UNIVERSIDAD DE GRANADA

Máster en Didáctica de la Matemática

Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso 2021/2022

Trabajo Fin de Máster

INTERPRETACIONES DE LA VARIABLE QUE MANIFIESTAN ESTUDIANTES DE QUINTO CURSO DE EDUCACIÓN PRIMARIA AL RESOLVER TAREAS DE COMPARACIÓN DE FUNCIONES.

María del Carmen Pérez Martos

Granada, (2022)

Máster en Didáctica de la Matemática

Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso 2021/2022

Trabajo Fin de Máster

Interpretaciones de la variable que manifiestan alumnos de quinto curso de educación primaria al resolver tareas de comparación de funciones.

Presentado por
D.ª María del Carmen Pérez Martos

Dirigido por
D. Antonio Javier Moreno Verdejo

Fdo.: D.ª María del Carmen Pérez Martos

Fdo.: D. Antonio Javier Moreno Verdejo

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España.

This work has been developed within the project with reference PID2020-113601GB-I00, financed by the State Research Agency (SRA) from Spain.

RESUMEN

Con esta investigación describimos los hallazgos de un experimento didáctico cuyo objetivo general es identificar y analizar las diferentes interpretaciones que se hacen de la variable en un grupo de alumnos de quinto de Educación Primaria al comparar funciones. Para alcanzar nuestro objetivo hemos hecho uso de un modelo de análisis de elaboración propia, confeccionado en base al Modelo 3UV propuesto por Ursini y Trigueros. Del análisis de las producciones de los alumnos conseguimos obtener ciertos resultados entre los cuales merece la pena destacar que, al comparar funciones, se usa más de una interpretación de la variable.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, pensamiento funcional, variable, conceptualizaciones de la variable, representación.

ABSTRACT

In this work we describe the findings of a didactic experiment whose general objective is to identify and analyze the different interpretations that are made of the variable in a group of fifth-year student of primary education when comparing functions. To achieve our objective, we have made use of an analysis model of our own elaboration, made base don the 3UV Model proposed by Ursini and Trigueros. Among the results of the analysis we stands out that more than one interpretation of the variable is manifested when the students comparing functions.

Keywords: Algebraic thinking, functional thinking, variable, conceptualizations of the variable, representation.

CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACCIONES

INTRODUCCIÓN

Lo que aquí presentamos es un Trabajo Final de Máster, concretamente del programa de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, realizado durante el curso académico 2021-2022 por la alumna María del Carmen Pérez Martos, bajo la dirección del doctor D. Antonio Javier Moreno Verdejo. Esta investigación se desarrolla dentro de un proyecto financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España, cuya referencia es PID2020-113601GB-I00.

En este trabajo indagamos en el pensamiento funcional de un grupo de 24 estudiantes de una misma clase de quinto de educación primaria (10-11 años), de un colegio privado de Granada. Los alumnos participantes en el estudio comenzaron debatiendo por grupos (cinco grupos) una tarea facilitada por los investigadores, respondieron individualmente a las preguntas de la misma contenidas en una ficha y posteriormente elaboraron una cartulina donde recogían las conclusiones del grupo para, por último, exponer dichas conclusiones en una puesta en común ante toda la clase. En este informe analizamos las producciones de los estudiantes, recogidas a lo largo de dicho proceso, atendiendo a varios aspectos diferentes pero relacionados, entre los que se encuentran, por ejemplo, las interpretaciones de la variable que se manifiestan en situaciones en las que interviene la comparación de funciones, el reconocimiento de características propias de funciones, como por ejemplo el punto de corte, el tipo de representaciones utilizadas para realizar dicho reconocimiento o el análisis de las interpretaciones de la variable encontradas.

Cabe destacar de este trabajo nuestro intento por mostrar la investigación de forma transparente, para lo cual hemos descrito totalmente el proceso de toma de datos, las características del alumnado participante, además de incluir todas las transcripciones que hemos realizado de los videos y las cuales han sido la base principal de nuestro análisis y la categorización.

La versión definitiva de la tarea consta de tres apartados referidos a una situación inicial descrita en el enunciado cuya información es completada mediante un dibujo en una viñeta. Las cuestiones, planteadas para dar una respuesta abierta, tratan sobre la comparación entre las funciones involucradas en la situación y sobre la toma de decisiones a partir de dicha comparación. Se les pidió a los alumnos, además, la elaboración y exposición por grupos de una pancarta del tamaño de una cartulina en la que aportaran las explicaciones a sus conclusiones para obtener más información sobre la forma en que abordaron la tarea. Llevamos a cabo la recogida de información durante una sesión de 70 minutos de duración. Los datos empíricos utilizados en este trabajo son las producciones escritas de los estudiantes en las fichas individuales, los vídeos que se fueron realizando mientras respondían a las fichas, las cartulinas de los grupos y los videos de la puesta en común de estos.

Para finalizar con la introducción de nuestro trabajo de investigación vamos a describir resumidamente la estructura de la memoria del mismo, la cual se organiza en cinco capítulos.

En el primer capítulo introducimos el problema objeto de estudio y justificamos el interés de la realización de este trabajo desde el ámbito personal, curricular e investigador. Además, definimos en este capítulo los objetivos de investigación, un objetivo general y unos objetivos específicos.

En el segundo capítulo describimos el marco teórico que sustenta el trabajo, enmarcándolo en relación a estudios previos relacionados con el problema de investigación planteado. En este definimos el significado de los términos clave y detallamos el estado de la cuestión.

En el capítulo tercero tratamos el marco metodológico. Para ello describimos el tipo de investigación realizada, los sujetos, los instrumentos para la recogida de información, el proceso de recogida de la misma y, por último, el modelo utilizado para nuestro análisis.

En el cuarto capítulo presentamos los datos obtenidos en la recogida de la información y realizamos un análisis de los mismos. Además, mostramos todos los resultados que se obtienen de dicho análisis.

Esta memoria finaliza con el quinto y último capítulo, en el que incluimos las conclusiones de esta investigación. En él recogemos un resumen de la aportación de este trabajo a los objetivos de investigación, las limitaciones identificadas y las posibles vías de continuación que serán consideradas para la posterior realización de una Tesis Doctoral en esta línea de investigación.

Acompañando a esta memoria presentamos dos anexos: en el primero de ellos mostramos la versión final de la tarea que fue utilizada para la recogida de los datos, y en el segundo presentamos las cartulinas realizadas por grupos.

CAPÍTULO 1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

En el primer capítulo de este Trabajo Final de Máster vamos a presentar el problema objeto de la investigación que hemos llevado a cabo. Para ello, además de describir en qué consiste dicho problema, explicaremos detalladamente las causas que justifican su elección.

1.1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El pensamiento algebraico, según (Radford, 2012), es una forma particular de reflexionar en la matemática y es considerada una práctica cognitiva mediada por signos. Este autor considera que la naturaleza del pensamiento algebraico emerge en los estudiantes como una forma específica en la cual ellos actúan conceptualmente, con el propósito de llevar a cabo acciones requeridas para la generalización de tareas. Para Vergel (2016) el pensamiento algebraico es "un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente" (pág. 73).

Este tipo de pensamiento en edades tempranas es de interés en el campo de la investigación, de hecho, es un tema que ha sido tratado en congresos importantes sobre Educación Matemática, tanto nacionales como internacionales. Entre las actas del CERME (Conference of European Society for Research in Mathematics Education), encontramos que Radford (2009) introduce una tipología de formas de pensamiento algebraico en función de su nivel de generalidad. Como conclusiones aporta las siguientes ideas, entre otras: por un lado, que el pensamiento en general, y el pensamiento algebraico en particular, es una praxis histórica cultural mediada por el cuerpo, el signo y la herramienta, y por otro lado que el pensamiento algebraico no puede limitarse a actividades mediadas por el sistema semiótico alfanumérico estándar del álgebra.

Entre las actas del PME (Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education) encontramos que Ayala-Altamirano et al. (2022) analizan cómo estudiantes de 9-10 años representan y se refieren a cantidades indeterminadas al plantear ecuaciones asociadas a problemas aritméticos. Entre sus hallazgos, por un lado, se tiene que los problemas aritméticos verbales permiten que lo indeterminado se convierta en objeto de pensamiento para los estudiantes, y por otro lado que la reflexión sobre la interpretación de las ecuaciones favorece la identificación de dos significados asociados a las cantidades indeterminadas, a saber, desconocido y variable.

Kaas (2019), por su parte, aporta a este congreso un estudio empírico sobre la comprensión emergente de los estudiantes de segundo de Primaria sobre la notación variable en el contexto del pensamiento funcional, y sus resultados sugieren que los jóvenes estudiantes pueden aprender a pensar algebraicamente y que la comprensión conceptual de las relaciones funcionales y la de los símbolos puede emerger de manera conjunta.

A nivel nacional contamos con la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), y entre las actas de sus Simposios también se encuentran artículos interesantes sobre pensamiento funcional. Pinto et al. (2021) realizan un análisis de las respuestas escritas y orales de estudiantes de quinto/sexto de primaria al resolver diferentes problemas que involucran la comparación de funciones lineales. Entre sus hallazgos se encuentra que el lenguaje natural es una representación que, a este grupo particular de estudiantes, les permite comparar el comportamiento de las funciones involucradas en los problemas, así como generalizar; y que existe un creciente interés en proporcionar a los estudiantes representaciones cada vez más simbólicas, abandonando la importancia que tiene el lenguaje natural para que los estudiantes sean capaces de interactuar con otras representaciones. De Torres et al. (2018) nos quedamos con la idea de que "es importante tener en cuenta los diferentes significados de las letras desde el punto de vista docente" (pág. 582).

Dentro del pensamiento funcional el concepto de variable es de vital importancia, por lo que nos preguntamos qué se puede decir de la variable y de las representaciones de la misma. Así, y en base a todo lo anterior, planteamos nuestro problema de investigación, el cual responde a preguntas como ¿Son capaces los alumnos de identificar la dependencia entre variables? ¿Qué interpretaciones hacen los alumnos de la variable cuando se les propone que tomen decisiones en torno a una actividad en relación con la comparación de funciones? ¿Se identifican más interpretaciones además de la de relación funcional? ¿Y qué hay sobre las representaciones que usan los alumnos para representar la variable?

Así pues, este Trabajo Final de Máster que presentamos se trata de un estudio cualitativo llevado a cabo con estudiantes de quinto curso de educación primaria obligatoria a través del análisis de una tarea de respuesta abierta que resuelven los alumnos en pequeños grupos. El principal foco de interés del mismo se encuentra en la capacidad de encontrar las distintas interpretaciones que hacen los alumnos de la variable algebraica al comparar funciones, además de los usos que hacen de las letras, en caso de que las usen como representación de la variable. La tarea objeto de análisis se plantea después de haber trabajado estos mismos alumnos anteriormente con otras dos tareas de este tipo en las que el objetivo principal era poner de manifiesto y promover el desarrollo del pensamiento funcional de estudiantes en esta etapa de su desarrollo. Por todo ello, esta propuesta de investigación está enmarcada dentro de la teoría del early algebra y del pensamiento funcional.

En definitiva, nuestro trabajo consiste en un experimento de enseñanza de naturaleza exploratoria y descriptiva en el que pretendemos analizar las diferentes interpretaciones de las letras y las variables por parte de los alumnos de un grupo estándar de quinto de Educación Primaria obligatoria cuando se les propone que tomen decisiones en torno a una actividad en relación con la comparación de funciones. Pero, ¿a qué nos referimos cuándo hablamos de experimento de enseñanza? Steffe y Thompson (2000) definen el experimento de enseñanza como una herramienta dirigida a comprender el aprendizaje y razonamiento de los estudiantes durante un corto periodo de tiempo. Además, Stylianides y Stylianides (2013) afirman que

> "los experimentos de enseñanza como una aproximación metodológica en la investigación en educación matemática reúnen tres características:
>
> - La investigación es conducida en clases reales, lo que inserta la investigación en el mundo de los docentes y genera un contexto para la colaboración entre

profesores e investigadores, aumentando la probabilidad de que los resultados de la investigación puedan ser aplicados en el aula.

- La investigación está dirigida a problemas de aprendizaje de los estudiantes y a cómo la enseñanza puede apoyar este aprendizaje planteándose cuestiones relevantes para la práctica docente.

- Los resultados de esta aproximación a la investigación permiten desarrollar soluciones basadas en la teoría, testadas empíricamente para solventar los problemas de aprendizaje de los estudiantes mostrando qué metodología, instrumentos y acciones funcionan (o pueden funcionar) y explicando por qué funcionan" (pág. 334).

Para completar el problema de investigación, definimos a continuación los objetivos que perseguimos y pretendemos alcanzar con este trabajo. Proponemos un objetivo general que desglosamos posteriormente en seis objetivos específicos. Dicho objetivo general es "identificar y analizar las diferentes interpretaciones de la variable que hace un grupo de alumnos de quinto de Educación Primaria en una tarea de comparación de funciones", y para facilitar su consecución proponemos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar si los estudiantes reconocen la relación funcional.
- Identificar los significados de la variable independiente que surgen en el discurso y el quehacer matemático de los alumnos y cuál predomina.
- Identificar el uso que los estudiantes hacen de las letras como representación de la variable.
- Analizar las interpretaciones de la variable desarrolladas por los alumnos.
- Reconocer que el pensamiento funcional está presente en alumnos de Primaria al realizar tareas de comparación de funciones.

1.2. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En este apartado respondemos a la motivación para elegir este tema para nuestra investigación, además de mostrar cómo la respuesta viene motivada por diferentes ideas, dos en concreto, pertenecientes a dos ámbitos diferentes, por un lado, el personal y por otro el curricular e investigador.

1.2.1. Justificación desde el contexto personal

Aquí dejaré constancia de mi interés personal por el tema tratado en este trabajo, y las matemáticas en general, desde los inicios de mis estudios.

Desde mi comienzo en el cole, en Educación Infantil y Primaria, he mostrado siempre mi afán por las matemáticas, de hecho, mi seño de Infantil siempre decía a mis padres que yo iba a estudiar Matemáticas o algo que tuviera relación con ellas porque siempre mostraba mucho interés cuando las trabajábamos y se me daban realmente bien. Yo recuerdo que me encantaba cuando llegaba el momento de hacer mates, cuando realizábamos cuentas o problemas, cuando trabajábamos la lógica o cuando hacíamos seriaciones en grupo. Y poco se equivocaba mi seño ya que, tras terminar Educación Primaria, la ESO, etapa durante la cual tuve una profesora de matemáticas que despertó en mí el deseo de ser como ella, y Bachillerato, donde opté por la rama de lo Científico y Tecnológico, en 2014 comencé mi carrera de Matemáticas en la UGR, la cual finalicé en 2019 convirtiéndome así en Graduada en Matemáticas.

Cierto es que me gustó la carrera, pero también que me costó lo suyo superarla, que era todo demasiado formal para mí, en todos los sentidos, y, por otra parte, que tenía, claro no, clarísimo, que yo no quería terminar trabajando en la empresa. Por todo esto fue por lo que tras finalizar mi carrera me matriculé en un doble máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Enseñanza de Idiomas en la especialidad de Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas.

Finalicé el primer año de este máster en mitad de la cuarentena por el COVID19, tras el cual me concedieron el título del máster de Secundaria, quedándome así un curso más para finalizar el doble máster al completo y superar la parte de Didáctica de las Matemáticas. En un principio seleccioné este doble máster principalmente por la parte de Secundaria, ya que mi idea era ser profesora de dicho nivel, pero lo que no sabía era que me iba a gustar tantísimo la parte de investigación en Didáctica de las Matemáticas, de hecho, mi trabajo final del máster de Secundaria ya fue de investigación. Tras este primer año dejé paralizado el máster durante el curso 2020/2021 para dedicarme al estudio de las oposiciones de Secundaria, dejándome llevar por la idea que siempre había tenido de dedicarme a este nivel. Ese año, a la vez que me preparaba para las oposiciones estuve en un Centro de Educación Secundaria de Refuerzo COVID, la experiencia como profesora me gustó bastante y pensé que ese tenía que ser mi futuro hasta que este último curso, mientras estaba finalizando mi doble máster, me llamaron para cubrir una baja como profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada, concretamente en el Campus de Melilla, donde me he dado cuenta de que lo que realmente quiero es continuar mi carrera investigadora en Didáctica de las Matemáticas y en un futuro ser profesora de este nivel. Este camino lo voy a iniciar este próximo curso, en el cual voy a empezar mi Tesis y a colaborar con el Departamento de Didáctica de la Matemática de la UGR activamente como Becaria FPI dentro del proyecto “Pensamiento Algebraico en Educación Infantil y Educación Primaria”. Debo mencionar también que durante mi grado cursé como optativas ciertas asignaturas en relación con las matemáticas dentro de la carrera de Educación Primaria, y, además, estuve colaborando con el Departamento como Becaria Ícaro, así, se puede observar que tengo relación con la Didáctica de la Matemática desde hace ya algún tiempo, lo que hace que sienta a día de hoy bastante afinidad hacia ella.

La decisión de trabajar en el campo del early algebra fue tomada junto a mi tutor, Antonio Moreno, y María Consuelo Cañadas (directora del Proyecto), ambos pertenecientes al Proyecto de Investigación antes mencionado, siguiendo la línea de trabajo que ellos llevan. Y la decisión de trabajar con ellos, tanto en el Trabajo Final de Máster como en el Proyecto y la Tesis fue totalmente mía y con motivo de lo mucho que me han gustado las asignaturas “Pensamiento Numérico y Algebraico I” y

“Pensamiento Numérico y Algebraico II” cursados en el máster de Didáctica. Ya como estudiante de grado, el Álgebra, junto a la Geometría, fue siempre uno de mis bloques favoritos. En base a todo esto es en base a lo que decidimos tratar el tema de las diferentes interpretaciones que los alumnos pueden hacer de las variables y, en caso de su uso para la representación de estas, las diferentes interpretaciones que pueden hacer de las letras, al trabajar tareas de comparación de funciones.

Aun con todo esto, la realización de este trabajo supone un gran desafío personal para mí ya que, no es la primera vez que realizo un trabajo de investigación, pero si la primera vez que lo realizo sobre pensamiento algebraico, concretamente pensamiento funcional, y aún me queda mucho que aprender e investigar sobre este tema.

Como profesora de Secundaria que he sido y futura doctoranda e investigadora espero que los resultados de este, mi trabajo, sean de provecho como directrices a tener en cuenta en la enseñanza de esta materia y ayuden a muchos profesores, tanto de Primaria como de Secundaria (ya que en los primeros años de Secundaria es conveniente tener en cuenta todo lo que traen de Primaria), a tomar decisiones educativas en su práctica diaria docente, y por otro lado, espero que también le sean de utilidad al resto de la comunidad docente e investigadora del área de educación matemática.

1.2.2. Justificación desde el contexto curricular e investigador

Vamos a dejar constancia aquí de la gran importancia que tiene tanto el pensamiento algebraico, en general, como el funcional, en particular, en las matemáticas escolares.

El álgebra está presente como contenido matemático en diferentes etapas del sistema educativo, en especial desde la Educación Secundaria hasta la Universidad, pero en los últimos años han surgido propuestas para incorporar ciertas cuestiones de este pensamiento en la Educación Primaria. Al entrar en Secundaria, los adolescentes llevan consigo las nociones e ideas que usaban en aritmética, pero como bien indican Kieran y Filloy (1989), el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética. Aprender álgebra no es hacer explícito lo que estaba implícito en la aritmética, sino que requiere un cambio en el pensamiento del estudiante para poder llevar las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre números y operaciones. En (Kieran C. , 2004) el autor ofrece la siguiente definición de pensamiento algebraico en los primeros grados:

> “El pensamiento algebraico en los primeros grados implica el desarrollo de formas de pensar dentro de actividades para las cuales se puede usar el álgebra simbólica de letras como herramienta, pero por otro lado, no son actividades exclusivas del álgebra y también se pueden realizar sin usar ningún tipo de álgebra simbólica de letras; actividades tales como, analizar las relaciones entre cantidades, la notación de estructuras, estudiar cambios, obtener la generalización, resolver problemas, modelar, justificar, demostrar y predecir.” (pág. 149)

En (Cañadas & Molina, 2016) se realiza una revisión de investigaciones previas sobre pensamiento funcional, y entre los resultados se destaca la necesidad de profundizar en dicho pensamiento por parte de los estudiantes de primeras edades. Además, se indica que la incorporación del pensamiento funcional en el currículo de Educación Primaria recientemente hacía que el interés por la investigación sobre pensamiento funcional se extendiera al ámbito docente. Lo que merece la pena destacar de aquí es que ambas ideas se mantienen hoy día, sigue habiendo una gran necesidad de profundizar en el pensamiento funcional de los estudiantes de primeros grados, y la incorporación relativamente reciente de este pensamiento en el currículo de Primaria hace que haya un gran interés por la investigación sobre el tema. Investigaciones como la de Torres et al. (2022), Bastías y Moreno (2016) y la de Sánchez (2021) verifican la presencia de pensamiento algebraico, concretamente funcional, en alumnos de Primaria.

Torres el al. (2022) centran su trabajo en identificar las estructuras (regularidades identificadas) y las representaciones que aparecen cuando los estudiantes trabajan con tareas de generalización. Entre sus resultados se encuentran evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de segundo curso de Educación Primaria, concluyen que una introducción temprana de una perspectiva funcional puede fomentar una visión profunda del concepto de función, y, por último, ponen de manifiesto que los estudiantes de estas edades tienen la capacidad y herramientas necesarias para trabajar este tipo de tareas en el aula de primaria.

Por su parte, Bastías y Moreno (2016) se propusieron como objetivo de investigación identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de quinto curso de Educación Primaria en el contexto de un experimento de enseñanza. Realizan un análisis cualitativo de los datos tomados de una sesión de clase, dirigida a un grupo de 24 estudiantes, en la cual se presentó una situación modelizable por una relación funcional, y entre los resultados se encuentra que los estudiantes fueron reconociendo la relación entre las variables implicadas, se identificó la relación de covariación en ciertas respuestas y además se observa que la mayoría de los estudiantes expresaron el patrón funcional a través de la representación verbal. Por tanto, es viable proponer en las aulas de Primaria este tipo de problemas como forma de promover el pensamiento algebraico.

Por último, Sánchez (2021) centra su investigación en un grupo de docentes de matemáticas de un colegio de Primaria, en la cual dialoga con unos 20 docentes sobre la(s) palabra(s) que ellos relacionaban o asociaban con la palabra álgebra. Afirma en este estudio que

> “anteriores planteamientos referidos al álgebra escolar y al pensamiento algebraico en primaria y coincidiendo con Radford (2011) y Vergel (2015) le exigen al docente de matemáticas, particularmente de primaria, contar con un conocimiento didáctico amplio que le permita:
>
> – Contemplar una perspectiva amplía y actual del álgebra escolar, en la cual, entre otros aspectos, se considere la generalización y el estudio de patrones

como una forma de posibilitar el surgimiento y el desarrollo del pensamiento algebraico en primaria.

– Identificar y considerar formas de pensamiento algebraico en primaria, caracterizadas por el uso de diversos recursos empleados por los estudiantes en sus producciones escritas, verbales y gestuales.

– Establecer que el uso de símbolos alfanuméricos no es una condición necesaria para determinar si una producción puede ser considerada algebraica específicamente en primaria.” (pág. 4)

Se presenta además el análisis semiótico de una producción algebraica realizada por un estudiante de quinto de Primaria, un alumno con 10 años, frente a una tarea de generalización de patrones en la que se muestra una secuencia figural apoyada por representación tabular. En base al análisis de todo lo presentado, este artículo establece en los resultados varias consideraciones, entre las cuales se destaca la necesidad de que

“el docente cuente con un conocimiento didáctico sobre el álgebra escolar y sobre el pensamiento algebraico que:

– Le posibilite tener una visión amplia y actual sobre el álgebra escolar y considerar la generalización, particularmente la generalización de patrones, como una forma de abordar el álgebra, especialmente en los primeros grados de escolaridad.

– Le permita contemplar las producciones escritas, verbales y gestuales que realiza el estudiante para poder realizar una interpretación adecuada de lo que él nos quiere comunicar. Por otra parte, considerar la importancia de generar en una actividad matemática de aula con los estudiantes que favorezca los espacios para la participación, para que ellos socialicen los procesos que elaboran y poder así contar con otros recursos semióticos que permitan constituir una adecuada interpretación.

– Le posibilite interpretar los diversos recursos semióticos que emplea el estudiante para comunicarse, sus dibujos, sus palabras, sus signos, en las diferentes producciones elaboradas.

– Le permita identificar y analizar la manera como hace presencia el componente de analiticidad, determinar la manera como el estudiante contempla y trabajo con lo indeterminado.

– Le permita reconocer las producciones de los estudiantes que pueden ser consideradas algebraicas, particularmente en primaria, en este caso aquellas que correspondan a generalizaciones algebraicas, estableciendo los elementos que las caracterizan y aquellos que las diferencian de otro tipo de generalización” (pág. 11).

En esta última cita se puede identificar la importancia que tiene el conocimiento del pensamiento algebraico y funcional, no solo en la investigación y entre el alumnado, sino también entre los docentes.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO.

En el presente capítulo recogemos el marco teórico de nuestra investigación. Nos centramos aquí en aportar algunos de los estudios previos sobre pensamiento funcional y, dentro de este, sobre la variable algebraica. La información que presentamos permite precisar el significado de los términos que se utilizan y ubicar nuestra investigación dentro del contexto en el que se enmarca.

2.1. PENSAMIENTO FUNCIONAL

En virtud de autores como Hamley (1934) o Dubinsky y Harel (1992), la idea de función ha sido considerada como una de las más importantes y, por lo tanto, se ha de tomar como eje central de la educación matemática. Carraher y Schliemann (2007) consideran que la función nos puede proporcionar un punto de partida importante dentro del álgebra, pero para ello necesita fomentarse desde la Educación Primaria. El trabajo con funciones depende de y aporta comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes representaciones (Cañadas & Molina, 2016). Según Duval (2006), las tareas matemáticas se realizan necesariamente en un contexto representacional. Las tablas, los gráficos y el simbolismo algebraico son sistemas de representación clave para este contenido matemático (Doorman & Drijvers, 2011).

El pensamiento funcional es un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen, el cual es beneficioso para los estudiantes por su conexión con otros contenidos matemáticos, otras áreas de conocimiento y cursos educativos superiores (Cañadas & Molina, 2016). A continuación, mostramos definiciones de pensamiento funcional dadas por diferentes autores.

Para Torres el al. (2021) el pensamiento funcional es un tipo de pensamiento algebraico que adopta la función como contenido matemático esencial. En esta última investigación los autores buscan describir cómo razonan los estudiantes de segundo curso de Primaria a medida que evolucionan hacia la generalización, y cómo expresan la generalización como parte del razonamiento inductivo.

Según Cañadas y Molina (2016), cuando el foco matemático del pensamiento algebraico se sitúa en las funciones, se habla del enfoque funcional del early algebra. Rico (2007) define el pensamiento funcional como el acto de pensar en términos de y acerca de relaciones, destacándolo como una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas.

Se tiene que este tipo de pensamiento implica la generalización de relaciones entre cantidades covariantes, la representación de esas relaciones de diferentes formas utilizando el lenguaje natural, las expresiones simbólicas, tablas y gráficos, y razonar de manera fluida con esas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones (Blanton, Levi, Crites, Dougherty, & Zbiek, 2011). Estos mismos autores, Blanton et al., definen el pensamiento funcional como el proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones.

Tradicionalmente el estudio de funciones ha estado retrasado hasta su tratamiento conjunto con el álgebra de la Educación Secundaria, pero en la actualidad existen evidencias, dentro del marco de la propuesta early algebra, de que los niños tienen capacidades relacionadas con el pensamiento funcional desde antes de lo que se les presuponía (Blanton & Kaput, 2011), Pinto y Cañadas (2018), por ejemplo, en su estudio de caso realizado con una niña de cuarto de Primaria sobre pensamiento funcional, en el cual se le hace trabajar con un problema de generalización que involucra una función lineal, observaron que la niña entendió lo que se le pedía y, tras organizar los primeros casos particulares y luego ir aumentando el tamaño de estos, finalmente generalizó. De hecho, existen evidencias de que este pensamiento puede tomar lugar antes de que se introduzca la notación algebraica, pudiendo los estudiantes alcanzarlo incluso desde la educación infantil (Blanton & Kaput, 2004), (Castro, Cañadas, & Molina, 2017). La capacidad demostrada para el desarrollo del pensamiento funcional en los alumnos de edades tempranas potencia la viabilidad de la propuesta de que este pensamiento sea nutrido por el currículo y por la enseñanza.

Destacamos, para finalizar, dos ideas: por un lado, que el enfoque funcional incluye una serie de representaciones: lenguaje natural, tablas de funciones, gráficos y notación simbólica (Torres et al. (2022)). En relación con esto último, cabe destacar que Radford (2002) habla de signos gestuales también. Estos distintos modos de representación nos proporcionan distintos puntos de vista de cómo en la educación temprana se puede plasmar el pensamiento funcional. Y, por otro lado, mencionar que dentro del pensamiento algebraico es de suma importancia el significado que se le da tanto a la variable como a la letra como representación de la anterior. A continuación profundizamos sobre este tema.

2.2. LA VARIABLE

El pensamiento y razonamiento funcional depende de la comprensión de ciertas ideas clave, de entre las cuales la variable es una de las más fundamentales. Existen suficientes investigaciones como para afirmar que el concepto de variable es problemático para los estudiantes debido a que se utiliza con diferentes significados: incógnita específica, número generalizado, variable, parámetro y constante (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Una correcta construcción del concepto de variable implica incluir sus diversos significados, interpretar de distintas maneras los símbolos que se usan y tener la posibilidad de pasar de un significado a otro con flexibilidad según las exigencias del problema a resolver (Trigueros, Reyes, Ursini, & Quintero, 1996). En consecuencia, como indica Ursini (1994), es importante dar la oportunidad a los estudiantes de participar en experiencias ricas, que los ayuden a generar significados amplios y ricos. En esta misma investigación, (Ursini, 1994), el autor considera que en el álgebra elemental aparecen esencialmente tres usos de la variable: incógnita específica, número general y relación funcional.

Previamente a Ursini, Krutetskii (1976) consideraba que hay evidencias de pensamiento funcional a partir de la interpretación de la variable como incógnita específica, y va evolucionando según se va consiguiendo interpretar la variable como número general y como relación funcional, pero que la manifestación de interpretaciones anteriores, como por ejemplo la variable como parámetro, no proporcionan evidencias de dicho pensamiento. En base a estas últimas dos ideas vamos a centrar nuestra investigación en la identificación de tres usos de la variable, a saber: número general, incógnita específica y relación funcional.

Siguiendo con Ursini (1994), destacamos que este autor justifica el carácter multifacético del concepto de variable, y lo hace en base a la siguiente cita: "para poder trabajar exitosamente con la variable es necesario poder interpretar de distintas maneras los símbolos que se usan para representarla, así como poder pasar de una interpretación a otra" (pág. 92).

Así pues, en base a todo lo anterior, apoyaremos nuestro estudio en un modelo que ayuda a la identificación de estas tres interpretaciones de la variable: el *Modelo 3UV*. Este modelo fue propuesto por Ursini y Trigueros (2006), y en él se presenta una descomposición del concepto de variable en el cual se incluyen, la capacidad de interpretación, simbolización y manipulación de cada uno de los tres usos de la variable considerados. A continuación, mostramos los aspectos característicos de esta descomposición para cada uno de estos tres usos de la variable, los cuales nos van a aportar características en las que fijarnos para identificar más fácilmente las interpretaciones.

❖ *Variable como incógnita específica.*

Se considerará que un manejo adecuado de la variable como incógnita específica implica:

> **I1**: reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;
> **I2**: interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;
> **I3**: sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;
> **I4**: determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;
> **I5**: identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.

Aunque algunos autores argumentan que una incógnita no puede ser considerada como variable (Schoenfeld & Arcavi, 1988), para esta investigación asumimos que una incógnita puede ser considerada como variable porque, mentalmente o de hecho, se realizan operaciones sobre ella para eventualmente poder determinar su valor, cuando se encuentra en una ecuación y al ejecutar estas operaciones se considera a la literal como un ente que puede tomar cualquier valor (Juárez, 2011).

- *Variable como número general.*

Se considera que un manejo adecuado de la variable como número general implica:

G1: reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;
G2: interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;
G3: desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;
G4: manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

- *Variables en relación funcional.*

Se considera que un manejo adecuado de las variables en relación funcional implica:

F1: reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;
F2: determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
F3: determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;
F4: reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;
F5: determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;
F6: expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.

2.2.1. La variable y su representación

Una representación matemática es una herramienta que visibiliza los conceptos y procedimientos matemáticos. A través de ellas los estudiantes registran y comunican su conocimiento (Rico, 2009). Los sistemas para representar cantidades indeterminadas y relaciones funcionales son variados, entre ellos encontramos el lenguaje natural, tablas, gráficos o símbolos algebraicos. Además, en relación a lo dicho antes sobre los gestos y Radford, en (Radford, 2012) se aborda la cuestión del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes. En contraste con los enfoques mentales de la cognición, sostiene que el pensamiento está compuesto por componentes materiales y del mundo de las ideas tales como el discurso (interior y exterior), formas de imaginación sensitiva, gestos, tacto y acciones reales con signos y artefactos culturales.

Por otro lado, Cañadas y Molina (2016), mencionan la aparición de la representación pictórica también. De hecho, Fuentes (2014) y Cañadas y Fuentes (2015), al indagar sobre el pensamiento funcional de estudiantes de segundo de educación primaria en España, destacan las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes para representar la relación entre las variables de un problema contextualizado que involucra la relación funcional $f(x)=5x$, y resulta que entre las estrategias que llevan a los alumnos a una relación correcta destaca el conteo de dibujos.

La representación mediante símbolos algebraicos contempla el uso de letras, y estas como símbolos algebraicos son consideradas herramientas lingüísticas para representar ideas matemáticas de forma sucinta. Por tanto, un sistema de representación clave para la representación del pensamiento funcional es el simbolismo algebraico: uso de letras y símbolos convencionales. Blanton et al. (2011) caracterizan el uso de las letras del siguiente modo:

- Las letras representan una medida o la cantidad de objetos, no el objeto en sí.
- En una expresión se pueden repetir letras o usar letras distintas, no obstante, hay que considerar que una misma letra utilizada en una ecuación representa un único valor y distintas letras pueden tener el mismo valor.
- La misma letra puede tomar uno o más roles dentro de un problema o situación.
- Pueden representar una cantidad discreta o una cantidad continua.

Desde que Ayala-Altamirano y Molina (2020) realizaron sus primeros estudios sobre los significados atribuidos por estudiantes de tercero de primaria a las cantidades indeterminadas y su representación con símbolos literales ya observaban que a los estudiantes les resulta difícil interpretar las letras como cantidades variables, tienden a adoptar una perspectiva estática, asociando las letras a objetos específicos o ignorándolos al realizar tareas algebraicas. Una de las dificultades que afrontan los estudiantes al enfrentarse a expresiones algebraicas que emplean letras es su ambigüedad (Ayala-Altamirano C. , 2021), la cual se debe principalmente a los diferentes usos que pueden tener las letras en el álgebra. González y Díez (2002) afirman que existen diversas dificultades asociadas al uso de los significados de las letras, las cuales quizás puedan solventarse si conseguimos explorar cómo entienden los alumnos de primaria estos aspectos para poder actuar en consecuencia. De hecho, Booth et al. (2017), en su capítulo del libro “And the rest is just algebra”, muestran algunos conceptos erróneos relacionados con el uso de las letras que toman de otros autores, y que tienen relación con la caracterización de las letras aportada anteriormente:

- Creencia de que la letra en una expresión numérica representa un objeto real o es una etiqueta (Usiskin, 1998),
- Ignorancia completa de las variables (Küchemann D. , 1978),
- Asociación de la letra con su posición en el alfabeto (Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens, & Sawrey, 2017) ,
- No comprensión de que la misma letra vista varias veces en una oración numérica debe representar el mismo número (Kieran C. , 1985),

Cabe destacar que es de gran interés indagar sobre el uso que hacen los estudiantes de las letras porque, además de lo indicado anteriormente, ayuda a conocer los procesos matemáticos y el pensamiento funcional que manifiestan los estudiantes. Los significados que sean asignados a las letras afectarán a cómo son resueltos los problemas (Küchemann D. E., 1981) . De (Ayala-Altamirano C. , 2021) obtenemos que los diferentes significados que se le pueden atribuir a las letras en álgebra son los siguientes:

- Letra como incógnita específica,
- Letra como número generalizado,
- Letra como variable,
- Letra como parámetro y
- Letra como constante.

A continuación, vamos a destacar algunas ideas importantes obtenidas de estudios previos sobre el tema, pero antes debemos mencionar que saber usar los diferentes significados tanto de las variables como de las letras es crucial en el desarrollo del pensamiento algebraico y funcional, y en la transición de la aritmética al pensamiento algebraico.

Las primeras investigaciones sobre el significado de las letras se centraron en las dificultades y errores de los estudiantes de Secundaria. En el estudio enmarcado en el enfoque del álgebra como aritmética generalizada realizado por Küchemann (1981), y que fue confirmado por Malisani y Spagnolo (2009) en su investigación sobre el papel de la variable en el pensamiento algebraico de los estudiantes de Secundaria, la concepción predominante parecía ser la de variable como algo desconocido, y la variable como representación de un rango de valores estaba fuera del alcance de la mayoría de los estudiantes. También se obtiene como resultado que las letras tienden a ser interpretadas como objetos concretos o que son ignoradas directamente. Además, muchos estudiantes de este estudio parecían pensar que letras diferentes en una expresión siempre tomarían valores diferentes; que nunca podrían ser los mismos. La investigación de Ayala-Altamirano (2017) aporta la siguiente lista de diferentes interpretaciones que hacen los estudiantes de tercero de Primaria sobre las letras con su descripción correspondiente.

Tabla I. Interpretación de las letras por Ayala-Altamirano

Interpretaciones de los estudiantes sobre las letras

Categoría	Descripción
Letra evaluada	Se asigna un valor numérico desde el inicio.
No usa la letra	Ignoran las letras o no reconocen su existencia, pero le dan un significado.
Letra como objeto	Es la abreviatura de un objeto o el objeto

	en su propio derecho.
Letra como una incógnita	Número específico que representa una incógnita y se puede operar sobre este directamente.
Letra como número generalizado	Es interpretada como una representación de varios valores numéricos antes de uno en particular.
Letra como una variable	Representa un rango de valores no especificados y sistematiza la relación entre dos conjuntos.

Brizuela et al. (2017) describieron una posible progresión en el pensamiento de los estudiantes de primer año de Primaria sobre las variables y su notación. Estos autores diseñaron una secuencia instruccional de dos ciclos la cual constaba de 16 lecciones y tres entrevistas individuales semiclínicas, una de ellas antes del ciclo 1, otra entre los ciclos 1 y 2 y la última después del ciclo 2. Tras analizar las entrevistas, concluyeron que las dificultades experimentadas por los estudiantes para asimilar el simbolismo se asociaron a la forma en que la notación choca con su experiencia y comprensión previas más que a la edad. Identificaron seis niveles de progresión en la comprensión de las variables y su notación, los dos primeros implicaban internalizar el significado de las letras como variables. En estos los estudiantes no pudieron pensar en la cantidad variable como una cantidad desconocida o indeterminada y, por lo tanto, buscaron formas de encontrar un valor numérico que les permitiera completar la tarea, incluido contar, medir u otros métodos de cuantificación más familiares. Del tercer al quinto nivel, se condensó el significado; los estudiantes comenzaron a comprender la variabilidad y la noción de que las letras pueden representar una cantidad variable desconocida. Por último, la cosificación se dio en el sexto nivel, en el cual los niños matematizaron cantidades desconocidas y se dieron cuenta de que podían ser consideradas como objetos en sí mismos o incluso combinados con otros (Ayala-Altamirano & Molina, 2020).

Siguiendo con las ideas importantes sobre estudios previos, en (Küchemann D. E., 1981) se afirma que la construcción de una fórmula o regla parece estar construida sobre la noción de número generalizado. En base a esto, Radford (1996) sostiene que la idea de número generalizado es un concepto previo al de variable, y plantea la opinión de que las formas de pensar asociadas con la generalización (que involucra número generalizado, variable y parámetro) y ecuación (que involucran incógnitas específicas) son “formas estructuradas, independientes y esencialmente irreducibles de pensamiento algebraico” (Radford, 1996, pág. 111).

En base a esto último deducimos que, desde Infantil y Primaria, los estudiantes necesitan comprender tanto el número desconocido como el general/generalizado para poder progresar en el álgebra. De hecho, algunos profesores e investigadores consideran que comprender el símbolo literal como un número generalizado que puede tomar un rango de valores proporciona un canal desde una visión de la letra como desconocida a la de la letra como variable (Bednarz et al. (1996)), facilitando así la transición de la aritmética al álgebra. En las ideas anteriores vemos la importancia que tiene aquí el término generalizar; Mason (1996) habla sobre la importancia del proceso de generalización, ya no solo en el álgebra, sino en las matemáticas en general; este afirma que

> "La generalización es el latido del corazón de las matemáticas y aparece en muchas formas... el corazón de la enseñanza de las matemáticas es el despertar de la sensibilidad del alumno a la naturaleza de la generalización matemática… el álgebra tal como se entiende en la escuela es el lenguaje para la expresión y manipulación de generalidades" (pág. 65).

En el estudio que realizan Bastías y Moreno (2016) se evidencia el pensamiento funcional en alumnos de quinto de Primaria, y cabe destacar que se hace a través del reconocimiento del tipo concreto de relación entre las variables involucradas; y concluyen que la correspondencia es la relación que se manifiesta claramente en el desarrollo de la actividad, la covariación también se identifica en algunas respuestas y el patrón recursivo no se llega a identificar.

Y es que según Smith (2017) existen tres tipos de relaciones en las funciones lineales que involucran valores de las variables, y estas son la recurrencia, la correspondencia y la covariación. Define estas relaciones del siguiente modo:

- La recurrencia es la más elemental y describe una variación entre las cantidades de una secuencia de valores e implica obtener una cantidad en una secuencia a partir del número o números previos.
- La correspondencia implica hallar la regla que permite determinar un valor de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente.
- Identificar la covariación, implica centrarse en cómo los cambios en valores de la variable independiente influyen en los cambios de los valores de la variable dependiente. Esta es la relación más difícil de identificar.

Según este autor, hay evidencia de relación funcional cuando se observan en las respuestas de los alumnos las relaciones de correspondencia o covariación.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo de la investigación lo destinamos a la descripción del marco metodológico que la caracteriza. En este incluimos los apartados que nos han ayudado a diseñar nuestro estudio.

Empezamos con la caracterización del tipo de investigación que estamos desarrollando, pasando después a la descripción de las características generales de los sujetos participantes en el estudio, haciendo especial hincapié en sus conocimientos previos. Después explicamos el desarrollo de la elaboración del instrumento de recogida de datos y, seguiremos con la descripción del proceso de recogida de los mismos.

Estos datos serán objeto de análisis y discusión en los siguientes capítulos con el fin de alcanzar los objetivos que establecimos en el primer capítulo. Finalmente, terminamos este capítulo mostrando el modelo que utilizamos para el análisis y la discusión de los datos.

3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Hemos elaborado un experimento de enseñanza sobre el que hemos realizado un estudio de naturaleza exploratoria y descriptiva (Cortés & Iglesias León, 2004). Este experimento de enseñanza pretende recopilar información que sirva de fundamentación para posteriores estudios centrados en el pensamiento funcional de estudiantes de los primeros niveles educativos.

Se trata de una investigación transversal, ya que se realiza en un momento determinado en el que se recoge información de un grupo de sujetos. En nuestro caso la información que hemos recogido procede de un grupo de estudiantes de primaria elegido intencionalmente a los que se les propone una tarea escrita elaborada ad hoc por los investigadores. La recogida de la información se realiza a través de varios medios: por escrito, mediante audio y mediante vídeo, pero el instrumento principal es la tarea que aparece en una ficha individual. Así, el análisis de los datos será de carácter cualitativo (Cortés & Iglesias León, 2004), de acuerdo con los objetivos propuestos para la misma y con los datos recogidos.

3.2. SUJETOS

En este apartado se describe toda la información relevante de los sujetos que hemos tomado como muestra para llevar a cabo nuestro estudio y que es susceptible de tener en cuenta a la hora de realizar el análisis de datos posterior y de establecer las conclusiones oportunas del mismo. Dicha información incluye tanto la procedencia de los sujetos y sus características generales, como otras características más específicas que tienen que ver con el tema de nuestra investigación.

3.2.1. Procedencia y características generares de los sujetos

La muestra tomada es un grupo que consta de 24 estudiantes de quinto de educación primaria con edades comprendidas entre los 10 y 11 años que cursan la materia de matemáticas en un colegio privado situado a las afueras de Granada.

El centro abarca las etapas de educación infantil y primaria, es de línea 1, y la gran mayoría del alumnado procede de los pueblos que lo rodean. Este centro propone un aprendizaje por proyecto que garantiza la formación de personas con capacidades organizativas y habilidades sociales, y enseña a los alumnos a trabajar en equipo.

La selección de los sujetos fue intencional, teniendo en cuenta el nivel educativo de los estudiantes y su disponibilidad para participar en nuestra investigación. Cabe señalar que en la clase seleccionada hay cinco alumnos considerados de altas capacidades.

3.2.2. Desarrollo cognoscitivo de los sujetos

Atendiendo a la teoría piagetiana del desarrollo cognoscitivo, podemos decir que, dentro de las etapas de desarrollo cognoscitivo de Piaget, estos niños se encuentran casi al final de la etapa de las operaciones concretas, término que acuñó Piaget para describir la etapa de pensamiento "práctico" que se comprende entre las edades de 7 a 11 años. Esta etapa se caracteriza porque el niño es capaz de resolver problemas concretos (prácticos) de forma lógica.

3.2.3. Conocimientos previos de los sujetos

El único contacto que nuestro grupo de estudiantes ha tenido con el pensamiento funcional ha sido en las dos sesiones previas a las del estudio en las que se ha trabajado con tareas que involucran funciones lineales y el uso de diferentes sistemas de representación. En ambas sesiones, la propuesta de trabajo implicaba únicamente al conjunto de los números naturales. Para cada tarea, se plantearon diferentes cuestiones, partiendo de casos particulares concretos hasta llegar a indagar sobre la identificación de la generalización, siguiendo así el proceso de razonamiento inductivo (Cañadas & Castro, 2007).

En dichas sesiones previas se partió de un contexto familiar para los estudiantes. Las relaciones funcionales y contextos que intervinieron fueron los siguientes: en la sesión 1 la tarea planteó la relación funcional 3x en un contexto relativo a la venta de camisetas para un viaje de estudios, y en la sesión 2 la tarea mantuvo el contexto anterior sobre la venta de camisetas para un viaje de estudios, comparando el dinero de dos alumnos distintos, que venden distintos tipos de camisetas. En este caso las funciones que aparecen son 3x y 2x+15.

Sobre cada una de las situaciones anteriores, se planteó a los estudiantes varias cuestiones. Las primeras persiguen que el estudiante explore la relación funcional considerando casos particulares, y posteriormente, se incluyen cuestiones que buscan dirigir la atención del estudiante hacia el patrón que subyace a la relación funcional. Es decir, se guía a los estudiantes para dirigir su atención hacia la relación que vincula las dos variables que intervienen: el número de camisetas vendidas y la cantidad de euros ganados.

También se pidió a los estudiantes que hicieran uso de diferentes representaciones: las tablas para organizar los datos y el lenguaje verbal y/o letras para expresar la relación funcional de forma general. En algunos casos las representaciones se dan parcialmente construidas (ej., tabla con alguna información y otra pendiente de completar) o construidas y se les pide que las completen o interpreten.

3.3. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

Los datos que necesitábamos obtener para llevar a cabo nuestro estudio han sido recopilados a través de distintos medios, tanto escritos como audiovisuales, o simplemente orales. A continuación describimos cada uno de estos instrumentos.

El instrumento básico del que partimos se trata de una ficha de una cara de folio que contiene una tarea de comparación de funciones algebraicas. Dicha tarea está compuesta por un enunciado en el que se describe una situación que viene completada con un dibujo donde aparecen dos ejemplos de relaciones funcionales. El contexto que se presenta con el enunciado y el dibujo no describe ningún ejemplo genérico. Y en la ficha aparecen tres apartados a responder, estrechamente relacionados con la situación descrita entre el enunciado y el dibujo.

El otro instrumento de recogida de información por escrito se trata de una pancarta, del tamaño de una cartulina grande, elaborada por cada grupo. En ellas se responde al último de los apartados que aparece en la ficha.

El tercer instrumento utilizado para recoger la información producida de forma oral son las grabaciones de audio registradas por cinco grabadoras instaladas en las mesas de los alumnos por grupos. Dichos aparatos grabaron toda la conversación que los estudiantes de cada grupo mantuvieron entre sí mientras debatían las respuestas de la ficha y la elaboración de su cartulina.

Por último, se usaron dos cámaras de video para recoger de manera audiovisual los acontecimientos acaecidos durante toda la prueba. Una de las cámaras se encontraba fija al final de la clase mientras que la otra era móvil y grababa fragmentos determinados de los acontecimientos también a lo largo de toda la sesión de recogida de la información. A este instrumento es al que más atendemos en nuestra investigación, analizando principalmente el discurso del alumnado recogido en la cámara móvil.

Como hemos comentado, un instrumento fundamental de recogida de la información es la ficha donde aparece la tarea propuesta que los alumnos debían completar, pues es el único instrumento que ha tenido que ser elaborado previamente por los investigadores. De hecho, el resto de instrumentos no hace sino registrar los datos surgidos durante la sesión que pueden aportar información valiosa para la investigación pero que pueden no aparecer en las respuestas finales de los apartados de la ficha. Por tanto, en los siguientes sub-apartados de esta sección nos vamos a centrar en este instrumento, explicaremos cuál ha sido el proceso seguido para su diseño y mostraremos la estructura que tiene su versión definitiva.

3.3.1. Elaboración de la prueba escrita

La prueba escrita que hemos utilizado se corresponde con la tercera tarea que aborda el pensamiento funcional en el aula de educación primaria de Moreno, del Río, Molina y Cañadas (2015). Esta tarea en un principio estaba programada para ser trabajada en una sesión de 1:30 horas, posterior a las otras dos sesiones descritas en el apartado 3.2.3. Conocimientos previos de los sujetos.

Se trata de una tarea abierta que vuelve a estar en un contexto familiar para el alumnado: deberán tomar la decisión de cuál de los dos tratos propuestos por la abuela le conviene más a Juan. Las funciones involucradas son 2x y 3x-7. En este caso también se plantean varias cuestiones con el objetivo de que los estudiantes encuentren la relación que vincula las dos variables que se mencionan en el texto: el número de euros que posee Juan y la cantidad de euros que le da la abuela. Pero la diferencia es que no se da indicaciones a los estudiantes para darles esta vez la oportunidad de que utilicen sus propias formas de representación de las ideas o de interpretar representaciones como la tabla o las letras.

El orden de presentación de las tres tareas se basa en la dificultad, la cual va de menor a mayor, siendo esta última la que mayor dificultad implica. Dicho grado de dificultad se encuentra establecido con base en el contenido matemático implicado y los resultados de investigaciones previas.

3.3.2. Versión definitiva de la prueba escrita

La versión final de la prueba escrita (ANEXO I) consiste en una ficha de una cara de folio que incluye la siguiente información:

- Encabezado con la fecha y los datos identificativos del alumno: nombre, apellidos y curso.
- Descripción del enunciado de la tarea con la que los estudiantes trabajan durante la sesión, titulada "El trato de la abuela". Dicho enunciado es el siguiente.

  "Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela quiere recompensarle por un trabajo que le ha hecho. Le ofrece dos tratos:

  Trato 1. Te doblo el dinero que tienes.

  Trato 2. Te doy el triple de tu dinero y tú me das 7.

  Juan quiere elegir el mejor trato."

- Dibujo en el que, mediante dos bocadillos de conversación, se explicitan los dos tratos, tal y como podemos apreciar a continuación.

Figura 1 “Dibujo del enunciado de la ficha”

- Tres cuestiones abiertas consecutivas con los siguientes enunciados:

  1. ¿Qué debe hacer? Ayúdale a elegir el mejor trato.

  2. ¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?

  3. Con tus compañeros de equipo resume vuestras conclusiones en la cartulina. Luego utilizaréis la cartulina para explicar vuestras conclusiones al resto de la clase.

3.3.3. Resolución de la tarea en base a Ursini

Para justificar que en la resolución de la tarea pueden identificarse los tres usos de la variable que aparecen en el Modelo 3UV, la resolvemos a continuación analizándola del modo en que lo hacen Ursini y Trigueros (2006, pág. 11).

Tabla II. Resolución de la tarea

Tarea	Análisis
Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela, como recompensa por un trabajo que le ha hecho, le ofrece dos tratos:	La respuesta a esta tarea es abierta, pero una posible sería la siguiente: En primer lugar, deben identificar la relación funcional existente, para lo cual deben reconocer la correspondencia (F1)/variación (F4) entre el dinero que

TRATO 1: Te doblo el dinero que tienes. TRATO 2: Te doy el triple de tu dinero y tú me das siete. Juan quiere elegir el mejor trato. ¿Qué debe hacer? Ayúdale a elegir el mejor trato. ¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?	tiene Juan y lo que le resultaría tras aceptar uno de los tratos. Seguidamente deben darse cuenta de que no hay siempre un trato mejor, sino que depende del dinero que tiene Juan en un principio, y que este a su vez puede ser cualquiera, no es un valor fijo (G2). Por último, deben identificar el punto de corte de las funciones que intervienen para ver en qué caso es mejor un trato y en qué caso es mejor el otro. Para esto tendrán que igualar ambas funciones, obteniendo la ecuación $2x = 3x - 7$, y determinar la cantidad desconocida (I4) sustituyendo la variable por el valor que hace que la ecuación resultante sea verdadera (I3). Todo esto para finalmente indicar que para valores de x menores a 7 interesa el trato 1, mientras que para valores de x mayores que 7 interesa el 2 (F5); y que para x=7 ambos tratos son iguales.

3.4. RECOGIDA DE DATOS

La implementación de la tarea tuvo lugar en la propia aula de los alumnos de quinto de Primaria del colegio participante.

Los alumnos se repartieron formando 5 grupos cuya composición fue elaborada por el maestro manteniendo su dinámica de trabajo habitual, con la única condición de que los de altas capacidades no podían coincidir en un mismo grupo. Cada grupo se sentó alrededor de unas mesas agrupadas y numeradas para facilitar la discusión oral de la tarea entre los miembros del propio grupo. Durante todo el tiempo que duró la sesión estuvieron presentes tres investigadores junto al maestro del grupo.

Antes de repartir las fichas, uno de los investigadores toma la palabra para presentar la sesión de ese día, la cual la describe como un concurso de debate matemático, y para informar sobre las instrucciones de cómo se va a proceder durante la sesión. Indica a los estudiantes que les van a repartir a todos los grupos una ficha donde aparece un dilema que consta de dos tratos, en el que en un principio no sabemos qué decisión tomar, y ellos, después de leer en qué consiste y conocer las condiciones iniciales, tendrán que decidir qué es mejor: si el trato 1, el trato 2, o en qué condiciones es mejor cada uno de los dos, argumentando las razones. También se les explica que una vez que hayan debatido entre los miembros de su grupo, hayan tomado sus decisiones y las hayan escrito en las fichas, les van a repartir una cartulina por grupos para que reflejen en ella las conclusiones a las que haya llegado cada grupo en general, elaborando así una pancarta. Luego las cartulinas serán colgadas formando un mural y se hará una puesta en común en la que un representante de cada grupo, elegido por los investigadores, irá saliendo a explicar lo que han decidido entre todos los miembros de su grupo y a defender dichas ideas, permitiendo esto formar un debate con el resto de la clase. Finalmente, se les pregunta a los alumnos si hay alguna duda sobre el proceso que se va a seguir en esta sesión, pero nadie pide ninguna aclaración. La finalidad de esta parte de la tarea es servir de motivación y contribuir a la comprensión del contexto involucrado en la cuestión.

A continuación, el investigador lee el enunciado de la tarea de la ficha en voz alta detenidamente para que lo escuche toda la clase y acto seguido se le reparte a cada alumno una ficha y a cada grupo una grabadora de audio para que queden registradas todas las intervenciones de los alumnos. Así, si durante el proceso de razonamiento y debate los estudiantes han aportado algún dato de interés que luego no han reflejado en la respuesta de las fichas o en la cartulina, con estos registros en audio nos aseguramos de que quede constancia de ello.

Además de las grabadoras de audio, toda la sesión fue registrada con una cámara de vídeo fija que abarcaba una visión general del aula en la cual se incluía la visión parcial de cuatro de los grupos y la pared donde fueron colgadas y expuestas las cinco pancartas. Por último, una de las investigadoras registró con una cámara móvil 15 grabaciones de unos minutos de cómo trabajaban los grupos con más detalle, y 4 grabaciones de la puesta en común y debate.

La duración del trabajo en grupo para responder a la tarea y elaborar la cartulina fue de unos 40 minutos. Tanto los investigadores como el maestro estuvieron en todo momento a disposición de los alumnos para aclarar las dudas que les fueran surgiendo, intentando en todo momento reducir la información facilitada al alumnado para, de este modo, controlar el posible sesgo que se pudiera producir en el posterior análisis de los datos. Al finalizar este tiempo los representantes de cada grupo fueron elegidos por los investigadores y tras colocar todas las cartulinas en la pared comenzó la puesta en común en la que, primero, el representante explicaba las conclusiones de su grupo en la pizarra, y después uno de los investigadores hacía alguna pregunta significativa para abrir el debate con el reto de la clase. La duración de esta parte fue de unos 15 minutos y, al igual que en la primera parte, no hubo incidencias relevantes a lo largo de la misma.

Para finalizar, uno de los investigadores mostró su agradecimiento a los estudiantes por su colaboración y, de modo especial, al maestro por haberle facilitado esa sesión para la recogida de datos.

En general, hubo buena impresión tras la realización del proceso de recogida de datos, el desarrollo de la tarea por grupos y el debate posterior se llevó a cabo tal y como se tenía previsto, y se pudo obtener información satisfactoriamente para llevar a cabo de forma eficiente el posterior análisis de los datos en el capítulo siguiente.

3.5. MODELO DE ESTUDIO PROPIO EN BASE AL MODELO 3UV

En este apartado mostramos el modelo que hemos confeccionado, a partir del Modelo 3UV que fue propuesto por Ursini y Trigueros (2006) y que ya hemos mencionado en el Marco Teórico, para llevar a cabo nuestro posterior análisis de datos y discusión de resultados.

El Modelo 3UV, como ya hemos indicado anteriormente, lo que hace es presentar una descomposición del concepto de variable atendiendo tanto a la capacidad de interpretación, como a la de simbolización y la de manipulación de cada uno de los siguientes usos de la variable: la variable como incógnita específica, la variable como número general y las variables en relación funcional. Así pues, con este modelo podemos identificar qué interpretaciones de la variable muestran los estudiantes en su discurso. Nosotros, con el propósito de ir un poquito más allá y analizar más específicamente cómo los alumnos interpretan, cómo simbolizan y cómo manipulan, realizamos una pequeña ampliación del modelo 3UV, la cual es en relación a estos tres conceptos. Concretamente lo que añade nuestra modificación es la asignación de cada uno de los ítems de los diferentes modos de interpretar la variable a uno de estos tres conceptos vistos como acciones, a saber: manipular, simbolizar o interpretar. Esta asignación la realizamos en función de la acción que, como investigadores, consideramos que se está desarrollando con cada uno de los ítems del modelo, y en base a lo que se considera que es manipular, interpretar y simbolizar algebraicamente; consideraciones que mostramos a continuación:

- **Manipular**. Manipular algebraicamente significa hacer cosas diferentes a grupos de sujetos distintos, ya sea manual o mentalmente. La dificultad de manipular las variables surge por la significación abstracta de los conceptos (Núñez, 2007).
- **Simbolizar**. Simbolizar algebraicamente es una forma de representar situaciones reales, dándole un significado a la letra y al uso que toma en la matemática escolar (Giraldo, 2020).
- **Interpretar**. Interpretar algebraicamente es asignar significados a las variables que constituyen las fórmulas bien formadas de un lenguaje formal. Es decir, la asignación de significado a una expresión en general.

Las asignaciones realizadas para nuestro modelo son las que mostramos a través de las tablas siguientes:

Tabla III. Relación ítems-acción en incógnita específica

VARIABLE COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA	*ACCIÓN*
Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;	Interpretación
Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;	Interpretación
Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;	Manipulación
Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;	Manipulación
Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.	Simbolización

Tabla IV. Relación ítems-acción en número general

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.	*ACCIÓN*
Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;	Interpretación
Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;	Simbolización
Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;	Simbolización
Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.	Manipulación

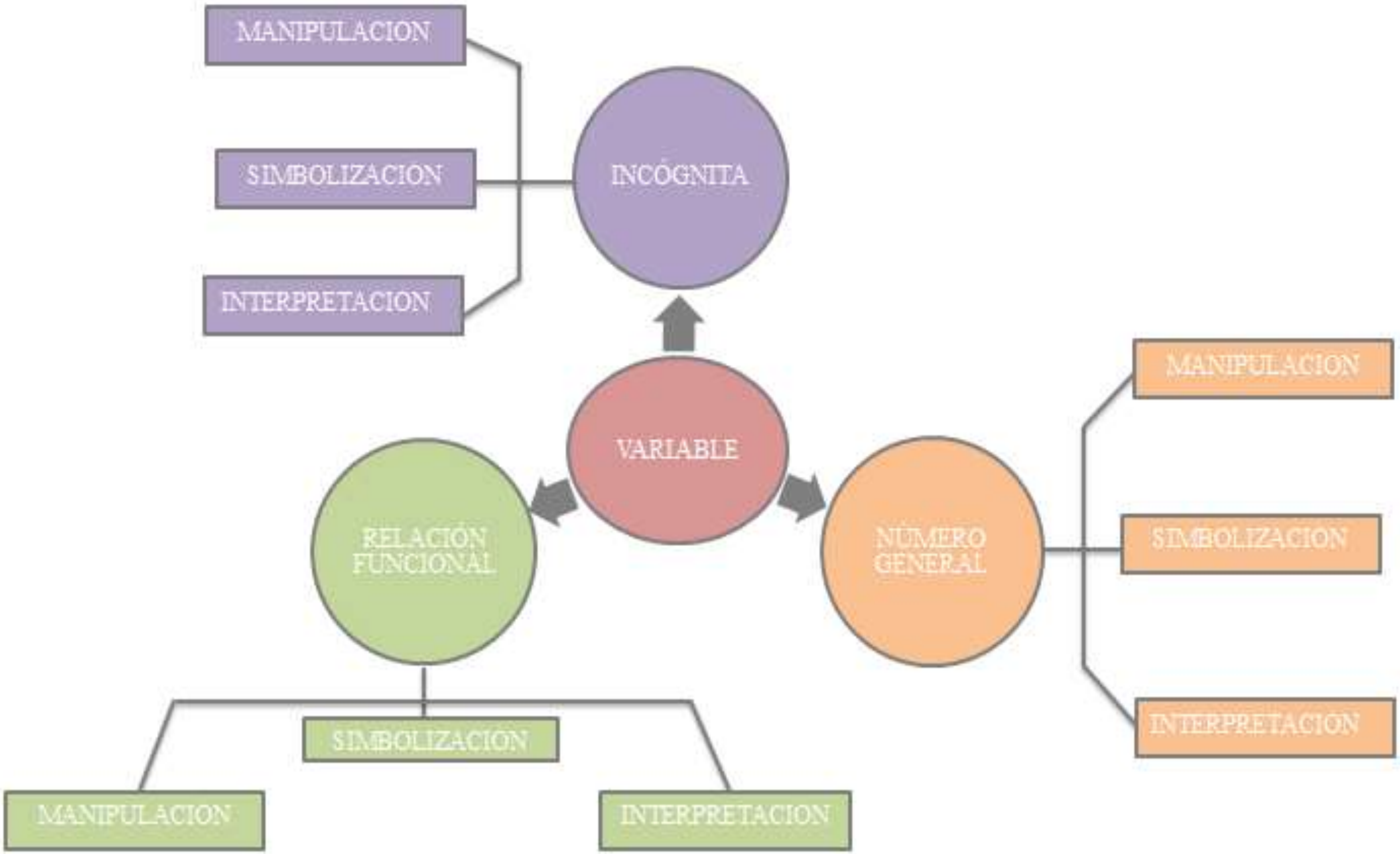
Tabla V. Relación ítems-acción en relación funcional

VARIABLES EN RELACIÓN FUNCIONAL.	*ACCIÓN*
Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;	Interpretación
Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;	Interpretación y manipulación
Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;	Interpretación y Manipulación
Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;	Interpretación
Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;	Manipulación
Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.	Simbolización

Para cerrar este apartado mostramos un mapa conceptual que define nuestro modelo.

MAPA CONCEPTUAL DEL MODELO PARA EL ANÁLISIS

Ilustración I. Mapa conceptual Modelo



CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

En este capítulo cuarto realizamos el análisis de los datos obtenidos de las producciones de los alumnos por grupos, presentes en los vídeos recogidos por la cámara móvil, uno de los instrumentos diseñados para tal fin, y en base al resto de instrumentos. Realizamos este análisis con el objetivo de mostrar todos los resultados que se obtienen. Finalizaremos, en el capítulo posterior, con las conclusiones obtenidas de dichos resultados.

4.1. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Concluida la aplicación de los instrumentos de recogida de datos, y para poder realizar el análisis, hay que organizar toda la información. Como ya hemos indicado anteriormente, hemos centrado nuestra atención en los vídeos de la cámara móvil. Por tanto y debido también a que hemos observado en los vídeos que las respuestas fueron redactadas en las fichas haciendo una puesta en común dentro de cada grupo, hemos decidido abordar el estudio de los datos mediante un análisis comparativo de la trayectoria y los resultados de cada grupo en el transcurso de los vídeos, en los cuales se visualizan tanto la resolución de la prueba escrita como la realización de la pancarta, además de la puesta en común global al final donde presentan y defienden las cartulinas realizadas. Cabe destacar también que debido a que el contenido de la tarea con la que los estudiantes han trabajado estaba redactado y estructurado de forma que puede admitir una única respuesta abierta, hemos preferido no hacer un estudio individual de cada una de las tres cuestiones, puesto que todos los apartados se pueden englobar en uno solo.

Hay un total de 5 grupos, y hemos asignado una letra a cada uno, por lo que tenemos los Grupos A, B, C, D y E. De cada grupo tenemos un vídeo de la presentación final, (excepto del Grupo E) y luego varios videos, de unos grupos una cantidad y de otros otra, de la realización de la ficha y la pancarta. En los siguientes sub-apartados mostramos, para cada grupo, en primer lugar, una tabla con la transcripción de cada uno de sus vídeos, en la cual se diferencia entre las intervenciones de los investigadores (I) y las de los alumnos (A), y se muestra el minuto exacto en el que se ha realizado dicha intervención. En estas tablas se identificará el vídeo correspondiente a la presentación final con la etiqueta “FINAL”. En segundo lugar, se muestran las tablas de análisis de las transcripciones del grupo, en las cuales lo que vamos haciendo es seleccionar las frases de las transcripciones que tienen cierto interés y relacionarlas con el ítem de la conceptualización de la variable al que consideramos que pertenece. Puede suceder que una misma frase esté dentro de dos ítems diferentes de la misma conceptualización, pero nunca estará a la vez en ítems de diferentes conceptualizaciones de la variable. Al lado de cada ejemplo, en un tono de gris, indicamos los conceptos que se ponen en juego al resolver esta tarea. En tercer lugar, en caso de que aparezca alguna, mostramos las representaciones de la variable identificadas en las cartulinas realizadas por los alumnos, las cuales podemos visualizar en el ANEXO II. Seguidamente, y en caso de que el grupo correspondiente haya hecho uso de la letra como representación de la variable, se hace alusión a la interpretación o interpretaciones que ha hecho de esta. Y en quinto y último lugar, en base al vídeo de la presentación final y mediante un pequeño croquis, contestamos a cómo han decidido el trato.

4.1.1. Análisis de los datos del Grupo A

Las transcripciones realizadas sobre los vídeos son las que se muestran a continuación:

Tabla VI. Transcripciones Grupo A

VÍDEO 41: "FINAL"		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
A	0:00:08	Mi grupo piensa que pueden ser los 2 tratos dependiendo del dinero que tenga. Porque si tiene menos de 2 euros pues no puede elegir el 2º trato porque no puede pagar 7 euros. Sin embargo, si tiene más de 2 euros sí puede pagarle los 7 euros. Por eso que depende de cuánto dinero tenga, porque como ha dicho Seba (A) siempre el mejor trato yo creo que puede ser el primero porque nunca tienes que pagar y… también si tienes poco dinero y te crees que porque tengas el triple de dinero vas a poder pagar los 7 euros y no los puedes pagar pues yo creo que siempre va a ser mejor el 1º.
I		Muy bien, ¿el grupo quiere decir algo?
A		Sí, como ya ha dicho, si tuviese 7 euros daría igual cual elija, puedes elegir perfectamente las dos preguntas. Y pienso que siempre va a ser mejor elegir el primero porque en el segundo aunque ganas el triple le tienes que dar 7.

Tabla VII. Transcripciones Grupo A

VÍDEO 27		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
I		¿Y si dependiera del dinero que tiene?
A	0:00:44	Depende del dinero que tiene, lo que pasa es que si no sabemos el dinero que es pues no podremos saber cuál será el mejor trato. Si tiene mucho dinero… (y señala con boli el trato del triple)
A		Si tiene 1 euro pues no puede elegir el triple.
I		Entonces lo que podéis decirme es: si tiene menos de "este" dinero, entonces elegiría un trato, y si tiene más

		pues elegiría otro. Pensad, a ver pensad, a partir de cuánto dinero.
A		Si tuviera… (Piensa), si tuviera menos de 2 euros no podría elegir el 2º trato porque no tiene 7 euros (escriben lo dicho).
A	2:02:03	Si es menos de 2 euros tendría que ser el 1º porque no puede dejar ¿10 euros? (explica a otro/a alumno/a).

Seguimos con las tablas de análisis de las transcripciones del Grupo A:

Tabla VIII. Análisis de transcripciones Grupo A

VARIABLE COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA	*EJEMPLOS*
Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;	
Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;	
Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;	*- Sí, como ya ha dicho, si tuviese 7 euros daría igual cual elija. En relación con el punto de corte (PC)*
Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;	*- Sí, como ya ha dicho, si tuviese 7 euros daría igual cual elija. PC*
Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.	

Tabla IX. Análisis de transcripciones Grupo A

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.	*EJEMPLOS*
Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;	
Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;	
Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;	
Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.	

Tabla X. Análisis de transcripciones Grupo A

VARIABLES EN RELACIÓN FUNCIONAL.	*EJEMPLOS*
Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;	*- Si tiene mucho dinero… (y señala con boli el trato del triple).* *- Si tiene 1 euro pues no puede elegir el triple. En relación con el dominio (D)* *- si tuviera menos de 2 euros no podría elegir el 2º trato porque no tiene 7 euros. D* *- Si es menos de 2 euros tendría que ser el 1º. D*
Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;	*- Si tiene mucho dinero… (y señala con boli el trato del triple).* *- Si tiene 1 euro pues no puede elegir el triple. D* *- si tuviera menos de 2 euros no podría elegir el 2º trato porque no tiene 7 euros. D* *- Si es menos de 2 euros tendría que ser el 1º. D*
Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;	
Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;	*- Depende del dinero que tiene.* *- lo que pasa es que si no sabemos el dinero que es pues no podremos saber cuál será el mejor trato.* *- Mi grupo piensa que pueden ser los 2 tratos dependiendo del dinero que tenga.* *- Si tiene mucho dinero… (y señala con boli el trato del triple).* *- Si tiene 1 euro pues no puede elegir el triple. D* *- si tuviera menos de 2 euros no podría elegir el 2º trato porque no tiene 7 euros. D* *- Si es menos de 2 euros tendría que ser el 1º. D*
Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;	*- Si tiene mucho dinero… (y señala con boli el trato del triple).*

	- *Si tiene 1 euro pues no puede elegir el triple.* D - *si tuviera menos de 2 euros no podría elegir el 2º trato porque no tiene 7 euros.* D - *Si es menos de 2 euros tendría que ser el 1º.* D
Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.	

Cabe destacar que en este caso no se identifica ninguna representación en la cartulina aparte de la verbal, ya identificada en los videos correspondientes al grupo. Tampoco se ha hecho uso de la letra como representación de la variable.

Y finalizamos el análisis de este grupo respondiendo a la pregunta ¿Cómo deciden el trato?, como ya hemos mencionado antes, mostrando los pasos que siguen en base a la Tabla VI. Transcripciones Grupo A.

Ilustración II. Elección de trato Grupo A

¿CÓMO DECIDEN EL TRATO?

1. Identifican la relación funcional,
2. Identifican las variables dependiente e independiente,
3. Identifican el dominio,
4. Encuentran el punto de corte.

4.1.2. Análisis de los datos del Grupo B.

Las transcripciones realizadas sobre los vídeos son las que se muestran a continuación:

Tabla XI. Transcripciones Grupo B

VÍDEO 40: "FINAL"		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
A		Si tiene más de 7 euros elegiría el trato 2 porque saldría ganando más dinero que eligiendo el trato 2. Pero si tiene menos de 7 euros tendría que elegir el trato 1 para no perder dinero. Y si tiene 7 euros le daría igual qué trato elegir.
I		Muy bien, ¿Y cómo lo habéis averiguado?¿qué es lo que habéis hecho para averiguarlo?
A		Pues multiplicando el número menos de 7 o más de 7 para saber que si lo multiplicamos, por ejemplo, 3x3 sale 9, y luego le debes 7 euros y te quedarías con 2 en vez de con 3, y ya habrías perdido más dinero. En cambio, si eliges el primer trato tendrías 12 euros en vez de…
A		No, tendrías 6.
A		Sí… tendrías6. En cambio, si tienes más de 7 sería mejor lo otro porque 8x3 son 24, menos 7 son 17 y entonces ganarías 1 euro más que con el primer trato.
I		¿Alguien de su grupo quiere añadir algo?
A	0:01:35	Que… que si tiene 7 euros, le da igual. Pero luego…

Tabla XII. Transcripciones Grupo B

VÍDEO 28		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
I	0:00:09	Para poder decirme qué trato conviene según la cantidad de dinero pues puedes decirme, a ver, imaginad: Pues si tiene más de este dinero, conviene este trato, si no pues conviene el otro.
A	0:00:22	Con el 1 siempre va a ganar dinero.
I		Vale, con el 1 siempre va a ganar dinero, ¿y a ti que te interesa? Ganar lo más posible, ¿no?
		Alumnos hablan pero no se entiende.
I	0:00:44	Vale, si tengo 2 euros, ¿qué trato interesa?
A		El 1.
I		¿Y si tengo 20 euros?

A		El 2.
I		¿Cuándo me conviene un trato y cuándo me conviene otro?
A	0:00:56	Pues cuanta más cantidad haya conviene uno u otro. Si tiene mucha cantidad el 2, con poca cantidad le conviene el 1.
I		… ¿Cuánto es mucha cantidad y cuánto es poca?
A	0:01:21	Es a partir de 8
I		¿Por qué?
A		Porque si tiene que dar 7…
I		Vale, si tuviera 8 qué trato
A		… con el trato 2 no gano nada.
I	0:01:59	¿Cómo es eso? A ver, centraros, si tengo 8 euros ¿Cuánto ganaría si escojo el trato 1?
A	0:02:22	8… (Hablan y no se entiende)… ¡Si tiene 7 ganan igual!
I		¿Ganan igual? Pues todo eso es lo que quiero que apuntéis ahí.

Tabla XIII. Trascripciones Grupo B

VÍDEO 24		
¿I/A?	**TIEMPOS** **(En el que no se indique es porque va seguido del anterior)**	**TRANSCRIPCIÓN**
A		Yo no le hubiera dado el triple, le hubiera dado el doble.
A		No porque si ahora… ¿Por qué tiene que tener 7 euros?
A		… 7 euros
A	0:00:24	Pero, ¿por qué tiene que tener 7 euros? A lo mejor tiene… (hace gestos como de “cualquier nº”), yo creo que aquí también podría ser X porque representa cualquier número. Y aquí te faltan los datos (dice esto último sin dejar claro lo que señala)

Seguimos con las tablas de análisis de las transcripciones del Grupo B:

Tabla XIV. Análisis de transcripciones Grupo B

VARIABLE COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA	***EJEMPLOS***
Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;	
Interpretar el símbolo que aparece en una	

ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;	
Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;	- *... ¡Si tiene 7 ganan igual! PC.* - *Y si tiene 7 euros le daría igual qué trato elegir. PC*
Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;	- *... ¡Si tiene 7 ganan igual! PC.* - *Y si tiene 7 euros le daría igual qué trato elegir. PC*
Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.	

Tabla XV. Análisis de transcripciones Grupo B

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.	*EJEMPLOS*
Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;	
Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;	- *Pero, ¿por qué tiene que tener 7 euros? A lo mejor tiene… (hace gestos como de "cualquier nº"), yo creo que aquí también podría ser X porque representa cualquier número. Letra como Número General (L. NºG)*
Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;	
Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.	

Tabla XVI. Análisis de transcripciones Grupo B

VARIABLES EN RELACIÓN FUNCIONAL.	*EJEMPLOS*
Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;	- *Si tiene mucha cantidad el trato 2, con poca cantidad le conviene el trato 1. D* - *(En respuesta a: Vale, si tengo 2 euros, ¿qué trato interesa?) El 1.* - *(En respuesta a: ¿Y si tengo 20 euros?) El 2.* - *3x3 sale 9, y luego le debes 7 euros y te quedarías con 2.* - *8x3 son 24, menos 7 son 17*

Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;	*- Si tiene mucha cantidad el trato 2, con poca cantidad le conviene el trato 1.* D *- (En respuesta a: Vale, si tengo 2 euros, ¿qué trato interesa?) El 1.* *- (En respuesta a: ¿Y si tengo 20 euros?) El 2.* *- 3x3 sale 9, y luego le debes 7 euros y te quedarías con 2.* *- 8x3 son 24, menos 7 son 17*
Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;	
Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;	*- Pues cuanta más cantidad haya conviene uno u otro.* *- Si tiene mucha cantidad el trato 2, con poca cantidad le conviene el trato 1.* D *- (En respuesta a: Vale, si tengo 2 euros, ¿qué trato interesa?) El 1.* *- (En respuesta a: ¿Y si tengo 20 euros?) El 2.* *- 3x3 sale 9, y luego le debes 7 euros y te quedarías con 2.* *- 8x3 son 24, menos 7 son 17*
Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;	*- Si tiene mucha cantidad el trato 2, con poca cantidad le conviene el trato 1.* D
Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.	

En cuanto a las representaciones de la variable, en este grupo es curiosa la idea de que, en el video, verbalmente, se identifica la representación simbólica de la variable mediante la letra X, a saber:

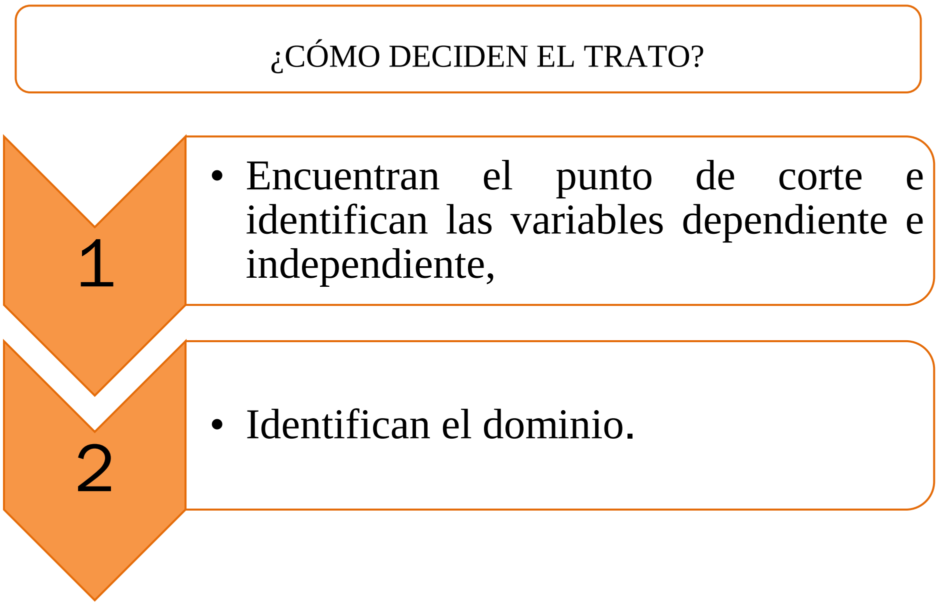
> *- Pero, ¿por qué tiene que tener 7 euros? A lo mejor tiene… (hace gestos como de "cualquier nº"), yo creo que aquí también podría ser X porque representa cualquier número.* (Tabla XV. Análisis de transcripciones Grupo B),

pero luego en la cartulina no hay presencia de dicha representación.

En este caso el significado con el que se identifica la letra X en su aparición es con el de número generalizado.

Y finalizamos el análisis de este Grupo respondiendo a la pregunta "¿Cómo deciden el trato?" mostrando los pasos que siguen en base a la Tabla XI. Transcripciones Grupo B.

Ilustración III. Elección de trato Grupo B



4.1.3. Análisis de los datos del Grupo C

Las transcripciones realizadas sobre los vídeos son las que se muestran a continuación:

Tabla XVII. Transcripciones Grupo C

VÍDEO 39: “FINAL”		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
A	0:00:20	Mi grupo cree que Juan tendrá que pensar cuánto dinero tiene ahorrado. Porque si tiene más de 9 euros se tendría que elegir el triple porque el triple de 9 es 27, menos 7 es 20 y el doble es 18. Pues se quedaría más con el triple que con el doble. Pero si tiene menos de 9 euros, por ejemplo, tiene 3 euros, el triple es 9, menos 7 es 3; y el doble es 6. Así que se quedaría más con el doble que con el triple. Por eso nuestra conclusión es que si tiene más de 9 euros, elija el triple que da más, pero que si tiene menos de 9 euros, que elija el doble que también le da más.
I		Muy bien, ¿Podrías explicarnos el esquema que habéis puesto ahí en la pizarra?
A	0:01:22	Este. Dice que X dinero. Que Juan tiene algún dinero.
I		Que no sabemos cuánto es y lo has puesto ahí.
A		Y… que si elige la 2º opción y tiene más de 9 euros, tendría que elegir el trato 2, que es este (señala trato 2). Y… si tienen la 1º opción y tiene menos de 9 euros tienen que elegir la 1º opción.

Tabla XVIII. Transcripciones Grupo C

VÍDEO 29		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
I		¿Si tienes 7 qué pasa?
A	0:00:24	Si tiene 50 y se lo dobla, tiene 100. Sale ganando con el triple, con la opción 2. Sin embargo, si tuviera 3 euros, S…
A		Tiene poco dinero
A		…Sale ganando con el doble.

Tabla XIX. Transcripciones Grupo C

VÍDEO 32		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
A	0:00:27	X euros que tiene.

Seguimos con las tablas de análisis de las transcripciones del Grupo C:

Tabla XX. Análisis de transcripciones Grupo C

VARIABLE COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA	*EJEMPLOS*
Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;	
Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;	
Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;	*- Por eso nuestra conclusión es que si tiene más de 9 euros, elija el triple que da más, pero que si tiene menos de 9 euros, que elija el doble que también le da más. PC*
Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;	*- Por eso nuestra conclusión es que si tiene más de 9 euros, elija el triple que da más, pero que si tiene menos de 9 euros, que elija el doble que también le da más. PC*
Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.	

Tabla XXI. Análisis de transcripciones Grupo C

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.	*EJEMPLOS*
Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;	
Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;	- *Dice que X dinero. Que Juan tiene algún dinero.* L. NºG - *X euros que tiene.* L. NºG
Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;	
Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.	

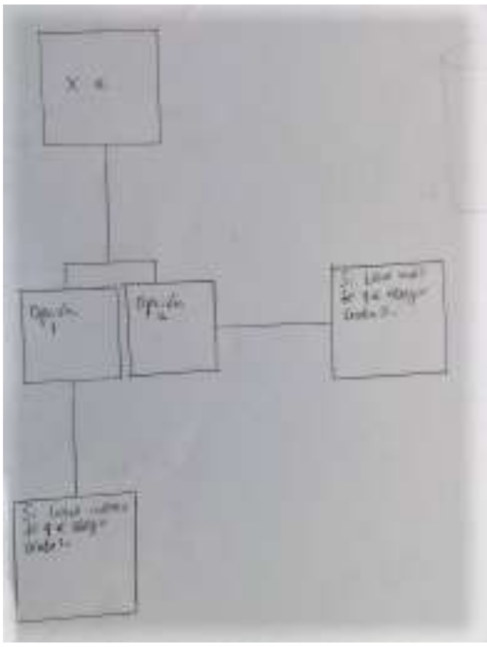
Tabla XXII. Análisis de transcripciones Grupo C

VARIABLES EN RELACIÓN FUNCIONAL.	*EJEMPLOS*
Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;	- *si tiene más de 9 euros se tendría que elegir el triple porque el triple de 9 es 27, menos 7 es 20 y el doble es 18.* D - *Pero si tiene menos de 9 euros, por ejemplo, tiene 3 euros, el triple es 9, menos 7 es 3; y el doble es 6.* D - *Si tiene 50 y se lo dobla, tiene 100.*
Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;	- *si tiene más de 9 euros se tendría que elegir el triple porque el triple de 9 es 27, menos 7 es 20 y el doble es 18.* D - *Pero si tiene menos de 9 euros, por ejemplo, tiene 3 euros, el triple es 9, menos 7 es 3; y el doble es 6.* D - *Si tiene 50 y se lo dobla, tiene 100.*
Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;	
Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;	- *Mi grupo cree que Juan tendrá que pensar cuánto dinero tiene ahorrado.* - *si tiene más de 9 euros se tendría que elegir el triple porque el triple de 9 es 27, menos 7 es 20 y el doble es 18.* D - *Pero si tiene menos de 9 euros, por ejemplo,*

	tiene 3 euros, el triple es 9, menos 7 es 3; y el doble es 6. D *- Si tiene 50 y se lo dobla, tiene 100.*
Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;	*- si tiene más de 9 euros se tendría que elegir el triple porque el triple de 9 es 27, menos 7 es 20 y el doble es 18.* D *- Pero si tiene menos de 9 euros, por ejemplo, tiene 3 euros, el triple es 9, menos 7 es 3; y el doble es 6.* D

En la cartulina de este grupo podemos identificar la representación simbólica de la variable mediante la letra X, véase Ilustración IV. Ejemplo de representación simbólica Grupo C .

Ilustración IV. Ejemplo de representación simbólica Grupo C



Debemos destacar también que la letra en este caso aparece también con el significado de número generalizado.

Y finalizamos el análisis de este grupo respondiendo a la pregunta "¿Cómo deciden el trato?", como ya hemos mencionado antes, mostrando los pasos que siguen en base a la Tabla XVII. Transcripciones Grupo C.

Ilustración V. Elección de trato Grupo C

¿CÓMO DECIDEN EL TRATO?

1. • Identifican la relación funcional,
2. • Identifican las variables dependiente e idependiente,
3. • Identifican el dominio,
4. • Identifican el punto de corte (incorrecto),
5. • Hacen uso de la letra como Nº General.

4.1.4. Análisis de los datos del Grupo D

Las transcripciones realizadas sobre los vídeos son las que se muestran a continuación:

Tabla XXIII. Transcripciones Grupo D

VÍDEO 42: "FINAL"		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
A		Si tiene más de 7 euros debería elegir el trato 2. Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293. Pues entonces lo que debería hacer… eh… pero si elige el 1 y tiene 100 euros solo va a ganar 200. Y si tiene menos de 7 euros debería elegir el trato 1. Por ejemplo, si tiene 6 y elige el 1 llegas a 12, pero si tienes 6 y eliges el 2 llega a 11. Pero si tienes 7 no importa porque si eliges el 1 tienes 14 y si eliges el 2 es 7x3=21 menos 7, 14 también. Y… ¿hay algún trato que sea siempre el mejor? No, depende del dinero que tenga. Y ¿por qué?
I		Porque ya lo acabas de explicar.
A		Sí, lo acabo de explicar. Y… ya está.
I		Muy bien, ¿alguno de su grupo quiere decir algo?

Tabla XXIV. Transcripciones Grupo D

VÍDEO 26		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
A	0:00:14	No, si tiene más de 7 euros, el 2, y si tiene menos, el 1.

Tabla XXV. Transcripciones Grupo D

VÍDEO 33		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
A	0:01:11	Los argumentos son que tiene que ser uno u otro dependiendo de la cantidad que tenga.
A		Si tiene más de 7 es la segunda.

Continuamos con las tablas de análisis de las transcripciones del Grupo D:

Tabla XXVI. Análisis de transcripciones Grupo D

VARIABLE COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA	*EJEMPLOS*
Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;	
Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;	
Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;	*- Pero si tienes 7 no importa porque si eliges el 1 tienes 14 y si eliges el 2 es 7x3=21 menos 7, 14 también. PC*
Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;	*- Pero si tienes 7 no importa porque si eliges el 1 tienes 14 y si eliges el 2 es 7x3=21 menos 7, 14 también. PC*
Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.	

Tabla XXVII. Análisis de transcripciones Grupo D

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.	*EJEMPLOS*
Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;	
Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;	
Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;	
Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.	

Tabla XXVIII. Análisis de transcripciones Grupo D

VARIABLES EN RELACIÓN FUNCIONAL	*EJEMPLOS*
Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;	*- si tiene más de 7 euros, el 2, y si tiene menos, el 1. D* *- Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293.* *- si elige el 1 y tiene 100 euros solo va a ganar 200.* *- Por ejemplo, si tiene 6 y elige el 1 llegas a 12, pero si tienes 6 y eliges el 2 llega a 11.D*
Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;	*- si tiene más de 7 euros, el 2, y si tiene menos, el 1. D* *- Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293.* *- si elige el 1 y tiene 100 euros solo va a ganar 200.* *- Por ejemplo, si tiene 6 y elige el 1 llegas a 12, pero si tienes 6 y eliges el 2 llega a 11.D*
Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;	
Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;	*- Y… ¿hay algún trato que sea siempre el mejor? No, depende del dinero que tenga.* *- Los argumentos son que tiene que ser uno u otro dependiendo de la cantidad que tenga.* *- si tiene más de 7 euros, el 2, y si tiene menos, el 1. D* *- Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le*

	restas 7 te sale 293. *- si elige el 1 y tiene 100 euros solo va a ganar 200.* *- Por ejemplo, si tiene 6 y elige el 1 llegas a 12, pero si tienes 6 y eliges el 2 llega a 11.D*
Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;	*- si tiene más de 7 euros, el 2, y si tiene menos, el 1. D* *- Por ejemplo, si tiene 6 y elige el 1 llegas a 12, pero si tienes 6 y eliges el 2 llega a 11.D*
Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.	

En la cartulina de este grupo podemos identificar representación simbólica mediante el uso de los símbolos + 7, - 7 y 7 para expresar la solución. Véase Ilustración VI. Ejemplo de representación simbólica Grupo D.

Ilustración VI. Ejemplo de representación simbólica Grupo D

Y finalizamos el análisis de este Grupo respondiendo a la pregunta "¿Cómo deciden el trato?", como ya hemos mencionado antes, mostrando los pasos que siguen en base a la Tabla XXIII. Transcripciones Grupo D.

Ilustración VII. Elección de trato Grupo D

¿CÓMO DECIDEN EL TRATO?

1. Encuentran el punto de corte,
2. Identifican el dominio,
3. Identifican las variables dependiente e independiente,
4. Identifican la relación funcional.

4.1.5. Análisis de los datos del Grupo E

Tan solo hay un vídeo perteneciente a este grupo, y su transcripción se muestra a continuación:

Tabla XXIX. Transcripciones Grupo E

VÍDEO 36		
¿I/A?	**TIEMPOS** (En el que no se indique es porque va seguido del anterior)	**TRANSCRIPCIÓN**
A	0:00:52	Los alumnos escriben en la cartulina: Depende del dinero que tenga. Si hay 40 €, el 2º trato le sale mejor; pero si tiene 3€, el 1º le sale mejor. Porque si le triplican 40 € y después le resta 7 le queda 113 € y si triplica 3€ y después resta 7 le quedan 2€.

Aunque más escueto, también hemos realizado el análisis de los datos de este grupo. A continuación mostramos las tablas de análisis de las transcripciones del Grupo E:

Tabla XXX. Análisis de las transcripciones Grupo E

VARIABLE COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA	*EJEMPLOS*
Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;	
Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;	
Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;	

Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;	
Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.	

Tabla XXXI. Análisis de transcripciones Grupo E

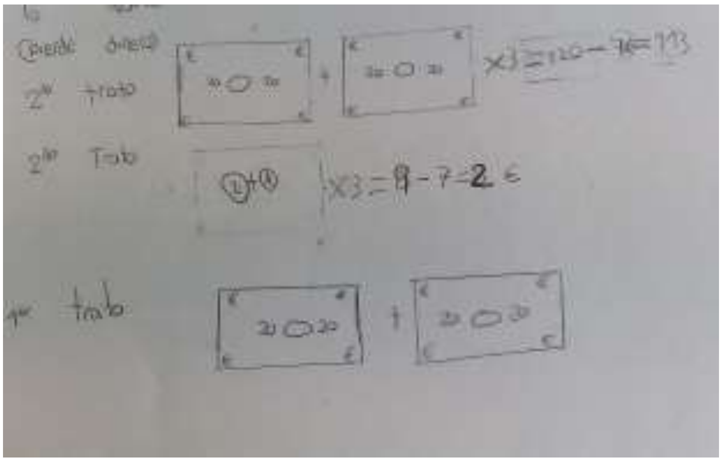
VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.	***EJEMPLOS***
Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;	
Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;	
Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;	
Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.	

Tabla XXXII. Análisis de transcripciones Grupo E

VARIABLES EN RELACIÓN FUNCIONAL.	***EJEMPLOS***
Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;	*- Si hay 40 €, el 2º trato le sale mejor; pero si tiene 3€, el 1º le sale mejor. Porque si le triplican 40 € y después le resta 7 le queda 113 € y si triplica 3€ y después resta 7 le quedan 2€.* D
Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;	*- Si hay 40 €, el 2º trato le sale mejor; pero si tiene 3€, el 1º le sale mejor. Porque si le triplican 40 € y después le resta 7 le queda 113 € y si triplica 3€ y después resta 7 le quedan 2€.* D
Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;	
Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;	*- Depende del dinero que tenga.* *- Si hay 40 €, el 2º trato le sale mejor; pero si tiene 3€, el 1º le sale mejor. Porque si le triplican 40 € y después le resta 7 le queda 113 € y si triplica 3€ y después resta 7 le quedan 2€.* D
Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;	*- Si hay 40 €, el 2º trato le sale mejor; pero si tiene 3€, el 1º le sale mejor. Porque si le triplican 40 € y después le resta 7 le queda 113 € y si triplica 3€ y después resta 7 le quedan 2€.* D
Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.	

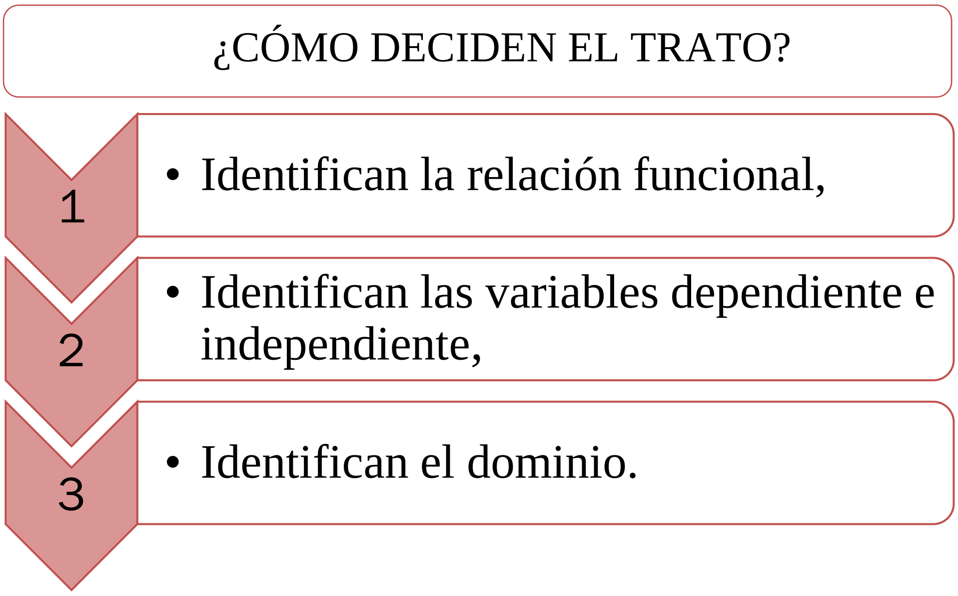
En la cartulina de este grupo identificamos la representación pictórica de la variable mediante el uso de dibujos para expresar algunos casos particulares de los tratos. Véase Ilustración VIII. Ejemplo de representación pictórica Grupo E.

Ilustración VIII. Ejemplo de representación pictórica Grupo E



Y, al igual que con el resto de grupos, finalizamos el análisis del Grupo E respondiendo a la pregunta "¿Cómo deciden el trato?", pero esta vez no lo hacemos en base al discurso de la presentación final sino que lo hacemos en base a la única transcripción existente para este grupo, la cual se corresponde con la de la Tabla XXIX. Transcripciones Grupo E.

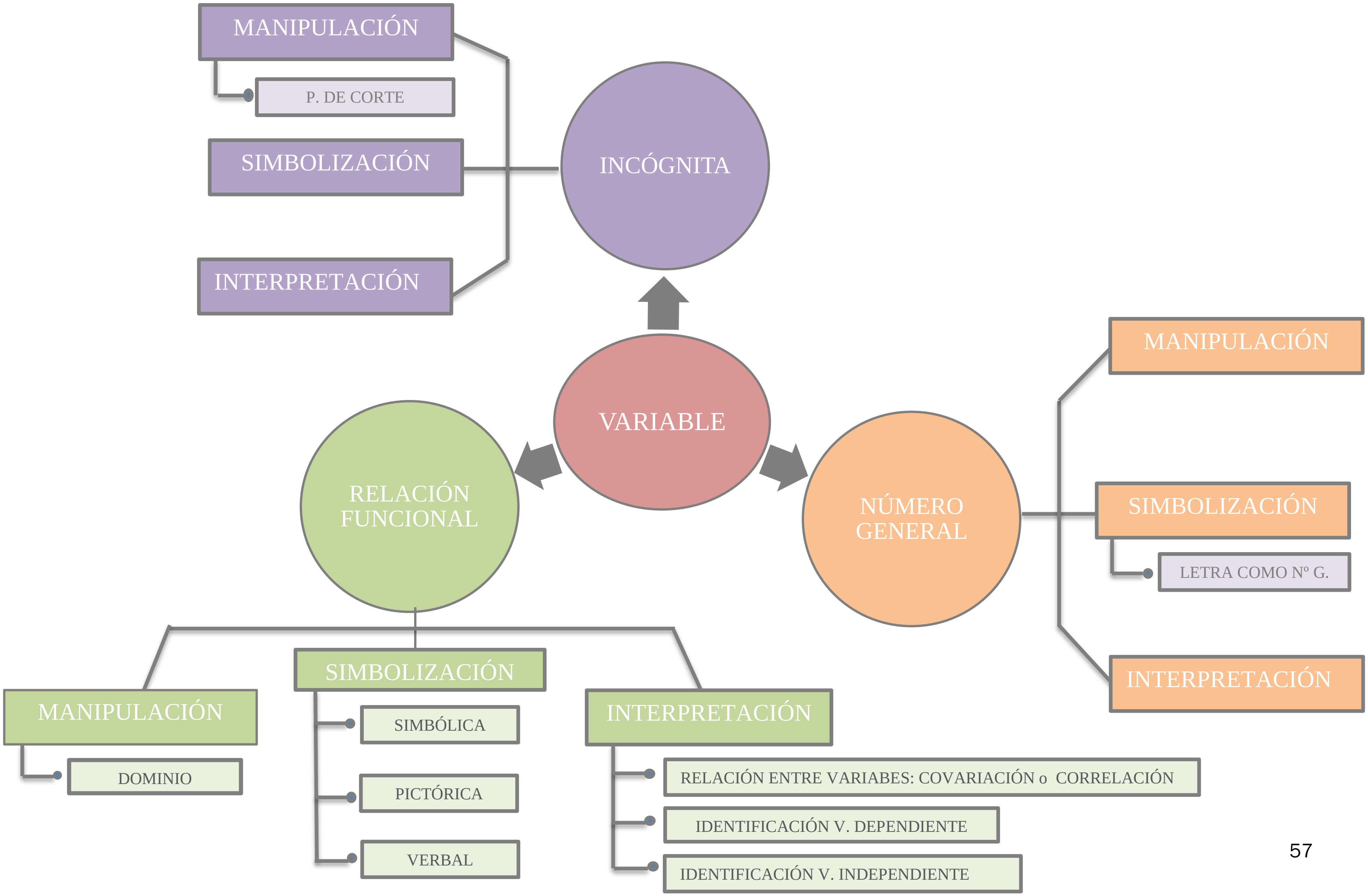
Ilustración IX. Elección de trato Grupo E



4.2. RESULTADOS

En este sub-apartado se interpretan los resultados que observamos y obtenemos del análisis anterior. Comenzamos percibiendo que, al resolver esta tarea de comparación de funciones, hay ciertos conceptos que se ponen en juego. Teniendo en cuenta estos conceptos nuestro modelo se ve modificado y este queda como se muestra a continuación.

Ilustración X. Mapa conceptual Modelo con resultados



Dada la modificación del mapa conceptual del modelo, la cual incluye resultados obtenidos, vamos a explicar cómo se identifica y qué nos muestra cada una de sus componentes.

Centrándonos primeramente en la *conceptualización de la variable como incógnita específica* se destaca, dentro de la acción de manipulación de la misma, el punto de corte. Con este ítem del modelo evidenciamos que los alumnos son capaces de identificar el punto en el que una función deja de ser la mejor opción, para pasar a serlo la otra. Este se identifica cuando los alumnos hacen alusión a la idea de que con siete euros iniciales son igual de buenos tanto un trato como el otro, en general, cuando encuentran un punto que cumple dicha condición, aunque ese punto sea equivocado.

> - *Pero si tienes 7 no importa porque si eliges el 1 tienes 14 y si eliges el 2 es 7x3=21 menos 7, 14 también.* (Punto de corte correcto: Tabla XXVI. Análisis de transcripciones Grupo D)
>
> - *... ¡Si tiene 7 ganan igual!* (Punto de corte correcto: Tabla XIV. Análisis de transcripciones Grupo B)
>
> - *Y si tiene 7 euros le daría igual qué trato elegir.* (Punto de corte correcto: Tabla XIV. Análisis de transcripciones Grupo B),
>
> - *Por eso nuestra conclusión es que si tiene más de 9 euros, elija el triple que da más, pero que si tiene menos de 9 euros, que elija el doble que también le da más.* (Punto de corte incorrecto: Tabla XX. Análisis de transcripciones Grupo C).

Este ítem se incluye dentro de la variable como incógnita específica debido a que para encontrar el punto de corte se está resolviendo una ecuación propiamente dicha, se está obteniendo el valor que hace que se cumpla la igualdad $2x = 3x - 7$. Por el mismo motivo, dicho ítem lo incluimos en la acción de manipulación. Sobre este ítem decir, por último, que lo identificamos entre el discurso de los alumnos gracias a los siguientes puntos de la variable como incógnita específica del Modelo 3UV:

- I3: Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;
- I4: Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;

Seguidamente, pasamos a la *interpretación de la variable como número general*, donde tenemos, dentro la acción de simbolización, la interpretación de la letra como número general, que se identifica siempre que se haga uso de la letra como representación de un objeto.

> - *Dice que X dinero. Que Juan tiene algún dinero.* (Tabla XXI. Análisis de transcripciones Grupo C)

- *X euros que tiene.* (Tabla XXI. Análisis de transcripciones Grupo C)

- *Pero, ¿por qué tiene que tener 7 euros? A lo mejor tiene… (hace gestos como de "cualquier nº"), yo creo que aquí también podría ser X porque representa cualquier número.* (Tabla XV. Análisis de transcripciones Grupo B)

Es claro que este ítem se encuentra dentro de la acción simbolizar porque estamos representando simbólicamente la variable, pero hay que destacar que debido a que estamos asignando significados a la variable, también se puede asignar a la acción interpretar.
Cabe destacar que este es el único significado de la letra encontrado entre las transcripciones, la letra como número generalizado.

Identificamos este ítem entre el discurso de los alumnos gracias al siguiente punto de la variable como número general del Modelo 3UV:

- G2: Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;

Y, por último, nos centramos en la *interpretación de la variable en relación funcional*, donde se identifica una mayor cantidad de ítems. Dentro de la acción de manipulación se identifica uno, y se trata del dominio. Con este hacemos alusión a las aportaciones de los alumnos que evidencian la identificación por parte de los mismos de los valores que puede tomar la variable independiente de cada función involucrada. Este ítem se incluye dentro de la acción de manipular puesto que los alumnos lo que hacen es manipular una y otra vez las funciones, probando, para ver los valores que sus variables pueden tomar; y se identifica siempre que los alumnos hagan alusión al trato se podría elegir en función del dinero que tenga Juan. Unos serán correctos, otros no, pero dichas identificaciones son en relación con el dominio. A continuación, mostramos algunas de las evidencias, pero no todas ya que hay un número elevado.

- *si tuviera menos de 2 euros no podría elegir el 2º trato porque no tiene 7 euros.* Aquí se podría estar estableciendo que $Dom(y = 3x - 7) = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \geq 2\}$. (Tabla X. Análisis de transcripciones Grupo A)

- *Si tiene mucha cantidad el trato 2, con poca cantidad le conviene el trato 1.* En este caso no están especificándolo, pero se da una aproximación al dominio. (Tabla XVI. Análisis de transcripciones Grupo B)

- *si tiene más de 9 euros se tendría que elegir el triple porque el triple de 9 es 27, menos 7 es 20 y el doble es 18.* Aquí se podría estar estableciendo que $Dom(y = 3x - 7) = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x \geq 9\}$. (Tabla XVI. Análisis de transcripciones Grupo B)

- *si tiene más de 7 euros, el 2, y si tiene menos, el 1.* Aquí se podría estar estableciendo que $Dom(y = 3x - 7) = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x > 7\}$ y que $Dom(y = 2x) = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x < 7\}$. (Tabla XXVIII. Análisis de transcripciones Grupo D)

- *Si hay 40 €, el 2º trato le sale mejor; pero si tiene 3€, el 1º le sale mejor. Porque si le triplican 40 € y después le resta 7 le queda 113 € y si triplica 3€ y después resta 7 le quedan 2€.* Aquí se podría estar estableciendo que $Dom(y = 3x - 7) = \{x \in \mathbb{Z} / x \geq 40\}$ y que $Dom(y = 2x) = \{x \in \mathbb{Z} / x < 40\}$. (Tabla XXXII. Análisis de transcripciones Grupo E)

Sobre este ítem decir, por último, que lo identificamos entre el discurso de los alumnos gracias a los siguientes puntos de la variable en relación funcional del Modelo 3UV:

- F2: Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
- F3: Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;

Seguimos ahora con la acción de simbolización dentro de la misma interpretación. Aquí se incluyen como ítems las diferentes formas encontradas de representar la variable y la relación funcional. Estos ítems son representación simbólica, representación pictórica y representación verbal o natural. La representación verbal o natural ha sido la más identificada. En los vídeos y en las producciones escritas se evidencia que esta es la forma principal mediante la cual el alumnado ha expresado y se ha comunicado con el pensamiento funcional en lo cual coincidimos con Radford (2012), quien sostiene que el pensamiento está compuesto por componentes materiales y del mundo de las ideas tales como el discurso (interior y exterior), formas de imaginación sensitiva, gestos, tacto y acciones reales con signos y artefactos culturales. Un ejemplo cualquiera es el siguiente.

- *Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293.* (Tabla XXVIII. Análisis de transcripciones Grupo D)

El ítem de representación simbólica se identifica siempre que se hace uso de la letra o del símbolo para representar la variable o alguna idea del pensamiento funcional, como se observa en la Ilustración VI. Ejemplo de representación simbólica Grupo D.

En cuanto a representación pictórica cabe mencionar que se identifica en un solo caso, y es el que se muestra en la Ilustración VIII. Ejemplo de representación pictórica Grupo E. El que se haya hecho tan poco uso de esta representación va en cierto modo en contradicción con lo que encontraron Fuentes (2014) y Cañadas y Fuentes (2015) en sus estudios sobre esto, porque en estos estudios entre las estrategias que llevaron a los alumnos a una relación correcta destaca el conteo de dibujos. No se identifican estos ítems mediante ningún punto concreto del Modelo 3UV.

Y terminamos con la acción de interpretar dentro de la conceptualización de la variable en relación funcional, en la cual aparecen tres ítems, a saber: la relación entre variables, la identificación de la variable dependiente y la identificación de la variable independiente. En el primero de estos ítems se identifican dos tipos de relación, la covariación y la correlación. En la tarea propuesta estas relaciones ya vienen dadas en el enunciado, concretamente en la propuesta de los tratos. Aun así, se identifican frases que se asocian con estos tipos de relación funcional.

- *Depende del dinero que tenga.* (Covariación: Tabla XXXII. Análisis de transcripciones Grupo E)

- *Si hay 40 €, el 2º trato le sale mejor; pero si tiene 3€, el 1º le sale mejor. Porque si le triplican 40 € y después le resta 7 le queda 113 € y si triplica 3€ y después resta 7 le quedan 2€.* (Correlación: Tabla XXXII. Análisis de transcripciones Grupo E)

- *Los argumentos son que tiene que ser uno u otro dependiendo de la cantidad que tenga.* (Covariación: Tabla XXVIII. Análisis de transcripciones Grupo D)

- *Por ejemplo, si tiene 100 euros y lo multiplica por 3 te sale 300 y si le restas 7 te sale 293.* (Correlación: Tabla XXVIII. Análisis de transcripciones Grupo D)

Así pues, en virtud de lo defendido por Smith (2017) e indicado en los antecedentes, ya podemos afirmar que se evidencia relación funcional entre los alumnos de quinto de primaria. La identificación de este ítem aporta evidencias del conocimiento, por parte de los alumnos, de la relación de dependencia entre las diferentes variables de las funciones. Por lo general, esta evidencia se recoge en la respuesta a la pregunta "¿Qué trato es mejor?" de la tarea estudiada, cuando identifican que depende del dinero que tiene en un principio. Ahora bien, esta relación será de correspondencia cuando implica determinar un valor de la variable dependiente dado un valor cualquiera de la variable independiente, y de covariación cuando implica centrarse en cómo los cambios en valores de la variable independiente influyen en los cambios de los valores de la variable dependiente. Es claro también que este ítem pertenece a la capacidad de interpretación puesto que lo que se hace en todo momento es interpretar las relaciones. No se ha identificado en ningún caso la recurrencia.

Y ya por último sobre el presente ítem, destacar que lo identificamos en el discurso de los alumnos gracias a los siguientes puntos de la variable en relación funcional del Modelo 3UV:

- F1: Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;
- F2: Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
- F3: Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;
- F4: Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;

Los últimos dos ítems los definimos en conjunto y de forma breve puesto que tienen gran relación con el anterior. En realidad, siempre que se identifica la relación entre variables se va a identificar al menos una de las variables, y va a surgir la necesidad de identificar qué variable es la dependiente en el problema, así pues, estaremos identificando en el discurso de los alumnos estos ítems cuando identifiquemos alguno de los puntos del Modelo 3UV destacados para el ítem anterior.

Continuamos este sub-apartado mostrando la contabilización de los resultados obtenidos en las tablas de análisis anteriores. Primeramente, se presenta una tabla para cada conceptualización de la variable en la que quedan marcados con una X los ítems que se han identificado en cada grupo, de forma que a simple vista se puede apreciar las concepciones identificadas, así como la concepción predominante, que será en la que más ítems se hayan cubierto. Seguidamente, se muestra otra tabla donde se puede identificar la acción principal a través de la cual desarrollan cada conceptualización de la variable.

Tabla XXXIII. Recuento ítems en incógnita específica

VARIABLE COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA	***GRUPOS***				
ÍTEMS	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***
Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;					
Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;					
Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;	X	X	X	X	
Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;	X	X	X	X	
Identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.					
TOTAL DE ÍTEMS	2	2	2	2	0

Tabla XXXIV. Recuento ítems en número general

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.	***GRUPOS***				
ÍTEMS	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***
Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;					
Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;		X	X		
Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;					

Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.					
TOTAL DE ÍTEMS	0	1	1	0	0

Tabla XXXV. Recuento ítems de relación funcional

VARIABLES EN RELACIÓN FUNCIONAL	***GRUPOS***				
ÍTEMS	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***
Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;	X	X	X	X	X
Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;	X	X	X	X	X
Determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;					
Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;	X	X	X	X	X
Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;	X	X	X	X	X
Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.					
TOTAL DE ÍTEMS	4	4	4	4	4

Tabla XXXVI. Relación ítems-acción en incógnita específica

VARIABLE COMO INCÓGNITA ESPECÍFICA	***GRUPOS***														
ÍTEMS	***A***			***B***			***C***			***D***			***E***		
	ACCIÓN			***ACCIÓN***			***ACCIÓN***			***ACCIÓN***			***ACCIÓN***		
	S	***M***	***I***	***S***	***M***	***I***	***S***	***M***	***I***	***S***	***M***	***I***	***S***	***M***	***I***
Reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;															
Interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;															
Sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;		|			|			|			|				
Determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;		|			|			|			|				
Identificar la incógnita en una situación específica y representarla															

simbólicamente en una situación.															
RECUENTO		2			2			2			2				

Tabla XXXVII. Relación ítems-acción en número general

VARIABLE COMO NÚMERO GENERAL.	*GRUPOS*														
ÍTEMS	*A*			*B*			*C*			*D*			*E*		
	ACCIÓN			*ACCIÓN*			*ACCIÓN*			*ACCIÓN*			*ACCIÓN*		
	S	*M*	*I*	*S*	*M*	*I*	*S*	*M*	*I*	*S*	*M*	*I*	*S*	*M*	*I*
Reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;															
Interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;				|			|								
Desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;															
Manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.															
RECUENTO				1			1								

Tabla XXXVIII. Relación ítems-acción en relación funcional

VARIABLE EN RELACIÓN FUNCIONAL.	***GRUPOS***														
ÍTEMS	***A***			***B***			***C***			***D***			***E***		
	ACCIÓN			***ACCIÓN***			***ACCIÓN***			***ACCIÓN***			***ACCIÓN***		
	S	***M***	***I***	***S***	***M***	***I***	***S***	***M***	***I***	***S***	***M***	***I***	***S***	***M***	***I***
Reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;			|			|			|			|			|
Determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;		|	|		|	|		|	|		|	|		|	|
Determinar los valores de la variable independiente cuando se															

conocen los de la variable dependiente;															
Reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;			|			|			|			|		|
Determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;		|			|			|			|		|	
Expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.															
RECUENTO		2	3		2	3		2	3		2	3		2	3

Ahora explicamos, grupo por grupo, los resultados presentes en estas tablas.

En cuanto al Grupo A se puede observar en la Tabla XXXIII. Recuento ítems en incógnita específica, la Tabla XXXIV. Recuento ítems en número general y la Tabla XXXV. Recuento ítems de relación funcional, que ha hecho uso tanto de la conceptualización de la variable como incógnita específica como de la conceptualización de la variable en relación funcional, predominando claramente la de la variable en relación funcional. Además, en base a las tablas Tabla XXXVI. Relación ítems-acción en incógnita específica,

Tabla XXXVII. Relación ítems-acción en número general y la Tabla XXXVIII. Relación ítems-acción en relación funcional, podemos decir que la conceptualización de la variable como incógnita específica la desarrollan mediante la acción de manipulación únicamente, y la conceptualización de la variable en relación funcional la desarrollan esencialmente mediante la interpretación, aunque también mediante la manipulación.

En el caso del Grupo B, en las tres primeras tablas de resultados apreciamos que se han identificado las tres conceptualizaciones de la variable, aunque no con la misma frecuencia. Destaca la conceptualización de la variable en relación funcional, le sigue la de la variable como incógnita específica, y, por último, la variable como número general. Además, en base a las tres tablas que relacionan ítems y acciones, podemos decir que la conceptualización de la variable en relación funcional la desarrollan mediante las acciones de interpretación, principalmente, y de manipulación. También tenemos que la conceptualización como incógnita específica la desarrollan mediante la manipulación únicamente, y la conceptualización de la variable como número general mediante la simbolización.

En el Grupo C, como se puede observar en las tablas de recuento, se han identificado las tres conceptualizaciones de la variable, aunque en mayor medida la de relación funcional. Además, con base a las tres últimas tablas, tenemos que la conceptualización de la variable en relación funcional la desarrollan los alumnos a través de la acción de interpretación, principalmente, y de la de manipulación también. La de incógnita específica mediante la acción de manipulación, y la variable como número general la desarrollan escasamente mediante la simbolización.

Para el Grupo D se hallan exactamente los mismos resultados que en el Grupo A. En base a las tablas de recuento se tiene que se identifica tanto la variable como incógnita específica como la variable en relación funcional, predominando la relación funcional. Y, por otro lado, en base a las tablas de ítems-acción, tenemos que la conceptualización de la variable como incógnita específica la desarrollan a través de la manipulación, y la de relación funcional la desarrollan mediante tanto la interpretación como la manipulación, aunque esencialmente mediante interpretación.

El Grupo E ha hecho uso tan solo de la conceptualización de la variable en relación funcional, y en las tablas que relacionan ítems con acción observamos que la desarrollan a través de la manipulación y la interpretación, esencialmente mediante la interpretación.

Con los resultados redactados hasta el momento, nos encontramos en la posición de presentar un resumen y de compartir ciertas ideas sobre estos. El resumen mencionado lo presentamos a continuación a modo de tabla, para que con un simple vistazo se perciban fácilmente las diferencias y similitudes entre los diferentes grupos.

Tabla XXXIX. Resumen de ciertos resultados

				CONCEPTUALIZACIONES DE LA VARIABLE		
				INCÓGNITA ESPECÍFICA	NÚMERO GENERAL	RELACIÓN FUNCIONAL
GRUPOS	GRUPO A	ACCIÓN	S			
			M	X		X
			I			X
	GRUPO B	ACCIÓN	S		X	
			M	X		X
			I			X
	GRUPO C	ACCIÓN	S		X	
			M	X		X
			I			X
	GRUPO D	ACCIÓN	S			
			M	X		X
			I			X
	GRUPO E	ACCIÓN	S			
			M			X
			I			X

A continuación listamos unas ideas clave que podemos obtener del resumen realizado previamente en la Tabla XXXIX. Resumen de ciertos resultados y del resto de los resultados anteriores:

- Se obtiene como resultado claro que al trabajar la comparación de funciones no se manifiesta únicamente la conceptualización de la variable como relación funcional como se podría imaginar, sino que también se presenta la variable como incógnita específica y la variable como número general. Coincidiendo en esta idea con (Ursini, 1994).
- La conceptualización de la variable como número general se identifica en dos grupos, el B y el C, y en ambos su aparición está relacionada con la acción de simbolización ya que se identifica gracias al uso de la letra para la representación de la variable. El uso de la letra como número generalizado era uno de los que encontrábamos en el trabajo de Ayala-Altamirano (2017). Cabe mencionar que este es el único uso de la letra que se ha identificado en el estudio.
- Cada vez que se identifica la conceptualización de la variable como incógnita específica, la cual identifican todos los grupos excepto el E, se hace a través de la manipulación debido a que esta conceptualización se encuentra al hallar el punto de corte y para ello lo que deben hacer los alumnos es resolver una ecuación, es decir, manipular una expresión matemática.
- La variable en relación funcional se identifica en los cinco grupos a través de las acciones de manipulación e interpretación, principalmente mediante la interpretación (en la tabla lo indicamos dándole un color más intenso a las casillas correspondientes).
- Cabe destacar que cada vez que se manifiesta la conceptualización de la variable como número general esta lo hace a través de la acción de simbolización, sea cual sea el grupo; cada vez que se manifiesta la conceptualización de la variable como incógnita específica lo hace a través de la manipulación y la variable en relación funcional a través de la manipulación, pero principalmente la interpretación, sea cual sea el grupo también.
- El par de grupos A, D y B, C presentan exactamente los mismos resultados.
- Los grupos B y C hacen uso de las tres conceptualizaciones de la variable.
- Tan solo en el grupo E se manifiesta únicamente la conceptualización de la variable en relación funcional.
- Se identifica la relación de covariación y la de correlación, pero la recurrencia no se presenta. Por tanto, como hemos indicado antes, en base a Smith (2017) afirmamos que se identifica relación funcional entre el alumnado participante.
- El lenguaje natural y la representación verbal son los más utilizados por los estudiantes, lo usan todos los grupos en algún momento.
- La representación simbólica se identifica en los grupos B y C a través de la utilización de la letra como representación de la variable, y, además, también en el grupo D como se puede observar en la Ilustración 2-representación simbólica.

- Se identifica la representación pictórica en las producciones del grupo E, lo cual se puede observar en la Ilustración 1- representación pictórica.
- Hay grupos que identifican el punto de corte correctamente (x=7, Grupos A, B y D), otro que lo identifica, pero incorrectamente (x=9, Grupo C) y otro que no hace alusión a él (Grupo E).
- La gran mayoría de los estudiantes hacen alusión al dominio de, al menos, una de las funciones. No dan el dominio como tal, pero si es cierto que todos dan valores positivos y mencionan en muchas ocasiones que cierto trato no puede elegirse si se tiene menos de cierto dinero por lo que indirectamente están buscando el dominio de las funciones.

4.2.1. ¿Cómo deciden el trato?

En este sub-apartado vamos a comentar las diferentes formas en que cada grupo da respuesta a la pregunta ¿Cómo deciden el trato?, en base a las ilustraciones de elección de trato de los distintos grupos.

El Grupo A comienza identificando la relación funcional existente, lo cual identificamos a través de la frase "*Mi grupo piensa que pueden ser los 2 tratos dependiendo del dinero que tenga".* Seguidamente identifican las variables independiente y dependiente del problema: *"por eso que depende de cuánto dinero tenga".* A continuación, trabajan con el dominio, y por último, identifican correctamente el punto de corte: *"si tuviese 7 euros daría igual cual elija, puedes elegir perfectamente las dos preguntas".*

El Grupo B, por su parte, lo primero que hace es encontrar el punto de corte e identificar las variables dependiente e independiente, a la vez, lo cual identificamos a través de la frase *"Si tiene más de 7 euros elegiría el trato 2 porque saldría ganando más dinero que eligiendo el trato 2. Pero si tiene menos de 7 euros tendría que elegir el trato 1 para no perder dinero. Y si tiene 7 euros le daría igual qué trato elegir".* Y a continuación se van tanteando el dominio, pero sin llegar a darlo exacto.

En cuanto al Grupo C, decir que sigue exactamente los mismos pasos que el A, pero identificando un punto de corte incorrecto. Y otra diferencia es que al final concluyen con algo que en el Grupo A no tienen en cuenta: el uso de la letra X como número general, lo cual identificamos con la frase *"Dice que X dinero. Que Juan tiene algún dinero".*

El siguiente grupo, el D, comienza encontrando el punto de corte y sigue tanteando el dominio. Para finalizar identifica la relación funcional y las variables dependiente e independiente, como puede observarse en la siguiente frase: "*Y… ¿hay algún trato que sea siempre el mejor? No, depende del dinero que tenga".*

Por último, el Grupo E, que no llega a hacer alusión al punto de corte en ningún momento y comienza reconociendo la relación funcional, las variables dependiente e independiente, y sigue tanteando el dominio: *"Depende del dinero que tenga. Si hay 40*

€, el 2º trato le sale mejor; pero si tiene 3€, el 1º le sale mejor. Porque si le triplican 40 € y después le resta 7 le queda 113 € y si triplica 3€ y después resta 7 le quedan 2€".

Así, vemos que no hay dos grupos que resuelvan la tarea siguiendo los mismos pasos: unos encuentran el punto de corte, otros no; unos dan el punto de corte correcto, otros equivocado; unos trabajan sobre el domino, otros no; cada grupo la resuelve de manera diferente, pero al final, en todo caso, se manifiesta en los alumnos el pensamiento funcional.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En este último capítulo estamos en posición de establecer las conclusiones que se pueden obtener gracias a todo el proceso llevado a cabo en este trabajo de investigación.

Hemos desarrollado este trabajo con alumnos de 10 y 11 años (quinto de primaria), con la intención de aportar información a una serie de estudios que buscan caracterizar el pensamiento funcional de estudiantes de 5 a 12 años, para así poder obtener conclusiones que sean útiles para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las diferentes etapas educativas: educación infantil, primaria y secundaria. En base a esta idea planteamos nuestro objetivo general "identificar y analizar las diferentes interpretaciones que se hacen de las variables en un grupo de alumnos de quinto de Educación Primaria al comparar funciones".

Para ello consideramos tres apartados dentro de este capítulo: en primer lugar, valoramos en qué medida se han alcanzado los objetivos específicos que definimos en el capítulo 3, seguidamente ponemos de manifiesto las limitaciones que hemos tenido a la hora de realizar el estudio y, por último, proponemos algunas líneas de investigación que quedan abiertas para la continuidad del estudio.

5.1. CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS PROPUESTOS

Todo lo realizado en los capítulos anteriores ha sido con el propósito de cumplir los objetivos específicos que propusimos, en los cuales se desglosa nuestro objetivo general. A continuación vamos a describir la consecución de dichos objetivos.

5.1.1. Consecución del objetivo específico primero

En primer lugar, tratábamos de *Identificar si los estudiantes reconocen la relación funcional.* En cuanto a la identificación de la relación funcional, es claro, como consecuencia de todo lo mostrado en los resultados, que se ha dado en todos y cada uno de los grupos participantes en el estudio. Los alumnos desde un inicio muestran el conocimiento de que el dinero que recibe Juan de su abuela tiene relación con el dinero que él tiene de partida, de hecho, en su discurso se observa que son capaces incluso de identificar la variable dependiente y la independiente.

Incluso se puede ir un poquito más allá y afirmar que todos los grupos han manifestado tanto la relación funcional de correspondencia como la de covariación, lo cual se puede observar si echamos un vistazo a las tablas de análisis y resultados.

Como conclusión a este objetivo tenemos que los alumnos de 5º de Primaria son totalmente capaces de manifestar la relación funcional, así pues, este objetivo se ha alcanzado con creces puesto que, no solo han identificado la relación entre variables, sino que, además, como ya hemos indicado, la gran mayoría han sido capaces de identificar las variables dependiente e independiente, y han manifestado tanto la correspondencia como la covariación.

5.1.2. Consecución del objetivo específico segundo

En segundo lugar, pretendíamos "*Identificar los significados de la variable independiente que surgen en el discurso y el quehacer matemático de los alumnos y cuál predomina*". En cuanto a las conceptualizaciones/significados de la variable que se han identificado cabe decir que han sido las tres pertenecientes al Modelo base, el 3UV, y al propuesto, a saber: la variable como incógnita específica, la variable como número general y la variable en relación funcional. Según otros autores, podrían identificarse otras conceptualizaciones, pero ya justificamos en el marco teórico el tomar estos tres.

En las tablas de análisis se puede observar la asignación que hemos hecho del texto correspondiente al discurso de los alumnos con una de estas tres conceptualizaciones. Se tiene que al comparar funciones no solo se trabaja la variable en relación funcional como se puede pensar, sino que también aparecen ciertos matices de las otras dos conceptualizaciones. Es cierto que la conceptualización predominante es la de relación funcional, pero hay ciertos alumnos que entre medias dejan entrever algo de las otras.

Por tanto, como conclusión sobre las conceptualizaciones de la variable que se manifiestan en el discurso del alumnado y cuál es la que predomina podemos decir que, predominando sobre las demás, en todos los grupos, tenemos la interpretación de la variable en relación funcional, algo que es lógico por el tipo de tarea que presenta el estudio. Pero hay que añadir a la conclusión que no solo se presenta esta, sino que también aparece la interpretación de la variable como incógnita específica y la interpretación de la variable como número general en tareas de comparan funciones, apoyando lo que indican Ursini y Trigueros (2006).

5.1.3. Consecución del objetivo específico tercero

En tercer lugar, buscábamos *"identificar el uso que los estudiantes hacen de las letras como representación de la variable"*, y esto se ha cubierto ya que hemos visto en los resultados que hay grupos que usan la letra como representación de la variable, el B y el C, y hemos identificado que concretamente se usa como número general.

5.1.4. Consecución del objetivo específico cuarto

En cuarto lugar, pretendíamos *"Analizar las interpretaciones de la variable desarrolladas por los alumnos"*.

Este objetivo se propuso pensando en indicar la acción (manipulación, interpretación o simbolización) a través de la cual manifiestan principalmente nuestros alumnos cada conceptualización de la variable. Esta es la parte más propia de la investigación debido a que se ha conseguido el objetivo en base a definiciones e ideas propias sobre dichas acciones, apoyadas en las definiciones dadas para dichas acciones y en las ideas de Ursini (1994).

Para la consecución de este objetivo hemos realizado unas tablas asignando cada ítem del Modelo 3UV a una de estas tres acciones, asignación realizada principalmente en base a la acción que, como investigadores, consideramos que se está desarrollando con cada ítem. Luego, hemos contabilizado en otras tablas las veces que aparece cada una de estas acciones para cada interpretación de la variable, y así es como hemos conseguido afirmar a través de qué acción manifiestan principalmente nuestros alumnos cada una de las tres interpretaciones de la variable.

Como conclusión para este objetivo tenemos que hemos conseguido realizar un análisis concreto y específico de las interpretaciones.

5.1.5. Consecución del objetivo específico quinto

Y en último lugar, pretendíamos *"Reconocer que el pensamiento funcional está presente en alumnos de Primaria al realizar tareas de comparación de funciones"*, y lo hemos hecho; consideramos que la presencia del pensamiento funcional en alumnos de Primaria está totalmente justificada en base a la consecución de todos los objetivos anteriores ya que con ello hemos justificado que los alumnos son capaces de identificar la dependencia entre variables y, por ende, la relación funcional; además de hacer uso de diferentes conceptualizaciones de la variable, aunque sea de forma inconsciente, hacer uso también de la letra como representación de la misma y, por último, hemos justificado su capacidad para desarrollar las conceptualizaciones a través de distintos modos. Por otro lado, atendiendo a la definición de pensamiento funcional que proponen Blanton y colaboradores (2011), también podemos decir que hemos conseguido ciertamente identificar la existencia de pensamiento funcional, pues estos autores lo describen *como el proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones. Esto incluye la generalización de relaciones entre cantidades covariantes, representar esas relaciones de diferentes formas utilizando el lenguaje natural, el simbolismo algebraico, tablas o gráficos; y razonar de forma fluida con esas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones.*

Cabe destacar además que los alumnos también han razonado con y sobre las funciones, y tenemos evidencia de ello en tanto que hemos analizado su discurso donde se ha identificado que los alumnos han trabajado identificando intervalos que cumplen ciertas características o identificando el punto de corte de dos funciones. Además de tomar decisiones acertadas razonando sobre esas características.

Por tanto, en virtud de este estudio que hemos realizado, lo que es claro es que el pensamiento funcional está presente en alumnos de Primaria, al menos en tareas de comparación de funciones, es decir que como conclusión final podemos afirmar que prestamos el apoyo a todos los autores mencionados en los primeros capítulos, quienes defendían que los alumnos a esas edades son capaces de pensar algebraica y funcionalmente, aunque cierta parte de la comunidad docente considere lo contrario.

5.2. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Se reconocen dos limitaciones que han surgido en nuestra investigación, comenzamos por la más obvia y que se trata de la extensión máxima permitida, la cual no nos ha permitido profundizar en el estudio de ciertas ideas que surgen del análisis de los datos.

Y la siguiente limitación se basa en el trabajo por grupos. Al haberse realizado todo por grupos y de manera conjunta, se hace muy difícil identificar cómo han sido las aportaciones individuales de los estudiantes y si estas tienen influencia, o no, en los resultados

5.3. LÍNEAS DE CONTINUACIÓN

Cabe destacar que permanecen abiertas algunas líneas de investigación en relación con este trabajo, concretamente, nos interesan tres y las proponemos para tenerlas como posibles continuaciones de este trabajo:

Por un lado, queda abierto conocer cómo sería el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes en futuras tareas de características similares una vez que ya han trabajado esta. Es decir, conocer si el trabajo con tareas de este tipo mejora el aprendizaje del pensamiento funcional.

Por otro lado, sería interesante hacer un estudio en cierto modo individualizado para comprobar si estas aportaciones tienen influencia alguna en los resultados, o no, para así acabar con una de las limitaciones que hemos definido para este trabajo.

Y como tercera y última línea de continuación mencionamos el estudio más profundo de las distintas formas de elección del trato, es decir, las distintas formas de validar la respuesta de los alumnos.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, Y., y Alsina, Á. (2018). *Alfabetización algebraica a partir de 3 años: El caso de los patrones.*

Ayala-Altamirano, C. (2017). *Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales. (Trabajo fin de máster).* Universidad de Granada, España.

Obtenido de https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Ayala_2017.pdf.

Ayala-Altamirano, C. (2021). *Concepción y representación de cantidades indeterminadas por estudiantes de primaria en contextos funcionales.* Tesis, Universidad de Granada.

Ayala-Altamirano, C., y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18(7),* 1271-1291.

Ayala-Altamirano, C., Cañadas, M. C., Molina, M., y Pinto, E. (2022). Proceeding of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. *A DISCUSSION ABOUT THE SEMANTIC CONGRUENCE OF A TRANSLATION: AN OPPORTUNITY TO PROMOTE ALGEBRAIC THINKING AT ELEMENTARY SCHOOL* (págs. 291-208). Alicante: Fernández, C., Llinares, S., Gutiérrez, A., Planas, N., Universidad de Alicante.

Bastías, K., y Moreno, A. (2016). XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática. SOCHIEM. *Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5º curso primaria* (págs. 219-222). Valparaíso, Chile: Estrella, S.; Goizueta, M.; Guerrero, C.; Mena, A.; Mena, J.; Montoya, E.; Morales, A.; Parraguez, M.; Ramos, E.; Vazquez, P.; Zakaryan, D. (Eds.).

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Seeing.* Harmondsworth: Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.

Billings, E. M., Tiedt, T. L., y Slater, L. H. (2007). Research, Reflection, Practice: Algebraic Thinking and Pictorial Growth Patterns. *Teaching Children Mathematics, 14(5)*, 302-308.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. En *International Group For The Psychology Of Mathematics Education* (págs. 135-142). Noruega: Bergen University College.

Blanton, M. L., y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En *Early algebraization* (págs. 5-23). Berlin, Heidelberg: Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., y Zbiek, R. M. (2011). Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Series in Essential Understandings. En *National Council of Teachers of Mathematics.* . Reston: 1906 Associaton Drive, VA 20191-1502.

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C., y Young, L. K. (2017). Misconceptions and learning algebra. En *And the rest is just algebra* (págs. 63-78). Springer, Cham.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A., y Sawrey, K. (2017). A progression in first-grade children’s thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95(2)*, 181-202.

Cañadas, M. C., y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1(2)*, 68-81.

Cañadas, M. C., y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. *Fernández, C.; Molina, M.;*

Planas, N.; Investigación en Educación Matemática XIX (págs. 211-220). Alicante: SEIEM.

Cañadas, M. C., y Molina, M. (2016). *Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades.*

Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 2(3)*, 137-151.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically.* Portsmouth: NH: Heinemann.

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 2, 669-705).

Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6(2)*, 1-13.

Castro, W., Godino, J., y Rivas, M. (2009). Relatividad Socio-Cultural de los Significados del Álgebra y los Procesos de Transposición Didáctica en el Marco del Álgebra Escola. En M. C. Cañadas, J. M. Contreras, y A. B. Heredia, *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cortés, M. E., y Iglesias León, M. (2004). *Generalidades sobre Metodología de la Investigación.* Universidad Autónoma del Carmen.

Davydov, V. V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education, 5(1)*, 27-37.

Davydov, V. V. (1991). Psychological Abilities of Primary School Children in Learning Mathematics. *Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 6*.

Doorman, M., y Drijvers, P. (2011). Algebra in function. En *Secondary algebra education* (págs. 119-135). SensePublishers.

Dougherty, B. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. En *Algebra in the early grades* (págs. 389-412).

Drijvers, P., Goddijn, A., y Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. D. (Eds.), *Secondary algebra education* (págs. 5-26). Rotterdam, Los Países Bajos: Sense Publishers.

Dubinsky, E., y Harel, G. (1992). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy.* USA: Mathematical Association of America (MMA).

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Edu. Stud. Math. 61*, 103-131.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 5(1)*, 391-412.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria: un estudio exploratorio.* Granada: Maestría tesis, Universidad de Granada.

Fuentes, S., y Cañadas, M. C. (2021). *Pensamiento funcional en 4 años: un estudio de caso.*

Giraldo, A. M. (2020). Proceso de simbolización algebraica: reporte de una experiencia de aula en grado octavo. *Comunicación presentada en Comunicaciones de innovación (6 de junio de 2020). Universidad de los Andes.* Tesis de Maestría.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo: un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma*, 20, 61-68.

González, F. E., y Díez, M. M. (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en álgebra: propuesta para la interacción didáctica. *Revista complutense de educación.*

Hamley, H. R. (1934). *Relational and Functional Thinking in Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics, Yearbook 9 [1934].

Harper, E. (1987). Ghosts of diophantus. *Educational studies in mathematics, 18(1)*, 75-90.

Hodgen, J., Oldenburg, R., y Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. En *Developing Research in Mathematics Education* (págs. 32-45).

Jaldo, P. (2015). *CARACTERIZACIÓN DE LA TOMA DE DECISIONES DE ESTUDIANTES DE 5º DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN SITUACIONES EN LAS QUE INTERVIENE EL PENSAMIENTO FUNCIONAL (Trabajo final de máster).* Universidad de Granada.

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 76*, 83-103.

Kaas, T. (2019). 43rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education VOLUME 2 . *SECOND GRADERS'FIRST MEETING WITH VARIABLE NOTATION.* (pág. 448). Pretoria: Research Reports (AK) .

Kieran, C. (1985). *The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students.* (9th, Noordwijkerhout, The Netherlands, July 22-29, 1985), Volume, 157.: Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* (págs. 390–419). Reston, VA: NCTM.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The mathematics educator, 8(1)*, 139-151.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12thICMI Study* (págs. 21-33). Dordrecht: Springer.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. En A. Gutiérrez, y P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (págs. 11-50). BRILL.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (págs. 707-62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kieran, C. F. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school, 7(4)*, 23-26.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. M. Hart, *Children’s understanding of mathematics: 11-16* (págs. 102-119). London: John Murray.

Lins, R., y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En T. 1. Study, *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (págs. 45-70). Dordrecht: Springer.

Malisani, E., y Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the “variable”. *Educational studies in mathematics, 71(1)*, 19-41.

Martínez, M. B. (2019). Experimento de enseñanza como una aproximación metodológica a la investigación en Educación Matemática. *Uni-pluriversidad, 19(2)*, 103-123.

Martínez, M., y Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *The Journal of Mathematical Behavior, 25(4)*, 285-298.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En *Approaches to algebra* (págs. 65-86). Dordrecht: Springer.

Merino, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2020). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2(1)*, 24-40.

Merino, R. A., Cañadas, M., Brizuela, B., y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 36(3)*, 59-78.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *Pna, 3(3)*, 135-156.

Molina, M. (2009). *Una propuesta de cambio curricular: Integración del Pensamiento Algebraico en Educación Primaria.*

Moreno, A. (2019). Pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria. *Conferencia presentada en Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad (16 de noviembre de 2019).* Bogotá.

Moreno, A., del Río, A., Molina, M., y Cañadas, M. C. (2015). *Tareas para promover el pensamiento funcional. Una propuesta para tercer ciclo de educación primaria.* Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

NCTM. (2000). *National Council of teachers of mathematics. Principles and Standars for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Núñez, M. I. (2007). Las variables: estructura y función en la hipótesis. *Investigación Educativa, Vol. 11, Nº 20*, 163-179.

Pinto, E. C. (2021). Actas del XXIV Simposio de la SEIEM. *Estudiantes de sexto de primaria comparan funciones lineales: el rol del lenguaje natural.* (pág. 497). Valencia: Diago, P., Yáñez, D., Carrillo, D. y González-Astudillo, M. T.

Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2018). Generalización y razonamiento inductivo en una estudiante de cuarto de primaria. Un estudio de caso desde el pensamiento funcional. *Investigación en Educación Matemática. SEIEM.*

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalisation. En N. Bednarz, C. Kieran, y L. (. Lee, *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (págs. 107-111). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics, 22(2)*, 14-23.

Radford, L. (2009). Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. *SIGNS, GESTURES, MEANINGS:*

ALGEBRAIC THINKING FROM A CULTURAL SEMIOTIC PERSPECTIVE (pág. 35). Lyon: Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S., Arzarello, F.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 6(4),*, 117-133.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1(2),*, 47-66.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*.

Sánchez, L. B. (2021). Pensamiento algebraico en primaria: un reto para la formación docente. , . *Formação Docente–Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação de Professores, 13(27)*, 133-146.

Schoenfeld, A. H., y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The mathematics teacher, 81(6)*, 420-427.

Sibgatullin, I. R., Korzhuev, A. V., Khairullina, E. R., Sadykova, A. R., Baturina, R. V., y Chauzova, V. (2022). A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18(1), em2065*.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing funcions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton, *(Eds.) Algebra in the early grades* (págs. 133-160). Nueva York: NY: Routledge.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, 5-34.

Steffe, L. P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, (págs. 267-306).

Stephens, A. C., Isler, I., Marum, T., Blanton, M. L., Knuth, E. J., y Gardiner, A. M. (2012). From Recursive Pattern to Correspondence Rule: Developing Students' Abilities to Engage in Functional Thinking. *34th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Kalamazoo, MI.

Stylianides, A. J. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: Classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM, 45(3),* 333-341.

Torres, M. D. (2018). Actas del XXII Simposio de la SEIEM. *Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º primaria.* (pág. 575). Gijón: Universidad de Oviedo.

Torres, M. D., y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA.*

Torres, M. D., Brizuela, B., Cañadas, M. C., y Moreno, A. (2022). Introducing Tables to Second-Grade Elementary Students in an Algebraic Thinking Context. *Mathematics 10(1),* 56.

Torres, M. D., Moreno, A., y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics, 9(10),* 1109.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación matemática, 6(03),* 90-108.

Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿ Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática, 18(3),* 5-38.

Usiskin, Z. (1998). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. C. (Ed., *The ideas of algebra K–12* (págs. 8-19). Reston: VA: NCTM.

Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Warren, E. (2005). Young Children's Ability to Generalise the Pattern Rule for Growing Patterns. En *International Group for the Psychology of Mathematics Educatio, 4* (págs. 305-312). Melbourne: PME: Vicent.

Yáñez, J. C. (2015). *Pensamiento funcional puesto de manifiesto por alumnos de 5º de educación primaria (Trabajo Fin de Máster no publicado).* Granada: Universidad de Granada.

ANEXO I

FICHA DE LA TAREA

Curso: 5º   Fecha: ________________________

Nombre y apellidos:
____

EL TRATO DE LA ABUELA

Juan tiene ahorrado algo de dinero (sólo tiene euros, no céntimos). Su abuela, como recompensa por un trabajo que le ha hecho, le ofrece dos tratos:

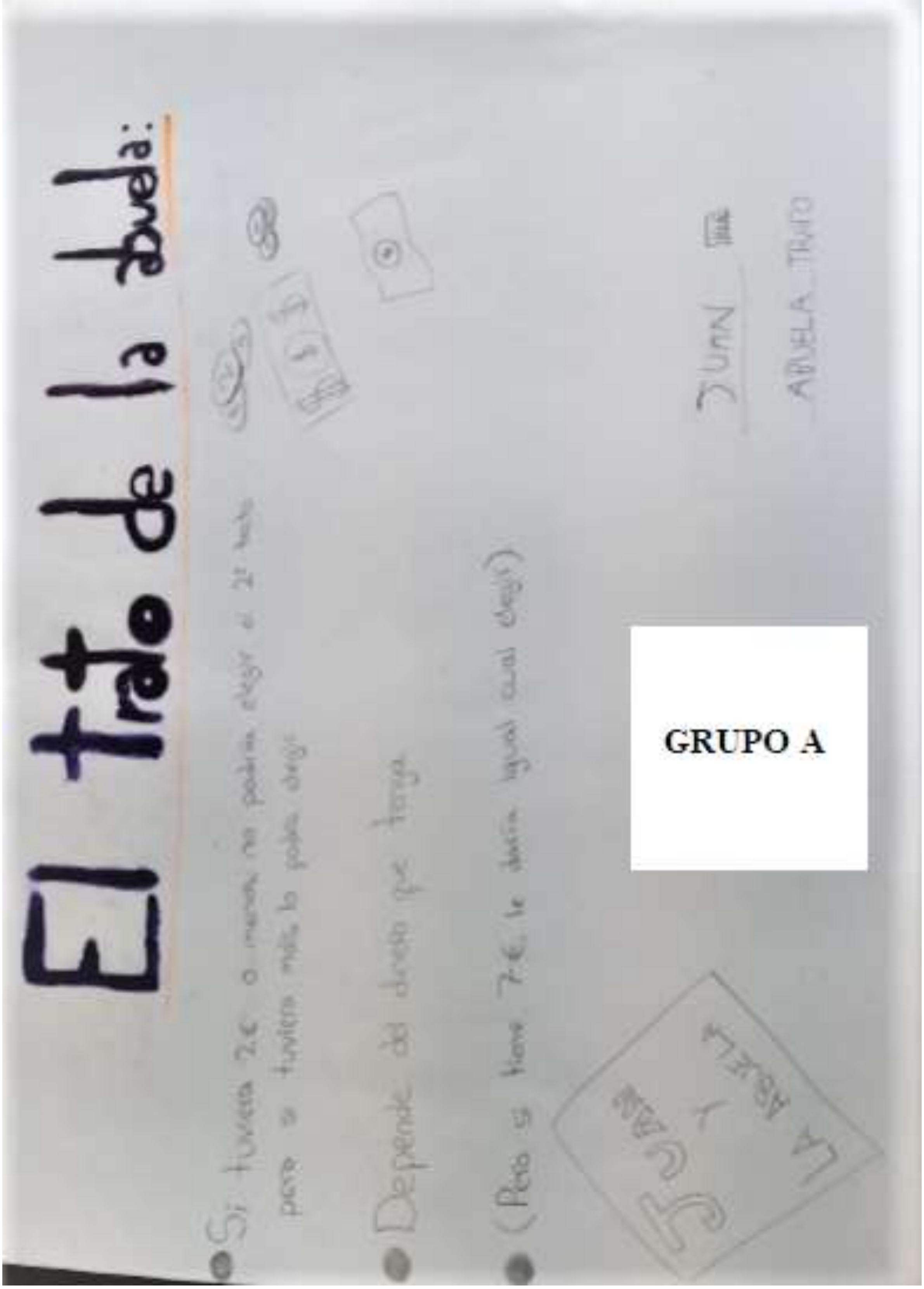
Juan quiere elegir el mejor trato.
¿Qué debe hacer? Ayúdale a elegir el mejor trato.

¿Hay algún trato que sea siempre el mejor? ¿Por qué?

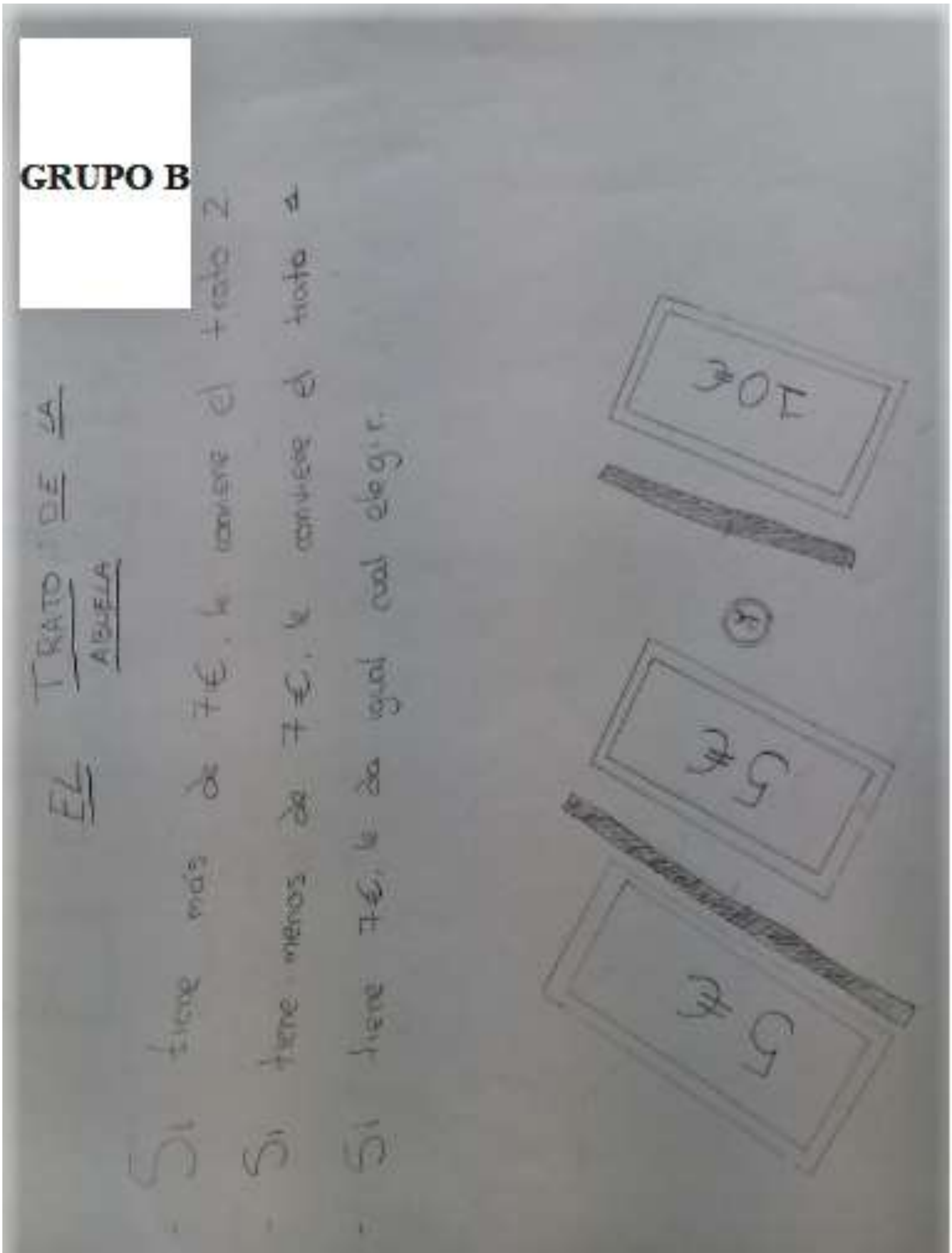
Con tus compañeros de equipo resume vuestras conclusiones en la cartulina. Luego utilizaréis la cartulina para explicar vuestras conclusiones al resto de la clase.

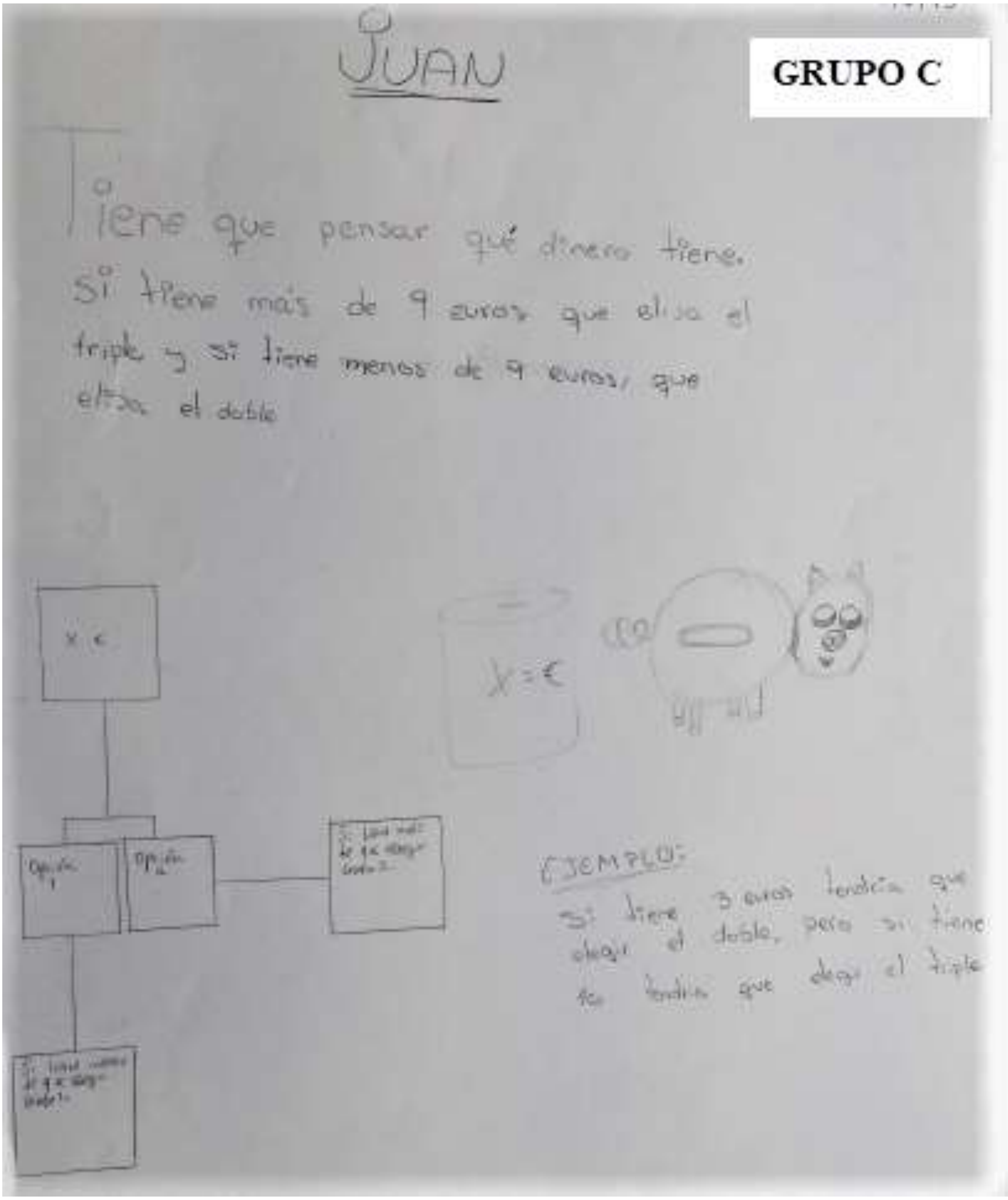
ANEXO II

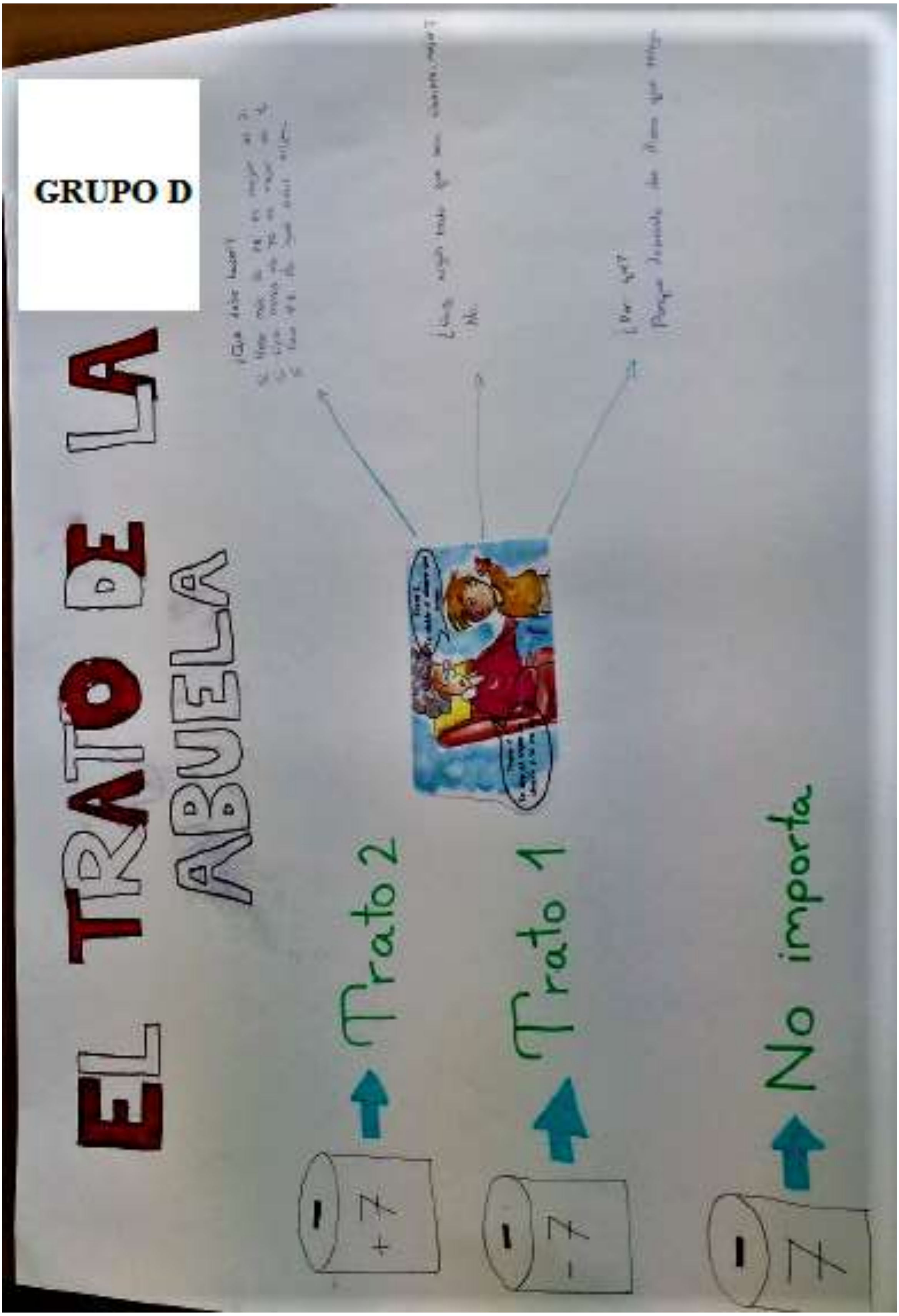
CARTULINAS DE LOS GRUPOS

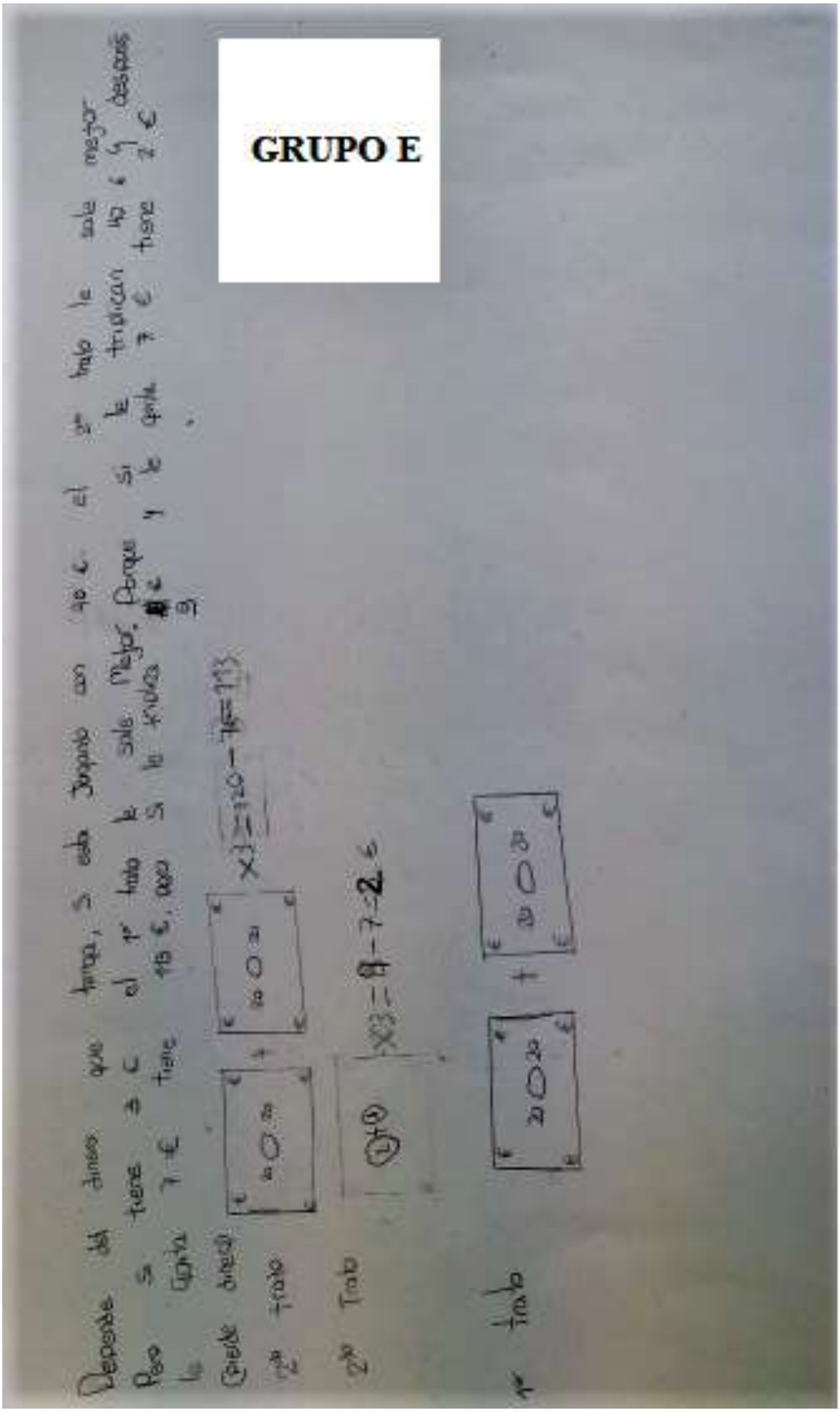

El trato de la abuela:
Depende del dinero que tenga
JUAN
ABUELA
JUAN Y LA ABUELA

GRUPO A


GRUPO B
EL TRATO DE LA ABUELA
- Si tiene más de 7€, le conviene el trato 2
- Si tiene menos de 7€, le conviene el trato
- Si tiene 7€, le da igual cual elegir.
5€
5€
10€


JUAN
GRUPO C
Tiene que pensar qué dinero tiene.
Si tiene más de 9 euros que elija el triple y si tiene menos de 9 euros, que elija el doble
X €
X = €
Opción 1
Opción 2
EJEMPLO:
Si tiene 3 euros tendría que elegir el doble, pero si tiene 10 tendría que elegir el triple


GRUPO D
EL TRATO DE LA ABUELA
Trato 2
Trato 1
No importa


GRUPO E