# La propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores

**Tesis Doctoral**

**por**

**José Luis Dávila Albarrán**

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Programa de Doctorado en Matemáticas

Director de Tesis: Juan F. Mena Jurado

Granada, 2023

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: José Luis Dávila Albarrán
ISBN: 978-84-1117-995-9
URI: https://hdl.handle.net/10481/84444

*A Sofía*$(\times 2)$ $\heartsuit$

# Índice general

# Derechos de Autor

El doctorando José Luis Dávila y el director de la tesis D. Juan Francisco Mena Jurado.

**Garantizan** al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección del director de tesis y hasta donde su conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, a 15 de mayo de 2023.

| Doctorando | Director de la tesis |
|---|---|
| Fdo.: José Luis Dávila | Fdo.: Juan Francisco Mena Jurado |

# Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a la profesora María Dolores Acosta, por recibirme y ser mi directora de tesis, por su extraordinario trabajo, dedicación y entrega durante todos estos años, pero principalmente, por su infinita paciencia, su trato descomunalmente amable y su disposición de ayudarme siempre en cualquier cosa que necesitara.

Al profesor Juan Mena, quien ha sido primero mi tutor y, luego en la recta final, mi director de tesis. Has dedicado mucho tiempo a orientarme y hacer correcciones para la presentación de este trabajo; agradezco que me adoptaras en la fase final de este proyecto, mostrando tanto interés, compromiso y dedicación.

También, quiero expresar mi más profundo agradecimiento al profesor Pascual Jara, por el inmenso apoyo que me brindo como coordinador del Programa de Doctorado en Matemática.

Finalmente, quiero expresar mi agradecimiento a la Universidad de Granada, la Facultad de Ciencias y especialmente al Departamento Análisis Matemático por acogerme, en el que he conocido y compartido con personas muy talentosas, pero sobre todo, con mucha calidad humana. Entre ellas, al profesor Rafael Payá, quien además me permitió ser parte de sus apasionantes clases.

He llegado hasta aquí gracias a la persona que hizo posible que comenzara este proyecto, que hábilmente puso en mi camino a todos los profesores que he menciono y que sin ellos no hubiese sido posible llevar este trabajo a su fin. Aunque ya no estés con nosotros, gracias Bernardo Cascales.

# Introducción

El presente trabajo se desarrolla en el ámbito del Análisis Funcional, más específicamente en la teoría de operadores que alcanzan la norma. Aunque la notación que usaremos es la estándar, expondremos de forma breve la que será usada en esta memoria. $X$ e $Y$ denotarán espacios de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), $B_X$ y $S_X$ serán la bola unidad (cerrada) y la esfera unidad de $X$ respectivamente. El espacio de todos los operadores lineales y continuos definidos de $X$ en $Y$ lo representaremos con $L(X, Y)$, el cual será considerado como espacio de Banach con la norma de operadores, $X^*$ representa el espacio dual de $X$ y $\mathrm{NA}(X, Y)$ la colección de todos los operadores en $L(X, Y)$ que alcanzan la norma. Por último, si $A$ es un subconjunto no vacío de $X$, $\mathrm{Ext}(A)$ denota el conjunto de los puntos extremos de $A$.

La importancia del estudio de los operadores en $\mathrm{NA}(X, Y)$ se pone de manifiesto en resultados como el Teorema de James, el cual afirma que si todos los funcionales en el dual de un espacio de Banach alcanzan la norma entonces el espacio es reflexivo. Podríamos considerar el Teorema de James como un punto de partida del estudio de la abundancia de los operadores que alcanzan la norma en el espacio $L(X, Y)$. Un primer paso en esta dirección lo dieron E. Bishop y R. Phelps en el año 1961, cuando demostraron en su trabajo (ver [9]) que para cualquier espacio de Banach $X$, la colección $\mathrm{NA}(X, \mathbb{K})$ es un conjunto denso en $X^*$, resultado que es ampliamente conocido como el Teorema de Bishop-Phelps.

Comienza así un estudio más general en donde el problema a tratar es el de conocer qué pares de espacios de Banach $(X, Y)$ satisfacen el Teorema de Bishop-Phleps, introduciendo de esta forma la siguiente noción.

*Se dice que el par* $(X, Y)$ *satisface la propiedad de Bishop-Phelps (BPp) si* $NA(X, Y)$ *es denso en* $L(X, Y)$.

En el año 1963, J. Lindenstrauss en [16] da un ejemplo de espacios de Banach $X$ e $Y$ tal que el par $(X, Y)$ no tiene la BPp, demostrando además que tal propiedad se satisface para un amplio repertorio de pares $(X, Y)$, en el trabajo [1] se encuentra un resumen de algunos de los resultados más interesantes en este tema hasta el año 2006.

Más tarde, en el año 1970, Béla Bollobás en [10] demuestra una mejora del resultado de Bishop-Phelps, al afirmar que, si un funcional $f \in X^*$ está cerca de alcanzar su norma en un punto $x \in S_X$, entonces se puede encontrar un funcional $g \in X^*$ que alcanza la norma en un punto tan próximo como se quiera de $x$ de tal forma que $g$ también está próximo a $f$. De forma más precisa, obtuvo el siguiente resultado.

*Sean* $x \in S_X$ *y* $f \in S_{X^*}$ *tales que* $|f(x) - 1| \leq \epsilon^2/2$ *(* $0 < \epsilon < 1/2$ *), entonces existen* $g \in S_{X^*}$ *e* $y \in S_X$ *tal que*

$$g(y) = 1, \qquad \|g - f\| < \epsilon \qquad y \qquad \|y - x\| < \epsilon + \epsilon^2.$$

Este resultado fue bautizado como el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, iniciando una linea de investigación en donde el problema sería el de estudiar qué pares de espacios de Banach $(X, Y)$ satisfacen un resultado análogo al obtenido en el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. En 2008, Acosta, Aron, García y Maestre en [3] introducen la siguiente noción sobre el par $(X, Y)$.

*Se dice que el par* $(X, Y)$ *tiene la propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (BPBp), si para cada* $0 < \varepsilon < 1$ *existe* $0 < \eta(\varepsilon) < \varepsilon$ *cumpliendo la siguiente propiedad:*

*Si* $T \in S_{L(X,Y)}$ *y* $x_0 \in S_X$ *son tales que* $\|T(x_0)\| > 1 - \eta(\varepsilon)$*, entonces existen* $S \in S_{L(X,Y)}$ *e* $y_0 \in S_X$ *satisfaciendo las siguientes condiciones*

$$\|S(y_0)\| = 1, \quad \|y_0 - x_0\| < \varepsilon \quad \textit{y} \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

Obteniendo además los primeros resultados en esta línea, como por ejemplo, el par $(X, Y)$ tiene la BPBp cuando $X$ e $Y$ son de dimensión finita [3, Proposición 2.4]. El mismo resultado sigue siendo válido para cada espacio de Banach $X$ en el caso de que el espacio de Banach $Y$ tiene cierta propiedad isométrica (llamada propiedad $\beta$ de Lindenstrauss) [3, Teorema 2.2], propiedad que tienen, por ejemplo, $c_0$ y $\ell_\infty$. También dieron una caracterización de los espacios $Y$ tal que el par $(\ell_1, Y)$ tiene la BPBp [3, Teorema 4.1], definiendo para ello una propiedad sobre $Y$ la cual llamaron AHSp (ver Definición 3.1 en [3]).

En el caso de que $Y$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým, Choi y Kim probaron que para cada medida $\sigma$-finita $\mu$, el par $(L_1(\mu), Y)$ tiene la BPBp si y solo si Y tiene la AHSp [11, Teorema 2.2]. El resultado que muestra que para cada par de medidas positivas $\mu$ y $\nu$ el par $(L_1(\mu), L_1(\nu))$ tiene la BPBp se debe a Choi, Kim, Lee y Martín [12, Teorema 3.1]. Los mismos autores probaron que el par $(L_1(\mu), L_\infty(\nu))$ tiene la BPBp para cada $\mu$ siempre que $\nu$ es una medida localizable [12, Teorema 4.1]. En el caso en que $X$ es uniformemente convexo, entonces el par $(X, Y)$ tiene la BPBp para cada espacio $Y$, resultado demostrado de forma independiente en [15, Teorema 3.1] y [6, Teorema 2.2]. En el trabajo [2] se encuentran de forma detallada los resultados más importantes obtenidos hasta el año 2019.

A pesar de que muchos autores demostraron resultados interesantes sobre este tema en los últimos años, no se sabe si el par $(c_0, \ell_1)$ tiene o no la BPBp en el caso real. Si $n \in \mathbb{N}$ denotemos como $\ell_\infty^n$ al espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma dada por $\|x\| = \max\{|x(i)| : i \leq n\}$. El principal resultado de este trabajo es demostrar que en el caso real el par $(\ell_\infty^n, L_1(\mu))$ tiene la propiedad de BPBp para cualquier medida positiva $\mu$ definida sobre un espacio medible $(\Omega, \Sigma)$, así como dar una caracterización de los espacios $Y$ tales que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp en el caso real.

Para demostrar si el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp es importante conocer la estructura geométrica de la bola unidad de $\ell_\infty^n$. El Teorema de Minkowski-Carathéodory garantiza que fijado $x \in B_{\ell_\infty^n}$ existen $n+1$ puntos extremos de $B_{\ell_\infty^n}$ tal que $x$ es combinación convexa de dichos puntos. El problema está en que para $n \geq 3$ no resulta evidente cómo determinar estos $n+1$ puntos extremos. Consideremos por ejemplo $P = (1/2, -1/2, 1/3, -1/4) \in B_{\ell_\infty^4}$, sabemos que $B_{\ell_\infty^4}$ tiene un total de 16 puntos extremos, por lo que determinar cuál de las 4368 combinaciones posibles de 5 puntos extremos de $B_{\ell_\infty^4}$ tal que $P$ es su combinación convexa no parece tarea fácil. Aunque si conocemos primero la simetría que presenta la bola unidad de $\ell_\infty^4$ (tema que será tratado en el Capítulo 1), podríamos dar con la solución a este problema, obteniendo lo siguiente

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4}(1,1,1,1) + \frac{1}{8}(1,-1,1,1) + \frac{7}{24}(1,-1,1,-1) \\ &\quad + \frac{1}{12}(1,-1,-1-1) + \frac{1}{4}(-1,-1,-1,-1). \end{aligned}$$

Nuestro primer objetivo en esta memoria es el de encontrar una propiedad geométrica de la bola unidad de $\ell_\infty^n$ que nos permita tener control en el momento de fijar un punto en ella por medio de una combinación convexa de sus puntos extremos, con este fin introducimos en el Capítulo 1 los puntos $P_i^n \in B_{\ell_\infty^n}$ $(1 \leq i \leq n+1)$ como sigue

$$P_i^n(j) := \begin{cases} -1 & \text{si } \ 1 \leq j < i \\ \ \ 1 & \text{si } \ i \leq j \leq n. \end{cases}$$

Demostrando que todo punto en $B_{\ell_\infty^n}$ es, salvo isometría, combinación convexa de los puntos en $\{P_i^n : 1 \leq i \leq n+1\}$. Estos puntos nos permitirán además conocer la estructura de los puntos extremos de $B_{\ell_\infty^n}$, para esto introducimos la colección de índices

$$\mathcal{I}_n := \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : k \ \text{ impar}, \ \ k \leq n \ \text{ y } \ i_j < i_{j+1}, \forall j < k\}.$$

y mostramos que

$$\operatorname{Ext}(B_{\ell_\infty^n}) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} P_{i_j}^n : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_{n+1} \right\}.$$

A continuación definimos una base de $\mathbb{R}^n$ denotada por $\mathcal{B}_n$ con vectores $v_i$ con $1 \leq i \leq n$ definidos como

$$v_i^n(j) := \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; j = 1 \\ P_i^{n-1}(j-1) & \text{si} \;\; 1 < j \leq n. \end{cases}$$

Base que nos permitirá determinar la norma de un operador en $L(\ell_\infty^n, Y)$ en función de los valores que toma el operador en los vectores de la base $\mathcal{B}_n$. De forma más precisa, obtenemos que si $T \in L(\ell_\infty^n, Y)$ entonces

$$\|T\| = \max \left\{ \left\| T\left( \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^n \right) \right\| : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n \right\}.$$

Este resultado nos da una idea de cómo un operador $T \in L(\ell_\infty^n, Y)$ está determinado por una colección de $n$ vectores en $Y$, introduciendo para esto la colección $M_Y^n$ como

$$M_Y^n := \left\{ (y_i)_{i \leq n} \in Y^n : \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} y_{i_j} \in B_Y, \;\; \forall (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n \right\}.$$

Obtenemos así una relación directa entre los operadores en la bola unidad de $L(\ell_\infty^n, Y)$ y los elementos en $M_Y^n$.

En el Capítulo 2 presentamos una generalización de la propiedad sobre un espacio $Y$ que fue dada en [4] por los autores M. Acosta, J. Becerra, D. García, S. Kim y M. Maestre la cual llamaron AHSp-$\ell_\infty^3$. Introducimos así la definición de la AHSp-$\ell_\infty^n$.

*Diremos que un espacio $Y$ tiene la **Approximate hyperplane sum property para** $\ell_\infty^n$ (AHSp-$\ell_\infty^n$ de forma abreviada) si para cada $0 < \varepsilon < 1$*

*existe* $0 < \gamma_n(\varepsilon) < \varepsilon$ *satisfaciendo la siguiente condición:*
*Para cada* $(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$*, si existen un conjunto no vacío* $A$ *de* $\{1, \ldots, n\}$ *y* $y^* \in S_{Y^*}$ *tales que* $y^*(y_i) > 1 - \gamma_n(\varepsilon)$ *para cada* $i \in A$*, entonces existe un elemento* $(z_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ *satisfaciendo* $\|z_i - y_i\| < \varepsilon$ *para cada* $i \leq n$ *y* $\|\sum_{i\in A} z_i\| = |A|$.

La AHSp-$\ell_\infty^n$ es una propiedad que permite caracterizar a los espacios $Y$ tales que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp. Será demostrado en el Capítulo 2 que un espacio de Banach real $Y$ cumple que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp si y solo si $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$.

Por último, en el Capítulo 3 daremos ejemplos de espacios de Banach clásicos que satisfacen la AHSp-$\ell_\infty^n$, entre ellos, los espacios de dimensión finita, los espacios uniformemente convexos, también $C_0(L, Y)$ con $Y$ satisfaciendo la AHSp-$\ell_\infty^n$ y $L_1(\mu)$ con $\mu$ una medida positiva, obteniendo así que el par $(\ell_\infty^n, L_1(\mu))$ tiene la BPBp.

El contenido de esta memoria ha sido publicado en los artículos [7] y [8].

# C A P Í T U L O 1

# Operadores definidos sobre $\ell_\infty^n$

## 1.1. Preliminares

Comenzaremos estableciendo la notación y definiciones elementales que usaremos a lo largo de esta memoria. Denotaremos por $\mathbb{K}$ al cuerpo de escalares $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\ell_\infty$ al subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de las sucesiones acotadas, equipado con la norma uniforme

$$\|x\| = \sup\{|x(i)| : i \in \mathbb{N}\} \qquad (x \in \ell_\infty).$$

Como es habitual, $c_0$ representa el subespacio de $\ell_\infty$ conformado por las sucesiones convergentes a 0. Es decir,

$$c_0 := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \forall \varepsilon > 0 \;\; \{i \in \mathbb{N} : |x(i)| \geq \varepsilon\} \;\; \text{es finito}\}.$$

Fijado un número natural $n$, $\ell_\infty^n$ representará al espacio real $\mathbb{R}^n$, dotado con la norma dada por $\|x\| = \max\{|x(i)| : i \leq n\}$, $X$ e $Y$ representaran espacios de Banach no triviales, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ serán llamadas bola unidad y esfera unidad de $X$ respectivamente. $L(X, Y)$ denota el espacio de todas las aplicaciones lineales y continuas $T : X \to Y$ dotado con la norma de operadores:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\}.$$

El operador $T \in L(X,Y)$ será llamado una biyección isométrica si $T$ es sobreyectiva y también una isometría, es decir, satisface:

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad (x \in X).$$

En el caso en el que $Y$ sea el cuerpo $\mathbb{K}$, $L(X,\mathbb{K})$ será denotado por $X^*$ el cual llamaremos espacio dual de $X$. Diremos que un operador $T \in L(X,Y)$ alcanza la norma, si existe $x_0 \in S_X$ tal que $\|T(x_0)\| = \|T\|$ y denotaremos por $\mathrm{NA}(X,Y)$ a la colección de tales operadores, es decir,

$$\mathrm{NA}(X,Y) := \{T \in L(X,Y) : T \text{ alcanza la norma}\}.$$

Sabemos que no siempre un operador en $L(X,Y)$ alcanza la norma. Uno de los ejemplos más sencillos en donde esto se pone de manifiesto es el caso de $X = c_0$ e $Y = \mathbb{K}$, considerando el funcional $f : c_0 \to \mathbb{K}$ definido como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n^2} \quad (x \in c_0).$$

En el caso de que el espacio $X$ es de dimensión finita, tenemos que $\mathrm{NA}(X,Y) = L(X,Y)$. Además, si $X$ es reflexivo tenemos que $B_X$ es débilmente compacto y por tanto se tiene que $\mathrm{NA}(X,\mathbb{K})$ coincide con $X^*$. En el año 1960, Errett Bishop y Robert Phelps [9] demostraron que, aunque $X$ no sea reflexivo, se puede garantizar la abundancia de funcionales que alcanzan la norma en $X^*$, mostrando que esta clase de funcionales son densos en $X^*$, dicho resultado se conoce como el Teorema de Bishop-Phelps.

Antes de continuar, necesitamos los siguientes resultados que, aunque son elementales, es mejor mencionarlos para una mejor comprensión.

**Lema 1.1.1.** *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado y $A \subset X$ tal que $\mathbb{R}^+ A \subset A$ entonces, $A$ es denso en $X$ si y solo si $S_X \cap A$ es denso en $S_X$.*

*Demostración.* Fijemos $x \in S_X$, $0 < \epsilon < 1$ y $a_0 \in A$ tal que $\|x - a_0\| < \epsilon/2$ de esta forma $a = \frac{1}{\|a_0\|} a_0 \in A$ y tenemos

$$\|x-a\| \leq \|x-a_0\| + \|a_0 - a\| = \|x-a_0\| + |1 - \|a_0\|| \leq \|x-a_0\| + \|x-a_0\| < \epsilon.$$

Recíprocamente, supongamos que $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Si $x = 0$ podemos fijar $a \in A$ con $a \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|\alpha a\| < \varepsilon$, en otro caso, fijamos $a \in A$ tal que $\|\frac{1}{\|x\|}x - a\| < \frac{\epsilon}{\|x\|}$ lo que implica que $\|\, x - \|x\|a \,\| < \epsilon$. □

Basta aplicar este resultado en el espacio de operadores $L(X,Y)$, al subconjunto $\mathrm{NA}(X,Y)$ para obtener lo siguiente.

**Corolario 1.1.2.** *$NA(X,Y)$ es denso en $L(X,Y)$ si y solo si, para cada $T \in S_{L(X,Y)}$ y $\epsilon > 0$, existe $S \in NA(X,Y)$ tal que*

$$\|S\| = 1 \quad y \quad \|S - T\| < \epsilon.$$

En el año 1970, Béla Bollobás en [10], dio una versión del Teorema de Bishop-Phelps demostrando lo siguiente.

**Teorema 1.1.3** (Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás)**.** *Sean $x \in S_X$ y $f \in S_{X^*}$ tales que $|f(x) - 1| \leq \epsilon^2/2$, $0 < \epsilon < 1/2$, entonces existen $y \in S_X$ y $g \in S_{X^*}$ tal que*

$$g(y) = 1, \quad \|g - f\| < \epsilon \quad y \quad \|y - x\| < \epsilon + \epsilon^2.$$

En 2008, los autores M. Acosta, R. Aron, D. García y M. Maestre [3] introducen la siguiente definición.

**Definición 1.1.4.** *Sea $X$ y $Y$ espacios de Banach reales o complejos. Diremos que el par $(X,Y)$ tiene la propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (BPBp), si para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe $0 < \eta(\varepsilon) < \varepsilon$ cumpliendo la siguiente propiedad:*
*Si $T \in S_{L(X,Y)}$ y $x_0 \in S_X$ son tales que $\|T(x_0)\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, entonces existe $S \in S_{L(X,Y)}$ e $y_0 \in S_X$ satisfaciendo las siguientes condiciones*

$$\|S(y_0)\| = 1, \quad \|y_0 - x_0\| < \varepsilon \qquad y \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

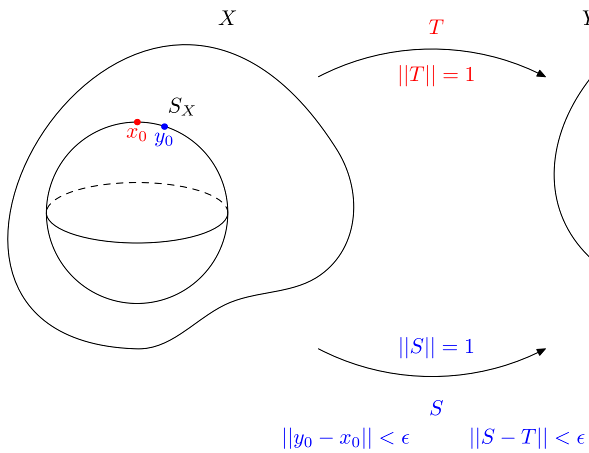



Figura 1.1: $T$ es aproximado por $S$ que alcanza la norma en un punto próximo a $x_0$.

En vista del Corolario anterior, es claro que, si $(X, Y)$ tiene la BPBp, $\mathrm{NA}(X, Y)$ es denso en $L(X, Y)$. Sin embargo, el reciproco no es cierto. Si consideramos un espacio de Banach $Y$ no reflexivo y estrictamente convexo, como consecuencia de la Proposición 3.9 y el Teorema 4.1 en [3] se tiene que el par $(\ell_1, Y)$ no tiene la BPBp, además, como consecuencia de la Proposición 1.3 en [18], $\mathrm{NA}(\ell_1, Y)$ es denso en $L(\ell_1, Y)$.

Al estudiar si un par $(X, Y)$ posee la BPBp es importante conocer la estructura y propiedades geométricas de la esfera unidad de $X$, como podría ser alguna simetría, de tal forma que nos permita tener más control sobre la elección de un punto en $S_X$. Es por esto que dedicaremos este primer capítulo a explorar tales propiedades en el caso de que el espacio $X$ sea $\ell_\infty^n$, comenzando por casos más sencillos como el que corresponde a $n = 3$, el cual será nuestro punto de partida para obtener una generalización.

Si $A \subset X$ denotaremos por $\mathrm{co}(A)$ a la **envoltura convexa de** $A$, que no es más que la intersección de todos los subconjuntos convexos de $X$ conteniendo a $A$.

**Definición 1.1.5.** *Si $A \subset X$ y $a \in A$, diremos que $a$ es un* ***punto extremo*** *de $A$ si $a$ no es un punto intermedio de un segmento contenido en $A$, es decir, satisface que si $x, y \in A$ y $t \in ]0,1[$ se cumple que*

$$\textit{Si} \quad a = tx + (1-t)y \quad \textit{entonces} \quad x = y = a.$$

*El conjunto de todos los puntos extremos de $A$ será denotado por* $\operatorname{Ext}(A)$.

Comenzaremos considerando los subconjuntos de la esfera $S_{\ell_\infty^n}$ que se obtienen al fijar una de sus coordenadas y haciéndolas 1 o $-1$. De forma más precisa, si $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{-1, 1\}$ denotamos por $C_{i,j}^n$ al conjunto

$$C_{i,j}^n = \{v \in S_{\ell_\infty^n} : v(i) = j\}.$$

En el espacio $\ell_\infty^3$ es sencillo ver que su esfera unidad (que es la superficie de un cubo), está compuesta por seis caras maximales de la bola $B_{\ell_\infty^3}$ , las cuales guardan una simetría entre sí, en donde cada una de ellas se puede identificar con la bola unidad de $\ell_\infty^2$, como se puede apreciar en la figura 1.2. Esto mismo sucede al estudiar una de las $2(n+1)$ caras maximales de la bola unidad de $\ell_\infty^{n+1}$, siendo cada una de ellas identificable con la bola unidad de $\ell_\infty^n$. Es por esta razón que en la presente sección nos dedicaremos a estudiar algunas propiedades geométricas de $B_{\ell_\infty^n}$, que resultarán cruciales para este trabajo.

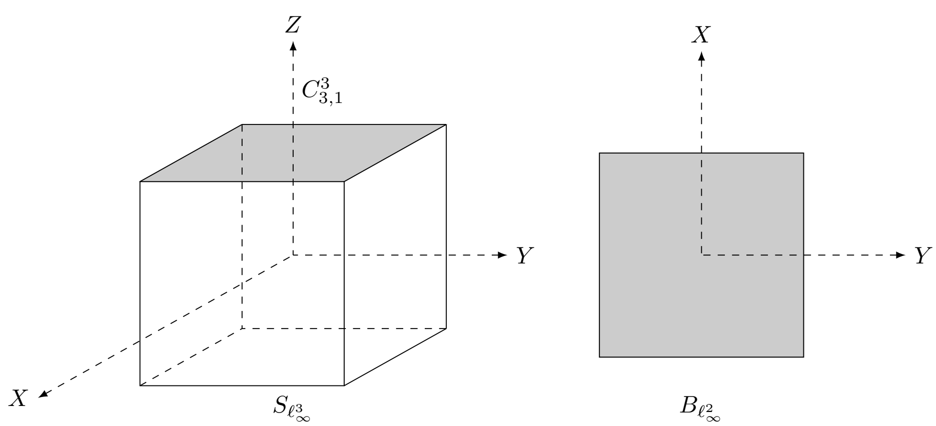



Figura 1.2: La cara $C_{3,1}^3$ se puede identificar con la bola unidad de $\ell_\infty^2$.

Si dibujamos en el plano la bola unidad de $\ell_\infty^2$, notaremos que dado un punto arbitrario en ella, lo podremos escribir como combinación convexa de los puntos $P_1^2 = (1,1)$, $P_2^2 = (-1,1)$ y $P_3^2 = (-1,-1)$ o de los puntos $P_1^2 = (1,1)$, $P_3^2 = (-1,-1)$ y $P_4^2 = (1,-1)$. Además, el triángulo determinado por los puntos $P_1^2$, $P_2^2$ y $P_3^2$ es isométrico al triángulo con vértices $P_1^2$, $P_3^2$ y $P_4^2$, pudiendo afirmar así que todo punto en $B_{\ell_\infty^2}$ es, salvo isometría, combinación convexa de los puntos $P_1^2$, $P_2^2$ y $P_3^2$.

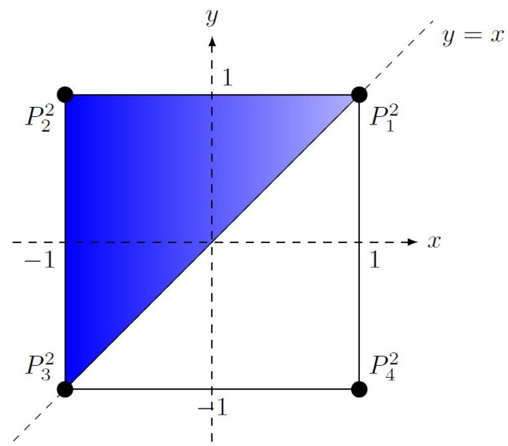



Figura 1.3: Partición de la bola unidad de $\ell_\infty^2$.

En el caso de $\ell_\infty^3$, no resulta evidente obtener una propiedad similar en la que todo punto de la bola se pueda obtener, salvo isometría, como combinación convexa de cuatro puntos y mucho menos evidente en un caso general. A continuación, abordaremos este problema y responderemos la siguiente interrogante en el caso de $n = 3$.

¿Es posible encontrar $n+1$ puntos $P_1^n, \ldots, P_{n+1}^n$ en la bola $B_{\ell_\infty^n}$ tal que para todo punto $P \in B_{\ell_\infty^n}$ existe una isometría $I$ de $\ell_\infty^n$ , cumpliendo que $I(P) \in \mathrm{co}(\{P_1^n, \ldots, P_{n+1}^n\})$?

Es evidente que la respuesta a esta pregunta guarda relación con el Teorema de Minkowski-Carathéodory, que nos dice que todo punto en la bola $B_{\ell_\infty^n}$ es combinación convexa de $n+1$ de sus puntos extremos; sin embargo, este resultado no nos permiten responder de forma más precisa la interrogante planteada. Para resolver este problema consideramos los casos $n = 2$ y $n = 3$, que nos servirán como idea para saber el camino a seguir, con el fin de obtener una generalización.

Si volvemos a la figura 1.3, podemos notar que la envoltura convexa del conjunto con puntos $P_1^2$, $P_2^2$ y $P_3^2$ están por encima de la recta $y = x$, y además, se cumple que

$$\text{co}(\{P_1^2, P_2^2, P_3^2\}) = \{v \in B_{\ell_\infty^2} : v(1) \leq v(2)\}.$$

Partiendo de esta observación y notando que los vértices de este triángulo están formados por todas las posibles combinaciones de 1 y -1, ordenadas de menor a mayor, podemos aventurarnos a definir los puntos que necesitamos en el caso $n = 3$ como sigue

$$P_1^3 = (1, 1, 1),\ P_2^3 = (-1, 1, 1),\ P_3^3 = (-1, -1, 1) \text{ y } P_4^3 = (-1, -1, -1),$$

y conjeturar que

$$\mathcal{P}_1 := \text{co}(\{P_1^3, P_2^3, P_3^3, P_4^3\}) = \{v \in B_{\ell_\infty^3} : v(1) \leq v(2) \leq v(3)\}. \qquad (1.1.1)$$

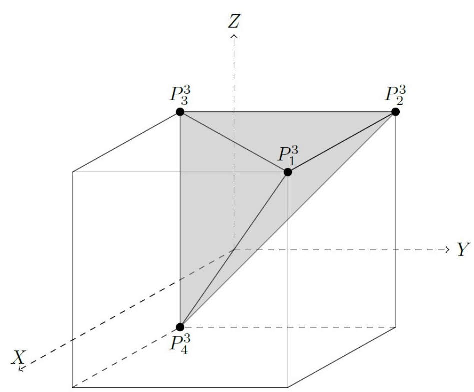



Figura 1.4: Poliedro $\mathcal{P}_1$

Esto último es cierto y, aunque lo podemos mostrar geométricamente, es más fácil demostrarlo analíticamente pues al fijar un punto $v \in B_{\ell_\infty^3}$ y plantear las ecuaciones

$$v = \alpha_1 P_1^3 + \alpha_2 P_2^3 + \alpha_3 P_3^3 + \alpha_4 P_4^3 \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1,$$

obtenemos como única solución

$$\alpha_1 = \frac{1+v(1)}{2},\ \alpha_2 = \frac{v(2)-v(1)}{2},\ \alpha_3 = \frac{v(3)-v(2)}{2} \quad \text{y} \quad \alpha_4 = \frac{1-v(3)}{2}.$$

Por lo que es claro que, si tenemos además que $v(1) \leq v(2) \leq v(3)$, lo anterior implica que $v$ pertenecerá al poliedro $\mathcal{P}_1$. Por otra parte, el conjunto $A = \{v \in B_{\ell^3_\infty} : v(1) \leq v(2) \leq v(3)\}$ es convexo y $P^3_i \in A$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$, lo cual implica que $\mathcal{P}_1$ está contenido en $A$ . De esta manera hemos visto que la igualdad planteada en (1.1.1) es verdadera.

La estructura de orden entre las coordenadas de los puntos de $\mathcal{P}_1$, nos permite saber qué isometría será la apropiada para convertir un punto arbitrario en $B_{\ell^3_\infty}$ en un punto de $\mathcal{P}_1$. Denotemos ahora los restantes cuatro vértices de $B_{\ell^3_\infty}$ como sigue

$$P^3_5 = (1,-1,1),\ P^3_6 = (1,-1,-1),\ P^3_7 = (1,1,-1) \text{ y } P^3_8 = (-1,1,-1),$$

y consideremos las cinco isometrías de $\ell^3_\infty$ que surgen al intercambiar posiciones: $I_2(x,y,z) = (x,z,y)$, $I_3(x,y,z) = (y,x,z)$, $I_4(x,y,z) = (z,x,y)$, $I_5(x,y,z) = (y,z,x)$ y $I_6(x,y,z) = (z,y,x)$, al aplicarlas al poliedro $\mathcal{P}_1$ obtenemos cinco poliedros que tienen la misma geometría que el primero y que son

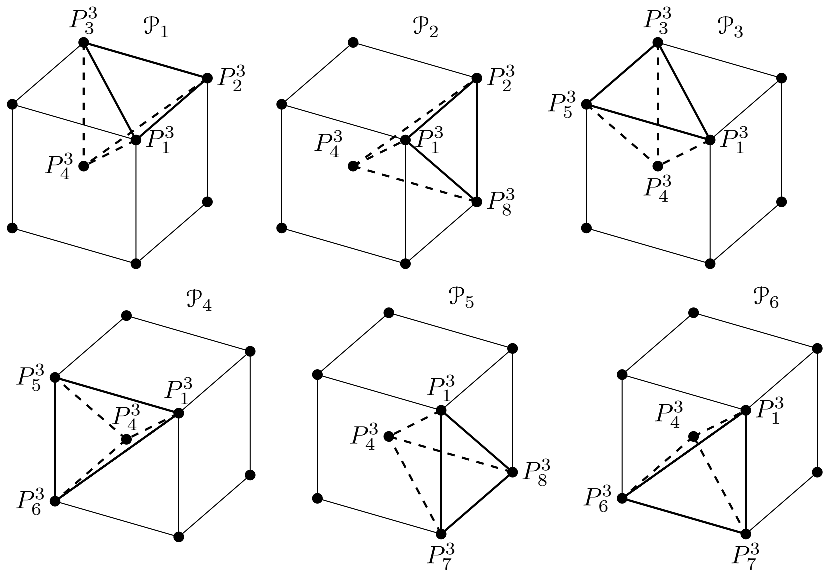
$$\mathcal{P}_2 := I_2(\mathcal{P}_1) = \text{co}(\{P^3_1, P^3_2, P^3_4, P^3_8\}) = \{v \in B_{\ell^3_\infty} : v(1) \leq v(3) \leq v(2)\}$$

$$\mathcal{P}_3 := I_3(\mathcal{P}_1) = \text{co}(\{P^3_1, P^3_3, P^3_4, P^3_5\}) = \{v \in B_{\ell^3_\infty} : v(2) \leq v(1) \leq v(3)\}$$

$$\mathcal{P}_4 := I_4(\mathcal{P}_1) = \text{co}(\{P^3_1, P^3_4, P^3_5, P^3_6\}) = \{v \in B_{\ell^3_\infty} : v(3) \leq v(1) \leq v(2)\}$$

$$\mathcal{P}_5 := I_5(\mathcal{P}_1) = \text{co}(\{P^3_1, P^3_4, P^3_7, P^3_8\}) = \{v \in B_{\ell^3_\infty} : v(2) \leq v(3) \leq v(1)\}$$

$$\mathcal{P}_6 := I_6(\mathcal{P}_1) = \text{co}(\{P^3_1, P^3_4, P^3_6, P^3_7\}) = \{v \in B_{\ell^3_\infty} : v(3) \leq v(2) \leq v(1)\}$$




Estos seis poliedros, isométricos entre sí, conforman una partición del cubo, como si de un puzle se tratara. Otro resultado, cuando menos curioso, es la forma en la que se pueden describir los últimos cuatro vértices $P_5^3$, $P_6^3$, $P_7^3$ y $P_8^3$ como combinación de los cuatro primeros:

$$P_5^3 = P_1^3 - P_2^3 + P_3^3, \qquad P_6^3 = P_1^3 - P_2^3 + P_4^3,$$
$$P_7^3 = P_1^3 - P_3^3 + P_4^3 \;\text{ y }\; P_8^3 = P_2^3 - P_3^3 + P_4^3.$$

Este tipo de combinaciones, formada por una cantidad impar de puntos ordenados de forma creciente y en donde se van alternando los signos, son las que serán de utilidad para obtener los vértices restantes del hipercubo $[-1,1]^n$, partiendo solo de $n+1$ vértices prefijados.

## 1.2. Simetría del hipercubo

Comenzaremos considerando los $n+1$ puntos extremos o vértices del hipercubo $B_{\ell_\infty^n} = [-1,1]^n$ que nos servirán para encontrarle una partición con propiedades geométricas similares a las que encontramos en el caso de $B_{\ell_\infty^3}$. Para cada $1 \leq i \leq n+1$, definimos las coordenadas del punto $P_i^n \in B_{\ell_\infty^n}$ como sigue

$$P_i^n(j) := \begin{cases} -1 & \text{si } \; 1 \leq j < i \\ \;\;1 & \text{si } \; i \leq j \leq n. \end{cases}$$

también definimos $\mathcal{P}^n := \mathrm{co}(\{P_i^n : 1 \leq i \leq n+1\})$.

Lo que haremos a continuación es dar una forma de escribir un vector $v \in \mathbb{R}^n$ como combinación lineal de los puntos que acabamos de definir.

**Lema 1.2.1.** *Si $n \geq 2$ y $v \in \mathbb{R}^n$ entonces $v$ se puede expresar de la siguiente manera*

$$v = \frac{1+v(1)}{2}P_1^n + \sum_{i=2}^{n} \frac{v(i)-v(i-1)}{2}P_i^n + \frac{1-v(n)}{2}P_{n+1}^n.$$

*En particular, $\{v \in B_{\ell_\infty^n} : v(i) \leq v(i+1), \quad \forall 1 \leq i < n\} \subset \mathcal{P}^n$.*

*Demostración.* Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq j \leq n$. La coordenada $j$ del vector $v$ la podemos reescribir como

$$\begin{aligned} v(j) &= \frac{1+v(1)}{2} + \frac{-v(1)+v(j)}{2} + \frac{-v(j)+v(n)}{2}(-1) + \frac{-1+v(n)}{2} \\ &= \frac{1+v(1)}{2} + \sum_{i=2}^{j} \frac{v(i)-v(i-1)}{2} - \sum_{i=j+1}^{n} \frac{v(i)-v(i-1)}{2} - \frac{1-v(n)}{2} \\ &= \frac{1+v(1)}{2}P_1^n(j) + \sum_{i=2}^{n} \frac{v(i)-v(i-1)}{2}P_i^n(j) + \frac{1-v(n)}{2}P_{n+1}^n(j). \end{aligned}$$

En el caso de que $v$ sea un vector en la bola unidad de $\ell_\infty^n$ y sus coordenadas estén ordenadas de menor a mayor, tendríamos que

$$\frac{1+v(1)}{2} \geq 0, \quad \frac{1-v(n)}{2} \geq 0, \quad \frac{v(i)-v(i-1)}{2} \geq 0 \qquad (2 \leq i \leq n),$$

y

$$\frac{1+v(1)}{2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{v(i)-v(i-1)}{2} + \frac{1-v(n)}{2} = 1,$$

por lo que, $\{v \in B_{\ell_\infty^n} : v(i) \leq v(i+1), \quad \forall 1 \leq i < n\} \subset \mathcal{P}^n$. $\square$

Es claro que $\{v \in B_{\ell_\infty^n} : v(i) \leq v(i+1), \quad \forall 1 \leq i < n\}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y además, $\{P_i^n : 1 \leq i \leq n+1\}$ está contenido en él, por lo que

$$\mathcal{P}^n \subset \{v \in B_{\ell_\infty^n} : v(i) \leq v(i+1), \quad \forall 1 \leq i < n\},$$

Esto último, junto al resultado del lema previo nos permite afirmar lo siguiente.

**Lema 1.2.2.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$\mathcal{P}^n = \{v \in B_{\ell_\infty^n} : v(i) \leq v(i+1), \quad \forall 1 \leq i < n\}.$$

Ahora ya resulta evidente cómo dar respuesta a la pregunta planteada en la sección anterior. Si $P \in B_{\ell_\infty^n}$ reordenando las coordenadas de $P$, podemos considerar una permutación $\sigma$ de $\{1, \cdots, n\}$ tal que el punto $P' \in B_{\ell_\infty^n}$ definido como $P'(j) = P(\sigma(j))$ para cada $j \leq n$ esté en $\mathcal{P}^n$, siendo la biyección isométrica $I : \ell_\infty^n \to \ell_\infty^n$ definida como

$$I(x)(j) = x(\sigma(j)) \quad (x \in \ell_\infty^n, 1 \leq j \leq n)$$

la que satisface que $I(P) \in \mathcal{P}^n$.

Por otra parte, si construimos de manera ordenada todas las posibles combinaciones de una cantidad impar de los puntos $P_i^n$ alternado los signos, se pueden recrear en su totalidad los $2^n$ vértices del hipercubo $[-1,1]^n$, como se puede verificar de manera sencilla para $n = 1, 2$ y como se comentó al terminar la sección anterior en el caso $n = 3$. Si $n = 4$ obtenemos

$$\begin{aligned}
P_1^4 &= (1,1,1,1)\\
P_2^4 &= (-1,1,1,1)\\
P_3^4 &= (-1,-1,1,1)\\
P_4^4 &= (-1,-1,-1,1)\\
P_5^4 &= (-1,-1,-1,-1)\\
P_1^4 - P_2^4 + P_3^4 &= (1,-1,1,1)\\
P_1^4 - P_2^4 + P_4^4 &= (1,-1,-1,1)\\
P_1^4 - P_2^4 + P_5^4 &= (1,-1,-1,-1)\\
P_1^4 - P_3^4 + P_4^4 &= (1,1,-1,1)\\
P_1^4 - P_3^4 + P_5^4 &= (1,1,-1,-1)\\
P_1^4 - P_4^4 + P_5^4 &= (1,1,1,-1)\\
P_2^4 - P_3^4 + P_4^4 &= (-1,1,-1,-1)\\
P_2^4 - P_3^4 + P_5^4 &= (-1,1,-1,-1)\\
P_2^4 - P_4^4 + P_5^4 &= (-1,1,1,-1)\\
P_3^4 - P_4^4 + P_5^4 &= (-1,-1,1,-1)\\
P_1^4 - P_2^4 + P_3^4 - P_4^4 + P_5^4 &= (1,-1,1,-1).
\end{aligned}$$

Esta forma de recrear los 16 vértices del hipercubo $[-1,1]^4$ partiendo de solo 5 de ellos es algo que podemos obtener en cualquier dimensión, es decir, podemos construir los $2^n$ vértices del hipercubo $B_{\ell_\infty^n}$ partiendo solo de $n+1$ de sus vértices que son justamente los puntos $P_i^n$ $(1 \le i \le n+1)$. Para ver esto, fijemos $n \in \mathbb{N}$, definiendo $\mathcal{I}_n$ como

$$\mathcal{I}_n := \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : k \text{ impar}, \quad k \le n \text{ y } i_j < i_{j+1}, \forall j < k\}.$$

El siguiente lema generaliza la última observación.

**Lema 1.2.3.** *Para cada número natural $n$ tenemos que*

$$\operatorname{Ext}(B_{\ell_\infty^n}) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} P_{i_j}^n : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_{n+1} \right\}.$$

*Demostración.* Comenzaremos demostrando la inclusión

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} P^n_{i_j} : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_{n+1} \right\} \subset \operatorname{Ext}(B_{\ell_\infty^n}).$$

Sea $(i_1, \ldots, i_k)$ un elemento en $\mathcal{I}_{n+1}$. Denotemos por $z = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} P^n_{i_j}$ y para cada $1 \leq j_0 \leq n$ consideremos el conjunto dado por

$$A_{j_0} = \{ s \leq k : P^n_{i_s}(j_0) = 1 \} \text{ y } B_{j_0} = \{ s \leq k : P^n_{i_s}(j_0) = -1 \}.$$

ya que $A_{j_0}$ y $B_{j_0}$ son subconjuntos disjuntos cuya unión es $\{1, \ldots, k\}$, podemos escribir $z(j_0)$ como sigue

$$z(j_0) = \sum_{j \in A_{j_0}} (-1)^{j+1} 1 + \sum_{j \in B_{j_0}} (-1)^{j+1} (-1).$$

usando que $A_{j_0}$ y $B_{j_0}$ son intervalos de $\{s \in \mathbb{N} : s \leq k\}$ y que $k$ es impar, obtenemos que $z(j_0) \in \{1, -1\}$, por lo tanto $z$ es un punto extremo de $B_{\ell_\infty^n}$.

Solo nos quedaría por demostrar la inclusión

$$\operatorname{Ext}(B_{\ell_\infty^n}) \subset \left\{ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} P^n_{i_j} : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_{n+1} \right\}, \qquad (1.2.1)$$

lo cual haremos por inducción sobre $n$. Para $n = 1$ la condición (1.2.1) es clara. Supongamos que (1.2.1) es cierto para un número natural $n$. Si $P \in \operatorname{Ext}(B_{\ell_\infty^{n+1}})$, definimos el punto $P'$ en $\mathbb{R}^n$ como

$$P'(i) = P(i) \qquad (i \leq n).$$

Claramente $P' \in \operatorname{Ext}(B_{\ell_\infty^n})$. Luego, por hipótesis existe $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_{n+1}$ tal que

$$P' = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} P^n_{i_j}.$$

De esta forma, obtenemos que

$$P = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}P_{i_j}^{n+1} & \text{si} \;\; P(n+1) = 1 \\ \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}P_{i_j}^{n+1} + P_{n+2}^{n+1} & \text{si} \;\; P(n+1) = -1 \;\; \text{y} \;\; i_k = n+1 \\ \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}P_{i_j}^{n+1} - P_{n+1}^{n+1} + P_{n+2}^{n+1} & \text{si} \;\; P(n+1) = -1 \;\; \text{y} \;\; i_k \leq n. \end{cases}$$

Concluyendo así que $P \in \left\{ \sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} P_{j_p}^{n+1} : (j_1, \ldots, j_m) \in \mathcal{I}_{n+2} \right\}$. $\square$

## 1.3. Operadores en $L(\ell_\infty^n, Y)$

En esta sección estudiaremos la forma de representar de una manera adecuada los operadores en $L(\ell_\infty^n, Y)$. Primero introduciendo una base que nos será de gran ayuda para cumplir nuestros objetivos.

Fijemos $n \in \mathbb{N}$, definimos para cada $1 \leq i \leq n$ el vector $v_i^n \in \ell_\infty^n$ como sigue

$$v_i^n(j) := \begin{cases} 1 & \text{si } \ j = 1 \\ P_i^{n-1}(j-1) & \text{si } \ 1 < j \leq n, \end{cases}$$

definimos además $\mathcal{B}_n := \{v_i^n : i \leq n\}$.

De la Definición de los puntos $P_i^{n-1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$ se sigue que

$$v_i^n(j) := \begin{cases} -1 & \text{si } \ 2 \leq j \leq i \\ 1 & \text{si } \ j = 1 \ \text{ o } \ i+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Los siguientes Lemas se demuestran siguiendo la idea de la demostración de los Lemas 1.2.1 y 1.2.3.

**Lema 1.3.1.** *Si $n \geq 2$ y $v \in \mathbb{R}^n$ entonces $v$ puede expresarse de la siguiente forma*

$$v = \frac{v(1)+v(2)}{2} v_1^n + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{v(i+1)-v(i)}{2} v_i^n + \frac{v(1)-v(n)}{2} v_n^n.$$

*En particular, el conjunto $\mathcal{B}_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.*

*Demostración.* Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq j \leq n$. En el caso en que $j = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} v(1) &= \frac{v(1)+v(2)}{2} + \frac{v(n)-v(2)}{2} + \frac{v(1)-v(n)}{2} \\ &= \frac{v(1)+v(2)}{2} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{v(i+1)-v(i)}{2} + \frac{v(1)-v(n)}{2} \\ &= \frac{v(1)+v(2)}{2} v_1^n(1) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{v(i+1)-v(i)}{2} v_i^n(1) + \frac{v(1)-v(n)}{2} v_n^n(1). \end{aligned}$$

En el caso que $j > 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
v(j) &= \frac{v(1)+v(2)}{2} + \frac{-v(2)+v(j)}{2} + \frac{-v(j)+v(n)}{2}(-1) + \frac{-v(1)+v(n)}{2} \\
&= \frac{v(1)+v(2)}{2} + \sum_{i=2}^{j-1} \frac{v(i+1)-v(i)}{2} - \sum_{i=j}^{n-1} \frac{v(i+1)-v(i)}{2} - \frac{v(1)-v(n)}{2} \\
&= \frac{v(1)+v(2)}{2} v_1^n(j) + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{v(i+1)-v(i)}{2} v_i^n(j) + \frac{v(1)-v(n)}{2} v_n^n(j).
\end{aligned}$$

□

**Lema 1.3.2.** *Para cada número natural $n$ se tiene que*

$$\operatorname{Ext}(C_{1,1}^n) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^n : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n \right\}.$$

*Demostración.* Comenzaremos demostrando la inclusión

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^n : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n \right\} \subset \operatorname{Ext}(C_{1,1}^n).$$

Sea $(i_1, \ldots, i_k)$ un elemento en $\mathcal{I}_n$. Denotamos por $z = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^n$ y para cada $1 \leq j_0 \leq n$ consideremos los conjuntos

$$A_{j_0} = \{ s \leq k : v_{i_s}^n(j_0) = 1 \} \text{ y } B_{j_0} = \{ s \leq k : v_{i_s}^n(j_0) = -1 \}.$$

Ya que $A_{j_0}$ y $B_{j_0}$ son disjuntos cuya unión es el conjunto $\{1, \ldots, k\}$, obtenemos lo siguiente

$$z(j_0) = \sum_{j \in A_{j_0}} (-1)^{j+1} 1 + \sum_{j \in B_{j_0}} (-1)^{j+1} (-1).$$

Usando que $A_{j_0}$ y $B_{j_0}$ son intervalos en $\{ s \in \mathbb{N} : s \leq k \}$ y $k$ es impar, se obtiene que $z(j_0) \in \{1, -1\}$. Además, es claro que $z(1) = 1$ ya que $v_i^n(1) = 1$

para cada $i \leq n$ y $k$ es impar. Por lo tanto $z \in C_{1,1}^n \cap \mathrm{Ext}(B_{\ell_\infty^n})$, y en consecuencia $z$ es un punto extremo de $C_{1,1}^n$.

Ahora, demostraremos la inclusión

$$\mathrm{Ext}(C_{1,1}^n) \subset \left\{ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^n : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n \right\}. \tag{1.3.1}$$

Esto lo haremos por inducción. Para $n = 1$ la condición (1.3.1) se verifica de manera trivial. Supongamos que (1.3.1) se cumple para un número natural $n$. Si $v \in \mathrm{Ext}(C_{1,1}^{n+1})$, definimos $v'$ en $\mathbb{R}^n$ como sigue

$$v'(i) = v(i) \qquad (i \leq n).$$

Claramente $v' \in \mathrm{Ext}(C_{1,1}^n)$. Por hipótesis existirá $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n$ tal que

$$v' = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^n.$$

Obteniendo así,

$$v = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^{n+1} & \text{si } \; v(n+1) = 1 \\ \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} v_{i_j}^{n+1} + v_{n+1}^{n+1} & \text{si } \; v(n+1) = -1 \; \text{ y } \; i_k = n \\ \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^{n+1} - v_n^{n+1} + v_{n+1}^{n+1} & \text{si } \; v(n+1) = -1 \; \text{ y } \; i_k < n. \end{cases}$$

La expresión previa muestra que $v \in \left\{ \sum_{p=1}^{m} (-1)^{p+1} v_{j_p}^{n+1} : (j_1, \ldots, j_m) \in \mathcal{I}_{n+1} \right\}$.

$\square$

**Notación 1.3.3.** *Si $Y$ es un espacio de Banach y $n$ es un entero positivo, definimos*

$$M_Y^n := \left\{ (y_i)_{i \leq n} \in Y^n : \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} y_{i_j} \in B_Y, \quad \forall (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n \right\}.$$

*y además,*

$$O_n := \{v \in C_{1,1}^n : v(i) \leq v(i+1), \quad \forall 2 \leq i < n\}.$$

Es claro que $\mathcal{B}_n \subset O_n$. Debido a que $O_n$ es convexo, obtenemos que

$$\mathrm{co}(\mathcal{B}_n) \subset O_n.$$

Por el Lema 1.3.1 tenemos que cada elemento en $O_n$ es combinación convexa de los vectores de la base $\mathcal{B}_n$. Obteniendo como consecuencia el siguiente resultado.

**Lema 1.3.4.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\mathrm{co}(\mathcal{B}_n) = O_n.$$

Gracias al Lema 1.3.1, contamos ahora con una base de $\mathbb{R}^n$, en la que haciendo combinaciones adecuadas de los vectores de esta base (Lema 1.3.2), podemos obtener en su totalidad todos los puntos extremos de la bola unidad de $\ell_\infty^n$, obteniendo así una caracterización de los operadores en $L(\ell_\infty^n, Y)$.

**Proposición 1.3.5.** *La aplicación $\Phi : L(\ell_\infty^n, Y) \longrightarrow Y^n$ dada por*

$$\Phi(T) = (T(v_i^n))_{i \leq n} \qquad (T \in L(\ell_\infty^n, Y)),$$

*es una biyección lineal satisfaciendo que*

$$\|T\| = \max \left\{ \left\| T\left( \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} v_{i_j}^n \right) \right\| : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n \right\}.$$

*En particular, $\Phi(B_{L(\ell_\infty^n, Y)}) = M_Y^n$.*

*Demostración.* Por el Lema 1.3.1 el conjunto $\mathcal{B}_n = \{v_i^n : i \leq n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, por lo que, cada operador $T \in L(\ell_\infty^n, Y)$ está determinado por un elemento $(T(v_i^n))_{i\leq n} \in Y^n$. Por lo que resulta inmediato que $\Phi$ es una biyección lineal.

Es claro que

$$\mathrm{Ext}\big(B_{\ell_\infty^n}\big) = \{v \in B_{\ell_\infty^n} : |v(i)| = 1,\ \forall i \leq n\} = \mathrm{Ext}\big(C_{1,1}^n\big) \cup \mathrm{Ext}\big(-C_{1,1}^n\big).$$

Luego, por el Lema 1.3.2 obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \|T\| &= \text{máx}\{\|T(e)\| : e \in \mathrm{Ext}\big(B_{\ell_\infty^n}\big)\} \\ &= \text{máx}\{\|T(e)\| : e \in \mathrm{Ext}(C_{1,1}^n)\} \\ &= \text{máx}\left\{\left\|T\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}v_{i_j}^n\right)\right\| : (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n\right\}. \end{aligned}$$

Por la expresión previa se sigue que $T \in B_{L(\ell_\infty^n, Y)}$ si y solo si $\Phi(T)$ es un elemento en $M_Y^n$. □

En el siguiente Lema los espacios pueden ser considerados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos.

**Lema 1.3.6.** *Si $S \in NA(c_0, Y)$ y $z \in S_{c_0}$ satisfacen que $\|S(z)\| = \|S\|$ entonces se cumple que*

$$\|S(z\chi_C + w\chi_D)\| = \|S\|,$$

*para cualquier $w \in B_{c_0}$, donde $C = \{n \in \mathbb{N} : |z(n)| = 1\}$ y $D = \mathbb{N} \setminus C$.*

*Demostración.* Supongamos que $D = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ y $n_k < n_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Veamos primero que el operador $S$ alcanza la norma en el vector

$$z_1 := z\chi_{\mathbb{N}\setminus\{n_1\}} + w(n_1)\chi_{\{n_1\}} \in B_{c_0},$$

lo que mostraría que podemos cambiar una coordenada de $z$ con módulo distinto de 1, por un escalar en $B_{\mathbb{K}}$ y aun así, el operador $S$ seguirá alcanzando la norma en tal vector. Sea $\alpha \in S_{\mathbb{K}}$ y $t \in [0,1)$ tal que $z(n_1) = t\alpha + (1-t)w(n_1)$ y consideremos la sucesión $y$ definida como

$$y := z\chi_{\mathbb{N}\setminus\{n_1\}} + \alpha\chi_{\{n_1\}} \in B_{c_0},$$

es claro que

$$z = ty + (1-t)z_1.$$

Además,

$$\|S\| = \|S(ty + (1-t)z_1)\| \leq t\|S(y)\| + (1-t)\|S(z_1)\| \leq \|S\|,$$

esto último implica que el operador $S$ alcanza la norma en $z_1$. Podemos repetir este argumento un número finito de veces y concluir así que el operador $S$ alcanza la norma en cada vector

$$z_k := z\chi_{\mathbb{N}\setminus\{n_1,\ldots,n_k\}} + w\chi_{\{n_1,\ldots,n_k\}} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

También es claro que la sucesión $\{z_k\}$ es convergente a $z\chi_C + w\chi_D$ en $c_0$, concluyendo así, por la continuidad del operador $S$ que $\|S(z\chi_C + w\chi_D)\| = \|S\|$. $\square$

Como consecuencia del Lema previo, obtenemos la siguiente versión del resultado en el caso de $\ell_\infty^n$.

**Corolario 1.3.7.** *Si $S \in NA(\ell_\infty^n, Y)$ y $z \in S_{\ell_\infty^n}$ satisfacen que $\|S(z)\| = \|S\|$ entonces se cumple que*

$$\|S(z\chi_C + w\chi_D)\| = \|S\|,$$

*para cualquier $w \in B_{\ell_\infty^n}$, donde $C = \{i \leq n : |z(i)| = 1\}$ y $D = \{1, \ldots, n\} \setminus C$.*

Concluimos este capítulo mostrando una última propiedad de la envoltura convexa en $\mathbb{R}^n$ de los vectores de la base $\mathcal{B}_n$. Si tenemos un vector $x \in \mathrm{co}(\mathcal{B}_n)$ el cual está próximo a un vector $y \in S_{\ell_\infty^n}$ en donde un operador $S \in S_{L(\ell_\infty^n, Y)}$ alcanza la norma, entonces necesariamente, existe un vector en $\mathrm{co}(\mathcal{B}_n)$ en donde $S$ alcanza la norma y el cual está próximo a $x$.

**Lema 1.3.8.** *Si* $(\varepsilon, n) \in ]0,1[\times\mathbb{N}$, $S \in S_{L(\ell_\infty^n, Y)}$ *y* $(x, y) \in \mathrm{co}(\mathcal{B}_n) \times S_{\ell_\infty^n}$ *satisfacen que*

$$\|S(y)\| = 1 \quad y \quad \|y - x\| < \varepsilon.$$

*Entonces existe* $z \in \mathrm{co}(\mathcal{B}_n)$ *tal que*

$$\|S(z)\| = 1 \quad y \quad \|z - x\| < \varepsilon.$$

*Demostración.* Consideremos los siguientes conjuntos

$$A = \{i \in \{2, \dots, n\} : y(i) = -1\} \quad \text{y} \quad B = \{i \in \{2, \dots, n\} : y(i) = 1\}.$$

Para cada $i \in A$ y $j \in B$ la hipótesis $\|y - x\| < \varepsilon < 1$ implica que $x(i) < 0 < x(j)$. Luego, por el Lema 1.3.4 tenemos que $i < j$, pues $x \in O_n$.

Ahora definimos el vector $z \in B_{\ell_\infty^n}$ según los siguientes casos

| | $z$ |
|---|---|
| $A = \emptyset$ , $B = \emptyset$ | $x$ |
| $A = \emptyset$ , $B \neq \emptyset$ | $z(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ x(i) & \text{si } 2 \leq i < \min B \\ 1 & \text{si } \min B \leq i \leq n \end{cases}$ |
| $A \neq \emptyset$ , $B = \emptyset$ | $z(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ -1 & \text{si } 2 \leq i \leq \max A \\ x(i) & \text{si } \max A < i \leq n \end{cases}$ |
| $A \neq \emptyset$ , $B \neq \emptyset$ | $z(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ -1 & \text{si } 2 \leq i \leq \max A \\ x(i) & \text{si } \max A < i < \min B \\ 1 & \text{si } \min B \leq i \leq n \end{cases}$ |

La forma en la que definimos el vector $z$ hace evidente que $z \in O_n$ y además, por el Lema 1.3.4, $z \in \mathrm{co}(\mathcal{B}_n)$. Por otra parte, el Corolario 1.3.7 conduce a que $\|S(z)\| = 1$. Solo nos quedaría por mostrar que $\|z - x\| < \varepsilon$, o de manera equivalente que $|z(i) - x(i)| < \varepsilon$ para cada $1 \leq i \leq n$, con el fin de demostrar esto, únicamente prestaremos atención a las coordenadas $i \leq n$ con $z(i) \neq x(i)$. Por esta razón, consideramos los siguientes dos casos.

- Si $A \neq \emptyset$ y $2 \leq i \leq \max A$ entonces

$$\begin{aligned} |z(i) - x(i)| &= |-1 - x(i)| = 1 + x(i) \\ &\leq 1 + x(\max A) \\ &= |-1 - x(\max A)| = |y(\max A) - x(\max A)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

- Si $B \neq \emptyset$ y $\min B \leq i \leq n$ entonces

$$\begin{aligned} |z(i) - x(i)| &= |1 - x(i)| = 1 - x(i) \\ &\leq 1 - x(\min B) \\ &= |1 - x(\min B)| = |y(\min B) - x(\min B)| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|z - x\| < \varepsilon$. $\square$

# C A P Í T U L O 2

# Propiedad de aproximación

Comenzaremos este capítulo introduciendo la propiedad geométrica que como veremos en la sección 2.2, ha de tener un espacio de Banach $Y$ para que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tenga la propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás.

En el año 2015, los autores M. Acosta, J. Becerra, D. García, S. Kim y M. Maestre demostraron en [5] que el par $(\ell_\infty^3, \ell_1)$ posee la BPBp, además de introducir una propiedad sobre un espacio $Y$ para la que se pueda garantizar que el par $(\ell_\infty^3, Y)$ tenga la BPBp, tal propiedad es la que presentamos a continuación.

**Definición 2.0.1.** *Un espacio de Banach $Y$ tiene la* ***approximate hyperplane sum property para*** *$\ell_\infty^3$ (AHSp-$\ell_\infty^3$) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\gamma(\varepsilon) > 0$ satisfaciendo lo siguiente:*

*Para cada subconjunto $\{y_i : i \leq 3\} \subset B_Y$ con $\|y_1+y_2-y_3\| \leq 1$, si existe un conjunto no vacío $A$ de $\{1, 2, 3\}$ e $y^* \in S_{Y^*}$ tal que $y^*(y_i) > 1 - \gamma(\varepsilon)$ para cada $i \in A$, entonces existe un conjunto $\{z_i : i \leq 3\} \subset B_Y$ con $\|z_1 + z_2 - z_3\| \leq 1$ satisfaciendo $\|z_i - y_i\| < \varepsilon$ para cada $i \leq 3$ y $\|\sum_{i\in A} z_i\| = |A|$.*

Al estudiar esta propiedad sobre un espacio $Y$, no resulta trivial encontrar una que la generalice y con la que se puedan obtener resultados análogos a los obtenidos en [5]. Sin embargo, el estudio de la bola unidad de $\ell_\infty^n$ que hicimos en el capítulo anterior, da una idea de cómo podríamos hacerlo, siendo para ello de vital importancia los elementos en $M_Y^n$.

## 2.1. Proximidad a hiperplanos y la AHSp-$\ell_\infty^n$

Empezamos presentando la generalización de la Definición 2.0.1.

**Definición 2.1.1.** *Sea $n$ un entero positivo, $Y$ un espacio de Banach y $B \subset S_{Y^*}$. El espacio $Y$ tiene la* ***B-approximate hyperplane sum property para*** *$\ell_\infty^n$ si para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe $0 < \gamma_n(\varepsilon) < \varepsilon$ satisfaciendo la siguiente condición:*

*Para cada $(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$, si existe un conjunto no vacío $A$ de $\{1, \ldots, n\}$ y $y^* \in B$ tal que $y^*(y_i) > 1 - \gamma_n(\varepsilon)$ para cada $i \in A$, entonces existe un elemento $(z_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ satisfaciendo $\|z_i - y_i\| < \varepsilon$ para cada $i \leq n$ y $\|\sum_{i\in A} z_i\| = |A|$.*

*En el caso de que la propiedad se satisface para $B = S_{Y^*}$ diremos que $Y$ tiene la* ***approximate hyperplane sum property para*** *$\ell_\infty^n$ (AHSp-$\ell_\infty^n$ de forma abreviada).*

Podemos interpretar geométricamente la AHSp-$\ell_\infty^n$ sobre un espacio $Y$ como sigue:

- Los elementos $(y_i)_{i\leq n}, (z_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ determinan conjuntos de $n$ vectores en $Y$ que imitan el comportamiento de los vectores de la base $\mathcal{B}_n$ de $\ell_\infty^n$.
- El funcional $y^* \in S_{Y^*}$, determina el hiperplano $H_1 = \{y \in Y : y^*(y) = 1\}$, si consideramos un índice $i \in A$ tendríamos que
$$\mathrm{dist}(y_i, H_1) = \frac{|y^*(y_i) - 1|}{\|y^*\|} = 1 - y^*(y_i) < \gamma_n(\varepsilon).$$
esto nos dice que los vectores del conjunto $\{y_i : i \in A\}$ estarían cerca del hiperplano $H_1$.
- Los vectores que conforman el elemento $(z_i)_{i\leq n}$ estarían próximos a los vectores que determinan el elemento $(y_i)_{i\leq n}$, por otra parte, gracias al Teorema de Hahn-Banach, podemos considerar un funcional $z^* \in S_{Y^*}$ tal que
$$|A| = z^*(\sum_{i\in A} z_i) = \sum_{i\in A} z^*(z_i),$$

teniendo en cuenta que para cada $i \in A$ se tiene que $z^*(z_i) \leq 1$, tendríamos por la igualdad anterior que $z^*(z_i) = 1$ para cada $i \in A$, esto es, los vectores en el conjunto $\{z_i : i \in A\}$ están en un mismo hiperplano $H_2 = \{y \in Y : z^*(y) = 1\}$.

Es de fácil comprobación que si $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$ y es isométricamente isomorfo a un espacio $Z$ entonces $Z$ también tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$. Esta propiedad será la que nos permitirá dar una caracterización de los espacios $Y$ tales que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp.

A continuación, introducimos una aplicación que nos servirá para obtener propiedades de permutación bajo cambio de signo que tienen los elementos en $M_Y^n$.

**Notación 2.1.2.** *Por $\tau_n$ representaremos a la función sobre $Y^n$ definida como*

$$\tau_n(y_1, \dots, y_n) := (y_2, \dots, y_n, -y_1) \qquad ((y_1, \dots, y_n) \in Y^n).$$

Es claro que $\tau_n$ es una biyección de $Y^n$ en sí mismo. Fijado un elemento $(y_1, \dots, y_n) \in Y^n$ denotaremos por $(y'_1, \dots, y'_n)$ al elemento $(y_2, \dots, y_n, -y_1)$.

Si $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_n$ se obtienen las siguientes igualdades

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} y'_{i_j} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} y_{i_j+1} \quad \text{si} \quad i_k < n,$$

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} y'_{i_j} = -(y_1 + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j} y_{i_j+1}) \quad \text{si} \quad i_k = n.$$

Estas identidades nos permiten afirmar que $\tau_n(M_Y^n) \subset M_Y^n$. Señalemos que $\tau_n^{2n}$ es la función identidad sobre $Y^n$. Si $\tau_n^m((y_i)_{i\leq n}) \in M_Y^n$ para algún entero positivo $m$, entonces se obtiene que $\tau_n^k((y_i)_{i\leq n}) \in M_Y^n$ para cada $k \geq m$. Además, $(y_i)_{i\leq n} = \tau_n^{2mn}((y_i)_{i\leq n}) \in M_Y^n$. Obteniendo como consecuencia el siguiente resultado.

**Lema 2.1.3.** *Si* $(y_i)_{i\leq n} \in Y^n$ *y* $m \in \mathbb{N}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*1)* $(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$.

*2)* $\tau_n^m((y_i)_{i\leq n}) \in M_Y^n$.

El siguiente resultado es el Lema 3.3 en [3] y el que utilizaremos más adelante, aunque omitiremos su demostración.

**Lema 2.1.4.** *Sea* $\{c_n\}$ *una sucesión de números complejos satisfaciendo que* $|c_n| \leq 1$ *para cada* $n$, *y sea* $\eta > 0$ *tal que para una serie convexa* $\sum \alpha_n$ *se tiene que* $Re\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n c_n > 1 - \eta$. *Entonces para cada* $0 < r < 1$, *el conjunto* $A := \{i \in \mathbb{N} : Re(c_i) > r\}$, *satisface la desigualdad*

$$\sum_{i\in A} \alpha_i \geq 1 - \frac{\eta}{1-r}.$$

**Definición 2.1.5.** *Diremos que un subconjunto* $B \subset B_{Y^*}$ *es* ***normante*** *si*

$$\|y\| = \sup\{|y^*(y)| : y^* \in B\}, \quad \forall y \in Y.$$

El lema anterior nos servirá para establecer propiedades equivalentes a la AHSp-$\ell_\infty^n$, tales propiedades serán concentradas en el siguiente lema.

**Proposición 2.1.6.** *Sea* $Y$ *un espacio de Banach,* $n$ *un entero positivo y* $B$ *un subconjunto de* $S_{Y^*}$ *normante. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*1)* $Y$ *tiene la AHSp-*$\ell_\infty^n$.

*2) El espacio* $Y$ *tiene la B-approximate hyperplane sum property para* $\ell_\infty^n$.

*3) Para cada* $0 < \varepsilon < 1$ *existe* $0 < \rho_n(\varepsilon) < \varepsilon$ *tal que, para cada elemento* $(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$, *si existe* $n_0 \leq n$ *e* $y^* \in B$ *tal que* $y^*(y_i) > 1 - \rho_n(\varepsilon)$ *para cada* $i \leq n_0$, *entonces existe un elemento* $(z_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ *satisfaciendo*

$$\|z_i - y_i\| < \varepsilon \;\; \textit{para todo} \;\; i \leq n \;\; \textit{y} \;\; \Big\|\sum_{i=1}^{n_0} z_i\Big\| = n_0.$$

*4) Para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe $0 < \nu_n(\varepsilon) < \varepsilon$ tal que para cada elemento $(y_i)_{i \leq n} \in M_Y^n$ y cada combinación convexa $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ satisfaciendo*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\Big\| > 1 - \nu_n(\varepsilon),$$

*existe un conjunto $C \subset \{1, \ldots, n\}$ y un elemento $(z_i)_{i \leq n} \in M_Y^n$ tal que*

*i)* $\sum_{i \in C} \alpha_i > 1 - \varepsilon$,

*ii)* $\|z_i - y_i\| < \varepsilon$ *para cada* $i \leq n$ *y*

*iii)* $\| \sum_{i \in C} z_i\| = |C|$.

*Además, si $\gamma_n$ en una función satisfaciendo 1) entonces la condición 4) se cumple para $\nu_n = \gamma_n^2$. La condición 4) para una función $\nu_n$ implica 1) para la función $\gamma_n$ dada por $\gamma_n(\varepsilon) = \nu_n(\frac{\varepsilon}{n})$. En el caso de que 3) se cumple para $\rho_n$ entonces 1) se satisface para la función dada por $\gamma_n(\varepsilon) = \frac{1}{4}\rho_n^2\big(\frac{\varepsilon}{n}\big)$.*

*Demostración.* Claramente 1) implica 2) y 2) implica 3).

Comenzaremos demostrando que la condición 3) implica la condición 2). Sea $0 < \varepsilon < 1$ y $\rho_n(\varepsilon)$ un número real positivo satisfaciendo la condición 3). Fijamos $\gamma_n'(\varepsilon) = \frac{\rho_n(\varepsilon)}{2}$. Sea $(y_i)_{i \leq n} \in M_Y^n$ y supongamos que existe un subconjunto no vacío $A$ de $\{1, \ldots, n\}$ y $y^* \in B$ tal que

$$y^*(y_i) > 1 - \gamma_n'(\varepsilon), \quad \forall i \in A.$$

Por el Lema 2.1.3 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $1 \in A$. Por otra parte, si $i, k \in A$ y $j$ es un entero tal que $i < j < k$, entonces

$$2 - 2\gamma_n'(\varepsilon) - y^*(y_j) < y^*(y_i - y_j + y_k) \leq \|y_i - y_j + y_k\| \leq 1.$$

Como consecuencia, $y^*(y_j) > 1 - \rho_n(\varepsilon)$. Obteniendo así que

$$y^*(y_i) > 1 - \rho_n(\varepsilon), \quad \forall i \leq \max A.$$

Por hipótesis, existe $(z_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ satisfaciendo

i) $\|z_i - y_i\| < \varepsilon$ para cada $i \leq n$ y

ii) $\|\sum_{i=1}^{\text{máx} A} z_i\| = \text{máx} A$.

Por último, el hecho de que $\{z_i : i \leq n\} \subset B_Y$ y teniendo en cuenta la condición ii) concluimos que $\|\sum_{i\in A} z_i\| = |A|$.

Continuaremos mostrando que la condición 2) implica la condición 4).
Supongamos que $Y$ satisface la condición 2). Para cada $0 < \varepsilon < 1$ sea $\gamma_n'(\varepsilon) < \varepsilon$ un número real positivo satisfaciendo la Definición 2.1.1 para cada elemento $y^* \in B$. Tomemos $\nu_n(\varepsilon) = \gamma_n'(\varepsilon)^2$.

Sea $(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ y supongamos que la combinación convexa $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ satisface $\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\right\| > 1 - \nu_n(\varepsilon)$. Ya que $B$ es un conjunto normante y $(-y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$, usando $(-y_i)_{i\leq n}$ indistintamente de $(y_i)_{i\leq n}$, si es necesario, existirá $y^* \in B$ tal que

$$y^*\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\right) > 1 - \nu_n(\varepsilon) = 1 - \gamma_n'(\varepsilon)^2.$$

Por el Lema 2.1.4 el conjunto $C = \{i \leq n : y^*(y_i) > 1 - \gamma_n'(\varepsilon)\}$ satisface

$$\sum_{i\in C} \alpha_i \geq 1 - \frac{\nu_n(\varepsilon)}{\gamma_n'(\varepsilon)} > 1 - \varepsilon.$$

Por hipótesis, existe un elemento $(z_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ tal que $\|z_i - y_i\| < \varepsilon$ para cada $i \leq n$ y $\|\sum_{i\in C} z_i\| = |C|$.

Finalmente, mostraremos que 4) implica 1).
Ahora, supongamos que $Y$ satisface la condición 4). Dado $0 < \varepsilon < 1$, sea

$\nu_n(\varepsilon)$ un número real positivo satisfaciendo la hipótesis. Mostraremos que $\gamma_n(\varepsilon) = \nu_n(\frac{\varepsilon}{n})$ satisface la Definición 2.1.1.

Sea $(y_i)_{i\leq n}$ un elemento en $M_Y^n$ y supongamos que para un conjunto no vacío $A \subset \{1,\ldots,n\}$ e $y^* \in S_{Y^*}$ se cumple que $y^*(y_i) > 1 - \gamma_n(\varepsilon)$ para cada $i \in A$. Definimos el siguiente número real positivo

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{1}{|A|} & \text{si } \ i \in A \\ 0 & \text{si } \ i \in \{1,\ldots,n\}\backslash A. \end{cases}$$

Claramente $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ y también

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\Big\| = \frac{\Big\|\sum_{i\in A} y_i\Big\|}{|A|} \geq \frac{y^*\Big(\sum_{i\in A} y_i\Big)}{|A|} > 1 - \nu_n\Big(\frac{\varepsilon}{n}\Big).$$

Por hipótesis, existe un conjunto $C \subset \{1,\ldots,n\}$ y $(z_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ tal que

i) $\sum_{i\in C} \alpha_i > 1 - \frac{\varepsilon}{n}$,

ii) $\|z_i - y_i\| < \frac{\varepsilon}{n}$ para cada $i \leq n$ y

iii) $\big\|\sum_{i\in C} z_i\big\| = |C|$.

En el caso de que $A \subset C$, la condición iii) y el el hecho de que $\{z_i : i \leq n\} \subset B_Y$ implicarían que $\big\|\sum_{i\in A} z_i\big\| = |A|$. Por lo tanto, basta con mostrar que $A \subset C$.

Si existe algún $i_0 \in A \setminus C$, definimos $B = \{i \leq n : i \neq i_0\}$ y haciendo uso de i) obtenemos que

$$1 - \frac{1}{|A|} = \sum_{i\in B} \alpha_i \geq \sum_{i\in C} \alpha_i > 1 - \frac{\varepsilon}{n} > 1 - \frac{1}{n}.$$

Entonces $|A| > n$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, $A \subset C$ y hemos demostrado que $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$.

Como consecuencia de haber demostrado 3) $\Rightarrow$ 2), 2) $\Rightarrow$ 4) y 4) $\Rightarrow$ 1), deducimos que si el espacio $Y$ satisface 3) para la función $\rho_n$ entonces tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$ para la función dada por $\gamma_n(\varepsilon) = \frac{1}{4}\rho_n^2\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)$. $\square$

Vale la pena destacar que la Proposición 2.1.6 hace más fácil mostrar que un espacio tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$. Con este propósito, la condición 3) es útil, ya que nos dice que es suficiente verificar la Definición 2.1.1 solo para funcionales en un conjunto normante $B$ y para un conjunto más simple $A$.

**Observación 2.1.7.** *AHSp-$\ell_\infty^{n+1}$ implica AHSp-$\ell_\infty^n$ para cada entero positivo $n$.*

Esta afirmación puede verificarse fácilmente usando la Definición 2.1.1. Se sigue del siguiente hecho

$$(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n \quad \Rightarrow \quad (z_i)_{i\leq n+1} \in M_Y^{n+1},$$

donde $z_i = y_i$ para $i \leq n$ y $z_{n+1} = y_n$.

## 2.2. Caracterización de la BPBp para el par $(\ell_\infty^n, Y)$

En esta sección demostraremos que la propiedad de que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tenga la BPBp es equivalente a que $Y$ tenga la AHSp-$\ell_\infty^n$. Para lograr ese objetivo introducimos la siguiente noción sobre un subconjunto $U$ de la esfera de $X$.

**Definición 2.2.1.** *Diremos que $U \subset S_X$ es universal para $S_X$ si para cada $x_0 \in S_X$ existe una biyección isométrica $I \in L(X)$ tal que $I(x_0) \in U$.*

Como consecuencia del Lema 1.3.4 podemos afirmar que $\mathrm{co}(\mathcal{B}_n) \subset S_{\ell_\infty^n}$ satisface la Definición 2.2.1. La existencia de este tipo de conjuntos ayudan a demostrar que un par $(X, Y)$ tiene la BPBp, ya que es suficiente con verificar que el par $(X, Y)$ satisface la Definición 1.1.4 escogiendo el vector $x_0$ en $U$, tal como lo demostramos en el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.2.** *Sean $X$, $Y$ espacios de Banach y $U \subset S_X$ un conjunto universal para $S_X$. El par $(X, Y)$ tiene la BPBp si y solo si la propiedad dada en Definición 1.1.4 se cumple para los puntos en $U$.*

*Demostración.* Supongamos que la Definición 1.1.4 se cumple para los puntos en $U$. Sea $0 < \varepsilon < 1$ y $0 < \eta(\varepsilon) < \varepsilon$ satisfaciendo:

Si $T \in S_{L(X,Y)}$ y $u_0 \in U$ son tales que $\|T(u_0)\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, entonces existen $S \in S_{L(X,Y)}$ e $y_0 \in S_X$ cumpliendo las siguientes condiciones

$$\|S(y_0)\| = 1, \quad \|y_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

Supongamos que $T \in S_{L(X,Y)}$ y $x_0 \in S_X$ son tales que $\|T(x_0)\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, por ser $U$ universal para $S_X$, existirá una biyección isométrica $I \in L(X)$ tal que $I(x_0) \in U$, de esta forma tenemos que $T \circ I^{-1} \in S_{L(X,Y)}$, $I(x_0) \in S_X$ y además

$$\|T \circ I^{-1}(I(x_0))\| = \|T(x_0)\| > 1 - \eta(\varepsilon).$$

Luego, por hipótesis existen $S \in S_{L(X,Y)}$ e $y_0 \in S_X$ satisfaciendo:

$$\|S(y_0)\| = 1, \quad \|y_0 - I(x_0)\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|S - T \circ I^{-1}\| < \varepsilon.$$

Teniendo en cuenta que $I$ es una biyección isométrica concluimos que $S \circ I \in S_{L(X,Y)}$, $I^{-1}(y_0) \in S_Y$ y además

$$\|S \circ I(I^{-1}(y_0))\| = 1, \quad \|I^{-1}(y_0) - x_0\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|S \circ I - T\| < \varepsilon.$$

□

El resultado principal de esta sección afirma que los espacios de Banach $Y$ que satisfacen que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp para operadores son los que tienen la AHSp-$\ell_\infty^n$. Para probar tal caracterización es útil aislar dos resultados técnicos. El primero de ellos es el Lema 1.3.8 que a grandes rasgos, afirma que un operador en $L(\ell_\infty^n, Y)$ que alcanza su norma en un punto $y$ de $S_{\ell_\infty^n}$ que está cerca de un elemento, digamos $x$, perteneciente a una de las caras maximales de $B_{\ell_\infty^n}$, también alcanza su norma en otro elemento de la misma cara maximal que también está cerca de $x$. El otro lema que es necesario es el siguiente.

**Lema 2.2.3.** *Si $\varepsilon > 0$, $x, y \in \operatorname{co}(\mathcal{B}_n)$ satisfacen que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^n, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i^n \quad y \quad \|x - y\| < \varepsilon,$$

*entonces*

$$\max\{|\alpha_i - \beta_i| : i \leq n\} < \varepsilon.$$

*Demostración.* Por el Lema 1.3.1 tenemos que

$$\alpha_1 = \frac{1 + x(2)}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1 + y(2)}{2}, \quad \alpha_n = \frac{1 - x(n)}{2}, \quad \beta_n = \frac{1 - y(n)}{2}$$

y

$$\alpha_i = \frac{x(i+1) - x(i)}{2}, \quad \beta_i = \frac{y(i+1) - y(i)}{2}, \quad \forall 1 < i < n.$$

Como consecuencia obtenemos que

$$
\begin{aligned}
|\alpha_1 - \beta_1| &= \left|\frac{x(2)-y(2)}{2}\right| \leq \frac{\|x-y\|}{2} < \frac{\varepsilon}{2}, \\
|\alpha_n - \beta_n| &< \left|\frac{y(n)-x(n)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \\
|\alpha_i - \beta_i| &= \left|\frac{x(i+1)-y(i+1)}{2} + \frac{y(i)-x(i)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \text{ si } \ 1 < i < n.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la prueba está terminada. □

La condición 4) de la Proposición 2.1.6 permite verificar con facilidad que si un espacio $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$ entonces el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp. Demostrar el reciproco es más delicado. Para ello utilizamos de nuevo la misma reformulación de la AHSp-$\ell_\infty^n$, pero en este caso el Lema 1.3.8 también juega un papel esencial.

**Teorema 2.2.4.** *Sea $Y$ un espacio de Banach. El par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp si y sólo si $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$.*
*Además, si $(\ell_\infty^n, Y)$ satisface la Definición 1.1.4 con la función $\eta_n$, entonces $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$ con $\gamma_n(\varepsilon) = \eta_n\big(\frac{\varepsilon}{n(n+1)}\big)$. En caso de que $Y$ tenga la AHSp-$\ell_\infty^n$ para la función $\gamma_n$ (ver Definición 2.1.1), el par $(\ell_\infty^n, Y)$ satisface BPBp con la función $\eta_n(\varepsilon) = \gamma_n^2\big(\frac{\varepsilon}{n+1}\big)$.*

*Demostración.* Supongamos que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp y fijemos un número $0 < \varepsilon < 1$. Ahora definimos $\nu_n(\varepsilon) = \eta_n\big(\frac{\varepsilon}{n+1}\big)$, donde $\eta_n\big(\frac{\varepsilon}{n+1}\big) < \frac{\varepsilon}{n+1}$ es el número real positivo que satisface el BPBp para $\frac{\varepsilon}{n+1}$.

Sea $(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ y supongamos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ es una combinación convexa tal que

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\Big\| > 1 - \nu_n(\varepsilon).$$

Podemos aplicar la Proposición 1.3.5, por lo que existe un operador $T$ en $B_{L(\ell_\infty^n,Y)}$ tal que $y_i = T(v_i^n)$ para cada $1 \le i \le n$. El elemento $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^n$ satisface que $x_0 \in S_{\ell_\infty^n}$, y por hipótesis sabemos que

$$\|T(x_0)\| = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i\right\| > 1 - \eta_n\Big(\frac{\varepsilon}{n+1}\Big) > 1 - \frac{\varepsilon}{n+1} > 0. \tag{2.2.1}$$

Dado que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp, existen $u_0 \in S_{\ell_\infty^n}$ y $S \in S_{L(\ell_\infty^n,Y)}$ que satisfacen las siguientes condiciones

$$\|S(u_0)\| = 1, \qquad \|u_0 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{n+1} \qquad \text{y} \qquad \left\|S - \frac{T}{\|T\|}\right\| < \frac{\varepsilon}{n+1}. \tag{2.2.2}$$

Por el Lema 1.3.8, se puede suponer que $u_0$ está en $\mathrm{co}(\mathcal{B}_n)$. Como consecuencia, existe $\{\beta_i : i \le n\} \subset \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$u_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i^n \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^n \beta_i = 1.$$

Ahora definimos los conjuntos $A = \{i \le n : \beta_i \ne 0\}$ y $A' = \{1, \dots, n\} \setminus A$. Por (2.2.2) y aplicando el Lema 2.2.3, obtenemos que

$$\sum_{i\in A} \alpha_i = 1 - \sum_{i\in A'} \alpha_i = 1 - \sum_{i\in A'} |\alpha_i - \beta_i| \ge 1 - \frac{\varepsilon}{n+1}|A'| > 1 - \varepsilon. \tag{2.2.3}$$

Finalmente comprobamos que $(z_i)_{i\le n} = (S(v_i^n))_{i\le n}$ es el elemento deseado en $M_Y^n$. Claramente $(z_i)_{i\le n} \in M_Y^n$ ya que $S \in S_{L(\ell_\infty^n,Y)}$ (ver Proposición 1.3.5). Además, para cada $1 \le i \le n$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|z_i - y_i\| &= \|S(v_i^n) - T(v_i^n)\| \qquad\qquad (2.2.4)\\
&\le \left\|S(v_i^n) - \frac{T}{\|T\|}(v_i^n)\right\| + \left\|\frac{T}{\|T\|}(v_i^n) - T(v_i^n)\right\|\\
&\le \left\|S - \frac{T}{\|T\|}\right\| + 1 - \|T\|\\
&< \frac{\varepsilon}{n+1} + \frac{\varepsilon}{n+1} \le \varepsilon \qquad \text{(por (2.2.2) y (2.2.1))}.
\end{aligned}$$

Usando el Teorema de Hahn-Banach y (2.2.2), existe un elemento $y^* \in S_{Y^*}$ tal que $y^*(S(u_0)) = 1$, es decir,

$$y^*\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i z_i\right) = 1.$$

Entonces, es claro que $y^*(z_i) = 1$ para cada $i \in A$, obteniendo así que

$$|A| = y^*\Big(\sum_{i \in A} z_i\Big) \leq \left\| \sum_{i \in A} z_i \right\| \leq \sum_{i \in A} \|z_i\| \leq |A|.$$

Como consecuencia $\| \sum_{i \in A} z_i \| = |A|$. en vista de (2.2.3) y (2.2.4) hemos probado que $Y$ satisface la condición 4) de la Proposición 2.1.6 para $\nu_n(\varepsilon) = \eta_n\big(\frac{\varepsilon}{n+1}\big)$. Por lo tanto $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$ para la función $\gamma_n(\varepsilon) = \eta_n\big(\frac{\varepsilon}{n(n+1)}\big)$.

Supongamos que $Y$ satisface la AHSp-$\ell_\infty^n$. Sea $0 < \varepsilon < 1$ y escribamos $\eta_n(\varepsilon) = \nu_n(\frac{\varepsilon}{n+1})$, donde $\nu_n(\frac{\varepsilon}{n+1})$ es el número real positivo que satisface la condición 4) de la Proposición 2.1.6 para $\frac{\varepsilon}{n+1}$.

Supongamos que $T \in S_{L(\ell_\infty^n, Y)}$ y $x_0 \in S_{\ell_\infty^n}$ son tales que

$$\|T(x_0)\| > 1 - \eta_n(\varepsilon).$$

Haciendo uso de la Proposición 2.2.2 podemos suponer que $x_0 \in O_n$. Por el Lema 1.3.4 sabemos que $x_0 \in \mathrm{co}(\mathcal{B}_n)$, luego existe $\{\alpha_i : i \leq n\} \subset \mathbb{R}_0^+$ tal que

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i^n \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

En vista de la Proposición 1.3.5 el elemento $(y_i)_{i \leq n} = (T(v_i^n))_{i \leq n} \in M_Y^n$. Por hipótesis sabemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right\| = \|T(x_0)\| > 1 - \nu_n\Big(\frac{\varepsilon}{n+1}\Big).$$

Por lo que existirá un conjunto no vacío $A \subset \{1, \ldots, n\}$ y $(z_i)_{i \leq n} \in M_Y^n$ tal que

$$\sum_{i \in A} \alpha_i > 1 - \frac{\varepsilon}{n+1} > 0, \qquad \|z_i - y_i\| < \frac{\varepsilon}{n+1}, \quad \forall i \leq n, \tag{2.2.5}$$

y también se satisface

$$\Big\| \sum_{i \in A} z_i \Big\| = |A|. \tag{2.2.6}$$

Sea $S$ el único elemento en $L(\ell_\infty^n, Y)$ que satisface que $S(v_i^n) = z_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. En vista de (2.2.5) podemos usar la Proposición 1.3.5 para obtener que $S \in B_{L(\ell_\infty^n, Y)}$ y $\|S - T\| < \varepsilon$. El elemento $u_0$ dado por $u_0 = \sum_{i \in A} \frac{\alpha_i}{\sum_{i \in A} \alpha_i} v_i^n$ pertenece a $S_{\ell_\infty^n}$. Por (2.2.6) el operador $S$ alcanza su norma en $u_0$ ya que

$$1 = \frac{\| \sum_{i \in A} \alpha_i z_i \|}{\sum_{i \in A} \alpha_i} = \|S(u_0)\| \leq \|S\| \leq 1.$$

Como consecuencia $S \in S_{L(\ell_\infty^n, Y)}$. Si escribimos $A' = \{1, \ldots, n\} \setminus A$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_0 - x_0\| &= \Big\| \sum_{i \in A} \frac{\alpha_i}{\sum_{i \in A} \alpha_i} v_i^n - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^n \Big\| \\
&= \Big\| \Big(1 - \frac{1}{\sum_{i \in A} \alpha_i}\Big) \sum_{i \in A} \alpha_i v_i^n + \sum_{i \in A'} \alpha_i v_i^n \Big\| \\
&\leq \Big( \frac{1}{\sum_{i \in A} \alpha_i} - 1 \Big) \sum_{i \in A} \alpha_i + \sum_{i \in A'} \alpha_i \\
&= 2 \sum_{i \in A'} \alpha_i \\
&< 2 \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \varepsilon \qquad \text{(por (2.2.5))}.
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp con $\eta_n(\varepsilon) = \nu_n(\frac{\varepsilon}{n+1})$.

En el caso de que $Y$ satisface la AHSp-$\ell_\infty^n$ con la función $\gamma_n$ sabemos que $Y$ satisface la condición 4) de la Proposición 2.1.6 para la función $\nu_n = \gamma_n^2$. Como consecuencia de la demostración anterior, deducimos que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp con $\eta_n(\varepsilon) = \gamma_n^2\left(\frac{\varepsilon}{n+1}\right)$. $\square$

# CAPÍTULO 3

## Espacios con la AHSp-$\ell_\infty^n$

Dar un ejemplo de un espacio de Banach $Y$ tal que para $n \geq 2$ el par $(\ell_\infty^n, Y)$ no tenga la BPBp no resulta algo trivial, ya que como se verá en la siguiente sección, los espacios de Banach clásicos tienen la AHSp-$\ell_\infty^n$. En [14, Teorema 2.7], S. Kim muestra que si $Y$ es un espacio estrictamente convexo entonces la condición de que $Y$ sea uniformemente convexo equivale a que el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tenga la BPBp. Por lo que, cualquier espacio de Banach $Y$ que sea estrictamente convexo, pero no uniformemente convexo no tendrá la AHSp-$\ell_\infty^n$ para $n \geq 2$. En particular, bastaría considerar un espacio de Banach separable, no reflexivo, ya que todo espacio de Banach separable se puede renormar de manera estrictamente convexa y no sería uniformemente convexo al no ser reflexivo.

También es importante resaltar que si un espacio es reflexivo entonces no necesariamente tendrá la AHSp-$\ell_\infty^n$, como lo mostraremos a continuación.

Si $(X_n)_n$ es una colección de espacios de Banach, se denota como $\bigoplus_2 X_n$ al espacio de todas las sucesiones $(x_n)_n$ tales que

$$x_n \in X_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty,$$

dotado con la norma

$$\|(x_n)_n\| = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2\Big)^{1/2}.$$

Teniendo así que $\bigoplus_2 X_n$ un espacio de Banach. El Teorema 8.17 en [13] nos dice que en el espacio $Y = \bigoplus_2 \ell_\infty^n$ se puede definir una norma $\|.\|_0$ que hace a $Y$ estrictamente convexo y como consecuencia de los Teoremas 9.14 y 9.18 en [13] también podemos afirmar que no existe una norma sobre $Y$ que lo haga uniformemente convexo, en consecuencia, $(Y, \|.\|_0)$ sería un espacio de Banach reflexivo, estrictamente convexo y no uniformemente convexo, lo que lo hace un espacio que no satisface la AHSp-$\ell_\infty^n$ para ningún $n \geq 2$. Concluyendo así, que ser reflexivo no implica la AHSp-$\ell_\infty^n$.

## 3.1. Espacios de Banach clásicos

Comenzaremos con los espacios de Banach más sencillos, como lo son los de dimensión finita, mostraremos que esta clase de espacios tienen la AHSp-$\ell_\infty^n$.

En [3, Proposición 2.4] se demuestra que para cada par de espacios de Banach $X, Y$ de dimensión finita, se cumple que $(X, Y)$ tiene la BPBp. Por lo tanto, si $Y$ es de dimensión finita, el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp, en consecuencia, por el Teorema 2.2.4 obtenemos que $Y$ tendría la AHSp-$\ell_\infty^n$. Sin embargo, demostrar directamente esta afirmación no resulta complicado.

**Proposición 3.1.1.** *Cada espacio de Banach finito dimensional tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$.*

*Demostración.* La demostración la haremos por contradicción. Sea $Y$ un espacio de dimensión finita y supongamos que $Y$ no tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$. Sea $\varepsilon_0 > 0$ para el cual la Definición 2.1.1 no se satisface. Para cada $m \in \mathbb{N}$ existe un elemento $(y_i^m)_{i\leq n} \in M_Y^n$, un conjunto no vacío $A_m \subset \{1, \ldots, n\}$ y $y_m^* \in S_{Y^*}$ satisfaciendo

$$y_m^*(y_i^m) > 1 - \frac{\varepsilon_0}{m} \quad \text{para cada} \quad i \in A_m, \tag{3.1.1}$$

y además

$$(z_i)_{i\leq n} \in M_Y^n, \quad \Big\|\sum_{i\in A_m} z_i\Big\| = |A_m| \quad \Rightarrow \quad \max\{\|y_i^m - z_i\| : i \leq n\} \geq \varepsilon_0. \tag{3.1.2}$$

La condición (3.1.1) implica además que

$$\Big\|\sum_{i\in A_m} y_i^m\Big\| \geq y_m^*\Big(\sum_{i\in A_m} y_i^m\Big) > |A_m|\Big(1 - \frac{\varepsilon_0}{m}\Big) \tag{3.1.3}$$

Ya que $Y$ es de dimensión finita, $M_Y^n$ es un subconjunto compacto de $Y^n$. Teniendo en cuenta que $\{i \in \mathbb{N} : i \leq n\}$ es finito, y pasando a una subsucesión, podemos asumir que existe un conjunto $A \subset \{i \in \mathbb{N} : i \leq n\}$ tal que $A_m = A$, para cada $m$, y además que para cada $i \leq n$ la sucesión $\{y_i^m\}_m$ converge a un $y_i$, por lo tanto $(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$. Luego, por la condición (3.1.3) se sigue que $\left\|\sum_{i\in A} y_i\right\| = |A|$. En vista de la condición (3.1.2) esto seria una contradicción. $\square$

En [3, Teorema 5.2] se demuestra que si $Y$ es un espacio de Banach uniformemente convexo, entonces el par $(\ell_\infty^n, Y)$ tiene la BPBp. En consecuencia, el espacio $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$, obteniendo así el siguiente resultado.

**Corolario 3.1.2.** *Si $Y$ es un espacio de Banach uniformemente convexo entonces $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$.*

Como consecuencia de este corolario obtenemos que, para cada $1 < p < \infty$ y cada espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \mu)$ con $\mu$ una medida positiva se tiene que el espacio $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ tienen la AHSp-$\ell_\infty^n$.

En el año 1963, J. Lindenstrauss introduce una condición sobre un espacio de Banach $Y$ para el que se puede garantizar que el par $(X, Y)$ tiene la BPp para cualquier espacio de Banach $X$. Tal condición es conocida ahora como la propiedad $\beta$ de Lindenstrauss.

**Definición 3.1.3.** *Se dice que un espacio de Banach $Y$ tiene la propiedad $\beta$ (de Lindenstrauss) si existen colecciones $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$, $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y^*$ y $0 \leq \rho < 1$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

- $y_\alpha^*(y_\alpha) = 1$ *para cada* $\alpha \in \Lambda$
- $|y_\alpha^*(y_\beta)| \leq \rho < 1$ *para cada* $\alpha \in \Lambda$ *con* $\alpha \neq \beta$
- $\|y\| = \sup\{|y_\alpha^*(y)| : \alpha \in \Lambda\}$ *para cada* $y \in Y$.

Los espacios $c_0$ y $\ell_\infty$ satisfacen la propiedad $\beta$ considerando las colecciones de los vectores canónicos $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ y los funcionales biortogonales asociados a ellos $\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ con $\rho = 0$ en ambos casos.

En [3, Teorema 2.2]) demostraron que la propiedad $\beta$ es lo suficientemente fuerte para garantizar que el par $(X, Y)$ tiene la BPBp para todo espacio de Banach $X$ siempre que $Y$ tenga la propiedad $\beta$, obteniendo como consecuencia el siguiente corolario.

**Corolario 3.1.4.** *Si $Y$ es un espacio de Banach con la propiedad $\beta$ entonces $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$. En particular, los espacios $c_0$ y $\ell_\infty$ tienen la AHSP-$\ell_\infty^n$.*

Si $L$ es un espacio Hausdorff localmente compacto, denotaremos como $C_0(L,Y)$ al espacio de las funciones $f \in Y^L$ continuas satisfaciendo que para cada $\varepsilon > 0$ existe un compacto $K \subset L$ tal que $\|f(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in L \setminus K$, tal espacio será considerado con la norma uniforme. Para cada $t \in L$ definimos $\rho_t \in B_{C_0(L,Y)}$ como sigue

$$\rho_t(f) = f(t) \qquad (f \in C_0(L,Y)).$$

Si $f \in C_0(L,Y)$ y $t_0 \in L$, el Teorema de Hahn-Banach nos dice que existe $y_0^* \in S_{Y^*}$ tal que $y_0^*(f(t_0)) = \|f(t_0)\|$, por lo que es claro que

$$\|f\| = \sup\{|y^* \circ \rho_t(f)| : \quad t \in L, \quad y^* \in S_{Y^*}\}.$$

Consecuencia de esto, tenemos que la colección $B \subset B_{C_0(L,Y)^*}$ definida como

$$B := \{y^* \circ \rho_t : \quad t \in L, \quad y^* \in S_{Y^*}\},$$

es normante.

El siguiente resultado fue demostrado en [5] en el caso $n = 3$, aunque el resultado que ahora presentamos es más general, la demostración sigue los mismos argumentos dados por los autores de [5], utilizando como principal herramienta el Lema de Urysohn. La versión que usaremos es la dada en [17, Lema 2.12].

**Proposición 3.1.5.** *Sea $L$ un espacio Hausdorff localmente compacto e $Y$ un espacio de Banach. Entonces, $C_0(L,Y)$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$ si y solo si $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$.*

*Demostración.* Supongamos que $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\gamma_n(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$ satisfaciendo la Definición 2.1.1 para $\frac{\varepsilon}{3}$.

Para demostrar que $C_0(L,Y)$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$, será suficiente demostrar que $C_0(L,Y)$ satisface la condición 2) de la Proposición 2.1.6 para el conjunto normante

$$B := \{y^* \circ \rho_t : \quad t \in L, \quad y^* \in S_{Y^*}\}.$$

Supongamos que $(f_i)_{i\leq n} \in M^n_{C_0(L,Y)}$ y $A$ es un subconjunto no vacío de $\{1,\ldots,n\}$ tal que para algún $y^* \in S_{Y^*}$ y $t_1 \in L$ se tiene que

$$y^*(f_i(t_1)) > 1 - \gamma_n\Big(\frac{\varepsilon}{3}\Big) \text{ para cada } i \in A. \tag{3.1.4}$$

Es fácil comprobar que $(f_i)_{i\leq n} \in M^n_{C_0(L,Y)}$ implica que $(f_i(t_1))_{i\leq n} \in M^n_Y$. Teniendo en cuenta la hipótesis y (3.1.4), existirá $(z_i)_{i\leq n} \in M^n_Y$ y $z^* \in S^*_Y$ tal que

$$\|z_i - f_i(t_1)\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para cada } i \leq n, \tag{3.1.5}$$

y

$$z^*(z_i) = 1 \text{ para cada } i \in A. \tag{3.1.6}$$

Ahora, definimos el siguiente conjunto abierto de $L$

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} \Big\{t \in L : \|f_i(t) - f_i(t_1)\| < \frac{\varepsilon}{3}\Big\}. \tag{3.1.7}$$

Si aplicamos el Lema de Urysohn al considerar $U$ y el compacto $K := \{t_1\}$, existirá una función continua $\phi \in C_0(L,\mathbb{R})$ tal que $\phi(L) \subset [0,1]$, $\phi(t_1) = 1$ y $\overline{\{t \in L : \phi(t) \neq 0\}} \subset U$.

Para cada $i \leq n$ definimos la función $g_i = \phi z_i + (1-\phi)f_i \in C_0(L,Y)$, aclarando que

$$g_i(t) = \phi(t)z_i + (1-\phi(t))f_i(t) \quad (t \in L).$$

Veamos qué $(g_i)_{i\leq n} \in M^n_{C_0(L,Y)}$. Sea $(i_1,\ldots,i_k) \in \mathcal{I}_n$, para cada $t \in L$ tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}g_{i_j}(t)\right\| &= \left\|\phi(t)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}z_{i_j} + (1-\phi(t))\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}f_{i_j}(t)\right\| \\ &\le \phi(t)\left\|\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}z_{i_j}\right\| + (1-\phi(t))\ \left\|\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}f_{i_j}\right\| \\ &\le \phi(t)\ +\ (1-\phi(t)) = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}g_{i_j} \in B_{C_0(L,Y)}$. Por otra parte, si $i \in A$ por (3.1.6) tenemos que

$$z^* \circ \rho_{t_1}(g_i) = z^*(g_i(t_1)) = z^*(z_i) = 1$$

Lo que implica que $z^* \circ \rho_{t_1} \in S_{C_0(L,Y)^*}$ y en consecuencia $\|\sum_{i\in A} g_i\| = |A|$. Por último, mostraremos que $\|g_i - f_i\| < \varepsilon$ para cada $i \le n$. Consideremos $i \le n$ y $t \in L$.

Si $t \in L \setminus U$ entonces $\phi(t) = 0$ y en consecuencia $g_i(t) = f_i(t)$. En caso de que $t \in U$ , por definición de $U$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|g_i(t) - f_i(t)\| &= \|\phi(t)z_i - \phi(t)f_i(t)\| \\ &\le \|z_i - f_i(t)\| \\ &\le \|z_i - f_i(t_1)\| + \|f_i(t_1) - f_i(t)\| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{(por (3.1.5) y (3.1.7))}.\end{aligned}$$

Concluyendo así que $\|g_i - f_i\| < \varepsilon$.

Supongamos ahora que $C_0(L,Y)$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\gamma_n(\frac{\varepsilon}{2}) > 0$ satisfaciendo la Definición 2.1.1 para $\frac{\varepsilon}{2}$. Supongamos que $(y_i)_{i\le n} \in M_Y^n$ y $A$ es un subconjunto no vacío de $\{1,\dots,n\}$ tal que para algún $y^* \in S_{Y^*}$ se tiene que

$$y^*(y_i) > 1 - \gamma_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \ \text{ para cada } \ i \in A. \tag{3.1.8}$$

Fijemos $t_0 \in L$ y haciendo uso nuevamente del Lema de Urysohn, podemos considerar una función continua $\phi \in C_0(L,\mathbb{R})$ tal que $\phi(L) \subset [0,1]$, $\phi(t_0) = 1$ y cumpliendo que el soporte de $\phi$ es compacto en $L$.

Para cada $i \leq n$ definimos la función $f_i \in C_0(L,Y)$ como

$$f_i(t) = \phi(t)y_i \quad (t \in L).$$

Se verifica con facilidad que $(f_i)_{i\leq n} \in M^n_{C_0(L,Y)}$, además para cada $i \in A$ se tiene que

$$y^* \circ \rho_{t_0}(f_i) = y^*(f_i(t_0)) = y^*(y_i) > 1 - \gamma_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (\text{por } (3.1.8)).$$

Por lo que existirá $(g_i)_{i\leq n} \in M^n_{C_0(L,Y)}$ tal que

$$\|g_i - f_i\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para cada } i \leq n \text{ y } \left\|\sum_{i\in A} g_i\right\| = |A|. \tag{3.1.9}$$

Ahora, tomemos $t_1 \in L$ tal que $\|\sum_{i\in A} g_i(t_1)\| = \|\sum_{i\in A} g_i\| = |A|$. Además, $(g_i)_{i\leq n} \in M^n_{C_0(L,Y)}$ implica que $(g_i(t_1))_{i\leq n} \in M^n_Y$. Bastaría con mostrar que $\|g_i(t_1) - y_i\| < \varepsilon$ para cada $i \leq n$.
Sea $i \leq n$ y $i_0 \in A$, de esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}
\|g_i(t_1) - y_i\| &\leq \|g_i(t_1) - f_i(t_1)\| + \|f_i(t_1) - y_i\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|\phi(t_1)y_i - y_i\| \qquad (\text{por } (3.1.9)) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \phi(t_1) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \phi(t_1)\|y_{i_0}\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|g_{i_0}(t_1) - f_{i_0}(t_1)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad (\text{por } (3.1.9))
\end{aligned}$$

□

Como se comentó al inicio del capítulo, los espacios reflexivos no necesariamente tienen la AHSp-$\ell_\infty^n$. De los espacios de Banach clásicos, quedaría por considerar el espacio de funciones integrables $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ donde $\Sigma$ es una $\sigma$-álgebra sobre un conjunto $\Omega$ y $\mu$ es una medida positiva definida sobre el espacio medible $(\Omega, \Sigma)$. Cabe destacar que en [5] se demuestra que el par $(\ell_\infty^3, L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ tiene la BPBp. Sin embargo, hasta la fecha de la publicación de [8] no se había demostrado que el par $(\ell_\infty^4, L_1(\Omega, \Sigma, \mu))$ tuviese la BPBp, obteniendo poco después en [7] un resultado similar en el caso general, esto será tratado en la siguiente sección. Notaremos por $L_1(\mu))$ al espacio $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ y por $\ell_1$ al espacio de las sucesiones en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x(i)|$ es convergente, equipado con la norma

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| \qquad (x \in \ell_1).$$

## 3.2. $L_1(\mu)$ y la AHSp-$\ell_\infty^n$

El resultado principal de esta sección establece que $L_1(\mu)$ también tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$, para cualquier medida positiva $\mu$ definida sobre un espacio medible $(\Omega, \Sigma)$ y cualquier número natural $n$ (ver Corolario 3.2.6). Para obtener tal resultado la idea clave es demostrar esta afirmación para $\ell_1$.

A lo largo de esta sección denotamos por $u^*$ al funcional sobre $\ell_1$ dado por

$$u^*(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \qquad (x \in \ell_1).$$

En el espacio $\ell_1$ consideramos el orden habitual como un espacio de sucesiones. Si $x, y \in \ell_1$, tenemos que

$$x \leq y \ \text{ si y solo si } \ x(i) \leq y(i) \ \text{ para cada } \ i \in \mathbb{N}.$$

Ahora nuestro objetivo es demostrar que el espacio $\ell_1$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$, para este fin necesitaremos los siguientes lemas.

**Lema 3.2.1.** *Sea $r, s \in \mathbb{R}^+$, $y, x_1 \in \ell_1$. Supongamos que*

$$1 - r \leq u^*(x_1 + y) \quad \text{ y } \quad \|x_1 + y\| \leq 1 + s.$$

*Entonces existe $w \in \ell_1$ tal que*

$$w \geq y, \qquad \|w - y\| \leq r + s \qquad \text{y} \qquad x_1 + w \geq 0.$$

*Demostración.* Consideremos los siguientes conjuntos

$$P = \{k \in \mathbb{N} : 0 \leq (x_1 + y)(k)\} \qquad \text{y} \qquad N = \mathbb{N} \backslash P.$$

Ya que $u^* \geq 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 - r &\leq u^*(x_1 + y) \leq u^*\big((x_1 + y)\chi_P\big) \\ &\leq \|(x_1 + y)\chi_P\| \leq \|x_1 + y\| \\ &\leq 1 + s. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|(x_1+y)\chi_P\| \geq 1-r$, además

$$\|(x_1+y)\chi_N\| = \|x_1+y\| - \|(x_1+y)\chi_P\| \leq 1+s-(1-r) = r+s. \quad (3.2.1)$$

Definimos ahora $w \in \ell_1$ como

$$w(k) = \begin{cases} y(k) & \text{si } \ k \in P \\ -x_1(k) & \text{si } \ k \in N. \end{cases}$$

Es claro que $w\chi_P = y\chi_P$ y $-x_1\chi_N \geq y\chi_N$, y que $w \geq y$. Por otra parte

$$(x_1+w)\chi_P = (x_1+y)\chi_P \geq 0 \qquad \text{y} \qquad (x_1+w)\chi_N = 0,$$

satisfaciendo así que $x_1 + w \geq 0$.

En vista de (3.2.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|w-y\| &= \|(w-y)\chi_N\| = \|(-x_1-y)\chi_N\| \\ &= \|(x_1+y)\chi_N\| \leq r+s. \end{aligned}$$

□

El lema previo lo podemos generalizar de la siguiente manera.

**Lema 3.2.2.** *Sea $r, s \in \mathbb{R}^+$, $y \in \ell_1$, $m \in \mathbb{N}$ y $\{x_i : i \leq m\} \subset \ell_1$. Supongamos que*

$$1-r \leq u^*(x_i+y) \quad \text{ y } \quad \|x_i+y\| \leq 1+s \ \text{ para todo } \ i \leq m.$$

*Entonces existe $w \in \ell_1$ tal que*

$$w \geq y, \qquad \|w-y\| \leq m(r+s) \quad \text{ y } \quad x_i + w \geq 0 \ \text{ para todo } \ i \leq m.$$

*Demostración.* La afirmación para $m = 1$ es el Lema 3.2.1. Usando este resultado podemos probar el caso general. Sea $m \in \mathbb{N}$, $y \in \ell_1$, $\{x_i : i \leq m\} \subset \ell_1$ y supongamos que

$$1 - r \leq u^*(x_i + y) \quad \text{y} \quad \|x_i + y\| \leq 1 + s \ \text{ para todo } \ i \leq m.$$

Por el resultado para $m = 1$, existe un subconjunto $\{w_i : i \leq m\} \subset \ell_1$ tal que

$$w_i \geq y, \qquad \|w_i - y\| \leq r + s \quad \text{y} \quad x_i + w_i \geq 0 \ \text{ para todo } \ i \leq m. \tag{3.2.2}$$

Tomamos $w = \text{máx}\{w_i : i \leq m\}$. Existe una familia de conjuntos disjuntos dos a dos $\{A_i : i \leq m\} \subset \mathbb{N}$ tales que $\mathbb{N} = \cup_{i \leq m} A_i$ y que también satisfacen

$$w\chi_{A_i} = w_i \chi_{A_i} \quad \text{para todo } \ i \leq m. \tag{3.2.3}$$

Como consecuencia $w = \sum_{i=1}^m w_i \chi_{A_i} \in \ell_1$ y en vista de (3.2.2) se satisface que

$$w \geq w_i \geq y \quad \text{y} \quad x_i + w \geq x_i + w_i \geq 0 \ \text{ para todo } \ i \leq m. \tag{3.2.4}$$

Ya que $\{A_i : i \leq m\}$ es una partición de $\mathbb{N}$ tenemos también que

$$\begin{aligned}
\|w - y\| &= \sum_{i=1}^m \|(w - y)\chi_{A_i}\| \\
&= \sum_{i=1}^m \|(w_i - y)\chi_{A_i}\| \quad \text{(por (3.2.3))} \\
&\leq \sum_{i=1}^m \|(w_i - y)\| \qquad\qquad (3.2.5) \\
&\leq m(r + s) \quad \text{(por (3.2.2))},
\end{aligned}$$

en vista de (3.2.4) y (3.2.5) tenemos el resultado. □

**Teorema 3.2.3.** *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe una función* $\rho_n : ]0,1[ \longrightarrow ]0,1[$ *con las siguientes propiedades*

*1)* $\rho_n(\varepsilon) < \varepsilon$ *para todo* $\varepsilon \in ]0,1[$.

*2) Si* $0 < \varepsilon < 1$, $(y_i)_{i \le n} \in M_{\ell_1}^n$ *y* $n_0 \le n$ *cumplen que*

$$u^*(y_i) > 1 - \rho_n(\varepsilon), \quad \forall i \le n_0,$$

*se puede encontrar* $(z_i)_{i \le n} \in M_{\ell_1}^n$ *satisfaciendo las siguientes dos condiciones*

*a)* $\|z_i - y_i\| < \varepsilon$, *para todo* $i \le n$ *y*

*b)* $z_i \ge 0$ *y* $u^*(z_i) = 1$, *para todo* $i \le n_0$.

*Demostración.* Definimos inductivamente la función $\rho_n$ de la siguiente forma. Para $n = 1$ veamos que la función $\rho_1 : ]0,1[ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $\rho_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ satisface la condición 2).

Supongamos que $0 < \varepsilon < 1$ y $y_1 \in B_{\ell_1}$ satisface que $u^*(y_1) > 1 - \rho_1(\varepsilon)$. Si definimos $P_1$ y $a_1$ como

$$P_1 = \{k \in \mathbb{N} : y_1(k) \ge 0\} \qquad \text{y} \qquad a_1 = y_1 \chi_{P_1},$$

entonces tenemos que

$$1 - \rho_1(\varepsilon) < u^*(y_1) \le u^*(a_1) = \|a_1\| \le \|y_1\| \le 1 \ \text{ y } \ a_1 \ge 0.$$

Como consecuencia

$$\|a_1 - y_1\| = \|y_1 \chi_{\mathbb{N} \setminus P_1}\| = \|y_1\| - \|a_1\| \le 1 - \|a_1\| < \rho_1(\varepsilon).$$

Ahora definimos $z_1 = a_1 + (1 - \|a_1\|)e_1$. Así se cumple que $z_1 \ge 0$, $\|z_1\| = 1$ y

$$\|z_1 - y_1\| \le \|a_1 - y_1\| + 1 - \|a_1\| < \rho_1(\varepsilon) + \rho_1(\varepsilon) = \varepsilon.$$

Ya que $z_1 \geq 0$ y $\|z_1\| = 1$ también tenemos que $u^*(z_1) = 1$, de esta forma hemos demostrado la afirmación para $n = 1$.

Para aplicar el argumento de inducción introducimos el conjunto $\mathcal{P}_n$ dado por

$$\mathcal{P}_n := \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : k \text{ par}, \quad k \leq n \text{ y } i_j < i_{j+1}, \forall j < k\}.$$

Supongamos que $n$ es un número natural y existe una función $\rho_n$ para la cual la afirmación es verdadera. Definimos $\rho_{n+1}$ como

$$\rho_{n+1}(\varepsilon) = \rho_n\left(\frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|}\right) \qquad (\varepsilon \in ]0, 1[).$$

Por hipótesis la función $\rho_{n+1} : ]0, 1[ \longrightarrow ]0, 1[$ satisface 1).
Ahora probaremos que la condición 2) también se satisface. Supongamos que $0 < \varepsilon < 1$, $1 \leq n_0 \leq n + 1$ y el elemento $(y_i)_{i \leq n+1} \in M_{\ell_1}^{n+1}$ satisface que

$$u^*(y_i) > 1 - \rho_{n+1}(\varepsilon), \qquad \forall i \leq n_0.$$

Ya que $(y_i)_{i \leq n+1} \in M_{\ell_1}^{n+1}$ sabemos que $(y_i)_{i \leq n}$ es un elemento en $M_{\ell_1}^n$. Por hipótesis existe un elemento $(b_i)_{i \leq n} \in M_{\ell_1}^n$ que satisface las siguientes dos propiedades.

$$\|b_i - y_i\| < \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|}, \qquad \forall i \leq n \tag{3.2.6}$$

y

$$b_i \geq 0 \text{ y } u^*(b_i) = 1, \qquad \forall i \leq \text{mín}\{n_0, n\}. \tag{3.2.7}$$

Para cada $1 \leq i \leq n$ definimos

$$z_i = \frac{b_i}{1+\frac{\varepsilon}{8}} + \left(1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\right)e_1.$$

Ahora verificamos que $(z_i)_{i\leq n} \in M_{\ell_1}^n$. Si $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{I}_n$, debido a que $(b_i)_{i\leq n} \in M_{\ell_1}^n$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}z_{i_j}\right\| &= \left\|\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}b_{i_j} + \left(1-\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\right)e_1\right\| \qquad (3.2.8) \\ &\leq \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}} + 1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}} = 1. \end{aligned}$$

De (3.2.7) también tenemos que

$$z_i \geq 0 \ \text{ y } \ u^*(z_i) = 1, \qquad \forall i \leq \min\{n_0, n\}.$$

Por otro lado, si $i \leq n$ entonces

$$\begin{aligned} \|z_i - y_i\| &\leq \left\|z_i - \frac{b_i}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\right\| + \left\|\frac{b_i}{1+\frac{\varepsilon}{8}} - b_i\right\| + \|b_i - y_i\| \qquad (3.2.9) \\ &< 2\left(1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\right) + \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|} \qquad \text{(por (3.2.6))} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Solo faltaría definir un vector $z_{n+1} \in B_{\ell_1}$ tal que $(z_i)_{i\leq n+1} \in M_{\ell_1}^{n+1}$, $\|z_{n+1} - y_{n+1}\| < \varepsilon$ y en caso de que $n_0 = n+1$ necesitamos también que las condiciones $z_{n+1} \geq 0$ y $u^*(z_{n+1}) = 1$ se verifiquen. Para este último paso consideramos los siguientes dos casos.

<u>Caso 1</u>: Supongamos que $n_0 < n+1$.

En tal caso definimos $z_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{1+\frac{\varepsilon}{8}}$. Como $y_{n+1} \in B_{\ell_1}$ es claro que $\|z_{n+1}\| \leq 1$ y

$$\|z_{n+1} - y_{n+1}\| \leq 1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}} < \varepsilon.$$

En vista de (3.2.8), teniendo en cuenta que $z_{n+1} \in B_{\ell_1}$, para probar que $(z_i)_{i\leq n+1} \in M_{\ell_1}^{n+1}$, es suficiente mostrar que la condición que define $M_{\ell_1}^{n+1}$ se satisface para combinaciones lineales conteniendo al menos tres elementos que incluyen $z_{n+1}$. Ahora fijemos $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_n$. Usando que $(y_i)_{i\leq n+1} \in M_{\ell_1}^{n+1}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} z_{i_j} + z_{n+1}\right\| &= \left\|\frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} b_{i_j} + \frac{y_{n+1}}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\right\| \\
&\leq \frac{\|\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}(b_{i_j} - y_{i_j})\| + \|\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1} y_{i_j} + y_{n+1}\|}{1+\frac{\varepsilon}{8}} \\
&< \frac{\frac{\varepsilon k}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|} + 1}{1+\frac{\varepsilon}{8}} < 1 \quad \text{(por (3.2.6))}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, terminamos la prueba del caso 1.

<u>Caso 2</u>: Supongamos que $n_0 = n+1$.

Definimos $P$ y $a$ como

$$P = \{k \in \mathbb{N} : y_{n+1}(k) \geq 0\} \qquad \text{y} \qquad a = y_{n+1}\chi_P.$$

Por hipótesis $u^*(y_{n+1}) > 1 - \rho_{n+1}(\varepsilon)$, obteniendo así que

$$a \geq 0, \quad 1 - \rho_{n+1}(\varepsilon) < u^*(a) = \|a\| \leq 1 \ \text{ y } \ \|a - y_{n+1}\| < \rho_{n+1}(\varepsilon). \tag{3.2.10}$$

Notemos que para cada $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_n$, usando (3.2.7) y (3.2.10) obtenemos que

$$1 - \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|} < u^*(a) = u^*\left( \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} b_{i_j} + a \right) \tag{3.2.11}$$

y

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} b_{i_j} + a \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} (b_{i_j} - y_{i_j}) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} y_{i_j} + y_{n+1} \right\| \\ &\quad + \|a - y_{n+1}\| \\ &< 1 + (n+1) \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|} \qquad \text{(por (3.2.6) y (3.2.10))}.\end{aligned}$$

Por (3.2.11) y las desigualdades previas podemos aplicar el Lema 3.2.2. Por lo tanto, existe $w \in \ell_1$ que satisface las siguientes condiciones

$$w \geq a, \qquad \|w - a\| \leq |\mathcal{P}_n|(n+2) \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|} = \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{y} \tag{3.2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} b_{i_j} + w \geq 0, \qquad \forall (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_n. \tag{3.2.13}$$

Notemos que $a \geq 0$ por (3.2.10), entonces de (3.2.10) y (3.2.12) tenemos que

$$1 - \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|} < \|a\| \leq \|w\| \leq \|w - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{8} + 1. \tag{3.2.14}$$

Por lo tanto

$$\frac{1 - \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|}}{1 + \frac{\varepsilon}{8}} < \frac{\|w\|}{1 + \frac{\varepsilon}{8}} \leq 1,$$

así

$$0 \leq 1 - \frac{\|w\|}{1+\frac{\varepsilon}{8}} < 1 - \frac{1 - \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|}}{1+\frac{\varepsilon}{8}} < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|}. \tag{3.2.15}$$

Finalmente definimos

$$z_{n+1} = \frac{w}{1+\frac{\varepsilon}{8}} + \left(1 - \frac{\|w\|}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\right)e_1.$$

Recordando que $w \geq 0$ y (3.2.15), es claro que $z_{n+1} \geq 0$ y $u^*(z_{n+1}) = 1$. Ahora verificaremos que $z_{n+1}$ está cerca de $y_{n+1}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - y_{n+1}\| &\leq \left\| z_{n+1} - \frac{w}{1+\frac{\varepsilon}{8}} \right\| + \left\| \frac{w}{1+\frac{\varepsilon}{8}} - w \right\| + \|w - a\| + \|a - y_{n+1}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4(n+2)|\mathcal{P}_n|} \\ &\quad + \left(1 - \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\right)\|w\| \quad \text{(por (3.2.10), (3.2.12) y (3.2.15))} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon \qquad \text{(por (3.2.14)).} \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Por último, si $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}_n$, de (3.2.13) y (3.2.15) y usando también (3.2.7) y que $w \geq 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} z_{i_j} + z_{n+1} \right\| &= \left\| \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}} \left( \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} b_{i_j} + w \right) + \left(1 - \frac{\|w\|}{1+\frac{\varepsilon}{8}}\right) e_1 \right\| \\ &= \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}} u^* \left( \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} b_{i_j} + w \right) + 1 - \frac{\|w\|}{1+\frac{\varepsilon}{8}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{8}} u^*(w) + 1 - \frac{u^*(w)}{1+\frac{\varepsilon}{8}} = 1. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Ya que $(z_i)_{i\leq n} \in M_{\ell_1}^n$ y por (3.2.8) y (3.2.17), concluimos que $(z_i)_{i\leq n+1}$ es un elemento en $M_{\ell_1}^{n+1}$. En vista de (3.2.9) y (3.2.16), se concluye la prueba del caso 2.

Como consecuencia, hemos mostrado que $\ell_1$ satisface la afirmación para $n+1$ con $\rho_{n+1}(\varepsilon) = \rho_n\big(\frac{\varepsilon}{8(n+2)|\mathcal{P}_n|}\big)$. $\square$

Representamos por $\ell_1^m$ al espacio $\mathbb{R}^m$ con la norma

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{m} |x(j)| \qquad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Si $T \in L(X,Y)$, denotamos por $T^t$ al operador transpuesto de $T$.

**Proposición 3.2.4.** *$\ell_1$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$, para cada número natural $n$.*

*De hecho, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función $\gamma_n$ tal que $\ell_1$ y $\ell_1^m$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$ con la función $\gamma_n$ para todo entero positivo $m$.*

*Demostración.* Es suficiente mostrar que $\ell_1$ satisface la condición 3) de la Proposición 2.1.6. El mismo argumento puede ser aplicado para $\ell_1^m$ ya que la prueba del Teorema 3.2.3 también es válida para este espacio, para cualquier número natural $m$. En el último caso obtenemos adicionalmente que existe una función $\rho_n$ que satisface la Definición 2.1.1 para el espacio $\ell_1^m$ que no depende de $m$.

Consideremos la función $\rho_n$ dada en el Teorema 3.2.3. Mostraremos que la misma función también satisface la condición 3) en la Proposición 2.1.6 para el conjunto $B = \mathrm{Ext}(B_{\ell_1^*})$.

Supongamos que $(y_i)_{i\leq n} \in M_{\ell_1}^n$, $n_0 \leq n$ e $y^* \in B$ satisfacen la desigualdad $y^*(y_i) > 1 - \rho_n(\varepsilon)$ para cada $i \leq n_0$. Es de fácil comprobación que $\mathrm{Ext}(B_{\ell_1^*}) = \{v^* \in \ell_1^* : |v^*(e_n)| = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Así que si definimos $\varepsilon_n = \mathrm{signo}(y^*(e_n))$ entonces $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como consecuencia, la aplicación $T : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ dada por

$$T((x_n)) = (\varepsilon_n x_n) \qquad ((x_n) \in \ell_1),$$

es una isometría lineal sobreyectiva sobre $\ell_1$ que satisface $T = T^{-1}$, por lo tanto $T^t = (T^t)^{-1}$.

Además, $T^t(y^*)(e_n) = y^*(T(e_n)) = y^*(\varepsilon_n e_n) = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$, así $T^t(y^*) = u^*$; es decir, $T^t(u^*) = y^*$.
De esta forma, $u^*(T(y_i)) = T^t u^*(y_i) = y^*(y_i) > 1 - \rho_n(\varepsilon)$, para cada $i \leq n_0$.
Como $(y_i)_{i\leq n} \in M_{\ell_1}^n$ y $T$ es una isometría lineal tenemos que $(T(y_i))_{i\leq n} \in M_{\ell_1}^n$.

Usando el Teorema 3.2.3 existe $(x_i)_{i\leq n} \in M_{\ell_1}^n$ tal que

$$\|x_i - T(y_i)\| < \varepsilon, \quad \forall i \leq n \quad \text{ y } \quad u^*(x_i) = 1, \quad \forall i \leq n_0.$$

Como consecuencia

$$\|T(x_i) - y_i\| < \varepsilon, \quad \forall i \leq n \quad \text{ y } \quad y^*(T(x_i)) = 1, \quad \forall i \leq n_0.$$

Ya que $(x_i)_{i\leq n} \in M_{\ell_1}^n$, el elemento $(T(x_i))_{i\leq n}$ también pertenece a $M_{\ell_1}^n$. Hemos mostrado que la condición 3) en la Proposición 2.1.6 se satisface y así el resultado es demostrado.

$\square$

Diremos que una familia $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ de subespacios de $Y$ es una **red de subespacios** de $Y$, si para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$ existe $\gamma \in \Lambda$ tal que

$$Y_\alpha \subset Y_\gamma \ \text{ y } \ Y_\beta \subset Y_\gamma.$$

El siguiente resultado generaliza el Teorema 4.7 en [8].

**Proposición 3.2.5.** *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\Gamma_n : ]0,1[ \longrightarrow ]0,1[$ una función. Supongamos que $Y$ es un espacio de Banach tal que $Y = \overline{\cup\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}}$, donde la colección $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una red de subespacios de $Y$ que satisface de manera uniforme la AHSp-$\ell_\infty^n$ con la función $\Gamma_n$. Entonces $Y$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$ con la función $\gamma_n(\varepsilon) = \Gamma_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.*

*Demostración.* Dado $0 < \varepsilon < 1$, definimos $\gamma_n(\varepsilon) = \Gamma_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Supongamos que $(a_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ y que para algún conjunto no vacío $A \subset \{1, \dots, n\}$ e $y^* \in S_{Y^*}$, se satisface que

$$y^*(a_i) > 1 - \gamma_n(\varepsilon), \quad \forall i \in A.$$

Fijemos un número real $t$ tal que

$$0 < t < \frac{1}{n+1} \min\Big\{\frac{\varepsilon}{2}, \min\big\{y^*(a_i) - 1 + \gamma_n(\varepsilon) : i \in A\big\}\Big\}.$$

Por hipótesis existe $\alpha_0 \in \Lambda$ y $\{b_i : i \leq n\} \subset B_Y \cap Y_{\alpha_0}$ satisfaciendo

$$\|b_i - a_i\| < t, \qquad \forall i \leq n.$$

Ahora definimos $y_i = \frac{b_i}{1+nt}$ para cada $i \leq n$. Usando que $(a_i)_{i\leq n} \in M_Y^n$ resulta inmediato la verificación de que $(y_i)_{i\leq n} \in M_Y^n \cap Y_{\alpha_0}$.

Por otra parte, es claro que

$$\|y_i - a_i\| \leq \left\|\frac{b_i}{1+nt} - b_i\right\| + \|b_i - a_i\| < (n+1)t < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \text{para todo } \ i \leq n. \quad (3.2.18)$$

Para cada $i \in A$ obtenemos que

$$y^*(y_i) > y^*(a_i) - (n+1)t > 1 - \gamma_n(\varepsilon) > 0. \quad (3.2.19)$$

Definimos ahora el elemento $z^* \in Y_{\alpha_0}^*$ como sigue

$$z^*(z) = y^*(z) \qquad (z \in Y_{\alpha_0}),$$

que satisface $z^* \in B_{Y_{\alpha_0}^*}$. De (3.2.19) sabemos que $z^* \neq 0$ y también se deduce que

$$\frac{z^*}{\|z^*\|}(y_i) = \frac{y^*}{\|z^*\|}(y_i) \geq y^*(y_i) > 1 - \Gamma_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \ \ \text{para todo } i \in A.$$

Como asumimos que $Y_{\alpha_0}$ tiene la AHSp-$\ell_\infty^n$, existe $(z_i)_{i\le n} \in M^n_{Y_{\alpha_0}}$ tal que

$$\|z_i - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } i \le n \quad \text{y} \quad \Big\|\sum_{i\in A} z_i\Big\| = |A|.$$

Usando también (3.2.18) deducimos que

$$\|z_i - a_i\| \le \|z_i - y_i\| + \|y_i - a_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \forall i \le n.$$

Hemos probado el resultado. □

Si $\Sigma$ es una $\sigma$-álgebra definida sobre un conjunto no vacío $\Omega$ y $\mu$ es una medida positiva definida sobre $\Sigma$, definimos la siguiente colección $\Lambda$.

$$\Lambda := \{\alpha \subset \Sigma : \alpha \text{ es finito y } \mu(A) < \infty \text{ para cada } A \in \alpha\}.$$

Consideremos además los siguientes subespacios de $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$

$$Y_\alpha := \mathrm{Lin}\{\chi_A : A \in \alpha\} \quad (\alpha \in \Lambda).$$

Es claro que para cada $\alpha \in \Lambda$ existe un entero $m \ge 0$ tal que el subespacio $Y_\alpha$ es isométricamente isomorfo a $\ell_1^m$. Además la colección $\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una red de suespacios de $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ satisfaciendo que

$$L_1(\Omega, \Sigma, \mu) = \overline{\cup\{Y_\alpha : \alpha \in \Lambda\}}.$$

Luego, como consecuencia de las Proposiciones 3.2.4 y 3.2.5 obtenemos que todo espacio $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ satisface la AHSp-$\ell_\infty^n$ para cada número natural $n$, y la función $\rho_n$ que verifica la propiedad para cada número natural $n$ no depende de $\mu$. En vista de la caracterización dada en el Teorema 2.2.4 obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.2.6.** *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe una función* $\gamma_n : ]0,1[ \longrightarrow ]0,1[$ *tal que* $L_1(\mu)$ *satisface la Definición 2.1.1 con tal función, para cada medida positiva* $\mu$*. Por lo tanto, el par* $(\ell_\infty^n, L_1(\mu))$ *tiene la BPBp para operadores. Además, para cada entero positivo* $n$ *existe una función* $\eta_n$ *tal que el par* $(\ell_\infty^n, L_1(\mu))$ *satisface la Definición 1.1.4 para tal función, siendo* $\mu$ *una medida positiva.*

# Bibliografía


[1] M.D. Acosta. «Denseness of norm attaining mappings». *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat.* 100 (2006), 10-30.

[2] M.D. Acosta. «On the Bishop–Phelps–Bollobás property». *Banach Center Publ.* 119 (2019), 13-32.

[3] M.D. Acosta, R.M. Aron, D. García y M. Maestre. «The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators». *J. Funct. Anal.* 254 (11) (2008), 2780-2799.

[4] M.D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, D. García, S.K. Kim y M. Maestre. «Bishop-Phelps-Bollobás property for certain spaces of operators». *J. Math. Anal. Appl.* 414 (2014), 532-545.

[5] M.D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, D. García, S.K. Kim y M. Maestre. «The Bishop-Phelps-Bollobás property: a finite-dimensional approach». *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 51 (1) (2015), 173-190.

[6] M.D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, D. García y M. Maestre. «The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for bilinear forms». *Trans. Amer. Math. Soc.* 365 (2013), 5911-5932.

[7] M.D. Acosta y J.L. Dávila. «A basis of $R^n$ with good isometric properties and some applications to denseness of norm attaining operators». *J. Funct. Anal.* 279 (2020), 108602.

[8] M.D. Acosta, J.L. Dávila y M. Soleimani-Mourchehkhorti. «Characterization of the Banach spaces $Y$ satisfying that the pair $(\ell_\infty^4, Y)$ has the Bishop-Phelps-Bollobás property for operators». *J. Math. Anal. Appl.* 470 (2019), 690-715.

[9] E. Bishop y R.R. Phelps. «A proof that every Banach space is subreflexive». *Bull. Amer. Math. Soc.* 67 (1961), 97-98.

[10] B. Bollobás. «An extension to the theorem of Bishop and Phelps». *Bull. Lond. Math. Soc.* 2 (1970), 181-182.

[11] Y.S. Choi y S.K. Kim. «The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators from $L_1(\mu)$ to Banach spaces with the Radon-Nikodým property». *J. Funct. Anal.* 261 (6) (2011), 1446-1456.

[12] Y.S. Choi, S.K. Kim, H.J. Lee y M. Martín. «The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators on $L_1(\mu)$». *J. Funct. Anal.* 267 (1) (2014), 214-242.

[13] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V.M. Santalucía, J. Pelant y V. Zizler. *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*. Springer New York, 2001.

[14] S.K. Kim. «The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators from $c_0$ to uniformly convex spaces». *Israel J. Math.* 197 (2013), 425-435.

[15] S.K. Kim y H.J. Lee. «Uniform convexity and Bishop-Phelps-Bollobás property». *Canad. J. Math.* 66 (2) (2014), 373-386.

[16] J. Lindenstrauss. «On operators which attain their norm». *Israel J. Math.* 1 (1963), 139-148.

[17] W. Rudin. *Real and complex analysis*. 3d ed. McGraw-Hill Book Company. New York, 1987.

[18] W. Schachermayer. «Norm attaining operators and renorming of Banach spaces». *Israel J. Math.* 44 (1983), 201-212.