muestral; siete citaron errores en la identificación de la distribución muestral; seis, propiedades incorrectamente aplicadas del intervalo de confianza; cinco mencionaron no identificar o aplicar incorrectamente el teorema central del límite y tres apuntaron a aplicar incorrectamente propiedades de la probabilidad.

Ninguno citó que se podría realizar una interpretación incorrecta de la probabilidad asociada al nivel de confianza (YÁÑEZ; BEHAR, 2009), que si fue identificado en el trabajo de López-Martín *et al.* (2019), ni que se podría dar un tamaño de muestra no entero en la última pregunta. También, hay diecisiete participantes que indicaron que se pueden dar errores conceptuales sin especificar cuáles, y doce que incorrectamente citaron posibles errores al identificar el tipo de muestreo utilizado.

En definitiva, aunque se citan la mayor parte de los errores previstos en nuestro análisis *a priori* de esta tarea, el número de participantes que nombra cada uno de ellos es muy bajo, mostrando la necesidad de reforzar el conocimiento de este tipo de errores en los futuros profesores.

Errores procedimentales.

Estos son los errores más fácilmente reconocidos en la muestra, pues en promedio llegan a nombrar entre cuatro y cinco cada futuro profesor. Lo más frecuente (54 casos) fue indicar error en los cálculos realizados, aunque, de hecho, este error no debiera ser muy importante, pues los estudiantes tienen calculadoras y pueden trabajar con el ordenador, por ejemplo, la hoja Excel para realizar sus cálculos. Hay 32 futuros profesores que indicaron la dificultad que puede surgir al leer la tabla de la distribución normal, dado que hay que interpolar y hay varios tipos de tablas. Diecisiete citaron posibles problemas en la tipificación, error que fue frecuentemente citado en el trabajo de López-Martín *et al.* (2019); tres en olvido de fórmulas y otros tres en manejo de desigualdades, con un caso citando específicamente error en el cálculo del intervalo de confianza. De nuevo, se citan todos los errores previstos en nuestro análisis *a priori* de la tarea, aunque la mayoría de ellos por pocos participantes. Tampoco hay errores procedimentales incorrectamente identificados, aunque cinco casos indicaron, simplemente, que se pueden dar errores procedimentales, sin indicar en qué consisten.

En consecuencia, los futuros profesores que participaron en el estudio muestran algún conocimiento de la faceta cognitiva, que debiera mejorarse para lograr que puedan predecir, de

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

forma efectiva, todos los posibles errores de los estudiantes en problemas de inferencia y conseguir, de este modo, que planifiquen la mejor forma de ayudarles a superarlos.

5 Conclusiones

El objetivo del trabajo fue analizar componentes del conocimiento didáctico-matemático (GODINO, 2009; GODINO *et al.,* 2017; PINO-FAN; GODINO, 2015; PINO-FAN; ASSIS; CASTRO, 2015; SCHEINER *et al*., 2019) de futuros profesores españoles sobre la distribución muestral y el intervalo de confianza. En concreto, se abordó la evaluación de su conocimiento matemático común y de las facetas epistémicas y cognitiva de estos temas.

El conocimiento matemático común se abordó pidiendo a los participantes que resolviesen un problema similar al que deben enseñar a sus estudiantes. Los resultados de la evaluación de las soluciones a este problema indican buenos conocimientos matemáticos comunes del contenido en los futuros profesores de la muestra sobre la distribución muestral y el intervalo de confianza. Los futuros profesores, en su mayor parte, obtuvieron la distribución muestral correcta, mejor estimador de la media, intervalo de confianza y tamaño de muestra requerido para un error dado de muestreo. Los resultados son mejores que los obtenidos en las investigaciones de Batanero y López-Martín (2020) y Yáñez y Behar (2009).

No obstante, se observa en un porcentaje importante de participantes la confusión entre estadístico y parámetro y, puntualmente, otros errores detectados en investigaciones previas con estudiantes (ESPINEL *et al.,* 2007; HARRADINE *et al*., 2011; SCHUYTEN, 1991; VALLECILLOS, 1999). Por tanto, sería necesario hacer consciente a los futuros profesores de esta confusión que podrían transmitir a sus estudiantes.

Para estudiar la faceta epistémica sobre la distribución muestral y el intervalo de confianza se pidió a una submuestra de futuros profesores analizar la tarea que habían resuelto previamente e identificar los conceptos, propiedades y procedimientos requeridos para resolverla. Los futuros profesores llegan a analizar la tarea e identificar en ella algunos de los objetos matemáticos previstos en el análisis *a priori*. Sin embargo, el número de objetos identificados no fue muy alto y hubo dificultad para el análisis de los conceptos y propiedades que se deben utilizar en la resolución de los problemas planteados. Será necesario reforzar este componente del conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor sobre la distribución muestral e intervalo de confianza, para que adquiera la competencia de análisis de las tareas que sobre estos temas propone a sus estudiantes.

Fueron algo mejores los conocimientos de los posibles errores que los estudiantes

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

podrían cometer en los procedimientos asociados a las tareas propuestas, aunque, todavía insuficientes. La mayor parte identificó los errores relacionados con el cálculo, lectura de la tabla de la distribución normal o la tipificación. Sin embargo, muy pocos participantes en el estudio identificaron dificultades con la interpretación del enunciado y resultados, así como con los conceptos y propiedades que se deben aplicar. Además, el número de futuros profesores que detecta la mayor parte de los conceptos, propiedades y procedimientos que hemos expuesto en el análisis *a priori* de la tarea fue pequeño. En estos resultados hubo coincidencia con los obtenidos por López-Martín *et al.* (2019).

En conclusión, el estudio apunta a la mejora de la formación del profesorado de matemáticas en relación a la inferencia estadística, para completar su conocimiento matemático especializado en las facetas epistémica y cognitiva que se mostró suficiente. Como sugieren Vásquez y Alsina (2015), es indispensable mejorar la preparación de los profesores, sobre todo en aquellos temas para los cuales no recibieron preparación didáctica durante su formación inicial, como es el caso de la inferencia estadística.

Aunque el estudio es limitado por el carácter local de la muestra de participantes, creemos que estas carencias de conocimiento se podrían repetir en otros contextos, ya que como ponen de manifiesto Muñiz-Rodríguez *et al*. (2016), los mismos profesores reconocen carencias en su formación didáctica. Las tareas planteadas y analizadas en este trabajo pueden servir de pauta para organizar la formación relacionada de los docentes y mejorar en consecuencia la enseñanza de la inferencia estadística.

Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033.

Referencias

ABU-GHALYOUN, O. Pre-service teachers' difficulties in reasoning about sampling variability. **Educational Studies in Mathematics,** Dordrecht, v. 108, n. 3, p. 553-577, nov. 2021. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10067-8

ARTEAGA, P.; BATANERO, C.; GEA, M.M. La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre estadística: un estudio de evaluación exploratorio. **Educaçao Matemática Debate**, Montes Claros, Brasil, v.1 n.1, p.54-75, 2017.

BATANERO, C.; DÍAZ-BATANERO, C.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; ROLDÁN, A. Interval estimation: methodological approaches and understanding difficulties. **BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa**, Madrid, v.36, n.3, p.269-291, 2020.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

BATANERO, C.; LÓPEZ-MARTÍN, M. M. Conocimiento del intervalo de confianza por futuros profesores de bachillerato. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, Sao Paulo, Brasil**,** v.13, n.4, p. 363-373. 2020. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n4p363-373.

BATANERO, C.; LÓPEZ-MARTÍN, M.M.; GEA, M.M.; ARTEAGA, P. Conocimiento del contraste de hipótesis por futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato. **Publicaciones,** Melilla, España, v.48, n.2, p.73-95, 2018. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a20.

BATANERO, C.; TAUBER, L. M.; SÁNCHEZ, V. Students' reasoning about the normal distribution. En: BEN-ZVI D., GARFIELD J. (Eds), **The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking**, 2004 (p. 257-276). Dordrecht, Alemania. Springer, https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_11

S.; FIDLER, F.; CUMMING, G. Researchers misunderstand confidence intervals and standard error bars**. Psychological Methods,** Missouri, v. 4, n. 1, p. 389-396, 2005. https://doi.org/10.1037/1082-989X.10.4.389

BESWICK, K.; GOOS, M. Mathematics teacher educator knowledge: What do we know and where to from here? **Journal of Mathematics Teacher Education**, Atenas, v. 21, n. 5, p. 417-427, oct. 2018. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9416-4

BURGOS, M.; GODINO, J. D. Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. **Bolema,** Rio Claro, v. 33, n. 1, p. 389-410, 2019. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a19

CASTRO-SOTOS, A. E. VANHOOF, S.; VAN DEN NOORTGATE, W.; ONGHENA. P. Student's misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence form research on statistical education. **Educational Research Review**, Regensburg, v. 2, n. 2, p. 98-113, 2007. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2007.04.001

DE VETTEN, A.; SCHOONENBOOM, J.; KEIJZER, R.; VAN OERS, B. Pre-service primary school teachers' knowledge of informal statistical inference. **Journal of Mathematics Teacher Education,** Atenas, v. 22, n. 6, p. 639-661, 2018. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9403-9

DRISKO, J. W.; MASCHI, T. **Content analysis.** Oxford: University Press, 2016.

ESPINEL, M. C.; RAMOS, R. M.; RAMOS, C. E. Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en Secundaria. **Números,** La Laguna, v. 67, p. 15 - 23, 2007.

FONT, V.; SÁNCHEZ, A.; SALA, G. Prospective teachers' narrative analysis using the didactic-mathematical knowledge and competences model (DMKC). En CHEVALLARD Y. (ed.) **Advances in the Anthropological Theory of the Didactic.** Cham: Birkhäuse, 2022. p. 147-153. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_13

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. **Unión**, Buenos Aires, v. 20, [s.n.], p. 13 - 31, 2009. Disponible en http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1063/752. Acceso en: 23 junio 2023.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro (Brasil), v.31, n.57, p. 90-113, 2017. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

HALLER, H.; KRAUSS, S. Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? **Methods of Psychological Research**, Berlín, v. 7, n. 1, p. 1-20, 2002. https://doi.org/10.5283/epub.34338

HARRADINE, A.; BATANERO, C.; ROSSMAN, A. Students' and teachers' knowledge of sampling and inference. En: BATANERO, C.; BURRILL, G.; READING, C. (Eds.). **Teaching statistics in school mathematics- Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study**, 2011 (p. 235-246). Nueva York, Estados Unidos: Springer.

KAISER, G.; KÖNIG, J. Competence measurement in (mathematics) teacher education and beyond: Implications for policy. **Higher Education Policy,** Gante, v. 32, n. 4, p.597-615, 2019. https://doi.org/10.1057/s41307-019-00139-z

LIU, Y.; THOMPSON, P. W. Mathematics teachers' understandings of proto-hypothesis testing. **Pedagogies,** Singapur, v. 4, n. 2, p. 126-138, 2009. https://doi.org/10.1080/15544800902741564

LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; BATANERO; C.; DÍAZ-BATANERO, C.; GEA; M. La inferencia estadística en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, Argentina. v. 5, n. 8, p. 33-59; 2016. Disponible en https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6026/4049. Acceso en: 23 junio 2023.

LÓPEZ-MARTÍN, M. M.; BATANERO, C.; GEA, M. M. ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística? **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro (Brasil), 33, p. 672-693, 2019. https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n64a.11

LLINARES, S. Tensions and strengths in the research on mathematics teacher education and mathematics teacher practices. **Journal of Mathematics Teacher Education**, Atenas, v. 24, n. 1, p. 529-531, 2021. https://doi.org/10.1007/s10857-021-09524-1

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE – MECD. **Real Decreto 1105**, de 26 de diciembre de 2014. Por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: MECD, 2015.

MUÑIZ-RODRÍGUEZ, L.; ALONSO, P.; RODRÍGUEZ-MUÑIZ, L.J.; VALCKE, M. Is there a gap in initial secondary mathematics teacher education in Spain compared to other countries? **Revista de Educación,** Madrid, v. 372, n. 1, p. 106-132, 2016. https://doi.oth/10.4438/1988-592X-RE-2015-372-317.

PINO-FAN, L. R.; ASSIS, A.; CASTRO, W. F. Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. **Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, *[s.l.]*, v. 11, n. 6, p. 1429-1456, 2015. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

PINO-FAN, L. R.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. **Paradigma**, Maracay, v. 36, n. 1, p. 87-109, jun. 2015. Disponible en http://ve.scielo.org/scielo.php?pid=S1011-22512015000100007&script=sci_arttext. Acceso en: 23 junio 2023.

RAMOS, C. E.; ESPINEL, M. C.; RAMOS, R. M. Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato. **Suma**, Zaragoza, v. 61, [s.n.], p. 35-44, 2009.

SCHEINER, T.; MONTES, M. A.; GODINO, J. D.; CARRILLO, J.; PINO-FAN, L. R. What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. **International Journal of Science and Mathematics Education,** Taiwan, v. 17, n. 1, p. 153-172, 2019. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a11

SCHUYTEN, G. Statistical thinking in psychology and education. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TEACHING STATISTICS, 3., 1991, Voorburgo. **Proceedings**… Voorburgo: International Statistical Institute, 1991. p. 486-490. Disponible en https://iase-web.org/documents/papers/icots3/BOOK2/B9-5.pdf?1402524953. Acceso en: 23 junio 2023.

VALLECILLOS; A. Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. **Bulletin of the International Statistical Institute**, Londres, v. 58, [s.n.], p. 201-204, 1999.

VÁSQUEZ, C.; ALSINA, Á. Conocimiento didáctico-matemático del profesorado de educación primaria sobre probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 681-703, ago. 2015. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13

WATSON, J.; CALLINGHAM, R. Likelihood and sample size: The understandings of students and their teachers. **The Journal of Mathematical Behavior,** Surrey, v. 32, n. 3, p. 660-672, 2013. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.08.003

YÁÑEZ, G.; BEHAR, R. Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. *In*: SIMPOSIO DE LA SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 13., 2009, Santander. **Proceedings…** Santander: SEIEM, 2009. p. 1-14. Disponible en: https://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/depc/Yanez_Behar_R.pdf. Acceso en: 2 mayo 2023.

Submetido em 17 de Maio de 2022.
Aprovado em 02 de Dezembro de 2022.