



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

# Programa de Doctorado en Estadística Matemática y Aplicada

TESIS

## Fiabilidad de sistemas Markovianos mediante técnicas de Estadística no paramétrica

Presentado por:

Fernando Jesús Navas Gómez

Tutoras:

María Luz Gámiz Pérez

Rocío Raya Miranda

Curso académico 2022-2023

# Fiabilidad de sistemas Markovianos mediante técnicas de Estadística no paramétrica

Fernando Jesús Navas Gómez

Tutoras:

María Luz Gámiz Pérez

Rocío Raya Miranda

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales  
Autor: Fernando Jesús Navas Gómez  
ISBN: 978-84-1195-027-5  
URI: <https://hdl.handle.net/10481/84675>

Fernando Jesús Navas Gómez *Fiabilidad de sistemas Markovianos mediante técnicas de Estadística no paramétrica*

Tesis. Curso académico 2022-2023

**Tutoras**

María Luz Gámiz Pérez  
Rocío Raya Miranda  
*Dpto. Estadística e I.O.*

Programa de  
Doctorado en  
Estadística  
Matemática y  
Aplicada  
Facultad de Ciencias  
Universidad de  
Granada

# Resumen

Esta tesis doctoral se centra en el uso de métodos estadísticos para evaluar la fiabilidad de un sistema a partir del estado de sus componentes en contexto estático y dinámico. En el contexto estático, analiza la fiabilidad para sistemas de moderada y alta dimensión en un instante fijo de tiempo, con función de estructura desconocida. En el contexto dinámico se introduce el factor tiempo para estudiar la evolución temporal del sistema que se modeliza mediante procesos de Markov.

En concreto, se propone una nueva metodología basada en Estadística no paramétrica, que supone una hipótesis más realista puesto que no descansa en premisas paramétricas que pueden llevar a conclusiones erróneas cuando no son correctas. La finalidad de este estudio es proponer estimadores de la función de fiabilidad, detectar regiones de fallo y seguridad, y clasificar las componentes del sistema según el efecto que producen sobre el funcionamiento de éste. Además, describir de un modo adecuado, basándonos en modelos markovianos, la relación de dependencia entre las variables que representan los sucesivos estados del sistema o su entorno a lo largo del tiempo. Para una mayor comprensión de esta nueva metodología se realizan ejemplos ilustrativos a partir de diferentes estudios de simulación así como de datos reales.

La memoria está estructurada en cuatro capítulos que se resumen como sigue.

En el Capítulo 1 se presentan los conceptos básicos de la Teoría de Fiabilidad, necesarios para el desarrollo de este trabajo. Entre ellos destaca la función de estructura, la función de fiabilidad y las medidas de importancia en el sentido de Birnbaum. Además se presenta el proceso de generalización de una formulación binaria para el estado del sistema a una formulación continua, que tendrán los sistemas considerados en los capítulos posteriores. A modo de introducción también se consideran los modelos de Markov cuyo enfoque será fundamental para cumplir con los objetivos marcados

en este trabajo. Finalmente, este capítulo concluye con los objetivos que se realizan a lo largo de esta tesis doctoral.

En el Capítulo 2 se presenta un modelo de regresión logística local isotónico que permite estimar la fiabilidad de sistemas de moderada dimensión a partir de una muestra de sistemas para los que se registra en un momento fijo en el tiempo el estado del sistema así como los estados de sus componentes. En nuestra formulación se tiene en cuenta que puede haber incertidumbre que afecte al comportamiento del sistema. El modelo es sometido a un extenso estudio de simulación para su validación.

En este capítulo se construye un modelo de regresión de respuesta binaria sin asumir ninguna forma particular para la función enlace, de modo que se usan técnicas de estadística no paramétrica, en particular métodos de regresión con funciones núcleo, para el ajuste del modelo. Para estimar el parámetro de ancho de banda involucrado en el modelo se consideran técnicas de validación cruzada. La función de estructura se representa a través de una función *logit*, para la que solamente se asume que es suave en términos de derivabilidad y que tiene que ser no decreciente en todos sus argumentos. Esto último encaja con la condición de sistema coherente que es una hipótesis habitual en el contexto de Fiabilidad de Sistemas en Ingeniería. Se construye un algoritmo que consta de dos etapas. En la primera etapa se isotoniza la variable de respuesta y en la segunda etapa se construye un modelo de regresión logística local que considera como variables de entrada los estados de las componentes, que se asumen como variables aleatorias que varían en un intervalo. En cambio, para el sistema sólo distinguimos un estado de funcionamiento o de fallo. Entre los resultados obtenidos, por un lado, considerando el contexto de fiabilidad estructural, se construye una función de estado-límite que permite dividir el espacio de estados de componentes en regiones de fallo y regiones seguras. A partir de aquí, se clasifican las componentes del sistema de acuerdo con su efecto en el rendimiento del sistema cuando no se tiene ningún conocimiento previo del diseño del sistema. Con esto se construye un ranking de componentes, donde éstas aparecen en orden de importancia lo que proporciona un método eficiente de identificar puntos débiles en la estructura, que resulta decisivo para minimizar el daño causado por un accidente impredecible. Se obtienen las propiedades asintóticas de este estimador y se evalúa el comportamiento a través de un extenso estudio de simulación que muestra que la metodología propuesta ofrece resultados más favorables frente a una propuesta paramétrica.

El trabajo desarrollado en este capítulo ha sido publicado en el artículo: Gámiz, M. L., Navas-Gómez, F., y Raya-Miranda, R. (2021). *A machine learning algorithm for reliability analysis*. IEEE Transactions on Reliability, vol. 70, no. 2, pp. 535–546, doi: 10.1109/TR.2020.3011653. Los resultados obtenidos en este capítulo han sido presentados en el *XXXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa (SEIO)* celebrado en Granada, España.

En el Capítulo 3 se presenta una extensión natural del capítulo anterior basada en un modelo de regresión logística local isotónico capaz de resolver el problema de estimación de la fiabilidad para sistemas complejos, es decir con un gran número de componentes. Aunque, generalmente en este tipo de problemas se asume que las unidades del sistema son estadísticamente independientes, es probable que esta hipótesis no se sostenga cuando el tamaño del sistema es grande, de modo que existan relaciones de dependencia entre determinados bloques de componentes dentro del sistema.

En este capítulo se consideran por tanto, sistemas de alta dimensión que se pueden descomponer en bloques cuyas componentes presentan correlación entre sí. Se construye un algoritmo que consta de tres etapas. En la primera etapa se considera una reducción de la dimensionalidad mediante la técnica de componentes principales y análisis factorial. Se identifican los bloques de unidades del sistema que están altamente correlacionadas dentro del bloque y presentan baja correlación con el resto de bloques. Posteriormente se procede a ajustar un modelo logístico local sobre un espacio de factores y, finalmente, se procede con una etapa de isotonización. Asimismo, se obtienen las propiedades asintóticas del estimador, consistencia y distribución asintótica Normal. Para terminar, se presenta un procedimiento para estimar la importancia de las componentes en el sistema que tiene en cuenta la estructura de correlación entre las componentes del sistema. Se evalúa la viabilidad del algoritmo propuesto mediante un extenso estudio de simulación así como mediante un caso real.

Finalmente en este capítulo, se presentan una serie de técnicas de *Machine Learning* que son aplicadas al caso real. Las técnicas de *Machine Learning* utilizadas son redes neuronales, regresión *Partial Least Square* y *Random Forest* que ofrecen una alternativa viable a los métodos clásicos. Este trabajo aún está en vías de desarrollo.

El trabajo desarrollado en este capítulo ha sido publicado en el artículo: Gámiz, M.L., Navas-Gómez, F., Nozal-Cañadas, R., y Raya-Miranda, R. (2023). *Unsupervised and supervised learning for the reliability analysis of complex systems*. Quality and Reliability Engineering International. <http://dx.doi.org/10.1002/qre.3311>.

En el último capítulo de la tesis introducimos el factor tiempo, de modo que estamos interesados en estudiar la evolución en el tiempo de sistemas de fiabilidad que pueden ser modelizados mediante proceso de Markov. Además supondremos que en este caso no tenemos acceso a toda la información sobre los estados de las componentes y/o sistema, sino que ésta información puede ser registrada solo de modo parcial o incompleto. Los procesos del mundo real generalmente producen resultados o salidas observables que se pueden caracterizar como señales, que pueden ser de naturaleza discreta o continua, estacionarias o no estacionarias y pueden registrarse puras o bien “corrompidas” por otras señales (ruido). Es por esto que en el Capítulo 4 el problema de interés es encontrar una descripción teórica del proceso que emite la señal con el fin de eliminar la distorsión o el ruido e identificar la señal pura, es decir, el verdadero estado del sistema que produce dichas señales. El uso de modelos de Markov ocultos permiten aprender y reproducir mediante simulaciones el fenómeno que produce las señales sin tener que disponer de la fuente. Este aspecto es muy importante especialmente cuando el coste que supone obtener las señales de la fuente real es elevado. Se construye un modelo estocástico a partir de procesos ocultos de Markov para describir la evolución en el tiempo de un sistema y estimar algunas medidas relevantes sobre el rendimiento del sistema, en estas condiciones de observación a través de indicadores o señales indirectas del estado del sistema. En su versión más simple se supone que las observaciones son independientes y su distribución solo está condicionada al verdadero estado del sistema que está oculto. En este capítulo proponemos un modelo más general en el que las observaciones dependen no solo del estado oculto del sistema sino también de observaciones pasadas. En concreto suponemos que tanto la cadena oculta que modeliza el estado del sistema como el proceso observable son ambas cadenas de Markov. Formulamos el modelo en tiempo continuo y en tiempo discreto. Obtenemos por máxima verosimilitud estimadores de los parámetros del modelo en ambos casos (tiempo discreto y tiempo continuo) y estudiamos las propiedades teóricas de dichos estimadores. Por último en este capítulo se presenta una discusión sobre las políticas de mantenimiento del sistema

cuando el sistema se observa de modo indirecto. Se propone un análisis de sensibilidad del modelo a partir de los conceptos de falso positivo y falso negativo. Además se introduce el concepto de *signal-runs* que resulta de gran utilidad para diseñar políticas de mantenimiento en este contexto de modelos HMM. Este enfoque se valida mediante un estudio de simulación y un caso real sobre un sistema que es evaluado a partir de las medidas que proporciona una red de sensores que monitorean el equipo durante un determinado periodo de tiempo.

Los resultados presentados en este capítulo se encuentran recogidos en el trabajo en revisión: Gámiz, M.L., Navas-Gómez, F., Raya-Miranda, R. y Segovia-García, M.C. (2023). *Dynamic reliability and sensitivity analysis based on HMM models with Markovian signal process*. Reliability Engineering and System Safety. En revisión.

# Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han hecho posible el desarrollo de esta Tesis Doctoral, sin los que no hubiera sido posible realizarla.

En primer lugar, me gustaría agradecer a mis directoras de Tesis, Dra. María Luz Gámiz Pérez y Dra. Rocío Raya Miranda, por su incondicional labor como tutoras, su paciencia, su entrega y total dedicación. Por todas las enseñanzas que me han brindado no solamente en el ámbito académico, sino en mi desarrollo personal sin las cuales no hubiese llegado hasta aquí.

Al departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada y a todos mis compañeros, por su fundamental apoyo para lograr este objetivo.

Al Dr. Rafael Nozal Cañadas y a la Dra. María del Carmen Segovia García, por su contribución en distintos capítulos de esta Tesis Doctoral.

A mi familia y a mi pareja por ser el pilar fundamental en mi vida, las personas que me sostienen en los momentos más difíciles. Su absoluto apoyo y amor han conseguido que llegue a cumplir con las metas que tenía propuestas. Estas pocas líneas no pueden expresar el sentimiento de orgullo que tengo hacía ellas.

A mis amigos quienes han servido como vía de escape en los momentos más agobiantes en esta dura tarea.

En definitiva quiero agradecer la suerte que tengo por estar rodeado de estas increíbles personas.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>xi</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Antecedentes históricos . . . . .	1
1.2 La función de estructura . . . . .	4
1.3 La función de fiabilidad . . . . .	6
1.3.1 Tiempo medio hasta el fallo del sistema (MTTF) . . . . .	8
1.4 Medidas de importancia de una componente . . . . .	9
1.5 Del modelo binario al modelo continuo . . . . .	12
1.5.1 Función de estructura para el modelo continuo . . . . .	14
1.5.2 Diagramas de bloques de fiabilidad . . . . .	16
1.5.3 Análisis de regresión monótona para la función de estructura . . . . .	18
1.5.4 Regresión logística monótona (RLM) . . . . .	19
1.5.5 Ranking de componentes bajo el modelo logístico . . . . .	21
1.6 Sistemas markovianos en Fiabilidad . . . . .	22
1.6.1 Algunos conceptos básicos . . . . .	22
1.6.2 Propiedades de la matriz de transición . . . . .	24
1.6.3 Continuidad y derivabilidad de $P(t)$ . . . . .	25
1.6.4 Ecuaciones de estado de un sistema markoviano . . . . .	26
1.6.5 Comportamiento asintótico . . . . .	27
1.7 Objetivos . . . . .	28
<b>2 Un modelo de regresión logística local isotónico para la fiabilidad</b>	<b>33</b>
2.1 Introducción . . . . .	33
2.2 RL monótona para el ajuste de la fiabilidad . . . . .	36
2.2.1 Modelo RL basado en una variable latente . . . . .	36
2.2.2 Modelo RL bajo restricciones de coherencia . . . . .	37

2.3	Ajuste usando RL local isotónica . . . . .	38
2.3.1	Primera etapa: Isotonización . . . . .	39
2.3.2	Segunda etapa: Cuasi-verosimilitud logística local . . . . .	40
2.3.3	Propiedades asintóticas del estimador local . . . . .	42
2.4	Análisis de sensibilidad: Curva ROC . . . . .	44
2.5	Medidas de importancia de las componentes . . . . .	45
2.5.1	Medidas de importancia de Birnbaum . . . . .	45
2.5.2	Medida de Birnbaum modificada . . . . .	47
2.5.3	Estimación local de $I_j^B(R, \mathbf{x})$ . . . . .	47
2.5.4	Inferencia sobre $I_j^B$ . . . . .	48
2.6	Aplicaciones numéricas . . . . .	49
2.6.1	Algoritmo . . . . .	49
2.6.2	Resultados de simulación . . . . .	52
2.7	Análisis de sistemas complejos . . . . .	58
2.7.1	Estudio de escalabilidad . . . . .	59
2.7.2	Conocimiento experto . . . . .	60
2.7.3	Análisis de sistemas sin información a priori . . . . .	62
2.8	Conclusiones . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Análisis de fiabilidad de sistemas complejos</b> . . . . .	<b>65</b>
3.1	Introducción . . . . .	65
3.2	Metodología . . . . .	68
3.2.1	Un procedimiento de reducción de dimensionalidad . . . . .	69
3.2.2	El modelo de fiabilidad transformado . . . . .	70
3.2.3	Regresión logística-local en el espacio de factores . . . . .	71
3.2.4	Isotonización . . . . .	73
3.3	Análisis de fiabilidad de sistemas complejos . . . . .	73
3.3.1	El algoritmo FA-RL-IS . . . . .	74
3.3.2	Medida de importancia de las componentes . . . . .	77
3.3.3	Inferencia sobre el modelo . . . . .	77
3.4	Simulaciones . . . . .	79
3.4.1	Verificación de las propiedades del estimador con muestras finitas . . . . .	79
3.4.2	Algunos problemas de inferencia . . . . .	85
3.4.3	Análisis de escalabilidad . . . . .	88
3.5	Estudio de un caso real: Datos sobre sensores de una bomba de agua . . . . .	89
3.6	Soluciones con <i>Machine Learning</i> (Trabajo en desarrollo) . . . . .	96
3.6.1	Aplicación de los métodos de ML en el caso real . . . . .	98

3.6.2	Resumen resultados . . . . .	101
3.7	Conclusiones . . . . .	103
<b>4</b>	<b>Modelos dinámicos basados en procesos de Markov ocultos (HMM)</b>	<b>109</b>
4.1	Introducción . . . . .	109
4.2	Modelo M1M1-HMM en tiempo discreto . . . . .	112
4.2.1	Descripción del modelo HMM con dependencia de tipo M1M1 . . . . .	112
4.2.2	Estimación por máxima verosimilitud . . . . .	114
4.2.3	Estimación por máxima verosimilitud del DT-M1M1-HMM. Análisis de consistencia y normalidad asintótica . . . . .	115
4.2.4	El algoritmo EM para el DT-M1M1-HMM . . . . .	118
4.3	Modelo M1M1-HMM en tiempo continuo . . . . .	121
4.3.1	Descripción del modelo . . . . .	121
4.3.2	Estimación del CT-M1M1-HMM a partir de una estrategia de discretización . . . . .	123
4.3.3	Un sistema con dos unidades en redundancia activa	124
4.4	Fiabilidad a partir de modelos M1M1-HMM . . . . .	126
4.4.1	Modelo en tiempo discreto . . . . .	126
4.4.2	Modelo en tiempo continuo . . . . .	128
4.5	Mantenimiento . . . . .	129
4.5.1	Análisis de sensibilidad . . . . .	130
4.5.2	<i>Signal-runs</i> . . . . .	131
4.5.3	Estrategia de mantenimiento a partir de rachas de $k$ valores . . . . .	133
4.6	Aplicaciones . . . . .	135
4.6.1	Simulaciones: Un sistema con dos unidades en redundancia activa . . . . .	135
4.6.2	Caso real: Datos de sensores de una bomba de agua	137
4.7	Conclusiones . . . . .	140
	<b>Bibliografía</b>	<b>149</b>



# 1 Preliminares

## 1.1. Antecedentes históricos

En un mundo donde la tecnología avanza a pasos agigantados y donde nuestra vida cotidiana depende en gran medida y, día a día más, del buen funcionamiento de mecanismos que se encargan de realizar determinadas operaciones imprescindibles para nuestro bienestar, resulta fundamental un conocimiento previo de la “fiabilidad” de tales mecanismos. Este hecho hace que paralelo al desarrollo tecnológico se produzca el desarrollo de una ciencia que se encarga de cuantificar los efectos que tendrá en el futuro la incertidumbre en cuanto al éxito del funcionamiento de un mecanismo o, en general, del desarrollo de una operación. Así, se va creando una base teórica sobre fundamentos probabilísticos y estadísticos a la que nos referimos como Teoría de Fiabilidad.

Los inicios del concepto de Fiabilidad se desarrollan después de la II Guerra Mundial. Es al principio de la era industrial cuando se empieza a investigar problemas relacionados con este tema. El concepto de un equipo diseñado teniendo en cuenta un tiempo de funcionamiento dado data de no más de principios del siglo XX.

Originalmente los problemas relacionados con fiabilidad se limitaban a sistemas mecánicos. No fue hasta el desarrollo aéreo cuando la estadística empezó a ganar importancia en la fiabilidad de sistemas mediante la recolección de datos relativos a la razón de fallo de diversas componentes de los aviones, especialmente el motor. En los años 30 estos informes estadísticos se extendieron a los accidentes aéreos y surgían los primeros conceptos probabilísticos concernientes a la seguridad y fiabilidad de equipos, aunque los aspectos cualitativos de las técnicas de fiabilidad y seguridad eran subjetivos, basados en la experiencia de los ingenieros que diseñaban los equipos que consideraban que las partes críticas debían de ser ampliamente reforzadas, es decir, suponían que una cadena no podía ser más

fuerte que su eslabón más débil. Robert Peirce (1926) introdujo la primera teoría con implicaciones matemáticas que inspiró a los científicos de la época a introducir la fiabilidad en diversos campos, por ejemplo, balística, computadoras electrónicas, aeronáutica, energía nuclear, etc., con el fin de conocer la fiabilidad de los mecanismos que utilizaban, y se fue desarrollando la base teórica para utilizar métodos estadísticos en el análisis de riesgo y problemas de fiabilidad.

La fiabilidad como una rama de la Ingeniería, en particular, de la Electrónica, nace en Estados Unidos en los años 50. A la creciente complejidad de sistemas electrónicos, especialmente en equipamiento militar, se debían razones de fallo que llevaban consigo una disponibilidad significativamente reducida de los equipos y un coste elevado. En 1952, el Departamento de Defensa y todas las industrias electrónicas decidieron crear el grupo *Advisory Group on Reliability of Electronic Equipment* (AGREE). Debido a la revolución electrónica y la miniaturización de los circuitos eléctricos, la calidad de los equipos usados para fabricar componentes electrónicas era considerada de suma importancia. También a principios de los años 50, se llevan a cabo estudios con el fin de entender y prevenir errores humanos que contribuyen al fallo del sistema.

En los años 60 el análisis predictivo de fallos, basado en el método del diagrama de fiabilidad en bloques, jugaba un papel importante en las industrias aeronáuticas y aeroespaciales en particular. A principios de los años 60 se introdujo el concepto de árbol de fallo como un método para evaluar la seguridad del sistema y el método de análisis de efectos y modos de fallo. Estos métodos tenían problemas cuando se aplicaban a sistemas complejos, entonces comienzan a desarrollarse otras técnicas como el método de combinación de fallos acumulados. A mediados de los 60 se comienza a integrar un programa sobre fiabilidad y seguridad en las actividades de diseño, desarrollo y manufactura que debía detectar y eliminar problemas de fiabilidad potenciales en las primeras fases del desarrollo. En los años sucesivos, se demostró que todos estos esfuerzos reducían significativamente los costes de reparación y mantenimiento, confirmando así los méritos de tales programas de fiabilidad. Los aspectos probabilísticos se integraron cada vez más en el diseño durante esta década. Las primeras bases de datos se remontan a finales de esta década, que también se caracteriza por un aumento significativo de las publicaciones y libros sobre el tema. Uno de los primeros libros, publicado en 1961 fue *Reliability Theory and Practice*, de Igor Bazovsky, fue el primer estudio exhaustivo sobre teoría

## 1.1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS

---

de fiabilidad y sus aplicaciones. También nació la primera revista sobre la temática, *IEEE Transactions on Reliability* creada por el Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos. En esta década, notables matemáticos como Birnbaum, Barlow, Proschan, Esary y Weibull contribuyeron al desarrollo de la parte matemática de la Teoría de Fiabilidad.

Durante la década de los 70 y los 80 crecieron el número de estudios para evaluar el riesgo en plantas nucleares. Además, en 1983 se publicó una *Guía para el desarrollo de estudios de riesgo probabilístico para plantas nucleares* con el objetivo de proveer a las organizaciones que deseaban llevar a cabo tales análisis unas directrices para proceder de manera adecuada. Por otro lado, se hicieron esfuerzos considerables para llevar a cabo un estudio cuantitativo y cualitativo sobre factores humanos en la evaluación del riesgo, destacando el trabajo de Swain y Guttman (1983) *Handbook of Human Reliability Analysis with Emphasis on Nuclear Power Plant Applications* en el que se presentan métodos para evaluar la probabilidad de un error humano en un proceso. Estas décadas también estuvieron marcadas por introducir la fiabilidad en otras industrias como la petroquímica, automovilística, abastecimiento de aguas, entre otras.

La fiabilidad llega a nuestros días con cambios drásticos en la industria y la sociedad. Han surgido nuevos conceptos de operación que requieren un análisis de fiabilidad. Como consecuencia surge una nueva interpretación de la disciplina de la fiabilidad y el papel del ingeniero de fiabilidad en el desarrollo de productos y sistemas tecnológicos. El desafío que se plantea es cuantificar la fiabilidad utilizando métodos empíricos y fuentes de datos auxiliares, como el conocimiento experto, la memoria corporativa y la simulación y modelización matemática. Entre las nuevas tendencias cabe destacar en la era de las comunicaciones digitales una de las teorías que se desarrolla con más rapidez denominada fiabilidad de redes (*Network Reliability*) que se ocupa de evaluar la capacidad de una red para llevar a cabo una operación deseada. Para una revisión más detallada ver, por ejemplo, Pham (2022).

A continuación introducimos la notación y conceptos básicos para entender el resto del trabajo.

## 1.2. La función de estructura

La Fiabilidad se entiende como la ciencia de predecir, estimar y optimizar la probabilidad de supervivencia, la vida media, o, en general, la distribución del tiempo de vida de un sistema.

Para nuestros propósitos, entenderemos por sistema o estructura una configuración de elementos ordenados destinada a cumplir una determinada misión, es decir, una serie de bloques interconectados de tal forma que desempeñan un conjunto de funciones requeridas. A estos elementos les denominaremos componentes. Nuestro objetivo consiste, entonces, en indicar cómo derivar modelos analíticos sobre el rendimiento de un sistema.

Para describir la fiabilidad de un sistema dado es necesario especificar el proceso de fallo del equipo, describir cómo los bloques están conectados, proveer de sus reglas de operación e identificar los estados en los que el sistema es clasificado como no operativo.

Bajo un enfoque binario, el estado de la  $i$ -ésima componente es una variable aleatoria  $X_i$  de la siguiente manera

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si la componente } i \text{ funciona,} \\ 0, & \text{si la componentes } i \text{ falla,} \end{cases}$$

para  $i = 1, 2, \dots, m$ ; siendo  $m$  el orden del sistema, es decir, el número de componentes que conforman el sistema. El vector formado por las variables estado de todas las componentes,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ , se llama vector estado del sistema y toma valores en  $\{0, 1\}^m$

Por otro lado, podemos definir la variable  $\phi$  para indicar el estado de funcionamiento o fallo del sistema, esto es

$$\phi = \begin{cases} 1, & \text{si el sistema funciona,} \\ 0, & \text{si el sistema falla.} \end{cases}$$

Es evidente que el estado del sistema depende del estado que tengan las componentes que lo forman, por tanto, la variable  $\phi$  es una función que depende del vector estado,  $\phi = \phi(\mathbf{X})$ . Dicha función es la que se conoce como función de estructura del sistema.

## 1.2. LA FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

---

Algunas estructuras básicas se presentan a continuación.

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  el vector estado de un sistema de orden  $m$

**Definición 1.** *Se dice que el sistema está dispuesto en serie si el funcionamiento o fallo del sistema depende del funcionamiento o fallo de todas las componentes que lo forman, es decir, el sistema funciona siempre que las  $m$  componentes que lo forman funcionen. Entonces, se verifica que la función de estructura se puede expresar como sigue*

$$\phi(\mathbf{X}) = \text{mín}\{X_i; i = 1, 2, \dots, m\}.$$

*Cuando el estado de las componentes sea binario la función de estructura de un sistema en serie se puede expresar de la siguiente manera*

$$\phi(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^m X_i.$$

**Definición 2.** *Se dice que el sistema está dispuesto en paralelo si el funcionamiento del sistema depende del funcionamiento de alguna de las componentes que lo conforman, es decir, el sistema funciona siempre que funcione al menos una de las componentes que forman dicho sistema. Entonces, se verifica que la función de estructura se puede expresar de una de las siguientes maneras:*

$$\phi(\mathbf{X}) = \text{máx}\{X_i; i = 1, 2, \dots, m\}.$$

*Cuando el estado de las componentes sea binario la función de estructura de un sistema en paralelo se puede expresar de la siguiente manera*

$$\phi(\mathbf{X}) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - X_i).$$

**Definición 3.** *Se dice que el sistema está dispuesto como  $k$ -out-of- $m$  si el funcionamiento del sistema depende del funcionamiento de  $k$  de las  $m$  componentes que lo forman, es decir, el sistema funciona siempre que funcionen al menos  $k$  componentes de las  $m$  posibles que forman el sistema. Entonces, se verifica que la función de estructura se puede expresar como sigue*

$$\phi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbf{X} \cdot \mathbf{1} < k, \\ 1, & \text{si } \mathbf{X} \cdot \mathbf{1} \geq k, \end{cases}$$

donde  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^m$ . Como casos particulares de estos sistemas tenemos, por un lado, el sistema en serie cuando se trata de un sistema  $m$ -out-of- $m$  y, por otro lado, si el sistema se trata de un 1-out-of- $m$  estamos ante un sistema en paralelo.

Continuaremos nuestro desarrollo introduciendo el concepto de sistema coherente que es de gran relevancia en el contexto que estamos tratando.

**Definición 4.** Se dice que el sistema es coherente si cumple lo siguiente:

- La función de estructura  $\phi$  es no decreciente en cada argumento  $\mathbf{X}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .
- Cada componentes es relevante, es decir, existe al menos un vector  $\mathbf{X}$  tal que  $\phi(1_i, \mathbf{X}) = 1$  y  $\phi(0_i, \mathbf{X}) = 0$ , donde

$$(0_i, \mathbf{X}) = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, 0, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_m),$$

$$(1_i, \mathbf{X}) = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, 1, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_m).$$

- $\phi(\mathbf{0}) = 0$  y  $\phi(\mathbf{1}) = 1$ .

Para sistemas coherentes, cuando  $\mathbf{X} \preceq \mathbf{Y}$ , entonces  $\phi(\mathbf{X}) \leq \phi(\mathbf{Y})$ , donde  $\mathbf{X} \preceq \mathbf{Y}$  significa  $\mathbf{X}_i \leq \mathbf{Y}_i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ , y puede que  $\mathbf{X}_j < \mathbf{Y}_j$  para algún  $j = 1, 2, \dots, m$ .

### 1.3. La función de fiabilidad

A lo largo de esta sección se definirá la expresión de la fiabilidad para algunos modelos concretos. Para el estudio de la fiabilidad es de gran importancia introducir la incertidumbre en el sistema de modo que el estado de cada componente es una variable aleatoria binaria.

Sea la variable  $\mathbf{X}_i$  que se define como el estado de la  $i$ -ésima componente del sistema. Seguimos en un enfoque binario, por tanto, solo puede tomar el valor 0 cuando la componente falla y el valor 1 cuando la componente funciona. Con esta definición se tiene que  $\mathbf{X}_i \sim B(p_i)$

$$\mathbf{X}_i = \begin{cases} 0, & \text{con probabilidad } 1 - p_i, \\ 1, & \text{con probabilidad } p_i, \end{cases}$$

### 1.3. LA FUNCIÓN DE FIABILIDAD

---

donde  $p_i$  es la denominada fiabilidad de la componente  $i$ -ésima.

A partir de aquí definimos la fiabilidad del sistema como una función de las fiabilidades de sus componentes.

**Definición 5.** Consideramos un sistema con vector estado  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  y sea  $\phi(\mathbf{X})$  la función de estructura asociada, definimos la fiabilidad del sistema, y la denotamos por  $R$ , a la probabilidad de que el sistema funcione correctamente, es decir,

$$R = P[\phi(\mathbf{X}) = 1] = E[\phi(\mathbf{X})].$$

Notemos que  $\phi(\mathbf{X})$  también es una variable aleatoria,  $\mathbf{Y} = \phi(\mathbf{X}) \sim B(R)$ .

Si las componentes del sistema son independientes, la fiabilidad del sistema únicamente depende de las fiabilidades de las componentes, entonces

$$R = R(\mathbf{p}),$$

donde  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  es un vector que contiene la fiabilidad de cada una de las componentes del sistema.

Seguiremos con la presentación del cálculo de la fiabilidad para los sistemas básicos que hemos visto anteriormente.

**Ejemplo 1. Sistema en serie.** Aplicando la Definición 5 para un sistema en serie con  $m$  componentes, se obtiene lo siguiente

$$R(\mathbf{p}) = E \left[ \prod_{i=1}^m X_i \right] = \prod_{i=1}^m E[X_i] = \prod_{i=1}^m p_i. \quad (1.1)$$

Con  $R \leq p_i$  ya que  $p_i \leq 1$  para todo  $i$  tenemos que la fiabilidad del sistema en serie siempre es menor que la fiabilidad que tienen las componentes que lo conforman.

**Ejemplo 2. Sistema en paralelo.** Procediendo de manera análoga al Ejemplo 1, pero considerando esta vez un sistema en paralelo obtenemos

$$R(\mathbf{p}) = E \left[ 1 - \prod_{i=1}^m (1 - X_i) \right] = 1 - \prod_{i=1}^m E[1 - X_i] = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - p_i). \quad (1.2)$$

Como  $R \geq p_i$  ya que  $p_i \leq 1$  para todo  $i$  tenemos que la fiabilidad del sistema en paralelo siempre es mayor que la fiabilidad que tienen las componentes que lo conforman.

**Ejemplo 3. Sistema  $k$ -out-of- $m$ .** Para este sistema vamos a considerar que las componentes son idénticas, por tanto, las fiabilidades de las componentes son todas iguales a  $p$ . Entonces la función de fiabilidad de este sistema viene dada por la siguiente expresión

$$R(p_1, p_2, \dots, p_m) = R(\mathbf{p}) = \sum_{r=k}^m \binom{m}{r} p^r (1-p)^{m-r}.$$

Esto indica que a mayor fiabilidad de las componentes de un sistema monótono mayor es la fiabilidad del sistema.

### 1.3.1. Tiempo medio hasta el fallo del sistema (MTTF)

Más específicamente, la fiabilidad es la probabilidad de que un sistema funcione correctamente durante un período de tiempo específico (vida útil del sistema) en las condiciones para las que ha sido diseñado. En otras palabras, la fiabilidad se puede usar como una medida del éxito del sistema para desempeñar su función correctamente.

Sea  $T$  una variable aleatoria que denota el tiempo de fallo del sistema. Entonces, la fiabilidad puede expresarse como una función del tiempo, o sea,  $R(t)$  puede definirse como la probabilidad de que un sistema no falle durante un intervalo de tiempo  $(0, t)$  en condiciones de operación y entorno dados. La función de fiabilidad se puede escribir como

$$R(t) = P(T > t), \quad t \geq 0.$$

También se conoce como la función de supervivencia. En otras palabras, la fiabilidad es la probabilidad de que el sistema esté aún funcionando en el instante  $t$ . La variable aleatoria  $T$  que mide el tiempo hasta el fallo tiene una función de densidad  $f(t)$ , entonces

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(s) ds,$$

o, equivalentemente,

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}.$$

A partir de aquí, podemos definir el tiempo medio de fallo del sistema (MTTF) como

$$\text{MTTF} = \int_0^{\infty} t f(t) dt,$$

y podemos comprobar que

$$\text{MTTF} = \int_0^{\infty} R(t) dt.$$

## 1.4. Medidas de importancia de una componente

A lo largo de esta sección se dispondrán distintas maneras de medir la importancia de una componente, ver Birnbaum (1969). Esto depende fundamentalmente de la ubicación de la componente en el sistema y del valor de la fiabilidad de la componente.

Sea un sistema con  $m$  componentes, sea  $p_i$  la fiabilidad de la componente  $i$ -ésima con  $i = 1, 2, \dots, m$ , y sea  $R(\mathbf{p}) = R(p_1, p_2, \dots, p_m)$  la función de fiabilidad del sistema. Bajo estos supuestos hay medidas que nos aportan información relativa a la importancia de las componentes, es el caso de la medida de importancia de Birnbaum y la medida de capacidad de mejora, ambas son muy útiles si tratamos de localizar a una componente que debería ser mejorada. También es el caso de la medida de importancia crítica, utilizada para encontrar la componente con mayor probabilidad de causar el fallo del sistema.

El estudio lo centraremos en la medida de importancia de Birnbaum ya que tiene una interpretación más sencilla que las otras dos medidas. Birnbaum estudió la importancia que tiene las componentes que contribuyen al funcionamiento del sistema, es por esto que surgen dos nuevos puntos de vista que son:

- **Medida de importancia estructural.** Es la importancia relativa de varias componentes en el caso de que se conozca la función de estructura del sistema y sea desconocida la fiabilidad de las componentes.

**Definición 6.** *Sea un sistema de  $m$  componentes con función de estructura  $\phi(\mathbf{X})$ , se define la importancia estructural de la componente con estado  $X_i$  para el sistema como sigue*

$$I_i^{(B)}(\phi) = I_i^{(B)}(\phi, 1) + I_i^{(B)}(\phi, 0) = 2^{-m} \sum_{\mathbf{X} \in E_m} [\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})],$$

donde  $E_m$  representa el conjunto de estados. En particular, si el sistema es binario  $E_m = \{0, 1\}^m$ .

La expresión dada en la Definición 6 está compuesta de dos sumandos. El primer sumando nos indica la importancia estructural de la componente con estado  $X_i$  para el funcionamiento del sistema, cuya expresión es

$$I_i^{(B)}(\phi, 1) = 2^{-m} \sum_{\mathbf{X} \in E_m} (1 - X_i) [\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})].$$

El segundo sumando nos indica lo mismo pero, en este caso, para el fallo del sistema, su expresión es la siguiente

$$I_i^{(B)}(\phi, 0) = 2^{-m} \sum_{\mathbf{X} \in E_m} X_i [\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})].$$

Continuaremos con el Teorema de Birnbaum, que nos indica que para los sistemas coherentes no hay diferencia entre importancia estructural para el funcionamiento y el fallo del sistema.

**Teorema 1.** *Para cualquier sistema coherente se cumple lo siguiente*

$$I_i^{(B)}(\phi, 1) = I_i^{(B)}(\phi, 0) = \frac{1}{2} I_i^{(B)}(\phi).$$

- **Medida de importancia sobre la fiabilidad.** Se trata de la importancia de las componentes en el caso de que, además de conocer la función de estructura, también se conocen las fiabilidades de las componentes.

**Definición 7.** *Sea un sistema de  $m$  componentes con función de estructura  $\phi(\mathbf{X})$  y sea  $p_i$  la fiabilidad de la componente  $i$ -ésima, con  $i = 1, 2, \dots, m$ . Definimos la importancia de la componente  $i$  sobre la fiabilidad del sistema como sigue*

$$RI_i^{(B)}(\phi, p) = RI_i^{(B)}(\phi, 1, p) + RI_i^{(B)}(\phi, 0, p).$$

Como para el caso de la medida de importancia estructural, esta medida de importancia también está formada por dos sumandos. El primero indica la importancia sobre la fiabilidad de la componente  $X_i$

para el funcionamiento del sistema, la expresión de esta importancia es la siguiente

$$RI_i^{(B)}(\phi, 1, p) = P[\phi(\mathbf{X}) = 1 | X_i = 1] - P[\phi(\mathbf{X}) = 1].$$

Mientras que el segundo sumando nos indica la importancia sobre la fiabilidad de la componente  $x_i$  para el fallo del sistema y su expresión es la siguiente

$$RI_i^{(B)}(\phi, 0, p) = P[\phi(\mathbf{X}) = 0 | X_i = 0] - P[\phi(\mathbf{X}) = 0].$$

La interpretación de la Definición 7 nos indica que a mayor valor de importancia de la fiabilidad de una componente, mayor peso tiene la componente en el sistema. En el capítulo siguiente introducimos una medida que combina las dos anteriores.

Continuaremos con dos resultados que facilitan el cálculo de las medidas de importancia de la fiabilidad. También se darán dos ejemplos del cálculo concreto.

**Corolario 1.** *Para cualquier función de estructura se verifica lo siguiente*

$$Cov[X_i, \phi(\mathbf{X})] = p_i q_i E[\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})].$$

**Corolario 2.** *Las siguientes igualdades son siempre ciertas*

$$RI_i^{(B)}(\phi, 1, p) = q_i E[\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})] = q_i \frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial p_i},$$

$$RI_i^{(B)}(\phi, 0, p) = p_i E[\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})] = p_i \frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial p_i},$$

$$RI_i^{(B)}(\phi, p) = E[\phi(1_i, \mathbf{X}) - \phi(0_i, \mathbf{X})] = \frac{\partial R(\mathbf{p})}{\partial p_i}.$$

Veamos cómo se aplica este último resultado para el caso de sistemas en serie y en paralelo.

**Ejemplo 4. Sistema en serie.** *Supongamos que disponemos de un sistema en serie, por tanto, sabemos que la función de fiabilidad de este tipo*

de sistemas viene dada por la expresión (1.1). Entonces la medida de importancia sobre la fiabilidad viene dada por

$$RI_i^{(B)}(\phi, p) = \frac{\partial R(p)}{\partial p_i} = \prod_{k=1, k \neq i}^m p_k.$$

Observamos que se obtiene que la componente con menor fiabilidad es la que mayor importancia tiene.

**Ejemplo 5. Sistema en paralelo.** Análogo al ejemplo anterior, utilizando esta vez la expresión (1.2), tenemos que la medida de importancia sobre la fiabilidad viene dada como sigue

$$RI_i^{(B)}(\phi, p) = \frac{\partial R(p)}{\partial p_i} = \prod_{k=1, k \neq i}^m (1 - p_k).$$

En este caso se observa que la componente con máxima fiabilidad es la que tiene asociada la mayor importancia.

## 1.5. Del modelo binario al modelo continuo

La mayoría de las investigaciones en modelos de fiabilidad se han centrado tradicionalmente en una formulación binaria del comportamiento de los sistemas, es decir, modelos que permiten solo dos estados posibles de funcionamiento para el sistema y sus componentes: funcionamiento o fallo perfecto. Sin embargo, en la práctica, muchos sistemas pueden experimentar una degradación continua, por lo que pueden mostrar diferentes niveles de rendimiento entre los dos casos extremos que se han mencionado. Un ejemplo típico es un sistema sujeto a desgaste, que se degrada continuamente con el tiempo, por lo que sus propiedades de rendimiento disminuyen progresivamente y, en consecuencia, es necesario considerar una especificación más amplia del espacio de estados para tener una descripción más precisa y adecuada del comportamiento del sistema en cada momento.

Aven (1993) justifica la introducción de modelos multiestado en algunas áreas de aplicación en ingeniería, como los sistemas de producción y transporte de gas/petróleo, donde un enfoque binario daría una representación pobre del mundo real (ver, por ejemplo, Cai *et al.* (2018) y Si *et al.* (2019)).

Este autor investiga el problema de calcular ciertas medidas del rendimiento de un sistema monótono con múltiples estados y presenta estudios comparativos sobre la precisión de sus cálculos mediante un estudio de simulación de Monte Carlo.

Baxter (1984) fue el primero en introducir modelos continuos para la fiabilidad de sistemas y, desde entonces, se han definido y calculado una gran variedad de medidas de rendimiento para que sean válidas para sistemas continuos, binarios y multiestado, ver Brunelle y Kapur (1998). En particular, la función de estructura del sistema, que representa la función de enlace entre el estado del sistema y sus componentes, ha sido un tema de interés en el campo de la ingeniería de fiabilidad. Dado que la evaluación de la fiabilidad puede ser un problema difícil en la práctica, incluso para sistemas relativamente simples, ver Lisnianski y Levitin (2001), parece razonable desarrollar un procedimiento que permita modelizar la relación entre el estado del sistema y sus componentes, ya que esto puede ayudar de manera eficiente en la evaluación de la fiabilidad de sistemas complejos.

En el caso de sistemas continuos, se necesitan métodos de aproximación si la función de estructura no se puede determinar a partir de características cualitativas (por ejemplo, estructuras en serie o en paralelo) o análisis de puntos límite. A tal efecto, se han llevado a cabo varios tratamientos del problema. Levitin y Lisnianski (2001) investiga un enfoque basado en la técnica de la función generadora universal. El método consiste en una aproximación discreta del rendimiento del sistema de estado continuo utilizando un sistema multiestado finito y el propósito es construir límites superiores e inferiores para las medidas de fiabilidad del sistema continuo.

Dada la gran dificultad en la evaluación analítica del rendimiento de un sistema continuo, recientemente se ha introducido un nuevo enfoque basado en métodos empíricos. Brunelle y Kapur (1998) propusieron un procedimiento de interpolación multivariante mediante el cual se construye una función de estructura para un sistema continuo a partir de un diagrama de dispersión que representa los valores del estado del sistema en algunos valores de los estados de las componentes. Bajo esta perspectiva empírica, Gámiz y Martínez-Miranda (2010) proponen una nueva técnica que asume un modelo de regresión para la función de estructura de un sistema continuo.

### 1.5.1. Función de estructura para el modelo continuo

Sea  $Y$  la variable aleatoria que denota el estado del sistema de orden  $m$ , siendo las componentes mutuamente independientes. Como ya hemos dicho, el estado de la componente  $i$  es una variable aleatoria  $X_i$ , para cualquier  $i = 1, 2, \dots, m$ . La función de estructura  $\phi$  capta la relación entre las componentes de un sistema y el propio sistema, de tal manera que el estado del sistema es conocido a partir del estado de sus componentes mediante la función de estructura. Igual que en el caso binario tenemos lo siguiente.

**Definición 8.** *Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  el vector estado de un sistema de orden  $m$ . Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  un valor particular de  $\mathbf{X}$ . La función de estructura del sistema se define como una función  $\phi$  que expresa el estado del sistema en términos del estado de sus componentes, es decir,  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_m) = y$ , donde  $y$  es un valor particular de la variable aleatoria  $Y$ , definida anteriormente.*

Para el caso de sistemas continuos también vamos a definir el concepto de sistema coherente, que implica que se deben imponer algunas restricciones a la función  $\phi$ . En otras palabras, por un lado el sistema es monótono, lo que quiere decir que la mejora de cualquier componente no empeora el estado del sistema. Además, cuando todas las componentes presentan el estado minimal (maximal), el sistema ocupa su estado minimal (maximal). Finalmente, se considera que no hay componentes irrelevantes en el sistema. Estas afirmaciones deben ser expresadas en la siguiente definición, donde por conveniencia y sin pérdida de generalidad, podemos asignar para cada componente así como para el sistema el estado minimal igual a 0 y el estado maximal igual a 1.

**Definición 9.** *Un sistema se dice que es coherente si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- *Monotonía:* Para valores fijados  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$ ,

$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_m) \leq \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, z', x_{i+1}, \dots, x_m),$$

para cualquier  $z \leq z'$ .

- *Propiedad extrema:*

$$\phi(0,0,\dots,0) = 0 \text{ y } \phi(1,1,\dots,1) = 1.$$

- *Componente irrelevante:*

$$\sup\{\phi(\mathbf{x} \mid 1_i) - \phi(\mathbf{x} \mid 0_i); \mathbf{x} \in \mathcal{S}\} > 0,$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m$ . Donde se usa la notación

$$(\mathbf{x} \mid z_i) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_m),$$

para  $z \in [0, 1]$ .

En general, las funciones de estructura se pueden clasificar principalmente en tres grupos en función del estado de las componentes y el sistema.

- Estructuras binarias.

Bajo este enfoque, el comportamiento del sistema se modela asumiendo que el sistema y las componentes solamente tienen dos posibles estados. Esto es, el estado de funcionamiento, suele ser representado por el valor 1, y el estado de fallo representado por 0. Por tanto,  $X_i$  e  $Y$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , se consideran variables aleatorias binarias con valores  $\{0, 1\}$ . En este caso, la función de estructura del sistema es una aplicación  $\phi : \{0, 1\}^m \mapsto \{0, 1\}$ , que es no decreciente en cada argumento.

- Estructuras discretas.

Este tipo de estructuras expanden la dicotomía del enfoque binario para permitir distinguir entre varios niveles de funcionamiento o fallo. En la descripción más general, nos limitamos a considerar que una cantidad finita de números no negativos son suficientes para caracterizar el comportamiento estocástico de las componentes y el sistema. Entonces, para una componente particular asumimos que para cualquier  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $X_i \in \{x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{ik_i}\}$ , mientras que para el sistema se asume que  $Y \in \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ . Para cada componente, los estados están ordenados de tal manera que van desde el peor ( $x_{i0}$ ) al mejor ( $x_{ik_i}$ ) estado de rendimiento. El mismo argumento es válido para el sistema, donde se consideran  $k + 1$  niveles distintos de rendimiento que oscilan entre fallo completo ( $y_0$ ) y funcionamiento perfecto

( $y_k$ ). Entonces  $k_i + 1$  es el número máximo de estados permitidos para la componente  $i$ , mientras que  $k + 1$  es el número máximo de estados que pueden describir el comportamiento del sistema. En este caso, la función de estructura del sistema es una aplicación

$$\phi : \{x_{10}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}\} \times \dots \times \{x_{m0}, x_{m2}, \dots, x_{mk_m}\} \mapsto \{y_0, y_2, \dots, y_k\},$$

donde  $\times$  denota el producto cartesiano. En la literatura, a esta clase de modelos se le conoce como modelos multiestado.

- Estructuras continuas.

En este caso, tomamos variables  $X_1, X_2, \dots, X_m$ , e  $Y$  que toman cualquier valor en el intervalo  $[0, 1]$ . Como se mencionó antes, no hay pérdida de generalidad si asumimos el valor 0 como el peor estado para el sistema así como para cualquier componente (fallo completo), y 1 como el mejor estado (funcionamiento perfecto). Los valores de estado entre 0 y 1 están ordenados de acuerdo al rendimiento, donde el mayor valor implica mejor rendimiento. Si  $\phi$  es la función de estructura, entonces nuevamente  $Y = \phi(X_1, X_2, \dots, X_m)$ , y también se supone que  $Y \in [0, 1]$ . Entonces, la función de estructura de un sistema continuo es una aplicación definida desde el hipercubo unidad  $S = [0, 1]^m$  al intervalo  $[0, 1]$ .

### 1.5.2. Diagramas de bloques de fiabilidad

En muchas situaciones reales podemos asumir que la estructura del sistema se puede representar por medio de un diagrama de bloques. Los sistemas estáticos o dinámicos formados por múltiples componentes que se pueden dividir en distintos bloques surgen en muchas áreas científicas, Ahmed *et al.* (2016) y Xiao *et al.* (2016), por ejemplo. Recientemente, en Catelani *et al.* (2019) los autores introducen un nuevo enfoque para evaluar la predicción de la fiabilidad del sistema en presencia de una arquitectura de redundancia pasiva, para hacerlo desarrollan una herramienta de *software* basada en diagramas de bloques, *RBDesigner*, un proyecto para que los ingenieros puedan lograr una predicción de la fiabilidad de sistemas muy complejos en las primeras etapas del desarrollo del producto.

Un diagrama de bloques de fiabilidad (RBD) es un modelo jerárquico destinado a modelar las relaciones de fallo de sistemas complejos y sus sub-

sistemas (o bloques) y se usa ampliamente para el análisis de fiabilidad, disponibilidad y mantenimiento del sistema, Ahmed *et al.* (2016).

Un RBD no es un diagrama de diseño físico sino un diagrama lógico que ilustra lo que se requiere para que el sistema funcione. El RBD tiene un solo punto de inicio y un solo punto de finalización, y está formado por bloques funcionales conectados por líneas.

En la construcción de un RBD se pueden seguir cualquiera de los patrones básicos de conexiones de componentes en serie o en paralelo. Para sistemas binarios, es decir, cuando solo se consideran dos niveles de rendimiento para describir el estado del sistema y los estados de las componentes, funcionamiento perfecto (1) y fallo (0), en la conexión en serie, todos las componentes deben estar operativas para que el sistema funcione. Por el contrario, en una estructura en paralelo, al menos una de las componentes debe estar funcionando para que el sistema funcione correctamente. En este capítulo, consideramos que el estado de cada componente es una variable aleatoria que varía en el intervalo  $[0, 1]$ , donde, por simplicidad, asumimos que 0 representa el estado de fallo y 1 el estado de funcionamiento completo.

Usando este enfoque, ampliamos la concepción binaria de los RBD de la siguiente manera. Para una estructura con componentes conectadas en serie, la función de estructura  $\phi$  devuelve el valor mínimo de los estados de sus componentes, y para una estructura en paralelo, devuelve el valor máximo de los estados de las componentes.

En muchos casos, los sistemas del mundo real involucran subsistemas o bloques, que a su vez forman una configuración RBD anidada.

Por ejemplo, si un sistema y sus componentes se modelan mediante los RBD serie-paralelo, entonces el sistema completo se puede modelar mediante el uso de configuraciones anidadas de RBD serie-paralelo. Esto convierte a los RBD en una herramienta poderosa que permite construir fácilmente modelos de fiabilidad de muchos sistemas del mundo real y, en particular, estructuras de ingeniería altamente complejas, ver Ahmed *et al.* (2016) y Xiao *et al.* (2016). Algunos ejemplos de RBD de distinto grado de complejidad pueden verse en los capítulos 2 y 3.

### 1.5.3. Análisis de regresión monótona para la función de estructura

Como ya hemos mencionado este modelo fue introducido en Gámiz y Martínez-Miranda (2010), ver también Gámiz *et al.* (2011). En teoría de la fiabilidad, el estado del sistema,  $\mathbf{Y}$ , se expresa como una cierta función del estado de sus componentes,  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m)$ , es decir, la función de estructura,  $\mathbf{Y} = \phi(\mathbf{X})$ . En la literatura habitual esta relación suele considerarse determinista. Sin embargo, y cada vez más por el aumento en la complejidad de los sistemas, sería más apropiado asumir que el comportamiento de todas las componentes del sistema puede no estar bajo control y especificado por el vector  $\mathbf{X}$ . Por tanto, sería conveniente tener en cuenta alguna perturbación aleatoria en la especificación de la función de estructura. Por tanto, para datos observados dados,  $\{(\mathbf{X}_i; \mathbf{Y}_i) \in E_m \times [0, 1]; i = 1, 2, \dots, n\}$ , con  $E_m = [0, 1]^m$ , podemos considerar los datos como generados a partir del modelo  $Y = \phi(\mathbf{X}) + \varepsilon$ , es decir, el estado del sistema es una función de  $\mathbf{X}$ , más un término de error o ruido,  $\varepsilon$ , llamado residuo. El problema entonces es ajustar una superficie  $m$ -dimensional a los datos observados que estime  $\phi(\mathbf{x}) = E[\mathbf{Y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}]$  para cada estado dado  $\mathbf{x}$ . El error se asume con  $E[\varepsilon] = 0$  y varianza  $\sigma^2$ , y  $\mathbf{X}$  y  $\varepsilon$  se asumen que son variables aleatorias independientes.

Una propuesta es usar técnicas de regresión multivariante no paramétrica para estimar la función de estructura,  $\phi(\mathbf{x})$ . El problema de estimación se formula como sigue.

Dado un conjunto de  $n$  observaciones  $\{(\mathbf{X}_i; \mathbf{Y}_i) \in E_m \times [0, 1]; i = 1, 2, \dots, n\}$ , el objetivo es representar la relación estructural entre la variable respuesta  $\mathbf{Y}$  y el vector predictor  $\mathbf{X}$  mediante una función,  $\tilde{\phi}(\mathbf{X})$  que ajusta los datos preservando el orden parcial. Esto es, dados dos vectores con  $\mathbf{X}_{i1} \preceq \mathbf{X}_{i2}$  entonces  $\tilde{\phi}(\mathbf{X}_{i1}) \leq \tilde{\phi}(\mathbf{X}_{i2})$ . El símbolo  $\preceq$  denota el orden parcial habitual definido en  $\mathbf{X}$ , es decir,  $\mathbf{x}_1 \preceq \mathbf{x}_2 \iff x_{1j} \leq x_{2j}$  para todo  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Esta formulación del problema conduce a algunos aspectos muy importantes a tener en cuenta. Por un lado, nos preocupa la regresión monótona en más de una variable explicativa. De modo que, estamos tratando con un problema de minimización bajo restricciones de monotonía inducidas por un conjunto parcialmente ordenado de observaciones. Por otro lado, para obtener más flexibilidad, buscamos una función que se ajuste a nuestro conjunto de datos sin asumir ningún modelo paramétrico. La única

suposición que hacemos aquí es la suavidad de la función objetivo (en el sentido de diferenciabilidad). En resumen, queremos una función multivariante que sea monótona en cada argumento y que modele de manera apropiada la relación entre  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$ . El problema se puede considerar como sigue:

- Primero, obtener un estimador de regresión multivariante no paramétrico,  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ , para el valor esperado de  $\mathbf{Y}$ .
- Después, encontrar la función monótona,  $\tilde{\phi}(\mathbf{x})$ , más cercana a  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ .

#### 1.5.4. Regresión logística monótona (RLM)

Como ya hemos explicado previamente, la función de fiabilidad es la probabilidad de que una determinada estructura funcione adecuadamente bajo determinadas condiciones de servicio durante un periodo de tiempo dado. Para estimar tal probabilidad consideramos el siguiente procedimiento.

Sea  $\mathbf{Y}$  una variable aleatoria observable que toma el valor 1, si el sistema está operativo y 0, en otro caso. Sea  $m$  el tamaño del sistema y sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)^t$  un vector aleatorio  $m$ -dimensional que toma valores en el espacio  $[0, 1]^m$  y que especifica los estados de las componentes del sistema. Como ya hemos explicado consideramos para el sistema una descripción cualitativa de su estado: funcionamiento-fallo, mientras que para las componentes consideramos un rango de valores dentro del intervalo  $[0, 1]$  para describir su estado.

El modelo logístico nos lleva a definir la fiabilidad del sistema a partir del vector estado  $\mathbf{X}$ , de la siguiente manera

$$R(\mathbf{X}) = E[Y | (X_1, X_2, \dots, X_m)] = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_m X_m}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_m X_m}}. \quad (1.3)$$

El objetivo se centra en estimar el vector de parámetros de regresión  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)$  a partir de una muestra dada.

Para un conjunto de datos  $\{(\mathbf{X}_i; \mathbf{Y}_i) \in [0, 1]^m \times [0, 1]; i = 1, 2, \dots, n\}$ , estimamos  $\boldsymbol{\beta}$  por máxima verosimilitud y obtenemos un estimador de la función

de fiabilidad dada en la expresión (1.3). De forma alternativa, podemos expresar el modelo como

$$g(\mathbf{x}) = \ln \frac{R(\mathbf{x})}{1 - R(\mathbf{x})} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m,$$

para  $\mathbf{x}$  una configuración particular del vector estado. El método de máxima verosimilitud conduce al siguiente problema de optimización:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\beta}} \{ \ln L(\boldsymbol{\beta}) \} = \arg \max_{\boldsymbol{\beta}} \left\{ \sum_{i=1}^m Y_i \ln R_i + (1 - Y_i) \ln(1 - R_i) \right\},$$

donde hemos definido  $R_i = R(\mathbf{X}_i) = R(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{im})$ .

Para que la solución sea consistente con las condiciones de coherencia del sistema, necesitamos que la fiabilidad estimada sea una función no decreciente en cada uno de sus argumentos. Esto puede comprobarse a través de la derivada de modo que es necesario que  $\frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_j} > 0$ , para  $j = 1, 2, \dots, m$ . El signo de la  $j$ -ésima derivada parcial viene determinado, por tanto, por el signo del  $j$ -ésimo coeficiente  $\beta_j$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, m$ , puesto que  $\frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \beta_j R(\mathbf{x})(1 - R(\mathbf{x}))$ .

Para que el sistema esté bien definido en términos de coherencia también deben cumplirse las condiciones de extremos propios, lo que significa que  $R(0, 0, \dots, 0) = 0$  y  $R(1, 1, \dots, 1) = 1$ .

Recordemos que el rango de estados de una componente es el intervalo  $[0, 1]$ , de modo que interpretamos como “peor” estado el 0 y el “óptimo” está representado por el valor 1. Con esta representación, las condiciones de extremos propios no son compatibles con el modelo de regresión logística puesto que  $R(0, 0, \dots, 0) = \frac{e^{\beta_0}}{1 + e^{\beta_0}}$  y por otro lado  $R(1, 1, \dots, 1) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m}}$ , y los extremos 0 y 1 sólo se alcanzan en  $-\infty$  y  $+\infty$ , respectivamente. Para satisfacer estas dos condiciones, consideramos una interpretación más flexible de acuerdo con el siguiente razonamiento. Dado que una fiabilidad cercana a 0 indica un sistema fallido, y cuando se aproxima a 1 el sistema está operativo, imponemos las siguientes restricciones a nuestro modelo:

1.  $R(0, 0, \dots, 0) = \frac{e^{\beta_0}}{1 + e^{\beta_0}} < 0.5$ .
2.  $R(1, 1, \dots, 1) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m}} > 0.5$ .

La condición 1 se verifica si y sólo si  $\beta_0 < 0$ , mientras que la condición 2 se cumple si y sólo si  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m > 0$ .

En resumen, en el contexto de estimación por máxima verosimilitud de la función de fiabilidad de un sistema coherente, tenemos que plantear el siguiente problema.

Obtener:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\beta}} \{ \ln L(\boldsymbol{\beta}) \},$$

sujeto a

1.  $\beta_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ),
2.  $\beta_0 < 0$ ,
3.  $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m > 0$ .

donde las dos últimas condiciones son equivalentes a las condiciones de extremos propios de la función de fiabilidad.

### 1.5.5. Ranking de componentes bajo el modelo logístico

Una interpretación interesante del modelo logístico para la función de estructura puede verse en términos de la medida de importancia de Birnbaum modificada que adelantamos aquí, pero definimos formalmente en el siguiente capítulo. Si tenemos un sistema coherente formado por  $m$  componentes y tenemos la función de fiabilidad,  $R(x_1, x_2, \dots, x_m) = P[Y = 1 | (x_1, x_2, \dots, x_m)]$ , denominamos medida de importancia de la componente  $j$ -ésima a

$$I_j^B = \frac{\partial R(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_j}.$$

De esta medida se puede obtener una estimación mediante la estimación de la función de fiabilidad. Llegados a este punto, utilizamos el modelo

de regresión que acabamos de definir para determinar la estimación de la medida de importancia, obteniendo lo siguiente

$$\widehat{I}_j^B = \frac{\partial \widehat{R}(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_j} = \frac{e^{\widehat{\beta}\mathbf{x}}}{(1 + e^{\widehat{\beta}\mathbf{x}})^2} \widehat{\beta}_j.$$

Como la variable  $Y$  tiene distribución  $B(R(x_1, x_2, \dots, x_m))$ , la expresión anterior se puede escribir como sigue

$$\widehat{I}_j^B = \widehat{\beta}_j \widehat{R}(\mathbf{x})(1 - \widehat{R}(\mathbf{x})).$$

Esto nos indica que las componentes del sistema pueden ordenarse según el valor de  $\widehat{\beta}$ , o según el valor de su respectiva *odds-ratio*,  $OR_j = e^{\widehat{\beta}_j}$ .

## 1.6. Sistemas markovianos en Fiabilidad

En esta sección recordamos algunas nociones sobre procesos de Markov que usaremos posteriormente para describir el comportamiento de ciertos sistemas de fiabilidad. Ahora pensamos en el estado del sistema como un concepto dinámico, es decir que puede cambiar con el paso del tiempo, desde estados de funcionamiento óptimo hasta estados de fallo del sistema. Para describir el funcionamiento del sistema a lo largo del tiempo resulta adecuado un proceso estocástico, que en esta sección denotaremos como  $\mathbf{X} = \{X(t); t \geq 0\}$ , cuya estructura vendrá determinada por la forma en que se produzcan las transiciones (cambios) entre los estados del sistema. Supondremos que las razones de transición entre estados son funciones constantes en el tiempo. Esto equivale a suponer que, una vez bien definidos los estados del sistema, el tiempo de permanencia ininterrumpida en cada uno de ellos tiene distribución exponencial por lo tanto  $\mathbf{X}$  es un proceso de Markov.

Describimos únicamente algunos aspectos básicos del proceso con parámetro continuo. Para un estudio detallado de los procesos de Markov remitimos a los textos clásicos, por ejemplo Chung (1960).

### 1.6.1. Algunos conceptos básicos

Para empezar explicamos los elementos básicos de un proceso de Markov.

1. Se denomina espacio de estados  $E$ , al conjunto de todos los posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias. En nuestro trabajo consideramos  $E = \{1, 2, 3, \dots, d\}$ .

2. Distribución exponencial.

Una variable aleatoria  $T$  tiene una distribución exponencial de parámetro  $a$  si su función de densidad es de la forma  $f_T(t) = ae^{-at}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ . Entre otras cosas, esta distribución verifica la denominada propiedad de no memoria, es decir,  $P(T > t + s | T > s) = P(T > t)$ ,  $\forall s, t > 0$ .

3. Propiedad de Markov.

Un proceso estocástico  $\{X(t); t \geq 0\}$  con espacio de estados  $E$ , se dice que verifica la propiedad de Markov si para cada  $t, s \geq 0$ , y para todo  $i, j$  estados

$$\begin{aligned} P\{X(t+s) = j | X(s) = i; X(u) = x(u), 0 \leq u \leq s\} \\ = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\}. \end{aligned}$$

4. Homogeneidad.

Un proceso estocástico  $\{X(t); t \geq 0\}$  con espacio de estados  $E$ , es homogéneo si verifica que

$$P\{X(t+s) = j | X(s) = i \geq s\} = P\{X(t) = j | X(0) = i\}.$$

5. Otros elementos de una CM.

Sea  $\{X(t), t \geq 0\}$  una cadena de Markov con espacio de estados  $E$ .

a) La probabilidad de transición del estado  $i$  al estado  $j$  en el intervalo  $(0, t)$  se define como

$$p_{ij}(t) = P\{X(t) = j | X(0) = i\}, \quad t \geq 0; i, j \in E.$$

b) Denotamos  $\mathbf{P}(t)$  a la matriz de transición en  $[0, t]$  cuyos elementos son  $p_{ij}(t)$ ;  $i, j \in E$ .

c) El vector de probabilidades  $\mathbf{p}(0)$ , de componentes  $p_i(0) = P\{X(0) = i\}$ ,  $i \in E$ , es lo que llamaremos distribución inicial de la cadena.

- d) En general, para cada  $t > 0$  puede definirse el vector de probabilidad  $\mathbf{p}(t)$ , cuyas componentes son  $p_i(t) = P\{X(t) = i\}$ ,  $i \in E$ . Este es el vector de probabilidades de ocupación de la cadena en el tiempo  $t$ .

**Teorema 2.** *Una cadena de Markov (CM) homogénea  $\{X(t); t \geq 0\}$ , está completamente determinada a partir de la distribución inicial y familia de matrices de probabilidades de transición.*

### 1.6.2. Propiedades de la matriz de transición

Sea  $\{X(t); t \geq 0\}$  una CM con espacio de estados  $E = \{1, 2, \dots, r\}$  y matriz de transición  $\mathbf{P}(t)$ , entonces, se verifica que

1.  $p_{ij}(t) \geq 0$ ,  $\forall i, j \in E$  y  $t \geq 0$ ;
2.  $\mathbf{P}(t)\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ,  $\forall t \geq 0$ ; donde  $\mathbf{1}$  es un vector columna de unos de dimensión adecuada.
3. Ecuación de Chapman-Kolmogorov

$$P(t+s) = P(t) \cdot P(s) = P(s) \cdot P(t), \quad \forall t, s \geq 0.$$

4. La matriz de transición es estándar, esto es,  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{P}(t) = \mathbf{I}$ , siendo  $\mathbf{I}$  la matriz identidad.
5. La matriz de transición es una matriz estocástica, es decir:

(i)  $p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$ .

(ii)  $\sum_{j=1}^d p_{ij} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, d$ .

Asociada al proceso en tiempo continuo  $\mathbf{X} = \{X(t); t \geq 0\}$ , es posible definir una cadena en tiempo discreto  $\mathbf{Z} = \{Z_n; n \geq 0\}$  llamada cadena de salto y donde  $Z_n$  representa el estado visitado por la cadena  $X$  tras el  $n$ -ésimo cambio.

### 1.6.3. Continuidad y derivabilidad de $\mathbf{P}(t)$

Como consecuencia deducimos dos importantes resultados.

1.  $\mathbf{P}(t)$  es continua en  $t = 0$ .
2.  $\mathbf{P}(t)$  es continua en todo  $t > 0$ .

Además a partir de  $\mathbf{P}(t)$ , matriz de transición de una CM, tenemos que los siguientes límites existen

- (i)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = q_{ii} = -q_i, \quad i \in E,$
- (ii)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij}, \quad i, j \in E.$

Llamamos generador infinitesimal de la cadena a la matriz  $\mathbf{Q}$  cuyos elementos son  $q_{ij}$ . Expresadas en forma matricial, tenemos se tienen las siguientes propiedades:

1.  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}'(0^+)$ , es decir:

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{I}}{h}.$$

2. El generador es una matriz conservativa, lo que se deduce de la propiedad de la matriz de transición de ser estocástica. Esto significa que para  $h \geq 0$ ,

$$1 - p_{ii}(h) = \sum_{j \neq i} p_{ij}(h),$$

si dividimos por  $h$  y tomamos límites en  $0$ ,

$$q_{ii} = \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Ya hemos visto que la matriz de transición es derivable en  $0$  y que su derivada es  $\mathbf{Q}$ . El teorema siguiente establece la derivabilidad de la matriz de transición en todo punto  $t$ .

**Teorema 3.** Sea  $\mathbf{P}(t)$  la matriz de transición de una CM y  $\mathbf{Q}$  la  $q$ -matriz. Entonces  $\mathbf{P}(t)$  es diferenciable y satisface la ecuación

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}.$$

Nos referimos a las ecuaciones anteriores como ecuaciones adelantadas de Kolmogorov. Se llaman así porque para calcular la probabilidad  $p_{ij}(t+h)$ , se tienen en cuenta todas las posibilidades para el último salto. Si consideramos todas las posibilidades para el primer salto, se obtienen las ecuaciones atrasadas de Kolmogorov, que se expresan como  $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(t)$ .

### 1.6.4. Ecuaciones de estado de un sistema markoviano

Una vez definido el espacio de estados  $E = \{1, 2, \dots, d\}$ , el modelo que describe el estado del sistema en el tiempo  $t$  es  $\{X(t); t \geq 0\}$ , una CM.

Una CM puede representarse gráficamente mediante lo que llamamos diagrama de razones de transición, que consiste en un grafo dirigido en el que cada estado es representado como un nodo. Para cada  $q_{ij} > 0$ , se representa un arco que va del nodo  $i$  al nodo  $j$ .

El conocimiento del funcionamiento del sistema pasa por la obtención de las probabilidades de ocupación de estados  $\mathbf{p}_i(t)$ , para cada  $i \in E$  y cada  $t \geq 0$ . Estas probabilidades vienen dadas según la ecuación

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{P}(t),$$

siendo  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ . Este vector de probabilidades explica el comportamiento transitorio del sistema.

La evolución del sistema se puede describir completamente a través del comportamiento de las funciones de transición en intervalos de amplitud infinitesimal

$$p_{ii}(h) = P\{X(h) = i \mid X(0) = i\} = 1 + q_{ii}(h) + o(h),$$

y

$$p_{ij}(h) = P\{X(h) = j \mid X(0) = i\} = q_{ij}(h) + o(h).$$

Generalizando la expresión anterior en cualquier intervalo  $(t, t + h]$  con  $h > 0$  pequeño, podemos escribir estas ecuaciones en su forma matricial, es decir,  $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(t)$  que ya hemos mencionado antes, y a partir de aquí podemos obtener el valor de  $\mathbf{p}(t)$  para todo  $t$ .

### 1.6.5. Comportamiento asintótico

En muchos casos prácticos, únicamente se está interesado en el estado del sistema a largo plazo, por lo tanto en las probabilidades  $p_j(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Recordamos que, dado que hemos fijado el estado de partida  $i \in E$ , denotamos a las probabilidades  $p_{ij}(t) = p_j(t)$ .

**Teorema 4** (Teorema Ergódico). *Sea  $\mathbf{X}$  una cadena de Markov irreducible sobre un espacio de estados finito,  $E$ . Para cada  $j \in E$ , tenemos*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t I_{\{X_s=j\}} ds = \frac{1}{q_j m_j} = \pi_j,$$

con  $I(\cdot)$  la función indicadora, donde  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j, j \in E)$  es la distribución límite, es decir  $\pi_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} Pr\{X_t = j\}$ .

También  $\boldsymbol{\pi}$  es la única distribución invariante con respecto a  $\mathbf{Q}$ , es decir que verifica que  $\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ . Además,  $m_j$  es el tiempo esperado de retorno al estado  $j$ , para todo  $j \in E$ .

Si consideramos que la cadena es irreducible ( $0 < q_i < \infty$ , para todo  $i, j$ ), por ser finita, todos los estados deben ser recurrentes positivos, esto significa que  $m_i$  es finito, de modo que puede asegurarse la existencia de la distribución estacionaria de la cadena que, por otro lado es independiente del estado inicial y además coincide con la distribución límite. En otras palabras

$$\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t),$$

para todo  $i, j \in E$ .

## 1.7. Objetivos

El objetivo principal que se persigue con la elaboración de esta tesis es la construcción de un modelo estadístico capaz de predecir la fiabilidad de un sistema basándonos en el conocimiento de los estados de las componentes. En un contexto estático, pretendemos analizar la fiabilidad para sistemas de moderada y alta dimensión, con una función de estructura desconocida. Además se pretende introducir en nuestros sistemas el factor tiempo para observarlos desde la perspectiva de sistemas dinámicos con una evolución temporal. Por estas razones el problema de análisis de estructuras de fiabilidad se aborda desde dos perspectivas.

### **Análisis de estructuras de fiabilidad**

Encontrar una representación matemática de la lógica de un sistema es uno de los principales objetivos perseguidos en el análisis de fiabilidad. Dado que la evaluación del rendimiento del sistema puede ser un problema complejo en la práctica, incluso para estructuras simples, parece razonable desarrollar un procedimiento útil que modele la relación entre el estado del sistema y sus componentes para ayudar de manera eficiente en los problemas de clasificación de sistemas complejos. Así, la función de estructura del sistema, es decir, la función de enlace entre el estado del sistema y todas sus componentes, se plantea como un tema importante en el campo de la fiabilidad de sistemas, siendo para nosotros el objetivo final y más importante obtener una expresión de la fiabilidad del sistema, para lo cual contaremos con un conjunto de observaciones del funcionamiento del sistema y/o de sus partes.

En esta tesis resolvemos el problema de estimación de fiabilidad en un contexto de moderada dimensión teniendo en cuenta que puede haber incertidumbre que afecte al comportamiento del sistema. Es decir, no se considera el enfoque clásico en el que la función de estructura es una relación determinística entre los estados de las componentes el estado del sistema. Asumimos que el nivel de rendimiento del sistema se mide con incertidumbre que es de naturaleza aleatoria, y construimos la función de estructura utilizando como variables de entrada los estados de las componentes que se modelizan como variables aleatorias que toman valores un intervalo. Se agrega un término adicional de error aleatorio al modelo.

Usamos técnicas de regresión para evaluar la probabilidad de que el sistema funcione a partir del estado de las componentes. Es decir para calcular la fiabilidad del sistema.

Es importante mencionar también que el concepto binario de sistema en el que solo se consideran dos estados (funcionamiento o fallo) será extendido al caso en el que se distinguen niveles de rendimiento tanto para las unidades como para el sistema. Por un lado, considerando el contexto de la fiabilidad estructural, construiremos una función de estado-límite que nos permita dividir el espacio de estados de las componentes en regiones de fallo y de seguridad. Para ello, proponemos el uso de técnicas de clasificación basadas en regresión logística (RL) no paramétrica. Por otro lado, clasificamos las componentes del sistema según su efecto sobre el rendimiento del sistema cuando no se tiene conocimiento del diseño que éste tiene. Es decir, la única información requerida es el estado actual de cada componente, así como el estado del sistema mismo, pero no se necesita información sobre el diseño del sistema.

En la práctica, y cada vez más, se evidencia una creciente complejidad de los sistemas en Ingeniería. En esta tesis proponemos una nueva estrategia para tratar con sistemas complejos en el contexto de la fiabilidad estructural. Igual que antes, nuestro objetivo principal es construir una función que permita predecir el fallo cuando se trata con un gran número de unidades en el sistema. Con este fin, proponemos el uso de técnicas estadísticas para la reducción de la dimensionalidad. En concreto, se propone la combinación de técnicas de aprendizaje no supervisado para la reducción de la dimensión (análisis factorial), y crear un espacio de características latentes sobre el que se apliquen técnicas de aprendizaje supervisado, en particular técnicas de clasificación basadas en estadística no paramétrica, en particular regresión isotónica y regresión logística local, para obtener una estimación adecuada de la función de fiabilidad del sistema.

Conviene hacer notar que cuando el número de unidades en el sistema es alto, se espera que exista cierta estructura de correlación subyacente en el espacio de estados. Esta no es una cuestión menor y así, en la literatura, la independencia de las componentes es una hipótesis habitual. Trabajar con sistemas con una estructura de dependencia subyacente es otro de los objetivos que nos proponemos en este trabajo

El objetivo principal en esta primera parte del trabajo es predecir la probabilidad de que el sistema proporcione un nivel aceptable de rendimiento

en un intervalo de tiempo dado, así como evaluar el efecto de cada una de las componentes en el comportamiento del sistema. Para ello, proponemos un procedimiento de aprendizaje automático basado en técnicas de reducción de dimensión, regresión isotónica y regresión logística local usando validación cruzada.

### **Análisis dinámico de sistemas**

En el objetivo anterior nos centrábamos en analizar la fiabilidad para sistemas estáticos, es decir, observamos los sistemas en un instante de tiempo concreto. Con este objetivo consideramos una hipótesis más realista, ya que observamos la evolución temporal que tienen dichos sistemas. Para poder alcanzar nuestro objetivo nos ayudamos de los procesos de Markov que nos permiten describir la relación de dependencia entre las variables que representan los sucesivos estados del sistema o su entorno a lo largo del tiempo.

Para la construcción de la función de estructura a partir de un conjunto de datos contamos con observaciones del estado del sistema y del estado de las componentes. En algunas ocasiones nos encontramos que las componentes que forman parte de la estructura interna del sistema no son fácilmente accesibles u observables. Más bien al contrario, en sistemas complejos reales, durante su evolución temporal, se tiene acceso a algunos parámetros o indicadores, por ejemplo, temperatura, presión, etc., a través de un sistema de control, que indican el estado del sistema en cada momento aunque en la mayoría de los casos el estado de las unidades que forman el sistema, así como el propio sistema, no es observable directamente. El verdadero problema es determinar el estado del sistema al conocer los indicadores anteriormente citados. Si el proceso  $X$  describe el estado del sistema (no observable) e  $Y$  es el proceso de indicador observado, tenemos que estimar la ley de  $(X, Y)$  basado en una trayectoria observada del proceso  $Y$ . Esto es un modelo de Markov oculto (HMM). Es decir, representamos la situación a analizar mediante un modelo de Markov oculto (HMM). El objetivo es por tanto, usar los modelos HMM para proporcionar información sobre la componente que causa el fallo del sistema, así como la fiabilidad y otras medidas relacionadas.

El problema más difícil en el contexto de HMM es el problema de aprendizaje que consiste en estimar los parámetros del modelo a partir de los

datos. Nos encontramos en un contexto de datos faltantes, por lo que haremos uso del algoritmo EM. En el contexto del análisis de fiabilidad, los otros dos problemas típicos relacionados con HMM, que plantearemos y trataremos de resolver, se pueden establecer de la siguiente manera:

- Problema de evaluación: Con una estimación de los parámetros del modelo determinar las medidas de rendimiento del sistema más relevantes.
- Problema de decodificación: Encontrar la disposición más probable en la que el sistema falla.

Observando la evolución temporal de los sistemas y con ayuda de los HMMs queremos construir modelos de predicción de fallos del sistema que nos permitan a partir de otros indicadores estimar el nivel de degradación del mismo, definir estimadores de las medidas de rendimiento de un sistema y estudiar sus propiedades teóricas, además de construir algoritmos eficientes que las implementen.



## 2 Un modelo de regresión logística local isotónico para la fiabilidad

### 2.1. Introducción

En este capítulo resolvemos el problema de estimación de fiabilidad en un contexto de moderada dimensión teniendo en cuenta que puede haber incertidumbre que afecte al comportamiento del sistema.

La mayoría de los modelos de fiabilidad se han centrado tradicionalmente en una formulación binaria del comportamiento del sistema, es decir, los modelos permiten solo dos niveles de rendimiento para un sistema y sus componentes: funcionamiento (1) y fallo (0). Se han desarrollado varios procedimientos para generalizar el concepto de estructura coherente binaria a una configuración multiestado, de modo que la función de estructura se ha especificado por medio de un conjunto finito de puntos límite (ver, por ejemplo, Natvig (2011) y referencias dentro). Aven (1993) justifica la introducción de modelos multiestado en algunas áreas de aplicación en ingeniería, como los sistemas de producción y transporte de gas/petróleo, donde un enfoque binario daría una pobre representación del mundo real. Este autor investiga el problema de calcular ciertas medidas del rendimiento de un sistema monótono con múltiples estados y presenta estudios comparativos sobre la precisión de sus cálculos mediante un estudio de simulación de Monte Carlo.

Baxter (1984) introdujo los modelos continuos para la fiabilidad del sistema y, desde entonces, se ha definido y calculado una amplia variedad de medidas de rendimiento para que sean válidas para sistemas binarios, multiestado y continuos (ver por ejemplo Brunelle y Kapur (1998) para obtener un resumen detallado). Para sistemas continuos, si la función de estructura no puede determinarse en función de características cualitativas (por ejemplo, estructuras en serie y/o paralelo) o mediante análisis de

puntos límite, se requieren métodos de aproximación. Para ello, Lisnianski y Levitin (2001) exploran una aproximación basada en la técnica de la función generadora universal. El método consiste en una aproximación discreta del rendimiento del sistema con un conjunto continuo de estados usando un sistema multiestado finito y el propósito es construir límites superior e inferior para las medidas de fiabilidad del sistema continuo. En vista de la gran dificultad inherente a la evaluación analítica del rendimiento (aún más para los sistemas continuos), en las últimas dos décadas han surgido nuevos enfoques esta vez basados en datos. Brunelle y Kapur (1998) propusieron un método de interpolación multivariante mediante el cual, a partir de un conjunto de datos, pueden construir la función de estructura del sistema continuo para representar el valor del estado del sistema dados los estados de sus componentes.

Otro enfoque se presenta en Gámiz y Martínez-Miranda (2010) y Gámiz *et al.* (2011) donde se propone una nueva metodología que incluye técnicas de regresión para aproximar la función de estructura de un sistema basado en información empírica sobre los estados de una muestra de sistemas y los estados de sus componentes. La idea principal es el uso de técnicas de regresión monótona no paramétrica, dado que la naturaleza del problema requiere que la función de regresión sea monótona en cada variable explicativa. El método de ajuste se desarrolla teniendo en cuenta dos pasos, el primero implica el uso de técnicas de regresión local para construir la superficie que mejor se ajuste a los datos, y luego se considera un método numérico de isotonización de la variable respuesta. El algoritmo *pool adjacent violators*, PAV, que se introdujo para resolver el caso unidimensional y, posteriormente, se ha generalizado para problemas de mayor dimensión (ver Burdakov *et al.* (2004)).

En este contexto de uso de datos expertos para construir la función de estructura de un sistema multiestado, el artículo publicado recientemente por Zaitseva y Levashenko (2016) proponen el uso de *fuzzy decision trees*. Estos autores tienen en cuenta que los datos recogidos del mundo real son inciertos. Esta incertidumbre puede deberse a imprecisión o error en las mediciones o, en un sentido más general, a algunos factores aleatorios que son inherentes al comportamiento físico del sistema pero que no están controlados por el analista. En su enfoque, Zaitseva y Levashenko (2016) consideran que la incertidumbre en los datos no es de naturaleza aleatoria y por tanto no puede ser indicada en forma cuantitativa por la

teoría de probabilidad y proponen lógica *fuzzy* para definir la función de estructura.

Motivados por el hecho de que puede haber incertidumbre afectando al comportamiento del sistema, entendiendo por esto, por ejemplo, falta de conocimiento o tiempo limitado que no permita un análisis detallado, Coolen y Coolen-Maturi (2016) proponen la generalización del concepto determinista tradicional de la función de estructura a una formulación más flexible del concepto como una probabilidad predictiva (imprecisa).

En este capítulo, extendemos el trabajo iniciado en Gámiz y Martínez-Miranda (2010) y Gámiz *et al.* (2011) y retomamos la idea de estimar usando técnicas no paramétricas la función de fiabilidad, un logro importante aquí está en la evaluación de las unidades del sistema en términos del efecto que tiene un cambio en su estado sobre la probabilidad de funcionamiento del sistema.

Sin pérdida de generalidad, representamos el estado de la  $i$ -ésima componente del sistema mediante una variable aleatoria  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), siendo  $p$  el orden del sistema<sup>1</sup>, que es directamente observable y que toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ . Dada una configuración particular de las componentes, el estado del sistema  $Y^*$  es una variable aleatoria que se ajusta al siguiente modelo

$$Y^* = \psi(X_1, X_2, \dots, X_p) + U,$$

donde  $\psi$  es una función que generalmente se asume lineal, es decir,

$$\psi(X_1, X_2, \dots, X_p) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_m X_p$$

y  $U$  es una variable aleatoria para la que asumimos que  $E[U] = 0$ . Notamos que la función  $\psi$  no es la función de estructura del sistema como se entiende en la literatura habitual. Este modelo fue propuesto en Gámiz y Martínez-Miranda (2010).

En nuestro caso, no nos interesa cuantificar el nivel de rendimiento del sistema  $Y^*$ . Más bien, nuestro objetivo es predecir la probabilidad de que el sistema proporcione un nivel de rendimiento aceptable y, además evaluar el efecto de cada componente individual en el comportamiento del sistema.

---

<sup>1</sup>En el capítulo anterior el orden del sistema era  $m$  y en este capítulo se denomina  $p$ .

Usamos un procedimiento de aprendizaje automático para construir el modelo capaz de predecir la fiabilidad del sistema en base a un conjunto de datos. El modelo final está determinado por un parámetro de ajuste que se selecciona mediante una técnica de validación. Hemos utilizado validación cruzada *leave-one-out*, donde el algoritmo de aprendizaje se aplica una vez para cada elemento de la muestra, utilizando el resto de la muestra como un conjunto de entrenamiento y utilizando el elemento seleccionado como un conjunto de prueba de un solo elemento.

El resto de este capítulo se organiza como sigue. La Sección 2.2 propone un modelo logístico para estimar la fiabilidad del sistema. En la Sección 2.3, se resuelve el problema utilizando técnicas estadísticas no paramétricas. En la Sección 2.4 se evalúa el modelo mediante análisis de sensibilidad. En la Sección 2.5, se introduce una versión de la medida de importancia de Birnbaum. La Sección 2.6 está dedicada a las aplicaciones numéricas. En la Sección 2.7 se presenta una breve discusión sobre algunos aspectos de la complejidad del sistema. Finalmente, la Sección 2.8 concluye este capítulo.

## 2.2. RL monótona para el ajuste de la fiabilidad

Nuestro primer interés es estimar la probabilidad de que una estructura funcione bajo condiciones de servicio específicas. Para estimar esta probabilidad proponemos el procedimiento que describimos a continuación.

### 2.2.1. Modelo RL basado en una variable latente

Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^t$  el vector formado por los estados de todas las componentes. El nivel de rendimiento del sistema está determinado por la función

$$Y^* = \psi(\mathbf{X}) + U,$$

donde  $U$  es una variable aleatoria con  $E[U] = 0$  y  $\text{Var}(U) = \sigma^2$ . Sea  $y_0$  un valor umbral tal que cuando  $Y^* > y_0$  el sistema esté realizando su función satisfactoriamente; de lo contrario, es decir, cuando  $Y^* \leq y_0$ , el sistema falla y no realice su función. En esta situación, definimos  $Y = 1$  cuando  $Y^* > y_0$ ,

e  $Y = 0$  para  $Y^* \leq y_0$ . Cuando solo se registra información relacionada con la variable  $Y$  mientras que  $Y^*$  no es directamente observable,  $Y^*$  puede interpretarse como una variable latente.

La probabilidad de que una determinada configuración  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  conduzca a un buen funcionamiento del sistema, es decir,  $Y = 1$ , se puede expresar como

$$\begin{aligned} P(Y = 1 \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) &= P(Y^* > y_0 \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) \\ &= P(\psi(\mathbf{X}) + U > y_0 \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) \\ &= P(U > y_0 - \psi(\mathbf{x})) \\ &= 1 - F(y_0 - \psi(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

donde  $F$  es la función de distribución de  $U$ .

Como primera aproximación, tomamos  $\psi$  como una función lineal de las variables de entrada, es decir,

$$\begin{aligned} P(Y = 1 \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}) &= P\left(U_0 > \frac{y_0 - \psi(\mathbf{x})}{\sigma}\right) \\ &= 1 - F_0(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p) \\ &= 1 - F_0(\boldsymbol{\beta} \mathbf{x}^t), \end{aligned}$$

donde denotamos  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ , y  $F_0$  es la función de distribución de la variable aleatoria estandarizada  $U$ , que se supone simétrica alrededor de 0. Quizás la opción más popular es  $F_0(u) = F_{\text{logis}}(u) = \frac{e^u}{1 + e^u}$ , con  $u \in \mathbb{R}$ , la función de distribución logística estándar. Hay que tener en cuenta que tenemos un problema de identificación ya que los parámetros  $y_0$ , y  $\sigma$  no se pueden estimar separadamente del vector  $\boldsymbol{\beta}$ .

### 2.2.2. Modelo RL bajo restricciones de coherencia

Sea  $Y$  la variable aleatoria observable que toma el valor 1, si el sistema está operativo y 0, si el sistema está fuera de servicio;  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^t$  es un vector aleatorio  $p$ -dimensional, donde  $p$  es el tamaño del sistema y  $X_i \in [0, 1]$  para todo  $i = 1, 2, \dots, p$ .

La fiabilidad del sistema es la probabilidad de que el sistema esté operativo. Siguiendo la Sección 1.5.4 consideramos la fiabilidad del sistema como una función del vector estado, es decir,

$$R(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) = E[Y | (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p)] = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p}}. \quad (2.1)$$

El objetivo es estimar el vector de parámetros de regresión  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$  a partir de información muestral sobre el sistema y sus componentes y siguiendo las especificaciones de coherencia explicada en la Sección 1.5.4.

### 2.3. Ajuste usando RL local isotónica

Por lo general, los modelos de regresión paramétricos implican suposiciones funcionales que pueden ser restrictivas en aplicaciones empíricas. En la Sección 2.2, asumimos que la transformación *logit* de  $R$  es una función lineal que depende de  $\mathbf{X}$ . Sin embargo, en muchas ocasiones prácticas, esta relación funcional puede no ser la adecuada dando lugar a decisiones erróneas, siendo entonces más conveniente no especular con ningún modelo paramétrico en particular para ajustar los datos.

Los modelos de regresión no paramétricos permiten una mayor flexibilidad, aunque rara vez se utilizan para la estimación con aplicaciones de respuesta binaria. Uno de los principales problemas de la regresión no paramétrica en dimensiones superiores es la llamada “maldición de la dimensionalidad” que se refiere a la existencia de escasez de datos alrededor de un punto de estimación. Una de las consecuencias de este problema es la alta varianza de los estimadores. En el caso de la regresión de respuesta binaria, la maldición de la dimensionalidad no desaparece; sin embargo, los problemas de varianza mejoran debido a la acotación de la respuesta; ver, por ejemplo, Frolich (2006).

En nuestro contexto de sistemas de fiabilidad, hay una cuestión adicional a tener en cuenta, es decir, el modelo ajustado debe cumplir con las restricciones de orden de coherencia. La regresión no paramétrica produce estimadores con buenas propiedades asintóticas, como consistencia y distribución Normal, que se alcanzan con una tasa de convergencia razonable. Sin embargo, estos estimadores no son necesariamente monótonos.

Para obtener la monotonía del estimador final, proponemos un procedimiento secuencial de dos etapas: primero isotonzar los datos en  $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$  y luego suavizar la respuesta isotónica resultante usando un método de cuasi-verosimilitud local basado en un modelo *logit*.

### 2.3.1. Primera etapa: Isotonización

Existen razones para isotonzar primero y luego suavizar en lugar de proceder en el orden contrario. Se explican en el trabajo de Mukerjee (1988). Por un lado, como explica el autor, con frecuencia la regresión isotónica produce demasiados “puntos planos”, lo que es un argumento en contra de tener una buena estimación de la pendiente de la respuesta, un objetivo que se persigue en este capítulo para estimar las medidas de importancia definidas en la Sección 2.5. Por otro lado, las funciones núcleo habituales utilizadas en el paso de suavizado conducirán a funciones de regresión suave no decrecientes, además, la tasa de convergencia de los estimadores isotónicos se puede mejorar de acuerdo con el estudio en Mukerjee (1988).

Como se explica en Meyer (2010), el problema de isotonzación puede verse como un problema de programación cuadrática. El interés está en ajustar un diagrama de dispersión del modelo  $\mathbf{Y}_i = f(\mathbf{X}_i) + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde no se asume forma paramétrica para  $f$  aunque se sabe que es no decreciente. Definiendo  $\mathbf{z}_i = f(\mathbf{X}_i)$ , el problema es encontrar  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  minimizando  $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$  sujeto a  $\mathbf{A}\mathbf{z} \geq \mathbf{0}$ , para la matriz  $\mathbf{A}$  de dimensión  $(n-1) \times n$  y con elementos  $A(i, i) = -1$ ,  $A(i, i+1) = 1$ , y  $A(i, j) = 0$ , para  $j \neq i, i+1$ . El conjunto  $\mathcal{C} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}$  es un cono poliédrico convexo en  $\mathbb{R}^n$ . Este problema se resolvió primero utilizando el algoritmo *pool adjacent violators*, PAV, propuesto por Brunk (1955). En este capítulo se utiliza el algoritmo *hinge* presentado en Meyer (2010) y Meyer (2013), que es un algoritmo para proyección de conos, simple e intuitivo y más rápido que el algoritmo PAV presentado en Meyer (2013). El resultado es un nuevo conjunto de datos  $\{(\mathbf{X}_i, \tilde{\mathbf{Y}}_i)\}$ , que satisface la restricción de orden requerida:  $\mathbf{X}_i \preceq \mathbf{X}_j \Rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}_i \leq \tilde{\mathbf{Y}}_j$ , para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , donde  $\preceq$  denota el orden parcial habitual en el espacio  $p$ -dimensional  $\mathbb{R}^p$ . Tomamos este conjunto de datos como entrada para el algoritmo de suavizado local.

### 2.3.2. Segunda etapa: Cuasi-verosimilitud logística local

La variable aleatoria  $Y|\mathbf{X} = \mathbf{x}$  sigue una distribución binomial  $B(1, R(\mathbf{x}))$ . Desde un punto de vista no paramétrico, asumimos lo siguiente

$$\log \frac{R(\mathbf{x})}{1 - R(\mathbf{x})} = g(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{x}^t = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  y con  $g$  una función suave en términos de derivabilidad. Podemos usar el desarrollo de Taylor de primer orden de  $g$  alrededor de un punto  $\mathbf{x}_0$ , y escribir

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t g'(\mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|),$$

donde  $o(\cdot)$  es una función que satisface que  $o(h)/h \rightarrow 0$ , cuando  $h \rightarrow 0$ . La aproximación anterior es válida para  $\mathbf{x}$  en un entorno de  $\mathbf{x}_0$  convenientemente elegido, es decir, para todo  $\mathbf{x}$  tal que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < h$ , con  $\|\cdot\|$  la norma Euclídea y  $h > 0$  suficientemente pequeño. Notamos por  $g' = \left( \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_p} \right)^t$  el vector gradiente de  $g$ . Notando  $\beta_0 = g(\mathbf{x}_0)$ , y  $\beta_j = \frac{\partial g(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , la función *logit* se puede escribir como

$$g(\mathbf{x}) \approx \beta_0 + \beta_1(x_1 - x_{01}) + \dots + \beta_p(x_p - x_{0p}). \quad (2.3)$$

Con (2.2) y (2.3), podemos ver el modelo no paramétrico como un modelo log-lineal local, y los parámetros pueden estimarse localmente mediante técnicas de máxima verosimilitud.

En esta segunda etapa, no trabajamos con los datos originales, sino que tenemos el siguiente conjunto de datos  $\{(\mathbf{X}_i, \tilde{Y}_i); i = 1, 2, \dots, n\}$ , donde  $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \dots, \tilde{Y}_n\}$  son las respuestas isotonzadas con el procedimiento del apartado anterior, y que se obtienen promediando convenientemente algunos de los datos originales adyacentes a  $Y_i$ . Entonces,  $\tilde{Y}|\mathbf{X} = \mathbf{x}$  no es una variable aleatoria binaria y no se puede aplicar el método de verosimilitud como se ha indicado anteriormente.

Sin embargo, podemos suponer que  $E[\tilde{Y}|\mathbf{X} = \mathbf{x}] \approx E[Y|\mathbf{X} = \mathbf{x}]$  y  $\text{Var}[\tilde{Y}|\mathbf{X} = \mathbf{x}] = c\text{Var}[Y|\mathbf{X} = \mathbf{x}] = cV(R(\mathbf{x}))$ , siendo  $V$  una función conocida. En nuestro caso  $V(u) = u \cdot (1 - u)$ . Entonces, aunque no podemos especificar una función de verosimilitud completa basada en los datos isotonzados, podemos

especificar la relación entre la media y la varianza y podemos resolver el problema de estimación considerando un enfoque de cuasi-verosimilitud, Fan *et al.* (1995). La función de cuasi-verosimilitud satisface

$$\frac{\partial Q(u, y)}{\partial u} = \frac{y - u}{c \cdot V(u)}.$$

La ecuación *score* anterior satisface propiedades similares a las de una ecuación de verosimilitud que son las siguientes

- 1)  $E \left[ \frac{\partial Q(u, y)}{\partial u} \right] = 0,$
- 2)  $\text{Var} \left[ \frac{\partial Q(u, y)}{\partial u} \right] = \frac{1}{cV(u)},$
- 3)  $-E \left[ \frac{\partial^2 Q(u, y)}{\partial u^2} \right] = \frac{1}{cV(u)}.$

En este contexto, queremos encontrar el valor de  $\boldsymbol{\beta}$  que maximiza la función local de cuasi-verosimilitud

$$l_0(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n w_{h,0}(\mathbf{X}_i) Q \left( R_0(\mathbf{X}_i), \tilde{Y}_i \right),$$

donde  $R_0(\mathbf{X}_i) = \frac{e^{\boldsymbol{\beta}^t(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0)}}{1 + e^{\boldsymbol{\beta}^t(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0)}}$ ;  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m)^t$ ; y  $\{w_{h,0}(\mathbf{X}_i), 1, 2, \dots, n\}$  determina los pesos de las observaciones alrededor del punto de estimación  $\mathbf{x}_0$ . Con esto aseguramos que la aproximación lineal de  $g$  dada en (2.3) se considere solo en un intervalo válido. Definimos

$$w_{h,0}(\mathbf{X}_i) = K_h(\|\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0\|),$$

con  $K_h(\cdot) = (1/h)K(\cdot/h)$ , siendo  $h$  el parámetro ancho de banda que controla la cantidad de suavizado, es decir, determina el tamaño de la ventana alrededor del punto  $\mathbf{x}_0$  donde la aproximación lineal local es válida. Por lo general,  $K$  es una función de densidad con un soporte compacto. La solución de cuasi-verosimilitud para  $\boldsymbol{\beta}$  proviene de resolver las ecuaciones *score*, para  $j = 0, 1, \dots, p$

$$\frac{\partial l_0(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n w_{h,0}(\mathbf{X}_i), \quad \left( \frac{\tilde{Y}_i - R_0(\mathbf{X}_i)}{cV(R_0(\mathbf{X}_i))} \right) \frac{\partial R_0(\mathbf{X}_i)}{\partial \beta_j} = 0.$$

El vector gradiente con elementos dados por  $\frac{\partial l_0}{\partial \beta_j}$ , para  $j = 1, 2, \dots, p$ , se escribe como

$$l'_0(\boldsymbol{\beta}) = (c)^{-1} \sum_{i=1}^n w_{h,0}(\mathbf{X}_i) \left( \tilde{Y}_i - R_0(\mathbf{X}_i) \right) (\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0). \quad (2.4)$$

Resolviendo este problema de ecuaciones no lineales, obtenemos una estimación local de la función  $g$ , es decir, el valor estimado de  $\boldsymbol{\beta}_0$  proporciona una estimación de  $g(\mathbf{x}_0)$  y también obtenemos las estimaciones de las derivadas parciales correspondientes. Las propiedades asintóticas del estimador local se estudian en el siguiente apartado.

### 2.3.3. Propiedades asintóticas del estimador local

Siguiendo argumentos similares a los de Fan *et al.* (1998) para aproximar el sesgo y la varianza del estimador del *logit* y sus derivadas parciales, denotemos por  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  el vector de las estimaciones de  $g$  y sus primeras derivadas parciales evaluadas en  $\mathbf{x}_0$ . Dado que el máximo de  $l_0$  es  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , aplicando de forma conveniente el desarrollo de Taylor, obtenemos

$$0 = l'_0(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = l'_0(\boldsymbol{\beta}) + l''_0(\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}), \quad (2.5)$$

donde denotamos por  $l''_0$  a la matriz Hessiana, cuyo elemento  $(j, k)$  es  $\frac{\partial^2 l_0(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j \partial \beta_k}$ , para  $j, k = 0, 1, \dots, p$ , es decir,

$$l''_0(\boldsymbol{\beta}) = (c)^{-1} \sum_{i=1}^n w_{h,0}(\mathbf{X}_i) R_0(\mathbf{X}_i) (1 - R_0(\mathbf{X}_i)) (\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0) (\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0)^t.$$

Por conveniencia, consideramos ahora la siguiente notación:  $\mathbf{X}$ , es la matriz de diseño con dimensión  $n \times (p + 1)$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} - x_{01} & \cdots & x_{1p} - x_{0p} \\ 1 & x_{21} - x_{01} & \cdots & x_{2p} - x_{0p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} - x_{01} & \cdots & x_{np} - x_{0p} \end{pmatrix},$$

sea  $\tilde{\mathbf{Y}}_0$  el vector de respuestas transformadas

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0 = (\tilde{Y}_1 - R_0(\mathbf{X}_1), \dots, \tilde{Y}_n - R_0(\mathbf{X}_n))^t,$$

la matriz diagonal  $\mathbf{W}_n$  cuyo  $i$ -ésimo elemento es  $\mathbf{W}_n(i, i) = w_{h,0}(\mathbf{X}_i)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ ; y la matriz diagonal  $\mathbf{V}_n$  cuyo  $i$ -ésimo elemento es  $\mathbf{V}_n(i, i) = R_0(\mathbf{X}_i)(1 - R_0(\mathbf{X}_i))$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma matricial como

$$l'_0(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}^t \mathbf{W}_n \tilde{\mathbf{Y}}_0,$$

y,

$$l''_0(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{X}^t \mathbf{W}_n \mathbf{V}_n \mathbf{X}.$$

A partir de (2.5) tenemos

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} = -(l''_0(\boldsymbol{\beta}))^{-1} l'_0(\boldsymbol{\beta}). \quad (2.6)$$

Usando esta expresión podemos aproximar el sesgo y la varianza del estimador.

### Sesgo

De acuerdo con (2.4) y (2.6), para aproximar una expresión para el sesgo tenemos en cuenta lo siguiente:

$$E[\tilde{\mathbf{Y}}_0] = E[\mathbf{Y}_i] - R_0(\mathbf{X}_i) = \frac{e^{g(\mathbf{X}_i)}}{1 + e^{g(\mathbf{X}_i)}} - \frac{e^{\boldsymbol{\beta}^t(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0)}}{1 + e^{\boldsymbol{\beta}^t(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0)}},$$

como  $\|\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0\| < h$ , entonces  $g(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\beta}^t(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0) + o(h)$ . Haciendo el desarrollo de Taylor para la función  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$  obteniendo que

$$E[\mathbf{Y}_i] - R_0(\mathbf{X}_i) = \frac{e^{\boldsymbol{\beta}^t(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0)}}{(1 + e^{\boldsymbol{\beta}^t(\mathbf{X}_i - \mathbf{x}_0)})^2} \cdot o(h) = \mathbf{V}_n(i, i) \cdot o(h),$$

donde  $o(h)/h \rightarrow 0$ , cuando  $h \rightarrow 0$ . Finalmente, se obtiene el sesgo del estimador dado por la siguiente expresión

$$\text{Sesgo}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = -(\mathbf{X}^t \mathbf{W}_n \mathbf{V}_n \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W}_n \mathbf{V}_n \mathbf{1}_n o(h), \quad (2.7)$$

con  $\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1)^t$ .

## Varianza

De nuevo usando la expresión (2.5) se obtiene

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (l''_0(\boldsymbol{\beta}))^{-1} \text{Var}[l'_0(\boldsymbol{\beta})] (l''_0(\boldsymbol{\beta}))^{-1},$$

de donde

$$\text{Var}[l'_0(\boldsymbol{\beta})] = (\mathbf{W}_n \mathbf{X})^t \text{Var}(\mathbf{Y}_0) \mathbf{W}_n \mathbf{X} = \mathbf{X}^t \mathbf{W}_n \mathbf{V}_n \mathbf{W}_n \mathbf{X}.$$

Por tanto, de esta forma se obtiene la varianza del estimador como sigue

$$\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}^t \mathbf{W}_n \mathbf{V}_n \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \mathbf{W}_n \mathbf{V}_n \mathbf{W}_n \mathbf{X} (\mathbf{X}^t \mathbf{W}_n \mathbf{V}_n \mathbf{X})^{-1}. \quad (2.8)$$

## 2.4. Análisis de sensibilidad: Curva ROC

Hasta ahora hemos construido un modelo que estima la probabilidad de que el sistema falle. Queremos predecir el estado del sistema, entonces el siguiente paso es definir una regla de clasificación que aplique las probabilidades obtenidas mediante RL en el conjunto  $\{0, 1\}$ . Con este fin, utilizamos el área bajo la curva ROC (AUC) para ajustar el parámetro del umbral de clasificación. La curva ROC es una evaluación gráfica del rendimiento del modelo como clasificador.

En nuestro contexto, el valor del AUC puede verse como una estimación de la probabilidad de que la fiabilidad estimada de un sistema en estado de fallo no sea mayor que la fiabilidad estimada para un sistema que está operativo. Para aproximar esta probabilidad procedemos de la siguiente manera. Primero, dividimos la muestra en dos conjuntos. Por un lado, tomamos un conjunto formado por los sistemas fallidos ( $\mathbf{Y}_i = 0$ ) y, por otro lado, consideramos otro conjunto formado por los sistemas operativos ( $\mathbf{Y}_j = 1$ ). De esta forma definimos los dos conjuntos de índices  $\mathcal{Y}_0 = \{i : \mathbf{Y}_i = 0\}$  e  $\mathcal{Y}_1 = \{j : \mathbf{Y}_j = 1\}$ , con tamaños  $n_0$  y  $n_1$ , respectivamente ( $n_0 + n_1 = n$ ). El modelo de regresión logística también clasifica los sistemas de la muestra en una de las dos clases 0 y 1 según el valor estimado de la fiabilidad del sistema  $\hat{R}(\mathbf{x})$ . Este clasificador funciona razonablemente bien si la fiabilidad estimada es mayor para cualquier sistema que pertenezca al conjunto  $\mathcal{Y}_1$

que para los sistemas pertenecientes al conjunto  $\mathcal{Y}_0$ . Entonces, definimos el siguiente estadístico

$$\widehat{\text{AUC}} = \frac{1}{n_0 n_1} \sum_{i \in \mathcal{Y}_0} \sum_{j \in \mathcal{Y}_1} I(\widehat{R}(\mathbf{x}_i) < \widehat{R}(\mathbf{x}_j)), \quad (2.9)$$

donde  $I(\cdot)$  es la función característica que toma el valor 1 cuando se cumple la condición y el valor 0, en otro caso.

Es obvio que  $\widehat{\text{AUC}}$  es un estimador de la probabilidad de que un elemento elegido al azar que pertenece al conjunto  $\mathcal{Y}_0$ , sea clasificado por el modelo de regresión con un valor menor que un elemento elegido al azar perteneciente al conjunto  $\mathcal{Y}_1$ .

Por lo tanto, el valor de  $\widehat{\text{AUC}}$  puede usarse como una medida para evaluar el poder discriminatorio de este clasificador (capaz de separar de la mejor manera posible dos clases). Obviamente, un clasificador perfecto conduciría a  $\widehat{\text{AUC}} = 1$ , lo que indica que existe un valor capaz de separar ambas clases sin error. Un clasificador poco informativo que no sea capaz de diferenciar mejor que el azar nos conduciría a  $\widehat{\text{AUC}} = 0.5$ .

## 2.5. Medidas de importancia de las componentes

El objetivo principal de las medidas de importancia en el análisis de fiabilidad es clasificar las componentes del sistema para detectar aquellas componentes que debido a su ubicación u otras características particulares tienen una mayor probabilidad de causar fallos en el sistema. Se han introducido una serie de medidas considerando la importancia que tiene una componente para el comportamiento del sistema según diferentes puntos de vista, Aven y Nockland (2010).

### 2.5.1. Medidas de importancia de Birnbaum

Birnbaum en 1969 fue el primero en introducir el concepto de medidas de importancia. En Birnbaum (1969), Kuo y Zhu (2012) y Amrutkar y Kamalja (2017), las medidas de importancia se clasifican en tres tipos según

el concepto usado para determinarlas. Estas tres clases son: medidas de importancia de estructura, medidas de importancia de fiabilidad y medidas de importancia de tiempo de vida.

Birnbaum (1969) define la importancia de la  $j$ -ésima componente en términos de la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado en el que el funcionamiento de la  $j$ -ésima componente sea crítico, es decir, el sistema funciona si la  $j$ -ésima componente funciona y falla en caso contrario. Esta medida es probablemente el índice de referencia utilizado por los profesionales para evaluar la importancia relativa de las componentes en sistemas complejos y, en este sentido, se utiliza continuamente en aplicaciones prácticas donde se revisa y refina, Si *et al.* (2019). Sea  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_p)$  el vector cuyo  $i$ -ésimo elemento es la fiabilidad de la  $i$ -ésima componente del sistema. En el caso de componentes independientes, esta medida es la derivada parcial de la función de fiabilidad del sistema  $R$ , y en la literatura es común referirse a la medida de Birnbaum por esta derivada, Rausand y Hoyland (2004) y Aven y Jensen (2013). Por lo tanto, la medida de importancia de Birnbaum  $I^B$  está dada por

$$I_j^B(R) = \frac{\partial R(r_1, r_2, \dots, r_p)}{\partial r_j}.$$

Hay que tener en cuenta que esta cantidad mide el cambio en la fiabilidad del sistema en términos de fiabilidad de las componentes. Sin embargo, hay situaciones en las que solo se conoce el diseño de un sistema, pero no hay información disponible sobre las fiabilidades de las componentes. En esta situación, Birnbaum (1969) define lo que se denomina “importancia estructural”. Para un sistema binario,

$$I_j^B(\phi) = \sum_{\mathbf{x}} \{\phi(1_j; \mathbf{x}) - \phi(0_j; \mathbf{x})\}.$$

Este índice cuantifica el efecto que tiene el cambio de estado de una componente sobre el estado del sistema. Como se argumenta en Birnbaum (1969), si no se sabe nada acerca de las fiabilidades de las componentes, y por falta de un conocimiento mayor, se asume que todos los vectores  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^p$  son igualmente probables, luego la importancia de la fiabilidad se reduce a la importancia estructural en el sentido de que

$$I_j^B(R) = E[\phi(1_j; \mathbf{x}) - \phi(0_j; \mathbf{x})] = I_j^B(\phi).$$

### 2.5.2. Medida de Birnbaum modificada

En este capítulo, consideramos la fiabilidad del sistema como una función de los estados de las componentes en lugar de una función de las fiabilidades de las componentes. Entonces, si denotamos  $R(\mathbf{x} \mid x_j = a)$  la probabilidad de que el sistema funcione para una configuración de componentes donde el estado de la  $j$ -ésima componente es  $a$ , podemos interpretar el siguiente índice  $R(\mathbf{x} \mid x_j = 1) - R(\mathbf{x} \mid x_j = 0)$  en el siguiente sentido. Con un enfoque binario,  $a \in \{0, 1\}$ , este índice mide el efecto que tiene el evento “fallo de la  $j$ -ésima componente” sobre la fiabilidad del sistema. En un sistema continuo, el estado de la  $j$ -ésima componente es  $x_j = a \in [0, 1]$ , para  $j = 1, 2, \dots, p$  y  $R(\mathbf{x}) = P(Y = 1 \mid \mathbf{x})$  es la probabilidad de que el sistema esté operativo cuando el vector estado toma el valor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in [0, 1]^p$ . De modo que  $R(\mathbf{x} \mid x_j = a + \Delta) - R(\mathbf{x} \mid x_j = a)$ , cuantifica el cambio en el rendimiento del sistema causado por un incremento de magnitud  $\Delta$  en el estado de la componente  $j$ . Entonces, nos centramos, por un lado, en la fiabilidad del sistema, y los estados de las componentes, por el otro, para definir lo siguiente.

**Definición 10.** *Nueva versión de la medida de Birnbaum  $I_j^B(R, \mathbf{x})$ . Sea  $S$  un sistema coherente de tamaño  $p$  y denotemos  $R(x_1, x_2, \dots, x_p) = P(Y = 1 \mid (x_1, x_2, \dots, x_p))$ . La medida de importancia de Birnbaum local de la  $j$ -ésima componente se define como*

$$I_j^B(R, \mathbf{x}) = \frac{\partial R(\mathbf{x})}{\partial x_j}. \quad (2.10)$$

Esta medida nos permite clasificar las componentes del sistema de acuerdo con la magnitud del efecto que tiene un cambio gradual en el estado de las componentes sobre la fiabilidad del sistema.

### 2.5.3. Estimación local de $I_j^B(R, \mathbf{x})$

Usando el modelo RL que acabamos de definir se estima la fiabilidad del sistema y luego, en consecuencia, se obtiene una estimación de la medida de

importancia anterior dada en (2.10) en consecuencia. Primero, obtenemos a partir de (2.2)

$$\frac{\partial \widehat{R}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{e^{\widehat{\beta}\mathbf{x}}}{(1 + e^{\widehat{\beta}\mathbf{x}})^2} \widehat{\beta}_j = R(\mathbf{x})(1 - R(\mathbf{x}))\widehat{\beta}_j,$$

con  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ . Como  $Y$  es una variable aleatoria con distribución binomial  $B(1, R(\mathbf{x}))$ , podemos escribir

$$\widehat{I}_j^{NB}(R, \mathbf{x}) = \frac{\partial \widehat{R}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \widehat{V}(Y)\widehat{\beta}_j.$$

Usando el modelo RL, para una  $\mathbf{x}$  dada, las componentes del sistema pueden clasificarse de acuerdo con el valor del coeficiente  $\beta$  correspondiente o, de manera equivalente, de acuerdo con el valor de la *odds-ratio*, es decir,  $OR_j = e^{\beta_j}$ . Tengamos en cuenta que en nuestro contexto, OR siempre es mayor que 1.

La relación  $P(Y = 1 | \mathbf{x})/P(Y = 0 | \mathbf{x})$  mide las *odds* (ventaja) de que el sistema esté operativo frente a que falle para una configuración  $\mathbf{x}$ . Cuanto mayor sea el índice *odds*, mejor estarán configuradas las componentes para el comportamiento del sistema. Si nos centramos en la componente  $j$ , cuyo estado está en el nivel  $x_j$  y, controlando el resto de componentes, consideremos ahora que el estado mejora al valor  $x_j + \Delta$ , entonces se espera que el índice *odds* aumente de acuerdo con un factor  $e^{\beta_j \Delta}$ . Por lo tanto, la componente más relevante para la función del sistema, será aquella para la cual una cantidad fija de mejora en su nivel de estado produce el mayor incremento en el índice de fiabilidad. En otras palabras, la componente  $j$  es más relevante para el rendimiento del sistema que la componente  $k$  si  $\beta_j > \beta_k$ , para  $j, k = 1, 2, \dots, p$ .

#### 2.5.4. Inferencia sobre $I_j^B$

La conclusión de la Sección 2.5.3 es que la importancia de una componente con respecto al buen rendimiento del sistema se puede establecer de acuerdo a la magnitud de la correspondiente derivada parcial de la función *logit*. Entonces la clasificación de las componentes se hace simplemente por el orden decreciente de los coeficientes  $\beta_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, p$ . En el caso

paramétrico de (2.1), los coeficientes  $\beta$  son constantes, y entonces la clasificación es válida para todo el rango de  $\mathbf{x}$ . Basado en el modelo logístico, es interesante realizar test de hipótesis para decidir estadísticamente si dos componentes tienen el mismo efecto para el rendimiento del sistema o no. En otras palabras, sea  $j \neq k$ , podemos usar los datos y el modelo RL para decidir entre  $H_0 : \beta_j = \beta_k$ , frente a  $H_1 : \beta_j \neq \beta_k$ . Para resolver este problema se pueden utilizar el test de Wald, la prueba de *score* o el test de razón de verosimilitudes.

En el caso de un modelo *logit* local, ajustamos la curva localmente y luego, las pendientes locales, es decir, los coeficientes  $\beta_j$  para  $j > 1$ , se definen para que dependan del punto de estimación. Así, la importancia de una componente en particular se estima localmente. Queremos probar la hipótesis nula

$$H_0 : \beta_j(\mathbf{x}) = \beta_k(\mathbf{x}),$$

para una configuración particular del sistema  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ . Las estimaciones de verosimilitud local tienen una distribución asintóticamente Normal según Fan y Gijbels (1996). Para resolver el problema, consideramos el siguiente estadístico  $T_{jk} = \mathbf{E}_{jk} \widehat{\beta}$ , con  $\mathbf{E}_{jk}$  un vector de ceros, excepto para las posiciones  $j$  y  $k$ , que son, respectivamente, 1 y -1. Podemos usar los resultados de la Sección 2.3.3 para obtener la distribución del estadístico  $T_{jk}$ . Para  $h \rightarrow 0$ , podemos suponer que el sesgo es lo suficientemente pequeño como para ignorarlo, y la varianza del estadístico es  $\text{Var}(T_{jk}) = \mathbf{E}_{jk} \text{Var}(\widehat{\beta}) \mathbf{E}_{jk}'$ .

## 2.6. Aplicaciones numéricas

En esta sección, resumimos los pasos del algoritmo y presentamos algunos resultados numéricos. Consideremos un conjunto de datos  $\{(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i); i = 1, 2, \dots, n\}$ .

### 2.6.1. Algoritmo

Paso 1: **Isotonización** (Sección 2.3.1). Isotonizar la matriz de datos de acuerdo con el orden parcial de los estados de las componentes. Esta rutina implementa el algoritmo *hinge* como se explica en la Sección 2.3.1.

En particular, usamos parte de las rutinas *coneproj* y *sparsebasis* disponible en Meyer (2012).

Paso 2: **Suavizado** (Sección 2.3.2). Construir un modelo logístico local para ajustar el conjunto de datos isotonizados obtenidos en el Paso 1. Construimos una rutina para llevar a cabo un procedimiento de estimación de cuasi-verosimilitud. Para resolver las ecuaciones de estimación no lineales usamos las funciones implementadas en el paquete de R *nleqslv*. Como resultado, para un nivel dado de rendimiento de las componentes, estimamos la fiabilidad del sistema así como las derivadas parciales en la ubicación dada.

Paso 3: **Selección de modelo**. El modelo final está determinado por un parámetro de ajuste (el parámetro de ancho de banda) que se selecciona mediante una técnica de validación. Usamos la validación cruzada *leave-one-out* (LOOCV). Dejamos que el modelo aprenda de los datos de la siguiente manera: Seleccionamos un elemento de la muestra y aplicamos el algoritmo de estimación considerando el resto de la muestra como el conjunto de entrenamiento, el elemento seleccionado se trata como un conjunto de prueba de una sola unidad. Más espe-

cíficamente, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , definimos  $R_{i,h}^{[i]}(\mathbf{X}_i) = \frac{e^{\hat{\beta}_{h,0}^{[i]}}}{1 + e^{\hat{\beta}_{h,0}^{[i]}}}$ ,

donde  $\hat{\beta}_{h,0}^{[i]} = \hat{g}^{[i]}(\mathbf{X}_i)$  se obtiene como se ha explicado en la Sección 2.3.2 para un ancho de banda  $h$ , donde  $h$  varía en un intervalo definido apropiadamente, y utilizando todos los datos excepto  $\mathbf{X}_i$ . Definimos la puntuación de validación cruzada como

$$Q(h) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \left( \tilde{Y}_i - R_{i,h}^{[i]}(\mathbf{X}_i) \right)^2,$$

así, el ancho de banda óptimo se define como  $h_{CV} = \arg \min_h Q(h)$ .

Paso 4: **Evaluación del modelo y función de estado-límite** (Sección 2.4). Para evaluar el modelo desarrollamos un análisis de sensibilidad basado en la curva ROC. Una medida de la bondad de ajuste viene dada por el área bajo la curva que se aproxima mediante la expresión (2.9).

Para definir la función de estado-límite primero encontramos el valor  $p_0$  de probabilidad ( $p_0 \in (0, 1)$ ) que proporciona el punto de la curva ROC más cercano al punto de coordenadas  $(0, 1)$ , es decir, estimamos

el valor óptimo de la probabilidad de corte para la clasificación correcta. Para un  $\mathbf{x} \in [0, 1]^p$  dado, definimos la función de estado-límite como  $f(\mathbf{x}) = I[\widehat{R}(\mathbf{x}) > p_0]$ .

Paso 5: **Ranking de componentes** (Sección 2.5). Desarrollamos una serie de test de hipótesis destinados a comparar localmente las medidas de importancia de Birnbaum para cada par de componentes de los sistemas. En resumen, para un vector estado dado  $\mathbf{x}_0 \in [0, 1]^p$ , estamos interesados en probar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : I_j^{NB}(\mathbf{x}_0) = I_k^{NB}(\mathbf{x}_0),$$

para todo  $1 < j < k < p$ . Esta pregunta puede formularse de manera equivalente en términos de los coeficientes del modelo, es decir,  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}_0)$ . Se puede desarrollar una prueba de comparación para los parámetros del modelo de acuerdo con la Sección 2.5.4. Obtenemos la distribución del estadístico de prueba a partir de la distribución asintótica Normal detallada en la Sección 2.3.3. Para una ubicación dada, es decir, un nivel particular de valores de estado de las componentes, desarrollamos el estimador del modelo y evaluamos su precisión en términos de sesgo y varianza como se explica en la Sección 2.3.3. La clasificación de las componentes se establece localmente de la siguiente manera.

1. Definir una rejilla de puntos en el intervalo  $[0, 1]$ . Construir una matriz  $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}$  de dimensión  $M \times p$ , cuya  $j$ -ésima columna es el vector  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M)^t$ , y denotar con  $\mathbf{x}_i$  su  $i$ -ésima fila. Se tiene en cuenta que la  $i$ -ésima fila de la matriz  $\mathbf{M}_{\mathbf{X}}$  tiene todos sus elementos iguales, lo que indica que queremos evaluar en una configuración del sistema donde todas las componentes están en el mismo nivel de rendimiento.
2. Para cada  $i = 1, 2, \dots, M$ , se ajusta el modelo *logit* local siguiendo las etapas explicadas anteriormente. Denotemos  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{x}_i)$ , el estimador correspondiente en un vector estado dado  $\mathbf{x}_i = (x_i, x_i, \dots, x_i)$ .
3. Elegir dos componentes en el sistema. En otras palabras, elegir dos elementos diferentes del conjunto  $\{1, 2, \dots, p\}$ . Denotemos  $j$  y  $k$ , con  $j \neq k$ . Se define el estadístico  $T_{jk}(\mathbf{x}_i) = \widehat{\beta}_j(\mathbf{x}_i) - \widehat{\beta}_k(\mathbf{x}_i)$ . El estadístico normalizado  $Z_{jk}(\mathbf{x}_i) = \frac{T_{jk}(\mathbf{x}_i) - \widehat{B}_{jk}(\mathbf{x}_i)}{\widehat{\Sigma}_{jk}(\mathbf{x}_i)}$ ,

donde  $\widehat{B}_{jk}(\mathbf{x}_i)$  es el sesgo y  $\widehat{\Sigma}_{jk}(\mathbf{x}_i)$  es la varianza, sigue una distribución Normal con media  $\beta_j(\mathbf{x}_i) - \beta_k(\mathbf{x}_i)$ , donde consideramos (2.7) y (2.8) para obtener estimaciones de sesgo y varianza.

4. Para cada  $i = 1, 2, \dots, M$ , consideramos el siguiente contraste de hipótesis

$$H_0 : \beta_j(\mathbf{x}_i) = \beta_k(\mathbf{x}_i)$$

$$H_1 : \beta_j(\mathbf{x}_i) > \beta_k(\mathbf{x}_i).$$

5. Bajo la hipótesis nula,  $Z_{jk}(\mathbf{x}_i)$ , sigue una distribución Normal estándar. Se rechaza la hipótesis nula en favor de la alternativa cuando el valor del estadístico sea un valor positivo grande.

## 2.6.2. Resultados de simulación

Se consideran los siguientes ejemplos prácticos.

### Sistema serie-paralelo de tamaño 3

El primer ejemplo considera un sistema de combinación serie-paralelo de  $p = 3$  componentes, como se muestra en la Figura 2.1. La componente 1 está en serie con un subsistema formado por las componentes 2 y 3, que se colocan en paralelo. En estas condiciones, la función de estructura del sistema es  $\psi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = \min(\mathbf{X}_1, \max(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3))$ , donde  $\mathbf{X}_j$ , que se suponen con distribución  $U(0, 1)$ , denota el estado de la componente  $j$ -ésima,  $j = 1, 2, 3$ . Simulamos una muestra de  $n = 100$  sistemas de este tipo, de modo que los datos consisten en una matriz con  $p + 1$  columnas. Las 3 primeras columnas contienen los estados de las componentes procedentes de variables aleatorias independientes con distribución  $U(0, 1)$ . Se simula el estado del sistema considerando una variable latente no observable directamente que se supone  $\mathbf{Y}^* \sim N(\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \sigma)$ , para una configuración particular del vector estado  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ . Fijamos  $\sigma = 0.2$  y finalmente se simula la información sobre el estado del sistema a partir de una distribución Binomial con probabilidad de éxito dada por  $\pi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = P(\mathbf{Y}^* > y_0)$ , con  $y_0 = 0.5$ .

Se realizan  $M = 1000$  repeticiones del experimento. La Tabla 2.1 muestra los resultados del ajuste del modelo considerando dos métodos: enfoque

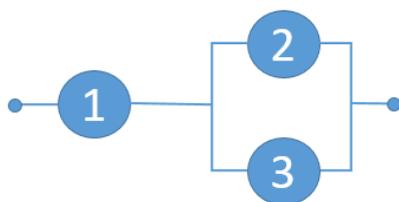


Figura 2.1: Sistema serie-paralelo.

paramétrico y no paramétrico (logístico local). Los valores presentados en la tabla son el promedio a lo largo de las  $M$  muestras de los índices correspondientes en el encabezado de la tabla. En concreto, consideramos lo siguiente:

- Proporción de verdaderos positivos (PVP): Los sistemas clasificados correctamente como operativos (es decir, sensibilidad).
- Proporción de verdaderos negativos (PVN): Los sistemas clasificados correctamente como no operativos (es decir, especificidad).
- Capacidad predictiva del modelo (CPM): Los sistemas clasificados correctamente.
- AUC: Área bajo la curva ROC.

En la Tabla 2.1, vemos que los dos enfoques (modelo no paramétrico local y paramétrico) se ajustan a los datos con una precisión aceptable, ya que el AUC está muy por encima del 80%. El modelo local proporciona predicciones más fiables ya que el CPM aumenta hasta en un 3% para todos los casos ( $Y = 0$  e  $Y = 1$ ).

Modelo	PVP	PVN	CPM	AUC
Ajuste logístico local	0.84	0.83	0.83	0.90
Ajuste paramétrico	0.81	0.79	0.80	0.86

Tabla 2.1: Sistema serie-paralelo.

La Tabla 2.2 proporciona el promedio y la desviación estándar de los coeficientes  $\beta$  estimados obtenidos a lo largo de las  $M = 1000$  muestras.

Denotamos

$$Av_j = (1/M) \sum_{m=1}^M \widehat{\beta}_j^{(m)},$$

y

$$Sd_j = \left\{ (1/M) \sum_{m=1}^M \left( \widehat{\beta}_j^{(m)} - Av_j \right)^2 \right\}^{1/2},$$

para  $j = 1, 2, 3$ , y siendo  $\widehat{\beta}_j^{(m)}$ , el coeficiente estimado para la  $j$ -ésima componente basado en la  $m$ -ésima muestra, para  $j = 1, 2, 3$  y  $m = 1, 2, \dots, M$ .

Los resultados proporcionados por el modelo paramétrico y presentados en la Tabla 2.2 sugieren que la componente 1 tiene un mayor efecto sobre el comportamiento del sistema que las componentes 2 y 3, que son similares.

Componente	1	2	3
$Av_j$	5.809	2.035	2.019
$Sd_j$	1.224	1.035	0.981

Tabla 2.2: Resumen estadístico de  $M = 1000$  muestras simuladas del sistema serie-paralelo.

### Sistema puente

En este caso, consideramos la estructura representada en la Figura 2.2. El tamaño del sistema es  $p = 5$ . La función de estructura del sistema se representa mediante la siguiente función

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_5) &= \\ &= \max(\min(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_4), \min(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_5), \min(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5), \min(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4)), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{X}_j$  denota el estado de la  $j$ -ésima componente,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ . Simulamos una muestra de  $n = 100$  de tales sistemas, de manera que los datos consisten en una matriz con  $p + 1 = 6$  columnas. Las 5 primeras columnas contienen los estados de las componentes como el valor de variables aleatorias independientes con distribución  $U(0, 1)$ . El estado del sistema se simula considerando una variable latente que no se observa directamente y

se supone que es  $\tilde{Y} \sim N(0.5, 0.2)$ . Finalmente, lo que observamos a nivel de sistema es el valor de una distribución Binomial similar al caso anterior.

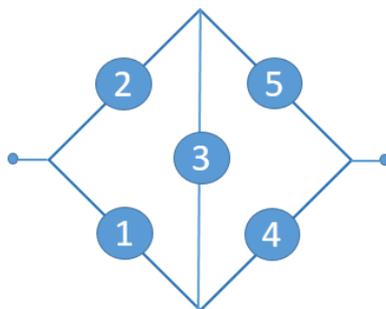


Figura 2.2: Sistema puente.

Se simularon un total de  $M = 1000$  muestras. La Tabla 2.3 contiene los resultados del ajuste del modelo considerando ambos métodos: enfoque paramétrico y logístico local. Los valores presentados en la tabla son el promedio a lo largo de las  $M$  muestras de los índices que se indican en la primera fila de la tabla.

En este caso, notamos que los resultados del ajuste paramétrico no son tan buenos como en el modelo anterior. Si bien la medida de la bondad de ajuste dada por el índice AUC es aceptable, la capacidad de predicción disminuye para todos los casos ( $Y = 0$  e  $Y = 1$ ) al 75%. El enfoque local también proporciona resultados ligeramente peores en comparación con el ejemplo anterior, sin embargo, se obtiene un buen poder de predicción en este caso.

Modelo	PVP	PVN	CPM	AUC
Ajuste logístico local	0.83	0.83	0.83	0.89
Ajuste paramétrico	0.75	0.75	0.75	0.80

Tabla 2.3: Sistema puente.

Al igual que en el ejemplo anterior, la Tabla 2.4 proporciona el promedio y la desviación estándar de la estimación de los coeficientes  $\beta$  obtenidos a lo largo de las  $M = 1000$  muestras. Denotamos  $Av_j$  y  $Sd_j$ , y  $\hat{\beta}_j^{(m)}$ , similar

al ejemplo anterior, para la  $j$ -ésima componente basado en la  $m$ -ésima muestra, para  $j = 1, 2, \dots, 5$  y  $m = 1, 2, \dots, M$ .

Los resultados proporcionados por el modelo paramétrico y presentados en la Tabla 2.4 sugieren que la componente 3 es la menos importante para el rendimiento del sistema, según el criterio de Birnbaum. Usando el modelo *logit* local, hemos considerado el siguiente contraste de hipótesis en particular:

$$\begin{aligned} H_0 &: I_1^{NB}(\mathbf{x}) = I_3^{NB}(\mathbf{x}) \\ H_1 &: I_1^{NB}(\mathbf{x}) \neq I_3^{NB}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

para  $\mathbf{x} = x \cdot \mathbf{1}$  y tomando diferentes niveles de estados de las componentes, concretamente tomamos  $x = 0.6; 0.7; 0.8; 0.9$ . Para cada muestra, hemos calculado el valor del estadístico de contraste  $Z_{1,3}$  como se explicó anteriormente. Hemos calculado el  $p$ -valor asociado para cada caso, por lo que tenemos un total de  $M = 1000$   $p$ -valores. Esta cantidad se calcula como  $p\text{-valor}^{(m)} = 2P(Z > |Z_{1,3}|)$ , para  $m = 1, 2, \dots, M$ . Rechazamos la hipótesis nula cuando el  $p$ -valor<sup>(m)</sup>  $< 0.05$ . La Figura 2.3 presenta los diagramas de caja obtenidos a partir de los  $p$ -valores en comparación con el valor umbral 0.05. La conclusión es que no podemos rechazar que las componentes 1 y 3 son igualmente importantes para el rendimiento del sistema al nivel de significación de  $\alpha = 0.05$ .

Componente	1	2	3	4	5
$Av_j$	2.361	2.333	0.829	2.347	2.331
$Sd_j$	0.931	0.926	0.744	0.961	0.915

Tabla 2.4: Resumen estadístico de  $M = 1000$  muestras simuladas del sistema puente.

### Sistema de Koren-Krisna (2007)

El tercer caso de estudio se centra en un ejemplo tomado del libro Koren y Krisna (2007) donde se usa para ilustrar un algoritmo para calcular la fiabilidad de sistemas Koren-Krisna (2007). El sistema se representa en la Figura 2.4 donde se consideran seis módulos y cinco nodos. Las componentes del sistema son los seis módulos denominados  $A, B, C, D, E, F$ , ya que

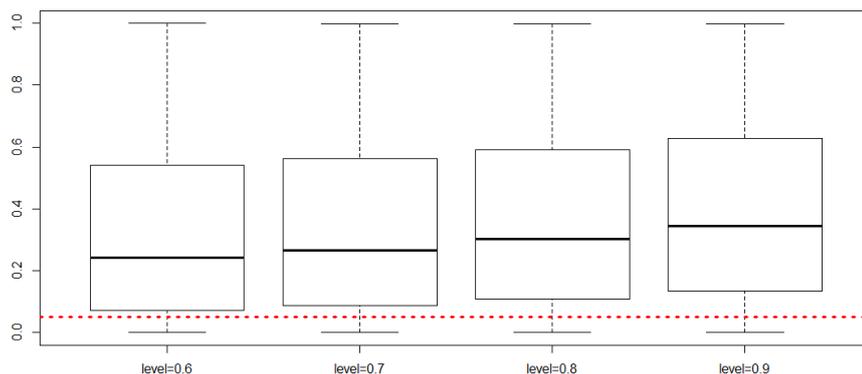


Figura 2.3: Test de comparación para las componentes 1 y 3 en 4 niveles de rendimiento en el sistema puente.

se considera que el sistema funciona correctamente una vez establecida la comunicación del nodo 1 al nodo 5.

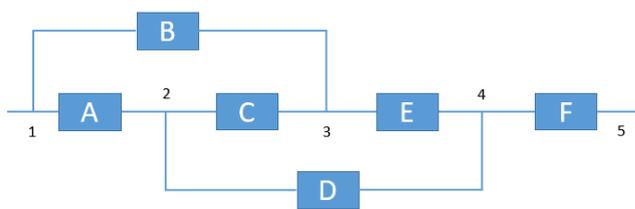


Figura 2.4: Sistema Koren-Krisna (2007).

Consideremos que todas las componentes del sistema están funcionando al mismo nivel. En otras palabras, nos centramos en un vector estado con todos sus elementos iguales a  $x_0 \in [0, 1]$ . Denotamos  $\mathbf{x}_0$  como el vector  $p$ -dimensional cuyos elementos son todos iguales a  $x_0$ , con  $p = 6$ . Centrándonos, por ejemplo, en las componentes  $C$  y  $F$ , planteamos el siguiente contraste de hipótesis:

$$H_0 : I_F^{NB}(\mathbf{x}_0) = I_C^{NB}(\mathbf{x}_0)$$

$$H_1 : I_F^{NB}(\mathbf{x}_0) > I_C^{NB}(\mathbf{x}_0).$$

La Tabla 2.5 presenta un resumen de los valores obtenidos para el estadístico de contraste  $Z_{FC}$  a lo largo de un estudio de simulación basado en un total de  $M = 1000$  repeticiones del experimento. El tamaño de muestra considerado ha sido  $n = 200$ .

A un nivel de significación de  $\alpha = 0.05$ , tenemos que comparar el valor del estadístico  $Z_{FC}$  con el valor límite 1.65. La Figura 2.5 ofrece un resumen gráfico del estudio de simulación donde se destaca con la línea roja el límite inferior de la región de aceptación. Observe que hay más evidencia en favor de la hipótesis alternativa a medida que aumenta el nivel de rendimiento. Esto significa que la unidad  $F$  es menos relevante para el comportamiento del sistema en los niveles más bajos.

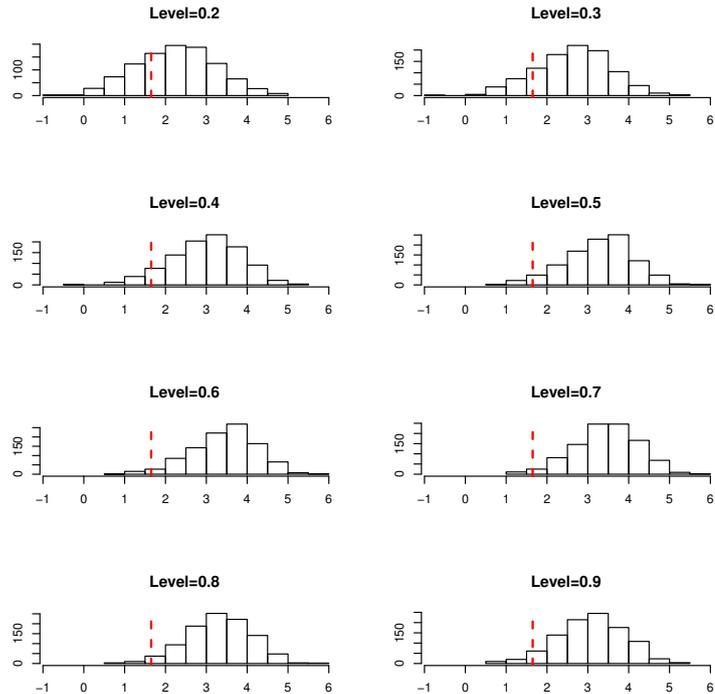


Figura 2.5: Test de comparación para la importancia de las componentes en un sistema Koren-Krisna (2007).

## 2.7. Análisis de sistemas complejos

La complejidad de los sistemas que se encuentran en el mundo real suele ser mayor que los modelos considerados en este capítulo, en el sentido de la cantidad de componentes individuales en el sistema. En esta sección, primero presentamos un breve estudio de simulación para evaluar la viabilidad del algoritmo cuando aumenta la complejidad del sistema. A

$x_0$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
mín	-0.135	0.521	0.989	1.048	0.953	0.594	0.223
$P_{25}$	2.426	2.766	2.938	2.932	2.817	2.554	2.238
Mediana	3.056	3.347	3.526	3.485	3.338	3.106	2.817
Media	2.987	3.273	3.437	3.448	3.316	3.079	2.794
$P_{75}$	3.583	3.843	3.977	3.983	3.869	3.629	3.386
máx	5.484	5.688	5.756	5.696	5.598	5.470	5.289

Tabla 2.5: Estadísticos para el contraste de comparación de componentes en el sistema Koren-Krisna (2007).

continuación, esbozamos algunas propuestas a abordar en el caso de sistemas de alta dimensión. En el próximo capítulo presentaremos un desarrollo completo de este enfoque.

### 2.7.1. Estudio de escalabilidad

Para comprobar la escalabilidad del algoritmo con la creciente complejidad del sistema, hemos realizado un breve estudio de simulación destinado a medir el coste computacional involucrado a medida que aumenta el número de unidades en el sistema. Hemos considerado dos escenarios. En el primer caso (Caso 1), comenzamos con el sistema serie-paralelo de la Figura 2.1, es decir,  $p = 3$ . Nos centramos en el problema de prueba  $H_0 : I_1^{NB}(0.5) = I_2^{NB}(0.5)$  frente a  $H_1 : I_1^{NB}(0.5) \neq I_2^{NB}(0.5)$ . Para extraer muestras tomamos las mismas especificaciones que en el Ejemplo 1 (Sección 2.6.2), excepto para  $n = 250$  y  $M = 100$ . Para cada muestra, obtenemos el  $p$ -valor asociado a la hipótesis alternativa. Estamos interesados en particular, en el tiempo de ejecución de una sola repetición. Obtenemos un total de  $M = 100$  tiempos de ejecución y consideramos el valor medio. Luego, construimos un sistema agregando una sola unidad dispuesta en serie con el sistema serie-paralelo de tres componentes. Consideramos el sistema aumentado,  $p = 4$ , y formulamos exactamente el mismo problema de prueba. Realizamos el mismo estudio de simulación y obtenemos el mismo resumen de tiempos de ejecución. Luego, se agrega un nuevo componente en serie al conjunto para construir un sistema de tamaño  $p = 5$ . Repetimos todo el proceso hasta  $p = 10$ . Los tiempos de ejecución promedio se muestran en

$p$	3	4	5	6	7	8	9	10
Caso 1	0.67	0.87	1.09	1.35	1.65	2.10	2.41	2.82
Caso 2	1.21	1.56	2.00	2.34	2.63	2.86	3.26	3.67

Tabla 2.6: Complejidad computacional del algoritmo medida como el tiempo de ejecución promedio a lo largo de  $R = 100$  ejecuciones del algoritmo en función del tamaño del sistema,  $p$ .

la Tabla 2.6. Las simulaciones se han realizado utilizando un procesador *Intel Core i5-8600 K* de 3,60 GHz.

En el segundo escenario (Caso 2), también partimos del sistema serie-paralelo pero las unidades adicionales se ubican secuencialmente (una cada vez) en paralelo con el subsistema formado por las unidades 2 y 3 de la Figura 2.1. El problema de prueba es igual que en el Caso 1. Los resultados obtenidos utilizando un procesador *Intel Core i3-6006 U* de 2,00 GHz se presentan en la segunda fila de la Tabla 2.6. Se puede notar que el tiempo de ejecución aumenta linealmente con el número de componentes adicionales.

### 2.7.2. Conocimiento experto

En algunos casos, se dispone de cierta información sobre el diseño del sistema que permite considerar el enfoque de descomposición modular. Se puede formar una nueva estructura coherente donde los subsistemas del sistema original se tratan como unidades individuales y la fiabilidad del sistema se calcula como una función (a estimar) del rendimiento de estas macrounidades, que a su vez se derivan de la información sobre las unidades que los forman tratando cada módulo por separado. Más específicamente, con la única información sobre el estado de un módulo ( $0 =$  fallo y  $1 =$  operativo) así como el estado de las unidades dentro del módulo, usamos el algoritmo propuesto para estimar (por separado) la fiabilidad de cada módulo a partir de el estado de sus componentes. Para cada  $j = 1, 2, \dots, J$ , obtenemos  $\hat{R}_j(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp_j})$ , con  $p_1 + p_2 + \dots + p_J = p$ , el tamaño total del sistema, donde  $J$  es el número total de subsistemas considerados.

Ahora, podemos escribir la fiabilidad del sistema como la siguiente función

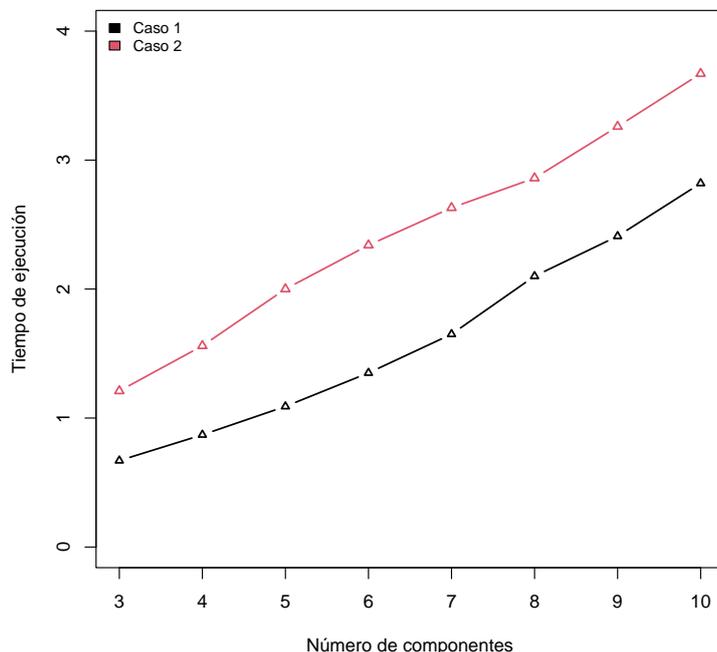


Figura 2.6: Tiempo de ejecución promedio a lo largo de  $R = 100$  ejecuciones del algoritmo en función del tamaño del sistema,  $p$ .

$R_S(R_1, R_2, \dots, R_J)$ , y usar el algoritmo anterior para estimarla. Entonces, para la componente  $i$  en el subsistema  $j$ , la medida de importancia como se define en la Sección 2.5.2 se calcula como  $I_j^{NB} = \frac{\partial R_S}{\partial R_j} \frac{\partial R_j}{\partial x_i}$ .

Para ilustrar, en esta sección, analizamos la estructura del sistema de información en la cabina de un avión. Este caso particular se presentó por primera vez en un informe de la NASA (Pettit y Turnbull (2001)). La instrumentación de la cabina de mando es la instrumentación mínima requerida para las aeronaves de aviación general que vuelan bajo las reglas de vuelo por instrumentos según se define en *Federal Aviation*. En Lenz y Rhodin (2011) se muestra un diagrama de bloques de fiabilidad del sistema de información de la cabina. Para simplificar, representamos en la Figura 2.7 en un diagrama sin etiquetar específicamente las diferentes unidades en el sistema. Para una descripción detallada del sistema, ver Pettit y Turnbull (2001) o Lenz y Rhodin (2011). La única información requerida

es el estado de las unidades individuales, el estado del sistema (0 ó 1) y el estado de cada macrocomponente (0 ó 1).

El número de unidades en el sistema es  $p = 30$ , pero el algoritmo se ejecuta para  $J = 4$  subsistemas diferentes de tamaños iguales a  $p_1 = 4$ ,  $p_2 = 9$ ,  $p_3 = 6$  y  $p_4 = 10$ . Es necesario mencionar que la configuración de los módulos no es necesaria en el procedimiento propuesto.

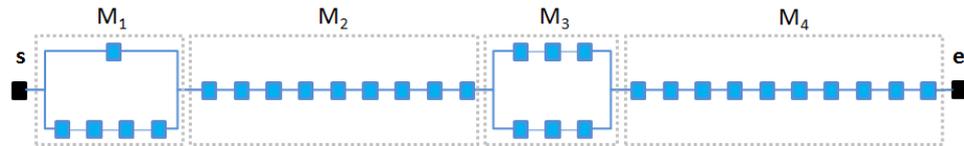


Figura 2.7: Sistema de la cabina de un avión.

### 2.7.3. Análisis de sistemas sin información a priori

A no ser que la experiencia demuestre un diseño razonable del sistema que permita utilizar algunas estrategias para ajustar el modelo como se explicó en la sección anterior, el problema de estimación tiene demasiadas características a tratar haciendo que las dimensiones del espacio crezcan exponencialmente y los datos disponibles se vuelven escasos. Esta es la llamada “maldición de la dimensionalidad”.

En este caso asumimos que la única información son los estados de las componentes y del propio sistema. Aunque podemos considerar nuestro modelo usando todas las funciones disponibles, el resultado tendrá tantos términos que será difícil de interpretar, por no hablar del elevado coste computacional que supondrá. Se sugiere la reducción de dimensiones, pero puede ser difícil decidir qué características realmente vale la pena mantener en nuestro modelo. Necesitamos un algoritmo capaz de transformar el gran conjunto de entradas en un conjunto ideal de entradas. Cuando el número de características es muy alto, es razonable suponer que pueden surgir algunas correlaciones entre las unidades del sistema en la estructura latente subyacente a los datos y entonces el análisis de componentes principales (ACP) o las redes neuronales (NN) podrían ser unas herramientas adecuadas. Como resultado de ACP, nuevas entradas independientes (o

variables) de una combinación lineal de variables existentes. A groso modo, estamos agregando un nuevo paso al algoritmo, que en principio podría quedar como sigue:

1. Isotonizar la respuesta para obtener  $\{\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{Y}}\}_{n \times p}$ .
2. Aplicar ACP para transformar los datos de entrada a un conjunto reducido  $\{\mathbf{Z}, \tilde{\mathbf{Y}}\}_{n \times p'}$ , con  $p' < p$ , y  $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{\Gamma}$ , siendo  $\mathbf{\Gamma}$  la matriz de coeficientes del ACP de dimensión  $p \times p'$ .
3. Ajustar un modelo logístico local basado en el conjunto de datos reducido. Sea  $\hat{\mathbf{b}}$  el vector estimado de coeficientes.

La estimación de la fiabilidad del sistema, en un  $\mathbf{x}_0$  dado, será

$$\hat{R}_0 = \frac{e^{\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}}{1 + e^{\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}},$$

con  $\tilde{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}\mathbf{\Gamma}$ . Esta propuesta se discute en detalle en el siguiente capítulo.

## 2.8. Conclusiones

En este capítulo, construimos un modelo estadístico capaz de predecir la fiabilidad del sistema basado en un conjunto de datos. Usamos un algoritmo de aprendizaje supervisado basado en regresión logística local y el modelo es entrenado considerando técnicas de validación cruzada. El método está totalmente basado en datos y no se basa en ninguna hipótesis paramétrica. Una vez validado el modelo mediante análisis de sensibilidad, se define una función que clasifica el sistema en una de dos categorías, operativo o fallo, con base en el conocimiento de los estados de las componentes. Además, presentamos una test estadístico para decidir el orden de importancia de las componentes en términos del efecto que cada una tiene sobre el rendimiento del sistema. Más concretamente, la importancia de una componente se define por el efecto que tiene un incremento en el estado de la componente sobre la fiabilidad del sistema. Para ilustrar el método, llevamos a cabo un extenso estudio de simulación. Consideramos tres escenarios prácticos con diferente complejidad, es decir, el tamaño de los sistemas considerados es, respectivamente,  $p = 3, 5$  y  $6$ . Para la estructura más simple (la combinación serie-paralelo con  $p = 3$ ), el enfoque

paramétrico da una solución satisfactoria, como puede deducirse de los resultados proporcionados por el análisis de sensibilidad. Sin embargo, para el sistema puente ( $p = 5$ ), vemos que la precisión proporcionada por el modelo paramétrico no es tan buena y, por lo tanto, las conclusiones del modelo pueden ser engañosas.

Como se indica en Kuo y Zhu (2012), las medidas de importancia se utilizaron en varios campos para evaluar la importancia relativa de varios objetos, como las componentes de un sistema. Los valores absolutos de las medidas de importancia pueden no ser tan importantes como sus clasificaciones relativas. En su libro, los autores destacaron la necesidad de abordar la clasificación de importancia de las componentes para proporcionar la forma más eficiente de identificar las debilidades en la estructura del sistema, lo que puede ser decisivo para minimizar el daño causado por un accidente impredecible. Esto puede ser de primordial importancia para algunas industrias como las plantas de energía, las plantas nucleares o la industria de la energía eléctrica, ver por ejemplo Espiritu *et al.* (2007), Kuo y Zhu (2012) o Bisanovic *et al.* (2016).

El contenido de este capítulo se ha publicado en el artículo: Gámiz, M. L., Navas-Gómez, F., y Raya-Miranda, R. (2021). *A machine learning algorithm for reliability analysis*. IEEE Transactions on Reliability, vol. 70, no. 2, pp. 535–546, doi: 10.1109/TR.2020.3011653.

## 3 Análisis de fiabilidad de sistemas complejos

### 3.1. Introducción

En este capítulo proponemos una nueva estrategia para tratar con sistemas más complejos en el contexto de la fiabilidad estructural.

En el mantenimiento de sistemas industriales, para la toma de decisiones, es clave dominar técnicas para clasificar el estado de rendimiento de una máquina en base a conjuntos de datos con un gran número de características. Recientemente, varias técnicas basadas en *soft computing* han demostrado ser una alternativa útil para analizar la fiabilidad de sistemas complejos. En Hong *et al.* (2018), los autores discuten y revisan los desafíos en *big data* y el análisis de fiabilidad tradicional. Los autores se centran en cómo usar datos con estructuras complicadas para hacer análisis de fiabilidad. Como se indica en Hong *et al.* (2018), la creciente motivación para automatizar las tareas de clasificación conduce a una reducción del coste y del tiempo en todo el proceso de mantenimiento del sistema que podría derivarse de una clasificación errónea. Esa es una de las razones del uso de algoritmos de inteligencia artificial en la ingeniería de fiabilidad. En Soltanali *et al.* (2021) se utilizan técnicas estadísticas y de *soft computing* para proporcionar una estructura comparativa para predecir la fiabilidad operativa en la industria de fabricación automotriz. Sin embargo, a pesar de la gran contribución que las técnicas de *soft computing* han aportado a la solución de este problema, todavía quedan algunos inconvenientes por superar.

El análisis de fiabilidad centrado en estructuras de alta dimensión sigue siendo un gran desafío ya que la mayoría de los métodos existentes sufren el problema conocido como maldición de la dimensionalidad. En este sentido, Li y Wang (2020) presentan un novedoso método conocido como *high-dimensional data abstraction* (HDDA) para la reducción de dimensión

en el análisis de fiabilidad. En su enfoque, los autores primero formulan una estrategia para reducir la dimensionalidad del espacio de entrada creando así un espacio latente de baja dimensión que le permita obtener la función de estado-límite para la predicción de fallos. Centrados en la fiabilidad estructural en Yi y Du (2022), se presenta una nueva estrategia de reducción de dimensión basada en *first-order reliability method* (FORM) para que las contribuciones de las variables de entrada sin importancia también se ajusten después de la reducción de dimensión.

Siguiendo estas ideas, en Gámiz *et al.* (2021) se propone un algoritmo de aprendizaje supervisado que, entre otras cosas, permite cuantificar el efecto que tiene cada componente sobre el rendimiento del sistema. Para ello, se generaliza el concepto de la medida de importancia de Birnbaum y se define una nueva versión de esta medida que se utiliza para clasificar las componentes del sistema en términos de importancia. Cabe destacar que la nueva medida tiene un carácter local en el sentido de que ofrece información sobre el impacto que un cambio unitario en el estado de las componentes produce en el rendimiento del sistema para diferentes regiones del dominio del vector estado.

Las medidas de importancia de las componentes son relevantes para mejorar el diseño del sistema y desarrollar políticas de reemplazo óptimas, ver, por ejemplo Si *et al.* (2019) y Miziula y Navarro (2019). Una de las medidas más populares es la medida de importancia de Birnbaum. De hecho, como se señaló en Si *et al.* (2019) las medidas de importancia tradicionales pueden no ser efectivas para evaluar la contribución de una componente individual si su valor de fiabilidad se mide de tal manera que no cae en el rango completo entre 0 y 1. Además, si las componentes son (estocásticamente) independientes, la medida de importancia de Birnbaum se puede definir utilizando varias expresiones equivalentes. Sin embargo, resulta que en el caso de componentes dependientes, diferentes definiciones de medidas de importancia de Birnbaum conducen a diferentes conceptos. En Miziula y Navarro (2019) los autores extienden esta medida al caso de componentes dependientes en función de la contribución de la componente a la fiabilidad del sistema.

El aprendizaje automático ha demostrado recientemente un enorme potencial para el análisis de fiabilidad en la industria Alsina *et al.* (2018) y Afshari *et al.* (2022). La regresión logística es un modelo probabilístico considerado como uno de los algoritmos de aprendizaje supervisado más

exitosos para problemas de clasificación Chen *et al.* (2011) y Phillips *et al.* (2015). En Phillips *et al.* (2015) se destaca que los enfoques típicos de “caja negra”, como las técnicas de *artificial neural networks* (ANN) y *support vector machines* (SVM) pueden ser difíciles de interpretar. Por el contrario, los autores en Phillips *et al.* (2015) argumentan que la regresión logística ofrece una fácil interpretación, proporcionando información sobre el proceso de clasificación y evitando posibles errores de clasificación. Phillips *et al.* (2015) proporciona un estudio comparativo basado en el rendimiento predictivo de la regresión logística, ANN y SVM a través de un conjunto de datos reales de motores en camiones mineros, y muestran que la regresión logística supera los enfoques ANN y SVM en la predicción del estado real de los motores. Los árboles de decisión y su generalización como *Random Forest* (RF) también son intuitivos y fáciles de implementar, pero no ofrecen una probabilidad para la salida como resultado directo. Sin embargo, cuando se necesitan más inferencia sobre el modelo, como es el caso de este capítulo, la regresión logística es el método recomendado, Hong *et al.* (2018) y Lins *et al.* (2011).

Este capítulo supone una extensión natural del capítulo anterior para sistemas más complejos y de gran dimensión en el sentido del número de componentes, que se ordenan en bloques (posiblemente) de unidades correladas. De nuevo, nuestro objetivo principal es construir un modelo estadístico capaz de predecir la fiabilidad del sistema a partir de los datos. La contribución de este capítulo se puede resumir de la siguiente manera.

1. El modelo de fiabilidad se construye bajo el supuesto de dependencia de las componentes. Este es un tema muy importante. Sin embargo, por simplicidad, una suposición muy común es que las unidades del sistema son estadísticamente independientes, lo que podría no ser realista en muchas situaciones prácticas. En este capítulo, asumimos que las unidades en el sistema sí pueden estar relacionadas.
2. Proponemos un nuevo algoritmo en el que introducimos un paso previo para reducir la dimensión y crear un espacio de estados conveniente (espacio latente) para el ajuste del modelo. Una de las dificultades que aquí se presentan tiene que ver con la selección del modelo, es decir, nuestro procedimiento requiere seleccionar el número adecuado de características del espacio latente. Discutimos este punto en las simulaciones.

3. A diferencia del procedimiento explicado en el capítulo anterior, el modelo logístico local se construye sobre un espacio latente en lugar de tomar los estados de las componentes del sistema como variables de entrada. Una de las consecuencias es que el problema de la coherencia del sistema debe abordarse de manera muy diferente.
4. Se obtienen las propiedades asintóticas del nuevo estimador, en particular se presenta una expresión de la varianza del estimador.
5. La medida de importancia obtenida en este capítulo tiene en cuenta la estructura de correlación entre las componentes del sistema.

La estructura del capítulo es la siguiente. En la Sección 3.2, se presentan las diferentes herramientas estadísticas que se requieren en nuestro algoritmo en un contexto general. En particular, se recuerdan brevemente los conceptos básicos sobre el análisis factorial y la regresión no paramétrica. En la Sección 3.3, se describe en detalle todos los pasos del nuevo algoritmo destinado a construir la función de fiabilidad de un sistema complejo con una gran cantidad de componentes que no se supone que sean estadísticamente independientes. En la Sección 3.4, se presenta un extenso estudio de simulación para evaluar el rendimiento del método. En la Sección 3.5 se aplica a un conjunto de datos reales. En la Sección 3.6 se presentan diferentes soluciones del problema planteado mediante técnicas de *Machine Learning*. Finalmente, la Sección 3.7 concluye este capítulo.

## 3.2. Metodología

Seguimos el enfoque del capítulo anterior y ampliando los desarrollos del mismo para analizar el caso de sistemas multicomponentes complejos, con un gran número de unidades que no se asumen como estadísticamente independientes, lo cual es un supuesto más realista especialmente cuando el número de componentes en el sistema es alto.

### 3.2.1. Un procedimiento de reducción de dimensionalidad

Teniendo en cuenta la gran cantidad de información que manejamos actualmente, es muy común que los conjuntos de datos tengan una gran cantidad de características. En nuestro contexto de análisis de fiabilidad, significa que podemos tratar con sistemas complejos de múltiples componentes, es decir, con una gran cantidad de unidades. No es factible ejecutar el algoritmo para ajustar la función de estructura desarrollada en el capítulo anterior, ya que reducirá el rendimiento del algoritmo y en general no es fácil visualizar muchas funciones en cualquier tipo de gráfico. Una solución es reducir el número de características en el conjunto de datos utilizando, por ejemplo, un algoritmo de análisis factorial (AF) que crea factores a partir de las variables observadas.

El método que usaremos para el análisis factorial se basa en el análisis de componentes principales desarrollado por H. Hotelling (1933) y lo resumimos a continuación.

El análisis de componentes principales (ACP) es un método de proyección lineal que proporciona como resultado una secuencia de subespacios lineales anidados, que se adaptan a los datos disponibles. Es un método de preprocesamiento ampliamente utilizado que ofrece diversas aplicaciones, que van desde la reducción de la dimensionalidad hasta la eliminación de ruido, Cui *et al.* (2020). El método realiza una descomposición en valores propios de la matriz de covarianzas empírica y considera el espacio generado por los vectores propios correspondientes a los valores propios principales.

Recordamos brevemente una solución para ACP usando álgebra lineal, ver Jolliffe (2002), Jackson (2003) y Jolliffe y Cadima (2016). Sea  $\mathbf{X}$  una matriz de datos de dimensión  $n \times p$ , donde  $p$  es el número de características (covariables) y  $n$  es el número de individuos.

Los datos deben estar centrados con media 0 y desviación estándar 1. El objetivo es encontrar alguna matriz ortonormal  $\mathbf{\Gamma}$ , es decir  $\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$ , tal que se logre la siguiente representación lineal

$$\mathbf{Z}_{n \times p_0} = \mathbf{X}_{n \times p} \mathbf{\Gamma}_{p \times p_0} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

donde la matriz  $\mathbf{Z}_{n \times p_0}$  se llama matriz de puntuaciones y contiene toda la información de la muestra. La matriz  $\mathbf{\Gamma}$  se llama matriz de cargas y aporta una medida de la fuerza de la relación entre cada variable  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{Z}$ . Las columnas de  $\mathbf{\Gamma}$  son las componentes principales de los datos. Dado que en el modelo se mantiene un número menor de componentes principales ( $p_0$ ) que de variables ( $p$ ), es decir,  $p_0 < p$ , hay un término de error que se acumula en la matriz  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Como ya se ha mencionado, ACP se basa en la descomposición en vectores propios y valores propios de la matriz de covarianzas de los datos  $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{n-1} \mathbf{X}'\mathbf{X}$ . Entonces, podemos escribir  $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\Gamma}_j = \lambda_j\boldsymbol{\Gamma}_j$ ,  $\sum_{j=1}^{p_0} \lambda_j = 1$ , donde  $\lambda_j$  denota el valor propio relacionado con el vector propio  $\boldsymbol{\Gamma}_j$ . Finalmente,  $\mathbf{Z}_j = \mathbf{X}\boldsymbol{\Gamma}_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, p_0$ .

Esta ecuación se interpreta de la siguiente manera:  $\mathbf{Z}_j$  son las proyecciones de  $\mathbf{X}$  en el espacio de autovectores  $\{\boldsymbol{\Gamma}_j, j = 1, 2, \dots, p_0\}$ , con los autovalores  $\lambda_j$  midiendo la cantidad de varianza explicada, es decir, la información que guarda cada uno de las componentes principales, que se ordenan de forma descendente de acuerdo con esta cantidad de información capturada. En Jackson (2003) se puede obtener más detalle sobre el análisis de componentes principales.

### 3.2.2. El modelo de fiabilidad transformado

El estado de la  $j$ -ésima componente del sistema es una variable aleatoria  $\mathbf{X}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ), que es directamente observable y que toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ . Sea  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p)$  el vector de variables que describe el desarrollo interno del sistema. Como en el capítulo anterior, el vector  $\mathbf{X}$  da los estados de todas las componentes del sistema y la variable  $\mathbf{Y}$  toma el valor 1 cuando el sistema está operativo y 0, en caso contrario.

El objetivo principal es construir un modelo capaz de predecir la probabilidad de que el sistema funcione conocido el vector de niveles de rendimiento de sus componentes. Cuando el número de variables en el modelo de regresión es muy grande, pueden surgir ciertos problemas, como sobreajuste y un aumento del error de predicción, James *et al.* (2013). En este capítulo, proponemos reducir la cantidad de características antes de construir el modelo de regresión.

Después de ejecutar el algoritmo de Análisis Factorial (AF), obtenemos un conjunto (reducido) de variables  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{p_0}$ , que están linealmente relacionadas con las originales. Cada variable  $Z_j$  podría identificarse con un bloque (latente) construido a partir de variables correlacionadas del espacio de estados original.

Podemos escribir la fiabilidad del sistema siguiendo el razonamiento siguiente. Como la fiabilidad del sistema se define

$$R(\mathbf{x}) = P(Y = 1 \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}),$$

usando  $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{\Gamma}$ , puede escribirse

$$\tilde{R}(\mathbf{z}) = P(Y = 1 \mid \mathbf{Z} = \mathbf{z}),$$

donde denotamos  $\mathbf{z} = \mathbf{x}\mathbf{\Gamma}$ .

En otras palabras, dado  $\mathbf{Z} = \mathbf{z}$ , la variable aleatoria  $Y$  sigue una distribución binomial con parámetro  $\tilde{R}(\mathbf{z})$ . Observemos que  $\tilde{R}(\cdot)$  no es la función de fiabilidad del sistema, ya que la función de fiabilidad  $R$  da la probabilidad de que el sistema esté operativo en función de los estados de sus componentes, es decir, dado  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ . Entonces, para estimar la función de fiabilidad, proponemos lo siguiente. Primero, ajustar el modelo logístico local basado en las características latentes  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_{p_0})$ , es decir, obtener un estimador de la función  $\tilde{R}(\mathbf{z})$ . Segundo, definir  $R = \tilde{R} \circ \rho$ , donde  $\rho : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p_0}$ , es una función lineal que transforma las variables originales al espacio de características latentes proporcionado por el algoritmo AF.

### 3.2.3. Regresión logística-local en el espacio de factores

Ajustamos un modelo logístico local en el espacio de los factores  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_{p_0})$  como explicamos brevemente a continuación, (ver Capítulo 2 para más detalle). Definimos

$$g(\mathbf{z}) = \log \frac{\tilde{R}(\mathbf{z})}{1 - \tilde{R}(\mathbf{z})},$$

donde  $\mathbf{z}^t = (z_1, z_2, \dots, z_{p_0})$  y  $g$  es una función suave en términos de derivabilidad.

Definimos  $b_0 = g(\mathbf{z}_0)$ , y  $b_j = \frac{\partial g(\mathbf{z}_0)}{\partial z_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p_0$ . Se puede escribir

$$g(\mathbf{z}) \equiv b_0 + b_1(z_1 - z_{01}) + \dots + b_{p_0}(z_{p_0} - z_{0p_0}), \quad (3.1)$$

para  $\mathbf{z}$  próximo a  $\mathbf{z}_0$  convenientemente elegido, esto es para todo  $\mathbf{z}$  tal que  $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < h$ , con  $\|\cdot\|$  la norma Euclídea y  $h > 0$  suficientemente pequeño.

De este modo, podemos aproximar la función  $\tilde{R}$  mediante

$$\tilde{R}_0(\mathbf{z}) = \frac{e^{(1, (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^t) \mathbf{b}}}{1 + e^{(1, (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^t) \mathbf{b}}}, \quad (3.2)$$

para todo  $\mathbf{z}$  tal que  $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < h$ , y  $h > 0$  suficientemente pequeña, y  $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{p_0})^t$ .

El vector de parámetros  $\mathbf{b}$  puede ser estimado localmente por máxima verosimilitud. En otras palabras, si nos basáramos en un conjunto de datos  $\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{Y}_1), (\mathbf{z}_2, \mathbf{Y}_2), \dots, (\mathbf{z}_n, \mathbf{Y}_n)\}$ , el valor de  $\mathbf{b}$  maximiza la función de verosimilitud local dada por

$$l_0(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n w_{h,0}(\mathbf{z}_i) (\mathbf{Y}_i (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_0)^t \mathbf{b}) - \log (1 + \exp((\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_0)^t \mathbf{b})),$$

donde  $\{w_{h,0}(\mathbf{z}_i), i = 1, 2, \dots, n\}$  determina los pesos de las observaciones alrededor del punto de estimación  $\mathbf{z}_0$ . Esto es para asegurar que la aproximación lineal de  $g$  dada en (3.1) se considera solo en la ventana donde es válida. Definimos

$$w_{h,0}(\mathbf{z}_i) = K_h(\|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_0\|),$$

con  $K_h(\cdot) = (1/h)K(\cdot/h)$ , siendo  $h$  el parámetro ancho de banda que controla la cantidad de suavizado.

Resolviendo el problema de las ecuaciones no lineales dado por  $l'_0(\mathbf{b}) = 0$  con  $l'_0$  el vector gradiente de  $l_0$ , podemos obtener una estimación local de la función  $g$ , luego, el valor estimado de  $b_0$  proporciona una estimación de  $g(\mathbf{x}_0)$  y también obtenemos las estimaciones de las derivadas parciales correspondientes.

Dada la relación entre  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{X}$  proporcionada por FA, el modelo dado en (3.2) implica un modelo logístico local en el espacio de las variables originales. Este punto se detallará en la Sección 3.3 donde se explica al completo el algoritmo.

#### 3.2.4. Isotonización

El modelo de regresión local no se basa directamente en los datos originales, sino que utiliza la matriz de puntuaciones proporcionada por el algoritmo AF. Como se mencionó en el capítulo anterior, la regresión no paramétrica produce estimadores con buenas propiedades asintóticas, como consistencia y normalidad, que se alcanzan con una tasa de convergencia razonable. Sin embargo, estos estimadores no son necesariamente monótonos.

En este contexto de sistemas coherentes, la variable de respuesta del modelo de regresión (el estado del sistema) tiene que ser monótona en cada variable original (estado de la componente). En principio y en general, las características que utilizamos como entrada del modelo logístico local no tienen una interpretación clara en nuestro problema, por lo que no podemos asumir que la respuesta es monótona en función de ellas. Por lo tanto, proponemos que el paso de isotonización se implemente una vez que se complete el proceso de transformación hacia atrás y el modelo se exprese en términos de las variables originales.

El procedimiento de isotonización que usamos en este capítulo es el algoritmo *hinge* presentado en Meyer (2010) que es simple, rápido e intuitivo (Meyer (2010)). Como se mencionó anteriormente, aplicaremos este algoritmo una vez que se haya ajustado el modelo logístico local a los datos, es decir, ejecutamos el algoritmo de isotonización con  $\{\widehat{R}_i^*\}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , siendo éste el valor estimado de  $R_i^* = P(Y = 1 \mid \mathbf{x}_i)$  por el modelo logístico local expresado en términos de las variables originales después de ejecutar la transformación inversa correspondiente desde el espacio de factores como se explica en la Sección 3.2.3. Obtenemos  $R_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ , una estimación de la fiabilidad del sistema en la configuración de componentes determinado por  $\mathbf{x}_i$  que cumple con las condiciones de coherencia del sistema.

### 3.3. Análisis de fiabilidad de sistemas complejos

Sean  $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$  los datos observados donde  $\mathbf{X}$  es una matriz de dimensión  $n \times p$ . Cada entrada de la matriz para  $i = 1, 2, \dots, n$ , es una configuración de los estados de las componentes de un sistema de dimensión  $p$ . El estado

del sistema viene dado por una variable aleatoria que se supone que toma valores en el intervalo  $[0, 1]$ . Las componentes del sistema no son necesariamente independientes.  $\mathbf{Y}$  es un vector de dimensión  $n$ . Para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $Y_i = 1$  si el sistema está operativo y  $0$ , en caso contrario.

### 3.3.1. El algoritmo FA-RL-IS

El algoritmo se divide en los siguientes pasos:

- Paso 1. Centrar las columnas de la matriz  $\mathbf{X}$ , esto es para cada  $j = 1, 2, \dots, p$ , definir  $U_j = (\mathbf{X}_j - \mu_j)/\sigma_j$ , con  $\mu_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij}$  y  $\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{ij} - \mu_j)^2}$ , para  $j = 1, 2, \dots, p$ . Sea  $\mathbf{\Sigma}_0$  una matriz diagonal con el  $j$ -ésimo elemento  $\sigma_j$ , y  $\mathbf{M} = \mathbf{1}_p(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ , con  $\mathbf{1}_p$  un vector columna unitario de tamaño  $p$ . Denotamos  $\mathbf{U} = (\mathbf{X} - \mathbf{M})\mathbf{\Sigma}_0^{-1}$ , luego  $\mathbf{U}$  es una matriz de dimensión  $n \times p$ .
- Paso 2. Aplicar un algoritmo AF al conjunto de datos escalados  $\mathbf{U}$  y transformar los datos a un conjunto reducido denotado como  $\{\mathbf{Z}, \mathbf{Y}\}_{n \times p_0}$ , con  $p_0 < p$ , y  $\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{\Gamma}$ , siendo  $\mathbf{\Gamma}$  la matriz de coeficientes proporcionados por el algoritmo AF de dimensión  $p \times p_0$  (ver Sección 3.2.1).
- Paso 3. Ajustar un modelo logístico local basado en el conjunto de datos reducidos  $\{\mathbf{Z}, \mathbf{Y}\}$  (ver Sección 3.2.3) usando el siguiente criterio de validación cruzada *leave-one-out* (LOOCV) para la selección del ancho de banda.
- 3.1 Sea  $h$  un ancho de banda variando en una rejilla  $\{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ .
  - 3.2 Construir el modelo logístico local basado en el conjunto de datos reducido  $\{\mathbf{Z}, \mathbf{Y}\}$  y estimar  $\tilde{R}_h(\mathbf{z}_i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .
  - 3.3 Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , sea el conjunto de datos *leave-one-out* (*loo*)  $\{\mathbf{Z}, \mathbf{Y}\}^{(-i)}$ , el conjunto de datos sin la  $i$ -ésima entrada. Sea  $\tilde{R}_h^{(-i)}(\mathbf{z})$  el modelo ajustado usando el conjunto de datos *loo* y estimar  $\tilde{R}_h^{(-i)}(\mathbf{z}_i)$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .
  - 3.4 Definir la puntuación de la validación cruzada como

$$Q(h) = \sum_{i=1}^n \tilde{R}_h(\mathbf{z}_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n Y_i \tilde{R}_h^{(-i)}(\mathbf{z}_i).$$

3.5 Definir  $h_{CV} = \arg \min_h Q(h)$ .

Paso 4. Sea  $\mathbf{x}_0$  una configuración particular de los estados de las componentes del sistema. Sea  $\mathbf{z}_0 = (\mathbf{x}_0 - (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \dots, \boldsymbol{\mu}_p)) \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\Gamma}$ , y construimos un modelo logístico local como hemos mencionado anteriormente. Entonces, para  $\mathbf{z}$  tal que  $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_0\| < h_{CV}$ , el modelo ajustado viene dado por

$$\tilde{R}_{CV}(\mathbf{z}) = \frac{e^{(1, (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^t) \hat{\mathbf{b}}}}{1 + e^{(1, (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)^t) \hat{\mathbf{b}}}},$$

con  $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{p_0})^t$  el vector de coeficientes obtenidos usando  $h_{CV}$ .

Paso 5. Sea  $\mathbf{x}$  tal que  $\|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\Gamma}\| < h_{CV}$ , entonces el modelo logístico local en el estado  $\mathbf{x}$  de las componentes se estima por

$$\hat{R}_{CV}^*(\mathbf{x}) = \frac{e^{(1, (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t) \hat{\boldsymbol{\beta}}}}{1 + e^{(1, (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t) \hat{\boldsymbol{\beta}}}},$$

donde el vector de coeficientes estimados  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  es

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = \hat{b}_0, \quad (3.3)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \boldsymbol{\sigma}_j^{-1} \boldsymbol{\Gamma}_j \hat{\mathbf{b}}_{-0}, \quad j = 1, 2, \dots, p; \quad (3.4)$$

donde denotamos  $\boldsymbol{\Gamma}_j$  como la  $j$ -ésima fila de la matriz  $\boldsymbol{\Gamma}$ , y  $\hat{\mathbf{b}}_{-0} = (b_1, b_2, \dots, b_{p_0})^t$ . Nótese que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$  depende de  $\mathbf{x}_0$ .

Paso 6. Tomar  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_i$  y definir  $\hat{R}_{CV}^*(\mathbf{x}_i) = \frac{e^{\hat{b}_0}}{1 + e^{\hat{b}_0}}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Usar el algoritmo descrito en la Sección 3.2.4 para isotonizar estos valores estimados y luego obtener la fiabilidad estimada de la  $i$ -ésima configuración de estados de las componentes, esto es  $\hat{R}_{CV}(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

En la Figura 3.1 se presenta una descripción gráfica del algoritmo que hemos implementado para ejecutar las simulaciones mostradas en la Sección 3.4.

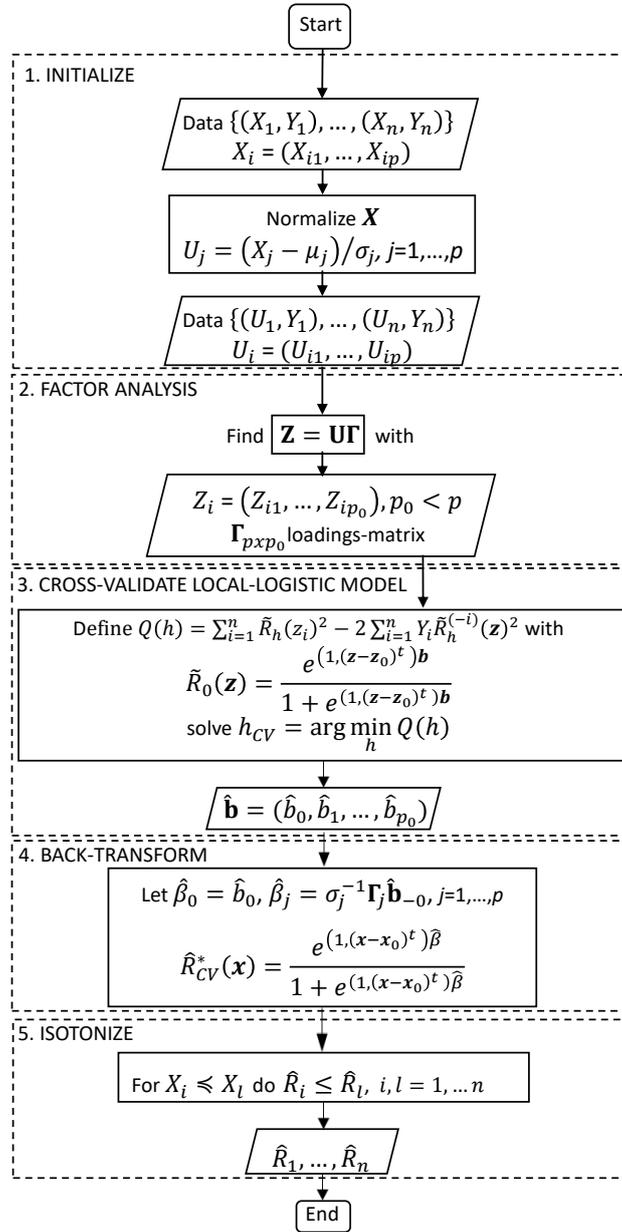


Figura 3.1: Algoritmo AF-RL-IS.

### 3.3.2. Medida de importancia de las componentes

Para  $j = 1, 2, \dots, p$ , pretendemos medir el efecto que tiene la componente  $j$ -ésima sobre el rendimiento del sistema desde el punto de vista de la medida de importancia de Birnbaum definida en el capítulo anterior, que recordamos para mayor claridad.

Sea  $\phi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p)$  la función de estructura de un sistema coherente de tamaño  $p$ . Asumimos que  $Y = \phi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) + \varepsilon$ , el estado del sistema, donde  $\varepsilon$  representa ruido. Sea  $R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p) = E[Y | \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{X}_p = \mathbf{x}_p]$ , la probabilidad de que el sistema esté operativo cuando  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{X}_p = \mathbf{x}_p$ . Para cada  $j = 1, 2, \dots, p$ , la importancia de la  $j$ -ésima componente en el sentido de Birnbaum se define como

$$I^B(j) = \frac{\partial R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p)}{\partial \mathbf{x}_j}.$$

Siguiendo las conclusiones del capítulo anterior, la importancia de una componente con respecto al buen rendimiento del sistema se puede establecer según la magnitud de la correspondiente derivada parcial de la función *logit*, es decir, el valor del correspondiente coeficiente  $\beta$ . Dado que en la expresión

$$\left. \frac{\partial \widehat{R}_{CV}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j} \right|_{\mathbf{x}_i} = (\widehat{R}_{CV}(\mathbf{x}_i))(1 - \widehat{R}_{CV}(\mathbf{x}_i))\widehat{\beta}_j(\mathbf{x}_i),$$

el factor  $\widehat{V}(Y_i) = \widehat{R}(\mathbf{x}_i)(1 - \widehat{R}(\mathbf{x}_i))$  es un factor común, para todo  $j$ , luego  $\widehat{I}^B(j) = \widehat{\beta}_j$ , para  $j = 1, 2, \dots, p$ . La importancia de una componente particular es estimada localmente, es decir,  $\widehat{I}^B(j, \mathbf{x}_i) = \widehat{\beta}_j(\mathbf{x}_i)$ ,  $\forall i, j$ .

### 3.3.3. Inferencia sobre el modelo

En esta sección abordamos dos cuestiones importantes. Por un lado, nuestro objetivo es cuantificar la precisión del modelo ajustado. En este sentido proponemos construir intervalos de confianza puntuales en torno a la función de fiabilidad. Para hacerlo, primero obtenemos la distribución asintótica del estimador local que hemos obtenido en las secciones anteriores. Por otro lado, podemos evaluar y comparar diferentes unidades en

el sistema en términos del impacto que tienen en el rendimiento del sistema. Para ello proponemos formular el test correspondiente y resolverlo utilizando el método de Montecarlo.

### Intervalo de confianza asintótico para la función de fiabilidad

Para construir intervalos de confianza, primero obtenemos la distribución asintótica de  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ .

Las estimaciones de verosimilitud local tienen una distribución Normal asintótica, ver por ejemplo, Fan y Gijbels (1996). Entonces, tenemos que  $\hat{\mathbf{b}} \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{b}})$ , con varianza

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{b}} = \text{Var}(\hat{\mathbf{b}}) = (\mathbf{Z}' \mathbf{W} \mathbf{V} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}' \mathbf{W} \mathbf{V} \mathbf{W} \mathbf{Z} (\mathbf{Z}' \mathbf{W} \mathbf{V} \mathbf{Z})^{-1},$$

donde  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{b}}$  es la varianza del estimador  $\hat{\mathbf{b}}$ . Recordamos que  $\hat{\mathbf{b}}$  es el estimador local en el espacio de factores. Donde  $\mathbf{W}$  es una matriz diagonal cuyo  $i$ -ésimo elemento es  $W(i, i) = K_h(\|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_0\|)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  y,  $\mathbf{V}$  es una matriz diagonal cuyo  $i$ -ésimo elemento es  $V(i, i) = R_0(\mathbf{z}_i)(1 - R_0(\mathbf{z}_i))$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

De modo que  $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}})$ , con varianza

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{b}} \boldsymbol{\Gamma}' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}, \quad (3.5)$$

donde  $\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}$  y  $\boldsymbol{\Gamma}$  se han definido previamente en este capítulo.

Con esto podemos construir intervalos de confianza alrededor de  $R(\mathbf{x}_0)$ . Sea  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^p$  una configuración particular y fijada de estados de las componentes del sistema. Usando las propiedades teóricas de los estimadores de verosimilitud local definidos en la Sección 3.2.3 y dado que  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0 = \hat{b}_0$  como se ha deducido en la ecuación (3.3), para un nivel de confianza  $(1 - \alpha)100\%$ , para la función de fiabilidad en la configuración de componentes  $\mathbf{x}_0$  se obtiene el intervalo de confianza para  $\boldsymbol{\beta}_0$ , es decir

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_0(\mathbf{x}_0) \pm q_{\frac{\alpha}{2}} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\beta}_0}(\mathbf{x}_0), \quad (3.6)$$

con  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\beta}_0}$  la raíz cuadrada del elemento (1,1) de la matriz  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{\beta}}$  donde sustituimos los parámetros por sus estimaciones, y  $q_{\frac{\alpha}{2}}$  denota el cuantil de

orden  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la distribución Normal estándar. Entonces, el intervalo de confianza para  $R(\mathbf{x}_0)$  se obtiene aplicando la transformación *logit* inversa  $f(u) = 1/(1 + e^{-u})$  a los extremos del intervalo (3.6).

## Test de hipótesis para la comparación de componentes

Consideramos el siguiente contraste

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_j(\mathbf{x}_0) &= \beta_k(\mathbf{x}_0) \\ H_1 : \beta_j(\mathbf{x}_0) &\neq \beta_k(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

para un vector particular de estados de las componentes, dado por la expresión  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p})^t$ .

Para resolver el problema anterior, consideramos el estadístico  $T_{jk} = \mathbf{E}_{jk} \hat{\boldsymbol{\beta}}$ , con  $\mathbf{E}_{jk}$  un vector cuyos elementos son cero, excepto para las posiciones  $j$  y  $k$ , que son, respectivamente, 1 y  $-1$ . De la ecuación (3.5), obtenemos que la varianza de estos estimadores es  $\text{Var}(T_{jk}) = \mathbf{E}_{jk} \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{E}_{jk}^t$ .

## 3.4. Simulaciones

Para ilustrar nuestra metodología, utilizamos en esta sección sistemas simulados que, entre otras cosas, nos permitirán evaluar la bondad de ajuste de los estimadores propuestos en las secciones anteriores.

### 3.4.1. Verificación de las propiedades del estimador con muestras finitas

Como ya se mencionó, para evaluar nuestro procedimiento, realizamos un estudio de simulación donde los sistemas considerados se basan en diferentes configuraciones de RBD introducidas en la Sección 1.5.2. La Figura 3.2 muestra una representación gráfica de las RBD correspondientes a los tres casos analizados en esta sección.

Los datos para cada caso se generaron de la siguiente manera. Hemos simulado muestras de tamaños  $n = 50, 100, 500$ . Sea  $p$  el tamaño del sistema,

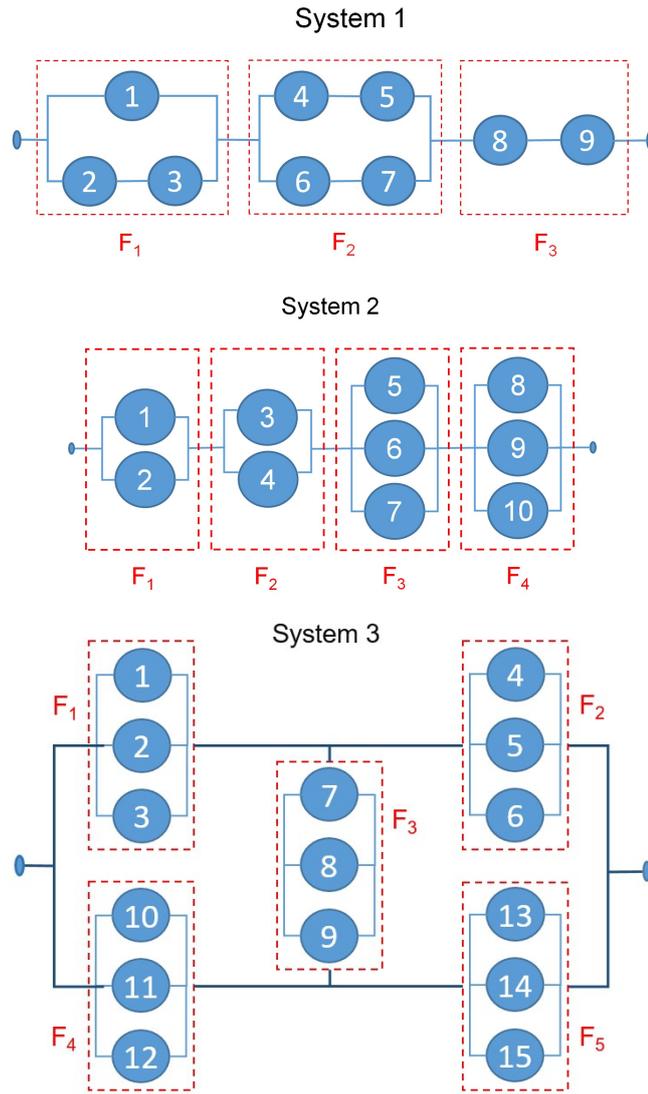


Figura 3.2: RBD para los sistemas simulados.

en este caso,  $p = 9, 10, 15$ , respectivamente, en nuestros ejemplos. Los datos consisten en una matriz con  $p + 1$  columnas. Las primeras  $p$  columnas muestran el estado de las componentes  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , mientras que la columna  $p + 1$  se refiere al estado del sistema  $Y$ , que toma los valores 1, si el sistema está funcionando y 0, en caso contrario. Cualquier par de componentes en el mismo bloque tienen una correlación de 0.9, mientras que las componentes en diferentes bloques son independientes, en la Figura 3.2 los bloques de componentes dependientes se han resaltado mediante líneas

discontinuas.

El estado del sistema se ha simulado considerando una variable latente que no es directamente observable y se supone que  $\tilde{Y} \sim N(\phi(\mathbf{X}), \sigma)$ , siendo  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$  una configuración del vector estado. Fijamos  $\sigma = 0.2$  y finalmente se simula la información sobre el estado del sistema  $Y$  a partir de una distribución Binomial con probabilidad de éxito dada por  $R(\mathbf{x}) = P(\tilde{Y} > y_0)$ , con  $y_0 = 0.5$ .

Para cada modelo y tamaño de muestra, hemos simulado  $M = 500$  repeticiones del experimento. Las tablas 3.1 a 3.4 muestran los resultados del ajuste del modelo. En la Tabla 3.5 también se presenta una discusión sobre el número apropiado de factores (componentes principales o bloques) a extraer.

La función de estructura para cada modelo es la siguiente:

- Sistema 1.** Consideramos un sistema en serie-paralelo con  $p = 9$  componentes, como se muestra en la Figura 3.2 (primer gráfico). El sistema está compuesto por tres bloques conectados en serie. Los dos primeros bloques están dispuestos en paralelo y tienen tres y cuatro componentes, respectivamente. El tercer bloque consta de dos componentes en serie. En este contexto, la función de estructura del sistema está dada por la siguiente expresión

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(\max(x_1, \min(x_2, x_3)), \max(\min(x_4, x_5), \min(x_6, x_7)), \min(x_8, x_9)),$$

donde  $x_j$  denota el estado de la  $j$ -ésima componente,  $j = 1, 2, \dots, 9$ .

- Sistema 2.** Consideramos un sistema serie-paralelo con  $p = 10$  componentes, como se muestra en la Figura 3.2 (segundo gráfico). El sistema está compuesto por cuatro bloques en paralelo conectados en serie. Los dos primeros bloques tienen dos componentes cada uno y los otros dos bloques tienen tres componentes cada uno. En este caso, la función de estructura del sistema viene dada por la siguiente expresión

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(\max(x_1, x_2), \max(x_3, x_4), \max(x_5, x_6, x_7), \max(x_8, x_9, x_{10})),$$

donde  $x_j$  denota el estado de la  $j$ -ésima componente,  $j = 1, 2, \dots, 10$ .

- **Sistema 3.** Consideramos un sistema puente con  $p = 15$  componentes, como se muestra en la Figura 3.2 (tercer gráfico). Se ha modificado la estructura puente simple introduciendo redundancia Sahoo *et al.* (2014). Es decir, cada componente se ha reemplazado por un bloque que consta de tres unidades conectadas en paralelo. La función de estructura del sistema viene dada por la siguiente expresión

$$\phi(\mathbf{x}) = \max(\min(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4), \min(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5), \min(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4), \min(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_5)),$$

donde  $\mathbf{x}_k = \max(x_{3k-2}, x_{3k-1}, x_{3k})$ , para  $k = 1, 2, \dots, 5$ , y  $x_j$  denota el estado de la  $j$ -ésima componente,  $j = 1, 2, \dots, 8$ .

En la Tabla 3.1 se presentan los resultados de bondad de ajuste del modelo obtenido ejecutando el algoritmo AF-RL-IS. El parámetro ancho de banda ha sido seleccionado usando técnicas de validación cruzada como se explica en la Sección 3.3.1. Para evaluar las propiedades del método, hemos comparado el modelo no paramétrico con los resultados obtenidos utilizando un modelo logístico paramétrico para estimar la función de fiabilidad con los mismos datos. Se proporcionan los detalles del modelo paramétrico en Gámiz *et al.* (2021). Para comprobar la bondad de ajuste del estimador, hemos calculado el área bajo la curva ROC (AUC) siguiendo las pautas del Capítulo 2. Los resultados que se muestran en la Tabla 3.1 se calcularon utilizando las fiabilidades estimadas para cada sistema ( $S = 1, 2, 3$ ), el tamaño de muestra ( $n = 50, 100, 500$ ) y el número de factores latentes, que toma valores  $p_0 = 3$  para el Sistema 1,  $p_0 = 4$  para el Sistema 2 y  $p_0 = 5$  para el Sistema 3, dependiendo del modelo particular que se esté analizando.

En nuestro contexto, el AUC se calcula como la probabilidad de que la fiabilidad estimada por el modelo ajustado para un sistema operativo sea mayor que la fiabilidad estimada para un sistema en estado de fallo.

Como puede verse en los resultados de la Tabla 3.1, el ajuste no paramétrico supera al ajuste paramétrico para todos los sistemas y todos los tamaños de muestra.

Las tablas 3.2–3.4 muestran los resultados de la precisión del estimador proporcionado por el algoritmo AF-RL-IS. A modo de comparación, proporcionamos tres tablas con los resultados obtenidos por diferentes métodos. Los resultados de la tabla muestran el error de estimación calculado de la siguiente manera: para cada sistema ( $S$ ) y tamaño de muestra ( $n$ ),

Sistema	Algoritmo AF-RL-IS			Modelo logístico paramétrico		
	Tamaño de muestra, $n$			Tamaño de muestra, $n$		
	50	100	500	50	100	500
1	0.909	0.903	0.896	0.838	0.831	0.822
2	0.912	0.903	0.901	0.813	0.799	0.785
3	0.895	0.906	NA	0.788	0.817	NA

Tabla 3.1: Área bajo la curva ROC (AUC).

fijamos el número de factores que queremos extraer ( $p_0$ ) y construimos el modelo de regresión logística local en el espacio de factores que representan bloques de componentes en el diseño del sistema. Obtenemos los valores estimados  $\{\tilde{R}_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Luego transformamos el modelo sobre el espacio de las variables originales, por lo que obtenemos la estimación sin restricciones de la fiabilidad para cada punto como se explica en el Paso 5 del algoritmo en la Sección 3.3.1, es decir  $\{\hat{R}_i^*, i = 1, 2, \dots, n\}$  (Tabla 3.2). Finalmente, obtenemos las respuestas isotonizadas  $\{\hat{R}_i^*, i = 1, 2, \dots, n\}$  como en el Paso 6 del algoritmo (Sección 3.3.1), que es la estimación final de la fiabilidad en cada elemento del conjunto de datos (Tabla 3.3). Además, también obtenemos una estimación de la fiabilidad para cada punto usando el modelo logístico paramétrico (Capítulo 2). Repetimos este procedimiento para  $M$  muestras como se muestra en la Figura 3.1.

Para cada sistema, dada una muestra particular  $\{(\mathbf{X}_i^m, \mathbf{Y}_i); i = 1, 2, \dots, n\}$ , con  $m = 1, 2, \dots, M$ , el error cuadrático medio  $MSE_m$  se puede calcular como

$$MSE_{S,m}^\bullet = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \hat{R}_{S,i}^{\bullet,m} - R_S(\mathbf{X}_i^m) \right)^2,$$

donde  $R_S(\mathbf{X}_i^m)$  denota la verdadera función de fiabilidad obtenida para el sistema  $S$ ; y  $\hat{R}_{S,i}^{\bullet,m}$  denota la estimación de la fiabilidad correspondiente usando el estimador no paramétrico no restringido,  $\hat{R}_{S,i}^{\bullet,m} = \hat{R}_{S,i}^{*,m}$ ; el estimador de fiabilidad no paramétrico isotonizado  $\hat{R}_{S,i}^{\bullet,m} = \hat{R}_{S,i}^m$  o la estimación de fiabilidad paramétrica,  $\hat{R}_{S,i}^{\bullet,m} = \hat{R}_i^{P,m}$ .

Las tablas 3.2-3.4 contienen los valores promedio de  $MSE_{S,m}^\bullet$  a lo largo de las  $M$  repeticiones del experimento, es decir  $AMSE^\bullet = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M MSE_{S,m}^\bullet$ .

$S = 1$	$n$	50	100	500
$p_0$	1	0.0302	0.0304	0.0298
	<b>3</b>	0.0183	0.0134	0.0076
	4	0.0208	0.0148	0.0081
$S = 2$	$n$	50	100	500
$p_0$	2	0.0289	0.0272	0.0241
	<b>4</b>	0.0243	0.0189	0.0118
	5	0.0246	0.0191	0.0121
$S = 3$	$n$	50	100	500
$p_0$	4	0.0418	0.0372	NA
	<b>5</b>	0.0378	0.0293	NA

Tabla 3.2: Promedio del error cuadrático medio (AMSE) del modelo logístico local sin isotonización, para los tres sistemas, tamaño de muestra  $n$  y diferente número de bloques,  $p_0$ .

Finalmente, en la Tabla 3.5, proporcionamos información relevante sobre el proceso de construcción del modelo. En particular, en la etapa de ejecución del algoritmo AF, debemos decidir la cantidad óptima de factores (bloques) que necesitamos extraer para obtener un modelo que reduzca convenientemente la dimensión del problema sin una pérdida significativa de información. Hemos considerado el test de hipótesis implementado por la función *factanal* del *software R*. Para cada valor de  $p_0$  indicado en la Tabla 3.5, la hipótesis nula evalúa que el número de bloques igual a  $p_0$  es adecuado para explicar la variabilidad de los datos. Como era de esperar, el  $p$ -valor (PVAL) aumenta con el valor de  $p_0$ . Para el Sistema 1, el procedimiento sugiere que un modelo con dos bloques es adecuado, lo que concuerda con el diseño del sistema como se puede ver en la Figura 3.2, donde las unidades están dispuestas en dos bloques independientes de variables correladas. Para el Sistema 2, se deduce que dos bloques no son suficientes para explicar la variabilidad de los datos. Necesitamos al menos  $p_0 = 3$  ó  $p_0 = 4$ . Siguiendo el principio de parsimonia del modelo, mantenemos  $p_0 = 3$ , que nuevamente está de acuerdo con el diseño del sistema. Además, aunque los resultados no se muestran aquí, hemos comprobado que el algoritmo AF asocia correctamente las componentes a los bloques de acuerdo con el diseño dado en la Figura 3.2. Las mismas conclusiones se han obtenido para el Sistema 3.

**Observación.** En el análisis del sistema  $S_3$  no se ha considerado el caso

$S = 1$	$n$	50	100	500
$p_0$	2	0.0291	0.0290	0.0283
	3	0.0182	0.0133	0.0074
	4	0.0204	0.0146	0.0079
$S = 2$	$n$	50	100	500
$p_0$	3	0.0284	0.0266	0.0234
	4	0.0240	0.0188	0.0117
	5	0.0243	0.0190	0.0120
$S = 3$	$n$	50	100	500
$p_0$	4	0.0417	0.0371	NA
	5	0.0377	0.0292	NA

Tabla 3.3: Promedio del error cuadrático medio (AMSE) del estimador logístico local con isotonización, para los tres sistemas, tamaño de muestra  $n$  y diferente número de bloques  $p_0$ .

$n = 500$  debido al alto coste computacional asociado a esta simulación. Aunque después de examinar algunas réplicas del experimento, hemos observado que, como era de esperar, los resultados obtenidos con el modelo no paramétrico superan al modelo paramétrico, como se muestra en la Tabla 3.1 para los sistemas  $S_1$  y  $S_2$ . También se observa una tendencia decreciente de la precisión de la estimación con el tamaño de muestra. Dado que nos interesa la alta dimensionalidad con respecto al tamaño del sistema más que al tamaño de muestra, no nos parece tan ilustrativo para nuestros propósitos considerar este último ejemplo con tamaños de muestra tan grandes.

### 3.4.2. Algunos problemas de inferencia

En esta sección, nos centramos en el Sistema 1 pero, de manera similar, se podrían usar los sistemas 2 y 3 para la discusión.

1. *Intervalo de confianza para la fiabilidad dado un vector estado fijo.*

Para un nivel fijo de estados de las componentes, primero estamos interesados en construir intervalos de confianza para el índice de fiabilidad. En particular, tomamos  $\mathbf{x}_0$  como un vector con elementos  $x_i = 0.5$ , para  $i = 1, 2, \dots, 9$ . Usando los resultados de la Sección 3.3.3,

$S = 1$	$n$	50	100	500
$p_0$	2	0.0961	0.0967	0.0952
	3	0.0476	0.0469	0.0467
	4	0.0250	0.0203	0.0166
$S = 2$	$n$	50	100	500
$p_0$	3	0.0625	0.0605	0.0592
	4	0.0384	0.0357	0.0346
	5	0.0317	0.0266	0.0229
$S = 3$	$n$	50	100	500
$p_0$	4	0.0681	0.0656	NA
	5	0.0631	0.0584	NA

Tabla 3.4: Promedio del error cuadrático medio (AMSE) del modelo logístico paramétrico, para los tres sistemas, tamaño de muestra  $n$  y diferente número de bloques  $p_0$ .

podemos deducir la distribución asintótica del estimador  $\widehat{\beta}_0(\mathbf{x}_0)$ . En este caso, hemos simulado muestras de tamaño  $n = 200$  y para cada una hemos construido un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95 %, es decir,  $\widehat{\beta}_0(\mathbf{x}_0) \pm q_{0.025} \widehat{\sigma}_{\beta_0}(\mathbf{x}_0)$ . A partir de aquí, se puede calcular fácilmente un intervalo de confianza para la fiabilidad del sistema en  $\mathbf{x}_0$  aplicando la transformación *logit* inversa.

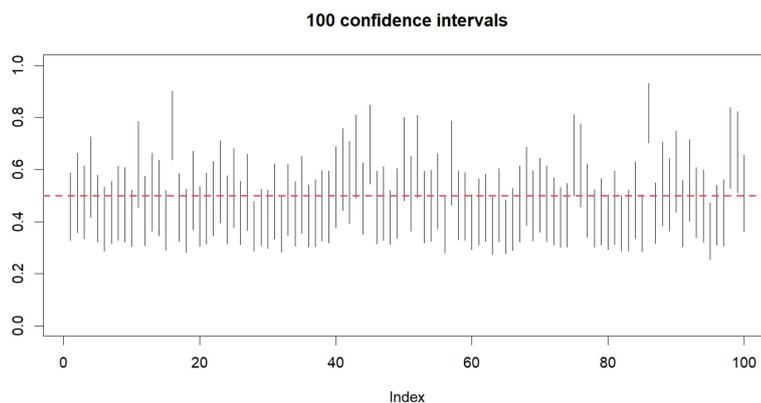
Realizamos  $M = 100$  repeticiones de este experimento, por lo que tenemos 100 intervalos de confianza para la fiabilidad en  $\mathbf{x}_0$ . Los resultados se muestran en la Figura 3.3, donde hemos representado los 100 intervalos de confianza para la fiabilidad en  $\mathbf{x}_0$ . Hemos obtenido que el tamaño medio de los intervalos es 0.2628, lo cual es razonable dado que el rango de  $R$  es  $(0, 1)$ . Para esta configuración de componentes y bajo las condiciones especificadas en la Sección 3.4.1 para el modelo a partir del cual simulamos los datos, la verdadera fiabilidad es  $R(\mathbf{x}_0) = 0.5$ . En la Figura 3.3, se agrega una línea discontinua en el valor de fiabilidad real. Finalmente, tenemos que en este caso, la cobertura empírica que se ha obtenido ha sido un 88 %.

## 2. Importancia de las componentes.

Usando el AF-RL-IS, hemos considerado el siguiente test de hipótesis. Consideramos en las unidades 7 y 8. En cuanto al diseño del sistema, se espera que un cambio de cierta magnitud en el estado de la

$S = 1$	$n$	50	100	500
$p_0$	2	$8.135 \cdot 10^{-7}$	$3.878 \cdot 10^{-17}$	$7.045 \cdot 10^{-138}$
	3	0.4660	0.4603	0.4559
	4	0.6372	0.6567	0.6829
$S = 2$	$n$	50	100	500
$p_0$	3	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$1.225 \cdot 10^{-17}$	$3.815 \cdot 10^{-133}$
	4	0.4525	0.4463	0.4580
	5	0.5430	0.5815	0.5944
$S = 3$	$n$	50	100	500
$p_0$	4	$4.31 \cdot 10^{-9}$	$5.76 \cdot 10^{-30}$	NA
	5	0.499	0.490	NA

Tabla 3.5: ACP: Pruebas del número de factores en el modelo.

Figura 3.3: Intervalos de confianza para  $R(\mathbf{x}_0)$ .

componente 8 tenga un mayor impacto en el rendimiento del sistema que un cambio de la misma magnitud en el estado de la componente 7. En otras palabras, consideramos el siguiente contraste de hipótesis:

$$\begin{aligned}
 H_0 : I_7(\mathbf{x}_0) &= I_8(\mathbf{x}_0) \\
 H_1 : I_7(\mathbf{x}_0) &< I_8(\mathbf{x}_0),
 \end{aligned}$$

para  $\mathbf{x}_0$  como se ha definido anteriormente.

Para resolver este problema, hemos construido un intervalo de confianza basado en el método de Montecarlo. Específicamente, hemos simulado  $M = 1000$  muestras de tamaño  $n = 200$  del Sistema 2. Para cada muestra, hemos utilizado el algoritmo AF-RL-IS para ajustar el modelo no paramétrico y obtener una estimación del vector de parámetros  $\hat{\beta}^m / (\mathbf{x}_0)$ , para  $m = 1, 2, \dots, M$ . Entonces, para cada muestra, podemos obtener una estimación de la diferencia  $\beta_7 - \beta_8$ . Como resultado, obtenemos una secuencia de 1000 estimaciones de  $\beta_7 - \beta_8$ . Finalmente, usamos los cuantiles empíricos de orden 0.025 y 0.975, respectivamente, basados en la secuencia estimada para construir un intervalo de confianza para la diferencia de parámetros  $\beta_7 - \beta_8$ . Rechazamos la hipótesis nula si el intervalo resultante es negativo. Hemos obtenido que el intervalo de confianza al 95% es menor que  $-0.1234$ . La conclusión es que la componente 7 tiene un impacto menor en el rendimiento del sistema que la componente 8 con un nivel de significación de  $\alpha = 0.05$  cuando el sistema se ejecuta en una configuración de componentes dado por  $\mathbf{x}_0$ .

Consideremos una situación diferente. En concreto, nos centramos en las unidades 1 y 4

$$\begin{aligned} H_0 : I_1(\mathbf{x}_0) &= I_4(\mathbf{x}_0) \\ H_1 : I_1(\mathbf{x}_0) &\neq I_4(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

para  $\mathbf{x}_0$  como en el contraste anterior. Hemos realizado el mismo procedimiento que el explicado en el caso anterior y se ha obtenido el correspondiente intervalo de confianza de Montecarlo para la diferencia  $\beta_1 - \beta_4$  ( $-0.6871423, 0.8941527$ ). La conclusión es que no podemos rechazar que la componente 1 sea tan importante como la 4 para el rendimiento del sistema al nivel de significación de  $\alpha = 0.05$ .

### 3.4.3. Análisis de escalabilidad

Para analizar cómo la complejidad de los sistemas afecta al rendimiento de nuestro método, hemos medido el tiempo de ejecución a medida que aumenta el número de componentes en el sistema. Hemos considerado los tres casos representados en la Figura 3.2. Para cada sistema, hemos simulado muestras de tamaño 50, 100 y 500, respectivamente. Se ha registrado

### 3.5. ESTUDIO DE UN CASO REAL: DATOS SOBRE SENSORES DE UNA BOMBA DE AGUA

---

el tiempo de ejecución para una sola simulación para cada caso y se presenta en la Tabla 3.6, para todos los sistemas y tamaños de muestra. Las simulaciones se han realizado utilizando un procesador *Intel Core i5-8600 K* de *3.60 GHz*.

$S = 1$	$n$	50	100	500
$p_0$	2	4.1751 segs	10.9941 segs	3.2526 mins
	3	7.0606 segs	18.6147 segs	5.1491 mins
	4	12.9206 segs	34.0204 segs	8.9630 mins
$S = 2$	$n$	50	100	500
$p_0$	3	6.8160 segs	18.4671 segs	4.9339 mins
	4	11.2588 segs	29.5362 segs	7.8049 mins
	5	13.5407 segs	37.5550 segs	9.6279 mins
$S = 3$	$n$	50	100	500
$p_0$	4	11.2356 segs	29.7303 segs	7.4008 mins
	5	13.4553 segs	37.1375 segs	9.4367 mins

Tabla 3.6: Tiempo de ejecución del algoritmo en términos de la complejidad del sistema  $p$ , tamaño de muestra  $n$  y número de bloques  $p_0$ .

La figura 3.4 muestra el tiempo de ejecución para cada caso en función del tamaño de muestra  $n$  y solo para el caso del número óptimo de bloques. En el gráfico podemos ver que el tiempo de ejecución crece exponencialmente a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Además, se puede ver en el gráfico que cuanto mayor es la complejidad del sistema, mayor tiempo de ejecución se registra.

### 3.5. Estudio de un caso real: Datos sobre sensores de una bomba de agua

Analizamos un conjunto de datos relacionado con el funcionamiento de una bomba de agua de un área geográfica pequeña. Los datos proceden de la plataforma de datos [www.kaggle.com/](http://www.kaggle.com/) y un análisis más detallado se presenta en Alagarsamy (2021).

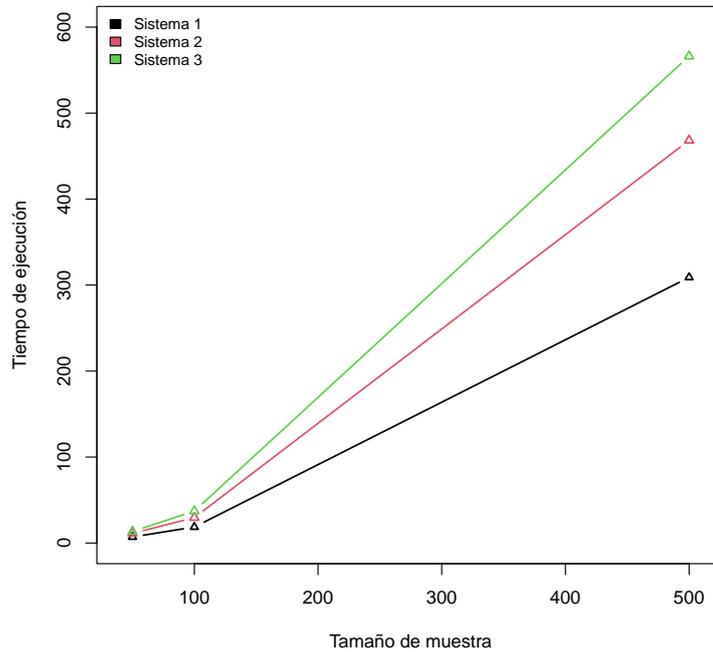


Figura 3.4: Tiempo de ejecución para los tres sistemas, para tamaño de muestra  $n$  y número de bloques óptimo  $p_0$ .

En la página web hay muy pocos detalles técnicos sobre el sistema. La información existente consiste en determinadas mediciones registradas por 51 sensores y el estado de la máquina cada minuto desde el 1 de abril de 2018 hasta el 31 de agosto de 2018. En total, hay 220320 registros y 54 variables. En este ejemplo, no observamos directamente el estado de cada parte del sistema. En cambio, tenemos alguna medida registrada por el sensor correspondiente que ofrece cierta información sobre el estado de la parte correspondiente que está controlando dicho sensor. Los sensores se utilizan para registrar la temperatura, la presión, la vibración, la capacidad de carga, el volumen, la densidad del flujo, etc. Aunque somos conscientes de que en este caso no observamos directamente el estado de las componentes del sistema, vamos a suponer en este ejemplo que cada sensor identifica una componente concreta del sistema y que el valor registrado en cada momento es una observación del estado de esa componente.

En nuestro contexto, suponemos que observamos una muestra de compo-

### 3.5. ESTUDIO DE UN CASO REAL: DATOS SOBRE SENSORES DE UNA BOMBA DE AGUA

---

nentes independientes. En este caso, tenemos un seguimiento longitudinal con un solo sistema con observaciones tomadas en un lapso de tiempo de solo 1 minuto entre dos mediciones consecutivas, de modo que puede haber correlación en la muestra. Para evitar este inconveniente, no tomamos todos los registros de la muestra sino que consideramos más distancia en el tiempo entre los datos analizados. Tenemos una muestra de tamaño  $n = 153$  que consta de todos los registros tomados a las 00:00 todos los días. Con esto aplicamos nuestro modelo con el objetivo de determinar cuáles son los sensores que dan información más relevante sobre el comportamiento del sistema en el sentido considerado en este capítulo. Los pasos que se han seguido son los siguientes:

1. **Normalizar los datos.** Los valores medidos por cada sensor están relacionados con diferentes magnitudes y, por lo tanto, dados en diferentes escalas, por lo que es necesario normalizar los datos para tener valores en la misma escala que posibiliten la comparación.
2. **Examinar las posibles correlaciones.** En la Figura 3.5 se representa la matriz de correlaciones de todas las variables (es decir, medidas de los sensores). Como se puede observar, se pueden detectar algunos grupos de variables con alta correlación entre las variables del grupo. Como hemos mencionado anteriormente, no se proporciona una descripción física del sistema en el sitio web que proporciona los datos; sin embargo, algunos expertos en la materia han contribuido a través de los foros de discusión habituales disponibles en la plataforma tratando de encontrar la relación entre cada sensor y la parte correspondiente de la bomba de agua que este sensor está monitoreando. Según la opinión de uno de los expertos, los primeros 14 sensores están monitoreando ciertos aspectos, todos relacionados con el motor. El grupo medio de sensores está monitoreando el rendimiento de dos impulsores. Esto puede explicar en parte la estructura de correlación que se muestra en la Figura 3.5. Esto parece sugerir cierta estructura modular (por bloques) en el sistema.
3. Hemos utilizado el paquete *psych* del *software R*, para realizar el análisis factorial con estos datos. En primer lugar, determinamos el número apropiado de factores a extraer por medio de un gráfico de sedimentación que se muestra en la Figura 3.6.
4. **Análisis factorial.** Usamos la función *fa* incluida en el paquete *psych*

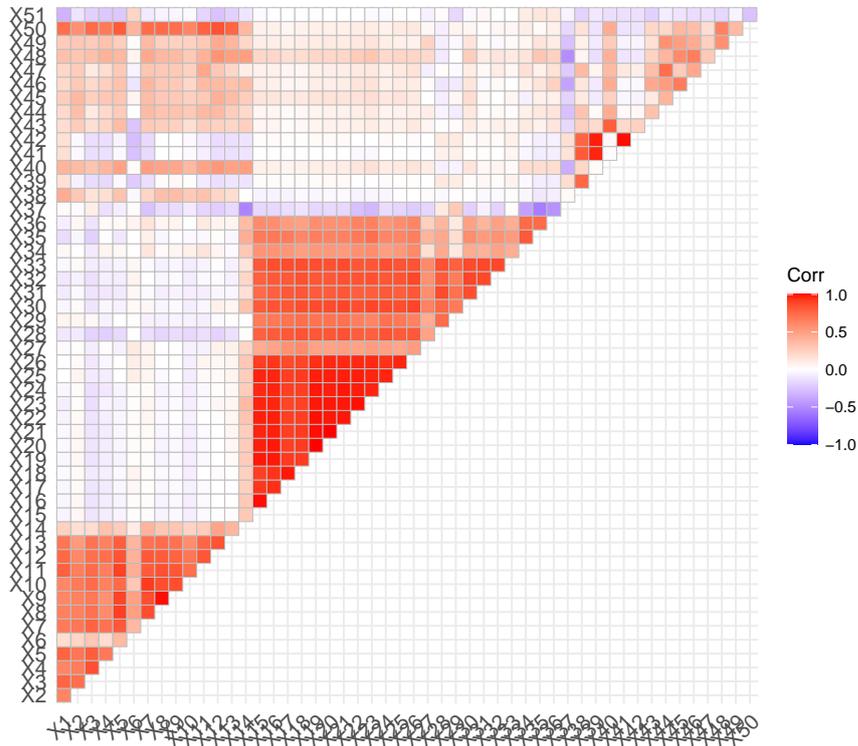


Figura 3.5: Matriz de correlación.

para realizar un análisis factorial exploratorio de variables latentes basado en máxima verosimilitud. Luego, la matriz de correlaciones se descompone en función de los valores propios y el vector propio. Las communalidades para cada variable son estimadas por los primeros cinco factores. Se obtienen las cargas y las correlaciones interfactoriales. A continuación damos la matriz de carga que ha sido estimada por este procedimiento.

Como puede verse en los resultados presentados en la Tabla 3.7, la estructura es muy clara para casi todos los sensores. Solo tres casos, en concreto, el 40, el 43 y el 45, parecen no presentar una contribución clara a un único factor.

5. **Estimación logística local.** El siguiente paso es ajustar un modelo logístico local en el espacio de  $p_0 = 5$  factores y luego hacemos una

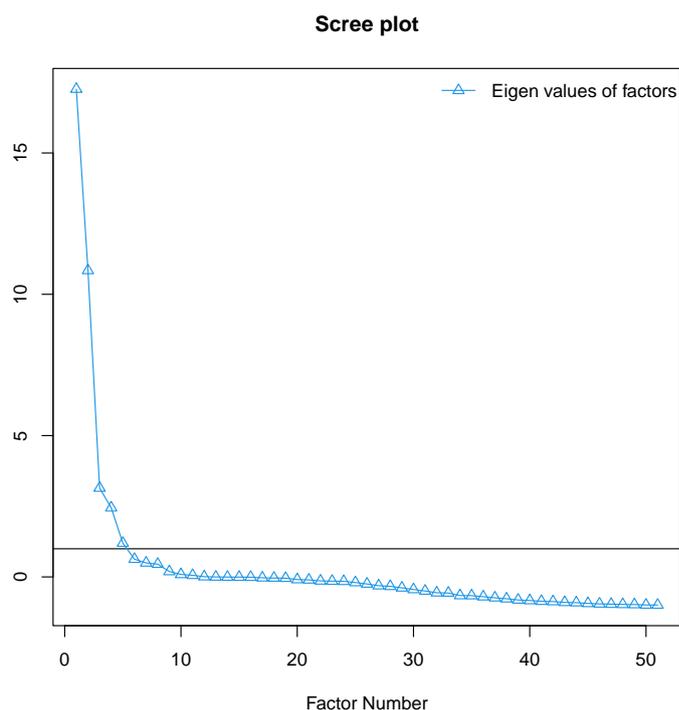


Figura 3.6: Gráfico de sedimentación. El análisis paralelo sugiere que el número de factores es 5.

transformación inversa de los resultados para escribir el modelo en el espacio de características originales de dimensión  $p = 51$ . El parámetro ancho de banda se ha seleccionado usando un método de validación cruzada.

Con estos datos, no consideramos el paso de isotonización. En este caso, los regresores considerados no corresponden directamente a los estados de las unidades dentro de un sistema. Más bien, las observaciones que tenemos dan información parcial sobre los estados de las componentes. De manera que, la propiedad de coherencia no se puede considerar aquí y la isotonización de las respuestas estimadas no tiene sentido en este estudio de datos reales y no se realizará. Tenemos un modelo que predice la probabilidad de que la máquina esté funcionando (función de fiabilidad) en función de los valores que muestra cada uno de los 51 sensores instalados.

6. **Medidas de importancia.** Con el modelo logístico local ajustado po-

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE FIABILIDAD DE SISTEMAS  
COMPLEJOS

Sensor	Factor 1	Factor 2	Factor 4	Factor 3	Factor 5
Sensor00		0.786		0.214	0.388
Sensor01		0.730			0.120
Sensor02	-0.111	0.859			0.254
Sensor03	-0.106	0.708	0.228		0.287
Sensor04		0.940	0.113		
Sensor05		0.457	-0.111	-0.211	-0.349
Sensor06		0.861	0.285		
Sensor07		0.927	0.150	0.108	-0.308
Sensor08		0.911	0.149	0.126	-0.356
Sensor09		0.828	0.101		-0.198
Sensor10		0.880	0.208		
Sensor11		0.856	0.313		0.129
Sensor12		0.804	0.231		0.141
Sensor13	0.213	0.257	0.580		
Sensor14	0.969		0.115		
Sensor16	0.977		0.100		
Sensor17	0.917				
Sensor18	0.921				
Sensor19	0.992		0.106		
Sensor20	0.991				
Sensor21	0.991				
Sensor22	0.973		0.201		
Sensor23	0.960		0.261		
Sensor24	0.977				
Sensor25	0.972		0.109		
Sensor26	0.941		0.163		
Sensor27	0.485		0.101		
Sensor28	0.857	-0.107	-0.203		
Sensor29	0.746		-0.360		0.168
Sensor30	0.860		0.145		
Sensor31	0.825				
Sensor32	0.836				
Sensor33	0.871				
Sensor34	0.499		0.389		-0.102
Sensor35	0.604	-0.130	0.507		-0.169
Sensor36	0.534		0.483		-0.153
Sensor37			-0.833	0.128	0.179
Sensor38		0.274		0.809	
Sensor39				0.968	
Sensor40		0.432	0.480		
Sensor41				0.983	
Sensor42				0.987	
Sensor43		0.227	0.317	0.253	
Sensor44		0.261	0.423		
Sensor45	0.101	0.318	0.344		0.174
Sensor46		0.262	0.552		0.124
Sensor47		0.244	0.348	0.131	
Sensor48	0.149	0.373	0.630		0.181
Sensor49		0.285	0.403		0.208
Sensor51		-0.177		-0.121	-0.429

Tabla 3.7: Matriz de cargas para el caso real considerado.

### 3.5. ESTUDIO DE UN CASO REAL: DATOS SOBRE SENSORES DE UNA BOMBA DE AGUA

---

demos obtener estimaciones de las primeras derivadas de la función de fiabilidad con respecto a todos sus argumentos. Hemos evaluado estas derivadas en todos los puntos de estimación que son los puntos de tiempo de observación (a las 00 : 00 todos los días). Por lo tanto, podemos evaluar cuál es el cambio en la fiabilidad causado por un cambio de unidad en una ubicación del sensor en particular. Así podemos construir un rango de componentes (sensores) en términos del efecto que tiene un incremento de una unidad en la correspondiente componente sobre la fiabilidad del sistema. Para cada dato  $i = 1, 2, \dots, 153$ , hemos calculado el vector cuyas entradas son las correspondientes derivadas parciales para todos las componentes,  $j = 1, 2, \dots, 51$ , que están dadas por

$$dR_{ij} = \hat{\beta}_{ij} \hat{R}_i (1 - \hat{R}_i),$$

donde  $\hat{\beta}_{ij}$  es el  $(j + 1)$ -ésimo elemento del vector de coeficientes estimados  $\beta$  en el punto de estimación  $i$ -ésimo, y  $\hat{R}_i$  es la estimación de la fiabilidad en el punto de estimación  $i$ -ésimo. Como medida de resumen, consideramos el promedio a lo largo de todos los puntos de estimación. Es decir, definimos

$$\overline{dR}_j = \frac{1}{153} \sum_{i=1}^{153} dR_{ij}. \quad (3.7)$$

Los resultados se presentan en la Figura 3.7. A partir de la gráfica, podemos apreciar el efecto diferente que cada componente tiene sobre el comportamiento del sistema. Considerando el valor absoluto que ofrece la  $\overline{dR}_j$  definido en la ecuación (3.7),  $\overline{dR}_j$ , es posible establecer un rango de componentes detectando aquellas con mayor impacto en el rendimiento del sistema, en el sentido de medida de importancia de Birnbaum definida en el Capítulo 2. En este caso, las unidades monitoreadas por sensores con los números 4, 3, 12, 50 y 13 se identifican como las más importantes, por lo tanto, para fines de mantenimiento, se recomienda inspeccionar estos elementos con más cuidado.

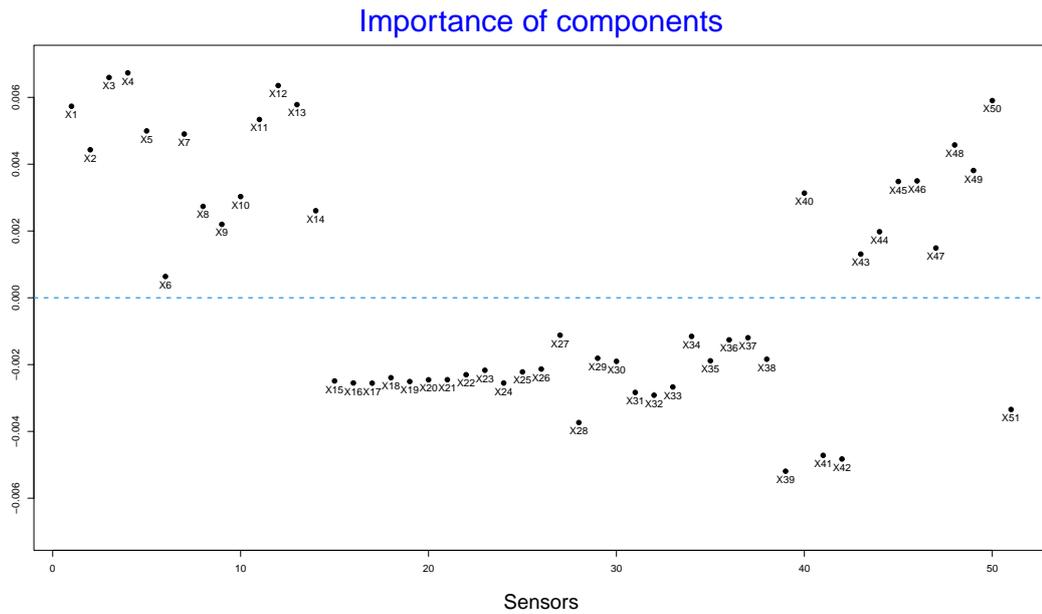


Figura 3.7: Promedio de las derivadas parciales estimadas de la función de fiabilidad,  $\overline{dR}_j$ , para  $j = 1, \dots, 51$ .

### 3.6. Soluciones con Machine Learning (Trabajo en desarrollo)

La creación de sistemas cada vez más complejos requiere de nuevas herramientas para modelar el análisis de fiabilidad Zio (2009). En este capítulo se presenta una método combinado de métodos de aprendizaje supervisado y no supervisado que permita predecir el fallo del sistema y a su vez poder elaborar un ranking de importancia entre las componentes de un sistema con alta dimensión, que encuentra los puntos débiles del sistema para que sean tenidos en cuenta para el mantenimiento. A continuación revisamos brevemente otros métodos existentes de *Machine Learning* (ML) que serán aplicados a continuación al ejemplo de datos reales.

- **Redes neuronales:** Las redes neuronales constituyen una nueva forma de analizar la información con una diferencia fundamental con respecto a las técnicas tradicionales: son capaces de detectar y aprender complejos patrones y características dentro de los datos. Se comportan de forma parecida a nuestro cerebro aprendiendo de la experiencia

y del pasado, y aplicando tal conocimiento a la resolución de problemas nuevos. Una vez adiestradas las redes neuronales pueden hacer previsiones, clasificaciones y segmentación.

Las redes neuronales se construyen estructurando en una serie de niveles o capas, al menos tres: entrada, procesamiento u oculta y salida; compuestas por nodos o “neuronas”. Cuando un nodo recibe las entradas o “estímulos” de otras, los procesa para producir una salida que transmite a la siguiente capa de neuronas. La señal de salida tendrá una intensidad fruto de la combinación de la intensidad de las señales de entrada y de los pesos que las transmiten. Los pesos tienen un valor distinto para cada par de neuronas que conectan pudiendo así fortalecer o debilitar la conexión o comunicación entre neuronas particulares. Los pesos son modificados durante el proceso de entrenamiento.

El diseño de la red de neuronas consistirá, entre otras cosas, en la definición del número de neuronas de las tres capas de la red. Las neuronas de la capa de entrada y las de la capa de salida vienen dadas por el problema a resolver, dependiendo de la codificación de la información. En cuanto al número de neuronas ocultas (y/o número de capas ocultas) se determinará por el método de prueba y error.

- ***Partial Least Squares (PLS)***: La regresión de mínimos cuadrados parciales, (PLS), introducida por Wold (1975) es un método estadístico que tiene relación con la regresión de componentes principales; en lugar de encontrar hiperplanos de máxima varianza entre la variable de respuesta y las variables independientes, se encuentra una regresión lineal mediante la proyección de las variables de predicción y las variables observables a un nuevo espacio. Esta técnica es una extensión del análisis de regresión múltiple en el que se analizan los efectos de combinaciones lineales de varios predictores sobre una variable de respuesta. Se establecen asociaciones con factores latentes extraídos de variables predictoras que maximizan la varianza explicada en las variables dependientes. Estos factores latentes se definen como combinaciones lineales construidas entre variables predictoras y de respuesta, de manera que la multidimensionalidad original se reduce a un número menor de factores ortogonales para detectar la estructura en las relaciones entre variables predictoras y entre estos factores latentes y las variables de respuesta. Los factores extraídos

explican proporciones cada vez más bajas de la varianza original. Además, *Partial least squares discriminant analysis*, (PLS-DA) es una variante que se utiliza cuando la variable  $Y$  es binaria.

- **Random Forest:** Es una combinación de árboles predictivos el cual trabaja con una colección de árboles incorrelados y los promedia (Hastie *et al.* (2001)). Se construye un árbol con un subconjunto aleatorio de la muestra, se repite este proceso un número grande de veces y el resultado de la predicción se calcula promediando los resultados de todos los árboles. El número de árboles es un parámetro que por lo general, se ajusta mediante validación cruzada. Cada uno de los árboles da una solución posible y finalmente se combinan todos los resultados de los modelos, lo que da un resultado final. Los cálculos internos se utilizan, asimismo, para medir la importancia de cada variable.

Este método tiene la ventaja de ser un clasificador que funciona tanto para variables continuas como para variables discretas. Es un modelo robusto que soporta bien los datos con ruido y tiene una gran fiabilidad. Se distingue principalmente del resto de métodos en que tiene la mejor solución al problema de cálculo de importancia de variables. Como inconveniente, aunque *Random Forest* es mucho mejor que un árbol de decisión, tiende también al sobreajuste, es difícil de interpretar dado que no sólo hay que interpretar un árbol de decisión sino varios a la vez; y tiene un alto coste computacional.

### 3.6.1. Aplicación de los métodos de ML en el caso real

A continuación, describimos los resultados obtenidos al aplicar los diferentes métodos de aprendizaje descritos al problema de datos reales del apartado 3.5. En este caso se ha procedido a realizar el siguiente tratamiento de los datos antes de aplicar los métodos:

- Preprocesado del fichero: Eliminación de aquellos que contienen algún valor NA y normalización de los datos.
- Balanceo de datos. Existe una desproporción considerable de  $Y = 1$  con respecto a  $Y = 0$ . Si se entrena el modelo en estas condiciones, se crea un modelo que decide  $Y = 1$  siempre, lo cual tendría una

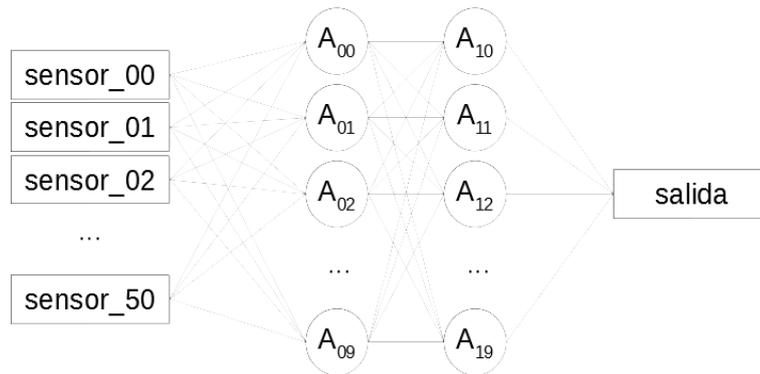


Figura 3.8: Red neuronal.

proporción de verdaderos positivos muy alta simplemente al azar y no porque el modelo sea correcto. Así que se ha procedido a realizar el balanceo de los mismos, de modo que se conservan del fichero original todos los registros con  $Y = 0$ , y se eligen de forma aleatoria igual número de filas de  $Y = 1$ .

- Datos de entrenamiento y test. Se dividen los datos de forma aleatoria en una proporción 80/20 que serán los datos de entrenamiento y los datos para la validación del modelo propuesto.
- Aplicación de los diferentes métodos de aprendizaje.

Una vez realizado este procedimiento se ha procedido a implementar los métodos de aprendizaje descritos 100 veces cada uno y así obtener ciertas medidas de validación de los métodos que permitirán la comparación entre los resultados obtenidos.

#### **Modelos con redes neuronales**

Se han probado 3 modelos distintos de redes neuronales:

- Modelo A: Una red de 2 capas intermedias de 10 neuronas cada una, como la de la Figura 3.8.

- Modelo B: Una red sin capas intermedias.
- Modelo C: Una red de 1 capa intermedia con 4 neuronas.

Se han entrenado los tres modelos de red neuronal usando para ello una serie de parámetros. A saber:

- Red secuencial densa. Esto significa que cada neurona de cada capa está conectada a todas las neuronas de la capa siguiente.
- Activación ReLu para capas intermedias.
- Activación sigmoide para la capa final de salida.
- Algoritmo de optimización. ADAM, que es una combinación de *Adaptive Gradient Algorithm* (AdaGrad) con *Root Mean Square Propagation* (RMSProp). Este algoritmo es el mejor algoritmo básico y se adapta muy bien a toda clase de problemas.
- Función de pérdida: entropía cruzada binaria, más adecuada que el MSE cuando la variable de respuesta es binaria.

Tras la finalización del entrenamiento de los modelos se obtienen que los tres convergen rápido a una tasa de error próxima a cero, pero que el **B**, que es el más simple, es el peor de los 3 modelos. El siguiente paso sería la validación del modelo, para ello se han obtenido las proporciones PFP (proporción de falsos positivos) y PVP (*proporción de verdaderos positivos*) que se encuentran en la Tabla 3.8, dónde podemos observar que los modelos **A** y **C** son parecidos y el **B** es el que presenta una mayor proporción de falsos positivos.

Modelo	PFP	PVP
A	0.0308	0.9928
B	0.0943	0.9910
C	0.0394	0.9945

Tabla 3.8: Validación de los modelos de redes neuronales.

Por último, para el modelo **A** presentamos en la Figura 3.9 un gráfico dónde se muestra la importancia para ese modelo que cada sensor tiene en el resultado final. Por orden, los sensores que resultan más relevantes en la detección del fallo del sistema son el 4, 5, 10, 11 y 28.

### Regresión PLS

En este caso se ha utilizado el algoritmo PLS-DA, que es un clasificador para variables discretas ya que la variable  $Y$  toma los valores 0 ó 1.

En primer lugar hay que decidir cuál es el número de componentes (combinaciones de variables) que hace mínimo el error cuadrático medio de las predicciones. En la Figura 3.10 se ha representado para cada número de componentes el MSE obtenido. Se observa que el número de componentes que hace mínimo el error serían 8, aunque a partir de 5 componentes la diferencia en el MSE obtenido es pequeña, por lo que por el criterio de parsimonia podemos decidir que se consideren 5 componentes. Una vez seleccionado el número de componentes se valida el modelo y se obtiene una tasa de acierto del 98.8%.

Es posible obtener una vez finalizado el proceso la estimación de los coeficientes de cada sensor y la normalización de estos coeficientes permite la identificación de la importancia de cada sensor. Los coeficientes normalizados se presentan en la Tabla 3.9. Según este método los sensores 28, 36, 4, 23 y 31 se identifican como las más importantes.

### Random Forest

Se ha repetido el procedimiento del algoritmo como en los casos anteriores y se ha obtenido una probabilidad de acierto del 99.43%. En este caso los coeficientes estimados que proporciona directamente el método corresponden con la importancia que cada sensor tiene en el resultado final. En la Figura 3.11 se muestran los coeficientes obtenidos, en la que podemos observar que los sensores más importantes serían 4, 0, 11, 12 y 5.

### 3.6.2. Resumen resultados

Los tres métodos de aprendizaje obtienen resultados bastante parecidos en cuando a la tasa de predicción, sin embargo, la interpretación es muy diferente y también lo es la clasificación de los sensores en cada uno de ellos. Sólo el sensor 4 aparece en el ranking entre los primeros en todos los casos.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE FIABILIDAD DE SISTEMAS  
COMPLEJOS

---

Sensor	Coficiente normalizado
Sensor00	1.4432
Sensor01	23.1506
Sensor02	49.8279
Sensor03	9.0896
Sensor04	54686.3446
Sensor05	1404.1684
Sensor06	30.2049
Sensor07	39.3384
Sensor08	37.4363
Sensor09	37.5713
Sensor10	486.4422
Sensor11	527.1688
Sensor12	263.8018
Sensor13	39.8323
Sensor14	7164.1337
Sensor16	9089.8283
Sensor17	9707.5952
Sensor18	0.3354
Sensor19	21933.6621
Sensor20	5625.4228
Sensor21	28006.1267
Sensor22	13779.6546
Sensor23	47703.8569
Sensor24	19524.8687
Sensor25	27320.5867
Sensor26	33787.6449
Sensor27	16687.3508
Sensor28	69164.6624
Sensor29	34990.6576
Sensor30	20726.4488
Sensor31	45972.3629
Sensor32	38273.2556
Sensor33	12731.3976
Sensor34	5446.9292
Sensor35	14039.6209
Sensor36	67951.8551
Sensor37	923.2331
Sensor38	1318.4663
Sensor39	1332.5707
Sensor40	1316.1345
Sensor41	780.9541
Sensor42	438.2133
Sensor43	484.6410
Sensor44	399.5580
Sensor45	295.9302
Sensor46	315.8884
Sensor47	308.0706
Sensor48	7971.7202
Sensor49	893.2390
Sensor51	7871.9074

Tabla 3.9: Coeficientes PLS normalizados.

Algoritmo	Componentes por orden de importancia
<b>AF-RL-IS</b>	02-03-11-49-00
RN	04-05-10-11-28
PLS	28-36-04-23-31
RF	04-00-11-12-05

Tabla 3.10: Tabla comparativa.

La Tabla 3.10 muestra las componentes más importantes por orden en función del algoritmo utilizado. Los resultados obtenidos no son comparables porque, por ejemplo, los métodos de ML usan balanceo, por tanto no trabaja los mismos datos que el algoritmo AF-RL-IS.

## 3.7. Conclusiones

En este capítulo se ha propuesto una estrategia para tratar con sistemas de fiabilidad de alta dimensión. A no ser que la experiencia muestre un diseño razonable del sistema que permita utilizar algunas estrategias para el ajuste del modelo, el problema de estimación tiene demasiadas características a tratar haciendo que las dimensiones del espacio crezcan exponencialmente mientras los datos disponibles se vuelven escasos. Hemos sugerido llevar a cabo un procedimiento para la reducción de la dimensión, para lo que hemos implementado un algoritmo capaz de transformar un gran conjunto de variables en un conjunto de dimensión reducida. A tener en cuenta cuando el número de características es muy grande es que pueden surgir ciertas correlaciones entre las unidades del sistema en la estructura latente subyacente a los datos y entonces el análisis factorial desarrollado usando una metodología de componentes principales sugerida aquí es una herramienta apropiada.

Para ilustrar el método, hemos llevado a cabo un extenso estudio de simulación. Hemos considerado tres sistemas con diferente complejidad, en términos del tamaño de los sistemas (número de unidades) y la configuración representada por diferentes RBD. En todos los casos, el algoritmo AF-RL-IS proporciona buenos resultados, en cuanto al reconocimiento de bloques y precisión del modelo. Además, para probar la importancia de

las componentes, hemos construido intervalos de confianza basados en el método de Montecarlo, lo que permite detectar debilidades en la configuración del sistema. También se ha considerado un conjunto de datos real con fines ilustrativos y se ha comprobado el buen funcionamiento del modelo.

Los métodos de *Machine Learning* proporcionan buenos resultados en la predicciones, aunque no todos permiten una interpretación sencilla del resultado final, ni hay un control total de los cálculos que se van realizando. En esta línea se pretende seguir investigando en el comportamiento de estos procedimientos y cómo poder adaptarlos a la situación de cada problema particular.

El contenido de este capítulo, excepto el último apartado que corresponde a un trabajo en desarrollo, se ha publicado en el artículo: Gámez, M.L., Navas-Gómez, F., Nozal-Cañadas, R., y Raya-Miranda, R. (2023). *Unsupervised and supervised learning for the reliability analysis of complex systems*. Quality and Reliability Engineering International. <http://dx.doi.org/10.1002/qre.3311>.

### 3.7. CONCLUSIONES

---

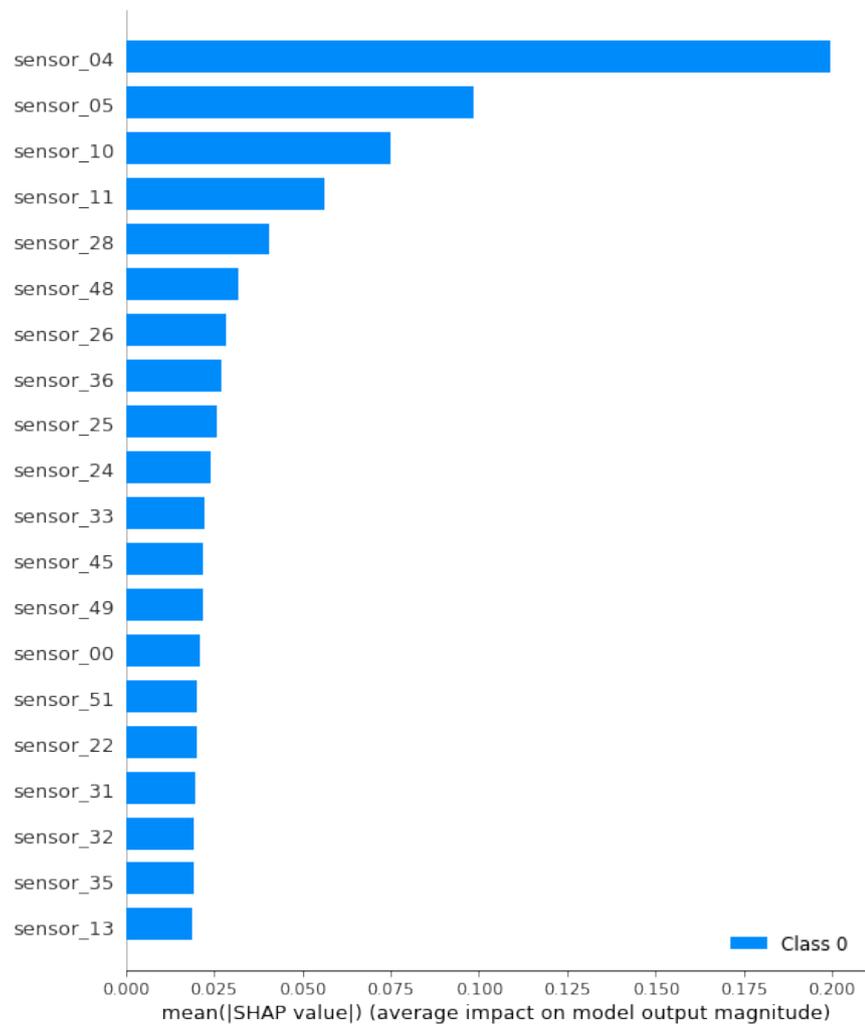


Figura 3.9: Importancia de los sensores según la red neuronal del modelo A.

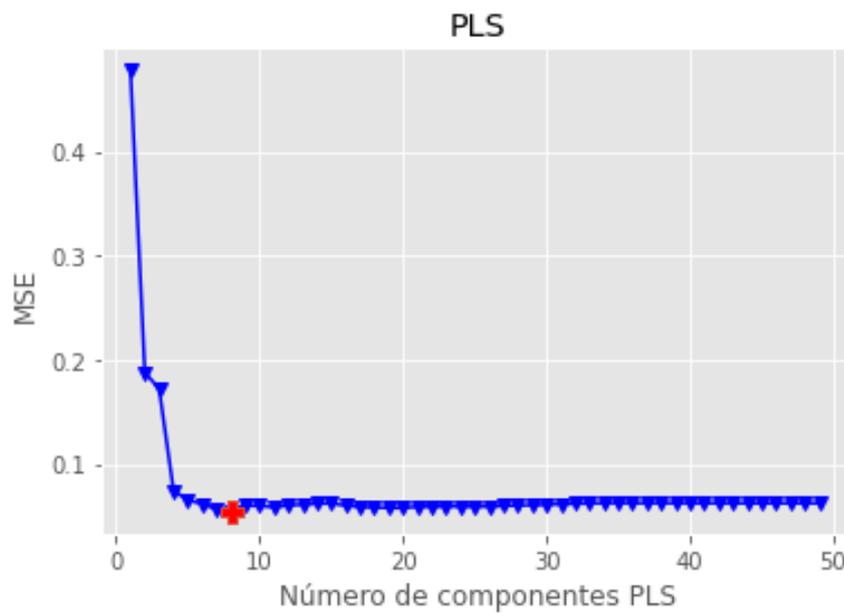


Figura 3.10: Número de componentes óptimo para PLS.

### 3.7. CONCLUSIONES

---

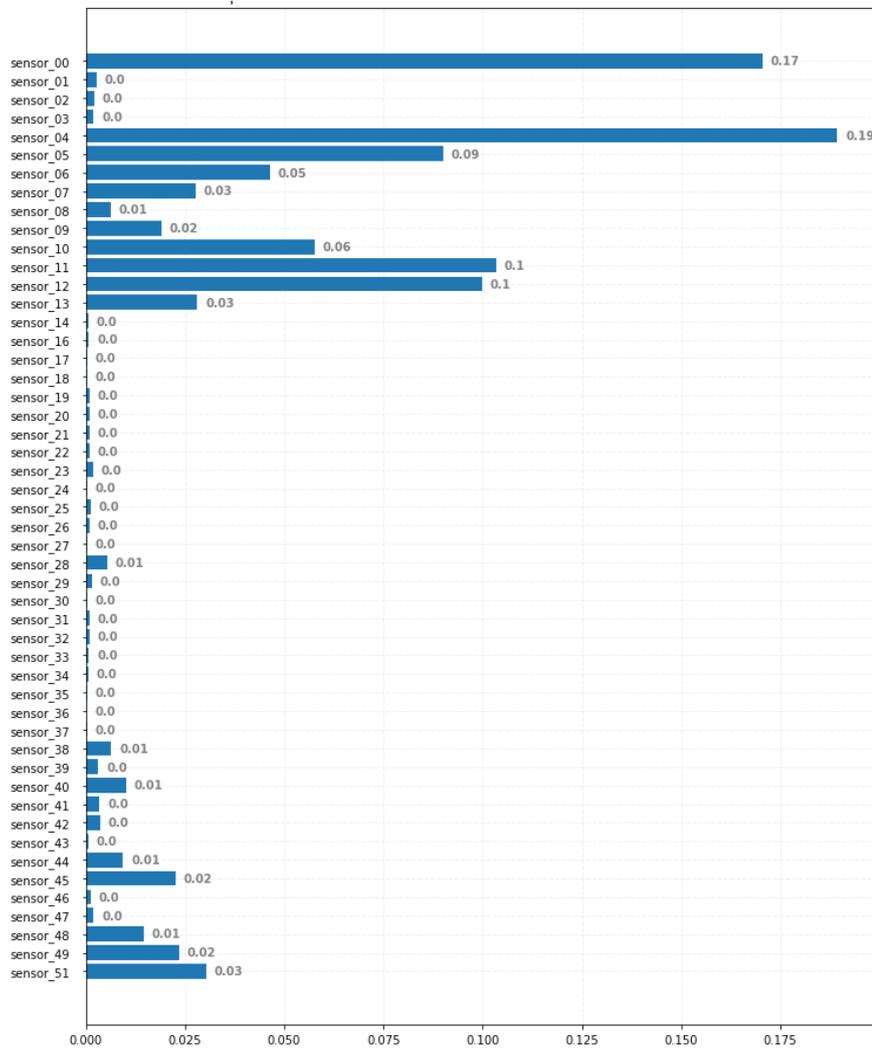


Figura 3.11: Importancia de los sensores según el algoritmo *Random Forest*.



## 4 Modelos dinámicos basados en procesos de Markov ocultos (HMM)

### 4.1. Introducción

Los modelos de Markov ocultos (HMM) constituyen uno de los métodos de modelización estadística más exitosos que han surgido en los últimos 50 años. El uso de estados ocultos (o inobservables) proporciona a estos modelos un carácter genérico ideal para analizar gran variedad de complejas series de tiempo reales, y esto unido a una estructura subyacente de dependencia a priori simple (markoviana) ha facilitado la creación de una base teórica sólida (propiedades asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud, por ejemplo) así como una potente implementación algorítmica (basada en métodos de optimización y simulación) con numerosas aplicaciones en la práctica llegando a constituirse en una materia que es autónoma desde un punto de vista teórico y auto-suficiente desde un punto de vista metodológico (Cappé *et al.* 2005).

Los procesos del mundo real generalmente producen resultados o salidas observables que se pueden caracterizar como señales, que pueden ser de naturaleza discreta o continua, estacionarias o no estacionarias y pueden registrarse puras o bien “corrompidas” por otras señales (ruido).

El problema de interés es entonces encontrar una descripción teórica del proceso que emite la señal con el fin de eliminar la distorsión o el ruido e identificar la señal pura. Además estos modelos nos permitirán aprender y reproducir mediante simulaciones el fenómeno que produce las señales sin tener que disponer de la fuente. Este aspecto es muy importante especialmente cuando el coste que supone obtener las señales de la fuente real es elevado.

A grandes rasgos, un HMM es una cadena de Markov,  $\{X_k; k \geq 0\}$ , observada con ruido. En este trabajo asumimos que esta cadena toma valores

en un conjunto finito. La cadena está oculta, es decir no es observable. Lo que sí está disponible al observador es otro proceso estocástico,  $\{Y_k; k \geq 0\}$ , relacionado con la cadena de Markov en el sentido de que  $X_k$  gobierna la distribución correspondiente a  $Y_k$ . Por ejemplo si  $Y_k$  tiene distribución Normal, la correspondiente media y varianza están determinadas por  $X_k$ . La cadena de Markov se denomina habitualmente el régimen o el estado mientras que las observaciones de  $Y_k$  son referidas como señales o símbolos. Toda la inferencia estadística, incluso sobre la propia cadena, tiene que hacerse en términos de  $\{Y_k\}$  solamente, puesto que no hay información muestral sobre  $\{X_k\}$ .

En este capítulo, una de las finalidades es construir modelos de predicción de fallos del sistema suponiendo que no disponemos de medidas directas de la degradación del sistema que vendrían dadas por la observación del proceso  $\{X_k\}$ . Más bien al contrario, el objetivo es construir un modelo (de la familia HMM) que nos permita a partir de las observaciones de otras señales estimar el nivel de degradación del sistema.

En su versión más sencilla, una hipótesis importante que se asume es que  $X_k$  es la única variable de la cadena que afecta a la distribución de  $Y_k$ . Más específicamente,  $\{(X_k, Y_k), k \geq 0\}$ , es un proceso estocástico bivalente en el que  $\{X_k\}$  es una cadena de Markov y, condicionada a  $\{X_k\}$ ,  $\{Y_k\}$  es una secuencia de variables aleatorias independientes tales que la distribución condicional de  $Y_k$  sólo depende de  $X_k$  (Baum y Petrie (1966), Rabiner (1989) y Bickel *et al.* (1998)).

Para entender mejor esta dependencia se suele usar un grafo dirigido como el de la Figura 4.1. Los nodos (círculos) de la figura corresponden a variables aleatorias, y las aristas y su dirección representan la estructura subyacente. En resumen, la distribución de la variable  $X_{k+1}$  condicionada a la historia del proceso,  $X_0, X_1, \dots, X_k$ , está determinada por el valor que toma el nodo precedente  $X_k$  (propiedad de Markov), y por otro lado, la distribución de  $Y_k$  condicionada a las observaciones pasadas,  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{k-1}$  y los valores pasados de los estados,  $X_0, X_1, \dots, X_k$ , está determinada únicamente por  $X_k$ . Este tipo de dependencia es a lo que nos referimos como estructura tipo M1-M0, donde M1 representa el grado de dependencia entre las variables de la cadena oculta y M0 en el proceso observado.

En este trabajo consideramos un modelo ligeramente más general que el presentado en la Figura 4.1. En concreto relajamos la hipótesis de independencia condicional entre las variables del proceso  $\{Y_k\}$  para asumir que

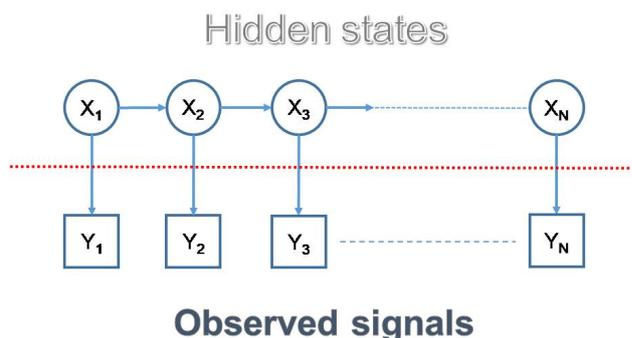


Figura 4.1: Modelo de Markov Oculto.

este proceso es también una cadena de Markov de primer orden donde, en cada instante  $k$ , la matriz de transición del proceso viene determinada por el estado ocupado por la cadena oculta, es decir el valor de  $X_k$ . Denotamos este tipo de dependencia  $M1 - M1$ , ver Berchtold (1999). En otras palabras, usaremos un modelo de la familia HMM donde la observación en un momento determinado depende no solo del estado oculto actual sino también de observaciones previas.

En la Tabla 4.1 se proporciona una revisión de este tipo de modelos.

En un contexto HMM el problema más difícil de resolver es estimar de forma óptima los parámetros del modelo a partir de un conjunto de datos (*training*). Una vez que el modelo se ha construido y validado, es necesario evaluarlo, lo que implica el cálculo de algunas probabilidades asociadas a los parámetros estimados del modelo (*evaluation*). Por último, en muchas situaciones resultará de gran utilidad determinar la secuencia óptima de estados ocultos por los que ha pasado el sistema y que han dado lugar a la salida registrada en la secuencia de observaciones (*decoding*). En el caso particular de aplicaciones en fiabilidad, resolver las dos primeras cuestiones nos permitirá estimar las medidas de dependencia más importantes en un sistema: fiabilidad, disponibilidad, tiempos medios, etc. Resolver la tercera cuestión informará sobre el proceso de degradación que ha sufrido el sistema hasta el estado último observado.

En resumen, el principal objetivo de este capítulo es, por tanto, construir

modelos estocásticos para describir la evolución en el tiempo de un sistema y estimar sus características usando un modelo HMM con dependencia de tipo M1-M1. Un importante campo de aplicaciones surge con el despliegue de redes de sensores que observan y controlan equipos industriales y cuyo uso se ha convertido en algo habitual hoy en día. El estado real del equipo es evaluado a partir de las informaciones proporcionadas por los sensores.

Definiremos algunas medidas de fiabilidad en este contexto y llevaremos a cabo un análisis de sensibilidad con el objetivo de controlar señales de falsos positivos (negativos) que podrían inducir a creer erróneamente que el sistema real está en estado de fallo (funcionamiento) cuando en realidad no es así. También introduciremos algunos aspectos que tienen que ver con el mantenimiento del sistema basados en el modelo considerado. Introduciremos el concepto de *signal-runs* que se usarán en el cálculo condicionado del estado del sistema. Finalizaremos este capítulo presentando una aplicación con datos reales procedentes de un sistema que representa una bomba de agua que abastece a una pequeña localidad y que es monitoreada por un sistema de sensores instalado en el sistema y que regularmente informan sobre determinados aspectos del rendimiento del sistema (mismo conjunto de datos del capítulo anterior).

## 4.2. Modelo M1M1-HMM en tiempo discreto

En esta sección estamos interesados en los estados consecutivos ocupados por el sistema en una rejilla de tiempos equiespaciados y, por consiguiente, consideramos un proceso estocástico en tiempo discreto para representar el comportamiento del sistema.

### 4.2.1. Descripción del modelo HMM con dependencia de tipo M1M1

Sea  $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$  un proceso estocástico bidimensional tal que  $X_n$  es una cadena de Markov en tiempo discreto (DTMC) que toma valores en el conjunto  $E = \{1, 2, \dots, d\}$  (a los que llamaremos estados), e  $Y_n$  es una DTMC con valores en  $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$  (a los que llamaremos señales).

Denotamos por  $\mathbf{P} = (P_{ij}; i, j \in E)$  a la matriz de transición de la MC  $\{X_n\}$ . Para un  $i \in E$  fijado, las transiciones de la MC  $\{Y_n\}$  ocurren de acuerdo a la matriz  $\mathbf{Q}_i$ , que es,

$$Q_i(y_l, y_h) = \mathbb{P}(Y_n = y_h \mid Y_{n-1} = y_l, X_n = i),$$

para todo  $y_l, y_h \in \mathcal{Y}$ . En general, tenemos que  $\{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_d\}$  son las posibles matrices de transición para la DTMC  $\{Y_n\}$ .

Puede comprobarse que  $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$  es una cadena de Markov bidimensional en tiempo discreto con matriz de transición denotada como  $\tilde{\mathbf{P}}$  y cuyos elementos son

$$\begin{aligned} \tilde{P}((i, y_l), (j, y_h)) &= \mathbb{P}((X_n, Y_n) = (j, y_h) \mid (X_{n-1}, Y_{n-1}) = (i, y_l)) = \\ &= P_{ij} Q_j(y_l, y_h), \end{aligned} \quad (4.1)$$

para todo  $(i, y_l), (j, y_h) \in \tilde{E}$ . Esta matriz, se puede escribir de forma compacta como sigue: Primero, para todo  $i \in E$ , definimos el subconjunto de pares cuyas primera componente es  $i$ , esto es,  $\tilde{i} = \{(i, y_1), \dots, (i, y_s)\}$ . Entonces podemos dividir el espacio de estados como sigue  $\tilde{E} = \tilde{1} \cup \tilde{2} \cup \dots \cup \tilde{d}$  y finalmente la matriz de transición del proceso bidimensional se puede escribir por bloques como

$$\tilde{\mathbf{P}} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} P_{11}\mathbf{Q}_1 & P_{12}\mathbf{Q}_2 & \dots & P_{1d}\mathbf{Q}_d \\ \hline P_{21}\mathbf{Q}_1 & P_{22}\mathbf{Q}_2 & \dots & P_{2d}\mathbf{Q}_d \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \hline P_{d1}\mathbf{Q}_1 & P_{d2}\mathbf{Q}_2 & \dots & P_{dd}\mathbf{Q}_d \end{array} \right), \quad (4.2)$$

donde, para  $i, j \in E$ , la submatriz  $P_{ij}\mathbf{Q}_j$  da las transiciones de la clase de estados  $\tilde{i}$  a  $\tilde{j}$ .

Asumimos que la primera componente del proceso bidimensional, es decir  $X_n$ , no es directamente observable mientras que la única información que se registra a lo largo del tiempo está dada por la segunda componente, es decir  $Y_n$ , como se describe en la Figura 4.2.

De este modo,  $\{(X_n, Y_n), n \geq 0\}$  es lo que vamos a denominar un proceso de Markov oculto en tiempo discreto con estructura de dependencia M1-M1, puesto que tanto el proceso oculto  $\{X_n\}$  como el proceso observable  $\{Y_n\}$  son respectivamente una MC de orden 1. A continuación denotaremos este proceso como DT-M1M1-HMM.

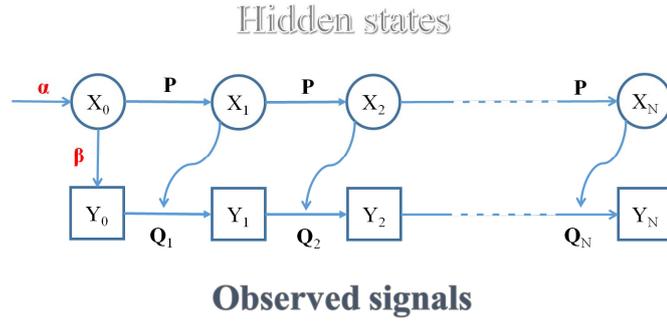


Figura 4.2: El modelo HMM en tiempo discreto con estructura de dependencia M1-M1.

### 4.2.2. Estimación por máxima verosimilitud

En esta sección describimos el procedimiento de estimación que vamos a considerar en este contexto de modelos de tipo HMM. Para facilitar la lectura empezamos representando la notación y parte de la terminología que se usará en el resto del capítulo.

**Notación:**

- $Y_{k_1}^{k_1+k_2} = \{Y_{k_1}, Y_{k_1+1}, \dots, Y_{k_1+k_2}\}$ .
- $X_{k_1}^{k_1+k_2} = \{X_{k_1}, X_{k_1+1}, \dots, X_{k_1+k_2}\}$ .
- $\Theta$  es el conjunto de posibles parámetros del modelo.
- $\theta$  es el vector de parámetros desconocido:  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ .
- $\theta_0$  es el verdadero vector de parámetros.
- $\theta_1 = \mathbf{P}^*$  donde,  $\mathbf{P}^*$  es la matriz  $\mathbf{P}$  sin la  $d$ -ésima columna. El número de parámetros distintos en  $\theta_1$  es:  $d \cdot (d - 1)$ .
- $\theta_2 = (\mathbf{Q}_1^*, \mathbf{Q}_2^*, \dots, \mathbf{Q}_d^*)$  con  $\mathbf{Q}_i^*$  la matriz  $\mathbf{Q}_i$  sin la  $s$ -ésima columna. El número total de parámetros a estimar en  $\theta_2$  es:  $d \cdot (s - 1) \cdot s$ . Entonces, el tamaño del vector  $\theta$  es  $d \cdot (d - 1) + d \cdot s \cdot (s - 1)$ .
- Condiciones iniciales:  $X_0 = 1$ ,  $Y_0 = y_1$ , luego  $\alpha = (1, 0, \dots, 0)_{(1 \times d)}$ ,  $\beta = (1, 0, \dots, 0)_{(1 \times s)}$ .

### 4.2.3. Estimación por máxima verosimilitud del DT-M1M1-HMM. Análisis de consistencia y normalidad asintótica

Supongamos que observamos una muestra, es decir  $Y_1^N = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ , que consiste en un conjunto de observaciones del proceso  $\{Y_n\}$ . A partir de aquí podríamos construir la función de verosimilitud como sigue

$$L(\boldsymbol{\theta}) = p_{\boldsymbol{\theta}}(Y_1^N) = \sum_{X_1^N \in E^N} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(X_1^N, Y_1^N), \quad (4.3)$$

entonces el objetivo es encontrar  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  que maximiza la función de log verosimilitud, esto es

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \ell(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.4)$$

con  $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \log L(\boldsymbol{\theta})$ .

Se asumen las siguientes condiciones (Barbu y Limnios 2008):

- A1. La cadena de Markov  $X$  es ergódica, es decir, irreducible y aperiódica, y estacionaria;
- A2. La cadena de Markov  $Y$  es ergódica, es decir, irreducible y aperiódica, y estacionaria;
- A3. Existe un entero  $n \in \mathbb{N}$  tal que la matriz de información de Fisher

$$I_n(\boldsymbol{\theta}_0) = -E_{\boldsymbol{\theta}_0} \left( \frac{\partial^2 \log p_{\boldsymbol{\theta}}(Y_1^N)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \right)_{i,j},$$

es no singular, donde  $\log p_{\boldsymbol{\theta}}(Y_1^N)$  es la función de log verosimilitud definida de la ecuación (4.3).

Basado en Baum y Petrie (1966), Bickel *et al.* (1998), Barbu y Limnios (2008) y Gámiz *et al.* (2023a) los siguientes resultados son directos.

**Teorema 5.** *Bajo los supuestos A1 - A3, dada una muestra de observaciones  $\{Y_1^N\}$ , el estimador máximo verosímil  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)_N$  de  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)$*

es fuertemente consistente cuando  $N$  tiende a infinito. Además, el vector aleatorio

$$\begin{aligned} \sqrt{N} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_N - \boldsymbol{\theta}_0) &= \\ &= \sqrt{N} [((\hat{P}(i, j)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j < d}), (\hat{Q}_i(y_l, y_h)_{1 \leq i \leq d; 1 \leq l \leq s; 1 \leq h < s})) \\ &\quad - ((P^0(i, j)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j < d}), (Q_i^0(y_l, y_h)_{1 \leq i \leq d; 1 \leq l \leq s; 1 \leq h < s}))] \end{aligned}$$

es asintóticamente Normal, cuando  $N \rightarrow +\infty$ , con media 0 y matriz de covarianza la inversa de la matriz de información de Fisher asintótica  $I(\boldsymbol{\theta}_0)$ .

La matriz de información de Fisher asintótica viene dada por

$$I(\boldsymbol{\theta}_0) = -E_{\boldsymbol{\theta}_0} \left( \frac{\partial^2 \log \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(Y_0 | Y_{-1}, Y_{-2}, \dots)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \Big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} \right)_{i,j},$$

ver Baum y Petrie (1966), y en Douc (2005) se muestra que  $I(\boldsymbol{\theta}_0)$  es no singular bajo el supuesto A2.

A partir del Teorema 5, deducimos las propiedades de consistencia y normalidad asintótica del estimador de la matriz  $\tilde{\mathbf{P}}$ , tal como presentamos a continuación.

### Consistencia

**Proposición 1.** *Bajo los supuestos A1-A3, dada una muestra de observaciones  $\{Y_1^N\}$ , el estimador máximo verosímil de  $(\tilde{P}((i, y_l), (j, y_h)))_{(i, y_l), (j, y_h) \in \tilde{E}}$  denotado por  $(\hat{\tilde{P}}((i, y_l), (j, y_h)))_{(i, y_l), (j, y_h) \in \tilde{E}}$ , es fuertemente consistente cuando  $N$  tiende a infinito.*

**Demostración:** Las probabilidades de transición para el proceso bidimensional  $(X, Y)$  se obtienen como  $\tilde{P}((i, y_l), (j, y_h)) = P(i, j)Q_j(y_l, y_h)$  para todo  $i, j \in E$  e  $y_l, y_h \in \mathcal{Y}$ . Del vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}$  definimos la función

$$\Phi : [0, 1]^{d \cdot (d-1) + d \cdot s \cdot (s-1)} \longrightarrow [0, 1]^{d^2 \cdot s^2},$$

tal que  $\Phi = (\Phi_{i,j,l,h}; i, j = 1, 2, \dots, d; l, h = 1, \dots, s) \in [0, 1]^{d^2 \cdot s^2}$  de la siguiente manera:

- $1 \leq i, j \leq d, j \neq d; 1 \leq l, h \leq s, h \neq s,$

$$\Phi_{i,j,l,h}(\boldsymbol{\theta}) = P_{ij}Q_j(y_l, y_h); \quad (4.5)$$

- $1 \leq i, j \leq d, j \neq d; 1 \leq l \leq s, h = s,$

$$\Phi_{i,j,l,s}(\boldsymbol{\theta}) = P_{ij} \left( 1 - \sum_{h=1}^{s-1} Q_j(y_l, y_h) \right); \quad (4.6)$$

- $1 \leq i \leq d, j = d; 1 \leq l, h \leq s, h \neq s,$

$$\Phi_{i,d,l,h}(\boldsymbol{\theta}) = \left( 1 - \sum_{j=1}^{d-1} P_{ij} \right) Q_d(y_l, y_h); \quad (4.7)$$

- $1 \leq i \leq d, j = d; 1 \leq l, h \leq s, h = s,$

$$\Phi_{i,d,l,s}(\boldsymbol{\theta}) = \left( 1 - \sum_{j=1}^{d-1} P_{ij} \right) \left( 1 - \sum_{h=1}^{s-1} Q_j(y_l, y_h) \right); \quad (4.8)$$

Esta función devuelve un vector cuyas componentes son los elementos de la matriz  $\tilde{\mathbf{P}}$  convenientemente ordenados. Entonces, usando la consistencia del estimador  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$ , que se expresa en el Teorema 5, y por la continuidad de la función  $\Phi$  definida arriba, obtenemos el resultado deseado.  $\square$

### Normalidad asintótica

**Proposición 2.** *Bajo los supuestos A1-A3, dada una muestra de observaciones  $\{Y_1^N\}$ , el vector aleatorio  $\mathbf{F}_N = (F_{(i,l),(j,h)}; i,j \in E; l,h \in \mathcal{Y})$  tal que*

$$F_{(i,l),(j,h)} = \sqrt{N} \left[ \left( \hat{\tilde{\mathbf{P}}}((i, y_l), (j, y_h)) \right)_{i,j \in E; l,h \in \mathcal{Y}} - \left( \tilde{\mathbf{P}}((i, y_l), (j, y_h)) \right)_{i,j \in E; l,h \in \mathcal{Y}} \right],$$

*es asintóticamente Normal, cuando  $N \rightarrow +\infty$  con media 0 y matriz de covarianzas  $\Sigma_{\tilde{\mathbf{p}}} = \Phi' \cdot \Sigma_{\boldsymbol{\theta}} \cdot \Phi^t$ , donde  $\Sigma_{\boldsymbol{\theta}}$  es la matriz de covarianzas del vector aleatorio  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_N$  y  $\Phi$  es la función definida en (4.5)-(4.8) cuya matriz de derivadas parciales es denotada por  $\Phi'$ .*

#### 4.2.4. El algoritmo EM para el DT-M1M1-HMM

En lugar de resolver directamente el problema de optimización (4.4), consideramos una versión del algoritmo EM que hemos adaptado para nuestro contexto de M1M1-HMM, que se resume como sigue.

Definimos la siguiente función

$$\psi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(0)}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^{(0)}} [\log \mathbb{P}(X_1^N, Y_1^N \mid \boldsymbol{\theta}, Y_1^N)], \quad (4.9)$$

con  $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(0)} \in \Theta$ . Para  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$  dado, el objetivo es obtener,  $\boldsymbol{\theta}^{(1)}$  tal que

$$\boldsymbol{\theta}^{(1)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \psi(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}^{(0)}).$$

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\theta} \mid \boldsymbol{\theta}^{(0)}) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^{(0)}} \left[ \log \left( \prod_{k=1}^N \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(X_{k-1}, X_k \mid Y_1^N) \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(X_k, Y_{k-1}, Y_k \mid Y_1^N) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^{(0)}} \left[ \sum_{k=1}^N \log \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(X_{k-1}, X_k \mid Y_1^N) + \sum_{k=1}^N \log \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(X_k, Y_{k-1}, Y_k \mid Y_1^N) \right] \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^{(0)}} [\log \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(X_{k-1}, X_k \mid Y_1^N)] \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \mathbb{E}_{\boldsymbol{\theta}^{(0)}} [\log \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}}(X_k, Y_{k-1}, Y_k \mid Y_1^N)] \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i \in E} \sum_{j \in E} \log P_{ij} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(0)}} [X_{k-1} = i, X_k = j \mid Y_1^N] \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \sum_{i \in E} \log Q_i(Y_{k-1}, Y_k) \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(0)}}(X_k = i \mid Y_1^N) \\ &= \psi_1(\boldsymbol{\theta}_1^{(1)} \mid \boldsymbol{\theta}^{(0)}) + \psi_2(\boldsymbol{\theta}_2^{(1)} \mid \boldsymbol{\theta}^{(0)}), \end{aligned}$$

En definitiva, podemos maximizar por separado la función  $\psi$  para obtener, respectivamente,  $\boldsymbol{\theta}_1^{(1)}$  y  $\boldsymbol{\theta}_2^{(1)}$ , y finalmente definir  $\boldsymbol{\theta}^{(1)} = (\boldsymbol{\theta}_1^{(1)}, \boldsymbol{\theta}_2^{(1)})$ .

A continuación detallamos los dos pasos del algoritmo, es decir, paso de maximización (M) y de cálculo de valores esperados (E).

### Paso M

Para la iteración  $m + 1$  del algoritmo tenemos una estimación del vector desconocido  $\boldsymbol{\theta}$  dado por  $\boldsymbol{\theta}^{(m)} = (\boldsymbol{\theta}_1^{(m)}, \boldsymbol{\theta}_2^{(m)})$ . Entonces, tenemos que maximizar  $\psi(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}^{(m)})$  y obtener  $\boldsymbol{\theta}^{(m+1)}$ .

Primero, consideramos  $\psi_1(\boldsymbol{\theta}_1 | \boldsymbol{\theta}^{(m)})$ , esto es,

$$\boldsymbol{\theta}_1^{(m+1)} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}_1} \sum_{k=1}^N \sum_{i,j \in E} (\log P_{ij}) \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}} [X_{k-1} = i, X_k = j | Y_1^N],$$

sujeto a  $\sum_{j \in E} P_{ij} = 1$ .

Usando el método de los multiplicadores de Lagrange obtenemos

$$P_{ij}^{(m+1)} = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}} (X_{k-1} = i, X_k = j | Y_1^N)}{\sum_{k=1}^N \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}} (X_{k-1} = i | Y_1^N)}.$$

Segundo, consideramos  $\psi_2(\boldsymbol{\theta}_2 | \boldsymbol{\theta}^{(m)})$

$$\begin{aligned} \psi_2(\boldsymbol{\theta}_2 | \boldsymbol{\theta}^{(m)}) &= \sum_{k=1}^N \sum_{i \in E} \log Q_i(Y_{k-1}, Y_k) \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}}(X_k = i | Y_1^N) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{i \in E} \sum_{y, y' \in \mathcal{Y}} \log Q_i(y, y') \mathbf{1}_{\{Y_{k-1}=y, Y_k=y'\}} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}}(X_k = i | Y_1^N). \end{aligned}$$

Nuevamente usamos los multiplicadores de Lagrange, y conseguimos

$$Q_i^{(m+1)}(y, y') = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}} (X_k = i | Y_1^N) \mathbf{1}_{\{Y_{k-1}=y, Y_k=y'\}}}{\sum_{k=1}^N \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}} (X_k = i | Y_1^N) \mathbf{1}_{\{Y_{k-1}=y\}}},$$

donde  $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$  toma el valor 1 si la condición  $\{\cdot\}$  se cumple y 0, en otro caso.

### Paso E

Para la iteración  $m$  del algoritmo tenemos que calcular las siguientes probabilidades:

- $\mathbb{P}_{\theta^{(m)}}(X_{k-1} = i, X_k = j \mid Y_1^N); \forall i, j \in E, \forall k = 1, \dots, N.$
- $\mathbb{P}_{\theta^{(m)}}(X_k = i \mid Y_1^N); \forall i \in E, \forall k = 1, \dots, N.$

Para hacerlo definimos lo que se conoce como familia de probabilidades hacia atrás y hacia adelante:

### 1. Probabilidades hacia adelante

Sea  $k = 0, 1, \dots, n, i \in E$ , definimos

$$F_k^{(m)}(i) = \mathbb{P}_{\theta^{(m)}}(Y_0^k, X_k = i).$$

Entonces tenemos  $\{F_k^{(m)}(i), i \in E; k = 0, 1, \dots, N\}$ , que satisface la siguiente ecuación de recurrencia

$$F_k^{(m)}(i) = \sum_{j \in E} F_{k-1}^{(m)}(j) P_{ji}^{(m)} Q_i^{(m)}(Y_{k-1}, Y_k); \forall k = 1, \dots, N, \forall i \in E.$$

Para  $k = 0$  llegamos a  $F_0^{(m)}(i) = \alpha(i)\beta_i(Y_0)$ .

### 2. Probabilidades hacia atrás

Para  $k = 0, 1, \dots, N-1, i \in E$ , definimos

$$B_k^{(m)}(i) = \mathbb{P}_{\theta^{(m)}}(Y_{k+1}^N \mid X_k = i, Y_k).$$

Entonces tenemos una familia de probabilidades  $\{B_k^{(m)}(i), i \in E, k = 0, \dots, N\}$ , satisfaciendo

$$B_k^{(m)}(i) = \sum_{j \in E} P_{ij}^{(m)} Q_j^{(m)}(Y_k, Y_{k+1}) B_{k+1}^{(m)}(j).$$

para  $k = 0, \dots, N-1$  y  $B_N^{(m)}(i) = 1, \forall i \in E$ .

También tenemos que  $\mathbb{P}_{\theta^{(m)}}(Y_1^N) = \sum_{i \in E} B_k^{(m)}(i) F_k^{(m)}(i)$ , para cualquier  $k = 0, \dots, N$ , y, en particular,  $\mathbb{P}_{\theta^{(m)}}(Y_1^N) = \sum_{i \in E} F_N(i)$ .

Finalmente, para  $k = 1, \dots, N$ ,

$$\mathbb{P}_{\theta^{(m)}}(X_k = i \mid Y_1^N) = \frac{F_k^{(m)}(i) B_k^{(m)}(i)}{\sum_{j \in E} F_k^{(m)}(j) B_k^{(m)}(j)},$$

y

$$\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}^{(m)}}(X_{k-1} = i, X_k = j | Y_1^N) = \frac{F_{k-1}^{(m)}(i)P_{ij}^{(m)}Q_j^{(m)}(Y_{k-1}, Y_k)B_k^{(m)}(j)}{\sum_{h \in E} B_k^{(m)}(h)F_k^{(m)}(h)}.$$

### 4.3. Modelo M1M1-HMM en tiempo continuo

En esta sección describimos el modelo en tiempo continuo.

#### 4.3.1. Descripción del modelo

Suponemos que en cualquier instante de tiempo  $t > 0$  podemos registrar una señal  $Y_t$  que informa de alguna manera sobre el estado del sistema  $X_t$ , el cual no podemos observar (estado oculto). En este caso,  $\{X_t, t > 0\}$  es una cadena de Markov en tiempo continuo (CTMC) con matriz generadora  $\mathbf{A}$  y matriz de funciones de transición  $\mathbf{P}$ . Por otro lado,  $\{Y_t, t > 0\}$  es también una CTMC cuya distribución depende del estado del sistema. Es decir, si  $X(t) = i$ , las transiciones de la cadena  $Y$  ocurren según la matriz generadora  $\mathbf{B}_i$ , es decir, denotamos la razón de transición de  $y$  a  $y'$ , cuando el estado oculto es  $i$ , mediante el correspondiente elemento de la matriz  $\mathbf{B}_i$ , es decir,  $B_{i,y,y'}$ , para  $i \in E$ , y para  $y, y' \in \mathcal{Y}$ . La matriz de funciones de transición en la cadena  $Y$  cuando el estado oculto  $X_t = i$ , es denotada por  $\mathbf{Q}_i$ .

En general,  $\{(X_t, Y_t); t > 0\}$  es una cadena de Markov bidimensional en tiempo continuo con espacio de estados  $\tilde{E} = E \times \mathcal{Y}$  y matriz de transición  $\tilde{\mathbf{P}}$  con elementos

$$\tilde{P}_t((i, y'), (j, y)) = P_{ij}(t)Q_{j,y'y}(t),$$

para  $i, j \in E$  e  $y', y \in \mathcal{Y}$ , y  $P_{ij}(t) = \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$  y  $Q_{j,y'y}(t) = \mathbb{P}(Y_t = y | X_t = j, Y_0 = y')$  para  $i, j \in E$  e  $y', y \in \mathcal{Y}$ .

La matriz generadora es  $\tilde{\mathbf{A}}$  cuyos elementos denotamos por  $\tilde{A}((i, y_l), (j, y_h))$  para  $(i, y_l), (j, y_h) \in \tilde{E}$ , se obtiene mediante el estudio de los siguientes lími-

tes

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ \mathbb{P}(X_t = j, Y_t = y_h \mid X_0 = i, Y_0 = y_l) - \delta_{ij} \delta_{y_l y_h} \} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_t = j \mid X_0 = i) \mathbb{P}(Y_t = y_h \mid Y_0 = y_l, X_t = j) - \delta_{ij} \delta_{y_l y_h}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t) Q_{j;y_l y_h}(t) - \delta_{ij} \delta_{y_l y_h}}{t}, \end{aligned}$$

para diferentes valores de  $i, j \in E$  e  $y_l, y_h \in \mathcal{Y}$ , y donde  $\delta_{\cdot}$  es la función delta de Kronecker.

Consideramos 4 casos:

- $i \neq j$  y  $l \neq h$ , entonces

$$\tilde{A}((i, y_l), (j, y_h)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t) Q_{j;y_l y_h}(t)}{t} = 0,$$

usando que, para  $i \neq j$ ,  $P_{ij}(t) \rightarrow 0$ , y, para  $l \neq k$ ,  $Q_{j;y_l y_h}(t)/t \rightarrow B_{j;y_l y_h} < +\infty$ , cuando  $t \rightarrow 0$ .

- $i = j$  y  $l \neq h$ , entonces

$$\tilde{A}((i, y_l), (i, y_h)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ii}(t) Q_{j;y_l y_h}(t)}{t} = B_{j;y_l y_h},$$

usando que,  $P_{ii}(t) \rightarrow 1$ , y  $Q_{j;y_l y_h}(t)/t \rightarrow B_{j;y_l y_h}$ , cuando  $t \rightarrow 0$ .

- $i \neq j$  e  $y_l = y_h = y$ , entonces

$$\tilde{A}((i, y), (j, y)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t) Q_{j;yy}(t)}{t} = A_{ij},$$

usando que,  $Q_{j;yy}(t) \rightarrow 1$ , y  $P_{ij}(t)/t \rightarrow A_{ij}$ , cuando  $t \rightarrow 0$ .

- $i = j$  e  $y_l = y_h = y$ , entonces

$$\tilde{A}((i, y), (i, y)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ii}(t) Q_{j;yy}(t) - 1}{t} = A_{ii} + B_{j;yy},$$

donde escribimos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ii}(t) Q_{j;yy}(t) - 1}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(P_{ii}(t) - 1) Q_{j;yy}(t) + Q_{j;yy}(t) - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{ii}(t) - 1}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q_{j;yy}(t) - 1}{t}, \end{aligned}$$

usando que  $\lim_{t \rightarrow 0} Q_{j;yy}(t) = 1$ , para cualquier  $y \in \mathcal{Y}$ .

### 4.3.2. Estimación del CT-M1M1-HMM a partir de una estrategia de discretización

Para estimar las características del modelo descrito en la Sección 4.3 consideramos un procedimiento que usa las observaciones de los estados del sistema registradas en una rejilla de tiempos pre-especificada, es decir,  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ , con  $t_n - t_{n-1} = h$ , para todo  $n = 1, \dots, N$ , y con  $h > 0$  pequeña. Consideramos el enfoque presentado en Gámiz *et al.* (2023b) donde se analiza un HMM en tiempo continuo con estructura de dependencia M1-M0.

Generalmente, entre otros, por motivos económicos, no es posible realizar un seguimiento continuo del sistema, sino que se registran observaciones de forma regular en el tiempo. En otras palabras, asumimos que el sistema se observa en los instantes  $t_n = n h$ , con  $h > 0$  alguna constante y  $n = 0, 1, \dots$ . Entonces podemos considerar una versión discreta del proceso bidimensional, que es  $\{(\hat{X}_n, \hat{Y}_n), n = 0, 1, \dots\}$ , donde  $\hat{X}_n$  es la configuración interna del sistema en el instante  $t_n$ , esto es  $\hat{X}_n = X_{t_n}$ ; y  $\hat{Y}_n = Y_{t_n}$  es el indicador observado del rendimiento del sistema en el instante  $t_n$  (señal).

Dado que la matriz generadora de la cadena oculta es  $\mathbf{A} = \lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{P}(t) - \mathbf{I})/t$ , con  $\mathbf{I}$  la matriz identidad, podemos definir, para un  $h > 0$ , suficientemente pequeño

$$\mathbf{P}(h) = \mathbf{A}h + \mathbf{I},$$

e, igualmente, tenemos

$$\mathbf{Q}_i(h) = \mathbf{B}_i h + \mathbf{I}.$$

para todo  $i \in E$ .

Más específicamente,  $P_{ij}(h)$  es el elemento  $(i, j)$  de la matriz  $\mathbf{P}(h)$  definida anteriormente, esto es  $P_{ij}(h) = A_{ij}h + \delta_{ij}$ , para  $i, j \in E$ ; y, de manera similar, para  $y', y \in \mathcal{Y}$ ,  $Q_{i;y'y}(h) = B_{i;y'y}h + \delta_{y'y}$ , para  $i \in E$ .

Basado en las observaciones  $\{\hat{Y}_1^N\}$  obtenemos los estimadores  $\hat{\mathbf{P}}(h)$  como hemos explicado en la Sección 4.2.2 y  $\hat{\mathbf{Q}}_i(h)$ , para todo  $i \in E$ , y entonces se definen los siguientes estimadores de los parámetros del modelo en tiempo continuo

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}(h) - \mathbf{I}}{h},$$

y

$$\widehat{\mathbf{B}}_i = \frac{\widehat{\mathbf{Q}}_i(h) - \mathbf{I}}{h}, \quad i \in E,$$

para  $h$  suficientemente pequeña. Las propiedades asintóticas de estos estimadores se pueden deducir usando unos argumentos similares a los dados en Gámiz *et al.* (2023b).

### 4.3.3. Un sistema con dos unidades en redundancia activa

Consideramos una estructura que consta de 2 unidades que funcionan con redundancia activa de la siguiente manera. Cada unidad puede estar en uno de dos posibles estados (operativo y fallo). Cuando la unidad  $i$  está en estado operativo, cambia al estado de fallo con una tasa  $\lambda_i$ , y cuando cambia del estado de fallo a estado operativo lo hace con una tasa  $\mu_i$ , para  $i = 1, 2$ . Las unidades operan independientemente y el estado real de cada unidad no está visible para el observador. En otras palabras, los estados de las unidades son ocultos.

La única información sobre el rendimiento del sistema se da mediante una variable indicadora  $Y_t$  que toma el valor 0, cuando el rendimiento es bueno y 1, en otro caso.

El espacio de estados de la estructura (es decir, el sistema de dos unidades) se puede representar mediante el conjunto  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ , descrito en la Tabla 4.2.

Si denotamos por  $X_t$  al estado ocupado por la estructura no observada en el instante  $t$ , entonces  $\{X_t, t > 0\}$  es una CTMC que toma valores en  $E$ , con matriz generadora dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_1) & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -(\mu_1 + \lambda_2) & \lambda_2 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_2) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Para  $t > 0$ ,  $\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  es la matriz de probabilidades de transición.

Asumimos que  $\{Y_t, t > 0\}$  es una CTMC que toma valores en  $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$  con matriz generadora condicionada a la verdadera configuración interna de la

estructura como sigue. Si  $X_t = i$ , entonces las intensidades de transición del proceso  $Y$  se dan mediante la matriz  $\mathbf{B}_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$ , y  $\mathbf{Q}_i(t) = e^{\mathbf{B}_i t}$  es la correspondiente matriz de probabilidades de transición, esto es, la matriz cuyas entradas son  $Q_{i;01}(t) = \mathbb{P}(Y(t) = 1 \mid X_t = i, Y(0) = 0) = 1 - Q_{i,00}(t)$ , y  $Q_{i;10}(t) = \mathbb{P}(Y(t) = 0 \mid X_t = i, Y(0) = 1) = 1 - Q_{i,11}(t)$ , para  $i \in E$ .

Una descripción completa del comportamiento del sistema se obtiene mediante el proceso bidimensional  $(X_t, Y_t)$ , cuyo espacio de estados es el conjunto  $\tilde{E} = E \times \mathcal{Y}$ . Nuestro principal propósito es derivar las características de la distribución de este proceso bidimensional.

En este caso, la matriz generadora de la estructura interna (no observable) se da en (4.10). Entonces, para el proceso bidimensional  $(X_t, Y_t)$ , el espacio de estados  $\tilde{E} = E \times \mathcal{Y}$ , con  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ , se puede escribir como

$$\tilde{E} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1)\},$$

y su correspondiente matriz generadora  $\tilde{\mathbf{A}}$  es

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{1;00} & B_{1;01} & A_{12} & 0 & A_{13} & 0 & A_{14} & 0 \\ B_{1;10} & A_{11} + B_{1;11} & 0 & A_{12} & 0 & A_{13} & 0 & A_{14} \\ A_{21} & 0 & A_{22} + B_{2;00} & B_{2;01} & A_{23} & 0 & A_{24} & 0 \\ 0 & A_{21} & B_{2;10} & A_{22} + B_{2;11} & 0 & A_{23} & 0 & A_{24} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & 0 & A_{33} + B_{3;00} & B_{3;01} & A_{34} & 0 \\ 0 & A_{31} & 0 & A_{32} & B_{3;10} & A_{33} + B_{3;11} & 0 & A_{34} \\ A_{41} & 0 & A_{42} & 0 & A_{43} & 0 & A_{44} + B_{4;00} & B_{4;01} \\ 0 & A_{41} & 0 & A_{42} & 0 & A_{43} & B_{4;10} & A_{44} + B_{4;11} \end{pmatrix}.$$

### Notación matricial

Sin pérdida de generalidad, podemos representar los estados de la MC oculta mediante  $E = \{1, \dots, d\}$ , y para la MC observable tomamos  $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_s\}$ . Entonces los elementos del conjunto  $\tilde{E}$  se pueden ordenar como sigue

$$\tilde{E} = \{(1, y_1), \dots, (1, y_s), (2, y_1), \dots, (2, y_s), \dots, (d, y_1), \dots, (d, y_s)\}.$$

Entonces, la matriz generadora del proceso bidimensional se puede expresar como

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_s + \text{Diag}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_d), \quad (4.11)$$

donde  $\otimes$  denota el producto de Kronecker matricial, y con  $\text{Diag}$  denotando una función que transforma un conjunto de  $d$  matrices cuadradas de

dimensión  $s \times s$  cada uno, en una matriz de dimensión  $d \cdot s \times d \cdot s$  que se puede escribir por bloques como sigue

$$\text{Diag}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_s) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0}_s & \dots & \mathbf{0}_s \\ \mathbf{0}_s & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{0}_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0}_s & \dots & \mathbf{0}_s & \mathbf{B}_d \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{0}_s$  es una matriz cuadrada de ceros con dimensión  $s \times s$ .

**Observación.** En el caso particular de un sistema con dos unidades la matriz de transición  $\tilde{\mathbf{P}}$  se determina por el siguiente vector de parámetros

$$\theta = (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, B_{1;01}, B_{1;10}, B_{2;01}, B_{2;10}, B_{3;01}, B_{3;10}, B_{4;01}, B_{4;10},).$$

Todos estos parámetros son interpretables desde el punto de vista del comportamiento del sistema. Por ejemplo,  $B_{2;01}$  ( $B_{3;01}$ ) dan la tasa de fallo del sistema cuando la unidad 1 está operativa y la unidad 2 no está operativa. Si por ejemplo, las estimaciones muestran la relación  $\hat{B}_{1;01} > \hat{B}_{2;01}$ , esto puede sugerir que la unidad 1 tiene más impacto en el rendimiento del sistema, lo cual puede ayudarnos a detectar zonas débiles en la estructura del sistema para diseñar estrategias de mantenimiento que prioricen estas unidades. Todo ello, siempre que los indicadores brinden información fiable como se verá más adelante en la Sección 4.5.1.

## 4.4. Fiabilidad a partir de modelos M1M1-HMM

En esta sección definimos la función de fiabilidad a partir de ambos enfoques, en tiempo discreto y en tiempo continuo.

### 4.4.1. Modelo en tiempo discreto

El modelo  $\{(X_n, Y_n); n = 0, 1, \dots\}$  es una cadena de Markov bidimensional en tiempo discreto con espacio de estados  $\tilde{E} = E \times \mathcal{Y}$  y matriz de transición  $\tilde{\mathbf{P}}$  deducida en la Sección 4.2. Siguiendo el argumento en Gámiz *et al.* (2023b), asumimos que el espacio de estados  $E$  se divide en dos

subconjuntos tal que  $E = U \cup D$ , donde podemos denotar, por ejemplo,  $U := \{1, \dots, m\}$ , los estados operativos, y  $D := \{m+1, \dots, d\}$ , los estados no operativos. Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad, esta notación se usa para los estados del sistema. Adicionalmente, los estados activos del sistema se pueden definir no solo por  $U \in E$  sino también mediante algún subconjunto de  $\mathcal{Y}$ . En algunas situaciones, la información que obtenemos sobre el funcionamiento del sistema se puede clasificar en dos grupos de señales. Por un lado, tenemos un grupo de señales indicando un buen rendimiento, el subconjunto  $\mathcal{Y}_1$ ; y, por otro lado, hay otro grupo de señales  $\mathcal{Y}_2$  para advertir sobre algún problema grave en el sistema que implique la interrupción provocando así el fallo del sistema, es decir, tenemos la partición  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$ . El conjunto de estados del proceso bidimensional  $(X_n, Y_n)$  se puede escribir como  $\tilde{E} = E \times \mathcal{Y}$ , con  $\tilde{E} = \{(1, y_1), \dots, (d, y_1), (1, y_2), \dots, (d, y_2), \dots, (1, y_s), (2, y_s), \dots, (d, y_s)\}$ . Definimos  $\tilde{\mathcal{U}} = U \times \mathcal{Y}_1$  y  $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{E} \setminus \tilde{\mathcal{U}}$ , con  $\tilde{E} = E \times \mathcal{Y}$  ya definido.

Denotamos por  $\mathcal{N}$  la primera vez que el sistema visita el conjunto de estados no operativos  $D$ , es decir, el tiempo de primera entrada en el conjunto  $D$ , eso es,  $\mathcal{N} = \min\{n > 0 : (X_n, Y_n) \in \tilde{\mathcal{D}}\}$ . Por tanto, la fiabilidad del sistema se puede definir como  $\tilde{R}^d(n) = \mathbf{P}(\mathcal{N} > n)$ , para  $n \geq 0$ . Condicionando sobre el estado inicial  $(i, y) \in \tilde{U} = U \times \mathcal{Y}_1$ , escribimos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{(i,y)}^d(n) &= \mathbb{P}_i(\mathcal{N} > n) = \mathbb{P}_i(X_m \in U, Y_m \in \mathcal{Y}_1, 0 < m \leq n) \\ &= \mathbb{P}_i((X_n, Y_n) \in \tilde{U}, 0 < m \leq n), \end{aligned} \quad (4.13)$$

y entonces

$$\tilde{R}^d(n) = \sum_{(i,y) \in \tilde{U}} \tilde{R}_{(i,y)}^d(n),$$

para  $n = 1, 2, \dots$ . Usando notación matricial, podemos escribir

$$\tilde{R}^d(n) = \tilde{\alpha}(\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{U}\tilde{U}})^n \mathbf{1}_{\tilde{U}},$$

donde  $\tilde{\mathbf{P}}_{\tilde{U}\tilde{U}}$  es la submatriz de  $\tilde{\mathbf{P}}$  con todas las probabilidades de transición entre estados del subconjunto  $\tilde{U}$ , considerando una partición por bloques de la matriz  $\mathbf{P}$  como sigue

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\tilde{U}\tilde{U}} & \mathbf{P}_{\tilde{U}\tilde{D}} \\ \mathbf{P}_{\tilde{D}\tilde{U}} & \mathbf{P}_{\tilde{D}\tilde{D}} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

A partir de una muestra  $Y_1, \dots, Y_N$ , definimos el siguiente estimador de la función de fiabilidad en tiempo discreto como

$$\widehat{\mathbf{R}}^d(n) = \widetilde{\alpha}(\widetilde{\mathbf{P}}_{\widetilde{U}\widetilde{U}})^n \mathbf{1}_{\widetilde{U}}, \quad n \geq 0.$$

Usando un argumento similar al dado en Gámiz *et al.* (2023b), se puede obtener el siguiente resultado.

**Proposición 3.** *El estimador  $\widehat{\mathbf{R}}^d(n)$  es asintóticamente Normal, cuando  $N \rightarrow \infty$ , para cualquier  $n \geq 1$ , es decir,*

$$\sqrt{N}(\widehat{\mathbf{R}}^d(n; N) - \widetilde{\mathbf{R}}^d(n)) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \Sigma_{R^d}).$$

#### 4.4.2. Modelo en tiempo continuo

El modelo  $\{(X_t, Y_t); t > 0\}$  es una cadena de Markov bidimensional en tiempo continuo con espacio de estados  $\widetilde{E} = E \times \mathcal{Y}$  y matriz generadora  $\widetilde{\mathbf{A}}$  como se deduce en la Sección 4.3. De este modo, la matriz generadora  $\widetilde{\mathbf{A}}$  tiene elementos dados en la ecuación (4.11) y se puede escribir en bloques como

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\widetilde{U}\widetilde{U}} & \mathbf{A}_{\widetilde{U}\widetilde{D}} \\ \hline \mathbf{A}_{\widetilde{D}\widetilde{U}} & \mathbf{A}_{\widetilde{D}\widetilde{D}} \end{array} \right). \quad (4.15)$$

Denotamos por  $\mathcal{T}$  la primera vez que el sistema visita el conjunto de estados inactivos  $D$ , es decir, el tiempo de visita del conjunto  $D$ . Consideramos  $\widetilde{\mathcal{U}} = U \times \mathcal{Y}_1$  y  $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{E} \setminus \widetilde{\mathcal{U}}$ , siendo  $\widetilde{E} = E \times \mathcal{Y}$ . Entonces  $\mathcal{T} = \inf\{t > 0 : (X_t, Y_t) \in \widetilde{\mathcal{D}}\}$ . Por tanto, la fiabilidad del sistema se puede definir como  $\widetilde{R}^c(t) = \mathbb{P}(\mathcal{T} > t)$ , para  $t \geq 0$ . Condicionando en el estado inicial  $(i, y) \in \widetilde{U} = U \times \mathcal{Y}_1$ , escribimos

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{(i,y)}^c(t) &= \mathbb{P}_i(\mathcal{T} > t) = \mathbb{P}_i(X_s \in U, Y_s \in \mathcal{Y}_1, 0 < s \leq t) \\ &= \mathbb{P}_i((X_t, Y_t) \in \widetilde{U}, 0 < s \leq t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

y entonces

$$\widetilde{R}^c(t) = \sum_{(i,y) \in \widetilde{U}} \widetilde{R}_{(i,y)}^c(t),$$

para  $t > 0$ . Usando notación matricial, podemos escribir

$$\widetilde{R}^c(t) = \widetilde{\alpha} \exp\left(\widetilde{\mathbf{A}}_{\widetilde{U}\widetilde{U}} t\right) \mathbf{1}_{\widetilde{U}},$$

donde  $\tilde{\mathbf{A}}_{\tilde{U}\tilde{U}}$  denota la submatriz de  $\tilde{\mathbf{A}}$  con todas las tasas de transición entre estados del subconjunto  $\tilde{U}$ , como se expresa en (4.15).

A partir de una muestra  $\hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_N$ , con  $\hat{Y} = Y(t_{nh})$  para un  $h$  fijado suficientemente pequeño, definimos el siguiente estimador de la función de fiabilidad en tiempo continuo

$$\widehat{R}_h^c(t) = \tilde{\alpha} \cdot \exp(\widehat{\mathbf{A}}_{h,\tilde{U}\tilde{U}} t) \cdot \mathbf{1}_{\tilde{U}}, \quad t \geq 0.$$

Usando un argumento similar al dado en Gámiz *et al.* (2023b), se puede obtener el siguiente resultado.

**Proposición 4.** *El estimador  $\widehat{R}_h^c(t)$  es asintóticamente Normal, cuando  $N \rightarrow \infty$ , y  $h \rightarrow 0$ , para cualquier  $t \geq 0$ , es decir,*

$$\sqrt{n}(\widehat{R}_h^c(t) - \tilde{R}^c(t)) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma_{R^c}).$$

## 4.5. Mantenimiento

En este trabajo, la estimación de los parámetros del modelo se basa en una estrategia de discretización como se ha explicado en la Sección 4.3.2. Es decir, las observaciones se registraron en una rejilla de puntos de tiempo discretos, de manera que formulamos el problema de las estrategias de mantenimiento a partir del modelo HMM en tiempo discreto definido anteriormente. Es decir, definimos  $(X_n, Y_n)$  como en la Sección 4.2. Siguiendo la Sección 4.4 asumimos que el espacio de estados del sistema se puede dividir en dos subconjuntos, esto es  $E = U \cup D$ , con  $U$  los estados operativos, y  $D$  los estados no operativos. Además, el conjunto de señales se puede dividir en dos subconjuntos  $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2$ , con  $\mathcal{Y}_1$  las señales seguras, e  $\mathcal{Y}_2$  las señales de advertencia. Consideremos las políticas de mantenimiento de la siguiente manera.

El sistema se inspecciona de manera regular para detectar cualquier problema e intervenir si es necesario. La estrategia natural consideraría realizar un mantenimiento cuando se recibe una señal de advertencia del subconjunto  $\mathcal{Y}_2$ . Sin embargo, incluso cuando llega una señal de advertencia, existe una probabilidad distinta de cero de que el sistema funcione correctamente. Entonces se realizaría un mantenimiento innecesario incurriendo

en el coste de intervención. Por otro lado, cuando se recibe una señal segura, es decir, consideramos el subconjunto  $\mathcal{Y}_1$ , hay una probabilidad positiva de que el sistema haya fallado a pesar de todo. Por tanto, el sistema no se inspecciona aunque se detenga la operación, lo que significa una pérdida de producción. En cualquiera de los dos casos, se pueden desencadenar consecuencias económicas indeseables para el entorno del sistema.

Para prevenir estas situaciones, proponemos implementar una política de mantenimiento preventivo que minimice las probabilidades de error definidas a continuación.

### 4.5.1. Análisis de sensibilidad

Se pueden cometer dos tipos de error cuando se toma una decisión en base a la señal registrada. Por un lado, existe una probabilidad positiva de recibir una señal de fallo (alarma) mientras el sistema está funcionando correctamente, a esto lo llamaremos Falso Positivo. Por otro lado, se puede emitir una señal que indica el buen rendimiento mientras el sistema no funciona. Este es un caso de Falso Negativo. Lo que se espera es que el mecanismo que emite las señales funcione bien en el sentido de que la probabilidad de obtener señales falsas positivas (FPP) y la probabilidad de obtener señales falsas negativas (FNP) sean lo suficientemente pequeñas. En lo que sigue discutimos el modelo en tiempo discreto solamente.

**Definición 11.** *Tipos de error*

1. La probabilidad de Falso Positivo (FPP) se define como

$$FPP(n) := \mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_2 \mid X_n \in U), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

2. La probabilidad de Falso Negativo (FNP) se define como

$$FNP(n) := \mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_1 \mid X_n \in D), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Se puede comprobar que

$$FPP(n) = 1 - \frac{\tilde{A}_v(n)}{A_v(n)}, \quad (4.19)$$

y

$$FNP(n) = \frac{\mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_1) - \tilde{A}_v(n)}{1 - A_v(n)}, \quad (4.20)$$

donde  $A_v(n) = \mathbb{P}(X_n \in U)$ , para  $n = 1, 2, \dots$ , muestra la disponibilidad (interna) del sistema en la  $n$ -ésima observación, y  $\tilde{A}_v(n) = \mathbb{P}((X_n, Y_n) \in \tilde{U})$  es la probabilidad de que el sistema esté operativo y la señal recibida indique un buen rendimiento.

### 4.5.2. Signal-runs

Dado que un mecanismo eficiente de control de falsos positivos es crucial para establecer la capacidad de nuestro modelo para detectar fallos del sistema, por el bien de idear un plan de mantenimiento competitivo, es muy importante medir con precisión el grado de confianza que tenemos al registrar una señal de advertencia (es decir  $Y_n \in \mathcal{Y}_2$ ) de que el estado del sistema está fallando (es decir  $X_n \in U$ ). Así que introducimos el concepto de *signal-runs*.

En el  $n$ -ésimo instante de observación  $t_n$  supongamos que la señal recibida es un aviso, es decir  $Y_n \in \mathcal{Y}_2$ , lo que significa que el sistema no está funcionando correctamente. La cuestión es saber cuánto nos fiamos de esta observación. En otras palabras, queremos conocer si el sistema está fallando realmente, es decir  $X_n \in U$ . Esta pregunta es análoga a la evaluación de la precisión de las pruebas de diagnóstico. Una cuestión clave en los estudios clínicos que tienen como objetivo determinar el verdadero estado de un paciente con respecto a una enfermedad a partir del resultado de una prueba o diagnóstico Pepe (2003).

**Definición 12.** *Signal-run de longitud  $k$ .*

Para  $n \geq 1$  y  $1 \leq k \leq n$ , definimos la siguiente función

$$\gamma(i, y_{n-k+1}^n, k, n) := \mathbb{P}(X_n = i \mid Y_{n-k+1}^n = y_{n-k+1}^n),$$

para  $i \in E$ , e  $y_{n-k+1}^n \in \mathcal{Y}^k$ . En particular, definimos una racha de  $k$  valores positivos como

$$\gamma_+(k, n) = \mathbb{P}(X_n \in D \mid Y_{n-k+1} \in \mathcal{Y}_2, \dots, Y_n \in \mathcal{Y}_2),$$

para  $n \geq k - 1$ , donde  $D \subset E$  es el subconjunto de estados de fallo e  $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$  es el subconjunto de señales de advertencia.

Por otro lado, definimos una racha de  $k$  valores negativos como

$$\gamma_-(k, n) = \mathbb{P}(X_n \in U \mid Y_{n-k+1} \in \mathcal{Y}_1, \dots, Y_n \in \mathcal{Y}_1),$$

para  $U \subset E$ , el subconjunto de estados operativos e  $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$  es el subconjunto de señales seguras que indica el funcionamiento correcto del sistema.

**Observación.** Dado que el principal objetivo es predecir fallos en el sistema, estamos especialmente interesados en *signal runs* de advertencia consecutivas, esto es  $\gamma_+(k, n)$ , para  $1 \leq k \leq n$ . Por simplicidad nos referiremos a ellos como rachas de  $k$  valores.

Como caso particular, para cualquier  $n > 0$ , a partir de ejecuciones de longitud  $k = 1$  obtenemos una probabilidad que tiene un significado similar al concepto de valores predictivos que se utilizan en bioestadística, ver Pepe (2003). Específicamente,

$$\gamma_+(1, n) = \mathbb{P}(X_n \in D \mid Y_n \in \mathcal{Y}_2), \quad n = 1, 2, \dots,$$

es la probabilidad de que el sistema falle cuando se observa una señal de precaución. Llamamos a esta probabilidad el valor predictivo positivo en el tiempo de observación  $n$ -ésimo, y

$$\gamma_-(1, n) = \mathbb{P}(X_n \in U \mid Y_n \in \mathcal{Y}_1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

que es la probabilidad de que el sistema esté funcionando cuando se registra una señal segura, y lo llamaremos valor predictivo negativo.

Para calcular estos valores consideramos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \gamma_+(1, n) &= \frac{\mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_2 \mid X_n \in D)\mathbb{P}(X_n \in D)}{\mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_2 \mid X_n \in D)\mathbb{P}(X_n \in D) + \mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_2 \mid X_n \in U)\mathbb{P}(X_n \in U)} \\ &= \frac{(1 - FNP(n))(1 - A_v(n))}{(1 - FNP(n))(1 - A_v(n)) + FPP(n)A_v(n)}, \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \gamma_-(1, n) &= \frac{\mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_1 \mid X_n \in U)\mathbb{P}(X_n \in U)}{\mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_1 \mid X_n \in U)\mathbb{P}(X_n \in U) + \mathbb{P}(Y_n \in \mathcal{Y}_1 \mid X_n \in D)\mathbb{P}(X_n \in D)} \\ &= \frac{(1 - FPP(n))A_v(n)}{(1 - FPP(n))A_v(n) + FNP(n)(1 - A_v(n))}. \end{aligned}$$

Usando los supuestos A1-A2 dados en 4.2.3, podemos obtener la distribución estacionaria de la cadena  $\{X_n\}$  así como la distribución estacionaria de la cadena  $\{Y_n\}$ , y luego podemos definir las medidas estacionarias correspondientes de la siguiente manera.

**Definición 13.** *Valores límite.*

Denotamos  $\{\tilde{\pi}(i, y); (i, y) \in \tilde{E}\}$  la distribución estacionaria del proceso  $(X_n, Y_n)$ , entonces el valor predictivo positivo estacionario se obtiene como

$$\gamma_+ = \frac{\sum_{(i,y) \in D \times \mathcal{Y}_2} \tilde{\pi}(i, y)}{\sum_{(i,y) \in E \times \mathcal{Y}_2} \tilde{\pi}(i, y)},$$

y el valor predictivo negativo estacionario es

$$\gamma_- = \frac{\sum_{(i,y) \in U \times \mathcal{Y}_1} \tilde{\pi}(i, y)}{\sum_{(i,y) \in E \times \mathcal{Y}_1} \tilde{\pi}(i, y)}.$$

### 4.5.3. Estrategia de mantenimiento a partir de rachas de $k$ valores

Resulta conveniente estudiar la frecuencia de las señales de alerta, que puede depender de muchos factores. Por ejemplo, si deseamos supervisar sitios remotos podríamos recibir señales continuas o, por el contrario, necesitaríamos acceder al sitio para recopilar alguna información sobre el rendimiento del sistema. Esto dependerá de la importancia del equipo que estemos supervisando, el presupuesto, la existencia o no de una infraestructura de comunicación, etc. La implementación de sensores que supervisan de manera inalámbrica de bajo coste y otros equipos de supervisión se está volviendo común en muchas áreas, por tanto, recibir información continua sobre el funcionamiento del sistema se está volviendo habitual.

Consideramos que el entorno del sistema emite una señal de precaución, ¿debemos siempre mantenernos en esta situación? Es decir, una señal de precaución emitida en un solo momento es suficiente para creer que el sistema está realmente averiado y debe repararse o, por el contrario, se requiere una secuencia ininterrumpida de advertencias de cierta duración para creer que el sistema está realmente fallando.

Dada la estructura M1-M1 de nuestro modelo, se cumple el siguiente resultado.

**Proposición 5.** *Sea  $(X_n, Y_n)$  un modelo DT-M1M1-HMM como hemos definido anteriormente. Entonces, para cualquier  $i \in E$ , cualquier  $k \geq 2$ , e  $y_{n-k}^n \in \mathcal{Y}^{k+1}$ , tenemos que*

$$\gamma(i, y_{n-k+1}^n, k, n) = \gamma(i, y_{n-1}^n, 2, n).$$

**Demostración:**

Asumimos que el estado inicial del sistema es  $i_0$  y se fija la primera señal emitida como  $y_0$ , entonces podemos probar que

$$\begin{aligned} \gamma(i, y_{n-k+1}^n, k, n) &= \mathbb{P}(X_n = i \mid Y_{n-k+1}^n = y_{n-k+1}^n) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_n = i, Y_{n-k+1}^n = y_{n-k+1}^n)}{\mathbb{P}(Y_{n-k+1}^n = y_{n-k+1}^n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y_n = y_n \mid X_n = i, Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1}) \mathbb{P}(X_n = i \mid Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1}) \mathbb{P}(Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1})}{\mathbb{P}(Y_n = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_{n-k+1} = y_{n-k+1}) \mathbb{P}(Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y_n = y_n \mid X_n = i, Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1}) \mathbb{P}(X_n = i \mid Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1})}{\mathbb{P}(Y_n = y_n \mid Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1})}. \end{aligned}$$

Usando que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = i \mid Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1}) &= \\ &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}(X_n = i \mid X_{n-1} = j, Y_{n-k+1}^{n-1} = y_{n-k+1}^{n-1}) \mathbb{P}(X_{n-1} = j) \\ &= \sum_{j \in E} \mathbb{P}(X_n = i \mid X_{n-1} = j) \mathbb{P}(X_{n-1} = j) = \mathbb{P}(X_n = i), \end{aligned}$$

y por la propiedad de Markov de  $\{Y_n\}$ , obtenemos

$$\gamma(i, y_{n-k}^n, k, n) = \frac{\mathbb{P}(X_n = i, Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1})}{\mathbb{P}(Y_n = y_n, Y_{n-1} = y_{n-1})} = \gamma(i, y_{n-1}^n, 2, n).$$

□

Podemos concluir que bajo los supuestos de M1-M1, solo necesitamos inspeccionar el sistema cuando se registran series de señales de alerta de longitud 1 ó 2. En estos casos, cuando la probabilidad de que un estado no

operativo está por encima de un cierto umbral, el sistema debe ser mantenido. Específicamente, proponemos inspeccionar el sistema regularmente en intervalos de tiempo de longitud  $\tau_q$  donde

$$\tau_q = \min\{n \leq 2 : \max\{\gamma_+(1, n), \gamma_+(2, n)\} \geq q\}, \quad (4.21)$$

con  $0 < q < 1$  fijado previamente.

## 4.6. Aplicaciones

Presentamos a continuación dos aplicaciones: En el primer caso práctico se analiza un ejemplo simulado a partir de un modelo CT-M1M1-HMM mientras que en el segundo caso se analiza un conjunto de datos reales utilizando un DT-M1M1-HMM.

### 4.6.1. Simulaciones: Un sistema con dos unidades en redundancia activa

Para el caso presentado en la Sección 4.3.3 tomamos los siguientes valores particulares de los elementos de la matriz  $\mathbf{A}$  dada en (4.10),  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.5$ .

Al igual que en las secciones anteriores, en instantes regulares de tiempo, se tiene acceso a algunos indicadores (señales) relacionados de alguna manera con el nivel de rendimiento del sistema. En particular, para cada instante, recibimos una señal de buen funcionamiento o una señal de fallo en el sistema. Las matrices que gobiernan el comportamiento condicional del proceso observable  $Y_t$ , sobre el evento  $\{X_t = i\}$ , para  $i = 2, 3$  se expresan como

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 \\ 0.7 & -0.7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 0.4 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

En este caso asumimos que  $\mathbb{P}(Y_t = 1 \mid X_t = 1) = 1$ , y  $\mathbb{P}(Y_t = 2 \mid X_t = 4) = 1$  para todo  $t > 0$ , y entonces cuando  $X_t = 1$  el estado 2 de la MC  $Y$  es tal que  $B_{1;22} = +\infty$ , eso es, el estado 2 es un estado instantáneo como se define en Smith (1964). De manera similar, asumimos que cuando las dos unidades del sistema han fallado, es decir,  $i = 4$ , la única salida posible es 2, entonces,

en este caso el estado 1 es un estado instantáneo para la MC  $Y$  sobre el evento  $X_t = 4$ . Por tanto, redefinimos el espacio de estados del proceso conjunto como un conjunto  $\tilde{E} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$ , con matriz de intensidad de transición dada por

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 & -1.3 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0 & -1.1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.4 & -1.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Denotamos por  $X_0, X_1, \dots, X_N$  los estados consecutivos (no observados) del sistema, tomando valores en el conjunto  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ ; e,  $Y_0, Y_1, \dots, Y_N$  los indicadores consecutivos observados, que se asume que oscilan en el conjunto  $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$ . Consideramos que las inspecciones se realizan en los instantes  $n = 0, \Delta, 2\Delta, \dots$ , por simplicidad tomamos  $\Delta = 1$ . En el instante  $n = 0$  asumimos que el sistema es nuevo por lo que el estado inicial es  $X_0 = 1$ , y también que  $Y_0 = 1$ .

Para cada sistema, hemos simulado muestras de trayectorias markovianas de tamaño  $N = 50, 100, 500$  usando el verdadero modelo  $(\alpha, \mathbf{A})$ . Entonces, generamos la secuencia de señales observadas, consideramos en cada instante, los estados generados, esto es si  $X_n = i$  entonces simulamos la siguiente salida  $Y_n$ , usando la matriz de intensidades  $\mathbf{B}_i$ , para cualquier  $n = 1, \dots, N$ .

Para evitar conclusiones erróneas debido a la aleatoriedad en el proceso de simulación, el experimento se ha repetido un total de 500 veces para cada tamaño de muestra. Los resultados de la estimación se representan en la Figura 4.3. La verdadera fiabilidad viene dada por la curva negra. Para cada muestra hemos estimado la función de fiabilidad a partir del modelo HMM. Los resultados se han resumido mediante promedios. Es decir, consideramos lo siguiente

$$\hat{R}_{av;N}(t) = \frac{1}{500} \sum_{r=1}^{500} \hat{R}_N^{(r)}(t),$$

donde  $\hat{R}_N^{(r)}$  es la función de fiabilidad estimada a partir de la  $r$ -ésima muestra, para  $r = 1, \dots, 500$ , y para el tamaño de muestra  $N$ .

La curva roja representa el promedio de las curvas estimado a lo largo de 500 réplicas para cada caso  $N = 50, 100, 500$ . Como era de esperar, la precisión del estimador disminuye con el tamaño de la muestra.

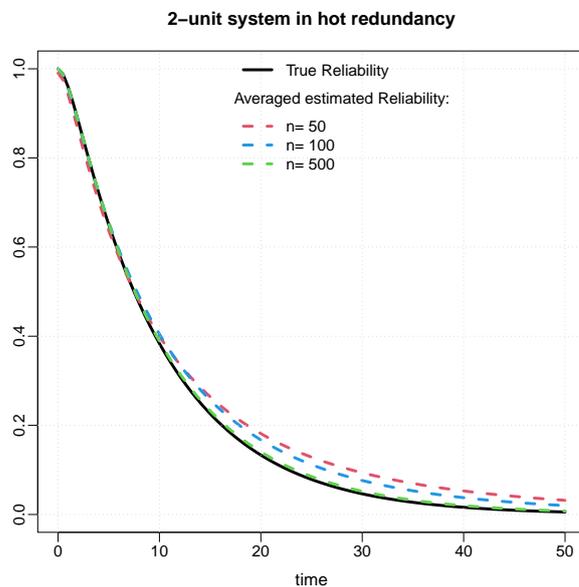


Figura 4.3: Estimación de la fiabilidad para el sistema con dos unidades en redundancia activa.

#### 4.6.2. Caso real: Datos de sensores de una bomba de agua

Analizamos un conjunto de datos relacionado con el funcionamiento de una bomba de agua de una pequeña zona. Los datos se han tomado de la plataforma de datos [www.kaggle.com/](http://www.kaggle.com/) y se puede encontrar un análisis más detallado en Alagarsamy (2021).

Los detalles técnicos disponibles en el sitio web citado sobre el sistema son escasos. La información proporcionada consiste en registros de tiempos de 51 sensores y el estado de la máquina cada minuto desde el 01 – 04 – 2018 al 31 – 08 – 2018. En total hay 220320 datos y 54 variables.

Se utilizan sensores para registrar temperatura, presión, vibración, capacidad de carga, volumen, densidad de flujo, entre otros. Tenemos un segui-

miento longitudinal de un solo sistema con observaciones tomadas con un lapso de tiempo de un solo minuto entre dos puntos de datos consecutivos. No tomamos todos los registros de la muestra sino que consideramos solo los registros diarios desde el 01 – 04 – 2018 al 31 – 08 – 2018. Tenemos una muestra de tamaño  $N = 153$  que consiste en todos los registros tomados a las 00 : 00 todos los días. Hemos considerado el modelo en tiempo discreto para este ejemplo. El objetivo es averiguar qué sensores proporcionan información más útil sobre el estado real de la máquina. Es decir, realizamos un análisis de sensibilidad para determinar qué sensores proporcionan una menor tasa de error al predecir el estado de la máquina. Nos centramos en el sensor etiquetado # que mide una característica particular,  $Y_{\#}$  de la máquina tomando valores en  $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}$ . Para todos los sensores considerados en el estudio, los valores más bajos indican un buen rendimiento de la máquina, mientras que los valores más altos advierten sobre un fallo de la máquina. Entonces, para el estado de la máquina consideramos que el 1 representa el estado operativo y el 2 el estado de fallo.

### **Análisis de sensibilidad**

Procedemos como sigue:

1. Sea  $y_1 < \dots < y_{100}$ , un conjunto de posibles valores en el rango de medidas del sensor #.
2. Para cada  $j = 1, \dots, 100$ , definimos  $Y_j$  tomando el valor 1 si  $Y_{\#} > y_j$ , y el valor 2, en otro caso. Entonces tenemos  $Y_{j,1}, \dots, Y_{j,N}$  una muestra del DT-M1M1-HMM.
3. Ajustamos el modelo siguiendo la Sección 4.3.2 para obtener estimaciones de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}_1$  y  $\mathbf{Q}_2$ . Entonces calculamos una estimación de la matriz de transición del proceso conjunto. Denotamos por  $\tilde{\mathbf{P}}_j$  tal estimación, para  $j = 1, \dots, 100$ .
4. Estimamos las dos probabilidades de error definidas en la Sección 4.5.1, que son

$$FPP_j = \frac{\tilde{\mathbf{P}}_j(1,2)}{\tilde{\mathbf{P}}_j(1,1) + \tilde{\mathbf{P}}_j(1,2)},$$

y

$$FNP_j = \frac{\tilde{\mathbf{P}}_j(2,1)}{\tilde{\mathbf{P}}_j(2,1) + \tilde{\mathbf{P}}_j(2,2)},$$

5. Construimos la curva ROC como el conjunto de puntos  $\{(FPP_j, 1 - FNP_j), j = 1, \dots, 100\}$ ;
6. Sea  $(FPP_0, 1 - FNP_0)$  el punto de la curva que minimiza la distancia al punto  $(0, 1)$ .
7. Finalmente definimos el índice de sensibilidad del sensor  $\#$  como  $Se_{\#} = 1 - FNP_0$ , y el índice de especificidad dado por  $Sp_{\#} = 1 - FPP_0$ .

El sensor más informativo se elegirá como el que muestre la combinación más alta de sensibilidad y especificidad. Hemos considerado en nuestro estudio la red completa de 50 sensores. Como puede verse en los resultados de la Tabla 4.3 el subconjunto de sensores con etiquetas del 17 al 26 son los más sensibles al estado real de la bomba de agua.

Como ya hemos mencionado, la información técnica sobre este sistema y en particular la referente a la ubicación y misión de cada sensor no se proporciona en el sitio web que proporciona el conjunto de datos. Sin embargo, análisis posteriores de los usuarios han arrojado algo de luz al respecto. En particular se especifica que este grupo de sensores tienen que ver con ciertas características del impulsor de la bomba de agua.

### **Mantenimiento a partir de rachas (signal-runs) de $k$ valores**

Hemos calculado para cada sensor la probabilidad de que el sistema falle a partir de ejecuciones de longitud  $k = 1$  y  $k = 2$ . Los resultados se muestran en las Figuras 4.5-4.7.

Hemos estimado la probabilidad de que el sistema falle condicionando sobre rachas de  $k$  valores con  $k = 2$  más pequeñas que con  $k = 1$  para todos los sensores excepto para el sensor número 37. En este caso estamos considerando solo mediciones diarias del sensor, sin embargo, en el problema real, los sensores registran continuamente datos sobre la bomba de agua. Es probable que nuestros resultados se deban a una intervención en el sistema anterior a la siguiente observación que consideramos al día siguiente.

En otras palabras, podría significar que se realizó una acción de mantenimiento o se reinició el sistema entre las dos observaciones consecutivas que aquí estamos considerando.

Como podemos observar en los gráficos, al principio, la red de sensores parece no estar bien calibrada, porque hay muy poca probabilidad de fallo del sistema incluso cuando un sensor emite señales de advertencia. Sin embargo, está claro que después de un tiempo los sensores se ajustan mejor para que la información proporcionada sea más fiable.

Nos centramos, por ejemplo, en el sensor número 8. En la Figura 4.4 la probabilidad estimada de que el sistema falle condicionada a las rachas de  $k$  valores con  $k = 1, 2$  se representan según las observaciones de este sensor. Se ha trazado una línea de referencia para un umbral de probabilidad igual a 0.5. Usando la ecuación (4.21), en este caso se estima  $\tau = 13$ , es decir que de acuerdo a este criterio, con  $q = 0.5$ , el sistema se debe mantener cada 13 días de acuerdo a la información proporcionada para este sensor porque después de 13 días, la probabilidad de que el sistema falle si se ha producido una señal de advertencia es mayor a 0.5. Aquí se ha tomado un umbral de 0.5 solo con fines ilustrativos, pero en una situación real se debe elegir un valor más apropiado para  $q$  utilizando ciertos criterios basados en la optimización de costes, por ejemplo.

Las figuras mostradas en esta sección presentan los resultados de las probabilidades estimadas de fallos del sistema a partir de rachas de  $k$  valores para  $k = 1, 2$  y para todos los sensores en el conjunto de datos. En cada Figura 4.5-4.7 incluimos 20 gráficos, uno para cada sensor. Por ejemplo, en la representación superior izquierda de la Figura 4.6 podemos ver los resultados para el sensor 21. En este caso vemos que la probabilidad de que el sistema falle es siempre más alta condicionada a 1 racha que condicionada a 2 rachas. Además, si consideramos todas las representaciones en conjunto, podemos ordenar el conjunto de sensores según la probabilidad de que el sistema falle dado que se recibe una señal de advertencia del sensor correspondiente.

## 4.7. Conclusiones

El principal objetivo de este capítulo es construir un modelo estocástico a partir de procesos ocultos de Markov para describir la evolución en el

tiempo de un sistema y estimar algunas medidas de fiabilidad cuando no hay una observación directa del verdadero estado actual del sistema sino que solamente están disponibles algunos indicadores. A esta situación hay que hacerle frente en muchas aplicaciones de la ingeniería donde el despliegue de redes de sensores se está volviendo omnipresente con el propósito de observar y rastrear el comportamiento de los equipos. El desafío es interpretar las medidas proporcionadas por un sensor (que puede registrar temperatura, presión, vibración, entre otros) en términos del estado interno del sistema, es decir, el nivel de rendimiento del sistema. Por lo general, se lleva a cabo un seguimiento longitudinal del sistema, lo que significa que los ingenieros examinan repetidamente el sistema y registran las observaciones durante un período de tiempo. Una consecuencia clave es que las observaciones están correladas. Así que, se propone un modelo de Markov oculto con estructura de dependencia de tipo M1-M1 generalizando estudios previos donde se ha considerado una estructura de dependencia más simple M1-M0. Hemos definido una nueva función de fiabilidad en términos del proceso bidimensional  $(X, Y)$ , donde  $X$  representa el estado oculto del sistema e  $Y$  es el proceso observado. Hemos considerado dos versiones del modelo, tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo. El modelo se ha estimado por máxima verosimilitud y se han estudiado algunas propiedades teóricas. Hemos introducido un análisis de sensibilidad en este contexto de modelos HMM. En particular, hemos definido dos tipos de errores en los que se puede incurrir cuando se diagnostica el estado oculto del proceso  $X$  a partir de las observaciones del proceso  $Y$ . Hemos introducido los conceptos de sensibilidad, especificidad y valores predictivos, habituales en los ensayos clínicos de bioestadística, en nuestro contexto. Por tanto, hemos introducido el concepto de *signal runs*, y la probabilidad de fallo basada en ellas. Cuando estas medidas indican que la información proporcionada por el proceso  $Y$  es lo suficientemente fiable con respecto al estado real del sistema, entonces se pueden tomar decisiones importantes relacionadas con el mantenimiento del mismo.

Los resultados presentados en este capítulo se encuentran recogidos en el trabajo Gámiz, M.L., Navas-Gómez, F., Raya-Miranda, R. y Segovia-García, M.C. (2023). *Dynamic reliability and sensitivity analysis based on HMM models with Markovian signal process*. Reliability Engineering and System Safety. En revisión.

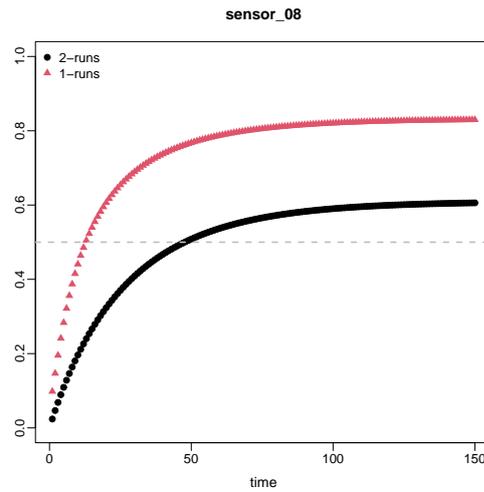


Figura 4.4: Probabilidad de que el sistema falle condicionado a las rachas de  $k$  valores para el sensor \_08, y  $k = 1, 2$ .

## 4.7. CONCLUSIONES

---

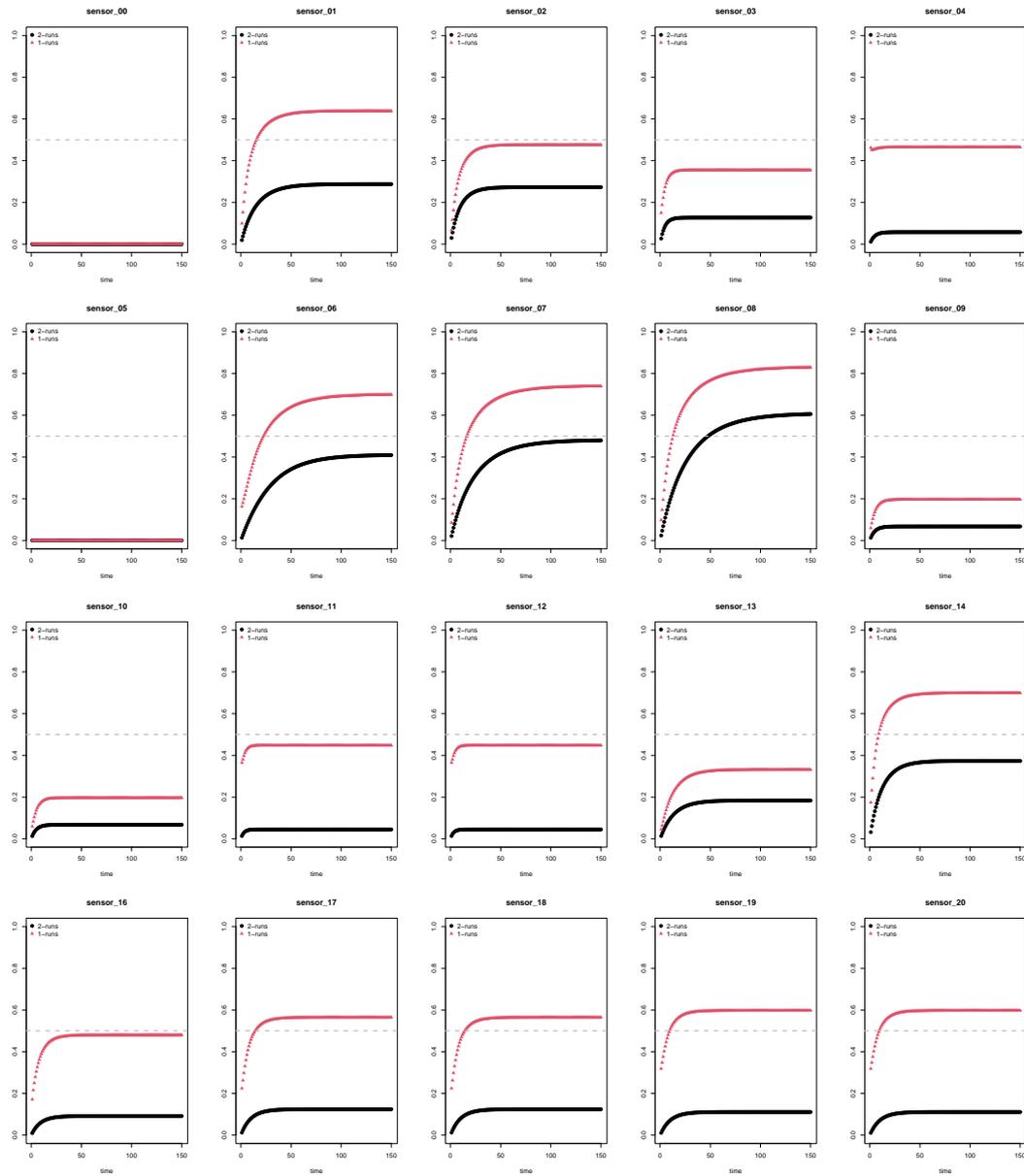


Figura 4.5: Probabilidad de que el sistema falle condicionado a rachas de  $k$  valores para los sensores del 00 al 20, y  $K = 1, 2$ .

# CAPÍTULO 4. MODELOS DINÁMICOS BASADOS EN PROCESOS DE MARKOV OCULTOS (HMM)

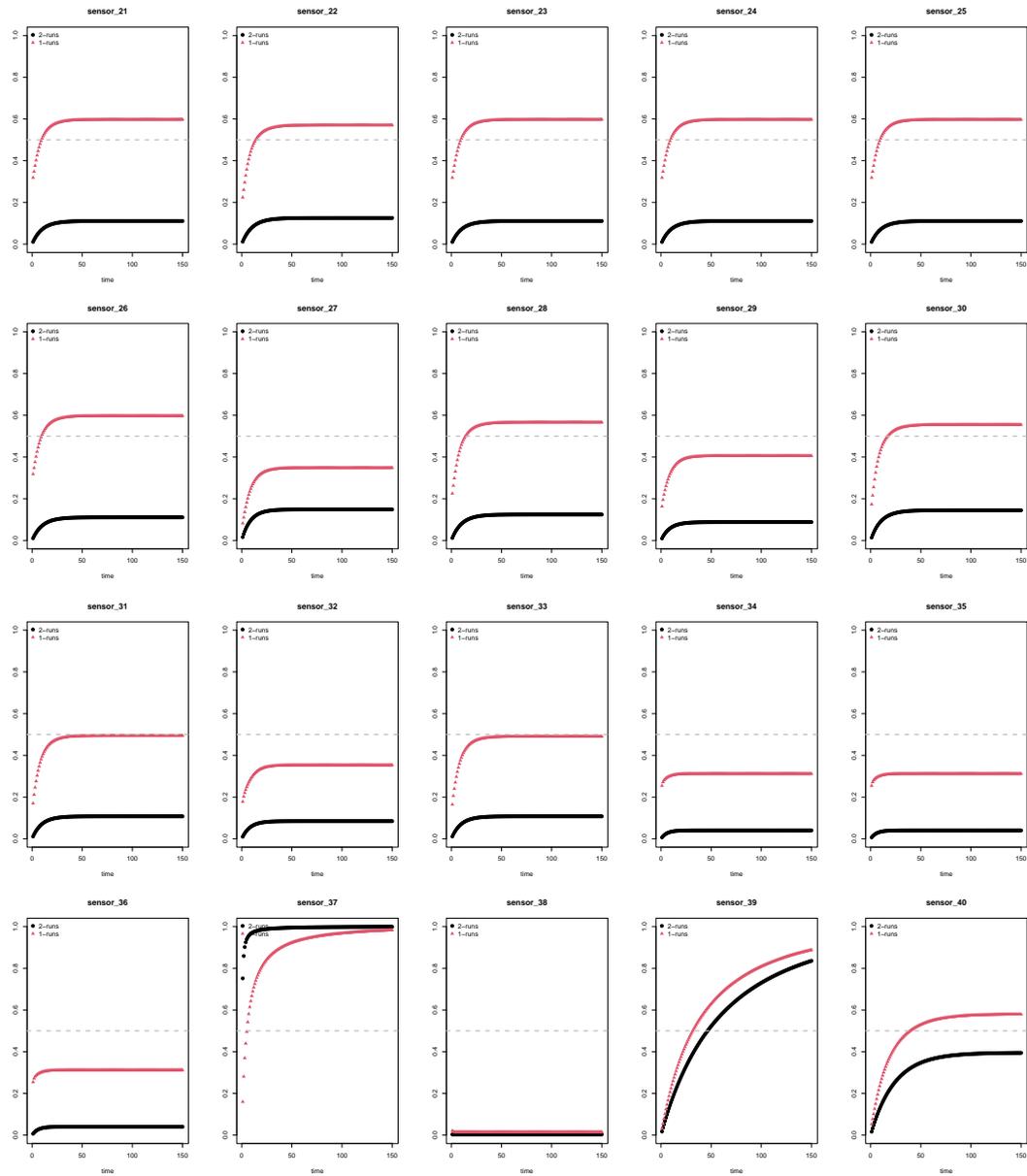


Figura 4.6: Probabilidad de que el sistema falle condicionado a rachas de  $k$  valores para los sensores del 21 al 40, y  $K = 1, 2$ .

## 4.7. CONCLUSIONES

---

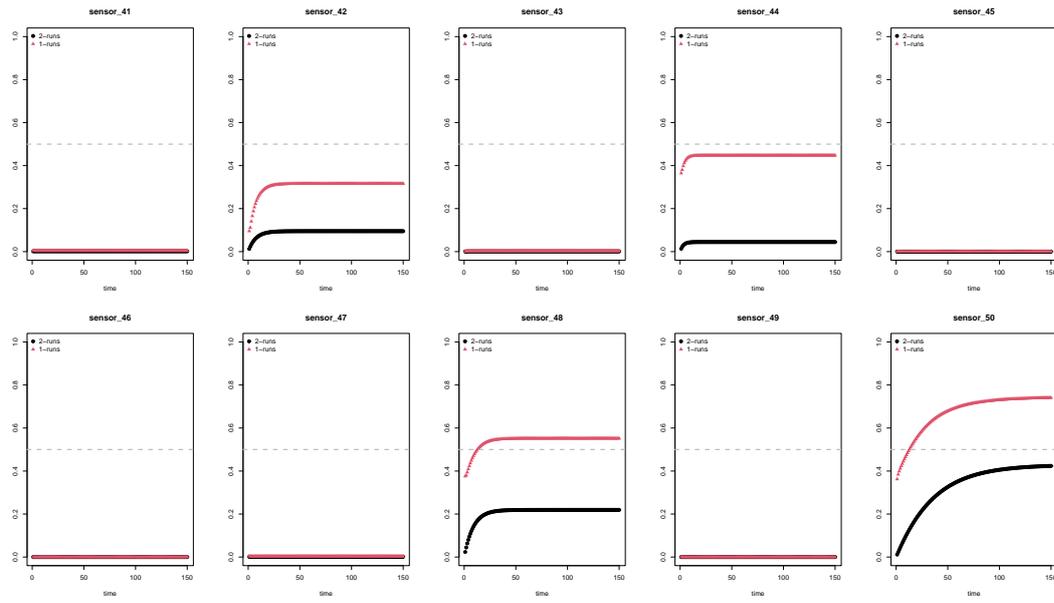


Figura 4.7: Probabilidad de que el sistema falle condicionado a rachas de  $k$  valores para los sensores del 41 al 50, y  $K = 1, 2$ .

## CAPÍTULO 4. MODELOS DINÁMICOS BASADOS EN PROCESOS DE MARKOV OCULTOS (HMM)

---

Referencia	Técnica	Contribución / Aplicación
Chen <i>et al.</i> (2019)	HMM-AO	Modelización de la degradación de los sistemas de fabricación y políticas de mantenimiento basadas en la vida útil remanente (RUL)
Cheng <i>et al.</i> (2023)	CT-HMM	Optimización de la política de cancelación de una misión basada en condiciones e inspección para un sistema crítico para la seguridad parcialmente observado
Coraçã <i>et al.</i> (2023)	HMM	Creación de un marco de aprendizaje no supervisado para el control del estado de una estructura basado en vibraciones
Danisman & Kocer (2021)	BD-HMM	Modelización de la dependencia markoviana con aplicaciones en terremotos y mercado de valores
Gamiz <i>et al.</i> (2023a)	HMM	Nuevas medidas de fiabilidad y estrategias de mantenimiento basadas en probabilidades críticas
Gamiz <i>et al.</i> (2023b)	CT-HMM	Estrategias de discretización para el ajuste de un modelo en tiempo continuo
Ghasvarian Jahromi <i>et al.</i> (2023)	HMM	Predicciones de potencia y velocidad del viento a corto plazo
Gualeni <i>et al.</i> (2023)	HMM	Mantenimiento en la sala de máquinas de un barco, análisis del espacio disponible alrededor de la maquinaria y los sistemas de navegación
Guo & Liang (2022)	HMM & MDP	Optimización de estrategias de inspección y mantenimiento para sistemas multiestado
Habayeb <i>et al.</i> (2018)	HMM	Identificación temprana de errores de software que requieren mucho tiempo de solución
Khan & Abuhasel (2021)	HMM & GA	Detección de amenazas en contextos de Internet de las Cosas (IoT)
Li <i>et al.</i> (2020)	HMM	Predicción de RUL y estimación del intervalo de mantenimiento adecuado para las componentes de una turbina hidráulica que no se puede monitorear en línea
Lin <i>et al.</i> (2023)	HMM & NN	Ajuste de las fluctuaciones locales en el proceso de degradación de las baterías de litio
Martindale <i>et al.</i> (2021)	H-HMM	Anotación inteligente de datos cíclicos para reducir el costo de etiquetar datos basados en sensores
Soleimani <i>et al.</i> (2021)	HMM & BN	Diagnóstico y pronóstico de fallos para sistemas complejos, multiestado, transitorios y dinámicos, como los sistemas de propulsión automotriz
Zhao <i>et al.</i> (2021)	HMM	Descripción de la degradación de sistemas multiestado con datos de una central nuclear

Tabla 4.1: Revisión bibliográfica (en orden alfabético) sobre aplicaciones recientes de modelos HMM y modelos relacionados en Ingeniería de Fiabilidad. Notación: AR= Auto-regresivo; AO=Observaciones autocorreladas; CT=Tiempo continuo; BD=Dependencia binaria; MDP= Proceso de Decisión de Markov; GA= Algoritmos genéticos; NN=Red neuronal; H= Modelo Jerárquico; BN=Red Bayesiana. HMM se refiere al modelo en tiempo discreto con estructura de dependencia H1-M0.

## 4.7. CONCLUSIONES

---

Estados, $i$	Configuración de las unidades
1	Ambas unidades están operativas
2	Unidad 1 está operativa; Unidad 2 no está operativa
3	Unidad 1 no está operativa; Unidad 2 está operativa
4	Ambas unidades no están operativas

Tabla 4.2: Descripción del espacio de estados  $E$ .

Sensor	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
$Se$	0.465	0.650	0.606	0.537	0.493	0.485	0.581	0.678	0.558	0.510
$Sp$	0.908	0.929	0.900	0.880	0.943	0.908	0.757	0.878	0.881	0.889
Sensor	10	11	12	13	14	16	17	18	19	20
$Se$	0.616	0.616	0.656	0.695	0.700	0.632	0.804	0.804	0.809	0.809
$Sp$	0.970	0.970	0.767	0.899	0.940	0.941	0.937	0.937	0.944	0.944
Sensor	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$Se$	0.809	0.816	0.809	0.809	0.809	0.809	0.578	0.809	0.716	0.817
$Sp$	0.944	0.937	0.944	0.944	0.944	0.944	0.831	0.937	0.911	0.932
Sensor	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$Se$	0.727	0.713	0.727	0.760	0.760	0.760	0.750	0.492	0.714	0.560
$Sp$	0.931	0.881	0.930	0.933	0.933	0.933	0.967	0.909	0.797	0.756
Sensor	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$Se$	0.479	0.503	0.509	0.616	0.469	0.474	0.483	0.674	0.465	0.710
$Sp$	0.902	0.861	0.882	0.970	0.914	0.888	0.862	0.807	0.914	0.771

Tabla 4.3: Análisis de sensibilidad de la red de sensores para un sistema de bombeo de agua.



## Bibliografía

- [1] AFSHARI, S.S., ENAYATOLLAHI, F., XU, X., Y LIANG, X. (2022). *Machine learning-based methods in structural reliability analysis: a review*. Reliab. Eng. Syst. Saf. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2021.108223>
- [2] AHMED, W., HASAN, O., Y TAHAR, S. (2016). *Formalization of reliability block diagrams in higher-order logic*. J. Appl. Logic., vol. 18, pp. 19–41.
- [3] ALAGARSAMY, P. (2021). *Predict pump failure before it happens using deep learning model*. <https://becominghuman.ai/predict-pump-failure-before-it-happens-using-deep-learning-model-dc886bfa073e>
- [4] ALSINA, E.F., CHICA, M., TRAWINSKI, K., Y REGATTIERI, A. (2018). *On the use of machine learning methods to predict component reliability from data-driven industrial case studies*. Int. J. Adv. Manuf. Technol., vol. 94, pp. 2419–2433.
- [5] AMRUTKAR, K.P., Y KAMALJA, K.K. (2017). *An overview of various importance measures of reliability system*. Int. J. Math., Eng. Manage. Sci., vol. 2, no. 3, pp. 150–171.
- [6] AVEN, T. (1993). *On performance measures for multistate monotone systems*. Rel. Eng. Syst. Saf., vol. 41, no. 2, pp. 59–266.
- [7] AVEN, T., Y JENSEN, U. (2013). *Stochastic Models in Reliability*. New York, NY, USA: Springer.
- [8] AVEN, T., Y NOCKLAND, T.E. (2010). *On the use of uncertainty importance measures in reliability and risk analysis*. Rel. Eng. Syst. Saf., vol. 95, no. 2, pp. 127–133.

- 
- [9] AYER, T., CHATWAL, J., ALAGOZ, O., CHARLES, E.K., WOODS, R.W., Y BURNSIDE, E.S. (2010). *Comparison of logistic regression and artificial neural network models in breast cancer risk estimation*. RadioGraphics, vol. 30, pp. 13–22.
- [10] BARBU, V.S., Y LIMNIOS, N. (2008). *Semi-Markov chains and hidden semi-Markov model toward applications*. Springer.
- [11] BAUM, L.E., Y PETRIE, T. (1966). *Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains*. Ann. Math. Stat., vol. 37, no. 6, pp. 1554–1563.
- [12] BAXTER, L.A. (1984). *Continuum structures I*. J. Appl. Probab., vol. 21, pp. 802–815.
- [13] BERCHTOLD, A. (1999). *The double chain Markov model*. Commun. Statist.: Theory Meth., vol. 28, no. 11, pp. 2569–2589.
- [14] BICKEL, B.J., RITOV, Y., Y RYDEN, T. (1998). *Asymptotic normality of the maximum likelihood estimator for general hidden Markov models*. Ann. Stat., vol. 26, pp. 1614–1635.
- [15] BIRNBAUM, Z.W. (1969). *On the importance of different components in a multicomponent system*. New York, NY, USA: Academic, pp. 581–592.
- [16] BISANOVIC, S., SAMARDZIC, M., Y AGANOVIC, D. (2016). *Application of component criticality importance measures in design scheme of power plants*. Int. J. Elect. Comput. Eng., vol. 6, no. 1, pp. 63–70.
- [17] BRUNELLE, R.D., Y KAPUR, K.C. (1998). *Continuous-state system-reliability: An interpolation approach*. IEEE Trans. Rel., vol. 47, no. 2, pp. 181–187.
- [18] BRUNK, H.D. (1955). *Maximum likelihood estimates of monotone parameters*. Ann. Math. Statist., vol. 26, pp. 607–616.
- [19] BURDAKOV, O., GRIMVALL, A., Y HUSSIAN M. (2004). *A generalised PAV algorithm for monotonic regression in several variables*. COMPSTAT: Proceedings in Computational Statistics, J. Antoch, Ed. New York, NY, USA: Springer, pp. 761–767.

- [20] CAI, Z., SI, S., LIU, Y., Y ZHAO, J. (2018). *Maintenance optimization of continuous state system based on performance improvement*. IEEE Trans. Reliab., vol. 67, no. 2, pp. 651–665.
- [21] CAPPÉ, O., MOULINES, E., Y RYDEN, T. (2005). *Inference in Hidden Markov Models*. Springer Ser. Stat., Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA.
- [22] CATELANI, M., CIANI, L., Y VENZI, M. (2019). *RBD model-based approach for reliability assessment in complex systems*. IEEE Syst. J., vol. 13, no. 3, pp. 2089–2097.
- [23] CHEN, B., CHEN, X., LI, B., HE, Z., CAO, H., Y CAI, G. (2011). *Reliability estimation for cutting tools based on logistic regression model using vibration signals*. Mech. Syst. Sig. Process., vol. 25, no. 7, pp. 2526–2537.
- [24] CHEN, Z., LI, Z., XIA, T., Y PAN, E. (2019). *Hidden Markov model with auto-correlated observations for remaining useful life prediction and optimal maintenance policy*. Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 184, pp. 123–136.
- [25] CHENG G., LI L., SHANGGUAN C., YANG N., JIANG B., Y TAO N. (2023). *Optimal joint inspection and mission abort policy for a partially observable system*. Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 229, 108870.
- [26] CHUNG, K.L. (1960). *Markov chains with stationary transition probabilities*. Springer-Verlag.
- [27] CORAÇA, E.M., FERREIRA, J.V., Y NOBREGA, E.G.O. (2023). *An unsupervised structural health monitoring framework based on Variational Autoencoders and Hidden Markov Models*. Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 231, 109025.
- [28] COOLEN, F.P.A., Y COOLEN-MATURI, T. (2016). *The structure function for system reliability as predictive (imprecise) probability*. Rel. Eng. Syst. Saf., vol. 154, pp. 180–187.
- [29] CUI, L., LI, Y., SHEN, J., Y LIN, C. (2016). *Reliability for discrete state systems with cyclic missions periods*. Appl. Math. Model., vol. 40, pp. 10783–10799.

- 
- [30] CUI, Z., PARK, N., Y CHAKRABORTY, T. (2020). *Incremental community discovery via latent network representation and probabilistic inference*. Knowl. Inf. Syst., vol. 62, no. 6, pp. 2281–2300.
- [31] DANISMAN, O., Y KOCER, U.U. (2021). *Hidden Markov models with binary dependence*. Physica A, vol. 567, 125668.
- [32] DOUC, R. (2005). *Non singularity of the asymptotic Fisher information matrix in hidden Markov models*. École Polytechnique, preprint.
- [33] ESPIRITU, J.F., COIT, D.W., Y PRAKASH, U. (2007). *Component criticality importance measures for the power industry*. Elect. Power Syst. Res., vol. 77, pp. 407–420.
- [34] FAN, J., Y GIJBELS, I. (1996). *Local Polynomial Modelling and Its Applications*. London, U.K.: Chapman & Hall.
- [35] FAN, J., FARMEN, M., Y GIJBELS, I. (1998). *Local maximum likelihood estimation and inference*. J. Roy. Statist. Soc. B, vol. 60, no. 3, pp. 591–608.
- [36] FAN, J., HECKMAN, N.E., Y WAND, M.P. (1995). *Local polynomial kernel regression for generalized linear models and quasi-likelihood functions*. J. Amer. Statist. Assoc., vol. 90, no. 129, pp. 141–150.
- [37] FROLICH, M. (2006). *Non-parametric regression for binary dependent variables*. Econometrics J., vol. 9, no. 3, pp. 511–540.
- [38] GÁMIZ, M.L., Y MARTÍNEZ-MIRANDA, M.D. (2010). *Regression analysis of the struture function for reliability evaluation of continuous-state system*. Rel. Eng. Syst. Saf., vol. 95, pp. 134–142.
- [39] GÁMIZ, M.L., KULASEKERA, K.B., LIMNIOS, N. Y LINDQVIST, B.H. (2011). *Applied Nonparametric Statistics in Reliability*. Springer.
- [40] GÁMIZ, M.L., LIMNIOS, N., Y SEGOVIA-GARCÍA, M.C. (2023). *Hidden Markov models in reliability and maintenance*. Eur. J. Oper. Res., vol. 304, pp. 1242–1255.
- [41] GÁMIZ, M.L., LIMNIOS, N., Y SEGOVIA-GARCÍA, M.C. (2023). *The continuous-time hidden Markov model based on discretization. Properties of estimators and applications*. Stat. Inference Stoch. Process. (Aceptado)
-

- [42] GÁMIZ, M.L., NAVAS-GÓMEZ, F., Y RAYA-MIRANDA, R. (2021). *A machine learning algorithm for reliability analysis*. IEEE Trans. Reliab., vol. 70, no. 2, pp. 535–546.
- [43] GÁMIZ, M.L., NAVAS-GÓMEZ, F., Y RAYA-MIRANDA, R. (2022). *Regresión isotónica logística para el cálculo de estructuras en Fiabilidad*. XXXIX Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa (SEIO). Granada.
- [44] GÁMIZ, M.L., NAVAS-GÓMEZ, F., NOZAL-CAÑADAS, R., Y RAYA-MIRANDA, R. (2023). *Unsupervised and supervised learning for the reliability analysis of complex systems*. Qual. Reliab. Eng. Int. <http://dx.doi.org/10.1002/qre.3311>
- [45] GÁMIZ, M.L., NAVAS-GÓMEZ, F., RAYA-MIRANDA, R., Y SEGOVIA-GARCÍA, M.C. (2023). *Dynamic reliability and sensitivity analysis based on HMM models with Markovian signal process*. Reliab. Eng. Syst. Saf. En revisión.
- [46] GHASVARIAN JAHROMI K., GHARAVIAN D., Y MAHDIANI H.R. (2023). *Wind power prediction based on wind speed forecast using hidden Markov model*. J. Forecasting., vol. 42, no. 1, pp. 101–123.
- [47] GUALENI P., Y VAIRO T. (2023). *A prediction tool for maintenance costs estimation during the design process of a ship engine room*. J. Ocean. Eng. Mar. Ener., pp. 1–11.
- [48] GUO C., Y LIANG Z. (2022). *A Predictive Markov decision process for optimizing inspection and maintenance strategies of partially observable multi-state systems*. Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 226: 108683.
- [49] HABAYEB, M., MURTAZA, S.S., MIRANSKY, A., Y BENER, A.B. (2018). *On the use of hidden Markov model to predict the time to fix bugs*. IEEE Trans. Soft. Eng., vol. 44, no. 12, pp. 1224–1244.
- [50] HASTIE, T., FRIEDMAN, J., Y TIBSHIRANI, R. (2001). *The Elements of Statistical Learning*. Nueva York, Estados Unidos: Springer New York. DOI:10.1007/978-0-387-21606-5.
- [51] HONG, Y., ZHANG, M., Y MEEKER, W.Q. (2018). *Big data and reliability applications: the complexity dimension*. J. Qual. Technol., vol. 50, 135–149.

- [52] JACKSON, J.E. (2003). *A User's Guide to Principal Components*. Wiley.
- [53] JAMES, G., WITTEN, D., HASTIE, T., Y TIBSHIRANI, R. (2013). *An Introduction to Statistical Learning*. Springer.
- [54] JOLLIFFE, I.T. (2002). *Principal Component Analysis*. 2nd ed. Springer-Verlag.
- [55] JOLLIFFE, I.T., Y CADIMA, J. (2016). *Principal component analysis: a review and recent developments*. Philos. Trans. R. Soc. A. vol. 374, 20150202.
- [56] KHAN M.A., Y ABUHASEL K.A. (2021). *An evolutionary multi-hidden Markov model for intelligent threat sensing in industrial internet of things*. J. Supercomput., vol. 77, no. 6, pp. 6236–6250.
- [57] KOREN, I., Y KRISNA, C.M. (2007). *Fault-Tolerant Systems*. San Mateo, CA, USA: Morgan Kaufman.
- [58] KUO, W., Y ZHU, X. (2012). *Importance Measures in Reliability, Risk and Optimization: Principles and Applications*. Hoboken, NJ, USA: Wiley.
- [59] LENZ, M., Y RHODIN, J. (2011). *Reliability Calculations for Complex Systems*. Linkoping, Sweden: Linkoping Univ.
- [60] LEVITIN, G., Y LISNIANSKI, A. (2001). *A new approach to solving problems of multi-state system reliability optimization*. Qual. Reliab. Eng. Int., vol. 17, no. 2, pp. 93–104.
- [61] LI, M., Y WANG, Z. (2020). *Deep learning for high-dimensional reliability analysis*. Mech. Syst. Sig. Process., vol. 139, 106339.
- [62] LIN M., YOU Y., WANG W., Y WU J. (2023). *Battery health prognosis with gated recurrent unit neural networks and hidden Markov model considering uncertainty quantification*. Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 230: 108978.
- [63] LINS, I.D., CHAGAS MOURA, M., ZIO, E., Y LÓPEZ DROGUETT, E. (2011). *A particle swarm-optimized support vector machine for reliability prediction*. Qual. Reliab. Eng. Int., vol. 28, no. 2, pp. 141–158.

- [64] LISNIANSKI, I., Y LEVITIN, G. (2001). *Multi-State System Reliability: Assessment, Optimization and Applications*. Singapore: World Scientific.
- [65] MARTINDALE, C.F., HOENIG, F., STROHRMANN, C., Y ESKOFIER, B.M. (2021). *Smart annotation of cyclic data using hierarchical hidden Markov Models*. *Sensors*, vol. 17, no. 10, pp. 1–16.
- [66] MEYER, M.C. (2010). *Inference for multiple isotonic regression*. Online. Available: <https://www.stat.colostate.edu/research/TechnicalReports/2010/20102.pdf>
- [67] MEYER, M.C. (2012). *Isotonicmultiple.R*. Online. Available: <https://www.stat.colostate.edu/meyer/isotonicmultiple.R>
- [68] MEYER, M.C. (2013). *Semi-parametric additive constrained regression*. *J. Non-parametric Statist.*, vol. 25, no. 3, pp. 715–730.
- [69] MIZIULA, P., Y NAVARRO, J. (2019). *Birnbaum Importance Measure for Reliability System with Dependent Components*. *IEEE Trans. Reliab.*, vol. 68, no. 2, pp. 439–450.
- [70] MUKERJEE, H. (1988). *Monotone nonparametric regression*. *Ann. Statist.*, vol. 16, no. 2, pp. 741–750.
- [71] NATVIG, B. (2011). *Multi-State Systems Reliability Theory and Applications*. Hoboken, NJ, USA: Wiley.
- [72] PEPE, M.S. (2003). *The statistical evaluation of medical tests for classification and prediction*. New York: Oxford University Press.
- [73] PETTIT, D., Y TURNBULL, A. (2001). *General Aviation Aircraft Reliability Study*. Hampton, VA, USA: NASA/CR-2001-210647.
- [74] PHAM, H. (2022). *Statistical Reliability Engineering. Methods Models and Applications*. Springer.
- [75] PHILLIPS, J., CRIPPS, E., LAU, J.W., Y HODKIEWICZ, M.R. (2015). *Classifying machinery condition using oil samples and binary logistic regression*. *Mech. Syst. Sig. Process.*, 60–61, pp. 316–325.
- [76] RABINER, L.R. (1989). *A tutorial on hidden markov models and selected applications in speech recognition*. *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 2, pp. 257–286.

- 
- [77] RAUSAND, M., Y HOYLAND, A. (2004). *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*. 2nd ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley.
- [78] SAHOO, L., BHUNIA, A.K., Y ROY, D. (2014). *Reliability optimization with high and low level redundancies in interval environment via genetic algorithm*. Int. J. Syst. Assur. Eng. Manag., vol. 5, pp. 513–523.
- [79] SI, S., LIU, M., JIANG, Z., JIN, T., Y CAI, Z. (2019). *System reliability allocation and optimization based on generalized Birnbaum importance measure*. IEEE Trans. Rel., vol. 68, no. 3, pp. 831–843.
- [80] SMITH, G. (1964). *Instantaneous states of Markov processes*. Trans. Am. Math. Soc., vol. 110, pp. 185–195.
- [81] SOLEIMANI M., CAMPEAN F., Y NEAGU D. (2021). *Integration of Hidden Markov Modelling and Bayesian Network for fault detection and prediction of complex engineered systems*. Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 215: 107808.
- [82] SOLTANALI, H., ROHANI, A., ABBASPOUR-FARD, M.H., Y TORRES FARINHA, J.A. (2021). *A comparative study of statistical and soft computing techniques for reliability prediction of automotive manufacturing*. Appl. Soft. Comput., vol. 98, 106738.
- [83] WOLD, H. (1975). Soft modelling by latent variables; the nonlinear iterative partial least squares approach. – In: J. Gani (ed.), *Perspectives in probability and statistics. Papers in honour of M. S. Barlett*. Academic Press, pp. 117–142.
- [84] XIAO, N., WAN, J., CHEN, H.P., Y YANG, F.C. (2016). *Reliability block diagram methods for system reliability analysis of spatial structures*. Int. J. Lifecycle Perform. Eng., vol. 2, pp. 94–110.
- [85] YI, J., Y DU, X. (2022). *High-dimensional reliability method accounting for important and unimportant input variables*. J. Mech. Des., vol. 144, no. 4, 041702.
- [86] ZAITSEVA, E., Y LEVASHENKO, V. (2016). *Construction of a reliability structure function based on uncertain data*. IEEE Trans. Rel., vol. 65, no. 4, pp. 1710–1723.
-

- [87] ZHAO Y., GAO W., Y SMIDTS C. (2021). *Sequential Bayesian inference of transition rates in the hidden Markov model for multi-state system degradation*. Reliab. Eng. Syst. Saf., vol. 214: 107662.
- [88] ZIO, E. (2009). *Reliability engineering: old problems and new challenges*. Reliab Eng Syst Saf, vol. 94, no. 2, 125–41.