

1, 2 y 3 de septiembre de 2022

**Facultad de Ciencias
de la Educación**

**Universidad de Santiago de
Compostela**



**INVESTIGACIÓN EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA
XXV**

Editores:

Teresa F. Blanco, Cristina Núñez-García, María C. Cañadas, José Antonio González-Calero



DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICAS
APLICADAS



GALICIAN CENTRE FOR
MATHEMATICAL RESEARCH
AND TECHNOLOGY



Investigación en Educación Matemática

XXV

EDICIÓN CIENTÍFICA

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Campus de la Cartuja, s/n 18071 Granada (España).

Dra. Teresa F. Blanco

Dra. Cristina Núñez-García

Dra. María C. Cañadas

Dr. José Antonio González-Calero

Comité Científico

Dra. María C. Cañadas (coordinadora)

Dr. José Antonio González-Calero (coordinador)

Dra. Edelmira Badillo

Dr. Carlos de Castro

Dra. Nuria Climent

Dra. Clara Jiménez

Dr. Pedro Ivars

© de los textos: los autores

ISBN: 978-84-09-45038-1

ISSN: 2952-0045

Investigación en educación matemática (Internet)

Cítese como:

Blanco, T. F., Núñez-García, C., Cañadas, M. C. y González-Calero, J. A. (Eds.) (2022). *Investigación en Educación Matemática XXV*. Santiago de Compostela: SEIEM.

Las comunicaciones y los resúmenes de póster aquí publicados han sido sometidos a evaluación y selección por parte de investigadores e investigadoras miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

La publicación de estas actas ha sido financiada por el Centro de Investigación y Tecnología Matemática de Galicia (CITMAga).

EFFECTO DE UNA INSTRUCCIÓN BASADA EN FLEXIBILIDAD INTRATAREA EN LA COMPETENCIA EN RESOLUCIÓN ARITMÉTICA DE PROBLEMAS VERBALES Y EN EL DISFRUTE Y UTILIDAD PERCIBIDA <i>Del Olmo-Muñoz, J., González-Calero, J. A., Diago, P. D., Arevalillo-Herráez, M. y Arnau, D.</i>	239
HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN EN LAS EVALUACIONES ESCRITAS EN SECUNDARIA <i>Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P.</i>	249
LOS CORPÚSCULOS PITAGÓRICOS PARA MEDIR LONGITUDES FINITAS <i>Esteve-Blasco, M. y González-Astudillo, M. T.</i>	259
EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN UNA NIÑA DE 4 AÑOS: ESTRATEGIAS Y REPRESENTACIONES <i>Fuentes, S. y Cañadas M. C.</i>	269
CREENCIAS E IDEAS DE LOS FUTUROS MAESTROS SOBRE EL USO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS COMO RECURSO DIDÁCTICO <i>Fuertes-Prieto, M. A., Santágueda-Villanueva, M. y Lorenzo-Valentín, G.</i>	277
EL TRATAMIENTO DE LA DERIVADA EN EL PLAN DE ESTUDIOS DE INGENIERÍA COMERCIAL EN CHILE <i>Galindo-Illanes, M. y Breda, A.</i>	285
PROBLEMAS DE FRACCIONES FORMULADOS POR FUTUROS PROFESORES: ALGUNAS CARACTERÍSTICAS <i>García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D. y Perdomo-Díaz, J.</i>	295
EL IMPACTO DE LOS ESTUDIOS MUSICALES EN LA COMPETENCIA MATEMÁTICA. UN ESTUDIO PRELIMINAR <i>García-García, J. y Nortes, R.</i>	305
SENTIDO NUMÉRICO ACERCA DE LOS NÚMEROS REALES: CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES USADOS EN OPERACIONES DE FORMA GENERAL <i>Garrido, V., Figueras, O. y Martínez, M.</i>	315
EL CONOCIMIENTO DE FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA <i>Giménez, J., Vargas-Herrera, J. y Vanegas, Y.</i>	325
PERCEPCIÓN Y REFLEXIÓN DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE ACCIONES QUE PROMUEVEN UN APRENDIZAJE AUTORREGULADO EN EL AULA <i>Hidalgo-Moncada, D., Díez-Palomar, J. y Vanegas, Y.</i>	335
PRINCIPIOS DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA <i>Ledezma, C., Font, V., Sala-Sebastià, G. y Breda, A.</i>	345
DESARROLLO DE LA AUTOEFICACIA PERCIBIDA A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE CLASES EN FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES DE EDUCACIÓN INFANTIL <i>Lendínez, E. M., García, F. J., Lerma, A. M. y Abril, A. M.</i>	355
CATEGORIZACIÓN DE LOS ERRORES DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE PRIMARIA EN TAREAS DE MEDIDA DE MAGNITUDES <i>López-Serentill, P.</i>	363
CONCEPCIONES SOBRE LAS MATEMÁTICAS Y LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN EL CORREO DE MADRID (1786-1791) <i>Madrid, M. J., León-Mantero, C., Casas-Rosal, J. C. y Maz-Machado, A.</i>	373

HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN EN LAS EVALUACIONES ESCRITAS EN SECUNDARIA

Visualization skills in written assessments in secondary school

Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P.

Universidad de Granada

Resumen

En esta comunicación presentamos parte de un estudio piloto sobre las evaluaciones escritas que se realizan para medir el aprendizaje geométrico, para ver las habilidades de visualización demandadas a los estudiantes de 15 años que cursan primer año de bachillerato uruguayo. Se analizan las actividades de evaluación propuestas por tres docentes referidas a lugares geométricos y se contrastan con las planteadas en evaluaciones internacionales, con las actividades de PISA para el contenido espacio y forma. Los resultados muestran diferencias en las habilidades de visualización requeridas para su resolución.

Palabras clave: *evaluación, evaluaciones escritas, sentido espacial, habilidades de visualización.*

Abstract

In this communication we present part of a pilot study on the written assessments that are made to measure geometric learning, to see the visualization skills demanded to 15-year-old students who are in the first year of baccalaureate in Uruguay. The evaluation activities proposed by three teachers referring to geometric places are analyzed and contrasted with those proposed in international evaluations, with the PISA activities for the space and shape content. The results show differences in the visualization skills required for its resolution.

Keywords: *assessment, written assessments, spatial sense, visualization skills.*

INTRODUCCIÓN

Varias reformas del currículo en matemáticas en los últimos tiempos, según los investigadores, provienen de los estudios internacionales que se enfocan en los logros de los estudiantes y dan lugar a hablar de las competencias del siglo XXI, una de ellas es la competencia y la alfabetización matemática (Shimizu et al., 2018). La alfabetización espacial y el desarrollo de las habilidades espaciales son consideradas como aprendizajes fundamentales en el mundo tecnológico en el que vivimos (Diezmann y Lowrie, 2009). En relación con el desarrollo de las habilidades espaciales, algunos investigadores consideran que una línea de interés en la investigación es analizar la interacción entre la visualización y la didáctica de la matemática, considerando el beneficio del uso de la visualización en la mejora de la educación matemática (Presmeg, 2006). Dado que la evaluación a gran escala y en el aula se basan en principios similares de evaluación sólidos, es un desafío la mejora de la interacción y coherencia entre los dos tipos de evaluación, para ayudar al éxito de los aprendizajes de los estudiantes (Suurtamm et al., 2016).

Elvas, I., Ramírez, R. y Flores, P. (2022). Habilidades de visualización en las evaluaciones escritas en secundaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 249-257). SEIEM.

El National Council of Teachers of Mathematics (2000) enfatiza el aspecto funcional del aprendizaje geométrico, que dirige a desarrollar el sentido espacial de los estudiantes, proponiendo con ello que cada uno deba “utilizar la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas” (p. 43). La OCDE en el proyecto PISA considera los contenidos propuestos en los estándares curriculares de NTCM (2000) y, en geometría, define el contenido espacio y forma, relacionando el estudio de las formas con el espacio cercano y su construcción conceptual. El objetivo general de PISA es informar en qué medida los estudiantes son capaces de utilizar conocimientos y habilidades desarrolladas durante la escolarización para resolver problemas que le permitan participar en la sociedad, que requieren para ser superados desarrollar el razonamiento espacial, que en el contenido espacio y forma implica reconocer patrones y figuras, buscar diferencias y semejanzas entre los componentes de las formas, entender las propiedades y las posiciones relativas de los objetos geométricos (ANEP, 2017b).

En Uruguay, primero de bachillerato es considerado un año de articulación entre la enseñanza básica y los cursos posteriores de bachillerato, y en él, la enseñanza de la geometría está centrada en el método de los lugares geométricos. Los diferentes aspectos que buscan ser trabajados en los cursos de geometría en los currículos oficiales de la enseñanza secundaria uruguaya enfatizan los conceptos geométricos, las propiedades de las figuras y su correspondiente formalización. Las pruebas de evaluación que proponen los docentes se basan en algunos documentos nacionales que entienden la evaluación como una herramienta pedagógica donde “la valoración conceptual, junto con la calificación pertinente, motiva a los estudiantes a seguir aprendiendo” (CES, 2020, p. 2); y permite “establecer apreciaciones acerca de los procesos de aprendizaje” (ANEP, 2017a).

En el puntaje promedio obtenido en matemáticas por Uruguay en PISA se observa cierta tendencia a la baja ya que en 2003 fue 422, en 2006 y 2009 fue 427 puntos, en 2012 fue 409 puntos y en 2015, último año de informe de resultados publicado en el país, fueron 418 puntos. Esto significa que el estudiante promedio accede al nivel 1 de desempeño, de los seis niveles definidos en orden creciente de puntajes, mostrando que el estudiante uruguayo es capaz de responder a preguntas que involucran contextos familiares donde la información está toda presente y las preguntas están bien definidas (ANEP, 2017b). Si miramos los resultados en el contenido espacio y forma, el puntaje obtenido por Uruguay es 413, siendo el mejor puntaje promedio por área de contenido y únicamente el 8,6 % de los estudiantes alcanza un nivel 4 o superior.

Por lo dicho anteriormente se puede observar que el currículo uruguayo no hace constar el enfoque funcional que pretende desarrollar el sentido espacial propuesto por el NCTM y la OCDE a través de los lineamientos de PISA. El interés de esta comunicación es analizar si esta situación da lugar a diferencias y similitudes, en relación con las habilidades de visualización, en las pruebas de evaluación en geometría propuestas por algunos docentes de Uruguay y las pruebas de evaluación formuladas por la OCDE en PISA.

A partir de los intereses planteados se realizan las siguientes preguntas: ¿qué habilidades de visualización se demandan para resolver las actividades correspondientes a lugares geométricos, para alumnos de 15 años, en las evaluaciones escritas de los docentes de matemáticas del estudio y cuáles en las actividades de evaluación PISA del dominio de la cultura matemática? ¿Cuáles son comunes y cuáles difieren?

El aporte de este trabajo a las investigaciones actuales pretende brindar información acerca de cómo la formulación de los contenidos geométricos del currículo, en particular, la ausencia de alusión a las habilidades de visualización requeridas en las resoluciones de las actividades propuestas puede afectar a los resultados de evaluaciones externas, y comprender los resultados aportados por las evaluaciones internacionales. Se espera determinar las habilidades de visualización que se requieren en cada una de

las pruebas para explorar la coherencia entre ambas evaluaciones, además de identificar qué habilidades deberían estar presentes en el currículo para planificar el currículo de geometría que favorezca la competencia matemática desde el desarrollo del sentido espacial.

MARCO TEÓRICO

Para responder a estas preguntas se van a atender las destrezas requeridas para resolver las actividades y vamos a desarrollar aspectos teóricos referidos a dos elementos: sentido espacial y actividades de evaluación en matemáticas.

Evaluación en educación matemática y en geometría

Según Santos y Cai (2016), la evaluación establece el vínculo entre el currículo implementado y el logrado. El currículo implementado alude a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de acuerdo con la experiencia y perspectiva del docente en su clase. Mientras que el currículo alcanzado atiende a lo que aprenden los estudiantes, se manifiesta a través de sus logros y se observa o infiere de sus acciones en respuesta a tareas y actividades de evaluación. Los estándares curriculares (NCTM, 2000) afirman que la evaluación debe apoyar el aprendizaje de las matemáticas significativas y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes; PISA destaca el papel de la competencia matemática porque mejora las oportunidades de vida de los estudiantes y la considera como esencial para describir, explicar y predecir el mundo (OCDE, 2016). Por otro lado, los documentos de educación secundaria uruguayos entienden la evaluación desde una perspectiva comprensiva y formativa, como componente integrado a la enseñanza y al aprendizaje; como un medio para la acreditación de los aprendizajes y de los procesos de enseñanza; y debe ser acorde con los objetivos provistos en cada asignatura y actividad (ANEP, 2017a; CES, 2020).

En relación con la evaluación en geometría, Alsina et al. (1997) sugieren que para conocer el proceso de maduración y aprendizaje de los conceptos y relaciones geométricas será necesario diseñar diferentes métodos y técnicas de evaluación. Asimismo, el NCTM (2000) plantea que el estudio de la geometría debe permitir a los estudiantes utilizar la visualización, el razonamiento espacial y el modelado geométrico para resolver problemas y la evaluación en geometría propone, entre otros aspectos, analizar características y propiedades de formas geométricas y desarrollar argumentos matemáticos sobre relaciones geométricas.

Sentido espacial

Las continuas investigaciones en educación de la geometría han abarcado el pensamiento y razonamiento espacial y un aspecto que ha recibido atención es la visualización en geometría (Jones y Tzekaki, 2016). Distintos trabajos han enfatizado la necesaria relación entre aspectos visuales para la resolución de problemas (Stylianou, 2001). En esta línea, el concepto de sentido espacial sugiere un enfoque funcional de aplicación a resolución de problemas de la vida cotidiana.

Flores et al. (2015), describen el sentido espacial como una forma intuitiva de “entender el plano y el espacio, para identificar cuerpos, formas y relaciones entre ellos, que implica manejar relaciones y conceptos de geometría de forma no convencional, incluyendo la habilidad para reconocer, visualizar, representar y transformar formas geométricas” (pp.129-130). Consideran las destrezas necesarias para la visualización de los conceptos geométricos como una de las componentes del sentido espacial, entendida como “un amplio conjunto de imágenes, capacidades y habilidades necesarias y útiles para elaborar, analizar, transformar y comunicar información relativa a las posiciones entre figuras objetos y modelos geométricos” (Flores et al., 2015, p. 133). Para caracterizar la visualización, utilizan el

marco teórico de Gutiérrez (1996), que considera la visualización compuesta por cuatro elementos: las imágenes mentales, las representaciones externas, los procesos de visualización y las habilidades de visualización.

Algunos estudios refieren a la interacción entre las representaciones externas e internas como parte fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La representación interna o imaginería visual se infiere a partir de las interacciones con la producción de la representación externa, subyace a la creación de una disposición espacial o a un dibujo o diagrama (Goldin, 2007; Presmeg, 2006).

En cuanto a los procesos, Bishop (1989) señala los procesos de manipulación de las imágenes mentales, visuales y físicas: la interpretación de información figurativa (IFI) y el procesamiento visual (VP). En este trabajo se pone el foco en las habilidades de visualización.

Habilidades del sentido espacial

Del Grande (1990) establece siete habilidades espaciales de visualización que parecen tener mayor relevancia en el desarrollo académico de la percepción espacial: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual.

La habilidad *coordinación ojo-motor* la entiende como la capacidad de coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. La *percepción figura-contexto* permite identificar un componente en una situación e implica apreciar cambios en la percepción de las figuras contra fondos complejos. La *conservación de la percepción* es la capacidad de reconocer un objeto pese a sufrir variaciones de tamaño y posición. La *percepción de la posición en el espacio* es la capacidad de determinar la relación de un objeto con otros objetos o con el observador. La *percepción de las relaciones espaciales* es la capacidad de ver dos o más cualidades que caracterizan objetos relacionados con uno mismo o entre sí. La *discriminación visual* es la capacidad de identificar las similitudes y diferencias entre objetos. La *memoria visual* es la capacidad de recordar con precisión objetos que ya no están a la vista y relacionar sus características con otros objetos que están o no a la vista.

METODOLOGÍA

Se ha llevado a cabo un estudio piloto, con enfoque cualitativo de carácter descriptivo mediante un análisis de contenido que investiga el significado simbólico, el esfuerzo de interpretación de un mensaje y permite analizar el contenido latente en un texto (Rico y Fernández, 2013). En educación matemática, se emplea como método para estudiar los diversos significados escolares de los conceptos y procedimientos matemáticos que aparecen en un texto, en nuestro caso en las actividades escritas que emplean los docentes de matemática de primero de bachillerato para evaluar a los estudiantes y las actividades estandarizadas que ha liberado PISA.

La selección y recolección de las actividades analizadas en este estudio piloto implica dos procesos diferentes. Con relación a las actividades liberadas por PISA, en Uruguay el informe de resultados sólo libera actividades del área en que se focaliza, que para matemática corresponden a 2003 y 2012, mediciones en las que el país participa (en la figura 1 se presenta un ejemplo). Para el proceso de recolección y selección de las actividades de los docentes, se determina el curso de primero de bachillerato porque en ese nivel se encuentran la mayoría de los alumnos con 15 años correspondiente a uno de los cortes etarios en la que se lleva a cabo la evaluación de PISA.

Pregunta 1

Un carpintero cuenta con 32 metros de listones de madera y desea hacer un borde alrededor de una jardinera. Él ha considerado utilizar uno de los siguientes diseños en la construcción de este borde.

Encierra en un círculo según corresponda la palabra "Sí" o "No" para indicar cuáles diseños de bordes se pueden realizar con 32 metros de madera.

Diseño	Utilizando este diseño ¿puede hacer el borde con 32 metros de madera?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

Figura 1. Carpintero. Actividad PISA 2003.

De las actividades liberadas por PISA Uruguay interesan sólo siete, las referidas al contenido espacio y forma. En 2003 son tres, que llevan por título: escalera, dados y carpintero; mientras que las correspondientes a 2012 son cuatro: garaje (pregunta 1 y 2) y puerta giratoria (pregunta 1 y 2). En este trabajo se nombran con las iniciales y números de sus títulos, E, D, C, G1, G2, PG1, PG2, respectivamente.

Para la recolección de las actividades de los docentes, se seleccionan las actividades de evaluación correspondientes al contenido curricular de geometría, por tanto, actividades que evaluarán el aprendizaje de los lugares geométricos (CES, 2010). Se ha solicitado a la dirección de una institución privada de Montevideo el acceso a las evaluaciones realizadas por los tres profesores de primero de bachillerato. Las actividades de los docentes fueron planteadas en el año lectivo 2020, en una situación de examen durante clase en modalidad presencial y corresponden al contenido curricular de geometría, referente a lugares geométricos.

Nuestro interés está en el sentido espacial, evitando las inclusiones de aspectos relacionados con la medida de magnitudes geométricas. Es por este motivo que para la selección se tuvo en cuenta que la resolución de la actividad no requiera principalmente una medida, sea como cantidad de longitud, superficie o volumen, como de amplitud de ángulo; además se selecciona solo una de las que teniendo igual enunciado, cambian los valores de los datos proporcionados, de este modo, de las 24 actividades de evaluación de los docentes a las que se acceden, son nueve las seleccionadas. Se nombran con la inicial de la palabra actividad seguida de un número: A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8 y A9. En la figura 2 se muestra un ejemplo de las actividades de los docentes.

Actividad 1

Indica con un color todos los puntos del plano que equidistan de las rectas AB y EF y están a menos de 4,5 cm del punto A

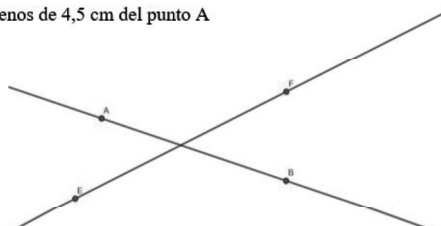


Figura 2. Actividad de los docentes.

En síntesis, las actividades de evaluación consideradas como objeto de análisis en esta investigación son 16, entre las nueve actividades de los docentes en torno al contenido lugares geométricos, propuestas en primero de bachillerato y las siete actividades liberadas de PISA en los dos años 2003 y 2012 cuyo dominio fue la cultura matemática, específicamente en el contenido espacio y forma.

La recolección de datos. El trabajo abarca las habilidades de visualización requeridas para resolver las actividades. La recolección de datos se realiza a través de la resolución amplia y detallada de cada una de las 16 actividades que son sujetos de este estudio, por parte de dos de los investigadores quienes resuelven separadamente, ponen en común apreciaciones y consultan con un tercer revisor experto en caso de discrepancia. Los análisis fueron triangulados por una tercera persona experta y calificada que permitió agregar nuevas resoluciones en las actividades.

No fueron considerados los procedimientos que no conducen a encontrar la solución de cada una de las actividades porque no atienden a los objetivos de la investigación. Interesa señalar que las actividades propuestas deben ser resueltas a lápiz y papel, sin usar programas de geometría, como GeoGebra.

Descripción del análisis. Se establecen como categorías las habilidades de visualización: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto, conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio, percepción de las relaciones espaciales, discriminación visual y memoria visual. Se realiza un análisis de contenido de las resoluciones de las 16 actividades que forman parte de este estudio, poniendo la mirada en identificar en cada paso de la resolución, las habilidades requeridas al estudiante de primero de bachillerato en el momento que las resuelve. Para todas las actividades se confeccionan tablas donde se describen y contabilizan las manifestaciones de cada habilidad. Se muestran ejemplos en la tabla 1. Para dar mayor validez al estudio, los análisis fueron puestos en consideración, recibieron agregados y correcciones de parte de dos docentes externos.

Tabla 1. Análisis de las habilidades de visualización en dos actividades.

Habilidades de visualización	Carpintero	Actividad 1
Coordinación ojo-motor	--	Conocer y lograr el trazado del procedimiento de construcción de la circunferencia y de las dos bisectrices.
Percepción figura-contexto	Considerar las figuras A y C insertas en un rectángulo, y apreciar la igualdad de trozos escalonados con sus paralelos en el "contexto"/rectángulo.	Considerar los segmentos de bisectrices incluidos en el círculo.
Conservación de la percepción	Aunque varíe la forma se conservan las medidas.	--
Percepción de la posición en el espacio	--	--
Percepción de las relaciones espaciales	Se conserva el perímetro en las diferentes figuras. Identificación de los segmentos que forman la "escalera" con los correspondientes del rectángulo en que se inscriben las figuras A y C.	Determinación de todos los puntos que cumplen con estar a menos de 4,5cm y equidistantes de las rectas AB y EF.
Discriminación visual	Tres figuras conservan el perímetro: A, C y D y una cuarta figura no: B. Especialmente, apreciación de que la longitud del lado oblicuo es mayor que el vertical.	--
Memoria visual	--	--

RESULTADOS

Para presentar los resultados en esta comunicación se elabora la tabla 2 que sintetiza la información acerca de las habilidades de visualización que fueron definidas en el marco teórico, en ella se señala ausencia o presencia de la habilidad en la resolución.

Tabla 2. Habilidades de visualización en las actividades de PISA y de los docentes.

Habilidades de visualización	C	E	D	G1	G2	PG1	PG2	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
Coordinación ojo-motor								x	x	x	x	x	x	x	x	x
Percepción figura-contexto	x				x			x	x	x	x	x	x	x	x	x
Conservación de la percepción	x	x	x	x		x										
Percepción de la posición en el espacio		x	x	x	x	x	x							x	x	
Percepción de las relaciones espaciales	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Discriminación visual	x		x	x		x										
Memoria visual																

Habilidades de visualización en actividades de PISA. Las habilidades visuales más requeridas para resolver las actividades de PISA son tres: conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio y percepción de las relaciones espaciales, que aparecen en cinco o en seis de las actividades para su resolución. La discriminación visual es requerida en cuatro actividades.

De los resultados de la tabla 2 se puede afirmar que no hay una habilidad que sea necesaria para la resolución de todas las actividades. Asimismo, la habilidad ojo-motor y memoria visual no resultaron evidenciadas para resolver las actividades; y una habilidad poco requerida es la percepción figura-contexto que sólo aparece en dos actividades.

Habilidades de visualización en actividades de los docentes. Tres son las habilidades de visualización requeridas a la hora de resolver todas las actividades de los docentes: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto y percepción de relaciones espaciales, necesarias para construir, en particular cuando se trabaja con regla y compás. Menos requerida es la percepción de la posición en el espacio que aparece en dos actividades. Las otras dos habilidades de visualización: conservación de la percepción y memoria visual, parecieran no ser requeridas en las construcciones solicitadas.

CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados, se establece que las habilidades más requeridas, por tanto, evaluadas en las actividades seleccionadas de PISA son: conservación de la percepción, percepción de la posición en el espacio y percepción de las relaciones espaciales, y en menor medida la discriminación visual. Las habilidades necesarias en las actividades de los docentes y por tanto evaluadas son: coordinación ojo-motor, percepción figura-contexto y percepción de las relaciones espaciales (Del Grande, 1990; Flores et al., 2015).

Como se evidencian diferencias podemos concluir a partir de los resultados de este trabajo que, en relación con las habilidades de visualización, las actividades de las evaluaciones escritas de los docentes uruguayos requieren el desarrollo de habilidades diferentes de las actividades propuestas en PISA y por tanto que la ausencia en el currículo oficial uruguayo de primero de bachillerato de aspectos relativos a visualización puede influir en la obtención de altos resultados en PISA, sin que se pueda

afirmar que su inclusión oficial cambiara el currículo implementado por los profesores en sus aulas, es decir, la enseñanza de la geometría que se realiza habitualmente en Uruguay.

Para dar mayor sustento a los resultados de este estudio se podrían indagar otras componentes del sentido espacial, las características de las tareas de enseñanza que se llevan a cabo, incluyendo el proceso de enseñanza, las expectativas de los profesores, etc., que pueda aportar más información sobre posibles causas de que el estudiante promedio uruguayo alcance el nivel uno de desempeño, por debajo del nivel básico de competencia definido por PISA.

Se ha realizado un estudio piloto, con lo que se identifican algunas limitaciones de la investigación, como el tamaño reducido de la muestra: de actividades, debido a las pocas actividades de PISA liberadas en Uruguay y la restricción al contenido de lugares geométricos; y de docentes, por centrar el estudio en una sola institución educativa. Se reconoce como aporte la categorización de las habilidades de visualización y el método de análisis que permite trabajar con muestras mayores, respuestas de estudiantes, comparaciones con otros países para brindar elementos objetivos en posibles reformas curriculares.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte de unas de las líneas del proyecto PID2020-117395RB-I00.

Referencias

- ANEP. (2017a). *Marco curricular de referencia nacional (MCRN). Una construcción colectiva*. ANEP.
- ANEP. (2017b). *Uruguay en PISA 2015. Informe de resultados*. División de investigación, evaluación y estadística (DIEE).
- Alsina, C., Burgués, C y Fortuny, J. M. (1997). *Invitación a la didáctica de la geometría* (4ª Ed.). Síntesis.
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- CES (2010). *Programa de matemática primer año. Bachillerato, reformulación 2006, ajuste 2010*. ANEP.
- CES (2020). *Orientaciones vinculadas con la evaluación de los aprendizajes: la calificación*. ANEP.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Diezmann, C. y Lowrie, T. (2009). Primary students' spatial visualization and spatial orientation: an evidence base for instruction. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis, (Eds.). *Proceedings of the 33rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 417-424). PME.
- Flores, P., Ramírez, R. y del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 127-146). Pirámide.
- Goldin, G. A. (2007). Representation in school mathematics a unifying research perspective. En J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.275-285). NCTM.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME conference* (pp. 3-19). Universidad de Valencia.
- Jones, K., y Tzekaki, M. (2016). Research on the teaching and learning of geometry. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp.109-149). Sense Publishers.

- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- OCDE (2016). PISA 2015. *Assessment and analytical framework: science, reading, mathematics and financial literacy*. OCDE.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future*, (pp.205-236). Sense Publishers.
- Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática*, (pp.1-22). Comares.
- Santos, L. y Cai, J. (2016). Curriculum and assessment. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education*, (pp.153-185). Sense Publishers.
- Shimizu, Y., Vithal, R., Arzanello, F., Ruiz, A., Cuoco, A., Bosch, M., Gholam, S., Morony, W. y Zhu, Y. (2018). Discussion document. En Y. Shimizu y R. Vithal (Eds.), *Proceedings the 24th ICMI study* (pp. 571-588). University of Tsukuba.
- Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME international conference* (pp.225-232). Utrecht University.
- Suurtamm, C., Thompson, D. R., Kim, R. Y., Moreno, L. D., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. y Vos, P. (2016). *Assessment in mathematics education: large-scale assessment and classroom assessment* (pp. 27-33). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32394-7>