DEPARTAMENTOS DE MATEMATICAS Y FISICO-QUIMICA

ASPECTOS OPERATIVOS DEL MOVIMIENTO BROWNIANO Y DEL PROCESO DE RUIDO BLANCO

M.J. Valderrama Bonnet[1], E.M. Talavera Rodríguez[2], J.M. Alvarez Pez[2]

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objeto describir la forma en que puede descomponerse un proceso estocástico como suma numerable de componentes ortogonales, y aplicar dicho desarrollo a los procesos de movimiento browniano y de ruido blanco.

SUMMARY

The aim of the present paper is the description of the way in which a stochastic process can be decomposed as a countable sum of orthogonal terms, and the application of such expansion to the brownian movement and to the white noise.

INTRODUCCION

Los fenómenos que se presentan en la naturaleza pueden ser deterministas o aleatorios. Los primeros son aquellos en los que, a priori, se conoce la forma en que van a evolucionar, mientras que en los segundos, hasta que no sean desarrollados completamente no se conoce su descripción precisa.

El objeto de la Teoría de Probabilidades es el estudio de fenómenos aleatorios, en el sentido de crear un modelo matemático general al que se adapten todos los fenómenos de un mismo tipo, y, mediante el cual, a cada uno de ellos se les pueda asignar, en cada circunstancia, un número real comprendido entre cero y uno que exprese la verosimilitud del suceso en cuestión, bajo las circunstancias dadas; dicho número se denomina probabilidad.

---

[1] Departamento de Matemáticas. Facultad de Farmacia. Granada

[2] Departamento de Fisicoquímica Farmacéutica y Técnicas Instrumentales. Facultad de Farmacia. Granada.

La Teoría de Probabilidades puede abordarse desde dos concepciones diferentes, pero complementarias: la estática y la dinámica. La concepción estática se centra en el estudio de situaciones aleatorias que se presentan en un instante determinado, mientras que la dinámica estudia aquellos fenómenos que evolucionan en un cierto intervalo de tiempo, sujetos a leyes probabilísticas. El modelo matemático básico de los fenómenos estáticos es la "variable aleatoria", y el de los dinámicos, el "proceso estocástico", del cual nos vamos a ocupar a lo largo de este artículo.

Mediante procesos estocásticos se pueden describir de forma matemática numerosas situaciones que se presentan en la Naturaleza, tales como el recorrido de una partícula en movimiento browniano, el crecimiento de una población, el número de unidades de un fármaco que son demandadas, la extinción de apellidos familiares, la distribución espacial de comunidades de plantas y animales, los distintos tipos de ruido físico, etc.. (1) (3) (4) (9).

En ocasiones, para poder evaluar de forma simplificada un proceso estocástico, interesa descomponerlo en un conjunto finito, o al menos numerable, de componentes ortogonales. De forma especial, cuando el proceso es el modelo teórico de un fenómeno físico, como puede ser el ruido, las componentes ortogonales pueden aislarse experimentalmente mediante el empleo de filtros adecuados.

Existen diversas formas de llevar a cabo la descomposición matemática de un proceso como suma de términos ortogonales. Así se tienen los desarrollos de Taylor para funciones aleatorias (2), que bajo ciertas hipótesis son ortogonales (11); el desarrollo de Fourier para procesos periódicos (8); y el desarrollo general de Karhunen-Loève (7), que es una extensión del de Fourier para procesos no periódicos (5).

En el presente trabajo, tras definir formalmente los conceptos de variable aleatoria y proceso estocástico, y analizar sus carecterísticas fundamentales, se introduce el cálculo de segundo orden y se describe la descomposición general de un proceso de segundo orden. Así mismo, se deduce la descomposición de dos procesos que sirven de modelo para numerosos fenómenos físicos y químicos, a saber: el movimiento browniano y el ruido blanco.

VARIABLES ALEATORIAS Y PROCESOS ESTOCASTICOS

Variables aleatorias

Se puede definir una variable aleatoria real como una función real X definida sobre un espacio probabilístico, tal que a todo suceso le asocia un número o un intervalo de números reales de manera que la probabilidad de dicho suceso vendrá dada por la probabilidad de que la variable aleatoria tome el correspondiente valor o intervalo de valores. En caso de asociarle un número real se dice que la variable es discreta, y en caso de asociarle un intervalo real se dice que es continua. Para variables aleatorias discretas se define la función de probabilidad P_X como aquella que asocia a cada valor de la variable X la probabilidad con que lo toma. Este concepto es sustituído por el de función de densidad f_X para variables aleatorias continuas.

Una de las características fundamentales de la variable aleatoria es su esperanza o media, que se define respectivamente para los casos discreto y continuo de la forma:

$$E[X]=\sum_{X} x p_X(x) \quad ; \quad E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$

Asímismo, la varianza de X se define, en general, de la forma:

$$Var[X] = E\left[(X-E[X])^2\right] = E[X^2]-(E[X])^2$$

siendo E [.] el operador esperanza

Una variable X se dice que es centrada si es nula su esperanza, es decir E[X]=0. Y se dice que es de segundo orden si la esperanza de su cuadrado es finita, es decir $E[X^2]<\infty$.

Procesos estocásticos

Un proceso estocástico es una familia uniparamétrica de variables aleatorias con el mismo dominio $[X(t) / t \in I]$ clasificada mediante un parámetro t que varía en un conjunto índice I que puede ser numerable o no. Según que las variables que conforman el proceso sean discretas o continuas, el proceso también lo será.

En el presente trabajo se va a considerar exclusivamente procesos reales y continuos, con conjunto índice I un intervalo real, es decir $[X(t) / t \in [a,b]]$.

Además de las características específicas de las variables aleatorias, se define la función de covarianza de un proceso estocástico como:

$$R(t,s) = E\left[\left(X(t) - E[X(t)]\right)\cdot\left(X(s) - E[X(s)]\right)\right]$$

Un proceso se dice, respectivamente, que es centrado o de segundo orden cuando lo son, respectivamente, todas las variables que lo componen.

Se dice que un proceso es débilmente estacionario, o estacionario de covarianza, si su función de covarianza depende únicamente de la diferencia de sus argumentos, es decir:

$$R(t, s) = R(t-s) = R(\tau), \qquad \text{siendo } \tau = t-s$$

En tal caso, se define la función espectral de densidad como la transformada de Fourier de la función de covarianza:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}\,d\tau$$

Claramente, la transformada inversa de Fourier de dicha función será la covarianza del proceso:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)\, e^{i2\pi\nu\tau}\, d\nu$$

Ambas funciones se emplearán indistintamente como característica de un proceso estacionario de covarianza.

CALCULO EN MEDIA CUADRATICA Y DESCOMPOSICION ORTOGONAL DE UN PROCESO.

Se dice que dos variables aleatorias X e Y son iguales en media cuadrática (m.c.) si $E[(X-Y)^2] = 0$.

Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ converge en m.c. hacia una variable X si $\lim_{n\to\infty} E\left[(X_n - X)^2\right] = 0$

Asímismo, se dice que un proceso de segundo orden $[X(t) / t \in [a,b]]$ es continuo en m.c. si $\lim_{h\to 0} E\left[\left(X(t+h)-X(t)\right)^2\right] = 0, \quad \forall t\in[a,b]$

Tras estas definiciones sobre operatividad en m.c. pasemos a enunciar el teorema fundamental sobre descomposición de un proceso estocástico en términos de componentes ortogonales. Dicho resultado se basa en el teorema de Karhunen (6) y se enuncia de la forma siguiente:

Teorema general de descomposición: Sea $[X(t) / t \in [a,b]]$ un proceso real, de segundo orden, ce
togonal de la forma:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \int_a^b \varphi_n(t)\, X(t)\, dt \qquad \text{(I)}$$

donde dicha serie converge en m.c. y uniformemente hacia el proceso, y la integral que figura en la sumatoria es una integral en m.c. (14). Las $\varphi_n(t)$ constituyen un sistema ortogonal de funciones propias o solución de la ecuación integral no homogénea de Fredholm de segunda especie:

$$\int_a^b R(t,s)\,\varphi(s)\,ds = \lambda\,\varphi(t), \qquad \lambda \in \mathcal{R} \qquad \text{(II)}$$

cuyo núcleo es la covarianza del proceso $R(t,s) = E[X(t)\,X(s)]$

De tal forma, una vez calculadas las funciones propias $\varphi_n(t)$, el desarrollo ortogonal del proceso quedará establecido.

MOVIMIENTO BROWNIANO

Como es bien sabido, una partícula diminuta sumergida en un fluído se mueve incesantemente y de forma irregular debido al bombardeo continuo de las moléculas del medio que la rodea. Dicho movimiento se denomina browniano en honor a su descubridor, el botánico inglés Robert Brown, quien en 1827 pudo observarlo utilizando un microscopio con objetivo acormático (10).

El esquema del movimiento browniano es aplicable a numerosos fenómenos físicos. Su modelo matemático teórico es el denominado proceso de Wiener (12) (13), que se define como un proceso real $\left\{W(t)/t\in[0,T]\right\}$ de segundo orden, centrado, continuo en m.c., cuyas componentes son variables Gaussianas independientes tales que W(O) =0, y cuya función de covarianza viene dada por:

$$R(t,s) = \sigma^2 \cdot \text{mínimo}\left\{t,s\right\} = \begin{cases} \sigma^2 s, & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ \sigma^2 t, & \text{si } t \leq s \leq T \end{cases}$$

El parámetro σ^2 es una característica empírica del proceso, que se tiene que determinar experimentalmente a partir de observaciones.

En el caso en que el proceso de Wiener se considere como un modelo del movimiento browniano, σ^2 representará el desplazamiento cuadrático medio de la partícula por unidad de tiempo. Así, en 1905 Einstein demostró que $\sigma^2 = \frac{4RA}{Np}$, donde R es la constante universal de los gases, a la temperatura absoluta, N el número de Avogadro, y p el coeficiente de rozamiento del medio que rodea la partícula.

La relación descubierta por Einstein hizo posible la determinación del número de Avogadro a partir de experimentos sobre el movimiento browniano. Este hecho le valió a Perrin el Premio Nobel en 1926.

Según la definición dada, el proceso de Wiener cumple las hipótesis del teorema general de descomposición. De tal forma, si consideramos el caso particular en que $\sigma^2=1$ (el desarrollo se realizaría de manera completamente análoga para cualquier otro valor de σ^2), y se resuelve la ecuación integral (II) asociada al proceso, que en el caso concreto que estamos considerando será:

$$\lambda\,\varphi(t) = \int_0^T \min\left\{t,s\right\}\varphi(s)\,ds = \int_0^t s\,\varphi(s)\,ds + t\int_t^T \varphi(s)\,ds$$

se obtiene como solución la siguiente familia de sinusoides (14):

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\ \text{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\frac{t}{T}\right], \qquad n \in \mathcal{N}$$

con lo cual, la descomposición (I) queda establecida de la forma:

$$W(t) = \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right]\int_0^T \operatorname{sen}\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right] W(t)\,dt$$

EL RUIDO BLANCO

Por analogía a la distribución continua de energía en la luz blanca procedente de un cuerpo incandescente, se llama ruido blanco a un proceso estacionario de covarianza que tiene igual potencia en todos los intervalos de frecuencia sobre un amplio margen de frecuencia, es decir, su función espectral de densidad es constante:

$$S(\nu) = S_0 \,, \qquad \forall \nu \in \mathcal{R}$$

y su función de covarianza viene dada por:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 e^{i2\pi\nu\tau}\, d\nu = S_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\nu\tau}\, d\nu = S_0\,\delta(\tau)$$

siendo δ (T) = δ (t-s) la función salto de Dirac (que como es sabido, es no nula para un único valor del parámetro T = t-s).

Como puede observarse, un ruido blanco no es un proceso físico, sino tan solo una ficción matemática ya que su covarianza no es cuadrado integrable por ser la función salto de Dirac. Sin embargo, su estudio es de gran importancia ya que muchos fenómenos físicos se aproximan bien por él, especialmente los distintos procesos de ruidos, entendiendo como tal, cualquier efecto disturbador del registro de una señal (ruido de agitación térmica, ruido de granalla etc...).

Una forma de obtener matemáticamente el ruido blanco consiste en derivar el proceso de Wiener (8). Basándonos en esta caracterización podemos establecer como descomposición general del proceso de ruido blanco la siguiente:

$$W'(t) = \frac{2\pi}{T^2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+\tfrac{1}{2})\cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right]\int_0^T \operatorname{sen}\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right] W(t)\,dt$$

donde la serie converge en m.c. y uniformemente hacia el ruido blanco.

Observemos, no obstante, que esta descomposición ortogonal no es única, ya que su ecuación integral asociada (II) es:

$$S_0\int_0^T \delta(t-s)\,\varphi(s)\,ds = \lambda\varphi(t)$$

la cual se satisface para cualquier función φ (t) asociada al valor propio $\lambda = S_0$.

Por consiguiente, cualquier sistema ortogonal completo de funciones puede utilizarse para llevar a cabo la descomposición del ruido blanco.

CONCLUSIONES

Aplicando el teorema general de descomposición, un proceso estocástico puede desarrollarse como suma finita o infinita numerable de componentes ortogonales. En el caso del proceso de Wiener, modelo matemático del movimiento browniano y de otros muchos procesos, tal descomposición queda unívocamente determinada. Sin embargo, en el caso de ruido blanco, pese a obtenerse mediante simple derivación del proceso de Wiener, se pierde la unicidad de dicha descomposición, ya que su covarianza no es una función de cuadrado integrable.

Ello demuestra que, en general, un proceso derivado de otro que sea de segundo orden, centrado y continuo en m.c., puede admitir más de una descomposición como una suma numerable de términos ortogonales.

En cualquier caso, la descomposición ortogonal, única o no, quedará establecida en cuanto que sea resuelta la ecuación integral (II) asociada al proceso.

BIBLIOGRAFIA

1. BARTLETT, M.S. – Stochastic Population Models in Ecology and Epidemiology. Ed. Methuen, London (1960).
2. BARTLETT, M.S. – An introduction to Stochastic Processes with special reference to methods and applications. Ed. Cambridge University Press, London (1966).
3. BHARUCHA-REID, A.T. – Elements of the Theory of Markov Processes and their applications. Ed. McGraw-Hill, New York (1960).
4. EINSTEIN, A. – Investigations of the Theory of the Brownian movement. Ed. Dover, New York (1956).
5. GUTIERREZ-JAIMEZ, R. y VALDERRAMA-BONNET, M.J. – Generalización del desarrollo de Fourier de un proceso estocástico periódico, y su aplicación a la resolución de ciertas ecuaciones integrales. Libro de actas del VII C.E.D.Y.A.. 215-220 (1985).
6. KARHUNEN, K. – Métodos lineales en el Cálculo de Probabilidades. Trabajos de Estadística, Vol. III, 59-137 (1952). Traducido del artículo "Uber Lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung". (1947).
7. LOEVE, M. – Teoría de la Probabilidad. Ed. Tecnos. Madrid (1976).
8. PAPOULIS, A. – Probabilidad, Variables Aleatorias y Procesos Estocásticos. Ed. EUNIBAR, Barcelona (1980).
9. PARZEN, E. – Procesos Estocásticos. Ed. Paraninfo, Madrid (1972).
10. PERRIN, J. – Atoms. Ed. Constable, London (1916).
11. VALDERRAMA-BONNET, M.J. – Desarrollo ortogonal de un proceso de segundo orden en términos de sus derivadas sucesivas en m.c.. Cuadernos de Estadística Matemática, Serie A (Probabilidad), 7, 47-55 (1984).
12. WIENER, N. – Differential space. J. Math Phys. Mass. Inst. Tech., Vol. 2. 131-174 (1923).
13. WIENER, N. – Generalized harmonic analysis. Acta Math. Vol 55, 117, (1930).
14. WONG, E. and HAJEK, B. – Stochastic Processes in Engineering Systems. Ed. Springer, New York (1985).