# ESTIMACION OPTIMA DE SEÑALES EN PRESENCIA DE RUIDO

M.J. Valderrama Bonnet[1]. F. Vallejo Pérez de la Blanca, J.M. Alvarez Pez

## RESUMEN

En el presente trabajo precisamos la noción matemática de filtro realizable, y procedemos a construir el filtro óptimo para estimación de señales perturbadas por un ruido, analizando detalladamente el caso en que el ruido sea blanco. Asimismo, introducimos un filtro subóptimo para llevar a cabo tal estimación.

## SUMMARY

In the present paper we precise the mathematical notion of a realizable filter, and we procede to construct the optimal filter for signal estimation under a noise perturbation, analyzing in detail the case in which the noise is white. Likewise we introduce a suboptimal filter to carry out such estimation.

## INTRODUCCION

Uno de los problemas más importantes y, a su vez, de mayor interés que tiene planteado la Teoría de la Comunicación es el de la recepción de señales que han sido emitidas desde una cierta fuente, y que llegan al receptor "viciadas" por la presencia de un ruido (entendiendo por ruido no sólo una perturbación sonora, sino también luminosa, cromática, etc.).

La resolución física de dicho problema se lleva a cabo mediante la construcción de filtros o sistemas que permitan estimar, de la forma más precisa posible, la señal inicial. el substrato matemático de dicha Teoría lo constituyen los procesos estocásticos y, en particular, la noción de espectro de un proceso.

En este articulo se va a proceder al estudio matemático de los filtros óptimos para estimación de señales en presencia de ruido. Para ello se utilizarán los razonamientos teóricos desarrollados en trabajos previos (5).

## ANALISIS ESPECTRAL DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS

La noción matemática de espectro de un proceso está íntimamente ligada al concepto físico de filtro lineal invariante en el tiempo, por lo que es conveniente precisar esta definición. Un filtro es un dispositivo que transforma una entrada x(t) en una salida y(t) según un mecanismo adecuado.

1.- Dpto. de Matemáticas. Facultad de Farmacia. Granada.
2.- Dpto. de Fisicoquímica Farmacéutica y Técnicas Instrumentales. Facultad de Farmacia. Granada.


Se dice que el filtro es lineal si una función de entrada

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \; a_1, a_2 \; \varepsilon \mathcal{K}$$

tiene como respuesta o función de salida

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t), \; a_1, a_2 \; \varepsilon \mathcal{K}$$

siendo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ las respuestas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ respectivamente.

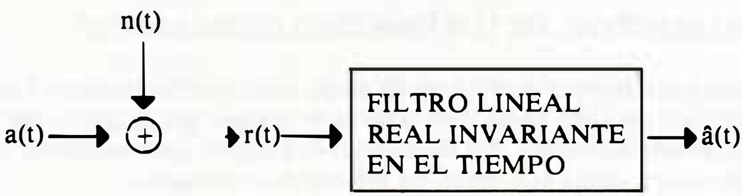
Un filtro con entrada x(t) y salida y(t) es invariante en el tiempo si para cualquier traslación real $\tau$ del tiempo, a una entrada $x(t + \tau)$ le corresponde una salida $y(t + \tau)$.

Existen diversas formas de representar analíticamente un filtro lineal real invariante en el tiempo. Una de las más usuales consiste en el empleo de operadores integrales de la forma (3):

$$y(t) = \int_O^T h(t,s)x(s)ds$$

donde h(t,s) se denomina función impulso de respuesta, y representa el valor de la salida en el instante t correspondiente a un impulso unitario de entrada en el instante s. Evidentemente, para que el sistema sea físicamente realizable, ha de ser $h(t,s) = 0$ para $t<s$, ya que la salida no puede preceder a la entrada.

Una aplicación importante de los sistemas lineales y reales, invariantes en el tiempo, consiste en estimar un mensaje que llega al sistema, perturbado por un ruido interferidor. El esquema sería el siguiente:



donde

— $a(t)$ es un mensaje (proceso de segundo orden, centrado y continuo en m.c.) con función de covarianza $R_a(t,s)$

— $n(t)$ es un ruido (proceso de segundo orden y centrado) con función de covarianza $R_n(t,s)$, e incorrelado con $a(t)$

— $r(t) = a(t) + n(t)$ es el proceso observado para $O \leqslant t \leqslant T$, que llega al filtro

— $\hat{a}(t)$ es la estimación de $a(t)$ obtenida tras filtrar $r(t)$, y puede representarse, según lo anteriormente indicado, de la forma

$$\hat{a}(t) = \int_O^T h(t,s)r(s)ds$$

A continuación vamos a estudiar la forma en que puede construirse matemáticamente un filtro de este tipo, que sea óptimo en el sentido de que la estimación $\hat{a}(t)$ del mensaje $a(t)$ sea lo más fiel posible a él, es decir la estimación puntual del error en m.c.

$$\mathcal{E}_p(t) = E[(a(t) - \hat{a}(t))^2] = E\left[\left(a(t) - \int_O^T h(t,s)r(s)ds\right)^2\right]$$

sea mínima.

## CONSTRUCCION DEL FILTRO LINEAL INVARIANTE OPTIMO

El problema de construir el filtro óptimo, es decir, obtener la función impulso de respuesta $h_o(t,s)$ que minimice $\mathcal{E}_p(t)$, está resuelto por Van Trees (6) para un ruido perturbador cualquiera. En efecto, se demuestra, que una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{E}_p(t)$ sea mínimo es que se verifique

$$R_a(t,s) = \int_O^T h_o(t,v)R_r(s,v)dv, \quad t \in [0,T], \; s \in ]0,7[ \quad (I)$$

Observemos que $h_o(t,0)$ y $h_o(t,T)$ están definidos por continuidad de la forma

$$h_o(t,O) = \lim_{s \to 0^+} h(t,s) \; ; \; h_o(t,T) = \lim_{s \to T^-} h(t,s)$$

Para deducir la expresión de la estimación puntual del error en m.c. $\mathcal{E}_{po}(t)$ correspondiente al filtro óptimo, bastará tener en cuenta que $a(t)$ y $n(t)$ son procesos incorrelados, y por tanto es $E[a(t)r(s)] = [a(t)(a(s) + n(s))] = E[a(t)a(s)] + E[a(t)n(s)]$

$$= R_a(t,s)$$

De tal forma se obtiene

$$\varepsilon_{po}(t) = \int_0^T E[(a(t) - h_o(t,s)r(s)ds)(a(s) - \int_0^T h_o(t,v)r(v)dv)] =$$

$$= R_a(t,s) - 2\int_0^T h_o(t,s)R_a(t,s)ds + \int_0^T\int_0^T h_o(t,s)h_o(t,v)R_r(s,v)dsdv$$

$$= R_a(t,s) - \int_0^T h_o(t,s)R_a(t,s)ds - \int_0^T h_o(t,s)[R_a(t,s) -$$

$$\varepsilon - \int_0^T h_o(t,v)R_r(s,v)dv \quad ds$$

Pero al tratarse de un filtro óptimo se verifica (I), y así

$$\varepsilon_{po}(t) = R_a(t,s) - \int_0^T h_o(t,s)R_a(t,s)ds$$

Observemos, no obstante, que la condición (I) caracteriza la función impulso de respuesta $h_o(t,s)$ del filtro óptimo, pero de forma implícita, es decir, de manera que no puede escribirse explícitamente su expresión.

En el caso concreto de que el ruido perturbador sea blanco, la función impulso de respuesta $h_o(t,s)$ sí puede escribirse explícitamente en términos de las soluciones de una ecuación integral no homo génea de Fredholm, de segunda especie, cuyo núcleo sea la covarianza $R_a(t,s)$ del proceso $a(t)$, como a continuación vamos a probar.

*Teorema.*- Sea un sistema lineal real, invariante en el tiempo, y con salida $\hat{a}(t)$ correspondiente a una entrada $r(t) = a(t) + n(t)$, siendo $a(t)$ y $n(t)$ dos procesos de segundo orden, centrados, representativos de un mensaje y un ruido blanco repectivamente. Entonces, la función impulso de respuesta para que el sistema sea óptimo viene dada por

$$h_o(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda} \varphi(t)\varphi_n(s) \quad \text{(II)}$$

donde $\lambda_n$ y $\varphi_n(t)$, $n \in N$, son las soluciones de la ecuación integral

$$\int_0^T R_a(t,s)\varphi(s)ds = \lambda\varphi(t) \quad \text{(III)}$$

cuyo núcleo es la función de covarianza del proceso $\{a/t)/t \in [0,T]\}$, y siendo $R_n(t,s) = S_o\delta(t-s)$ la covarianza del ruido blanco.

*Demostración.*- Observemos que bajo tales hipótesis es

$$¿r_r(t,s) = S_o\delta(t-s) + R_a(t,s)$$

por lo que la relación (I) puede expresarse de la forma

$$R_a(t,s) = S_o h_o(t,s) + \int_0^T h_o(t,v)R_a(s,v)dv, \quad t \in [O,T], \ s \in ]0,T[$$

Asimimso, si $\lambda_n$ y $\varphi_n(t)$, $n \in N$, son las soluciones de la ecuación (III), podremos escribir, en virtud del teorema de Mercer (6):

$$R_a(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t)\varphi_n(s)$$

Análogamente, teniendo en cuenta que cualquier sistema ortogonal completo de funciones sirve para descomponer el ruido blanco (5), podemos expresar:

$$R_n(t,s) = S_o \delta(t-s) = S_o \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\varphi_n(s)$$

Por tanto

$$R_r(t,s) = R_a(t,s) + R_n(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + S_o)\varphi_n(t)\varphi_n(s)$$

Por otra parte, si ensayamos en la expresión (I) una función impulso de respuesta de la forma

$$h_o(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n(t)\varphi_n(s) \ , \ h_n \in \mathcal{R} \quad \text{(IV)}$$

se obtiene, sin más que operar, lo siguiente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t)\varphi_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\lambda_n + S_o) \int_0^T \varphi_n(t)\varphi_n(v)\varphi_n(s)\varphi_n(v)dv$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\lambda_n + S_o)\varphi_n(t)\varphi_n(s)$$

con lo cual

$$\lambda_n = h_n(\lambda_n + S_o)$$

y así, desepejando $h_n$ y sustituyendo en (IV) se obtiene la expresión (II), y se concluye.

Construcción de un Filtro Subóptimo.

La expresión del impulso de respuesta óptimo para el rudio blanco esde gran utililidad teórica y práctica en diversos problemas de estimación y filtrado. Sin embargo, a efectos de cómputo, para que el el algoritmo sea sencillo, el número de términos de dicho desarrollo ha de ser finito.

Fortmann y Anderson (2) han desarrollado un procedimiento aproximado para la obtención de $h_o(t,s)$, consistente en obtener un desarrollo finito que converja hacia $h_o(t,s)$ cuando el número de términos crece indefinidamente. Para ello se considera la descomposición general del proceso $\{a(t)/t \in [0,T]\}$ (5)

$$\left\{ a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \int_0^T \varphi_n(t)a(t)dt \right.$$

siendo la convergencia de la serie, uniforme y en m.c., y se denomina $a_N(t)$ a dicho desarrrollo truncado en el N-simo término, es decir

$$a_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \varphi_n(t) \int_0^T \varphi_n(t)a(t)dt$$

Su función de covarianza se nota $R_N(t,s)$ y viene dada por

$$R_N(t,s) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n(t)\varphi_n(s)$$

Definiendo, entonces, $a_N(t)$ mediante un sistema lineal N-dimensional en tiempo variable, y utilizando la terория del filtrado de Kalman-Bucy (7) se obtiene que el filtro lineal real invariante en el tiempo, que es óptimo para $a_N(t)$, tiene por función impulso de respuesta

$$h_N(t,s) = \frac{1}{S_0} \phi_N^T(t) \left( \Lambda_N^{-1} + \frac{1}{S_0} \int_0^T \phi_N(s)\, \phi_N^T(s) ds \right)^{-1} \phi_N(s)$$

siendo $\phi_N(t) \equiv \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ ; $\Lambda_N \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

y así, el estimador óptimo realizable viene explícitamente dado por

$$\hat{a}_N(t) = \int_0^T h_N(t,s) r_N(s) ds$$

siendo

$$r_N(t) = a_N(t) + n(t)$$

*Teorema de aproximación.*- Bajo las hipótesis anteriores, $h_N(t,\cdot)$ converge uniformemente a $h_o(t,\cdot)$ cuando N tiende a infinito.

*Demostración.*- Sabemos que

$$R_a(t,s) = S_o h_o(t,s) + \int h_o(t,v) R_a(s,v) dv$$

$$R_N(t,s) = S_o h_N(t,s) + \int h_N(t,v) R_N(s,v) dv$$

Así, notando a la norma de la convergencia uniforme en el espacio de funciones cuadrado-integrales $L^2[0,T]$ (1), tenemos

$$\| h_o(t,\cdot) - h_N(t,\cdot) \| \leq \frac{1}{S_o} \| R_a(t,\cdot) \| \left(1 + \frac{1}{S_o} \| R_N(t,\cdot) \| \right)$$

$$\leq \frac{1}{S_0} \alpha_N \left( 1 + \frac{1}{S_0} \beta_N \right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \quad , \; t \in [0,T]$$

siendo

$$\alpha_N = \max_{t \in [0,T]} \| R(t,\cdot) - R_N(t,\cdot) \| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

$$\beta_N = \max_{t \in [0,T]} \| R_N(t,\cdot) \| \leq \max_{t \in [0,T]} \| R(t,\cdot) \|$$

y se concluye.

## Conclusiones

Tras introducir el concepto matemático de filtro lineal real, invariante en el tiempo, pasamos a construir el filtro óptimo para estimación de mensajes en presencia de ruido.

El filtro queda completamente caracterizado por su función impulso de respuesta, que expresa el valor de la salida correspondiente a un impulso unitario de entrada producido en un instante anterior.

Para un ruido interferidor cualquiera, la expresión de la función impulso de respuesta viene dada, de forma implícita, mediante la relación (I). En el caso de ruido blanco, es posible aislar el impulso de respuesta, obteniéndose en forma explícita mediante la relación (II).

Finalmente, con objeto de obtener un algoritmo físicamente realizable, se construye un filtro subóptimo con impulso de respuesta dado por (V), que aproxima uniformemente al filtro óptimo. Evidentemente, el error en m.c. cometido al estimar la señal mediante el filtro subóptimo es mayor que el cometido al utilizar el filtro óptimo; sin embargo, el cómputo se simplificaba notablemente.

## BIBLIOGRAFIA

1. CHOQUET, G.- Topología. Ed. TORAY-MASSON, Barcelona (1971).
2. FORTMANN, T.E. & ANDERSON, B.D.O.- On the approximation of optimal realizable linear filters using a Karhunen-Loève expansion.
I.E.E.E. Transactions on Information Theory, Vol. IT-19,4, 561-564.
3. PARZEN, E.- Procesos estocástiscos. Ed. Paraninfo, Madrid (1975).
4. RIESZ, F. & NAGY, B.S.- Leçons d'analyse fonctionnelle. Ed. Gauthier-Villars, París (1968).
5. VALDERRAMA, M.J., TALAVERA, E.M. Y ALVAREZ, J.M.- Aspectos operativos del movimiento browniano y del proceso de rudio blanco. Ars Pharmaceutica (en prensa).
6. VAN TREES, H.L.- Detection, Estimation and Modulation Theory. Part I. Ed. John Wiley and Sons, New York (1968).
7. WONG, E. & HAJEK, B.- Stochastic Processes in Engineering Systems. Springer-Verlag, New York (1985).