UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA SOBRE LAS DEMOSTRACIONES EN PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL

Christian Roberto Alfaro Carvajal

Granada, 2020

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA SOBRE LAS DEMOSTRACIONES EN PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Doctor Pablo Flores Martínez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y de la Doctora Gabriela Valverde Soto de la Escuela de Formación Docente de la Universidad de Costa Rica que presenta Christian Roberto Alfaro Carvajal para optar al grado de Doctor en Educación en la línea de Educación Matemática.

Fdo.: Christian Roberto Alfaro Carvajal

V°B° de los Directores

Fdo.: Pablo Flores Martínez

Fdo.: Gabriela Valverde Soto

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Christian Alfaro carvajal
ISBN: 978-84-1117-829-7
URI: https://hdl.handle.net/10481/81485

El trabajo que se presenta en este documento tiene como propósito cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctor dentro del Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación, impartido en la Escuela Internacional de Posgrado de la Universidad de Granada, en la línea de Educación Matemática coordinada por el Departamento de Didáctica de la Matemática.

Este trabajo se enmarca dentro del Proyecto «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Además, se tuvo el apoyo del proyecto PCG2018-095765-B-100 del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

The research was carried out with the support of the research project ‘Professional Competence of teachers in initial training and STEM Education’ (PGC2018-095765-B-100)) of the National R+D+I Plan, and of the Research Group FQM-193: Didactics of Mathematics, Numerical Thought, of the Andalusian Plan for Research, Development and Innovation (PAIDI).

COMPROMISO DE RESPETO DE LOS DERECHOS DE AUTOR

El doctorando Christian Roberto Alfaro Carvajal y los directores de la tesis, Doctor Pablo Flores Martínez y Doctora Gabriela Valverde Soto.

Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la relación del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han usado sus resultados o publicaciones.

Granada, a 10 de marzo de 2020

Doctorando: Christian Roberto Alfaro Carvajal

Directores de la tesis

Fdo.: Pablo Flores Martínez

Fdo.: Gabriela Valverde Soto

AGRADECIMIENTOS

Deseo manifestar mi profundo agradecimiento a mis directores de tesis Pablo Flores Martínez y Gabriela Valverde Soto por sus sugerencias y comentarios positivos para realizar esta investigación y por todo el aprendizaje logrado en este proceso.

A los miembros del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada por su valiosa colaboración para el desarrollo de esta investigación.

A la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica en donde soy docente, por brindarme los espacios y colaboraciones necesarias para realizar esta investigación. Asimismo, a los profesores de matemáticas en formación inicial de esta Escuela por su disposición a participar como sujetos de investigación.

A mi esposa Yosenith González Flores por todo su apoyo, paciencia y palabras de aliento para seguir adelante.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE TABLAS

PRESENTACIÓN

En esta memoria de tesis doctoral presentamos los principales elementos de una investigación centrada en el conocimiento especializado de la práctica matemática de la demostración de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial de la carrera de *Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica*. El trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación de formación de profesores de matemáticas, que forma parte del grupo de investigación FQM 193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España.

La investigación se ubica en el paradigma interpretativo en el que existe una preocupación por comprender las interpretaciones del individuo (Cohen, Manion y Morrison, 2007; Sandín, 2003), en nuestro caso se pretende caracterizar el conocimiento especializado de los sujetos de investigación sobre la demostración. Asimismo, tiene un enfoque cualitativo debido a que interesa la interpretación de los significados que los sujetos atribuyen a sus acciones, se estudian los hechos como un todo, de manera global e integrada y no se generalizan los resultados de la investigación (Bryman, 2012; Rodríguez, 2003). Las perspectivas teóricas empleadas en el estudio corresponden al análisis conceptual (Rico, 2001) en el marco del análisis didáctico y el modelo de conocimiento *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* (Carrillo et al., 2018).

El estudio del conocimiento especializado sobre la demostración tiene muchos componentes. Este trabajo se enfoca principalmente en el conocimiento matemático, concretamente sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos de la demostración. Además, se consideran las características de los argumentos matemáticos que más convencen a los sujetos de investigación por la importancia que puedan tener en el desempeño profesional del profesor de matemáticas al abordar la enseñanza de la demostración. Puesto que la demostración es compleja y puede tener múltiples significados, hemos considerado pertinente realizar un análisis conceptual de este término para profundizar en este concepto.

De esta manera, el problema planteado en esta investigación está orientado a determinar cuál es el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la práctica matemática de la demostración. El trabajo consta de cuatro fases, una teórica (*Fase 0*) y tres empíricas (*Fases 1, 2 y 3*) que se describen a continuación.

La *Fase 0. Análisis conceptual de la demostración matemática* consiste en un estudio teórico sobre la demostración matemática. Los sujetos de investigación fueron documentales como diccionarios, libros de texto, investigaciones previas y el Programa de Estudios de Matemáticas de la educación secundaria en Costa Rica. Para la recolección de la información se empleó la revisión bibliográfica o de literatura (Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista, 2014). El análisis de la información se realizó mediante el análisis conceptual (Rico, 2001) considerando cuatro elementos fundamentales: los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas, el concepto de demostración, los tipos de demostraciones y las funciones atribuidas.

La *Fase 1. Validez lógica,* es un estudio empírico sobre el conocimiento de los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. Los sujetos de investigación fueron 25 profesores de matemáticas en formación inicial en la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Para la recolección de la información se aplicaron dos cuestionarios en los meses de setiembre y octubre del 2018. El cuestionario 1 trata a cerca de las formas de proceder en la demostración de una proposición genérica, es decir, desprovista de contenido matemático y el cuestionario 2, está orientado a la evaluación de argumentos matemáticos.

La *Fase 2. Validez matemática* y la *Fase 3. Convicción de un argumento matemático* son estudios empíricos sobre el conocimiento de los aspectos matemáticos de la demostración y sobre las características de los argumentos más convincentes para los sujetos de investigación, respectivamente. Los sujetos participantes en ambas fases fueron 19 profesores de matemáticas en formación inicial en la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Para la recolección de la información de la fase 2 se aplicó el cuestionario 3, sobre la evaluación de argumentos en función de los aspectos matemáticos tales como las hipótesis de la afirmación a demostrar y, los axiomas, definiciones y teoremas de la teoría matemática en donde están insertos la proposición y el argumento. Para la fase 3, se aplicó el cuestionario 4 en el que se presentan argumentos matemáticos para demostrar la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, el objetivo era determinar las características de los argumentos que los sujetos de investigación encontraron como más convincentes. Ambos cuestionarios se administraron en los meses de mayo y junio del 2019.

Para el análisis de la información de los cuatro cuestionarios se empleó el análisis de contenido, esta es una técnica científica de investigación para hacer inferencias replicables y válidas de textos (u otra materia significativa) a los contextos de su uso (Cohen, Manion, y Morrison, 2007; Krippendorff, 2004). En el caso de los cuestionarios 1, 2 y 3 se plantearon categorías de análisis e indicadores de conocimiento empleando los elementos teóricos sobre la demostración. Para el cuestionario 4, inicialmente se consideraron seis categorías y sus respectivas definiciones sobre la convicción de un argumento matemático consideradas en el marco teórico. Posteriormente, con el análisis de las respuestas de los sujetos fue necesario redefinir algunas categorías, eliminar otras y crear nuevas que se adaptaran a lo manifestado por los sujetos de investigación.

A continuación, se presenta un esquema para ilustrar las fases de la investigación y el capítulo con el correspondiente apartado en donde se encuentran los resultados de cada una de ellas.

Fase 0	*Análisis conceptual de la demostración matemática* →	Capítulo 4 Apartado 4.1
Fase 1	*Validez Lógica* →	Capítulo 4 Apartado 4.2
Fase 2	*Validez Matemática* →	Capítulo 4 Apartado 4.3
Fase 3	*Convicción de un argumento matemático* →	Capítulo 4 Apartado 4.4

Figura 0. Fases de la investigación

ORGANIZACIÓN DE LA MEMORIA

Este documento consta de cinco capítulos, seguido del listado de las referencias bibliográficas y los anexos. A continuación, se hace una breve descripción del contendido de cada capítulo.

Capítulo 1. Planteamiento de la investigación. Este capítulo consta de tres apartados. En el primero, se discute el interés por estudiar el conocimiento sobre la práctica matemática de la demostración, el papel de esta en las Matemáticas, en la matemática escolar, en el currículo matemático de la educación secundaria en Costa Rica y en la formación inicial de los profesores de matemáticas; se presenta también una serie de investigaciones que han permitido establecer los elementos que consideramos para estudiar el conocimiento sobre la demostración, específicamente, sobre la validez lógico-matemática de la demostración y sobre la convicción de un argumento matemático. En el segundo, se presenta el problema de investigación y la pertinencia del trabajo. En el tercero se formula el objetivo general y los cuatro objetivos específicos que guían esta investigación.

Capítulo 2. Marco teórico. Este capítulo consta de tres apartados. En el primero, se define el análisis conceptual y sus características. En el segundo apartado, se discute la relevancia de estudiar el conocimiento matemático sobre la demostración y la elección del modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* para sustentar teóricamente dicho estudio, debido a que en el subdominio de *la práctica matemática* se considera a la demostración como una de sus categorías. Se presenta además una breve descripción de los dominios y subdominios de dicho modelo de conocimiento. En el tercero, se hace un desarrollo más extenso del subdominio de *la práctica matemática* en el modelo *MTSK* y proponemos componentes y subcomponentes para estudiar el conocimiento de la demostración en profesores de matemáticas. Además, se presentan con mayor detalle los elementos empleados en las fases empíricas 1, 2 y 3 tales como los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos de la demostración y, las características de los argumentos matemáticos que pueden ser convincentes para los futuros profesores de matemáticas.

Capítulo 3. Marco metodológico. Este capítulo consta de cuatro apartados. En el primero, se presentan los principales elementos de la investigación tales como su adscripción al paradigma interpretativo y al enfoque cualitativo, las fases que la componen, una breve referencia a los elementos considerados en la construcción de los instrumentos de recolección de la información, así como a la técnica del análisis de contenido empleada en el análisis de la información. En el segundo apartado, se hace una descripción de los sujetos de investigación que participaron en cada una de las fases del trabajo. En el tercer apartado, se hace una descripción de la forma en que se recolectó la información en cada fase de la investigación, además, se presenta un análisis de la estructura lógico-sintáctica de cada una de las proposiciones consideradas en los cuestionarios 2, 3 y 4 así como una demostración de cada una de ellas. En el cuarto apartado, se hace una descripción de la forma en que se analizó la información en cada fase del trabajo.

***Capítulo 4. Resultados*.** Este capítulo consta de cuatro apartados. En el primero, se presentan los principales hallazgos del análisis conceptual de la demostración centrado en los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas, el concepto de demostración, los tipos y las funciones atribuidas. En el segundo apartado, se presentan los resultados sobre el conocimiento de los sujetos de investigación de las formas de proceder en una demostración, considerando la estructura lógico-sintáctica de las proposiciones y sobre la evaluación de argumentos matemáticos, considerando dichos aspectos en una proposición matemática con la estructura de la implicación universal. En el tercer apartado, se presentan los resultados sobre el conocimiento de los sujetos de investigación en la evaluación de argumentos considerando los aspectos matemáticos de la demostración. En el cuarto apartado, se presentan los resultados sobre las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los sujetos de investigación.

***Capítulo 5. Conclusiones*.** Este capítulo consta de cinco apartados. En el primero, se presentan las conclusiones sobre el análisis conceptual de la demostración. En el segundo apartado, se presentan las conclusiones sobre el conocimiento de los sujetos de investigación de las formas de proceder en la demostración en función de los aspectos lógicos y sintácticos en proposiciones genéricas y sobre la evaluación de argumentos matemáticos en función de dichos aspectos. En el tercer apartado, se presentan las conclusiones sobre el conocimiento de los sujetos de investigación sobre los aspectos matemáticos de la demostración tales como el uso de las hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas. En el cuarto apartado, se presentan las conclusiones sobre las características de los argumentos matemáticos que más convencen a los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica. En el quinto apartado, se describen los principales aportes de este estudio a la investigación sobre el conocimiento de la demostración en profesores de matemáticas y a la formación de estos profesionales, además, se plantean algunas líneas abiertas de investigación sobre el conocimiento especializado de la demostración.

CAPITULO 1
PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACION

Índice del capítulo

Este capítulo consta de tres apartados. En el primero, *Área problemática*, se hace una introducción que muestra el interés por estudiar el conocimiento del profesor de matemáticas, particularmente el conocimiento sobre la *práctica matemática* en donde se ubica la demostración. Además, se discute sobre la *demostración*, concretamente, sobre su papel en las Matemáticas, en la Matemática Escolar, en el currículo matemático de la educación secundaria en Costa Rica, en la formación inicial de los profesores de matemáticas, en donde distinguimos aspectos generales y aspectos particulares en el plan de estudios de la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. Se presentan también los antecedentes en donde se consideran una serie de investigaciones sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas acerca de la demostración. Los trabajos se encuentran separados en dos grupos: en el primero, trabajos generales que han contribuido a precisar el área problemática, es decir, a establecer los elementos que consideramos para estudiar el conocimiento sobre la demostración y en el segundo, trabajos más relacionados con los elementos que fueron objeto de investigación de esta tesis, a saber, sobre la validez lógico-matemática de la demostración y sobre la convicción de un argumento matemático. Finalmente, se hace una síntesis de los principales elementos que componen el conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza de la demostración.

En el segundo apartado, *El problema de investigación y la pertinencia del trabajo*, se hace una síntesis de las principales ideas del apartado anterior para formular el problema de investigación y justificar su pertinencia. Finalmente, en el tercer apartado, *Objetivos de la investigación*, se formula el objetivo general de la investigación y los cuatro objetivos específicos.

1.1 ÁREA PROBLEMÁTICA

Según Ponte y Chapman (2006) el estudio sobre el conocimiento del profesor es un tema de interés desde hace tiempo, particularmente se destacan en la década de 1980 los trabajos de Elbaz (1983) y Shulman (1986).

En el caso de Elbaz (1983), el interés radica en identificar lo que denominó *conocimiento práctico* y contempla el conocimiento sobre sí mismo, el medio ambiente, los temas, el desarrollo del currículo y la instrucción. Shulman (1986) propuso siete categorías de conocimiento que posibilitan a los profesores la enseñanza: *(1)* el conocimiento del contenido, (2) el conocimiento pedagógico general, (3) el conocimiento curricular, *(4)* el conocimiento didáctico del contenido, *(5)* el conocimiento de los estudiantes, *(6)* el conocimiento de los contextos educacionales y *(7)* el conocimiento de los fines educativos, los propósitos y los valores. Por su parte Schön (1992) enfatizó la naturaleza *práctica* del conocimiento del profesor, señalando que se requiere una actitud *reflexiva* para incorporar conocimiento sobre el contenido y su correspondiente conocimiento pedagógico, esta actitud reflexiva surge cuando los profesores se enfrentan a problemas profesionales, se distancian para apreciarlos con perspectiva y comparten para encontrar soluciones factibles. De esta manera, el conocimiento de los profesores no puede reducirse al conocimiento de los contenidos, sino que debe servirle para identificar y resolver problemas profesionales en el marco de su práctica, es decir, debe ser capaz de construir conocimiento práctico (Ponte y Chapman, 2006).

Posterior a los trabajos indicados anteriormente, han surgido diferentes modelos para conceptualizar el conocimiento de los profesores, cada uno de ellos haciendo énfasis en diferentes elementos y características. En estos modelos, a partir del trabajo de Shulman (1986), se distinguen dos componentes principales: el conocimiento del contenido a enseñar y el conocimiento didáctico del contenido a enseñar. Un modelo especialmente interesante es el planteado por Ball y colaboradores denominado *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* (Ball, Thames y Phelps, 2008). En este modelo se reconocen seis categorías de conocimiento que permiten caracterizar el conocimiento del profesor. No obstante, se han detectado algunas problemáticas tales como la ambigüedad de si esos elementos particulares son o no exclusivos de los profesores de matemáticas o que algunos subdominios tienden a superponerse cuando se emplean de forma analítica (Carrillo et al., 2018).

Con base en un análisis crítico del modelo *MKT*, Carrillo et al. (2018) han propuesto el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* el cual considera la naturaleza especializada del conocimiento del profesor de matemáticas y en donde cada subdominio toma en cuenta lo que el profesor utiliza y necesita sin hacer referencias a otras profesiones. Plantea dos dominios fundamentales de conocimiento: *(1) el conocimiento matemático* que hace referencia a aquel que posee el profesor sobre las matemáticas como una disciplina científica, pero en un contexto escolar y *(2) el conocimiento didáctico del contenido* que se refiere a los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza–aprendizaje.

El conocimiento matemático es fundamental en el profesor y ha sido reconocido como uno de los focos de investigación en la comunidad del *International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME)*. Muchos de los estudios se centraron en temas matemáticos tales como geometría, funciones, la multiplicación y la división, las fracciones y la resolución de problemas e hicieron énfasis en las dificultades o deficiencias que los profesores exhibieron en conceptos o procesos matemáticos (Ponte y Chapman, 2006). Por su parte, *The Handbook of Mathematics Teacher Education* (Sullivan & Wood, 2008a) considera en su primer volumen (Sullivan & Wood, 2008b) las perspectivas teóricas sobre el conocimiento y las creencias en la enseñanza y en el desempeño profesional del profesor de matemáticas. La complejidad de describir el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas refleja dos posiciones: por un lado, la necesidad de entrelazar el aprendizaje basado en la disciplina convencional con dimensiones físicas, personales, sociales y el desarrollo de experiencias relevantes para las demandas de la economía global y por otro, una posición matemática más cercana a los principios, patrones, procesos y generalizaciones que de forma convencional han sido la base de los planes de estudio de matemáticas (Sullivan, 2008).

Si bien es cierto, el conocimiento del profesor de matemáticas sobre los temas es muy relevante, Flores-Medrano et al. (2016) señalan que además de conocer los contenidos y sus relaciones, el profesor de matemáticas debe tener conocimiento acerca de cómo se produce el conocimiento matemático, lo que implica conocer sobre las reglas sintácticas de la disciplina, la diferencia entre una demostración, una prueba y una comprobación, además de los diferentes tipos de demostraciones. Esto permitiría que el profesor comprenda que un ejemplo en uno casos corresponde a una comprobación de una propiedad y en otros, a una demostración. Por ejemplo, cuando se plantea que $5+2=2+5$ corresponde a una comprobación de la propiedad conmutativa de la suma de los números naturales, pero no demuestra la validez de tal propiedad en dicho conjunto. No obstante, el ejemplo $5-2 \neq 2-5$

basta para garantizar que la resta no es conmutativa y que no es una operación interna en el conjunto de los números naturales (Flores-Medrano et al., 2016).

El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* considera a este conocimiento del profesor de matemáticas sobre el quehacer matemático como parte del conocimiento matemático y le ha asignado un subdominio dentro de él, llamado *Knowledge of Practices in Mathematics (KPM)*. Este subdominio hace referencia al conocimiento del profesor de matemáticas sobre la forma en la que se desarrollan las matemáticas más allá de cualquier tema en particular. Actualmente los autores continúan precisando la categorización del subdominio, llevando a cabo nueva agrupación de sus descriptores, y reforzando la idea de que el conocimiento sobre la demostración matemática forma parte de tales categorías (Carrillo et al., 2018).

1.1.1 La demostración en Matemáticas

La búsqueda de la verdad se podría considerar como parte esencial de la práctica matemática, no obstante, clarificar el significado de la verdad matemática es una tarea compleja. Usualmente, en matemáticas las palabras *falso* y *verdadero* están vinculadas a las proposiciones y, por lo tanto, se hace necesario contar con criterios parciales específicos que permitan establecer la veracidad o falsedad de la mayor cantidad de proposiciones posibles. En el caso de las ciencias deductivas, principalmente en las matemáticas, esos criterios se consideran en el llamado método axiomático-deductivo y se concretan en la idea de *demostración* (Domingues, 2002).

En la actualidad, el descubrimiento y la demostración de nuevos teoremas son elementos que se encuentran en el nivel más elevado de la investigación matemática, particularmente, las demostraciones son fundamentales para la estructura de las matemáticas, sin embargo, se debe prestar atención a que las demostraciones habituales realizadas por los matemáticos tienen sutilezas de significado más amplias que la simple aplicación lógica por lo que hacen una distinción entre la demostración formal y la ordinaria (Tall et al., 2012).

Según Cabassut et al. (2012) no existe una definición general de demostración que sea compartida por toda la comunidad matemática, por lo que una forma de intentar precisar este concepto, es buscar una definición en la lógica matemática y contrastarla con lo que los matemáticos consideran que se ajusta a su quehacer en la práctica. De esta manera, se pueden tener dos conceptualizaciones principales sobre la demostración: una vinculada a la lógica y otra más cercana a la práctica de los matemáticos.

En una conceptualización cercana a la lógica, se puede afirmar que una demostración matemática formal, es una sucesión de proposiciones matemáticas en donde la última es el teorema que se demuestra y cada una de las anteriores es un axioma o es el resultado de aplicar una regla de inferencia a proposiciones anteriores de la sucesión, de esta manera, las reglas de inferencia son evidentes y la validez de la demostración puede verificarse de forma mecánica (Cabassut et al., 2012; Hanna y De Villiers, 2012; Tall et al., 2012).

En una conceptualización más próxima al quehacer de los matemáticos, estos insisten en los componentes informales y semánticos de la demostración. La demostración tiene una finalidad más amplia que el simple establecimiento de la verdad, puede contribuir a obtener nuevos conocimientos matemáticos, establecer nuevos enlaces contextuales y favorecer la aparición de nuevos métodos para resolver problemas (Cabassut et al., 2012; Hanna y De Villiers, 2012). De esta manera, una demostración matemática ordinaria es un argumento para convencer a un grupo de expertos sobre la veracidad de una afirmación matemática y si es posible explicar dicha veracidad. Este tipo de demostraciones se pueden observar en revistas de investigación matemática, en libros de texto escolares y universitarios, generalmente presentan puentes conceptuales en algunas partes del argumento en lugar de una justificación lógica explícita. Para los matemáticos, la demostración está asociada a otras actividades tales como pensar en nuevas situaciones, enfocarse en aspectos significativos, emplear conocimientos previos para reorganizar ideas, considerar nuevas relaciones, hacer conjeturas, formular definiciones y finalmente, construir un argumento válido (Tall et al., 2012).

Las definiciones formales del término demostración cubren el significado de este concepto de manera incompleta, no obstante, los matemáticos están convencidos de su significado en su quehacer profesional. Como veremos a continuación, lo anterior supone una dificultad para la enseñanza de la demostración en las matemáticas escolares debido a que no parecen existir explicaciones simples sobre qué es una demostración y cuáles demostraciones deben proporcionar los profesores a sus estudiantes (Cabassut et al., 2012).

1.1.2 La demostración en la Matemática Escolar y en el currículo matemático de la educación secundaria en Costa Rica

Según Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp y Tanguay (2012a) en la matemática escolar también existe la tensión entre lo lógico-sintáctico y lo semántico de la demostración y sus posibles relaciones y oposiciones tales como los resultados matemáticos ajustados a reglas lógicas y textuales o los aspectos creativos y constructivos. Para Hanna y De Villiers (2012) existen dos posiciones sobre la demostración matemática, una que apela más a los aspectos lógico-sintácticos y que la considera como una secuencia de pasos que permiten el establecimiento de una conclusión necesaria, y otra más vinculada a los aspectos semánticos y que la contempla en un sentido más amplio, como una serie de ideas y percepciones que favorezcan la comprensión matemática.

A pesar de las distintas posiciones sobre los procesos de argumentación y demostración, existe consenso y un amplio reconocimiento a nivel internacional sobre el papel de la demostración matemática en la formación de los estudiantes en todos los niveles educativos (Cabassut et al., 2012; Mariotti, 2006; Stylianides, Stylianides y Weber, 2017).

En países como Francia, Alemania y Japón, la demostración aparece en el programa curricular oficial como un contenido explícito de enseñanza. En este se indica lo que debería considerarse en las clases de matemáticas y existen libros de texto en donde hay capítulos dedicados a su enseñanza. En otros países, como Italia y los Estados Unidos, el abordaje de la demostración no está explícito en los programas como un tema de estudio y depende de la disposición de los profesores para emplearla en sus clases. En el caso de los Estados Unidos, el razonamiento y la demostración se consideran como un estándar de proceso que debe abordarse dentro de los contenidos matemáticos en los diferentes niveles educativos más que un contenido explícito de enseñanza (Cabassut et al., 2012).

Asimismo, existen recomendaciones internacionales como las propuestas por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) que indican que los procesos de argumentación y demostración deberían tener presencia en los programas de todos los niveles educativos. Específicamente, recomiendan promover actividades tales como la formulación e investigación de conjeturas, el desarrollo y la evaluación de argumentos matemáticos y demostraciones, en donde se empleen diferentes métodos y tipos de razonamiento. En este sentido, Stylianides (2007) señala que muchos investigadores y marcos curriculares abogan por la inclusión de las demostraciones matemáticas como parte de las experiencias de los estudiantes en todas las áreas de contenido y en todos los niveles educativos debido a que son fundamentales para hacer y saber matemáticas, son la base de la comprensión matemática y tienen un papel preponderante para desarrollar, establecer y comunicar el conocimiento matemático.

La demostración en la Educación Primaria puede favorecer que los niños exploren o debatan sobre la veracidad de las afirmaciones matemáticas con base en la estructura lógica del sistema matemático y no en la autoridad del docente o del libro de texto. En la secundaria, puede cumplir una amplia gama de funciones tales como *(1) la verificación*, que permite establecer la veracidad o falsedad de una proposición, *(2) la explicación*, en donde se propongan las razones por las que una proposición matemática es verdadera, (3) *el descubrimiento*, en donde se establezcan nuevos resultados matemáticos, (4) *la comunicación*, que permite la transmisión de resultados matemáticos a los demás miembros del aula, *(5) la propuesta de nuevos métodos de deducción* y *(6) la justificación del uso de una definición o un sistema de axiomas*. Lo anterior puede contribuir para que los estudiantes comprendan: *(1)* la forma en la que esta actividad se realiza en la disciplina matemática, *(2)* los orígenes y las conexiones del conocimiento matemático y *(3)* nuevos métodos para resolver problemas (Durand-Guerrier et al., 2012a; Stylianides et al., 2017; Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki-Landman, 2012).

Para lograr estas expectativas, algunos programas de estudio de matemáticas en diferentes contextos educativos del mundo contemplan el abordaje del razonamiento deductivo y de la inferencia lógica. El proponer a los estudiantes tareas en las que la exploración, la validación y la interpretación provoquen en ellos la necesidad de la comprensión al encontrarse con resultados inesperados, con ambigüedades y contradicciones favorece la necesidad de realizar demostraciones. No obstante, muchas de las demostraciones que se presentan en las matemáticas escolares se abordan como un ejercicio, cuyo propósito es confirmar la validez de proposiciones matemáticas y teoremas. Esto carece de un propósito intelectual debido a que los estudiantes no están comprometidos en la búsqueda de la solución de un problema matemático que aprecien como tal (Durand-Guerrier et al., 2012a; Zaslavsky et al., 2012).

Según Mariotti (2006), algunas investigaciones han evidenciado la complejidad del concepto de demostración y las dificultades que enfrentan los profesores de matemáticas y sus estudiantes cuando se incluye como parte de las actividades de la clase. Afirma que la demostración matemática tiene dos propósitos fundamentales: *la validación* que permite confirmar la veracidad de una afirmación matemática al verificar la corrección lógica del argumento matemático y el aporte en *la construcción* del conocimiento matemático. Se han propuesto diferentes enfoques para la enseñanza de la demostración en el aula y se han generado investigaciones al respecto. El elemento fundamental que surge en todas ellas es la necesidad de que las demostraciones sean aceptables desde el punto de vista matemático pero que también tengan sentido para los estudiantes.

En el caso de Costa Rica, el sistema educativo está regido por el Ministerio de Educación Pública (MEP) y organizado como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1

Organización del sistema educativo de Costa Rica

Niveles	Años que comprende	Edades de los estudiantes
Preescolar	Materno infantil	4 años y 3 meses-5 años y dos meses
	Transición	5 años y 3 meses-6 años y dos meses
I Ciclo de primaria	Primero, segundo y tercero	7-9 años
II Ciclo de primaria	Cuarto, quinto y sexto	10-12 años
III Ciclo de secundaria	Sétimo, octavo y noveno	13-15 años
Educación diversificada de secundaria	Décimo y undécimo	16-17 años

La enseñanza de la matemática en todo el sistema educativo costarricense está orientada por el Programa de Estudios de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. El enfoque principal de este currículo se basa en la resolución de problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales o que puedan ser concebidos de esa forma. Se considera que el usar este tipo de problemas favorece la construcción de los aprendizajes en las matemáticas lo que conlleva a la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos. La resolución de problemas como estrategia de mediación pedagógica brindará un estilo de acción de aula en el cual se propone una introducción de los temas que considere cuatro momentos centrales: la propuesta de un problema, el trabajo independiente por parte de los estudiantes, la discusión interactiva y comunicativa y la clausura o cierre. Esta secuencia se puede realizar en una lección o en un conjunto de lecciones de acuerdo al tema a desarrollar y al nivel educativo (Ministerio de Educación Pública, 2012).

La organización del programa de estudios se estructura en cinco áreas matemáticas: *(1) el área de números* en donde se introducen a éstos, además de los sistemas numéricos, las operaciones, los cálculos y las propiedades de una forma pragmática; (2) e*l área de geometría* que refiere al estudio de las características de las figuras geométricas y sus relaciones, la modelización geométrica y la visualización espacial, además se considera el movimiento de las formas geométricas; (3) e*l área de medidas* que trata sobre la comprensión y la manipulación de unidades, sistemas y procesos de medición del espacio y el tiempo, el uso de herramientas y fórmulas para efectuar las medidas; (4) e*l área de estadística y probabilidad* en donde se incluyen dos temas fundamentales, la estadística descriptiva que se refiere a la identificación, organización y presentación de la información y por otro lado, la probabilidad que estudia la incertidumbre y el azar y; (5) e*l área de relaciones y álgebra* en donde se consideran varios temas como el estudio de los patrones y las relaciones de diferentes tipos tales como numéricas y geométricas; las funciones, vistas como relaciones entre variables, el manejo de expresiones y relaciones simbólicas, las ecuaciones e inecuaciones, como medio de potenciar procesos de generalización y simbolización. El área de números está presente de forma explícita en los niveles de sétimo, octavo y noveno año y las áreas de geometría, relaciones y álgebra y; estadística y probabilidad, están presentes en los cinco niveles de la educación secundaria (Ministerio de Educación Pública, 2012).

Los conocimientos matemáticos son la base del programa de estudios, no obstante, el enfoque no se basa solo en los contenidos matemáticos. Se pretende el desarrollo de mayores capacidades en los alumnos para enfrentarse a los retos de la sociedad de la cual forman parte. De esta manera, se privilegia la lógica del saber en contexto, del aprender a aprender en donde las capacidades son centrales. Las de corto plazo y asociadas a las áreas matemáticas son las que se llaman habilidades específicas, la generalización de estas en un ciclo educativo se llama habilidades generales y finalmente como una perspectiva general la competencia matemática. La competencia matemática se interpreta como una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, hace énfasis en la relación de las matemáticas con los entornos físicos y socioculturales y brinda un lugar especial al planteamiento y la resolución de problemas (Ministerio de Educación Pública, 2012).

En el programa de estudios se consideran cinco procesos matemáticos, que se entienden como actividades cognitivas que realizan las personas en las diferentes áreas matemáticas y que se asocian a la capacidad para la comprensión y el uso de los conocimientos. La realización sistemática de estos procesos transversales en el aula favorece el progreso de las diferentes dimensiones de la competencia matemática. Estos procesos no se consideran como capacidades, pero apoyan su desarrollo y tienen muchas intersecciones entre sí. Tales procesos son:

(1) r*azonar y argumentar* que hace referencia a aquellas actividades mentales que de manera transversal están presentes en todas las áreas del programa de estudios y que permiten generar procesos de pensamiento matemático tales como la deducción, la inducción, la comparación analítica, la generalización, las justificaciones, las pruebas, el uso de ejemplos y contraejemplos. Favorece el desarrollo de capacidades para comprender lo que es una justificación o prueba en matemática, para desarrollar y discutir argumentaciones matemáticas, para formular y analizar conjeturas matemáticas, para usar fórmulas o métodos matemáticos que permitan la comprensión de alguna información dada;

(2) plantear y resolver problemas que contempla los procesos que permitan plantear y resolver problemas, especialmente aquellos basados en contextos reales. Se pretende favorecer las capacidades que permitan identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las matemáticas;

(3) comunicar que trata sobre el proceso que potencia la capacidad para expresarse usando el lenguaje matemático de forma oral y escrita. De este modo se busca que los estudiantes desarrollen capacidades para expresar con precisión matemática, las ideas, los argumentos y los procedimientos usados, además de las conclusiones a las que hayan llegado. Esto favorece la comunicación activa entre los estudiantes con los demás miembros de la comunidad educativa;

(4) conectar que permite la obtención de relaciones entre las diferentes áreas de las matemáticas y en las conexiones que se puedan realizar se favorece la comprensión de los límites y el significado de los objetos matemáticos y;

(5) representar como el proceso que permite fomentar el reconocimiento, la interpretación y la manipulación de diversas representaciones de los objetos matemáticos tales como las gráficas, los cuadros, los símbolos, etc. Favorece el desarrollo de capacidades para traducir una representación en términos de otras y de este modo comprender las ventajas y desventajas de tales representaciones (Ministerio de Educación Pública, 2012).

Los procesos de razonamiento y argumentación están presentes en todas las áreas matemáticas de diferentes formas tales como en el estudio de patrones y regularidades, en la justificación de una congruencia de triángulos, en la elección de una representación matemática, en la solución de una ecuación, entre otras (Ministerio de Educación Pública, 2012).

La justificación y la prueba son esenciales en los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben tener un papel primordial en la formación escolar. Se da importancia al proceso de conjeturar pues es algo que permite el descubrimiento de nuevos resultados en las matemáticas. Se considera que al plantear una conjetura se promuevan los procesos para justificarla ya sea con materiales concretos, diagramas, calculadora u otros elementos tecnológicos. A medida que se avance en la formación escolar, las conjeturas deberán hacerse sobre elementos más generales y abstractos y las justificaciones deberán emplear elementos más técnicos. De este modo, la argumentación debe incentivarse de manera paulatina, primero usando formas verbales, luego las escritas y posteriormente mediante formas simbólicas. Se recomienda la introducción cuidadosa de las formas de razonamiento por contradicción, inducción, uso de contraejemplos y las diferentes formas de deducción (Ministerio de Educación Pública, 2012).

En sétimo, octavo y noveno año no se pretende un aprendizaje totalmente formal de las matemáticas, no obstante, se considera importante introducir cierto grado de rigor, por lo tanto, se debe promover el buen uso de la terminología y de la notación. Se debe tener familiaridad con el sentido de la demostración en matemáticas la cual debe ser introducida de manera gradual a través de los años. Particularmente se consideran tres etapas relevantes, una primera lo es el planteamiento de conjeturas y su verificación o refutación mediante el estudio de casos particulares, una segunda que consiste en brindar una argumentación de la conjetura y una tercera que consiste en una demostración. En el caso de décimo y undécimo año el grado de rigor deberá ser superior al de los años anteriores, los alumnos deberán realizar demostraciones en las cuales se tienen que justificar los pasos realizados. Se recomienda el uso de software de geometría dinámica para que los estudiantes conjeturen resultados (Ministerio de Educación Pública, 2012).

En el programa de estudios de matemáticas se plantean algunas recomendaciones metodológicas para el profesor de manera que se pueda favorecer el proceso de razonar y argumentar. A continuación, se detallan algunas de ellas (Ministerio de Educación Pública, 2012).

- Utilizar el algoritmo de la división para realizar demostraciones sencillas como por ejemplo que todo número natural es par o impar.
- Verificar las propiedades del valor absoluto de los números enteros usando ejemplos numéricos, por ejemplo, que un número entero y su opuesto aditivo tienen el mismo valor absoluto. Después de asimilar las operaciones con números enteros se propone

la verificación de las siguientes propiedades: $\mid a \cdot b \mid = \mid a \mid \cdot \mid b \mid$, $\mid a + b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$.

- Deducir las propiedades de las potencias a partir de la definición tales como: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$, $a^0 = 1, a \neq 0$. Se sugiere proponer a cada estudiante ejemplos que generen discusión acerca de la veracidad de ciertas proposiciones, por ejemplo, se puede cuestionar si son correctas las siguientes igualdades:

  $\sqrt{-4} = -2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$.

- Generalizar propiedades estudiadas en sétimo año como: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0, b \neq 0$.

- Introducir a los números irracionales mediante un problema geométrico. Se da un cuadrado en donde la medida de cada uno de sus lados es igual a x. El objetivo de la actividad es que los alumnos concluyan que $x^2 = 2$. Se cuestiona a los estudiantes si el número x podría ser un número racional. Se indica que esa posibilidad debe descartarse mediante una demostración en la cual se repasarán elementos de la teoría de números, dicha prueba es por contradicción. Se menciona de manera explícita que el trabajo con números irracionales puede ofrecer oportunidades para activar el proceso de razonar y argumentar por ejemplo al demostrar que $\sqrt{3}$ no es un número racional. Se recomienda realizar justificaciones de que por ejemplo $\sqrt{-1}$ no es un número real.

- Trabajar con los números irracionales para realizar algunas demostraciones. Particularmente, se indica que al iniciar el estudio de los números irracionales es importante demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Se considera que la demostración de este hecho es sencilla y puede ser comprendida por los alumnos y sirve para repasar conocimientos de teoría de números. Se propone la siguiente forma de demostración:

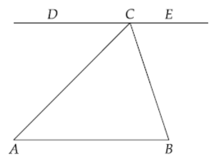
  > Para la demostración de que raíz cuadrada de 2 no es racional, primero se repasa la descomposición de los números enteros en números primos. Se puede deducir que si 2 es un factor de un número entero *m*, entonces m^2 tiene 2 como factor un número par de veces. Ahora:
  >
  > Si $\sqrt{2}$ fuera racional, entonces $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ con *m* y *n* enteros.
  >
  > Elevando al cuadrado: $2 = \dfrac{m^2}{n^2}$.
  >
  > Multiplicando por n^2: $2n^2 = m^2$

Por lo dicho arriba, m^2 tiene un número par de veces a 2 como factor (o no lo tiene), mientras que $2n^2$ tiene un número impar de veces a 2 como factor.

Conclusión: $\sqrt{2}$ no puede ser racional (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 297).

- Plantear un problema que enfatice el proceso de razonar y argumentar, específicamente, para abordar la desigualdad triangular y los ángulos internos y externos. En el problema se dan una serie de medidas y se pide construir un triángulo con ellas. Se sugiere realizar preguntas a los alumnos sobre cuales medidas permiten construir un triángulo y cuáles no y porqué. Para el caso en que se pueda se sugiere que midan los ángulos internos del triángulo y sumen sus medidas. Para verificar que dicha suma es 180 grados se sugiere construir un triángulo en cartón, recortar las esquinas y colocarlas de forma tal que se forme un ángulo llano. Es una verificación empírica y concreta.
- Plantear un problema que enfatice el proceso de razonar y argumentar, por ejemplo, calcular el área de la Isla del Coco utilizando un mapa de Costa Rica. La idea es que dicha isla sea visualizada como un cuadrilátero y se pueda aproximar su área. Se sugiere que se conjeture sobre algunas de las propiedades de los cuadriláteros utilizando la tecnología y una guía apropiada. Una vez hecha la conjetura se debe comunicar al resto de la clase y argumentar su validez.
- Promover en los alumnos la observación de las medidas de los lados y de los ángulos de triángulos para que puedan inferir las condiciones necesarias y suficientes para que sean semejantes o congruentes según corresponda. Una vez hechas estas inferencias el docente debe brindar los conceptos de congruencia y semejanza de triángulos, así como de los criterios correspondientes. Se considera importante que los alumnos argumenten sus conclusiones respecto a la congruencia o semejanza de un par de triángulos utilizando los criterios. En cuanto al teorema de Thales se recomienda que se realicen actividades en donde los estudiantes concluyan la validez de este resultado.
- Plantear actividades en donde los alumnos hagan mediciones e infieran el resultado correspondiente al teorema de Pitágoras. El docente debe enunciar el teorema después de estas actividades. Se recomienda al docente mostrar a los estudiantes la demostración del teorema de Pitágoras realizada por Euclides en el libro I de los *Elementos*, específicamente la proposición 47.
- Utilizar software de geometría dinámica para conjeturar las propiedades de los polígonos regulares y las propiedades de las traslaciones, reflexiones, homotecias y rotaciones. Se recomienda estimar áreas y perímetros de figuras planas no poligonales usando un sistema de coordenadas rectangulares.
- Demostrar el teorema que afirma que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados, los estudiantes deben realizar la demostración y el docente guiar el proceso de comunicación y argumentación de los alumnos. Se sugiere primero que los alumnos conjeturen el resultado mediante doblado de papel o con software de geometría dinámica. Se propone la siguiente demostración:

Se considera el triángulo ABC dado en la siguiente figura:



Se traza la recta auxiliar $\overleftrightarrow{DE}$ que pasa por C y es paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Dado que $\measuredangle ECB$ y $\measuredangle CBA$ son alternos internos entre paralelas, entonces $m(\measuredangle ECB) = m(\measuredangle CBA)$. Por la misma razón, $m(\measuredangle DCA) = m(\measuredangle CAB)$. Pero $\measuredangle ECB$, $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle DCA$ forma un ángulo llano; es decir $m(\measuredangle ECB) + m(\measuredangle BCA) + m(\measuredangle DCA) = 180^{\circ}$

Luego: $m(\measuredangle CAB) + m(\measuredangle BCA) + m(\measuredangle CBA) = 180^{\circ}$ Esto es, la suma de los ángulos internos del triángulo es igual a 180° (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 320).

- Redactar un argumento lógico para convencer a una persona que la distancia más corta entre una recta y un punto dado fuera de ella es el segmento perpendicular que los une.
- Presentar cuadriláteros que puedan ser descompuestos en triángulos para que los alumnos puedan inferir cuál es la suma de los ángulos internos.
- Proponer problemas de semejanza en donde los alumnos deban justificar mediante el uso de los criterios correspondientes.
- Presentar triángulos rectángulos en donde se han construido cuadrados sobre sus lados de manera que los alumnos conjeturen el teorema de Pitágoras.
- Introducir algunos elementos de la trigonometría en el triángulo rectángulo mediante actividades que permitan deducir la fórmula $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
- Proponer actividades en donde los alumnos deban analizar sucesiones y patrones en donde se identifique y conjeture, se debe utilizar el ensayo y error, además de comparar las soluciones y argumentar las estrategias empleadas en donde se promueva el uso de símbolos matemáticos.
- Emplear figuras geométricas para la deducción de las fórmulas notables $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $a^2 - b^2$.
- Deducir la fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ mediante la técnica de completar cuadrados. En este punto es importante que los alumnos deduzcan la relación que existe entre el número real $b^2 - 4ac$ y la existencia de soluciones para dicha ecuación.

Las recomendaciones anteriores dejan entrever la responsabilidad del profesor de matemáticas para la gestión en el aula del proceso de razonar y argumentar. En el siguiente apartado se presenta el papel de la demostración en el plan de estudios de los sujetos de investigación de esta tesis doctoral.

1.1.3 La demostración en la formación inicial de los profesores de matemáticas y en la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica

La formación inicial de profesores de matemáticas es bastante diversa en los diferentes países, sin embargo, existe una característica común: la necesidad de realizar estudios en matemáticas y en educación, aunque con diferencias en cuanto al énfasis y equilibrio entre ambas áreas del conocimiento. Frecuentemente los planes de estudio de las carreras de formación indican la cantidad de cursos sobre el conocimiento matemático, pero no ahondan sobre su naturaleza y características. Por tanto, es válido cuestionarse sobre cuánto conocimiento matemático debe abordarse en la formación inicial, qué temas tratar y cuáles deberían ser sus cualidades (Stacey, 2008).

A pesar de las diferencias en la formación inicial de profesores de matemáticas señaladas anteriormente, Stacey (2008) menciona que en general estos programas formativos deberían lograr que los futuros docentes hayan fortalecido sus conocimientos y habilidades matemáticas más allá de lo requerido en la matemática escolar, tener un conocimiento superior al de sus estudiantes y, además, tener perspectivas sobre los propósitos de la matemática escolar. Considera que la formación inicial de profesores de matemáticas debe contemplar cuatro elementos fundamentales: el conocimiento del contenido de las matemáticas, la experiencia de hacer matemáticas, el conocimiento de las matemáticas como disciplina y el conocimiento de la forma de aprender matemáticas.

La investigación sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de la demostración en la matemática escolar sugiere que, en la formación inicial de profesores de matemáticas, las demostraciones deben ser empleadas con una perspectiva más amplia que el desarrollar habilidades de razonamiento matemático o como un medio para aprender más matemáticas, ya que una formación matemática sólida sobre las demostraciones, no garantiza una preparación suficiente para su enseñanza ni garantiza que los futuros profesores puedan presentar una imagen más completa sobre éstas en la matemática escolar (Lo y McCrory, 2009; Pietropaolo y Campos, 2009; Schwarz y Kaiser, 2009).

Según Lo y McCrory (2009), Pietropaolo y Campos (2009) y Tabach et al. (2009) la demostración matemática podría abordarse en la formación de los futuros profesores de matemáticas en tres niveles diferentes:

(1) como herramienta, la demostración es empleada en los cursos para verificar la validez de una afirmación matemática, para explicar, refutar, resumir teorías;

(2) como objeto matemático, la demostración es abordada como un objeto en sí mismo con sus características y estándares propios, se trata de explicitar los pasos que componen a una demostración, las representaciones empleadas, los supuestos considerados, los elementos sintácticos generales, los tipos de demostraciones, el lenguaje, los términos empleados, las características de los sistemas axiomáticos, las nociones de lógica, la noción de rigor entre otros y;

(3) como elemento generador de aprendizaje en los alumnos, que se refiere a la discusión explícita sobre el abordaje de la demostración en la matemática escolar y por lo tanto se considera el conocimiento del contenido; de los alumnos y particularmente

de las concepciones de estos sobre la demostración, de la enseñanza, del plan de estudios, entre otros.

En el caso de nuestro estudio, los sujetos de investigación son futuros profesores de matemáticas de la carrera denominada *Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA)*. El plan de estudios de la carrera entró en vigencia en el 2005 y es ofrecido por dos unidades académicas de la Universidad Nacional, la Escuela de Matemática que ofrece el componente matemático y la División de Educología el componente pedagógico. El propósito de la carrera es el estudio de las Matemáticas y sus aplicaciones, los métodos y principios mediante la comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje, además de la construcción de conocimientos, el desarrollo de destrezas y habilidades específicas en los futuros profesores. Tiene como objeto la formación de profesores con conocimientos matemáticos y pedagógicos sólidos para contribuir al mejoramiento de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La carrera tiene una duración de cuatro años, que equivalen a ocho ciclos lectivos, para la obtención del título de grado denominado *Bachillerato*. Posterior a ese grado, se obtiene el título llamado *Licenciatura*, para ello, los futuros profesores deben hacer tres ciclos lectivos adicionales de cursos y defender un trabajo final de graduación. En la tabla 1 se presentan los diferentes cursos que componen la malla curricular del plan de estudios.

Tabla 2

Cursos del plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional

AÑO	CICLO	CURSO
PRIMER AÑO	**1**	MAB 300 Matemática Fundamental 1 MAB 304 Lógica y Teoría de Conjuntos Inglés Integrado 1 DEX 320 Introducción a los procesos educativos DEX 322 Desarrollo Costarricense y Modelos Educativos
	2	MAB 302 Matemática Fundamental II MAB 301 Geometría Euclídea I Inglés Integrado II DEX 321 Educación para la diversidad DEX 323 Desarrollo Humano y Teorías de Aprendizaje
SEGUNDO AÑO	**3**	MAB 303 Geometría Euclídea II MAB 305 Geometría Analítica MAB 306 Introducción a la Informática DEY 328 Currículum y Planeamiento Didáctico para el Aprendizaje de las Matemáticas DEY 327 Recursos Didácticos para el Aprendizaje de las Matemáticas
	4	MAB 307 Algebra Lineal MAB 308 Cálculo I Módulo I: MAB 309 Matemática Financiera, o, MAB 310 Tecnología como herramienta didáctica. DEY329 Didáctica para el Aprendizaje de las Matemáticas DEY330 Evaluación de los Aprendizajes para la Enseñanza de las Matemáticas

TERCER AÑO	**5**	MAB 311 Cálculo II Módulo II: MAB 312 Resolución de problemas matemáticos, o, MAB313 Trigonometría esférica FIX 310 Física General I Optativa I: Curso correspondiente al Área Pedagógica DEY 331 Desafíos Didácticos en la Práctica Docente en la Enseñanza de las Matemáticas
	6	MAB 314 Estadística y Probabilidades MAB 315 Algebra Abstracta Módulo III: MAB 316 Geometría no Euclídea, o, MAB317 Programación Lineal Estudios Generales Optativo II: Curso de interés personal del estudiante, que no corresponda a la especialidad ni al componente pedagógico
CUARTO AÑO (Se obtiene el grado de Bachillerato)	**7**	MAB 400 Cálculo III MAB 401 Inferencia Estadística DEY 475 Investigación Cualitativa, Innovación y Producción Educativa Estudios Generales Estudios Generales
	8	MAB 402 Ecuaciones Diferenciales MAB 403 Métodos Numéricos MAB 45 Investigación cuantitativa Estudios Generales Optativo III: Curso correspondiente a la Escuela de Matemática. *MAB3250 Matemática para la familia/ MAB3260 Análisis Demográfico/ MAB3270 Didáctica de la Estadística y la Probabilidad/ MAB3280 Evaluación de proyectos/ MAB3290 Aplicaciones matemáticas/ MAB3300 Matemática Finita / MAB3310 Teoría de Matrices y sus aplicaciones*
QUINTO AÑO (Se es egresado de la Licenciatura)	**9**	MAB 503 Historia de la matemática MAB 500 Análisis DEY 540 Seminario de Investigación Educativa
	10	MAB 505 Seminario Investigación Dirigida I MAB 501 Teoría de Números DEY 524 Didáctica Crítica para la Enseñanza de la Matemática
	11	MAB 506 Seminario de Investigación Dirigida II DEY 542 Tendencias de la Educación Matemática

Los cursos del plan de estudios se aglutinan en cinco áreas disciplinarias, las cuales son concebidas como conjuntos de conocimientos teóricos y metodológicos que guardan ciertas afinidades. Dichas áreas son: *Álgebra y Geometría*, *Cálculo y Análisis*, *Componente Pedagógico*, *Investigación* y *Matemática Aplicada*. Asimismo, se consideran cinco ejes curriculares que deben estar presentes en todas las actividades formativas, pues dan el soporte al plan de estudios e integran las áreas disciplinarias descritas anteriormente. Ellos son: *Desarrollo del Pensamiento lógico-matemático*, *Enfoque investigativo*, *Tecnología como recurso didáctico*, *Aplicaciones matemáticas* e *Historia de la matemática*.

En cuanto al perfil profesional, entendido como los cargos y funciones que pueden asumir los futuros profesores de matemáticas de esta carrera, se tienen los siguientes: profesor de matemática en el nivel de educación secundaria y educación universitaria, asesor de proyectos y actividades que involucran procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, además como asesor académico – administrativo en el Ministerio de Educación Pública (MEP). De esta manera, los espacios ocupacionales de los futuros profesores son: Colegios Académicos, científicos, agropecuarios y Técnicos, Colegios Universitarios, Academias Privadas, Escuelas Comerciales, Instituciones y Organismos no Gubernamentales de carácter Educativo, Universidades Públicas y Privadas e Instituciones Públicas o Privadas que requieran algún tipo de asesoría matemática.

Uno de los ejes curriculares del plan de estudios es el denominado *desarrollo del pensamiento lógico-matemático.* En dicho plan se considera a este pensamiento como un requisito indispensable en el estudiantado de la carrera y en cualquier profesional en Educación Matemática. Asimismo, se indica que debe propiciarse en el desarrollo de los cursos de la carrera, tanto en la práctica como en la teoría, así como en actividades que se generen en los diferentes niveles del plan de estudios y en la formación general del estudiantado. La demostración matemática se considera como un elemento importante de este eje curricular y es abordada en el plan de estudios de dos formas: *(1)* como objeto de enseñanza en un único curso denominado *MAB 304 Lógica y Teoría de Conjuntos* y *(2)* como una herramienta para la validación del conocimiento matemático en los restantes cursos de matemáticas.

El curso *MAB 304 Lógica y Teoría de Conjuntos* se encuentra en el primer año de la carrera y en el primer nivel (ver tabla 2). Es uno de los primeros dos cursos de matemáticas que recibe el estudiantado y tiene como objetivo general que se familiaricen con el lenguaje y los razonamientos propios de las Matemáticas. Específicamente, el curso busca potenciar algunas competencias en el razonamiento y la argumentación matemática, por lo tanto, se brinda especial importancia a algunos métodos de demostración matemática mediante ejemplos, ejercicios y problemas tomados de varios campos de las matemáticas y adecuados al nivel de estudio. Se pretende que el estudiantado identifique los componentes básicos de un teorema o una proposición matemática tales como hipótesis, condiciones, tesis, entre otras; que determine el método más conveniente en un proceso de demostración matemática y que realice demostraciones deductivas ofreciendo las justificaciones matemáticas pertinentes. Asimismo, este curso pretende que el estudiantado comprenda que el sistema axiomático de las matemáticas es un producto que surge como una solución a la necesidad de validar proposiciones y que la teoría de conjuntos es un medio valioso en la comunicación de conceptos y métodos matemáticos.

El curso se desarrolla en 16 semanas lectivas de cinco horas contacto cada una. El programa del curso consta de cinco capítulos: *(1)* Nociones básicas de lógica-matemática, *(2)* Métodos de demostración, *(3)* El Campo de los Números Reales; *(4)* Números Naturales, Enteros, Racionales e Irracionales y *(5)* Potenciación y Radicación en el Campo de los Números Reales. De los anteriores, los dos primeros están orientados hacia la enseñanza de la demostración matemática. El capítulo 1, *Nociones básicas de lógica-matemática*, contempla los siguientes contenidos: los fundamentos de un sistema axiomático, la lógica proposicional, las conectivas lógicas, las tablas de verdad, las proposiciones condicionales y bicondicionales, la implicación lógica, las proposiciones equivalentes, las tautologías y los cuantificadores universal y existencial. El capítulo 2, *Métodos de demostración*, contempla los siguientes contenidos: la naturaleza de una demostración, los métodos de demostración en matemática: conjunción, disyunción, implicación, contrapositiva, reducción al absurdo o contradicción y ejemplos diversos de aplicación de los métodos de demostración matemática.

En los restantes capítulos de este curso, se hacen demostraciones de los resultados principales de manera que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos en los dos primeros capítulos. Asimismo, en los diferentes cursos de matemáticas del plan de estudios a los futuros profesores se les enseñan demostraciones de los teoremas más relevantes de la teoría abordada en el curso, es decir, el énfasis está en emplear a la demostración como una herramienta para validar el conocimiento.

1.1.4 Antecedentes. Investigaciones sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas sobre la demostración

Este apartado consta de dos subapartados. En el primero, consideramos investigaciones generales sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas acerca de la demostración y que nos han permitido tener mayor precisión en la delimitación del área problemática, concretamente, nos han permitido establecer elementos para estudiar el conocimiento de la demostración en profesores de matemáticas. En el segundo, se presentan trabajos más específicos y relacionados al objeto de estudio de nuestra investigación, a saber, sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos de la demostración, así como sobre la convicción de un argumento matemático

1.1.4.1 Investigaciones generales sobre la demostración en profesores de matemáticas

Según Flores-Medrano (2015) en la demostración matemática se incluyen las ideas de argumentación, justificación y validación debido a la similitud que tienen en cuanto a su carácter de convencimiento, aunque diferentes en cuanto al uso de los criterios de verdad. Para estudiar el conocimiento sobre la demostración se requiere establecer algunos componentes que permitan caracterizar este conocimiento.

En este apartado se presenta una serie de investigaciones sobre la demostración en profesores de matemáticas. Los trabajos considerados aluden a las concepciones de los profesores sobre el concepto de demostración, a las funciones que le atribuyen en las matemáticas y en la enseñanza de la matemática y, sobre el conocimiento de la demostración matemática. Al final de este apartado se hace una síntesis de los principales hallazgos de estos trabajos.

Investigaciones sobre las concepciones de la demostración

Montoro (2007) llevó a cabo una investigación sobre las concepciones que tenían acerca de la demostración matemática un grupo de 13 estudiantes de la asignatura Geometría Euclídea de la carrera del profesorado en Matemática. Para ello, al inicio de dicha asignatura les planteó tareas relacionadas con la demostración y posteriormente entrevistó de manera individual a todos los estudiantes. Unos estudiantes afirmaban que aprendían a demostrar con el estudio de una teoría de la demostración, otros mediante demostraciones bien presentadas en libros o por el profesor y otros que se aprende a demostrar al intentarlo por ellos mismos. Para los estudiantes, al aprender sobre las demostraciones, adquirieron conocimientos de lógica y la reducción al absurdo, a considerar de dónde se debe partir, con qué elementos se cuenta, cuáles axiomas o teoremas utilizar, a realizar gráficos y justificar los pasos.

En cuanto a lo que consideraban como una demostración correcta, un grupo de estudiantes afirmó que es aquella que llega a la conclusión, no obstante, no brindaron información de cómo se llega ni bajo qué condiciones, otros manifestaron que es aquella en la que se tiene la certeza que es correcta, son los que parecían confiar en sus propias argumentaciones. Montoro (2007) concluye que las concepciones sobre la demostración de los profesores de matemática en formación inicial interrogados no son simples ni uniformes, manifiesta que la multiplicidad de significados del término demostración debe ser considerada en la formación de los futuros profesores para estar en mejores condiciones de colaborar en el aprendizaje sobre la demostración la cual es fundamental en las Matemáticas.

Viseu, Menezes, Fernandes, Gomes y Martins (2017) realizaron una investigación con 72 profesores de matemática sobre sus concepciones de diferentes aspectos de la demostración. Determinaron que, para los docentes con menor experiencia, la demostración matemática tiene una naturaleza diferente a otras disciplinas, es una actividad esencial para la construcción del conocimiento, su función es verificar y explicar la veracidad de un razonamiento, pero debe ser reservada a los mejores alumnos. Para los docentes con más experiencia la prueba es una actividad cerrada que consiste en la reproducción de demostraciones presentes en libros de texto y realizadas por especialistas. Para los investigadores, la demostración debería tener mayor presencia en los docentes en formación inicial y en servicio, recomiendan concebir tareas y desarrollar estrategias de enseñanza que promuevan en los alumnos la prueba matemática, la cual no debe ser reducida a la memorización de pasos sin sentido.

Pietropaolo y Campos (2009) llevaron a cabo una investigación con 14 profesores de matemáticas de secundaria para determinar sus concepciones con respecto a las demostraciones. Para ello, los profesores permitieron que sus alumnos realizaran pruebas y argumentaciones para analizarlas posteriormente. Los docentes valoraron de forma positiva el trabajo de sus alumnos y consideraron sus argumentos excelentes y creativos, sin embargo, afirmaban que no eran una prueba matemática rigurosa. Indicaron que la enseñanza de las demostraciones no permitirá mejorar las matemáticas en la clase por considerarla una actividad reservada a una minoría de estudiantes, pero que su inclusión en la formación inicial era necesaria para hacer y comunicar las matemáticas. Los investigadores afirman que las demostraciones en la formación inicial de profesores de matemáticas pueden observarse como un instrumento para validar y forjar vínculos entre los temas matemáticos; como un rasgo característico e indispensable de las matemáticas y como un tema que se convertirá en parte de su enseñanza. Sostienen que las nociones y creencias de los profesores sobre su trabajo con las demostraciones en el aula se vuelven obstáculos para la implementación de ideas innovadoras.

Investigaciones sobre las funciones atribuidas a la demostración

Ayalon y Even (2008) realizaron un estudio con 21 personas ligadas a la Educación Matemática sobre las formas en que abordaban el razonamiento deductivo. Identificaron dos enfoques, uno en el que se describe dicho razonamiento como la inferencia basada en las reglas de la lógica formal y otro que lo describe como una manera de resolver problemas de manera sistemática paso a paso sin tener en cuenta elementos de validez ni las reglas lógicas formales. Todos los participantes coincidieron en que el razonamiento deductivo es esencial en matemáticas, sin embargo, no hubo consenso sobre el uso de dicho razonamiento fuera de ellas. Para algunos participantes en situaciones no matemáticas se aplican otras reglas de inferencia además de las formales y para otros ni siquiera es posible el uso del razonamiento deductivo en contextos no matemáticos. Para los investigadores, lo anterior está en concordancia con algunos estudios sobre la argumentación en los cuales se apunta al uso de inferencias plausibles fuera de las matemáticas.

Crespo y Ponteville (2005) llevaron a cabo una investigación con 12 docentes de matemática de nivel medio y 40 estudiantes del último año del profesorado en Matemáticas para analizar el concepto de demostración dentro de las matemáticas y la influencia en sus prácticas. Para el análisis de los resultados utilizaron las funciones de la demostración matemática planteadas por De Villiers (1993): *verificación*, *explicación*, *sistematización*, *descubrimiento* o *creación* y *comunicación*. Determinaron que para ambos grupos no existen distintos niveles de demostraciones ni de argumentaciones, además evidenciaron una concepción de la matemática como única e intemporal a pesar de que reconocen diferentes maneras de llevar a cabo demostraciones para una determinada propiedad. La noción de demostración fue vinculada a la presentación de teoremas en la clase y evidenciaron algunas de las funciones de la demostración como elemento que permite justificar la validez de los mismos. Concluyeron que la demostración en el aula tiene una mínima presencia y cuando se considera lo hace como una forma de certeza en menor grado de explicación. No obstante, las funciones de sistematización, descubrimiento y comunicación son prácticamente nulas. Consideran que el papel de la sistematización puede abordarse en niveles superiores por su complejidad teórica pero que el descubrimiento y la comunicación permiten formar el concepto de demostración en los alumnos.

Furinghetti y Morselli (2009) realizaron una investigación con diez profesores de matemáticas de secundaria sobre el papel de la demostración en el aula. Determinaron que nueve docentes utilizaban demostraciones en la clase y afirmaban que la Geometría Euclídea era el dominio más adecuado para su enseñanza. En cuanto al tratamiento de las pruebas, identificaron dos posiciones: (1) *enseñar teoremas y probar hechos*, la prueba era considerada aquí como un elemento que permite sistematizar y convencer sobre las cuestiones matemáticas, (2) *enseñar a demostrar y usar la prueba como forma de enseñanza*, la función de la demostración en esta posición era promover la comprensión matemática. Según los docentes entrevistados, la escogencia entre una u otra posición estaba fuertemente condicionada por el contexto escolar. Las investigadoras plantean que la enseñanza de la demostración debe tener un papel central en la formación inicial de profesores de matemáticas, sin embargo, es una tarea compleja ya que está fuertemente influenciada por el sistema de creencias que tenga el futuro docente.

Knuth (2002) realizó una investigación para determinar las concepciones que tenían 16 profesores de matemáticas en la educación secundaria, sobre la demostración en el contexto de las matemáticas y en el contexto escolar. Para ello realizó una serie de entrevistas semiestructuradas y tareas sobre pruebas matemáticas que debían resolverse de manera escrita. Determinó que los docentes reconocen una variedad de roles de la demostración en las matemáticas: *verificación, explicación*, *comunicación*, *en la creación de resultados* y *la sistematización*. Sin embargo, la mayoría no la consideraron como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, mostraron una visión limitada de la naturaleza de la demostración en matemáticas y poca comprensión de lo que la constituye.

Ramos, Moreno y Marmolejo (2015) realizaron una investigación sobre las concepciones relacionadas con las prácticas de la demostración en geometría en el aula de tres profesores de matemáticas de bachillerato en servicio. El estudio tuvo dos fases, en la primera se consideró al docente como el sujeto que tiene conocimiento matemático y en la segunda en su papel de profesor de matemáticas. Se efectuaron dos entrevistas semiestructuradas con el objetivo de identificar en las respuestas las diferentes categorías de análisis, a saber: los tipos de demostraciones, la naturaleza de la demostración en la matemática escolar y las funciones de la demostración matemática. Determinaron que los docentes tenían distintos puntos de vista sobre la función y el propósito de la demostración, la cual es considerada como central en las matemáticas, pero no así en la enseñanza. Las funciones que destacaron fueron la de verificación y la explicación. Sin embargo, el desarrollo del pensamiento lógico, el papel de la interacción social y su papel en la producción de conocimiento por parte del estudiante, no fueron valorados por los docentes, como funciones de la demostración en el contexto escolar.

Investigaciones sobre el conocimiento de la demostración

Martínez-Recio (1999) realizó una investigación con siete alumnos del último curso de la carrera de Psicopedagogía de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Córdoba matriculados en una asignatura denominada *Intervención Didáctica en el Área de Matemáticas*. Esta asignatura tenía como objetivo formar a los futuros orientadores psicopedagógicos en la Didáctica de la Matemática para que pudiesen brindar asesoría psicopedagógica a profesores de matemáticas, usualmente de la educación secundaria. Para ello, aplicó un cuestionario al inicio y al final del curso, compuesto de dos problemas: *(1) uno aritmético* en el que se pedía demostrar que *la diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos cualesquiera es siempre un número impar, igual a la suma de dichos números* y *(2) otro geométrico* para demostrar que *las bisectrices de dos ángulos adyacentes cualesquiera forman un ángulo recto.*

En el cuestionario aplicado al final del curso, Martínez-Recio (1999) incluyó un apartado en donde los sujetos de investigación debían explicar el significado personal de nociones tales como *demostrar, razonar*, *probar*, *explicar* o *justificar*. Para contextualizar la reflexión sobre dichas nociones, cada alumno participó en una entrevista semiestructurada en la que debía realizar diferentes ejercicios de geometría empleando CABRI y justificando los diferentes pasos de la resolución de tales ejercicios. Determinó que los esquemas personales de demostración de los alumnos son consistentes, permanentes a lo largo del tiempo y presentan coherencia con otras formas establecidas de pensamiento matemático. Además, observó que las limitaciones para lograr formas deductivas de pensamiento y demostración estaban vinculadas a desconocimientos conceptuales que obstaculizan el correcto desarrollo de tales formas de pensamiento.

Vicario y Carrillo (2005) realizaron un estudio con dos profesores de matemáticas de secundaria en donde les proporcionaron cinco demostraciones alternativas sobre la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, las cuales debían estudiarlas y luego sostener una entrevista semiestructurada. Concluyeron que ambos profesores tuvieron puntos de vista limitados sobre la comprensión de la esencia de una demostración matemática, particularmente en lo concerniente a las demostraciones por reducción al absurdo lo que evidenció algunas carencias en el conocimiento sobre las matemáticas.

Tabach et al. (2009) realizaron una investigación para determinar los conocimientos de 50 profesores de matemática de secundaria sobre la construcción de pruebas correctas e incorrectas, se les dio un cuestionario con seis proposiciones simples de teoría de números y debían proponer pruebas correctas e incorrectas que sus alumnos harían ante tales proposiciones. Se presentaron más pruebas correctas que incorrectas para un total de 763 y sus sugerencias no siempre fueron consistentes con la investigación sobre la construcción de pruebas en los estudiantes. Con respecto a las pruebas correctas, los profesores mencionaron demostraciones generales, sin embargo, según los investigadores los estudiantes no siempre reconocen la necesidad de construir tales demostraciones y en el caso de que las realicen suelen dar un ejemplo de comprobación innecesario. En cuanto a las formas de representación, indicaron que sus alumnos utilizarían representaciones simbólicas para las pruebas correctas y numéricas para las incorrectas, pocos esperaban que utilizaran una representación verbal, aunque para los investigadores, los estudiantes prefieren este tipo de representación antes que las simbólicas. Para Tabach et al. (2009) estos resultados sugieren que los profesores de matemáticas deben ser introducidos en estudios sobre las concepciones que tienen los alumnos de las demostraciones matemáticas lo cual permitirá una mejora en el conocimiento pedagógico del contenido sobre las mismas.

Flores (2007) realizó un trabajo con 14 profesores de bachillerato en México mediante un experimento de enseñanza en un curso. Concluyó que los esquemas de argumentación que más utilizaron los profesores eran los fácticos, en los que hacían un recuento de lo realizado a modo de justificación, o los empíricos en los cuales se apoyaban en hechos físicos o dibujos, lo cual no favorecía el uso de la deducción, el lenguaje era impreciso con errores conceptuales. Sin embargo, con la práctica desarrollada alrededor de la demostración, la reflexión individual y grupal, tendieron a usar esquemas analíticos en los cuales se seguía una cadena deductiva que permitía justificar adecuadamente.

Arnal y Oller (2017) llevaron a cabo una actividad de formación para analizar el conocimiento de 11 estudiantes del Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria (especialidad de Matemáticas) sobre la práctica de la demostración en Matemáticas utilizando los dominios y subdominios del modelo denominado *Conocimiento del Contenido Pedagógico Tecnológico (TPACK)* por sus siglas en inglés. Concluyeron que los futuros profesores tienen un buen conocimiento tecnológico y del contenido, pero hay dificultades con la componente pedagógica y las interrelaciones entre ellas.

Godino, Gonzato y Fernández (2010) realizaron una investigación sobre la evaluación y el desarrollo de competencias matemáticas y didácticas a un grupo de 60 estudiantes de primer curso de la Facultad de Educación de la Universidad de Granada en España. Para ello se les propuso dos tareas: (1) *demostrar que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es un ángulo llano* e (2) *identificar los conocimientos puestos en juego*. Con respecto a la primera tarea determinaron que todos los estudiantes recordaron que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados, sin embargo, casi la mitad de los estudiantes no brindaron ninguna justificación, si la dieron no era pertinente o se limitaban a repetir la afirmación que debían probar. Además, las justificaciones incompletas o correctas de forma parcial eran intentos de justificaciones deductivas, los estudiantes en este caso no demostraron la propiedad o lo hicieron con poco rigor. Con respecto a la segunda, el 75 % de los estudiantes describieron los conocimientos puestos en juego al resolver la primera tarea, intentando descomponer el proceso en términos claves, no obstante, fueron pocos los que especificaron el tipo de objeto que lo definen. Para estos investigadores las respuestas de los futuros profesores de educación primaria son muy deficientes, tanto en la solución matemática como en su análisis, asimismo, manifiestan que la identificación de los conocimientos que se ponen en juego en la realización de la tarea es compleja por lo tanto plantean la necesidad de discutir con los profesores en formación inicial estos temas y brindarles recursos teóricos y metodológicos para llevar a cabo este tipo de análisis.

Stylianides y Stylianides (2009) señalan que varios estudios indican que los futuros profesores de matemáticas que enseñan en los primeros años tienen ideas erróneas sobre la demostración, particularmente sobre el rol de los argumentos empíricos. Por su parte Lin et al. (2012) manifiestan que muchos profesores de matemáticas basan su convicción sobre algún resultado matemático, más en la autoridad de entes externos, como manuales y en colegas que reconocen más competentes, que en su propio razonamiento.

Síntesis de los principales hallazgos de las investigaciones sobre la demostración en profesores de matemáticas para precisar el área problemática

Como síntesis de las investigaciones presentadas anteriormente se tiene que:

- las concepciones de los profesores de matemáticas sobre la demostración no son simples ni uniformes, existe una multiplicidad de significados de dicho término (Montoro, 2007). Para algunos profesores la matemática es una disciplina única e intemporal y no consideran que existan diferentes niveles de demostraciones ni de argumentaciones, para otros, un argumento dado no necesariamente constituye una demostración matemática (Crespo y Ponteville, 2005; Pietropaolo y Campos, 2009). A pesar de la diversidad de concepciones sobre la demostración, los profesores manifiestan consenso en que es esencial para la construcción del conocimiento matemático y que el razonamiento deductivo está concebido como una inferencia basada en las reglas de la lógica formal (Ayalon y Even, 2008; Ramos et al., 2015; Viseu et al., 2017);

- existe consenso entre los profesores de matemática estudiados en que la demostración es central en las matemáticas (Ayalon y Even, 2008; Ramos et al., 2015; Viseu et al., 2017) y reconocen una variedad de funciones tales como la verificación, la explicación, la comunicación, la creación de resultados y la sistematización del conocimiento (Knuth, 2002). No obstante, en la matemática escolar muestran diferentes puntos de vista sobre su función y propósito. Las principales funciones que reconocen son la verificación y la explicación de la validez de teoremas y de un razonamiento matemático (Crespo y Ponteville, 2005; Ramos et al., 2015).

  La demostración en la matemática escolar puede ser abordada de dos formas distintas: *(1)* como una herramienta que permite sistematizar y convencer a los alumnos sobre resultados matemáticos, en este caso es empleada para demostrar teoremas y resultados o *(2)* como una forma de enseñanza en donde el foco es aprender a demostrar y promover la comprensión matemática en los alumnos (Furinghetti y Morselli, 2009). La mayoría de profesores no la consideran como una herramienta para el aprendizaje de las matemáticas (Knuth, 2002), por el contrario, consideran que el desarrollo del pensamiento lógico y la producción de conocimiento por parte de sus alumnos no constituyen funciones de la demostración en el ámbito escolar (Ramos et al., 2015), asimismo, piensan que es una actividad cerrada que se reduce a la reproducción de demostraciones presentes en libros de texto, realizadas por especialistas y reservada solo a los mejores alumnos (Pietropaolo y Campos, 2009; Viseu et al., 2017);

- algunos profesores muestran una visión reducida sobre la naturaleza de la demostración matemática, de lo que la constituye y deficiencias en el conocimiento matemático asociado (Martínez-Recio, 1999; Knuth, 2002; Vicario y Carrillo, 2005). En algunos casos, presentan argumentos empíricos como si fuesen demostraciones pero que se basan en dibujos o hechos físicos, con lenguaje impreciso y errores conceptuales (Flores, 2007; Stylianides y Stylianides, 2009). En otros casos, desconfían de su propio razonamiento para garantizar un resultado matemático y, por lo tanto, basan su convicción en entes externos (Lin et al., 2012).

1.1.4.2 Investigaciones sobre la demostración que contribuyen a la caracterización del conocimiento sobre la validez lógico-matemática de la demostración y sobre la convicción de un argumento matemático

En este apartado se presentan investigaciones relacionadas sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración, los elementos matemáticos involucrados y sobre los aspectos que les son convincentes a los profesores de un argumento matemático. Aunque algunos de los trabajos presentados no abordaron directamente el conocimiento del profesor de matemáticas, han contribuido a precisar los elementos del conocimiento sobre la práctica matemática de la demostración que fueron estudiados en esta tesis doctoral.

Sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración

El estudio de Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, y Tanguay (2012b) proporciona evidencias sobre el valor de integrar a la enseñanza de la argumentación y de la demostración matemática los principios lógicos y sintácticos. Manifiestan que hay bastante consenso en que la mayoría de los estudiantes de secundaria e incluso de cursos universitarios tienen serias dificultades con el razonamiento lógico requerido para determinar la validez de las afirmaciones matemáticas. Los autores señalan que en las fases exploratorias y constructivas del razonamiento de los alumnos se presentan diversos procesos tales como el examen de casos particulares, el estudio de propiedades, relaciones y la formulación de conjeturas y que tales procesos requieren el uso de las reglas de inferencia.

Cuando los alumnos se enfrentan al aprendizaje de un tema matemático novedoso carecen de la base de conocimiento que tienen sus profesores de matemáticas, por lo tanto, el conocer las reglas fundamentales de la lógica de predicados contribuye a que los alumnos verifiquen afirmaciones matemáticas, eviten deducciones no válidas y comprendan las estructuras básicas de la demostración matemática, directa e indirecta, así como de refutación mediante contraejemplos. Este conocimiento favorece que los alumnos tengan mayor claridad sobre lo que significa que una proposición matemática sea verdadera, sobre qué debería hacerse para probar tal validez y cómo se procede para demostrar que una afirmación es falsa (Durand-Guerrier et al., 2012b).

Los elementos señalados tienen implicaciones directas sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas, debido a que posiblemente no podrán guiar de manera oportuna las actividades de razonamiento de sus alumnos si ellos mismos no son conscientes de los principios básicos del razonamiento lógico. La inclusión de actividades de razonamiento en donde se empleen afirmaciones de los tipos *si-entonces*, *y*, *o*, *no*, *todos*, entre otras permite que los profesores comprendan mejor el trabajo de sus alumnos y mejoren su propia comprensión de los aspectos fundamentales del razonamiento matemático (Durand-Guerrier et al., 2012b).

En el trabajo de Knuth (2002) con 16 profesores de matemáticas en la educación secundaria mencionado en el apartado anterior, considera algunos elementos lógicos de la demostración como la generalidad. Manifiesta que una de las características de la demostración hace referencia a la generalidad de la conclusión, es decir, que la demostración establece la validez de una afirmación matemática para todas las situaciones que cumplan con las hipótesis planteadas, no obstante, los profesores tenían una comprensión diversa sobre tal generalidad. Para ahondar en este hecho, Knuth (2002) presentó a los profesores una figura de un triángulo y debajo de ella la demostración del teorema que establece que el segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos de sus lados es paralelo al tercer lado. Todos los profesores comprendieron la demostración y manifestaron que era correcta, posteriormente, se les consultó si se podría encontrar un contraejemplo, aunque todos respondieron negativamente, cuatro profesores dibujaron triángulos adicionales para verificar la conclusión del teorema antes de responder.

Otro elemento lógico considerado en el trabajo de Knuth (2002) es la implicación. Presentó a los profesores un argumento para demostrar que si $x > 0$ entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$. En dicho argumento asumió que $x + \frac{1}{x} \geq 2$ era verdadero y mediante manipulaciones algebraicas concluyó que $x > 0$ era verdadero. Determinó que 10 profesores consideraron el argumento como una demostración correcta, a pesar que demuestra la recíproca de la proposición dada, todos ellos se enfocaron en la manipulación algebraica y no observaron el aspecto lógico. Finalmente, Knuth (2002) determinó que dos de los criterios más importantes empleados por los profesores de matemáticas para evaluar argumentos fueron: métodos válidos, que refieren más a los aspectos lógicos y métodos matemáticamente correctos, que refieren a la validez matemática.

Buchbinder y McCrone (2018) realizaron una investigación mediante un enfoque de diseño para desarrollar y estudiar un curso de razonamiento matemático y demostraciones para futuros profesores de matemáticas de secundaria. El objetivo del estudio fue explorar cómo el conocimiento y las disposiciones de 15 profesores de matemáticas en formación inicial hacia la enseñanza y el aprendizaje del razonamiento y la demostración se desarrollan al participar en el curso e identificar los principios de diseño que permiten el aprendizaje de dichos profesores.

Para Buchbinder y McCrone (2018) el conocimiento matemático del profesor para la enseñanza de la demostración (MKT-P) está compuesto de los siguientes conocimientos: *(1) el conocimiento de la materia:* que incluye al conocimiento de los *(a) conceptos y principios matemáticos* y *(b)* al *conocimiento de los aspectos lógicos de la demostración* tales como el conocimiento de los diferentes tipos de argumentos, técnicas de demostración, el conocimiento de la lógica, las funciones de la demostración, el papel de los ejemplos y contraejemplos, entre otros y; *(2) el conocimiento pedagógico del contenido específico para la demostración*: que refiere al conocimiento de las concepciones y conceptos erróneos que tienen los alumnos de secundaria sobre las demostraciones y el conocimiento de estrategias pedagógicas para apoyar los procesos de demostración en dichos alumnos.

El curso planteado por Buchbinder y McCrone (2018) comprendía cuatro módulos de tres semanas, en cada uno se abordaron respectivamente los siguientes temas: proposiciones cuantificadas, proposiciones condicionales, demostraciones directas y razonamiento indirecto. El interés fue contribuir a mejorar el conocimiento de los aspectos lógicos de la demostración en los futuros profesores. Además, diseñaron oportunidades para que los futuros profesores mejoraran su conocimiento pedagógico sobre la demostración mediante la interpretación de ejemplos de los trabajos de los alumnos de secundaria, la identificación de las concepciones sobre la demostración en dichos alumnos, la planificación e implementación de lecciones que combinaban los temas de demostración con el contenido matemático regular, para ello grabaron en video las lecciones para realizar análisis posteriores. Como resultado de la participación en el curso los futuros profesores de matemáticas mostraron un crecimiento en los aspectos lógicos y el conocimiento específico de la demostración

Sobre aspectos matemáticos de la demostración

Según Cabassut et al. (2012) la investigación ha mostrado que muchos profesores de matemáticas aceptan argumentos empíricos como demostraciones, difieren en sus distinciones entre argumentación y demostración y poseen puntos de vista limitados sobre el papel de la demostración en las matemáticas escolares. Consideran que el metaconocimiento sobre la demostración incluye los siguientes elementos: *(1) la estructura de las teorías matemáticas* que incluye elementos como: axiomas, hipótesis, definiciones y teoremas; *(2) la lógica formal* que incluye a la noción de verdad, el condicional, las conectivas y los cuantificadores; *(3) los modos de representación* que incluyen al razonamiento simbólico, pictórico y verbal y; *(4) las relaciones entre la demostración matemática y los procesos de argumentación* en otros campos como las ciencias empíricas. Particularmente sobre los aspectos matemáticos de la demostración consideran importante que el profesor de matemáticas enseñe a sus alumnos que las demostraciones no establecen hechos sino afirmaciones condicionales, es decir, no se demuestra un hecho B sino un condicional del tipo $si\ A\, entonces\ B$.

Los aspectos matemáticos deben ser considerados por los profesores en las matemáticas escolares, particularmente la certeza potencial de la demostración matemática y la condicionalidad de los teoremas para que los alumnos tomen conciencia de la necesidad de evaluar la teoría matemática en la que están inmersos (Cabassut et al., 2012).

Sobre la convicción de un argumento matemático

Un elemento interesante en el trabajo de Knuth (2002) es el análisis que realizó sobre qué encuentran convincente los profesores de matemáticas cuando evalúan argumentos. Para cada conjunto de argumentos presentados a los profesores, se les consultó cuáles les parecían más convincentes y porqué. A partir de esto, Knuth (2002) presenta una serie de características de los argumentos consideradas en esas elecciones: *(1) la concreción*, que refiere a la presencia de alguna característica concreta, como el uso de ejemplos específicos o referencias visuales; *(2) la familiaridad***,** que hace referencia al conocimiento previo del argumento en su práctica profesional o en su formación inicial, en este caso la convicción no se basa en las matemáticas presentadas; *(3) la generalidad*, que refiere a que el argumento establece la validez de una proposición matemática para todos los casos posibles y; *(4) la explicación,* que refiere a que el argumento explica las razones de la validez de la afirmación matemática en cuestión. Un aspecto a considerar es que los argumentos más convincentes seleccionados por los profesores no constituían demostraciones matemáticas.

1.1.5 El conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza de la demostración

La enseñanza de la demostración en la matemática escolar está matizada por dos facetas: *(1)* la producción de argumentos por parte de los alumnos para validar las conjeturas formuladas y *(2)* la comparación de dichos argumentos con los que son socialmente aceptados por la comunidad matemática. De esta manera, en la clase de matemáticas debe existir una coordinación entre la dimensión social relacionada con la comunidad matemática y la dimensión social relacionada con la comunidad del aula. El papel del profesor de matemáticas es fundamental en esta coordinación, ya que representa de manera simultánea al garante de la comunidad matemática y al garante en el aula de matemáticas y, por lo tanto, debe ser un mediador cultural y presentar a sus estudiantes los estándares de validación matemática. Por lo tanto, debe ser consciente de la existencia de diferentes puntos de vista y que es necesario negociar la relevancia y la aceptación de la perspectiva matemática con respecto a otras formas de argumentación (Mariotti, 2006).

Determinar de forma exhaustiva cual debería ser el conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza de la demostración no es una tarea simple, no obstante, con base en los trabajos de algunos investigadores de los apartados anteriores (Buchbinder y McCrone, 2018; Cabassut et al., 2012; Durand-Guerrier et al., 2012b; Knuth, 2002; Lin et al., 2012; Lo y McCrory, 2009; Pietropaolo y Campos, 2009; Tabach et al., 2009) se puede hacer una aproximación a los elementos que podrían componerlo. Para ello, distinguimos dos grupos de conocimientos:

(1) el conocimiento matemático de la demostración: hace referencia al conocimiento de la demostración como un objeto en sí mismo con sus características y estándares propios que permita construir y evaluar demostraciones, seleccionar, organizar, demostrar teoremas y conocer sus implicaciones. Dentro de este conocimiento se pueden considerar dos componentes: *(1.1) el conocimiento de la naturaleza de la demostración matemática* que incluye tres elementos: *(a) el concepto de demostración* que refiere al conocimiento sobre qué es una demostración y lo que significa demostrar una proposición matemática; *(b) los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración* que refiere al conocimiento de los elementos sintácticos generales, los tipos de demostraciones, el lenguaje, los términos empleados, las características de los sistemas axiomáticos, las nociones de lógica, la noción de rigor, la noción de verdad, las conectivas lógicas, los cuantificadores, las reglas de inferencia y equivalencia lógicas, entre otros y; *(c) los aspectos matemáticos de la demostración* que refiere al conocimiento sobre la estructura de las teorías matemáticas en donde son consideradas las demostraciones e incluye elementos como el conocimiento de los axiomas, hipótesis, definiciones y teoremas involucrados en las demostraciones y; *(1.2) el conocimiento sobre las funciones de la demostración* que hace referencia a cuál es el rol de las demostraciones en las matemáticas como la verificación, la explicación, la comunicación, la sistematización de teorías y el descubrimiento de nuevos resultados entre otras.

(2) el conocimiento pedagógico específico para la enseñanza de la demostración que refiere al conocimiento del contenido; de los alumnos y particularmente de las concepciones de estos sobre la demostración; de la enseñanza; del plan de estudios; de la propuesta de tareas apropiadas para favorecer el desarrollo de la demostración entre otros.

Con base en la propuesta de conocimiento realizada, en el apartado siguiente planteamos el problema de investigación y además justificamos su importancia y pertinencia.

1.2 EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y LA PERTINENCIA DEL TRABAJO

Como se ha mencionado, la demostración es relevante en las matemáticas y en la matemática escolar. En las matemáticas el descubrimiento y la demostración de nuevos teoremas se encuentran en el nivel más elevado de la investigación, sin embargo, no existe una definición general aceptada por toda la comunidad matemática. En general, existen dos conceptualizaciones principales, una cercana a la lógica que la considera como una secuencia de proposiciones matemáticas en donde la última de ellas es el teorema a demostrar y otra cercana a la práctica de los matemáticos en donde tienen más relevancia los aspectos semánticos e informales y la considera más como un argumento para convencer a expertos de la validez de un teorema enfatizando en la explicación de la veracidad (Cabassut et al., 2012; Hanna y De Villiers, 2012; Tall et al., 2012). Asimismo, el significado de la demostración ha estado sometido a debate a lo largo del tiempo en diversas culturas y en diferentes escuelas del pensamiento (Dominguez, 2002; Durand-Guerrier et al., 2012a; Kleiner, 1991; Mariotti, 2006; Ruíz, 2003).

En la matemática escolar también existe el debate entre los aspectos lógico-sintácticos y semánticos de la demostración. En algunos países aparece en el currículo como un contenido explícito de enseñanza y otros como un estándar de proceso que debe abordarse en los diferentes temas. Existe consenso a nivel internacional sobre su importancia en la formación de estudiantes en todos los niveles educativos ya que favorece la comprensión sobre las matemáticas y los procesos para desarrollar, establecer y comunicar el conocimiento matemático. Particularmente, se aboga por proponer tareas a los alumnos en las que la exploración, validación e interpretación genere la necesidad de comprender, además, se considera importante que se enfrenten a resultados inesperados, con ambigüedades y contradicciones que provoque en ellos la necesidad de demostrar (Cabassut et al., 2012; Durand-Guerrier et al., 2012a; Mariotti, 2006; NCTM, 2003; Stylianides, 2007; Stylianides et al., 2017; Zaslavsky et al., 2012).

En el caso de la educación secundaria de Costa Rica, el currículo matemático considera el proceso de *razonar y argumentar* en los estudiantes y se refiere a elementos de pensamiento matemático tales como la deducción, la inducción, la comparación analítica, la generalización, las justificaciones, las pruebas, el uso de ejemplos y contraejemplos. La demostración es considerada como una fase formal de la argumentación y tiene un papel relevante en la formulación de conjeturas. Una vez que los estudiantes han formulado una conjetura se deben trabajar tres etapas: en la primera se debe hacer la verificación en casos particulares, en una segunda etapa los estudiantes deben proponer un argumento que justifique la validez de la conjetura y finalmente, en una tercera etapa deben realizar la demostración (Ministerio de Educación Pública, 2012). Estas exigencias curriculares inciden directamente en el conocimiento del profesor de matemática para su desempeño profesional ya que debe promover que los estudiantes se familiaricen con el sentido de la demostración matemática. Para ello, con base en las recomendaciones metodológicas de dicho programa mencionadas en el apartado *1.1.2*, debe entre otras cosas: *(1)* promover que sus alumnos formulen conjeturas y planteen argumentos matemáticos para validarlas o refutarlas, *(2)* promover la discusión entre sus alumnos sobre los argumentos matemáticos planteados y sobre la convicción de los mismos, *(3)* realizar demostraciones de algunos teoremas, *(4)* promover que sus alumnos realicen demostraciones y *(5)* evaluar los argumentos y demostraciones propuestos por sus alumnos.

Lo anterior sugiere que para el abordaje la demostración matemática en un currículo de la educación secundaria, como contenido o como proceso, esta debe hacer parte del conocimiento que requiere el profesor de matemáticas para su desempeño profesional. Además de conocer los contenidos y sus relaciones, debe saber cómo se produce el conocimiento matemático y las reglas sintácticas de la disciplina (Medrano et al., 2016). En el caso de la demostración matemática debe tener un conocimiento específico que según hemos visto es amplio e incluye *el conocimiento matemático* que contempla saber sobre su naturaleza, es decir, sobre qué es una demostración y qué significa demostrar, sobre los aspectos lógicos y sintácticos y; sobre los aspectos matemáticos, además del conocimiento sobre sus funciones en las matemáticas. Asimismo, se incluye *el conocimiento pedagógico específico para la enseñanza de la demostración* que refiere al conocimiento de todos los elementos que posibilitan su enseñanza en la matemática escolar (Buchbinder y McCrone, 2018; Cabassut et al., 2012; Durand-Guerrier et al., 2012b; Knuth, 2002; Lin et al., 2012; Lo y McCrory, 2009; Pietropaolo y Campos, 2009; Tabach et al., 2009).

No obstante, hemos detectado en algunas investigaciones que los profesores de matemáticas tienen concepciones sobre la demostración complejas y distintas (Montoro, 2007), manifiestan que es importante en las matemáticas (Ayalon y Even, 2008; Ramos et al., 2015; Viseu et al., 2017) sin embargo, tienen puntos de vista diferentes sobre su papel en la matemática escolar (Crespo y Ponteville, 2005; Ramos et al., 2015). Asimismo, algunos profesores evidencian una visión reducida sobre la naturaleza de la demostración, deficiencias en el conocimiento matemático involucrado (Martínez-Recio, 1999; Knuth, 2002; Vicario y Carrillo, 2005), presentan argumentos empíricos como si fuesen demostraciones (Flores, 2007; Stylianides y Stylianides, 2009) y basan su convicción en entes externos más que en su propio conocimiento (Lin et al., 2012).

En el caso de la formación inicial de profesores de matemáticas, la Universidad Nacional de Costa Rica ofrece la carrera denominada *Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática*. Uno de los ejes curriculares del plan de estudios es el denominado *desarrollo del pensamiento lógico-matemático* que incluye el conocimiento sobre las demostraciones matemáticas las cuales están presentes en todas las actividades formativas y brindan soporte a las distintas áreas disciplinarias. De acuerdo a lo anterior, la demostración matemática está presente en la formación inicial de los profesores de matemáticas de la Universidad Nacional y con base en las exigencias curriculares del Programa de Estudios de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, es necesario que forme parte de las clases del futuro profesor de matemáticas; no solo para convencer de la validez de los resultados matemáticos sino también como procesos que deben promoverse en el quehacer de los estudiantes. Por lo tanto, el problema planteado en esta investigación está orientado a dar respuesta a la siguiente interrogante:

> *¿Cuál es el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la práctica matemática de la demostración?*

Puesto que el conocimiento sobre la demostración puede abarcar varios componentes, y los sujetos de investigación están finalizando su programa formativo y, por lo tanto, tienen poca experiencia profesional, esta investigación se delimitó al *conocimiento matemático*. Específicamente al conocimiento sobre los *aspectos lógicos y sintácticos* y al conocimiento sobre *los aspectos matemáticos* que son conocimientos necesarios en los profesores de matemáticas para demostrar teoremas en la educación secundaria y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones realizadas por sus alumnos. Tanto en la demostración de teoremas como en la evaluación de los argumentos matemáticos propuestos por sus alumnos, además del conocimiento matemático sobre la demostración, los profesores pueden considerar otros elementos de convicción que les hagan tomar decisiones sobre su validez. Por tal razón, hemos considerado estudiar las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los sujetos de investigación.

Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación de formación de profesores de matemáticas, la cual forma parte del grupo de investigación FQM 193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico. Específicamente en el conocimiento matemático de los profesores de matemáticas en formación inicial sobre la práctica matemática de la demostración para su desempeño profesional. Para llevar a cabo esta investigación consideramos pertinente el uso de un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas que tenga a la práctica de la demostración matemática como parte de sus categorías. El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* ha permitido lograr el objetivo parcialmente, debido a que el dominio del *conocimiento matemático* incluye a la demostración en uno de sus subdominios, a saber, *la práctica matemática*. No obstante, hemos tenido que completar la categorización para la demostración que se ha difundido del MTSK (Carillo et al., 2018; Flores-Medrano, 2015), dentro del subdominio de la práctica matemática, con base en investigaciones sobre la demostración en profesores de matemáticas, creando nuevos componentes que pueden ser considerados como evidencias del conocimiento matemático sobre la demostración.

Según Stylianides, Bieda y Morselli (2016) es necesario realizar investigaciones sobre el conocimiento que poseen los profesores de matemáticas, tanto en servicio como en formación inicial, sobre la argumentación y la demostración. Para Herbst (2000) la investigación sobre el papel del profesor de matemáticas con respecto a la demostración, debe orientarse a comprender en qué condiciones este profesional puede proponer, gestionar, mantener e incorporar en sus clases un proyecto teórico, es decir, la construcción de una teoría matemática que incluya a la demostración junto con su significado.

Consideramos que este trabajo es un aporte en la investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y pertinente en dos aspectos concretos: *(1)* para contar con insumos que favorezcan el abordaje de la demostración matemática en el plan de formación inicial del profesorado de matemáticas en la Universidad Nacional de Costa Rica y en otros planes de formación inicial similares y *(2)* para hacer un aporte teórico a la categoría *demostrar* en el subdominio de la práctica matemática en el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)*, concretamente en la construcción de componentes para estudiar conocimiento sobre la demostración matemática, en particular con indicadores de conocimiento sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos sobre esta. Asimismo, brinda insumos sobre las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los futuros profesores de matemáticas. Dado que la demostración es un objeto matemático complejo y con múltiples significados hemos considerado pertinente realizar un estudio teórico para caracterizar este concepto y contar con más elementos para las fases empíricas con los profesores de matemáticas en formación inicial. Con base en las ideas anteriores se plantean el objetivo general y los cuatro objetivos específicos en el siguiente apartado.

1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo general

OG. Caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la práctica matemática de la demostración.

Objetivos específicos

OE1. Precisar el significado, los tipos de demostración y las funciones que se le atribuyen, mediante un análisis conceptual de la demostración matemática.

OE2. Caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración matemática.

OE3. Caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre los aspectos matemáticos de la demostración.

OE4. Determinar las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica.

CAPITULO 2
MARCO TEÓRICO

Índice del capítulo

Dado que el propósito de esta investigación es caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la práctica matemática de la demostración, este capítulo consta de tres apartados. En el primero, *El análisis conceptual*, se brinda la definición de este método y sus características. Como se mencionó en el primer capítulo, la demostración es un término complejo de múltiples significados, por lo tanto, como parte de esta investigación, ha sido necesario realizar un análisis conceptual (Rico, 2001) de este término con el fin de precisar su significado, los tipos de demostraciones y las funciones atribuidas.

En el segundo apartado, *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas* se hace referencia a la relevancia de estudiar el conocimiento matemático sobre la demostración y la elección del modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* para sustentar teóricamente dicho estudio ya que en el subdominio llamado *la práctica matemática* se considera a la demostración como una de sus categorías. Se presenta además una breve descripción de los dominios y subdominios de dicho modelo de conocimiento.

Finalmente, en el tercer apartado, *La demostración en relación con el conocimiento del profesor de matemáticas*, hacemos una presentación más extensa del subdominio de *la práctica matemática* en el modelo *MTSK* y una propuesta de componentes y subcomponentes para la demostración matemática con base en los insumos del apartado *1.1.5* del capítulo 1.

Este tercer apartado se divide en tres subapartados: en el primero, *Elementos del conocimiento sobre la validez lógica de una demostración*, se detallan los tres elementos que fueron precisados con base en el análisis conceptual de la demostración y algunos elementos básicos de lógica que se emplearon en la *Fase empírica 1* en la construcción y en el análisis de la información de los cuestionarios 1 y 2 sobre los aspectos lógico-sintácticos de la demostración; en el segundo, *Elementos del conocimiento sobre la validez matemática de una demostración*, se discuten los aspectos matemáticos que consideramos en la *Fase empírica 2* en la construcción y el análisis de la información del cuestionario 3, específicamente sobre los términos *axiomas*, *definiciones* y *teoremas*; en el tercero denominado *Elementos de convicción de un argumento matemático* presentamos las características de los argumentos matemáticos que pueden ser convincentes para los futuros profesores y que se emplearon en la *Fase empírica 3* en la construcción y el análisis de la información del cuestionario 4.

2.1 EL ANÁLISIS CONCEPTUAL

Según Rico (2001), la multiplicidad de significados de los conceptos centrales propuestos en un marco teórico puede suponer una dificultad si no se hace una precisión de los mismos. Es por esto que "el análisis conceptual ofrece un método que permite al investigador convertir los conceptos en piezas teóricas precisas para el estudio que quiere llevar a cabo" (Rico, 2001, p.185).

En el marco del Análisis Didáctico, se define el análisis conceptual como "un método para trabajar y profundizar los conceptos, una técnica de escrutinio para conseguir precisión y domino en su uso" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 8).

Según Rico (2001) y Rico y Fernández-Cano (2013) el análisis conceptual tiene las siguientes características:

1. *Es un método no empírico que trabaja con enunciados textuales:* los datos que se consideran son descripciones, definiciones, listas extensivas, ejemplos de uso, la contraposición de textos con significados alternativos y formulaciones explícitas.
2. *Está orientado por elementos tales como la naturalidad, la aplicabilidad, la complejidad y la simplicidad:* realiza un cuidadoso examen de la diversidad de significados, las posibilidades de conexión entre los términos y los niveles objetivos (conceptos), subjetivos (creencias) e intersubjetivos (concepciones) de cada campo conceptual. Para una definición dada considera el contexto en donde ésta se inserta, usa ejemplos y contraejemplos en lugar de la definición explícita, usa analogías y términos evocativos en lugar de axiomas o cuantificadores y pruebas.
3. *Se considera la historicidad y dinamicidad de los términos:* hace una reflexión previa sobre lo que se desea investigar de manera que se determine y caracterice los elementos fundamentales que delimitan el problema de estudio y las ideas, conceptos y teorías sobre las que se desea tratar. Además, procura descartar las inconsistencias que se puedan generar debidas a la poca precisión en el significado de los conceptos que se utilicen.
4. *Es un método esclarecedor para los educadores e investigadores en Educación Matemática:* realiza una revisión profunda de los conceptos y nociones básicas sobre el conocimiento matemático, sus fundamentos e historia, su génesis y desarrollo y los principios para su enseñanza e interpretación de su aprendizaje.

En el capítulo 3 denominado *Marco Metodológico* se describe la forma en la que se realizó el análisis conceptual de la demostración. Asimismo, en capítulo 4, apartado 4.1, se presentan los principales resultados de dicho análisis.

2.2 EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Como se mencionó en el capítulo 1, el estudio del conocimiento profesional del profesor de matemáticas es un foco de interés en la investigación en Educación Matemática. Destacan en la década de 1980 los trabajos de Elbaz (1983) y Shulman (1986), las investigaciones del *International Group for the Psychology of Mathematics Education (IGPME)* (Ponte y Chapman, 2006), las perspectivas teóricas sobre el conocimiento y las creencias en la enseñanza y en el desempeño profesional del profesor de matemáticas en *The Handbook of Mathematics Teacher Education* (Sullivan & Wood, 2008).

A partir de estos trabajos, se ha generado un interés investigativo por examinar de manera analítica el conocimiento del profesor, para lo que se han construido modelos que permitan categorizar la naturaleza del conocimiento manifestado por los profesores, y con ello facilitar la comprensión de dicho conocimiento. En estos modelos se distinguen dos componentes principales: el conocimiento del contenido a enseñar y el conocimiento didáctico del contenido a enseñar (Carrillo et al., 2018).

Al preocuparnos por estudiar el conocimiento especializado del profesor de matemática sobre la demostración, nos interesamos, según hemos visto, por el conocimiento sobre el quehacer matemático, es decir, a la forma en la que se produce el conocimiento en las matemáticas (Carrillo et al., 2018; Flores-Medrano et al., 2016). Por lo tanto, para realizar esta investigación hemos considerado pertinente contar con un modelo teórico de conocimiento del profesor de matemática que incluya dentro de sus categorías a la demostración. El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* considera a este conocimiento del profesor de matemáticas como parte del conocimiento matemático y le ha asignado un subdominio dentro de él, llamado *Knowledge of Practices in Mathematics (KPM)* (Carrillo et al., 2018).

Un supuesto del modelo *MTSK* es que el profesor de matemáticas requiere un conocimiento específico para su desarrollo profesional y dicha especificidad está asociada a la enseñanza de las matemáticas e incluye los significados, las propiedades y las definiciones de temas específicos, las formas para lograr la comprensión del contenido en los alumnos, las conexiones temáticas, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento del quehacer matemático, entre otros. El modelo considera un enfoque analítico con el propósito de obtener información sobre el conocimiento del profesor, particularmente sobre los elementos que lo componen y sus interacciones. Para ello, se consideran dos dominios: *(1) el conocimiento matemático* y *(2) el conocimiento pedagógico del contenido*. Estos dominios cuentan con sus respectivos subdominios y poseen dos características fundamentales: *(1)* que su definición fue construida en términos de lo que los profesores de matemáticas emplean o necesitan sin referir a otras profesiones y *(2)* que el conocimiento en cuestión puede asignarse a los diferentes subdominios, es decir, cuando se afirma que un profesor requiere conocimientos en un subdominio dado, significa que el profesor necesariamente debe tener conocimiento que pueda ubicarse en ese subdominio (Carrillo et al., 2018).

En el conocimiento matemático se consideran tres subdominios que componen y le dan sentido a este dominio:

(1.1) el *conocimiento de los temas matemáticos (KOT):* este subdominio corresponde al conocimiento de la materia que será objeto de enseñanza, con un nivel mayor de profundización, organización y estructuración, lo cual supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. Consta de cinco categorías: *la fenomenología, las propiedades y sus fundamentos, las definiciones, los registros de representación y los procedimientos* (Carrillo et al., 2018; Liñán, Contreras y Barrera, 2015).

(1.2) el conocimiento de la estructura matemática (KSM): este subdominio corresponde al conocimiento del profesor sobre las matemáticas que enseña desde dos perspectivas: las llamadas *conexiones* que refieren al conocimiento de cómo se relacionan los elementos que se están considerando en un momento concreto de la enseñanza con otros y el conocimiento desde *una perspectiva superior de la matemática* que trasciende la conectividad entre temas y supone tener una visión global de las matemáticas escolares. Se consideran cuatro categorías de conexiones matemáticas: *de complejización, de simplificación, auxiliares* y *de contenidos transversales* (Carrillo et al., 2018; Montes y Climent, 2015).

(1.3) el conocimiento de la práctica matemática (KPM): la práctica matemática es toda actividad de carácter matemático que fundamenta de manera lógica a la creación matemática. Este subdominio corresponde al conocimiento que tiene el profesor sobre lo que significa demostrar, justificar, definir, deducir e inducir. Incluye el conocimiento del fundamento lógico de cada una de las prácticas anteriores y el del uso y funcionamiento del ejemplo y contraejemplo. En este subdominio se hace

referencia a las formas de producción y del funcionamiento de las Matemáticas. Algunas categorías son *demostrar, definir, ejemplificar* y *usar heurísticos*, sin embargo, no son exhaustivas y pueden emerger nuevas (Carrillo et al., 2018; Flores-Medrano, 2015).

Con respecto al conocimiento pedagógico del contenido el MTSK considera tres subdominios:

(2.1) el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM): este subdominio corresponde al conocimiento del profesor de matemáticas sobre las características de un contenido matemático en particular o de la matemática en general, como objeto de aprendizaje. Interesa el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje derivadas de la interacción del estudiante con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo. Se proponen tres categorías: *el conocimiento de las formas de interacción con el contenido matemático, el conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje del contenido matemático* y el *conocimiento de los intereses y expectativas de los estudiantes sobre el contenido matemático* (Carrillo et al., 2018; Escudero, Climent y Vasco, 2015).

(2.2) el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): este subdominio se refiere al conocimiento del profesor de matemáticas sobre las características del contenido matemático como objeto de enseñanza, incluye solo a los conocimientos en donde dicho contenido condiciona la enseñanza. Se consideran tres categorías: *el conocimiento de teorías de enseñanza asociadas a un contenido matemático, el conocimiento de las características matemáticas específicas de recursos didácticos para la enseñanza del contenido matemático* y *el conocimiento de las estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza del contenido matemático* (Carrillo et al., 2018; Escudero, Contreras y Vasco, 2015).

(2.3) el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS): este subdominio corresponde al conocimiento del profesor sobre los contenidos propuestos en las normativas curriculares de los diferentes niveles de enseñanza y sobre los materiales o recursos que se proponen en tales normativas para el abordaje de los diferentes contenidos. Se incluye también el conocimiento de lo que debe constituir la formación matemática de los ciudadanos con base en los resultados de la investigación en la Educación Matemática y el aporte de instituciones y asociaciones profesionales. Se consideran tres categorías para este subdominio: *el conocimiento que el profesor tiene acerca de qué contenidos matemáticos se requieren enseñar en el grado escolar en el que esté impartiendo clases, el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado para un tópico en un determinado momento escolar* y *el conocimiento sobre la secuenciación de diversos temas ya sea dentro del mismo curso o pensando en cursos anteriores o cursos posteriores* (Carrillo et al., 2018; Escudero y Carrillo, 2015).

2.3 LA DEMOSTRACIÓN EN RELACIÓN CON EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

El objeto de la *práctica* en el contexto de nuestra investigación, son las matemáticas mismas y por lo tanto el interés se centra en su funcionamiento y no en el proceso de su enseñanza. Entendemos a la *práctica matemática* en el sentido que indican Carrillo et al. (2018), es decir, como cualquier actividad matemática que se realice de manera sistemática, que sea fundamental en la creación del conocimiento matemático y que posea una base lógica que permita la extracción de reglas. El análisis conceptual de la demostración nos ha permitido clarificar qué se entiende por esta, cuáles funciones se le atribuyen y qué componentes pueden contribuir a caracterizarla. Con base en él, hemos determinado que la *demostración* satisface las características de la *práctica matemática* y, por lo tanto, se considera como una de las categorías dentro de este subdominio en el modelo *MTSK* pues dicha práctica hace referencia al conocimiento del profesor sobre la manera en la que se construye el conocimiento matemático. Incluye la jerarquización y la planificación en la manera de proceder al resolver problemas matemáticos, los tipos de validación y demostración, el papel del lenguaje y los símbolos, algunas prácticas particulares como la modelización y sobre las condiciones suficientes y necesarias para la generación de definiciones (Espinoza, Zakaryan y Carrillo, 2018; Flores-Medrano et al., 2016; Vasco y Climent, 2018).

Según Carrillo et al. (2018), la *práctica matemática (KPM)* puede ser general o específica a un tema. La *práctica matemática general* hace referencia al conocimiento del profesor sobre la forma en la que se desarrollan las matemáticas de manera genérica e independientemente de los temas particulares. La *práctica matemática específica* es un caso particular de la *práctica matemática (KPM)* y está asociada a las particularidades del tema matemático en cuestión, por ejemplo, el demostrar una determinada propiedad mediante el principio de inducción matemática está vinculada con la forma de proceder en conjuntos numerables e infinitos, el demostrar una afirmación en el conjunto de los números naturales dividiendo el problema en casos, entre otros.

En nuestra investigación, consideramos que el conocimiento sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración es atendido por esta práctica matemática general ya que como lo indican Carrillo et al. (2018) incluye el conocimiento del significado de las condiciones necesarias y suficientes, del tipo de demostración para garantizar la veracidad de una afirmación matemática, las diversas prácticas argumentativas, entre otras. Asimismo, el conocimiento sobre los aspectos matemáticos de la demostración está considerado por la práctica matemática específica, pues no solo es requerido el conocimiento lógico-sintáctico general, sino que también considera a las matemáticas involucradas en las proposiciones y sus demostraciones.

Como mencionamos en el apartado *1.1.5 sobre el conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza de la demostración* en el primer capítulo, determinar cuál es el conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza de la demostración es una tarea compleja. Asimismo, según Carrillo et al. (2018) este conocimiento forma parte de *la práctica matemática* en el modelo *MTSK*, por lo que empleamos sus descriptores, estando abiertos a completarlos cuando aparezcan dimensiones que permitan profundizar más en el mismo. En el apartado *1.1.5* se hizo una aproximación a este conocimiento y se consideraron dos grupos de conocimientos: *(1) el conocimiento matemático de la demostración* y *(2) el conocimiento pedagógico específico para la enseñanza de la demostración*.

En el apartado *1.2 el problema de investigación y la pertinencia del trabajo* en el capítulo 1, se indicó que el foco de interés de nuestra investigación es el conocimiento matemático de la demostración, particularmente los *aspectos lógicos y sintácticos* y *los aspectos matemáticos*. Con base en el análisis conceptual de la demostración, en investigaciones (Buchbinder y McCrone, 2018; Cabassut et al., 2012; De Villiers, 1993; Durand-Guerrier et al., 2012b; Flores-Medrano, 2015; Knuth, 2002; Lin et al., 2012; Lo y McCrory, 2009; Pietropaolo y Campos, 2009; Tabach et al., 2009) sobre la demostración en profesores de matemáticas y en los insumos del apartado *1.1.5* del capítulo 1, hemos detectado algunos de los elementos relevantes que creemos que deben ser considerados en el conocimiento matemático sobre la demostración dentro del subdominio de la *práctica matemática* en el *MTSK*, hasta establecer dos componentes principales: *(1) el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática* y *(2) el conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas*. A continuación, se detallan cada uno de los componentes mencionados.

> *(1) El conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática:* es el conocimiento sobre lo que constituye una demostración matemática, hace referencia al conocimiento de la demostración como un objeto en sí mismo con sus características y estándares propios que permita construir y evaluar demostraciones, seleccionar, organizar, demostrar teoremas y conocer sus implicaciones. Se consideran los siguientes subcomponentes: *(a) el concepto de demostración matemática*, es decir, el conocimiento sobre qué es una demostración matemática y qué significa demostrar algo en las matemáticas, *(b) la validez lógica*, que refiere al conocimiento de los elementos sintácticos generales, los tipos de demostraciones, el lenguaje, los términos empleados, las características de los sistemas axiomáticos, las nociones de lógica, la noción de rigor, la noción de verdad, las conectivas lógicas, los cuantificadores existencial y universal, las reglas de inferencia y equivalencia lógicas, entre otros y cómo proceder en la demostración de afirmaciones matemáticas según su estructura lógico-sintáctica y *(c) la validez matemática*, que se refiere al conocimiento sobre la estructura de las teorías matemáticas en donde son consideradas las demostraciones lo que supone el uso correcto de los axiomas, hipótesis, definiciones y teoremas involucrados.

> *(2) El conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas:* es el conocimiento sobre cuál es el papel de las demostraciones en las matemáticas. Se consideran los siguientes subcomponentes propuestos por De Villiers (1993): *la verificación, la explicación, la sistematización, el descubrimiento y la comunicación*.

Con base en lo anterior, el estudio sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas sobre los aspectos lógico-sintácticos, está relacionado con la *validez lógica*, y el conocimiento sobre los aspectos matemáticos de la demostración está vinculado a la *validez matemática* de la demostración. Asimismo, en el apartado *1.2* del capítulo 1 se indicó la relevancia de estudiar las características de los argumentos matemáticos que más convencen a los futuros profesores. A continuación, se detallan los tres aspectos mencionados, a saber: elementos del conocimiento sobre la validez lógica y matemática de una demostración, así como los elementos de convicción de un argumento matemático.

2.3.1 Elementos del conocimiento sobre la validez lógica de una demostración

El conocimiento de los principios del razonamiento lógico es útil para determinar qué significa que una afirmación matemática sea verdadera y qué debería hacerse para demostrar su validez. Las respuestas a estas interrogantes dependen directamente de las reglas de inferencia de la lógica de predicados y de la estructura sintáctica de las proposiciones involucradas. La lógica se entiende aquí como la disciplina que trata los aspectos semánticos y sintácticos de la organización del discurso matemático con el objetivo de deducir resultados que se siguen de manera necesaria de un conjunto de premisas (Durand-Guerrier et al., 2012b).

Para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración, se han considerado tres elementos de la *validez lógica* que fueron precisados con base en el análisis conceptual de la demostración matemática (Alfaro, Flores y Valverde, 2019) y se presentan con mayor detalle en el capítulo 4, específicamente en el apartado *4.1.2 los tipos de demostraciones en matemáticas*:

> *(1) El tipo de demostración:* se considera el conocimiento del profesor de matemáticas sobre los tipos de demostraciones, directas e indirectas, que pueden emplearse para demostrar una proposición matemática Q que puede tener la forma $P \Rightarrow Q$ de forma explícita o implícita, en este último caso, P representa a todos los axiomas, definiciones y teoremas de la teoría matemática en donde se inserta la proposición Q.
>
> *(2) El tipo de cuantificador:* corresponde al conocimiento del profesor de matemática sobre cómo proceder, de forma directa o indirecta, en la demostración de una proposición matemática que involucra un cuantificador universal o un cuantificador existencial. Las proposiciones con cuantificador universal en general tienen la forma $\forall x \in U\left(P\left(x \right) \right)$ y las proposiciones con cuantificador existencial $\exists x \in U\left(P\left(x \right) \right)$, en donde $P\left(x \right)$ es una propiedad con variable x que pertenece a un dominio de discurso o conjunto universo U.
>
> *(3) El tipo de conectiva lógica:* hace referencia al conocimiento del profesor de matemática sobre cómo proceder, de forma directa o indirecta, en la demostración de proposiciones matemáticas que involucren las conectivas lógicas *implicación*, *disyunción*, *conjunción* y la *doble implicación* lo que hace necesario el conocimiento sobre los criterios de veracidad y falsedad de tales conectivas lógicas.

Se presentan además una serie de términos, equivalencias e inferencias lógicas que fueron relevantes en la construcción de los cuestionarios 1 y 2 para la recolección de la información sobre los aspectos lógico-sintácticos y para el posterior análisis de la información.

Elementos básicos de lógica

Los razonamientos y las demostraciones matemáticas se basan en *proposiciones* o *afirmaciones* las cuales son expresiones o enunciados declarativos con sentido o cadenas de símbolos inteligibles que se pueden catalogar como falsos o verdaderos. Toda proposición debe cumplir el principio llamado tertium non datur (el tercero excluido) según el cual debe ser falsa o verdadera, y no puede haber otra posibilidad. Además, debe cumplir el principio de no contradicción que establece que debe ser o bien falsa o bien verdadera y no puede ser las dos cosas de manera simultánea (Barrantes, 2001; Bartle y Sherbert, 2004; Góngora, 1983; Murillo, 2010).

Se llaman *frases abiertas*, *oraciones abiertas* o *propiedades* a una colección de palabras y símbolos llamados variables que se transforman en proposiciones cuando las variables se sustituyen por ciertos objetos. El *dominio* o *universo de discurso* de una frase abierta es el conjunto que contiene a los objetos que pueden ser sustituidos en las variables de dicha frase (Góngora, 1983 y Barrantes, 2001). Se llaman *tautologías* a las proposiciones que siempre son verdaderas y *contradicciones o falacias* a las proposiciones que siempre son falsas. Además, dadas dos proposiciones P y Q se dice que son *equivalentes lógicos* o *lógicamente equivalentes* si ambas tienen siempre el mismo valor de verdad, a saber, falso o verdadero. En tal caso se denota $P \equiv Q$ (Bartle y Sherbert, 2004).

Dadas dos o más proposiciones, se pueden formar otras mediante el uso de las conectivas o conectores lógicos los cuales se describen seguidamente (Bartle y Sherbert, 2004; Murillo, 2010):

(1) la negación: dada una proposición P su negación es la proposición llamada *no* P la cual se denota $\neg P$. Cuando P es verdadera $\neg P$ es falsa; y cuando P es falsa $\neg P$ es verdadera.

(2) la conjunción: dadas las proposiciones P y Q su conjunción es la proposición llamada P *y* Q la cual se denota $P \wedge Q$. Esta proposición es verdadera cuando P y Q son verdaderas, en cualquier otro caso, es falsa.

(3) la disyunción: dadas las proposiciones P y Q su disyunción es la proposición llamada P *o* Q la cual se denota $P \vee Q$. Esta proposición es falsa cuando P y Q son falsas, en cualquier otro caso, es verdadera.

(4) la condicional: dadas las proposiciones P y Q su condicional es la proposición llamada *Si* P *entonces* Q la cual se denota $P \rightarrow Q$. Esta proposición es falsa cuando P es verdadera y Q es falsa, en cualquier otro caso, es verdadera. En el caso de que la proposición $P \rightarrow Q$ sea una tautología entonces la proposición se llama implicación y se denota $P \Rightarrow Q$.

(5) la bicondicional: dadas las proposiciones P y Q su bicondicional es la proposición llamada *Si* P *entonces* Q *y Si* Q *entonces* P la cual se denota $P \leftrightarrow Q$. Es claro que $P \leftrightarrow Q \equiv \left[\left(P \rightarrow Q \right) \wedge \left(Q \rightarrow P \right) \right]$. Esta proposición es verdadera cuando P y Q tienen el mismo valor de verdad, en cualquier otro caso, es falsa. En el caso de que la proposición $P \leftrightarrow Q$ sea una tautología entonces la proposición se llama doble implicación y se denota $P \Leftrightarrow Q$

Existen una serie de equivalencias lógicas que se pueden llamar *leyes de la lógica*. Son importantes en las demostraciones matemáticas debido a que permiten transformar una proposición en otra que sea más sencilla de demostrar. A continuación, se presentan algunas de ellas (Murillo, 2010):

(1) ley de la implicación y disyunción: $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$.

(2) ley contrapositiva: $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$.

(3) ley de la doble negación: $\neg(\neg P) \equiv P$.

(4) ley de De Morgan: $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ y $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$.

(5) ley conmutativa: $P \vee Q \equiv Q \vee P$ y $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$.

(6) ley asociativa: $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ y $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$.

(7) ley distributiva: $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ y $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

(8) ley de idempotencia: $P \wedge P \equiv P$ *y* $P \vee P \equiv P$.

(9) ley de absorción: $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ y $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$.

(10) ley de exportación: $P \to (Q \to R) \equiv (P \wedge Q) \to R$.

(11 ley de exhaución: $(P \vee Q) \to R \equiv [\ (P \to R) \wedge (Q \to R)\ ]$.

Se dice que una proposición Q está garantizada por las proposiciones $P_1, P_2, \cdots, P_n$ si la proposición $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ es una tautología. En tal caso la proposición recibe el nombre de *razonamiento válido*, si no es una tautología, se llama razonamiento inválido. Las proposiciones $P_1, P_2, \cdots, P_n$ se llaman *premisas* del razonamiento y Q se llama *conclusión*. Existen una serie de razonamientos válidos que son fundamentales al realizar demostraciones matemáticas y se les puede llamar *reglas de inferencia lógica*. Se detallan algunas de las más importantes (Murillo, 2010):

(1) la simplificación: $(P \wedge Q) \to P$ y $(P \wedge Q) \to Q$.

(2) la adición: $P \to (P \vee Q)$ en donde Q es cualquier proposición.

(3) la separación o modus ponendo ponens: $[\ P \wedge (P \to Q)\ ] \to\ Q$.

(4)la contraposición o modus tollendo tollens: $[\ \neg Q \wedge (P \to Q)\ ] \to\ \neg P$.

(5) el silogismo disyuntivo: $[\ \neg P \wedge (P \vee Q)\ ] \to\ Q$.

(6) el silogismo hipotético: $[\ (P \to Q) \wedge (Q \to R)\ ] \to\ (P \to R)$.

(7) el dilema constructivo: $[(P \to Q) \wedge (R \to T) \wedge (P \vee R)\ ] \to\ (Q \vee T)$.

(8) el dilema destructivo: $\left[(P \to Q) \wedge (R \to T) \wedge (\neg Q \vee \neg T)\right] \to (\neg P \vee \neg R)$.

(9) la ley de casos: $\left[(P \to Q) \wedge (\neg P \to R)\right] \to (Q \vee R)$.

2.3.2 Elementos del conocimiento sobre la validez matemática de una demostración

Las teorías matemáticas son hipotéticas y están conformadas por proposiciones de la forma *si–entonces* lo que supone que la demostración matemática requiere rigor. Los axiomas, hipótesis, definiciones y teoremas involucrados deben ser entendidos y aplicados en sus significados exactos (Cabassut et al., 2012).

En el estudio de estas teorías es de interés el someter las hipótesis iniciales a un control lógico riguroso y normalmente esto se realiza en una teoría formal o sistema formal o axiomáticos que consta de cuatro elementos: *(1)* un conjunto de símbolos primitivos o alfabeto, *(2)* un repertorio de reglas de formación de fórmulas, *(3)* un conjunto de axiomas o postulados que constituyen las fórmulas primitivas del sistema y *(4)* un repertorio de reglas de inferencia. Los dos primeros elementos constituyen el lenguaje o la gramática del sistema y los dos segundos la lógica del sistema (Garrido, 1991).

En una teoría formal o sistema matemático, se distinguen tres elementos fundamentales: *(1) los axiomas* que son presupuestos necesarios que se escogen en la teoría en cuestión con algún criterio de racionalidad que se convenga aceptar, en general no tienen su base en hechos particulares del mundo, sino que son construcciones mentales ideales en la organización del conocimiento y deben considerarse fijos y absolutos dentro del campo matemático en el que están inmersos; *(2) las definiciones* que refiere a oraciones convencionales que se han obtenido de experiencias anteriores o que se han construido con el propósito de fijar el significado de las palabras empleadas en las demostraciones y; *(3) los teoremas* que son los enunciados deducidos de los axiomas u otros teoremas mediante las reglas de inferencia (Cabassut et al., 2012; Garrido, 1991; Patterson, 1950; Roberts,2010).

2.3.3 Elementos de convicción de un argumento matemático

El término *argumento* es una unidad discursiva básica de la argumentación y puede entenderse de diferentes formas en función del enfoque de esta: *(1) en la argumentación discursiva*, el argumento tiene como propósito persuadir de manera racional a quien se dirige, no parte necesariamente de premisas indiscutibles para llegar a conclusiones lógicas, por lo tanto, no es siempre un razonamiento evidente e irrefutable; *(2) en la argumentación como producto textual de una interacción discursiva*, el argumento consiste en un conjunto de proposiciones orientadas a evidenciar que una de ellas está justificada por las restantes, parte de premisas indiscutibles y llega a conclusiones lógicas por procedimientos deductivos los cuales son dictados por la lógica de la razón (Lo Cascio, 1998; Vega, 2012a).

El argumento matemático es un argumento en donde las proposiciones empleadas son afirmaciones matemáticas. Este tipo de argumento tiene varias similitudes con la demostración matemática, a saber, se consideran como justificaciones racionales, se llevan a cabo para convencer sobre la veracidad de una afirmación, se dirigen a una audiencia universal que puede estar conformada por la comunidad matemática, el aula, el profesor, el mismo interlocutor, entre otros y, en ambos las proposiciones involucradas pertenecen a un campo teórico como el álgebra, el análisis, la geometría, entre otros (Pedemonte, 2007).

Para De Villiers (1993) y Hanna (2002), la demostración es un argumento cuyo propósito es garantizar la validez de una proposición matemática. Puede tener diversas formas siempre y cuando sea convincente, ya que en las Matemáticas la convicción se puede lograr empleando formas alternativas a una demostración lógica y formal. En efecto, en la comunidad matemática la aceptación de un teorema consiste en un proceso social en donde tiene más relevancia la comprensión y el significado que una demostración rigurosa del mismo. De esta manera la convicción y aceptación de un nuevo resultado en Matemáticas está vinculado a factores tales como *la comprensión del teorema* que refiere a que los conceptos incorporados en él, sus antecedentes lógicos y sus implicaciones, sean claros; *la importancia del* teorema, es decir, que el resultado tenga implicaciones en al menos una rama de las Matemáticas; *la compatibilidad del teorema*, que alude a que sea consistente con los resultados matemáticos aceptados; *la reputación del autor*, es decir que la persona que lo proponga sea un reconocido experto en la temática abordada; y *la convicción del teorema*, que refiere a que se brinde un argumento matemático convincente, riguroso o no, de la validez del teorema.

Algunos investigadores han indicado que la convicción de los profesores de matemáticas sobre algún resultado puede estar basada en algunos elementos diferentes a su propio conocimiento (Knuth, 2002; Lin et al., 2012). Esto es relevante debido a las implicaciones que pueda tener en su desempeño profesional para el abordaje de la enseñanza de la demostración. Por tal razón, consideramos a la convicción de un argumento matemático, como las razones por las que los profesores de matemáticas encuentran convincente a un argumento matemático. Como se ha mencionado, un argumento para validar una afirmación puede asumir varias formas diferentes y ser convincente, aunque no necesariamente sea una demostración (De Villiers, 1993; Hanna, 2002). Se consideran los siguientes subcomponentes basados en los trabajos de Knuth (2002) y Harel y Sowder (1998):

(1) el uso de elementos concretos en el argumento: el argumento es convincente debido a que se basa en ejemplos específicos o utiliza alguna referencia visual.

(2) la familiaridad del argumento: el argumento es convincente debido a que el profesor lo conoce o lo ha utilizado anteriormente, la convicción no se basa en las matemáticas utilizadas, sino en la experiencia previa del profesor de matemáticas con el argumento.

(3) el nivel de detalles en el argumento: el argumento es convincente debido a que justifica con mucho detalle cada paso realizado en él.

(4) la forma ritual del argumento: el argumento es convincente en función de su apariencia superficial en lugar de considerar los elementos de fondo. De esta manera, se juzga el valor del argumento en función del uso de notaciones matemáticas simbólicas, aunque lo expresado no tenga validez lógica o matemática.

(5) el nivel explicativo del argumento: el argumento es convincente porque explica por qué la afirmación que se está demostrando es verdadera. Es decir, muestra las matemáticas subyacentes que explican la validez del resultado.

(6) la validez del argumento: la convicción se basa en la validez matemática y la validez lógica del argumento. En el argumento se utilizan correctamente las reglas de inferencia, las equivalencias lógicas, los métodos de demostración y la teoría matemática correspondiente.

CAPITULO 3
MARCO METODOLÓGICO

Índice del capítulo

Este capítulo consta de cuatro apartados. En el primero, *Fundamentos y perspectiva general de la investigación*, se presentan los principales elementos de la investigación tales como su adscripción al paradigma interpretativo y al enfoque cualitativo, las fases que la componen, una breve referencia a los elementos considerados en la construcción de los instrumentos de recolección de la información, así como a la técnica del análisis de contenido empleada en el análisis de la información.

En el segundo apartado, *Sujetos de investigación*, se hace una descripción de los sujetos de investigación que participaron en cada una de las fases del trabajo. En el caso de la *fase teórica 0* se mencionan los documentos empleados en el análisis conceptual de la demostración y en el caso de las *fases empíricas 1, 2 y 3*, se indica la cantidad de profesores de matemáticas en formación inicial que completaron los cuestionarios en cada una de ellas y el contexto formativo de los mismos.

En el tercer apartado, *Recolección de la información*, se hace una descripción de la forma en que esta se recolectó. En el caso de la *fase teórica 0* se refiere a la revisión bibliográfica y en las *fases empíricas 1, 2 y 3* se describen cada uno de los cuatro cuestionarios empleados. Asimismo, se hace un análisis de la estructura lógico-sintáctica de cada una de las proposiciones consideradas en los cuestionarios 2, 3 y 4 así como una demostración de cada una de ellas.

En el cuarto apartado, *Aspectos metodológicos del análisis de la información*, se hace una descripción de la forma en que esta se analizó en cada fase del trabajo. En el caso de la *fase teórica 0* se refiere al análisis conceptual en el marco del Análisis Didáctico. En las *fases empíricas 1, 2 y 3* se hace referencia al análisis de contenido como lo plantean Cohen, Manion, y Morrison (2007) y Krippendorff (2004).

3.1 FUNDAMENTOS Y PERSPECTIVA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Este trabajo se posiciona en el paradigma interpretativo que se caracteriza por una preocupación por el individuo, para entender sus interpretaciones del mundo que lo rodea, con el objetivo de comprender el mundo subjetivo de la experiencia humana. Para retener la integridad de los fenómenos que se investigan, se hacen esfuerzos para entrar en la persona y comprenderla desde adentro. El objetivo de la investigación científica para el investigador interpretativo es comprender cómo ocurre la realidad en un momento y en un lugar y, compararlo con lo que sucede en diferentes momentos y lugares. Por lo tanto, la teoría se convierte en conjuntos de significados que dan una idea y comprensión del comportamiento de las personas (Cohen, Manion y Morrison, 2007; Sandín, 2003).

En nuestro caso, pretendemos profundizar y comprender aspectos del conocimiento especializado sobre la demostración en profesores de matemáticas en formación inicial en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, entendiendo que el conocimiento se construye de manera personal, situada y contextualizada, a la cual se puede acceder únicamente de forma parcial.

La investigación tiene un enfoque cualitativo debido a que interesa la interpretación de los significados que los sujetos atribuyen a sus acciones, se estudian los hechos como un todo, de manera global e integrada, no se generalizan los resultados de la investigación, debido a que pertenecen a un tiempo y espacio en particular, utiliza instrumentos con poca estructura, entre otros (Bryman, 2012; Rodríguez, 2003).

El trabajo consta de cuatro fases, una fase teórica denominada *fase 0* y tres fases empíricas llamadas *fase 1*, *fase 2* y *fase* 3, cada una de ellas corresponde de manera respectiva a uno a los cuatro objetivos específicos formulados: *OE1*, *OE2*, *OE3* y *OE4*. La *fase 0* consiste en un estudio teórico centrado en los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas, el concepto de demostración, los tipos de demostraciones y las funciones atribuidas. Las *fases 1, 2 y 3* consisten en estudios empíricos para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre: *(1)* los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración matemática, que corresponde a la *validez lógica* de la demostración matemática; *(2)* los aspectos matemáticos de la demostración, que corresponde a la *validez matemática* de la demostración y; *(3)* las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a dichos profesores de matemáticas, que corresponde a la *convicción de un argumento matemático*.

Para cada fase empírica se elaboraron cuestionarios para la recolección de la información sobre el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en formación inicial, considerando en su construcción investigaciones previas, el modelo de conocimiento *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* y elementos teóricos sobre el concepto de demostración matemática, los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos de la demostración y la convicción de un argumento matemático.

Para el análisis de la información de los cuestionarios se empleó el análisis de contenido que permite la codificación de preguntas abiertas en encuestas, cuestionarios y la descripción de patrones y tendencias en el contenido comunicativo. Este análisis implica codificación, categorización (creación de categorías significativas en las que se pueden ubicar las unidades de análisis-palabras, frases, oraciones), comparación (categorías y creación de vínculos entre ellas) y conclusión -extraer conclusiones teóricas de las unidades de análisis (Cohen, Manion, y Morrison, 2007; Krippendorff, 2004).

En la tabla 3, presentamos un resumen del esquema general de la metodología.

Tabla 3

Esquema general de la metodología

Fases de la investigación	Fase 0. Análisis conceptual de la demostración matemática	Fase 1. Validez lógica	Fase 2. Validez matemática	Fase 3. Convicción de un argumento matemático
Objetivos específicos asociados	OE1	OE2	0E3	OE4
Marco teórico empleado	Análisis conceptual (Rico, 2001)	Modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018)		
Fuentes de información	Diccionarios, libros de texto, investigaciones previas sobre la demostración matemática, y el Programa de Estudios	25 profesores de matemáticas en formación inicial	19 profesores de matemáticas en formación inicial	

	de Matemáticas de la educación secundaria en Costa Rica.			
Recolección de la información	La ficha bibliográfica para incluir la información relevante	Cuestionario 1: formas de proceder en la demostración Cuestionario 2: evaluación de argumentos en función de la estructura lógico-sintáctica	Cuestionario 3: evaluación de argumentos en función de los aspectos matemáticos	Cuestionario 4: características de los argumentos matemáticos más convincentes
Método para el análisis de la información	Análisis conceptual centrado en los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas, el concepto, los tipos y las funciones atribuidas	El análisis de contenido (Cohen, Manion, y Morrison, 2007; Krippendorff, 2004).		

En las secciones siguientes se describen con detalle los sujetos de investigación, los instrumentos de recolección de la información y la forma en la que se hizo el análisis de la información en cada una de las fases del trabajo.

3.2 SUJETOS DE INVESTIGACIÓN

En este apartado se consideran a los sujetos de investigación de la fase teórica 0 y a los sujetos de las fases empíricas 1, 2 y 3. Como se verá a continuación, en la fase empírica 1 participaron 25 sujetos y en las fases empíricas 2 y 3 participaron 19 sujetos.

3.2.1 Sujetos de investigación de la fase teórica 0

En la *fase 0*, el estudio teórico se realizó empleando la herramienta metodológica del análisis conceptual, por tal razón los sujetos de investigación fueron las siguientes fuentes de información documental: *(1) diccionarios*: etimológicos, de matemáticas, de educación matemática, de educación, de filosofía y de la lengua española; *(2) libros de texto*: de matemáticas, de educación matemática, de matemáticas en educación secundaria y de historia de las matemáticas; *(3) investigaciones previas* sobre la demostración matemática, y *(4) el Programa de Estudios de Matemáticas* de la educación secundaria en Costa Rica.

3.2.2 Sujetos de investigación de las fases empíricas 1,2 y 3

En la *fase 1* participaron 25 profesores de matemáticas en formación inicial de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, 18 matriculados en el cuarto año de la carrera y se les llamó Grupo de Bachillerato (GB) y 7 matriculados el quinto año y se les llamó Grupo de Licenciatura (GL). Ambos grupos constituyeron la totalidad del estudiantado matriculado y activo en esos niveles durante el segundo semestre del 2018.

En las *fases 2 y 3* participaron 19 profesores de matemáticas en formación inicial de dicha carrera, 12 matriculados en el cuarto año (GB) y 7 matriculados en el quinto (GL), de igual forma, ambos grupos correspondían a la totalidad del estudiantado matriculado y activo en esos niveles durante el primer semestre del 2019. De los 12 sujetos matriculados en el cuarto año, 11 participaron en la fase 1. Los 7 sujetos matriculados en el quinto año eran los mismos que participaron en la fase 1. Esta carrera se imparte de manera compartida por la Escuela de Matemática que ofrece el componente matemático y la División de Educología que brinda el componente pedagógico. Otorga el grado académico de Bachillerato con una duración de cuatro años y el de Licenciatura que consta de tres semestres adicionales y la elaboración de un trabajo final de graduación. Todos los sujetos participantes en la investigación han estudiado la demostración y han tenido que probar su destreza demostrando propiedades para aprobar los cursos del plan de estudios de la carrera.

3.3 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

En este apartado se consideran cuatro secciones. En la primera se describe la recolección de la información de la fase teórica 0, correspondiente al análisis conceptual de la demostración matemática, mediante la revisión bibliográfica. En la segunda, la recolección de la información de la fase empírica 1, que corresponde a la validez lógica de la demostración, mediante los cuestionarios 1 y 2. En la tercera, la recolección de la información de las fases empíricas 2 y 3, correspondientes a la validez matemática de la demostración y a la convicción de un argumento matemático, mediante los cuestionarios 3 y 4, respectivamente. Finalmente, en la cuarta sección, se presenta un análisis de la estructura lógico- sintáctica de las proposiciones matemáticas utilizadas en los cuestionarios 2, 3 y 4 con una propuesta de demostración para cada una de ellas.

3.3.1 Recolección de la información de la fase teórica 0

En la fase 0, la técnica que se utilizó para recolectar los datos fue la revisión bibliográfica o de literatura. Acorde con Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista (2014), esta revisión "implica detectar, consultar y obtener la bibliografía (referencias) y otros materiales que sean útiles para los propósitos del estudio, de donde se tiene que extraer y recopilar la información relevante y necesaria para enmarcar nuestro problema de investigación" (p. 61). Una vez que fueron identificados y recopilados los trabajos de interés, se usó la ficha bibliográfica para incluir la información relevante de los documentos consultados: la referencia del documento, los datos sobre los autores, la naturaleza del documento, sus ideas principales, su ubicación y algunas observaciones pertinentes.

3.3.2 Recolección de la información de la fase empírica 1

Para la recolección de la información de la *fase 1*, se elaboraron dos cuestionarios que se aplicaron en los meses de setiembre y octubre del 2018, el primero con una duración aproximada de dos horas y el segundo de una hora. Los sujetos lo completaron de forma individual en los horarios asignados a los cursos matriculados. Previo a su aplicación, fueron revisados por tres especialistas en Educación Matemática quienes se eligieron por su formación en matemáticas y en didáctica de las matemáticas, además de su amplio conocimiento del contexto formativo de los sujetos de investigación. A continuación, se describe cada uno de los cuestionarios aplicados.

El cuestionario 1: Validez lógica, formas de proceder en una demostración

Para la construcción de este cuestionario, se realizaron las siguientes etapas:

1. La consideración de los elementos del marco teórico sobre el conocimiento de la validez lógica de una demostración para la generación de las categorías de análisis: *(1)* el tipo de demostración (directa o indirecta), *(2)* el tipo de cuantificador (universal o existencial) y *(3)* el tipo de conectiva lógica (implicación, disyunción, conjunción y doble implicación).
2. La revisión del Programa de Estudios de Matemáticas de la Educación Secundaria en Costa Rica para analizar la estructura sintáctica de las proposiciones matemáticas que se sugiere demostrar. Se determinó que la mayoría de proposiciones son de cuantificación universal en conjuntos infinitos, sin embargo, se propone la verificación de propiedades para casos particulares, por lo que en menor medida se detectó la presencia de afirmaciones de cuantificación existencial.
3. Se decidió que la caracterización debía estar regida por las formas de proceder en la demostración de proposiciones matemáticas en función de la estructura sintáctica y, por lo tanto, dichas proposiciones debían estar desprovistas de contenido matemático, a tales proposiciones se les llamó *proposiciones genéricas*. No obstante, se consideró pertinente que los sujetos propusieran un ejemplo concreto de la proposición genérica en cuestión y ofrecieran una demostración de la misma.
4. Dado que las propiedades que se demuestran en la enseñanza secundaria expresan cualidades aplicables a todos los elementos de un conjunto determinado, se ha decidido incluir demostraciones con cuantificador universal, y sólo una existencial. De esta manera las afirmaciones debían involucrar al cuantificador universal con una propiedad simple y con propiedades compuestas empleando a las conectivas lógicas implicación, disyunción, conjunción y doble implicación. Además, se consideró al cuantificador existencial con una propiedad simple.
5. Se consideró pertinente que cada una de las seis afirmaciones genéricas dieran origen a una tarea.

Con base en lo anterior, el cuestionario 1 consta de seis tareas, en cada una de ellas se presenta una proposición matemática, de forma verbal y simbólica, que se denomina *genérica*. En cada tarea los sujetos debían realizar lo siguiente: *(1) explicar la forma general en la que realizarían la demostración matemática de la proposición genérica dada* y *(2) proporcionar un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo brindado*. En esta segunda instrucción, se sugirió utilizar proposiciones y demostraciones sencillas de las matemáticas escolares, es decir, de temas como álgebra, números, geometría, relaciones y funciones que se abordan en la educación secundaria costarricense. En la tabla 4 se muestra cada una de las proposiciones genéricas contempladas en las tareas.

Tabla 4

Proposiciones genéricas de las tareas del cuestionario 1

Tarea	**Proposición genérica**	
	Representación verbal	**Representación simbólica**
Tarea 1: Universal simple	*Todos los elementos de un conjunto* U *satisfacen una propiedad* $P(x)$	$\forall x \in U\left(P(x)\right)$

Tarea 2: Existencial simple	*Al menos un elemento de un conjunto* U *satisface una propiedad* $P(x)$	$\exists x \in U\left(P(x)\right)$
Tarea 3: Implicación universal	*Todos los elementos de un conjunto* U *cumplen que, si satisfacen una propiedad* $P(x)$ *entonces satisfacen una propiedad* $Q(x)$	$\forall x \in U\left[P(x) \Rightarrow Q(x)\right]$
Tarea 4: Disyunción universal	*Todos los elementos de un conjunto* U *satisfacen una propiedad* $P(x)$ *o satisfacen una propiedad* $Q(x)$	$\forall x \in U\left[P(x) \vee Q(x)\right]$
Tarea 5: Conjunción universal	*Todos los elementos de un conjunto* U *satisfacen de manera simultánea una propiedad* $P(x)$ *y una propiedad* $Q(x)$	$\forall x \in U\left[P(x) \wedge Q(x)\right]$
Tarea 6: Doble implicación universal	*Todos los elementos de un conjunto* U *satisfacen una propiedad* $P(x)$ *siempre y cuando satisfacen una propiedad* $Q(x)$	$\forall x \in U\left[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\right]$

El cuestionario 2: Validez lógica, evaluación de argumentos matemáticos

En la construcción de este cuestionario también se tomaron en cuenta elementos del marco teórico sobre el conocimiento de la validez lógica como *el tipo de demostración (directa o indirecta), el tipo de cuantificador (universal)* y *el tipo de conectiva lógica (implicación)*. La categoría de análisis considerada es la *implicación universal*.

Hemos consideramos pertinente que los sujetos de investigación evaluaran la forma de proceder en la demostración de una proposición matemática concreta con la estructura sintáctica de una *implicación universal*, que es la forma que tiene mayor presencia en el Programa de Matemáticas de la Educación Secundaria en Costa Rica. La proposición que hemos empleado en el cuestionario 2, fue propuesta por Knuth (2002) en su investigación con profesores de matemáticas en donde les planteó un argumento que demostraba el predicado recíproco. En nuestro caso, además del argumento sobre el recíproco, hemos incluido tres argumentos adicionales, uno que considera un caso particular y otros dos que presentan una demostración directa y por reducción al absurdo, de esta manera, el cuestionario consta de cuatro tareas.

En cada una de ellas se presenta un argumento matemático para garantizar la validez de una proposición matemática que se denominó con la letra *P* y se expresó en el cuestionario de manera verbal como sigue; *P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.*

Además, se indicó que dicha proposición es verdadera. En cada una de las tareas, los sujetos debían realizar lo siguiente: *(1) indicar si el argumento correspondía o no a una demostración matemática de la proposición P* y *(2) explicar de manera amplia las razones de su escogencia*.

Tiene por objetivo indagar sobre la forma en que los sujetos evalúan un argumento matemático considerando la estructura sintáctica de la proposición dada y los aspectos lógico-sintácticos de los argumentos matemáticos. En la tabla 5, se muestra cada uno de los argumentos matemáticos presentados en las tareas.

Tabla 5

Argumentos matemáticos de las tareas del cuestionario 2

Tarea	Argumento matemático
Tarea 1: Demostración de un caso particular	Considere el número real $\left(2-\sqrt{3}\right)$. Es claro que $\left(2-\sqrt{3}\right)>0$. Además, $\left(2-\sqrt{3}\right)+\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^{2}+1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{4-4\sqrt{3}+3+1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}}=4.$ Puesto que es verdadero que $4\geq 2$ entonces se garantiza la validez de la proposición ***P***.
Tarea 2: Demostración del recíproco	Considere un número real cualquiera x. Supóngase verdadero que la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos, es decir que $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\geq 2.$ Luego, $\dfrac{x^{2}+1}{x}\geq 2$ y de esta manera se tiene que $\dfrac{x^{2}+1}{x}-2\geq 0.$ Al efectuar la resta en el lado izquierdo de la desigualdad se obtiene que $\dfrac{x^{2}+1-2x}{x}\geq 0$ y ordenando y factorizando el numerador de la fracción se sigue que $\dfrac{(x-1)^{2}}{x}\geq 0$. Como $\dfrac{(x-1)^{2}}{x}\geq 0$ es cierto y además, $(x-1)^{2}\geq 0$ también es verdadero, se concluye que $x>0.$ En consecuencia la proposición ***P*** es verdadera.
Tarea 3: Demostración directa de la implicación universal	Considere un número real cualquiera x. Supóngase verdadero que el número es positivo, es decir que $x>0.$ Se debe garantizar que la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos, es decir que $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\geq 2.$ En efecto, $x+\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{x^{2}+1}{x}-2=\dfrac{x^{2}+1-2x}{x}=\dfrac{x^{2}-2x+1}{x}=\dfrac{(x-1)^{2}}{x}.$ Como $(x-1)^{2}\geq 0$ es verdadera y además, $x>0$ entonces es cierto que $\dfrac{(x-1)^{2}}{x}\geq 0$. De este modo, es verdadero que $\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)\geq 0$ y así necesariamente se cumple que $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\geq 2$ es verdadero, como se quería demostrar. En consecuencia, la proposición ***P*** es verdadera.
Tarea 4: Demostración por reducción al absurdo de la implicación universal	Supóngase que existe un número real x que satisface que es positivo y que la suma de este y su inverso multiplicativo es menor a dos, es decir que, $x>0$ y $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)<2.$ Luego se tiene que $\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)<0.$ Por otro lado $x+\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{x^{2}+1}{x}-2=\dfrac{x^{2}+1-2x}{x}=\dfrac{x^{2}-2x+1}{x}=\dfrac{(x-1)^{2}}{x}.$ En consecuencia $\dfrac{(x-1)^{2}}{x}<0$ y como $x>0$ necesariamente debe cumplirse que $(x-1)^{2}<0.$ Puesto que es verdadero que

	$(x-1)^2 \geq 0$ entonces la proposición $\left((x-1)^2 < 0 \wedge (x-1)^2 \geq 0\right)$ es verdadera, no obstante, se tiene certeza de que es falsa. En consecuencia, la proposición ***P*** es verdadera.

3.3.3 Recolección de la información de las fases empíricas 2 y 3

Para la recolección de la información de las *fases 2 y 3*, se elaboraron dos cuestionarios, el *cuestionario 3* para la fase 2 *validez matemática* y el *cuestionario 4* para la fase 3 *convicción de un argumento matemático*. Se aplicaron en los meses de mayo y junio del 2019, cada uno de ellos con una duración aproximada de una hora. Los sujetos lo completaron de forma individual en los horarios asignados a los cursos matriculados. Previo a su aplicación fueron revisados por los mismos tres especialistas en Educación Matemática que participaron en la fase 1 quienes brindaron sugerencias para su mejora. A continuación, se describe cada uno de los cuestionarios aplicados.

El cuestionario 3: Validez matemática

En la construcción de este cuestionario se consideraron los elementos del marco teórico sobre el conocimiento de la *validez matemática* en la demostración de una proposición matemática para la generación de las categorías de análisis: *(1) el uso de la hipótesis de la proposición* y; *(2) los axiomas*, *(3) las definiciones y (4) los teoremas* de la teoría matemática empleados en dicha demostración. De forma similar a como se hizo en los dos cuestionarios anteriores, realizamos una revisión del Programa de Estudios de Matemáticas de la Educación secundaria costarricense para determinar cuáles proposiciones matemáticas se recomienda demostrar. Como se mencionó, la estructura sintáctica que tiene mayor presencia en dicho programa de estudios es la *implicación universal*, por lo tanto, las proposiciones empleadas tienen esa forma.

Para realizar el estudio, consideramos pertinente que los sujetos de investigación evaluaran cuatro argumentos matemáticos, en donde los tres primeros tienen errores en los aspectos matemáticos, específicamente en el primero se hace un uso inadecuado de la *hipótesis* de la proposición matemática, en el segundo, el uso incorrecto de un *axioma* y en el tercero, el uso incorrecto de las *definiciones*. En el cuarto se emplean todos estos elementos de manera correcta, de esta manera, el cuestionario consta de cuatro tareas.

En cada una de ellas se presenta una proposición matemática y un argumento matemático para garantizar su validez. Los sujetos debían realizar lo siguiente: *(1) indicar si el argumento correspondía o no a una demostración matemática de la proposición dada, (2) explicar de manera amplia las razones de su escogencia* y *(3) en el caso de que el argumento dado no correspondiera a una demostración matemática de la proposición dada, se debía indicar cuál o cuáles modificaciones harían al argumento matemático para que lo sea*.

Tiene por objetivo indagar sobre la forma en que los sujetos evalúan un argumento matemático considerando los elementos matemáticos presentes tales como: *hipótesis* de la proposición dada, los *axiomas*, los *teoremas* y las *definiciones*; y en el caso de que detecten falencias en los argumentos, propongan las correcciones que consideren pertinentes. En la tabla 6, se muestra cada una de las proposiciones matemáticas y los argumentos matemáticos presentados en las tareas.

Tabla 6

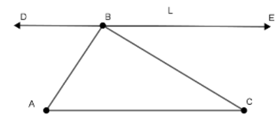
Proposiciones y argumentos matemáticos de las tareas del cuestionario 3

Tarea y Proposición matemática	**Argumento matemático**
Tarea 1: el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo **P1:** *Si* $a,b,c \in \mathbb{R}$ son tales que $a \neq 0$ y $\left(b^2-4ac\right) \geq 0$, entonces $\exists x \in \mathbb{R}\left(ax^2+bx+c=0\right)$.	Supóngase que se tienen $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq 0$ y $\left(b^2-4ac\right) \geq 0$. Se debe demostrar que $\exists x \in \mathbb{R}\left(ax^2+bx+c=0\right)$. En efecto, considérese el número real $x=\frac{-b}{2a}$. Luego $ax^2+bx+c=a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=$ $\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}$. Por hipótesis se tiene que $\left(b^2-4ac\right) \geq 0$ por lo tanto se puede suponer en particular que $\left(b^2-4ac\right)=0$ y de esta manera $ax^2+bx+c=\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}=\frac{-0}{4a}=0$. Luego el número real $x=\frac{-b}{2a}$ satisface la existencia.
Tarea 2: el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo **P2:** *Si* $m,n \in \mathbb{Z}$ son tales que m divide a n y viceversa, entonces $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$.	Supóngase que se tienen $m,n \in \mathbb{Z}$ tales que m divide a n y viceversa. Se debe demostrar que $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$. En efecto, como m divide a n y viceversa, entonces existen dos números enteros p,q tales que (1) $m=n\cdot p$ y (2) $n=m\cdot q$ Sustituyendo (1) en (2) se sigue que $n=(n\cdot p)\cdot q$ y de este modo multiplicando a ambos lados de la igualdad por n^{-1} se tiene que $p\cdot q=1$. Como p y q son números enteros se tiene que $p=q=1$ o $p=q=-1$. Si $p=q=1$ entonces sustituyendo en (1) se tiene que $m=n$ y en consecuencia $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$. Si $p=q=-1$ entonces sustituyendo en (1) se tiene que $m=-n$ y en consecuencia $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$. En cualquier caso se garantiza que $\lvert m\rvert = \lvert n\rvert$.
Tarea 3: el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar *Si* $m,n \in \mathbb{Z}$ son tales que m y n son números impares, entonces $m+n$ es un número par.	Supóngase que se tienen $m,n \in \mathbb{Z}$ tales que tales que m y n son números impares. Se debe demostrar que $m+n$ es un número par. En efecto, como m y n son números impares, entonces de acuerdo a la definición de números impares se sigue que existen dos números enteros p,q tales que (1) $2m+1=p$ y (2) $2n+1=q$. Luego $(2m+1)+(2n+1)=p+q$ y de esta manera se sigue que $2m+2n+2=p+q$, es decir que, $2(m+n)=p+q-2$. Sea $j=p+q-2$ y como $p,q,2 \in \mathbb{Z}$ entonces $j \in \mathbb{Z}$. De esta manera $2(m+n)=j$ con $j \in \mathbb{Z}$ lo que según la definición de número par, garantiza que el número $m+n$ es un número par.

Tarea 4: el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana

En cualquier triángulo en la geometría euclidiana la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados. Es decir, dado cualquier triángulo ΔABC , se cumple que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$

Supóngase que se tiene un triángulo cualquiera ΔABC en la geometría euclidiana. Se debe demostrar que la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180 grados, es decir, que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$. En efecto, como el punto B no pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ entonces, en virtud del postulado de las paralelas, existe y es única la recta L que contiene a B y es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Considérese la siguiente figura en la que se muestra lo anterior:



Sean D y E dos puntos de la recta L tales que $D-B-E$ y los puntos A y D del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Como el punto A está en el interior del ángulo $\angle DBC$, se sigue que $m\angle DBC = m\angle DBA + m\angle ABC$. Además, $m\angle DBC + m\angle CBE = 180^0$, pues los dos ángulos forman un par lineal. De esta manera se tiene que $m\angle DBA + m\angle ABC + m\angle CBE = 180^0$. (*) Por otro lado, $m\angle DBA = m\angle BAC$ pues los ángulos son alternos internos entre paralelas. Además, $m\angle CBE = m\angle BCA$ por ser también alternos internos entre paralelas. Al sustituir en (*) se obtiene que $m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle BCA = 180^0$ lo que equivale a $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$.

El cuestionario 4: Convicción de un argumento matemático

La elaboración del cuestionario 4 se llevó a cabo con base en los elementos de *convicción de un argumento matemático* planteados en el marco teórico y las recomendaciones metodológicas para el abordaje del proceso *razonar y argumentar* detalladas en el Programa de Estudio de Matemática de la Educación Secundaria de Costa Rica y sintetizadas en el apartado 1.1.2 del capítulo 1.

Puesto que nuestro interés era analizar las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los sujetos de investigación, hemos considerado pertinente utilizar un resultado matemático complejo e importante en la formación matemática de los estudiantes de secundaria costarricenses y necesario en el conocimiento del profesor de matemáticas: la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Dicho resultado es sugerido en el programa de estudios para introducir a los números irracionales.

Según Romero y Rico (1996) la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos plantea varias cuestiones: *(1)* el descubrimiento de un nuevo tipo de números-*los irracionales*-, y la integración de estos con los otros números ya estudiados; *(2)* en su abordaje pueden involucrarse dos ámbitos diferentes pero complementarios-*el numérico* y *el geométrico*-; (3) existen diversas demostraciones de esta irracionalidad que se pueden ubicar en los ámbitos mencionados y; *(4)* la mayoría de las demostraciones se realizan de forma indirecta que es un método que puede generar problemas de aceptación en la práctica.

La variedad de argumentos matemáticos para demostrar la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, así como las particularidades de cada una, las hemos considerado relevantes para poder caracterizar a los argumentos más convincentes. De esta manera, se presentan cinco argumentos matemáticos que pretenden garantizar la validez de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Todos los argumentos, excepto el número 2, corresponden a demostraciones matemáticas correctas de este resultado. El argumento número 2 es una demostración matemática correcta, pero de la existencia de tal raíz, no de su irracionalidad. En la tabla 7 se presentan estos argumentos matemáticos.

Tabla 7

Argumentos matemáticos del cuestionario 4

ARGUMENTOS MATEMÁTICOS PARA GARANTIZAR LA VALIDEZ DE LA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA *P:* $\sqrt{2}$ *ES UN NÚMERO IRRACIONAL*

Argumento 1

Si $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Luego $a^2 = 2b^2$. Se puede hacer una análisis de las posibles terminaciones de los números naturales a^2 y $2b^2$. Para ello, considérese la siguiente tabla en la que se plasman todas las posibilidades:

a	a^2	b	b^2	$2b^2$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	2
2	4	2	4	8
3	9	3	9	8
4	6	4	6	2
5	5	5	5	0
6	6	6	6	2
7	9	7	9	8
8	4	8	4	8
9	1	9	1	2

Como se pude observar en la tabla anterior, las terminaciones del número natural a^2 son 0, 1, 4, 5, 6 y 9; las terminaciones del número $2b^2$ son 0, 2 y 8. Dado que $a^2 = 2b^2$ se sigue que ambos números deben tener las mismas terminaciones, por lo tanto, ambos deben terminar en 0 que es el único dígito en el que coinciden. En tal caso se tiene que a debe terminar en *0* y b debe terminar en *0* o en *5*. Sin embargo, en cualquiera de los dos casos, los números a y b tendrían a 5 como un divisor común, lo que contradice el hecho de que ambos eran primos relativos entre sí. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Argumento 2

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2$. Es claro que $f(1) = -1$ y $f(2) = 2$. Dado que la función f es continua en $\mathbb{R}$, se tiene en particular, que es continua en el intervalo real $[1, 2]$. Por el teorema del valor intermedio de Bolzano se sigue que $\exists\, c \in]1,2[\,(f(c) = 0)$ lo que equivale a afirmar que $\exists\, c \in]1,2[\,(c^2 = 2)$. Esto garantiza $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Argumento 3

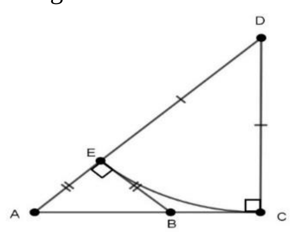
Si $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Luego $a^2 = 2b^2$. De lo anterior se deduce que 2 es un divisor de a^2 y puesto que 2 es un número primo, se sigue necesariamente que 2 es un divisor de a, en consecuencia $\exists\, m \in \mathbb{Z}\,(a = 2m)$. Sustituyendo en la igualdad $a^2 = 2b^2$ se tiene que $(2m)^2 = 2b^2$ de donde se sigue que $2m^2 = b^2$ y en tal caso 2 es un divisor de b^2 y al ser 2 primo se cumple que divide a b. Con base en lo anterior se tiene que 2 es un divisor común de a y b lo cual es imposible, pues ambos números eran primos relativos entre sí. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Argumento 4

Sea S el conjunto $S = \left\{ n \in \mathbb{N} : \left(n\sqrt{2} \right) \in \mathbb{N} \right\}$ con $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Si el conjunto S no es vacío, se sigue por el principio de la buena ordenación en los números naturales, que S tiene un primer elemento, llámese k. Dado que $\left(\sqrt{2}-1\right) k > 0$ se sigue que $\left(k\sqrt{2}-k\right) > 0$. Puesto que $k \in S$ se tiene que $\left(k\sqrt{2}\right) \in \mathbb{N}$, por lo tanto, $\left(k\sqrt{2}-k\right) \in \mathbb{N}$. Además, $\left(k\sqrt{2}-k\right)\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$ y como $\left(2k - k\sqrt{2}\right) \in \mathbb{N}$ se sigue que $\left(k\sqrt{2}-k\right) \in S$ lo cual es imposible pues $\left(k\sqrt{2}-k\right) < k$ y k es el primer elemento de S. Por lo tanto el conjunto S es vacío. Si $\sqrt{2}$ es un número racional entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$. Luego $b\sqrt{2} = a$ y como $\left(b\sqrt{2}\right) \in \mathbb{N}$ se seguiría que $b \in S$ lo cual es imposible. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Argumento 5

Dado un triángulo rectángulo con catetos de medida 1 se cumple, por el teorema de Pitágoras, que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$. Si $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$. Como $b\sqrt{2} = a$ existe otro triángulo rectángulo ACD de catetos $\overline{DC}$ y $\overline{AC}$ de longitud b e hipotenusa $\overline{AD}$ de medida a como se muestra en la siguiente figura:



Se puede considerar una circunferencia de centro en D y que contenga a los puntos E y C en donde los radios $\overline{DE}$ y $\overline{DC}$ sean de longitud b y el punto E pertenezca al segmento $\overline{AD}$. Por el punto E existe una única recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y que interseca a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto B. Los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{BC}$ son ambos tangentes a la circunferencia de centro D y por lo tanto son congruentes. Como el triángulo AEB es rectángulo isósceles se sigue que la longitud del segmento $\overline{AE}$ es igual a la del segmento $\overline{BE}$, ambos con medida $a-b$. La medida del segmento $\overline{AB}$ es igual a $b-(a-b)$, es decir, $2b-a$. Se tiene así que el triángulo rectángulo isósceles AEB satisface que la longitud de sus tres lados son números naturales y cada uno de ellos es menor que sus correspondientes en el triángulo original ACD. En el triángulo AEB se puede replicar el proceso realizado y de esta manera existiría otro triángulo rectángulo isósceles en donde sus lados tendrían como longitudes a números naturales menores que los correspondientes en el triángulo AEB. Este proceso se podría continuar de manera infinita lo que generaría una sucesión decreciente infinita de números naturales, lo cual es imposible. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Posteriormente, se presentan tres tareas:

(1) en la primera tarea los sujetos debían escoger el orden en el que los argumentos les parecían más convincentes. Para ello debían completar la siguiente tabla:

ORDEN DE PRIORIDAD	*NÚMERO DEL ARGUMENTO*
PRIORIDAD 1	
PRIORIDAD 2	
PRIORIDAD 3	
PRIORIDAD 4	
PRIORIDAD 5	

En dicha tabla los sujetos debían indicar el orden de prioridad en el que los argumentos matemáticos les habían parecido más convincentes. Se les aclaró que el de prioridad 1 es el que les había parecido más convincente y así sucesivamente hasta el de prioridad 5 que es el que le había parecido menos convincente. En la columna denominada *número del argumento*, debían colocar los números 1, 2, 3, 4, y 5 que corresponden a los números de los argumentos matemáticos presentados, de manera que cada uno de ellos apareciera una sola vez.

(2) En la segunda tarea, los sujetos debían explicar las razones por las que habían escogido al argumento que más les convenció, es decir, al argumento que seleccionaron como *prioridad 1*. Se les instó a que en su explicación incluyeran las características del argumento, tanto de forma como de fondo, que le hacían más convincente.

(3) En la tercera tarea, los sujetos debían explicar las razones por las que habían escogido al argumento que menos les convenció, es decir, al argumento que seleccionaron como *prioridad 5*. Se les instó a que en su explicación incluyeran las características del argumento, tanto de forma como de fondo, que le hacían menos convincente.

3.3.4 Proposiciones matemáticas empleadas en las fases empíricas de la investigación y sus demostraciones

En este apartado presentamos las proposiciones matemáticas que se emplearon en las fases empíricas de nuestra investigación para la construcción de los cuestionarios 2, 3 y 4. Los cuestionarios 2 y 3 tienen como objetivo la evaluación de argumentos matemáticos en función de los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos, respectivamente. El cuestionario 4 tiene como propósito determinar las características de los argumentos matemáticos que convencen más a los sujetos de investigación.

Las proposiciones matemáticas empleadas se consideraron tomando en cuenta las recomendaciones metodológicas para el abordaje de la demostración en el Programa de Estudios de Matemáticas de la educación secundaria en Costa Rica. En cada una de las proposiciones consideradas a continuación hacemos una discusión sobre su estructura lógico-sintáctica y presentamos una demostración.

Proposición empleada en el cuestionario 2

P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de él y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

La estructura sintáctica de la proposición es la siguiente: $\forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2\right)$. Corresponde a una implicación con cuantificador universal en donde el antecedente es el predicado $A(x) : x > 0$, el consecuente es el predicado $B(x) : \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$ y el universo de discurso es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Una demostración es la siguiente:

Considere un número real cualquiera x. Supóngase que es verdad que $x > 0$. Se debe garantizar que la proposición $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ es cierta. En efecto, $\frac{x^2+1}{x} - 2 = \frac{x^2+1-2x}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$. Como $(x-1)^2 \geq 0$ es verdadera y además, $x > 0$ entonces es cierto que $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$. De este modo, es verdadero que $\left(\frac{x^2+1}{x} - 2\right) \geq 0$ y así necesariamente se cumple que $\frac{x^2+1}{x} \geq 2$ como se quería demostrar. En consecuencia, la proposición P es verdadera.

Proposiciones empleadas en el cuestionario 3

En este cuestionario se presentaron cuatro proposiciones, todas tienen la estructura sintáctica $\forall x \in U\left(A(x) \Rightarrow B(x)\right)$, las tres primeras de forma explícita y la cuarta de forma implícita. A continuación, se detalla cada una de ellas.

1. *Proposición matemática P1: Si* $a,b,c \in \mathbb{R}$ son tales que $a \neq 0$ y $\left(b^2-4ac\right) \geq 0$, entonces $\exists x \in \mathbb{R}\ \left(ax^2+bx+c=0\right)$.

   La estructura sintáctica de la proposición es la siguiente: $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}\left(\left(a \neq 0 \wedge \left(b^2-4ac\right) \geq 0\right) \Rightarrow\ \exists x \in \mathbb{R}\ \left(ax^2+bx+c=0\right)\right)$. Corresponde a una implicación con cuantificador universal en donde el antecedente es el predicado $A(a,b,c) : a \neq 0 \wedge \left(b^2-4ac\right) \geq 0$, el consecuente es el predicado $B(x) : \exists x \in \mathbb{R}\ \left(ax^2+bx+c=0\right)$ y el universo de discurso es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Una demostración es la siguiente:

   Supóngase que se tienen $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq 0$ y $\left(b^2-4ac\right) \geq 0$. Como por hipótesis $\left(b^2-4ac\right) \geq 0$ entonces existe y es único el número real $\sqrt{b^2-4ac}$. Considérese al número real $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Luego

$$ax^2+bx+c = a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c$$

$$= a\left(\frac{\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2 - 2b\sqrt{b^2-4ac} + b^2}{4a^2}\right) + \left(\frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2}{4a} + \frac{-b^2+b\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + c$$

$=\dfrac{b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2-2b^2+2b\sqrt{b^2-4ac}+4ac}{4a}=\dfrac{0}{4a}=0$. De esta manera el número real $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ satisface la existencia.

2. *Proposición matemática P2: Si $m,n\in\mathbb{Z}$ son tales que m divide a n y viceversa, entonces $|m|=|n|$.*

   La estructura sintáctica de la proposición es la siguiente: $\forall m,n\in\mathbb{Z}\big((m/n \wedge n/m)\Rightarrow |m|=|n|\big)$. Corresponde a una implicación con cuantificador universal en donde el antecedente es el predicado $A(m,n): m/n \wedge n/m$, el consecuente es el predicado $B(m,n): |m|=|n|$ y el universo de discurso es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Además, las expresiones m/n y n/m significan respectivamente que m *divide a* n *y viceversa*. Una demostración es la siguiente:

   > Supóngase que se tienen $m,n\in\mathbb{Z}$ tales que m divide a n y viceversa. Como m divide a n y viceversa, entonces existen dos números enteros p,q tales que (1) $m=n\cdot p$ y (2) $n=m\cdot q$. Sustituyendo (1) en (2) se sigue que $n=(n\cdot p)\cdot q$ y se sigue que $n-npq=0$ y de esta manera $n(1-pq)=0$ y en consecuencia $n=0$ o $1-pq=0$, es decir, $n=0$ o $pq=1$. Si $n=0$ entonces sustituyendo en (1) $m=n\cdot p$ se sigue que $m=0$ y por lo tanto $|m|=|n|$. Si $pq=1$ se tiene que $p=q=1$ o $p=q=-1$. Si $p=q=1$ entonces sustituyendo en (1) se tiene que $m=n$ y en consecuencia $|m|=|n|$. Si $p=q=-1$ entonces sustituyendo en (1) se tiene que $m=-n$ y en consecuencia $|m|=|n|$. En cualquier caso se garantiza que $|m|=|n|$.

3. *Proposición matemática P3: Si $m,n\in\mathbb{Z}$ son tales que m y n son números impares, entonces $m+n$ es un número par.*

   La estructura sintáctica de la proposición es la siguiente: $\forall m,n\in\mathbb{Z}\Big(\big(\exists p\in\mathbb{Z}(m=2p+1)\wedge \exists q\in\mathbb{Z}(n=2q+1)\big)\Rightarrow \exists r\in\mathbb{Z}(m+n=2r)\Big)$.
   Corresponde a una implicación con cuantificador universal en donde el antecedente es el predicado $A(m,n):\exists p\in\mathbb{Z}(m=2p+1)\wedge\exists q\in\mathbb{Z}(n=2q+1)$, el consecuente es el predicado $B(m,n):\exists r\in\mathbb{Z}(m+n=2r)$ y el universo de discurso es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Una demostración es la siguiente:

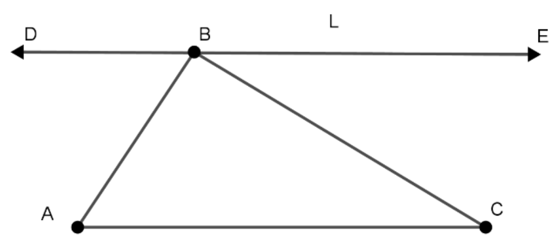
   > Supóngase que se tienen $m,n\in\mathbb{Z}$ tales que tales que m y n son números impares. En efecto, como m y n son números impares entonces de acuerdo a la definición de números impares se sigue que existen dos números enteros p,q tales que (1) $2p+1=m$ y (2) $2q+1=n$. Luego $(2p+1)+(2q+1)=m+n$ y así $(2p+2q+2)=m+n$ de donde se sigue que $2(p+q+1)=m+n$. Sea $j=p+q+1$ y como $p,q,1\in\mathbb{Z}$ entonces $j\in\mathbb{Z}$. De

esta manera $m+n=2j$ con $j\in\mathbb{Z}$ lo que según la definición de número par, garantiza que el número $m+n$ es un número par.

4. *Proposición matemática P4: En cualquier triángulo en la geometría euclidiana la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados. Es decir, dado cualquier triángulo ΔABC, se cumple que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$.*

   La estructura sintáctica de la proposición es la siguiente: $\forall\,\Delta ABC\in\Gamma\left(TGE \Rightarrow m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0\right)$. Corresponde a una implicación con cuantificador universal en donde el antecedente hace referencia a los axiomas, definiciones y teoremas que brindan información verídica sobre los triángulos en la teoría de la geometría euclidiana *(TGE)*, el consecuente es el predicado $H\left(A,B,C\right): m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$ y el universo de discurso es el conjunto de todos los triángulos en la geometría euclidiana que hemos denotado con Γ . Una demostración es la siguiente:

   Supóngase que se tiene un triángulo cualquiera ΔABC en la geometría euclidiana. Se debe demostrar que la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180 grados, es decir, que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$. En efecto, como el punto B no pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ entonces, en virtud del postulado de las paralelas, existe y es única la recta L que contiene a B y es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Considérese la siguiente figura en la que se muestra lo anterior:



   Sean D y E dos puntos de la recta L tales que $D-B-E$ y los puntos A y D del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Como el punto A está en el interior del ángulo $\angle DBC$, se sigue que $m\angle DBC = m\angle DBA + m\angle ABC$. Además, $m\angle DBC + m\angle CBE = 180^0$, pues los dos ángulos forman un par lineal. De esta manera se tiene que $m\angle DBA + m\angle ABC + m\angle CBE = 180^0$. (*) Por otro lado, $m\angle DBA = m\angle BAC$ pues los ángulos son alternos internos entre paralelas. Además, $m\angle CBE = m\angle BCA$ por ser también alternos internos entre paralelas. Al sustituir en (*) se obtiene que $m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle BCA = 180^0$ lo que equivale a $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$.

Proposición empleada en el cuestionario 4

P: $\sqrt{2}$ es un número irracional

La estructura sintáctica de la proposición es $\sqrt{2}\in II$ en donde II representa al conjunto de los números irracionales. Este resultado matemático, normalmente se expresa de manera simple como la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Sin embargo, este teorema debe entenderse de la siguiente manera: *si existe un número real positivo x que verifica que $x^2 = 2$ entonces el número x es irracional* (Ibañes y Ortega, 1997). Una demostración es la siguiente:

> Si $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Luego $a^2 = 2b^2$. De lo anterior se deduce que 2 es un divisor de a^2 y puesto que 2 es un número primo, se sigue necesariamente que 2 es un divisor de a, en consecuencia $\exists\, m \in \mathbb{Z}\left(a = 2m \right)$. Sustituyendo en la igualdad $a^2 = 2b^2$ se tiene que $\left(2m\right)^2 = 2b^2$ de donde se sigue que $2m^2 = b^2$ y en tal caso 2 es un divisor de b^2 y al ser 2 primo se cumple que divide a b. Con base en lo anterior se tiene que 2 es un divisor común de a y b lo cual es imposible, pues ambos números eran primos relativos entre sí. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

3.4 ASPECTOS METODOLÓGICOS DEL ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Este apartado consta de dos secciones. En la primera, se describe la forma en la que se realizó el análisis de la información de la fase teórica 0 sobre el análisis conceptual de la demostración. En la segunda, se explica la forma en la que se analizó la información de las fases empíricas 1, 2 y 3, que corresponden a la validez lógica, a la validez matemática y a la convicción de un argumento matemático, respectivamente. Esta explicación se hace de forma detallada para cada uno de los cuatro cuestionarios empleados, para ello, se presentan algunas figuras con respuestas prototípicas para ilustrar la forma en la que se analizó la información empleando las categorías propuestas en cada caso.

3.4.1 Análisis de la información de la fase teórica 0

Para el análisis de la información recopilada, se hizo uso del análisis conceptual, el cual se centró en cuatro acercamientos a la noción demostrativa: *(1) los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas*, considerando una revisión del concepto de demostración en diferentes épocas como la Antigüedad, la Edad Media, el Renacimiento y en la Época Contemporánea; *(2) el concepto*, considerando una revisión de las diferentes definiciones de la palabra *demostración* y otros términos asociados como *razonamiento*, *argumentación*, *explicación y prueba*; *(3) los tipos*, contemplando una revisión sobre las diferentes formas en las que se puede demostrar una proposición matemática (para ello, se consideró la diversidad de las proposiciones desde el punto de vista lógico), y *(4) las funciones* sobre las que se hizo una revisión de los diferentes roles que se pueden atribuir a las demostraciones matemáticas, debido a la variedad de significados de la palabra *demostración*, dependiendo del contexto en el que esta se ubique.

3.4.2 Análisis de la información de las fases empíricas 1,2 y 3

Para analizar la información de los cuestionarios 1, 2, 3 y 4 se empleó el análisis de contenido que es una técnica científica de investigación para hacer inferencias replicables y válidas de textos (u otra materia significativa) a los contextos de su uso. Este análisis implica el uso de procedimientos especializados, proporciona nuevas ideas, aumenta la comprensión del investigador de fenómenos particulares o informa acciones prácticas. Además, la frecuencia no es igual a la importancia, y no decir algo puede ser tan importante como decir algo. El análisis de contenido analiza solo lo que está presente en lugar de lo que falta o no se dice (Cohen, Manion, y Morrison, 2007; Krippendorff, 2004).

Como se mencionó, en la *fase 1 validez lógica* y que considera a los cuestionarios 1 y 2, participaron 25 sujetos en total, 18 matriculados en el cuarto año de la carrera (GB) y 7 matriculados en el quinto (GL) En las *fases 2 validez matemática* y *3 convicción de un argumento matemático* y que consideran a los cuestionarios 3 y 4 respectivamente, participaron 19 sujetos en total 12 matriculados en el cuarto año (GB) y 7 matriculados en el quinto (GL); de los 12 sujetos matriculados en el cuarto año (GB), 11 participaron en la fase 1. Los 7 sujetos matriculados en el quinto año (GL) eran los mismos que participaron en la fase 1.

Los sujetos fueron codificados empleando la letra *E* para indicar que era estudiante; la letra *B* para indicar que era de Bachillerato o la letra *L* para indicar que era de Licenciatura; la letra *H* para indicar que era hombre y la letra *M* para indicar que era mujer y; los números del 01 al 19 para los de Bachillerato y de 01 al 07 para los de Licenciatura, así, por ejemplo, el código EBH08 indica que es estudiante del Bachillerato, hombre y es el número 8 y ELM04 indica que es estudiante de la Licenciatura, mujer y la número 4. En la tabla 8 se presentan los códigos de los sujetos participantes en cada una de las fases empíricas 1, 2 y 3.

Tabla 8

Códigos asignados a los sujetos de investigación de las fases 1, 2 y 3

Número de fase	**Número de cuestionario considerado**	**Códigos de los sujetos de investigación**		
		Grupo de Bachillerato (GB)		**Grupo de Licenciatura (GL)**
Fase 1. Validez Lógica	Cuestionarios 1 y 2	EBM01-EBH06 EBH10-EBM13 EBM14-EBH17 EBM18 *(7 solo en fase 1)*	EBH02-EBH03 EBH04-EBM05 EBH07-EBH08 EBM09-EBM11 EBM12-EBM15 EBH16 *(11 en fases 1, 2 y 3)*	ELH01-ELH02-ELH03-ELM04-ELM05-ELH06-ELM07 *(7 en fases 1, 2 y 3)*
Fase 2. Validez Matemática	Cuestionario 3			
Fase 3. Convicción de un argumento matemático	Cuestionario 4	EBM19 *(solo en fases 2 y 3)*		

Análisis de la información del cuestionario 1: formas de proceder en una demostración considerando los aspectos lógico-sintácticos

Para analizar las respuestas de los sujetos sobre *(a) la explicación de la forma de proceder en la demostración de cada proposición genérica dada* y *(b) la demostración realizada del ejemplo propuesto,* se establecieron tres categorías con base en los elementos del conocimiento sobre la validez lógica de una demostración considerados en el marco teórico, a saber: *(1) el tipo de demostración: directa o indirecta*, que estuvo presente en cada una de las seis tareas del cuestionario; *(2) el tipo de cuantificador: universal*, presente en todas las tareas, excepto en la segunda, *o existencial*, presente en la segunda tarea y *(3) el tipo de conectiva lógica: implicación universal*, *disyunción universal*, *conjunción universal y doble implicación universal*, los cuales se contemplaron en las tareas tres, cuatro, cinco y seis respectivamente.

En cada una de las tareas, los investigadores realizamos un análisis a priori sobre la forma en la que consideramos que se puede proceder en la demostración, directa o indirecta, de la proposición genérica. En todos los casos se consideró al conjunto universo como infinito. Se ilustra este proceso con la proposición genérica que involucra al cuantificador universal y a una propiedad simple o compuesta, $\forall x \in U \left[A(x) \right]$, en donde $A(x)$ representa a una propiedad simple, es decir, $A(x) \equiv P(x)$ como en la tarea 1 que se llamó *universal simple* o $A(x)$ representa a una propiedad compuesta como en la tarea 3, *implicación universal* $A(x) \equiv \left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$, en la tarea 4, *disyunción universal* $A(x) \equiv \left(P(x) \vee Q(x)\right)$, en la tarea 5 *conjunción universal* $A(x) \equiv \left(P(x) \wedge Q(x)\right)$ y en la tarea 6 *doble implicación universal* $A(x) \equiv \left(P(x) \Leftrightarrow Q(x)\right)$:

(1) Demostración directa: se escoge un elemento $x \in U$ que representa a cualquier elemento del universo U y posteriormente se considera fijo. Luego se debe garantizar que la proposición $A(x)$ es verdadera. Como el elemento $x \in U$ es un representante de cualquier elemento del universo U se puede concluir que es verdadero que $\forall x \in U \left[A(x) \right]$.

(2) Demostración indirecta: se utiliza la equivalencia lógica $\forall x \in U \left[A(x) \right] \equiv \exists x \in U \left[\neg A(x) \right] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier contradicción. En este caso se supone como verdadero que $\exists x \in U \left[\neg A(x) \right]$ y con base en ese supuesto se debe obtener una proposición categóricamente falsa que haría el papel de F_0. Una vez hallada la contradicción se puede concluir que es verdadera la proposición $\forall x \in U \left[A(x) \right]$.

Una vez realizado el análisis anterior, se generaron los *indicadores de conocimiento*, entendidos como frases para determinar en las respuestas de los sujetos de investigación, evidencias de conocimiento sobre las formas de proceder en la demostración. En la tabla 9, se muestran los indicadores de conocimiento generados para el *cuantificador universal* a partir de las formas de proceder consideradas por los investigadores.

Tabla 9

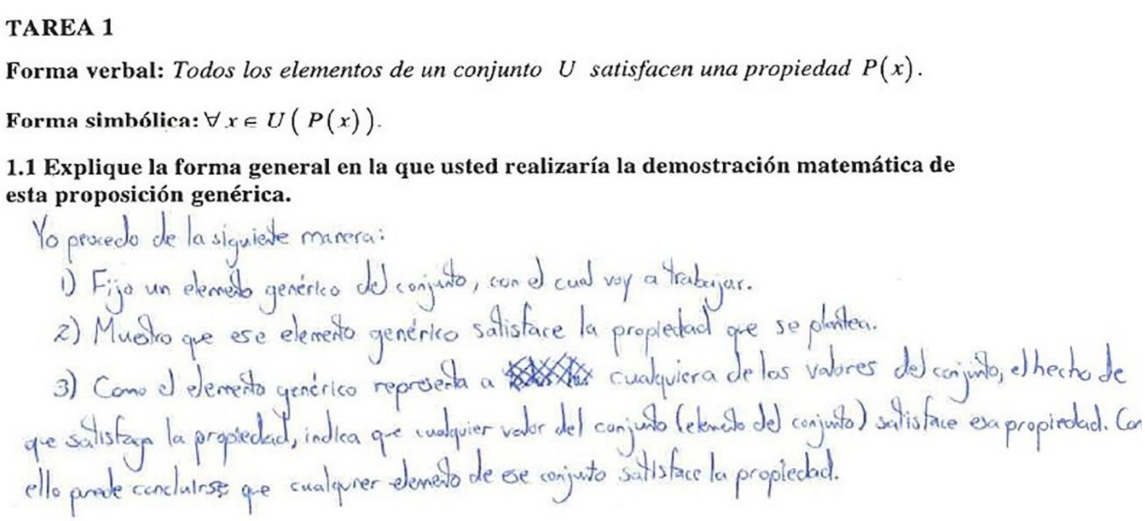
Indicadores de conocimiento generados para el cuantificador universal

Forma de proceder según el tipo de demostración	**Indicadores de conocimiento generados**
Demostración directa	
Se escoge un elemento $x \in U$ que representa a cualquier elemento del universo U .	Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario del universo.

Se debe garantizar que la proposición $A(x)$ es verdadera y como el elemento $x \in U$ es un representante de cualquier elemento del universo U se puede concluir que es verdadero que $\forall x \in U \left[A(x) \right]$.	Manifiesta que la propiedad se satisface para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario.
Demostración indirecta	
Se supone verdadera la proposición $\neg \forall x \in U \left[A(x) \right]$.	Manifiesta que debe suponerse verdadera la negación de proposición dada.
Se determina que la proposición $\neg \forall x \in U \left[A(x) \right]$ es equivalente a $\exists x \in U \left[\neg A(x) \right]$.	Manifiesta cuál es la equivalencia de la negación de la proposición dada.
Una vez supuesta verdadera la proposición $\exists x \in U \left[\neg A(x) \right]$ se debe obtener una proposición categóricamente falsa que haría el papel de F_0.	Manifiesta que debe llegarse a una contradicción.
Cuando se obtiene la proposición F_0 se puede concluir que la proposición original $\forall x \in U \left[A(x) \right]$ es verdadera.	Manifiesta que una vez determinada la contradicción podía concluirse que la proposición original era verdadera.

En el caso de las respuestas de los sujetos sobre *proporcionar un ejemplo concreto de la proposición genérica*, se determinó si se ajustaba a la estructura sintáctica de la proposición genérica en cuestión. Para cada sujeto se hizo una revisión exhaustiva de sus respuestas de manera que se asignaba con **1** o **0** la presencia o ausencia respectivamente de los indicadores de conocimiento definidos. Además, se hizo un registro de las respuestas que no pudieron ser clasificadas por tales indicadores y una síntesis de tales respuestas.

A continuación, se ilustra con un caso particular el procedimiento seguido para la codificación de las respuestas de los sujetos que dieron lugar a los resultados. Para ello, se presenta la respuesta del sujeto EBH10 sobre la forma de proceder en la demostración de la proposición genérica (figura 1) y el ejemplo brindado con su correspondiente demostración (figura 2), todas las respuestas referidas a la tarea 1: *universal simple*.



TAREA 1

Forma verbal: *Todos los elementos de un conjunto U satisfacen una propiedad $P(x)$.*

Forma simbólica: $\forall x \in U \left(P(x) \right)$.

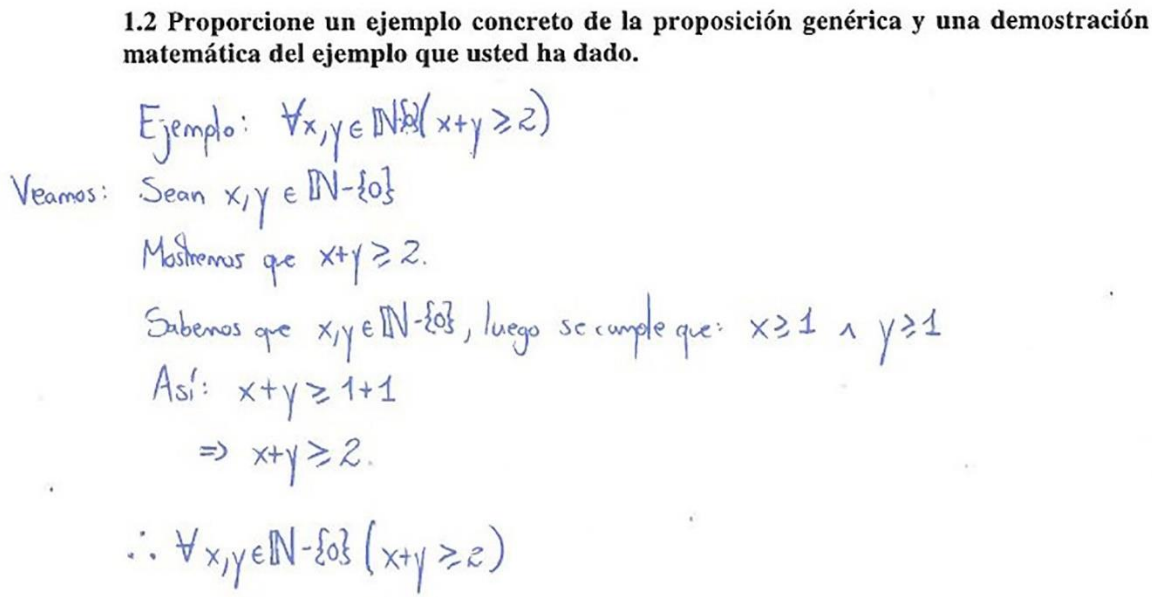
1.1 Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de esta proposición genérica.

Yo procedo de la siguiente manera:

1) Fijo un elemento genérico del conjunto, con el cual voy a trabajar.
2) Muestro que ese elemento genérico satisface la propiedad que se plantea.
3) Como el elemento genérico representa a cualquiera de los valores del conjunto, el hecho de que satisfaga la propiedad, indica que cualquier valor del conjunto (elemento del conjunto) satisface esa propiedad. Con ello puede concluirse que cualquier elemento de ese conjunto satisface la propiedad.

Figura 1. Explicación de la forma de proceder en la proposición genérica de la tarea 1 por parte del sujeto EBH10

Con base en el análisis de la figura 1 se tiene que el sujeto evidencia en su respuesta sobre la proposición genérica (PG) los dos indicadores de conocimiento definidos para el cuantificador universal y asociados al tipo de demostración directa (ver tabla 9): *que debe considerarse un elemento arbitrario del universo* y *que la propiedad se satisface para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario*, por lo tanto, para este sujeto se asigna un **1** a cada indicador. Además, no evidencia ninguno de los indicadores definidos para el tipo de demostración indirecta (ver tabla 9), por lo que para este sujeto se asigna **0** a cada uno de esos indicadores.



1.2 Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado.

Ejemplo: $\forall x,y \in \mathbb{N}\cancel{-\{0\}}(x+y \geq 2)$

Veamos: Sean $x,y \in \mathbb{N}-\{0\}$

Mostremos que $x+y \geq 2$.

Sabemos que $x,y \in \mathbb{N}-\{0\}$, luego se cumple que: $x \geq 1 \wedge y \geq 1$

Así: $x+y \geq 1+1$

$\Rightarrow x+y \geq 2$.

$\therefore \forall x,y \in \mathbb{N}-\{0\}(x+y \geq 2)$

Figura 2. Ejemplo de proposición genérica brindado y demostración por parte del sujeto EBH10 en la tarea 1

De forma similar, al analizar la figura 2 se puede notar que el sujeto brinda una proposición que se ajusta a la estructura sintáctica de la proposición genérica considerada en la tarea 1, a saber, $\forall x \in U\left(P(x)\right)$. Además, en su demostración evidencia el indicador asociado a la escogencia de un elemento arbitrario del universo, por lo tanto, se asigna **1** a ese indicador en la demostración del ejemplo (DE), sin embargo, no manifiesta de forma explícita que la propiedad se satisface para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario y en consecuencia se asigna **0** a ese indicador. Asimismo, no evidencia ninguno de los indicadores definidos para la demostración indirecta, por lo que se asigna **0** a cada uno de ellos para este sujeto.

Análisis de la información del cuestionario 2: evaluación de argumentos matemáticos considerando los aspectos lógico-sintácticos

Para analizar las respuestas de los sujetos sobre *(a) indicar si el argumento correspondía o no a una demostración matemática de la proposición P* y *(b) explicar de manera amplia las razones de su escogencia* se consideró la estructura sintáctica de la proposición *P* dada, a saber: "*cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de él y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos*" que simbólicamente se expresa

$\forall x \in \mathbb{R} \left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x} \right) \geq 2 \right)$. La categoría de análisis corresponde a la *implicación universal*.

En el argumento matemático dado en cada tarea, los investigadores analizamos a priori los elementos de conocimiento sobre la validez lógica que se podían estudiar. Los argumentos presentes en las tareas 1 y 2 no corresponden a demostraciones debido a que en el primero se considera un caso particular y en el segundo se demuestra el recíproco del predicado. La tarea 3 presenta un argumento que es una demostración directa de la proposición y la tarea 4 un argumento que es una demostración por reducción al absurdo, ambos correctos. Con base en el estudio de cada uno de los cuatro argumentos se generaron los indicadores de conocimientos: en la tarea 1 un indicador sobre la particularidad del argumento, en la tarea 2 un indicador sobre la demostración del recíproco, en la tarea 3 se emplearon los indicadores formulados en el cuestionario 1 para el cuantificador universal y para la implicación y en la tarea 4 se emplearon los indicadores planteados en el cuestionario 1 para la demostración por reducción al absurdo de la implicación universal. En la tabla 10 se presentan los indicadores de conocimientos elaborados para las tareas del cuestionario 2.

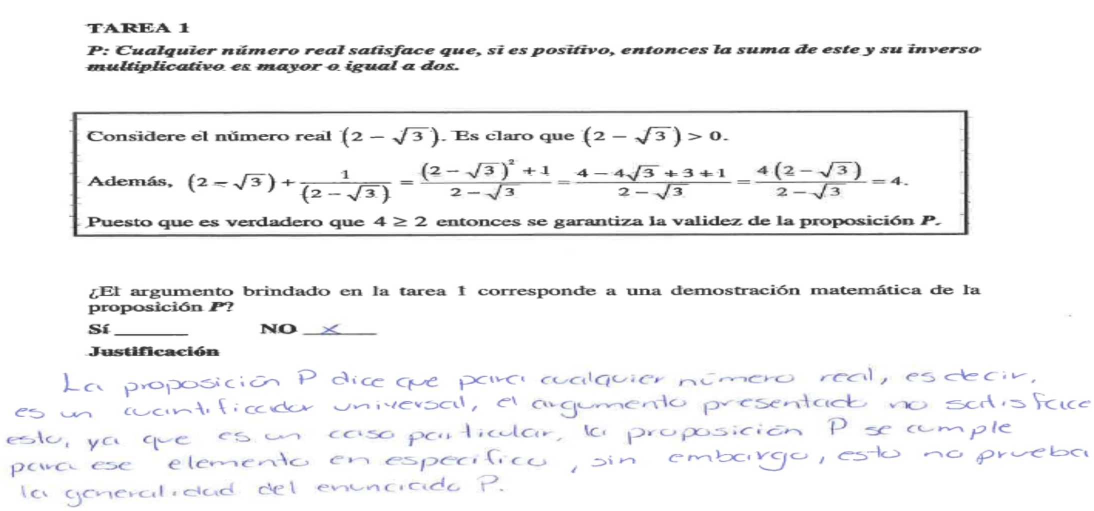
Tabla 10

Indicadores de conocimiento generados para la implicación universal del cuestionario 2

Tareas	Indicadores de conocimiento generados
TAREA 1 **Argumento 1: demostración de un caso particular.**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se considera un caso particular.
TAREA 2 **Argumento 2: demostración del recíproco.**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se considera el recíproco del predicado, es decir, se supone verdadero el consecuente $\left(x + \dfrac{1}{x} \right) \geq 2$ y se garantiza la veracidad del antecedente $x > 0$.
TAREA 3 **Argumento 3: demostración directa de la implicación universal.**	Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario del universo $\mathbb{R}$. Manifiesta que debe suponerse que el antecedente $x > 0$ es una proposición verdadera. Manifiesta que debe garantizarse que el consecuente $\left(x + \dfrac{1}{x} \right) \geq 2$ es una proposición verdadera con base en el antecedente $x > 0$ y en la teoría matemática en donde están insertas ambas proposiciones. Manifiesta que la propiedad $x > 0 \Rightarrow \left(x + \dfrac{1}{x} \right) \geq 2$ se satisface para todos los elementos del conjunto

	universo $\mathbb{R}$ en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario.
TAREA 4 **Argumento 4: demostración por reducción al absurdo de la implicación universal.**	Manifiesta que debe suponerse verdadera la negación de proposición dada y que es equivalente a la proposición $\exists x \in \mathbb{R}\left[x > 0 \wedge \left(\frac{x^2+1}{x} \right) < 2 \right]$. Manifiesta que se debe demostrar que $\neg \forall x \in \mathbb{R} \left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right) \geq 2 \right) \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria, en este caso F_0 es la contradicción $\left((x-1)^2 < 0 \wedge (x-1)^2 \geq 0 \right)$. Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg \forall x \in \mathbb{R} \left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right) \geq 2 \right)$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in \mathbb{R} \left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right) \geq 2 \right)$ debe ser verdadera.

Para cada sujeto se hizo una revisión exhaustiva de sus respuestas de manera que se asignaba con **1** o **0** la presencia o ausencia respectivamente de los indicadores de conocimiento definidos. Además, se hizo un registro de las respuestas que no pudieron ser clasificadas por tales indicadores y una síntesis de tales respuestas. A continuación, se ilustra con un caso particular el procedimiento seguido para la codificación de las respuestas de los sujetos que dieron lugar a los resultados. Para ello, se presentan las respuestas del sujeto EBM12 en las tareas 1 y 2.



TAREA 1

P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

Considere el número real $\left(2-\sqrt{3}\right)$. Es claro que $\left(2-\sqrt{3}\right) > 0$.

Además, $\left(2-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}{2-\sqrt{3}} = \frac{4-4\sqrt{3}+3+1}{2-\sqrt{3}} = \frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}} = 4.$

Puesto que es verdadero que $4 \geq 2$ entonces se garantiza la validez de la proposición *P*.

¿El argumento brindado en la tarea 1 corresponde a una demostración matemática de la proposición *P*?

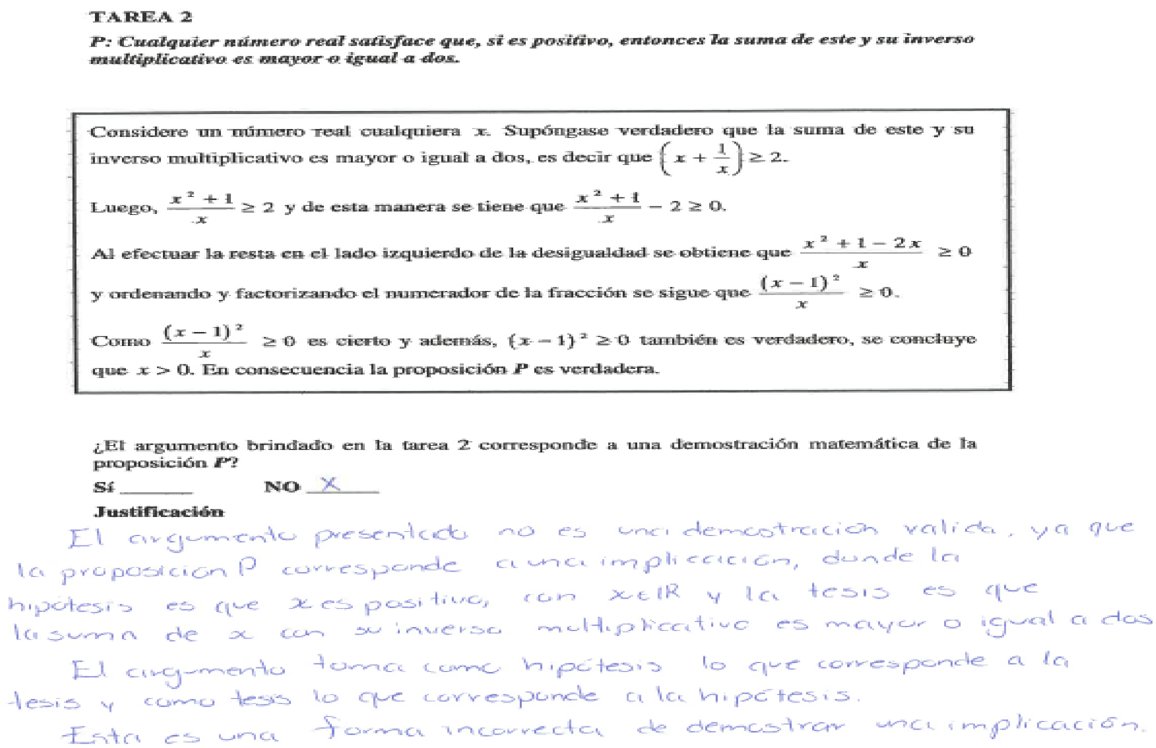
Sí _______ NO __X__

Justificación

La proposición P dice que para cualquier número real, es decir, es un cuantificador universal, el argumento presentado no satisface esto, ya que es un caso particular, la proposición P se cumple para ese elemento en específico, sin embargo, esto no prueba la generalidad del enunciado P.

Figura 3. Respuesta del sujeto EBM12 en la tarea 1

Con base en el análisis de la figura 3 se tiene que el sujeto evidencia en su respuesta el indicador de conocimiento definido para la tarea 1 (ver tabla 10): *que el argumento no es una demostración debido a que se considera un caso particular*, por lo tanto, para este sujeto se asigna un **1** a este indicador.



TAREA 2

P:* *Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

Considere un número real cualquiera x. Supóngase verdadero que la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos, es decir que $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$.

Luego, $\frac{x^2+1}{x}\geq 2$ y de esta manera se tiene que $\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0$.

Al efectuar la resta en el lado izquierdo de la desigualdad se obtiene que $\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$ y ordenando y factorizando el numerador de la fracción se sigue que $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$.

Como $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ es cierto y además, $(x-1)^2\geq 0$ también es verdadero, se concluye que $x>0$. En consecuencia la proposición P es verdadera.

¿El argumento brindado en la tarea 2 corresponde a una demostración matemática de la proposición *P*?

Sí ______ **NO** __X__

Justificación

El argumento presentado no es una demostracion valida, ya que la proposicion P corresponde a una implicación, donde la hipótesis es que x es positivo, con x∈IR y la tesis es que la suma de x con su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

El argumento toma como hipótesis lo que corresponde a la tesis y como tesis lo que corresponde a la hipótesis.

Esta es una forma incorrecta de demostrar una implicación.

Figura 4. Respuesta del sujeto EBM12 en la tarea 2

Con base en el análisis de la figura 4 se tiene que el sujeto evidencia en su respuesta el indicador de conocimiento definido para la tarea 2 (ver tabla 10): *que el argumento no es una demostración debido a que se considera el recíproco del predicado, es decir, se supone verdadero el consecuente* $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$ *y se garantiza la veracidad del antecedente* $x>0$, por lo tanto, para este sujeto se asigna un **1** a este indicador.

Análisis de la información del cuestionario 3: evaluación de argumentos considerando los aspectos matemáticos

Para analizar las respuestas de los sujetos sobre *(a) indicar si el argumento correspondía o no a una demostración matemática de la proposición dada, (b) explicar de manera amplia las razones de su escogencia* y *(c) en el caso de que el argumento dado no correspondiera a una demostración matemática de la proposición dada, indicar cuál o cuáles modificaciones harían al argumento matemático para que lo sea*, se establecieron cuatro categorías con base en los elementos sobre la validez matemática planteados en el marco teórico: *(1) el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo* presente en la tarea 1, *(2) el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo* presente en la tarea 2, *(3) el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar* presente en la tarea 3 y *(4) el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema* *de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana* presente en la tarea 4.

Para cada una de las tareas, los investigadores analizamos a priori los elementos matemáticos que consideramos que se podrían tomar en cuenta en la evaluación de los argumentos involucrados. Se ilustra este proceso en la primera tarea, en donde consideramos que el argumento no es una demostración matemática debido a que se emplea de forma parcial la hipótesis del discriminante no negativo $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ al suponer que $b^2-4ac=0$.

Con base en esto planteamos un indicador de conocimiento para la explicación de que el argumento no es una demostración matemática, a saber: *Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usa parcialmente la hipótesis* $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$.

Para realizar la modificación al argumento para que sea una demostración, consideramos que debe emplearse la hipótesis $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ y con base en ella exhibir al menos uno de los siguientes números reales $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la corrección. Por lo tanto, hemos planteado dos indicadores de conocimiento: *manifiesta que debe considerarse la hipótesis* $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ *en la corrección del argumento pero no exhibe ninguno de los números reales que cumplen la existencia y manifiesta que debe considerarse la hipótesis* $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ *para exhibir alguno de los números reales* $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *o* $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *en la corrección del argumento.* En la tabla 11 se presentan los indicadores de conocimientos elaborados para las tareas del cuestionario 3.

Tabla 11

Indicadores de conocimiento generados para las categorías de análisis del cuestionario 3

Tareas	**Indicadores de conocimiento**
TAREA 1 **Argumento 1: uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usa parcialmente la hipótesis $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$. Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ en la corrección del argumento pero no exhibe ninguno de los números reales que cumplen la existencia. Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ para exhibir alguno de los números reales $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la corrección del argumento.

TAREA 2 **Argumento 2: uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se emplea de manera incorrecta el axioma del inverso multiplicativo al considerar al número real n^{-1} sin garantizarse que $n \neq 0$. Manifiesta que deben considerarse dos casos en la corrección del argumento: (1) cuando $n \neq 0$ y ahí emplear el axioma del inverso al multiplicar por n^{-1} y (2) cuando $n = 0$ para deducir que $m = 0$ y por lo tanto $\lvert m \rvert = \lvert n \rvert$.
TAREA 3 **Argumento 3: uso indebido de las definiciones de número entero par e impar**	Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usan de forma incorrecta las definiciones de número par e impar. Manifiesta que debe emplearse en la corrección del argumento la definición de número *impar* para expresar que $2p+1=m$ y $2q+1=n$; y la definición de número *par* para concluir que $m+n=2j$ con $j \in \mathbb{Z}$.
TAREA 4 **Argumento 4: demostración matemática correcta del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana.**	Manifiesta que la hipótesis del teorema es que se considera un triángulo cualquiera en la Geometría Euclidiana. Manifiesta que se emplea en el argumento el postulado de las paralelas en la Geometría Euclidiana. Manifiesta que se emplean en el argumento definiciones matemáticas. Manifiesta que se emplean en el argumento teoremas matemáticos.

Para cada sujeto se hizo una revisión exhaustiva de sus respuestas de manera que se asignaba con **1** o **0** la presencia o ausencia respectivamente de los indicadores de conocimiento definidos. Además, se hizo un registro de las respuestas que no pudieron ser clasificadas por tales indicadores y una síntesis de tales respuestas.

A continuación, se ilustra con un caso particular el procedimiento seguido para la codificación de las respuestas de los sujetos que dieron lugar a los resultados. Para ello, se presentan las respuestas del sujeto ELH03 en la tarea 1.

TAREA 1

Proposición matemática P1: *Si* $a,b,c \in \mathbb{R}$ son tales que $a \neq 0$ y $(b^2-4ac) \geq 0$, entonces $\exists x \in \mathbb{R}\ (ax^2+bx+c=0)$.

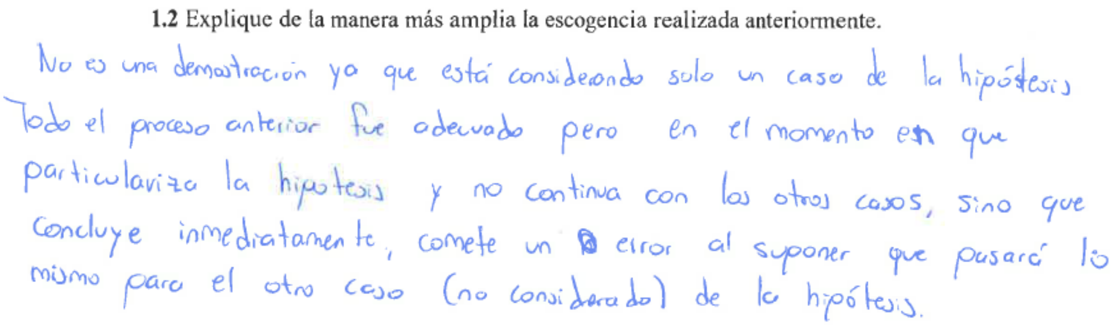
ARGUMENTO MATEMÁTICO PARA GARANTIZAR LA VALIDEZ DE LA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA P1

Supóngase que se tienen $a,b,c \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq 0$ y $(b^2-4ac) \geq 0$. Se debe demostrar que $\exists x \in \mathbb{R}\ (ax^2+bx+c=0)$. En efecto, considérese el número real $x = \frac{-b}{2a}$. Luego $ax^2+bx+c = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2-2b^2+4ac}{4a} = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}$. Por hipótesis se tiene que $(b^2-4ac) \geq 0$ por lo tanto se puede suponer en particular que $(b^2-4ac)=0$ y de esta manera $ax^2+bx+c = \frac{-(b^2-4ac)}{4a} = \frac{-0}{4a} = 0$. Luego el número real $x = \frac{-b}{2a}$ satisface la existencia.

1.1 Indique marcando con una equis (X) si el argumento brindado en la tarea 1 corresponde a una demostración matemática de la proposición **P1**.

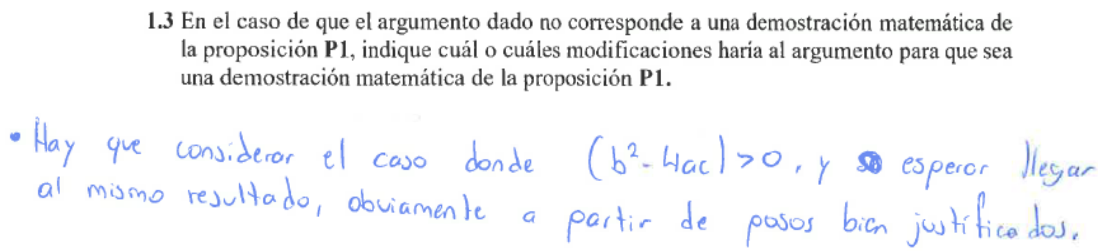
Sí ______ **NO** ___X___

Figura 5. Respuesta del sujeto ELH03 al apartado 1.1 en la tarea 1


1.2 Explique de la manera más amplia la escogencia realizada anteriormente.

No es una demostración ya que está considerando solo un caso de la hipótesis
Todo el proceso anterior fue adecuado pero en el momento en que
particulariza la hipotesis y no continua con los otros casos, sino que
Concluye inmediatamente, comete un error al suponer que pasará lo
mismo para el otro caso (no considerado) de la hipótesis.

Figura 6. Respuesta del sujeto ELH03 al apartado 1.2 en la tarea 1


1.3 En el caso de que el argumento dado no corresponde a una demostración matemática de la proposición **P1**, indique cuál o cuáles modificaciones haría al argumento para que sea una demostración matemática de la proposición **P1.**

• Hay que considerar el caso donde $(b^2-4ac)>0$, y esperar llegar al mismo resultado, obviamente a partir de pasos bien justificados.

Figura 7. Respuesta del sujeto ELH03 al apartado 1.3 en la tarea 1

Con base en el análisis de las figuras 5, 6 y 7 se tiene que el sujeto manifiesta que el argumento no es una demostración de la proposición matemática, debido a que particulariza la hipótesis, por lo tanto, se le asigna un **1** al indicador definido para la tarea 1 (ver tabla 11) que dice: *manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usa parcialmente la hipótesis* $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$.

En el caso de la corrección del argumento, el sujeto evidencia conocimiento de que debe considerarse la hipótesis en toda su dimensión, por lo tanto, se le asigna un **1** al indicador definido para la tarea 1 (ver tabla 11) que dice: *manifiesta que debe considerarse la hipótesis* $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ *en la corrección del argumento pero no exhibe ninguno de los números reales que cumplen la existencia*.

Finalmente se observa que el sujeto de investigación no hace referencia a cuáles serían los números reales que cumplirían la existencia, por lo tanto, se le asigna un **0** al indicador definido para la tarea 1 (ver tabla 11) que dice: *manifiesta que debe considerarse la hipótesis* $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ *para exhibir alguno de los números reales* $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *o* $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *en la corrección del argumento*.

Análisis de la información del cuestionario 4: convicción de un argumento matemático

Para analizar las respuestas de los sujetos sobre *(a) escoger el orden en el que los argumentos le parecen más convincentes, (b) explicar las razones por las que ha escogido al argumento más convincente* y *(c) explicar las razones por las que ha escogido al argumento que le parece menos convincente* se llevaron a cabo los siguientes pasos:

1. Se hizo una transcripción de todas las respuestas de los sujetos de investigación, para ello, se construyó una tabla en donde se colocó el código asignado a cada sujeto, el número del argumento que indicaron como el más convincente, las características de dicho argumento y finalmente, el número del argumento que indicaron como el menos convincente. No consideramos las características de los argumentos menos convincentes para el análisis, pues no era nuestro objetivo de investigación.
2. Se consideraron las seis categorías y sus respectivas definiciones sobre la convicción de un argumento matemático consideradas a priori en el apartado 2.3.3 del marco teórico, a saber: *(1) el uso de elementos concretos en el argumento*, (2) *la familiaridad del argumento, (3) el nivel de detalles en el argumento*, *(4) la forma ritual del argumento*, *(5) el nivel explicativo del argumento* y *(6) la validez del argumento*.
3. Se hizo una revisión exhaustiva de cada una de las respuestas de los sujetos de investigación sobre las características del argumento más convincente para determinar cuáles de ellas correspondían a las categorías planteadas a priori y mencionadas en el punto anterior.
4. Con base en la revisión mencionada en el punto anterior, consideramos que en algunas de las categorías que se tenían a priori no había una definición muy clara y, por lo tanto, fue necesario redefinirlas en algunos casos, eliminar otras y crear nuevas que se adaptaran a lo manifestado por los sujetos de investigación, de forma tal que se pudiese clasificar a todos los elementos presentes en las respuestas. En la tabla 12 se presentan las categorías que fueron empleadas para analizar la información con sus respectivas definiciones.

Tabla 12

Categorías de análisis del cuestionario 4

Categorías de análisis	**Definición de la categoría**
(1) El uso de elementos concretos en el argumento	El argumento es convincente debido a que se basa en ejemplos específicos o utiliza alguna referencia visual.
(2) La familiaridad del argumento	El argumento es convincente debido a que el profesor lo conoce o lo ha utilizado anteriormente, la convicción no se basa en las matemáticas utilizadas, sino en la experiencia previa del profesor de matemáticas con el argumento.
(3) La forma ritual del argumento	El argumento es convincente en función de su apariencia superficial en lugar de considerar los elementos de fondo.
(4) La validez del argumento	El argumento es convincente debido al uso de elementos lógicos o matemáticos correctos.
(5) La simplicidad matemática del argumento	El argumento es convincente porque se emplean elementos matemáticos simples y básicos que facilitan la compresión del argumento.
(6) La claridad del argumento	El argumento es convincente debido a que las ideas planteadas se comprenden de manera clara y sencilla.

5. Una vez que se tuvieron las categorías planteadas en la tabla anterior, se hizo nuevamente una revisión exhaustiva de las respuestas de cada sujeto de investigación sobre las características del argumento que más convincente. Para ello, se analizaron frases y palabras en las respuestas que permitieran decidir cuándo se hacía referencia a alguna de las categorías planteadas en la tabla anterior. En el registro de esta información, para cada categoría se determinó el código de los sujetos que referían a ella en sus respuestas y la cantidad de sujetos para cada una de ellas. En algunos casos, las respuestas de los sujetos se ubicaban en una sola categoría y en otros sujetos, en varias. A continuación, se ilustra con un caso particular el procedimiento seguido para la codificación de las respuestas de los sujetos que dieron lugar a los resultados. Para ello, se presentan las respuestas de los sujetos EBH08 y ELH03.

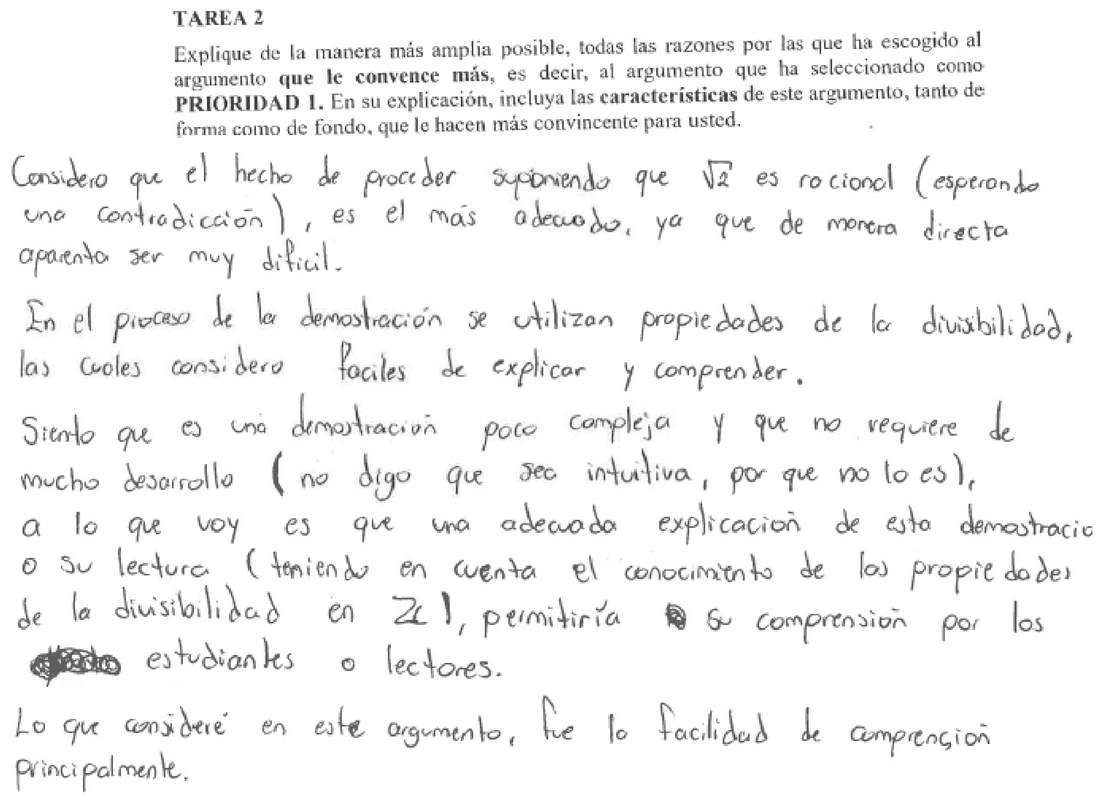
TAREA 2

Explique de la manera más amplia posible, todas las razones por las que ha escogido al argumento **que le convence más**, es decir, al argumento que ha seleccionado como **PRIORIDAD 1.** En su explicación, incluya las **características** de este argumento, tanto de forma como de fondo, que le hacen más convincente para usted.

Primero que nada porque se esta haciendo por contradicción, aparte. de usar la definición de lo que es número racional y garantizar que son naturales, aparte. argumenta o utiliza. muy bien. el término de ser. divisor de un número, la sustitución es bien realizada. y por último se llega a contradecir. lo que se quería. con su respectiva argumentación

Figura 8. Respuesta del sujeto EBH08 en la tarea 2

Con base en el análisis de la figura 8, podemos observar que las características del argumento que el sujeto ha considerado más convincente, hacen referencia a elementos lógicos, *como el tipo de demostración por contradicción* y al uso de elementos matemáticos *como la definición de número racional y el concepto de divisibilidad*. Por lo tanto, las características del argumento escogido las podemos ubicar en la categoría *(4) la validez del argumento* (ver tabla 12). De esta manera, en dicha categoría asignamos el código del sujeto EBH08.



TAREA 2

Explique de la manera más amplia posible, todas las razones por las que ha escogido al argumento **que le convence más**, es decir, al argumento que ha seleccionado como **PRIORIDAD 1.** En su explicación, incluya las **características** de este argumento, tanto de forma como de fondo, que le hacen más convincente para usted.

Considero que el hecho de proceder suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional (esperando una contradicción), es el más adecuado, ya que de manera directa aparenta ser muy difícil.

En el proceso de la demostración se utilizan propiedades de la divisibilidad, las cuales considero fáciles de explicar y comprender.

Siento que es una demostración poco compleja y que no requiere de mucho desarrollo (no digo que sea intuitiva, por que no lo es), a lo que voy es que una adecuada explicación de esta demostració o su lectura (teniendo en cuenta el conocimiento de las propiedades de la divisibilidad en $\mathbb{Z}$), permitiría su comprensión por los estudiantes o lectores.

Lo que consideré en este argumento, fue la facilidad de comprención principalmente.

Figura 9. Respuesta del sujeto ELH03 en la tarea 2

Con base en el análisis de la figura 9, podemos observar que en la respuesta del sujeto ELH03 sobre las características del argumento que ha considerado más convincente, hace referencia a elementos lógicos y matemáticos cuando afirma que *"Considero que el hecho de proceder suponiendo que* $\sqrt{2}$ *es racional (esperando una contradicción), es el más adecuado, ya que de manera directa aparenta ser muy difícil"* y *"En el proceso de demostración se utilizan propiedades de la divisibilidad, las cuales considero fáciles de explicar y comprender."* Lo anterior, nos brinda evidencia de que el sujeto considera que la demostración por contradicción es la forma más adecuada de abordar el argumento y que los elementos matemáticos empleados son correctos, por lo tanto, hemos considerado que en esta respuesta hay presencia de la categoría *(4) la validez del argumento* (ver tabla 12).

Asimismo, cuando el sujeto señala que *"se utilizan propiedades de la divisibilidad, las cuales considero fáciles de explicar y comprender"* y "*Siento que es una demostración poco compleja y que no requiere de mucho desarrollo"* nos da evidencia de que considera que los elementos matemáticos empleados en el argumento son básicos y simples, por lo tanto, consideramos que hay presencia de la categoría *(5) La simplicidad matemática del argumento* (ver tabla 12).

Por otra parte, cuando el sujeto afirma que *"es que una adecuada explicación de esta demostración o su lectura (teniendo en cuenta el conocimiento de las propiedades de la divisibilidad en* $\mathbb{Z}$ *), permitiría su comprensión por los estudiantes o lectores. Lo que consideré en este argumento, fue la facilidad de comprensión"* nos brinda evidencia de que considera que las ideas planteadas en el argumento se comprenden de manera clara y sencilla, lo que nos permite afirmar que hay presencia de la categoría *(6) La claridad del argumento* (ver tabla 12).

Con base en lo anterior, el código del sujeto ELH03 lo asignamos a las categorías *(4), (5)* y *(6)* señaladas en la tabla 12.

3.4.3 Criterios de validez del estudio

Como se ha mencionado, el análisis de la información de los cuatro cuestionarios empleados en las tres fases empíricas se realizó mediante el análisis de contenido (Krippendorff, 2004). En este apartado describimos las decisiones metodológicas que se tomaron a lo largo de la investigación para garantizar la validez de la misma.

Se espera que las técnicas sean confiables. Más específicamente, las técnicas de investigación deberían dar como resultado hallazgos que sean replicables. Es decir, los investigadores que trabajan en diferentes momentos y quizás en diferentes circunstancias deberían obtener los mismos resultados al aplicar la misma técnica a los mismos datos. La replicabilidad es la forma más importante de confiabilidad. Para que un proceso sea replicable, debe regirse por reglas que se establezcan explícitamente y se apliquen por igual a todas las unidades de análisis (Krippendorff, 2004).

Dado que el objetivo general de nuestra investigación consiste en caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la práctica matemática de la demostración, hicimos la búsqueda de un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas que incluyera a la demostración como parte de sus categorías. El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* posee dentro del dominio del conocimiento matemático un subdominio denominado la *práctica matemática* que contiene a la demostración como una de sus categorías. No obstante, determinamos que no existe una categorización de este subdominio ya que la agrupación de sus descriptores se encuentra en estudio (Carrillo et al., 2018).

Para realizar una categorización de la demostración dentro del *MTSK* y crear nuevos componentes que fueran considerados como evidencias de conocimiento matemático de esta, consideramos pertinente realizar un análisis conceptual sobre la demostración. Esto dio origen a la *fase 0. Análisis conceptual de la demostración matemática*. Para llevarlo cabo, se emplearon como fuentes de información libros de texto, investigaciones sobre la demostración matemática y el Programa de Estudios de Matemáticas de la educación secundaria en Costa Rica, como se mencionó en el apartado 3.2.1. Este análisis conceptual se centró en cuatro elementos: *los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas, el concepto de demostración, los tipos de demostraciones* y *las funciones atribuidas*. Fue relevante para hacer una aproximación de los elementos que deberían componer el conocimiento de los profesores de matemáticas sobre la demostración, tal como se describió en el apartado 1.1.5.

Los sujetos de investigación seleccionados para las fases empíricas eran profesores de matemáticas en formación inicial en los últimos niveles de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, como se detalla en el apartado 3.2.2. Consideramos a esta población por su mayor contacto con los procesos de razonamiento y demostración al estar finalizando su formación inicial. Sin embargo, debido a su escaso desempeño profesional, se decidió limitar el estudio al componente matemático de la demostración, específicamente a los aspectos lógico-sintácticos que corresponden a la dimensión de la *validez lógica* y a los aspectos matemáticos que refieren a la dimensión de la *validez matemática*. Asimismo, consideramos el estudio de las características de los argumentos más convincentes para los sujetos de investigación, lo que corresponde a la dimensión de la *convicción de un argumento matemático*, debido a la influencia que puede tener dicha dimensión en el conocimiento profesional de los sujetos. Lo anterior permitió el planteamiento de las tres fases empíricas de la investigación: *fase 1. Validez lógica*, *fase 2. Validez matemática* y fase 3. *Convicción de un argumento matemático*.

Para la *fase 1. Validez lógica* decidimos estudiar el conocimiento de los futuros profesores caracterizando la forma en la que procedían en la demostración de proposiciones genéricas, es decir, sin contenido matemático específico y la forma en la que evaluaban argumentos matemáticos, en ambos casos, en función de los aspectos lógico-sintácticos. Por tal razón, se generaron dos cuestionarios para esta fase, *el cuestionario 1* sobre las formas de proceder en una demostración en función de los aspectos lógico-sintácticos y *el cuestionario 2* para la evaluación de argumentos en función de dichos aspectos. Para la *fase 3. Validez matemática* el interés era el estudio del conocimiento de los sujetos de investigación mediante la forma en la que evaluaban argumentos en función de aspectos matemáticos como el uso de la hipótesis de la proposición y los axiomas, las definiciones y los teoremas de la teoría matemática empleados en dicha demostración. En el caso de la *fase 4. Convicción de un argumento matemático* nuestro interés era determinar las características de los argumentos que más convencían a los sujetos de investigación, por tal razón decidimos utilizar a la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos que es un resultado matemático que se sugiere en el Programa de Estudios de Matemáticas de la educación secundaria costarricense para la introducción de los números irracionales y que posee diferentes demostraciones. La construcción, la descripción y la forma en que se aplicaron los cuestionarios 1 y 2 se presenta en el apartado 3.3.2. Asimismo, en el apartado 3.3.3 se presenta lo correspondiente para los cuestionarios 3 y 4.

Para el análisis de la información de los cuestionarios 1, 2 y 3 hemos creado indicadores de conocimiento basados en el conocimiento matemático, que han permitido analizar las respuestas de los profesores en formación inicial; dichos indicadores hacen el papel de las categorías en el análisis de contenido tal y como se describe en el apartado 3.4.2. En el caso del cuestionario 4 se consideraron inicialmente seis categorías que se han descrito en el apartado 2.3.3 del marco teórico. No obstante, durante el análisis de la información, algunas se modificaron, otras se eliminaron y se agregaron nuevas, como se explica con detalle en el apartado 3.4.2.

Con base en lo anterior, hemos considerado como criterio de validez de nuestro estudio el trabajo sistemático en la realización de cada una de las fases de la investigación. Concretamente podemos destacar los siguientes elementos: *(1)* la construcción conjunta de cada uno de los cuatro cuestionarios empleando los elementos del análisis conceptual de la demostración y las recomendaciones metodológicas del Programa de Estudios de Matemáticas de la educación secundaria de Costa Rica; *(2)* el planteamiento de indicadores de conocimiento para el análisis de las respuestas de los sujetos de investigación en los cuestionarios 1, 2 y 3 en función del conocimiento matemático y la revisión exhaustiva de tales respuestas para determinar la presencia o ausencia de tales indicadores; *(3)* el registro de evidencias de conocimientos en las respuestas de los sujetos de investigación no contemplados a priori en los indicadores de conocimiento y; *(4)* el registro de todas las respuestas de los sujetos de investigación en el cuestionario 4 para determinar su correspondencia con las categorías formuladas a priori y la modificación de las mismas procurando su ajuste oportuno a las respuestas de los sujetos y de esta manera poder clasificarlas a todas ellas.

CAPÍTULO 4
RESULTADOS

Índice del capítulo

Este capítulo consta de cuatro apartados. En el primero, *Resultados de la fase teórica 0: Análisis conceptual de la demostración matemática*, se presentan los principales hallazgos de un estudio teórico sobre la demostración centrado en cuatro elementos principales, *los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas*, *el concepto de demostración*, *los tipos de demostraciones* y *las funciones atribuidas*.

En el segundo apartado, *Resultados de la fase empírica 1: el conocimiento especializado sobre la validez lógica de la demostración matemática*, se consideran dos secciones. En la primera se presentan los resultados sobre el conocimiento de los sujetos de investigación de las formas de proceder en una demostración considerando la estructura lógico-sintáctica de las proposiciones y mediante tres categorías de análisis: *(1) el tipo de demostración, (2)* el *tipo de cuantificador* y *(3) el tipo de conectiva lógica* y los indicadores de conocimiento establecidos. En la segunda sección, se presentan los resultados sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la evaluación de argumentos matemáticos considerando los aspectos lógico-sintácticos en una proposición matemática con la estructura de la implicación universal.

En el tercer apartado, *Resultados de la fase empírica 2: el conocimiento especializado sobre la validez matemática de la demostración*, se presentan los resultados sobre el conocimiento de los sujetos de investigación en la evaluación de argumentos considerando los aspectos matemáticos de la demostración mediante cuatro categorías de análisis *(1) el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo, (2) el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo, (3) el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar* y *(4) el uso debido de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana* y los indicadores de conocimiento planteados.

En el cuarto apartado, *Resultados de la fase empírica 3: la convicción de un argumento matemático*, se presentan los resultados sobre las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los sujetos de investigación, a saber: *(1) el uso de elementos concretos en el argumento, (2) la familiaridad del argumento, (3) la forma ritual del argumento, (4) la validez del argumento, (5) la simplicidad matemática del argumento y (*6) *la claridad del argumento*.

4.1 RESULTADOS DE LA FASE TEÓRICA 0: ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Este apartado se divide en dos partes. En el primero se presentan *algunos elementos históricos de la demostración en las Matemáticas*. En el segundo se consideran los otros elementos del análisis conceptual sobre la demostración, a saber: *el concepto de demostración, los tipos de demostraciones* y *las funciones atribuidas*.

4.1.1 Primera parte del análisis conceptual de la demostración. Aspectos históricos de la demostración en Matemáticas

Para clarificar el concepto de la demostración en Matemáticas, vamos a resumir ideas expuestas en el libro de Ruiz (2003), completado con otros aportes de autores de filosofía de las Matemáticas (Kleiner, 1991), o de Educación Matemática (Domingues, 2002; Durand-Guerrier et al., 2012a; Mariotti, 2006). El concepto de demostración matemática que se emplea en la actualidad está vinculado a la visión de los antiguos griegos con los Elementos de Euclides (300 a.C.) y a su manera particular de presentar el corpus del conocimiento. Las proposiciones se derivan de las definiciones, postulados y axiomas mediante el razonamiento deductivo, esta forma de proceder ha sido durante muchos siglos el modelo principal de argumentación para determinar la veracidad de las afirmaciones matemáticas (Durand-Guerrier et al., 2012a; Mariotti, 2006). No obstante, este concepto ha sido comprendido de maneras diferentes en la Antigüedad, la Edad Media, el Renacimiento y en la Época Contemporánea, como se presenta a continuación.

Según Domingues (2002), Kleiner (1991) y Ruíz (2003), en la *Antigüedad* culturas como los babilonios y los egipcios, centraron su desarrollo matemático en procedimientos prácticos y en evidencia empírica. En la aritmética, el álgebra y la geometría, las reglas que establecían los babilonios se basaban en la prueba y el error, y no tenían una estructura lógica o demostrativa. El criterio de confiabilidad de las reglas y procedimientos empleados, era la concordancia con la realidad en la que estaban inmersos. En casos más complejos, los egipcios ejercitaron alguna noción de demostración lejana al formalismo del método axiomático-deductivo, al determinar una regla para el volumen del tronco de pirámide de bases cuadradas, mediante una deducción algebraica a partir de la regla para el cálculo del volumen de una pirámide, según consta en el papiro de Moscú.

Los inicios del método axiomático en las matemáticas están ligados al desarrollo matemático de la antigua Grecia. En dicho método se concibe a la demostración como deducción de postulados, es decir, como un razonamiento deductivo que sirve de base para el razonamiento matemático. Además, se da un reconocimiento explícito de que las matemáticas se ocupan de abstracciones. La historia de esta civilización se puede dividir en dos periodos: *la etapa clásica* que comprende los años 600 y 300 a.C. y la *etapa helenística o alejandrina* entre los años 300 a.C. y 600 d.C (Domingues, 2002; Kleiner, 1991; Ruíz, 2003).

En la *etapa clásica* se dio un gran impulso al razonamiento deductivo y a las demostraciones por parte de matemáticos como Thales, Pitágoras, Platón, Eudoxo, Aristóteles, Euclides, Apolonio, entre otros. Se les atribuye el reconocimiento del carácter abstracto de las matemáticas, la deducción lógica de proposiciones matemáticas a partir de premisas, el establecimiento del método por reducción al absurdo, el método analítico y del método de exhausción. La obra cumbre fue los *Elementos* de Euclides en la cual realiza un trabajo de ordenamiento, sistematización y organización lógica del conocimiento matemático más relevante hasta ese momento. En ella se presentan axiomas, definiciones, cadenas de teoremas y la estructura lógica de lo simple a lo complejo en los teoremas. Los *Elementos* consta de 13 libros, los primeros seis tratan sobre geometría plana, los tres siguientes sobre teoría de números, el décimo sobre los inconmensurables y los tres últimos sobre geometría de sólidos (Ruíz, 2003).

En la *etapa helenística o alejandrina* la preocupación se centró en los resultados para el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, además de un mayor uso de los irracionales, del álgebra y la aritmética. En las demostraciones se considera el aporte de Arquímedes (287-212 a.C.) quien demostró teoremas sobre áreas y volúmenes mediante el método de exhausción y el método de demostración indirecto. Además, el aporte de Menelao quien escribió la obra denominada *Sphaerica* cuyo objetivo era la demostración de teoremas sobre triángulos esféricos similares a los teoremas sobre triángulos en el plano demostrados por Euclides (Ruíz, 2003).

Según Domingues (2002) y Ruíz (2003), en la *Edad Media* el desarrollo matemático de occidente fue muy primitivo debido fundamentalmente a la forma de vida, a los valores y a las metas planteadas por el cristianismo. La herencia de la ciencia griega se basaba por una parte en la deducción lógica y en la reducción a principios y por otra en el uso de métodos inductivos y heurísticos. No obstante, en ambas posiciones la razón y la mente eran fundamentales por lo que fueron marginadas, lo que obstaculizó el desarrollo de las ciencias y la demostración matemática. De esta manera obras como los *Elementos* de Euclides estaban muy por encima de las posibilidades intelectuales de la época. El desarrollo de las matemáticas se trasladó a otras culturas como los árabes, hindúes y chinos que no priorizaban a la demostración.

Según Ruíz (2003), en el caso de los chinos, el mayor desarrollo de las matemáticas se da a partir del siglo XIII, trabajaron en la resolución de ecuaciones de orden superior basada en la extracción de raíces cuadradas y cúbicas del *Chiu Chang* que es una obra que tiene 246 problemas distribuidos en nueve capítulos. La demostración está presente en el teorema *Kou ku* que es el teorema de Pitágoras y aparece demostrado en un texto antiguo llamado *Chou Pei*. El teorema y sus aplicaciones tuvo mucha relevancia en un intento por utilizar a la geometría en la demostración de resultados algebraicos y aritméticos, es decir, la construcción de un álgebra geométrica. En cuanto a los árabes, tuvieron acceso al conocimiento griego mediante manuscritos escritos en griego, sirio o hebreo, de esta manera tuvieron las obras de Aristóteles, Apolonio, Arquímedes, Diofanto, Herón y las tradujeron al árabe. Existían dos tradiciones en las matemáticas árabes: *(1)* basada en las fuentes persas e indias que ponían su acento en una aproximación algebraica en las matemáticas con una motivación práctica, la figura relevante es Al-Khwarizmi y *(2)* basada en las matemáticas helenísticas en donde predomina la geometría y los métodos deductivos, en este caso sobresalen Tabit ibn Qurra quien proporcionó una demostración del teorema de Pitágoras y una generalización del mismo y Omar Khayyam quien intentó una demostración del postulado de las paralelas de Euclides.

Durante el *Renacimiento* en el siglo XV, hubo más contacto de Europa con los trabajos griegos los que impulsaron la preocupación por la naturaleza y el ser humano, el pensamiento aristotélico, la lógica formal, la abstracción, entre otros elementos. La imprenta permitió que los libros estuvieran al alcance de muchas personas lo que favoreció la difusión del conocimiento. Por ejemplo, la primera versión impresa de los *Elementos* de Euclides en latín apareció en Venecia en 1482, asimismo, los cuatro libros de las *Secciones Cónicas* de Apolonio, las obras de Pappus, la *Arithmetica* de Diofanto, entre otras. A pesar de la traducción de estos trabajos, los aspectos que más se trabajaron fueron los más básicos de las matemáticas, por lo tanto, no hubo grandes progresos en las demostraciones (Ruíz, 2003).

En el siglo XVII, Descartes propuso un nuevo método para establecer el conocimiento verdadero, planteó que tal método era el de las matemáticas en las que consideró dos dimensiones fundamentales: la axiomática y la derivación lógica. Promovió el método deductivo y el poder de la razón. Por su parte, Pascal alabó las bondades del método euclidiano para demostrar afirmaciones que se sabían verdaderas, pero que con este método se podrían certificar de forma irrefutable, no obstante, Descartes objetaba la claridad de la explicación de tales métodos en donde el proceso analítico seguido para construir tales demostraciones no era evidente (Durand-Guerrier et al., 2012a; Ruíz, 2003).

El álgebra tuvo un papel importante en la búsqueda de un método general para la búsqueda del conocimiento, de esta manera, mediante la simbolización de los principios y métodos lógicos se pretendía mecanizar el razonamiento y proponer una matemática universal. La fundamentación del álgebra no se podía llevar a cabo en términos similares a los de la geometría griega, en consecuencia, se dio una variación en los criterios para validar los resultados y los métodos matemáticos, se dio mayor importancia a la prueba y error, a la heurística, la intuición, a los argumentos físicos y a la inducción (Ruíz, 2003).

Uno de los resultados más importantes de este siglo fue la invención del cálculo diferencial e integral por parte de Newton y Leibniz en donde los métodos infinitesimales jugaron un papel preponderante. Sin embargo, la falta de precisión y rigor lógico generó una serie de críticas a los nuevos métodos. El tema de fondo era el concepto de límite, el cual se utilizaba sin precisión en el paso de las pendientes de rectas secantes a la pendiente de la recta tangente o la derivada, de este modo el llamado *paso al límite* no encontró fundamentos en la geometría Euclídea, ni en la aritmética ni en el álgebra tradicional. Era un método matemático diferente y nuevo y para el que no se contaba con una formulación rigurosa desde el punto de vista lógico (Ruíz, 2003).

En el siglo XVIII, el desarrollo de las matemáticas estuvo influenciado por las revoluciones en la cosmología y en la astronomía, el énfasis estuvo en lo cuantitativo debido a la relación con las ciencias naturales, se tuvo una gran producción de conocimiento matemático, pero con importantes debilidades en los fundamentos lógicos. Particularmente se dio un manejo muy liberal de los procesos infinitos y en consecuencia poca precisión de los criterios de convergencia (Ruíz, 2003).

Hacia finales del siglo XIX, la demostración se consideraba como una actividad intelectual destinada a la convicción racional y psicológica de la validez de una afirmación matemática. No obstante, la aparición de algunos resultados aparentemente paradójicos como, por ejemplo, que *el todo podría no ser mayor que cada una de sus partes*, dejó de manifiesto que solamente la intuición y los razonamientos heurísticos-geométricos eran insuficiente para explicarlos. Esto obligó a someter a la demostración a un mayor rigor y análisis con objeto de disminuir la evidencia intuitiva y se inicia así un proceso de búsqueda del rigor que tenía como fin esclarecer algunos conceptos y definirlos de una manera más adecuada, fue relevante la deducción y el rigor lógico como fundamento de las matemáticas, se buscan nuevos criterios basados en la aritmética, el álgebra y la lógica abstracta (Domingues, 2002; Ruíz, 2003).

En 1847 se da el surgimiento de la lógica matemática con el *Análisis Matemático de la Lógica* de Boole y todo esto impulsó el renacimiento del método axiomático en donde aparecen los conceptos abstractos de grupos, anillos, campos y espacios vectoriales. La aritmetización del análisis hizo una reducción de sus fundamentos hacia los números reales, quienes a su vez se fundamentaron en los números racionales y estos a su vez en los números naturales desembocando en los fundamentos de la aritmética (Domingues, 2002; Kleiner, 1991).

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX hicieron su aparición tres escuelas filosófico-matemáticas que intentaron resolver las dificultades del rigor y los fundamentos teóricos en las matemáticas: *el logicismo*, *el formalismo* y *el intuicionismo* (Kleiner, 1991; Ruíz, 2003). El logicismo sostiene que la lógica conecta a las leyes más profundas del pensamiento y busca en la reducción de la matemática a la lógica, un mecanismo teórico para obtener rigor y certeza en las matemáticas. Privilegia la lógica y apuntala los rasgos axiomáticos y formales de la matemática, es decir, asume que la axiomática es la columna vertebral del edificio matemático, añade un fuerte platonismo en la consideración de los objetos matemáticos y busca erradicar la intuición en la aritmética (Ruíz, 2003).

El intuicionismo fue un movimiento con fuerte oposición al logicismo y al axiomatismo. Para estos matemáticos era necesario recurrir a una intuición temporal y consideraban que las paradojas correspondían a abusos cometidos cuando el lenguaje y la lógica, dejan de corresponder con la verdadera matemática. De esta manera, la lógica es un instrumento accesorio. Consideran que es más importante producir matemática verdadera apegada a una intuición introspectiva que probar su consistencia. Establecen un programa práctico centrado en la noción de constructividad el cual determina las reglas empleadas, es decir, la lógica, el lenguaje y el tratamiento del infinito. El constructivismo desarrollado se centró en la búsqueda de mecanismos o procedimientos finitistas para la fundamentación de las matemáticas y aunque su propuesta metodológica suprime grandes apartados de la matemática clásica y favorecen elementos no formales ni lógicos en su interpretación teórica, no se apartaron de la preocupación por las verdades infalibles de la razón (Ruíz, 2003).

En el formalismo las matemáticas no se reducen a nociones y principios lógicos, consideran que otros axiomas y principios extra-lógicos deben ser agregados. Aunque consideran un tratamiento axiomático-formal como en el logicismo, no se preocuparon por un reduccionismo lógico. Las matemáticas son vistas como un estudio de los sistemas axiomáticos en donde los términos primitivos y los axiomas del sistema se consideran cadenas de símbolos desprovistas de significado y que deben manipularse con base en las reglas de inferencia establecidas para la deducción de los teoremas del sistema (Kleiner, 1991; Ruíz, 2003).

En 1931, Kurd Gödel publica su trabajo llamado *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines* el cual afirma que cualquier formalismo que sea lo suficientemente fuerte para expresar algunas partes básicas de la teoría de números es incompleto, esto implica que las matemáticas no pueden ser formalizadas de forma absoluta y en las partes formalizadas no existe garantía de su consistencia. De esta manera, no es posible dejar de lado a la intuición con la que el ser humano se relaciona con el mundo material. Los resultados de Gödel ponen en entredicho el esquema de los sistemas absolutistas y cerrados, es decir, aquellos que pretenden que el conocimiento se obtiene a partir de la deducción de verdades primarias con únicamente la intervención de la lógica y la razón y al margen del mundo real (Ruíz, 2003).

En la década de 1950 el estudio formal de la argumentación, en particular los trabajos de Toulmin y Perelman generaron más cuestionamientos sobre las relaciones entre la exploración, la argumentación, la demostración, la explicación y la justificación en las matemáticas (Durand-Guerrier et al., 2012a). Esta serie de dudas generaron una tensión relacionada con la naturaleza de la actividad matemática que ha afectado a la argumentación matemática. Las teorías matemáticas se construyen y desarrollan por diferentes caminos y énfasis: *(1) el énfasis en el proceso de la invención matemática* en donde se prefiere mantener mayor apertura para nuevas formas de analizar los temas, explorar los problemas mediante enfoques múltiples, recopilar información desde perspectivas alternativas, entre otras y, *(2) el énfasis en la formalidad matemática* en donde se privilegia el hacer los argumentos matemáticos más formales y explícitos, hacer una síntesis de los argumentos y la búsqueda de un marco amplio en el que se inserten y ajusten los resultados matemáticos individuales. Algunos trabajos que ejemplifican este segundo énfasis son los de Bourbaki en el siglo XX y el de lógicos como Frege, Russell, Tarski y Gödel, quienes no solo se preocuparon por fortalecer los fundamentos de las matemáticas sino también por la comprensión de su formalización en un nivel metamatemático (Durand-Guerrier et al., 2012a; Mariotti, 2006).

Síntesis de los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas

Con base en los resultados presentados en este apartado, se pueden sintetizar las siguientes apreciaciones sobre los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas:

1. En la Antigüedad, existieron culturas que no tenían una estructura lógica o demostrativa como los babilonios y los egipcios en donde las matemáticas desarrolladas estaban más orientadas a procedimientos prácticos y al uso de la evidencia física, y otras como la antigua Grecia que fue fundamental en el desarrollo del método axiomático, el razonamiento deductivo, las demostraciones, el carácter abstracto de las matemáticas, la deducción lógica de proposiciones matemáticas a partir de premisas, el establecimiento del método por reducción al absurdo, el método analítico y del método de exhausción (Domingues, 2002; Kleiner, 1991; Ruíz, 2003).
2. En la Edad Media, no hubo un gran desarrollo de la demostración. Por un lado, el desarrollo matemático de occidente fue muy elemental debido a las influencias religiosas, en otras culturas como los árabes, los hindúes y los chinos se dieron mayores avances matemáticos, no obstante, estas culturas no priorizaban los aspectos demostrativos. En el caso de los chinos, existe una mínima presencia de la demostración en el teorema *Kou ku* que es el teorema de Pitágoras y en el caso de los árabes, cuya tradición se basaba en las matemáticas helenísticas, hubo un predominio de la geometría y los métodos deductivos (Domingues, 2002; Ruíz, 2003).
3. En el Renacimiento durante el siglo XV hubo mayor acceso a los trabajos de la antigua Grecia y una preocupación por la naturaleza y el ser humano, no obstante, no se dieron progresos importantes en la demostración (Ruíz, 2003).
4. En los siglos XVII y XVIII se dio una gran producción de conocimiento matemático. Algunos elementos que destacan son: *(1)* el planteamiento por parte de Descartes de un método para establecer conocimiento verdadero basado en las matemáticas y con dos dimensiones principales, la axiomática y la derivación lógica, *(2)* la simbolización de principios y métodos lógicos mediante el álgebra en la búsqueda de un método general para generar conocimiento y *(3)* la invención del cálculo diferencial e integral y el uso de los infinitesimales. No obstante, hubo problemas fundacionales y de rigor particularmente en el uso de procesos infinitos (Durand-Guerrier et al., 2012a; Ruíz, 2003).
5. En el siglo XIX, la aparición de algunas paradojas puso en evidencia que la intuición y los razonamientos de tipo heurísticos y geométricos eran insuficientes para explicar ciertos hechos lo que provocó una búsqueda de rigor para la definición de conceptos matemáticos y con ello, la demostración fue sometida a un mayor análisis para disminuir la evidencia de tipo intuitiva. Hacia finales de este siglo y principios del siglo XX aparecieron tres escuelas de pensamiento que intentaron dar fundamento teórico a las Matemáticas: *el logicismo*, *el formalismo* y *el intuicionismo*. No

obstante, en 1931 el trabajo de Kurd Gödel cuestionó a los sistemas absolutistas y cerrados al plantear la imposibilidad de formalizar a las Matemáticas de manera absoluta y aun en las partes formalizadas se cuestionó su consistencia (Domingues, 2002; Kleiner, 1991; Ruíz, 2003).

6. En el siglo XX, específicamente en la década de 1950 los trabajos de Toulmin y Perelman sobre la argumentación plantearon más inquietudes sobre los nexos existentes entre la exploración, la argumentación, la demostración, la explicación y la justificación en las Matemáticas. Esto provocó tensión sobre la naturaleza de la actividad matemática en donde se distinguen principalmente dos énfasis en la construcción de teorías: *(1)* el énfasis en el proceso de la invención matemática, en donde se tiene mayor apertura para analizar los temas o *(2)* el énfasis en la formalidad matemática en donde priva la formalidad de los argumentos matemáticos (Durand-Guerrier et al., 2012a; Mariotti, 2006).
7. En la actualidad, la noción de demostración que existe está vinculada a la visión de la antigua Grecia, específicamente, a los Elementos de Euclides (300 a.C.). En ella se emplea el razonamiento deductivo para derivar proposiciones a partir de las definiciones, postulados y axiomas (Durand-Guerrier et al., 2012a; Mariotti, 2006).

4.1.2 Segunda parte del análisis conceptual de la demostración. El concepto de demostración, los tipos de demostraciones y las funciones atribuidas

En esta sección se reproduce de forma íntegra, el apartado de resultados del artículo denominado *La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas* de Alfaro, Flores y Valverde (2019) en donde se consideran los otros elementos del análisis conceptual sobre la demostración, a saber: *el concepto de demostración*, *los tipos de demostraciones* y *las funciones atribuidas*. El artículo completo se puede obtener en el sitio web de la Revista UNICIENCIA en el siguiente enlace electrónico: https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/11481/14808.

En este apartado, se presenta una síntesis de los hallazgos del estudio teórico realizado. En cuanto al *concepto de demostración*, se discute el sentido informal y formal, la demostración clásica, la demostración en las matemáticas y en la educación matemática, además de la relación existente con los términos razonamiento, argumentación, explicación y prueba. Sobre los *tipos de demostraciones en matemáticas*, se consideran las demostraciones directas e indirectas, además de las distintas maneras en las que se debe proceder en función de las estructuras simbólicas de las proposiciones matemáticas involucradas. Finalmente, sobre las *funciones atribuidas*, se consideran los distintos roles de las demostraciones tanto en las matemáticas como en su enseñanza.

4.1.2.1 El concepto de demostración

El término demostración puede utilizarse en un sentido informal en el que se haga referencia a sentimientos, habilidades o al funcionamiento de algo y, en uno formal, lógico o metodológico, de mayor tecnicismo, en el cual las demostraciones versan sobre proposiciones. Asimismo, es posible usarlo con diferentes enfoques, dependiendo del contexto o marco institucional, entendido como un punto de vista local que se caracteriza por el empleo de recursos propios y tanto por hábitos como por normas específicas. Algunos de estos contextos pueden ser la lógica y fundamentos de las matemáticas, la matemática profesional, la vida cotidiana, las ciencias experimentales y la enseñanza de las matemáticas elementales en todos sus niveles (Godino y Recio, 2001; Vega, 2012b).

En un sentido amplio, la demostración consiste en una prueba de algo, partiendo de verdades universales y evidentes, es un razonamiento convincente con el que se corrobora la veracidad de una proposición (Alvar, 1998; Comte-Sponville, 2005; Diccionario ilustrado Océano de la lengua española, 1994; Real Academia Española, 2006). En una línea más específica, Martí (2003) indica que la demostración es un razonamiento mediante el que se afirma la verdad de una proposición, aplicando las reglas de la lógica. Consta de tres partes: la tesis, entendida como lo que se quiere demostrar; un conjunto de proposiciones y una conclusión que se obtiene mediante razonamiento, la cual afirma la validez de la tesis.

La demostración clásica

Las demostraciones son pruebas deductivas formalizadas como las que se utilizan en la *teoría de la prueba* o las consideradas en la *lógica de la demostrabilidad*. Las pruebas que generalmente se han considerado como demostraciones en la metodología y la filosofía de la ciencia son las llamadas *demostraciones clásicas*, entendidas como una deducción que hace saber la necesidad racional de que algo sea el caso. Los paradigmas de este tipo de demostraciones son las deducciones matemáticas señaladas por las siglas QED (*Quod eat demonstrandum*). La demostración en su forma deductiva tiene interés también en contextos no matemáticos (Vega, 2012b).

Las demostraciones clásicas tienen características que permiten observar su relevancia en el discurso, la cognición y la argumentación. Tal es el *reconocimiento social*, en donde la validez de un argumento es reconocido o sancionado socialmente en la comunidad académica a la que pertenece; el *cuerpo de conocimientos*, el cual constituye una teoría deductiva en la que ninguna nueva demostración modificará su consistencia; la *no admisión de contraprueba*, que establece que toda proposición demostrada deductivamente en un cuerpo de conocimientos no admite una prueba deductiva para su negación; la *claridad*, la cual determina que demostrar una proposición es deducir que permite comprender que lo afirmado por tal proposición es efectivamente cierto (Vega, 2012b).

Para Vega (2012b), existen diferentes tipos de demostraciones clásicas correspondientes a los distintos modos de hacer saber: *la demostración constatativa* permite saber que una proposición es el caso, *la demostración explicativa* brinda la razón o la causa de por qué una proposición es el caso y la *demostración fortísima* reúne la fuerza de la demostración con su virtud explicativa. También existen diferencias entre la demostración directa y la indirecta, por reducción al absurdo. Las teorías matemáticas clásicas y los sistemas lógicos admiten ambos tipos de demostración; sin embargo, la lógica y la matemática intuicionistas o constructivistas no ven a la demostración indirecta con buenos ojos, particularmente, no admiten la validez del patrón deductivo que concluye que una proposición dada sea el caso, por el solo hecho de que su negación produce una contradicción.

Actualmente, las demostraciones clásicas, incluso en las matemáticas, son un extremo en el espectro general de las pruebas. En dicho espectro, existen pruebas por constatación mediante representaciones gráficas, como algunas demostraciones de geometría en las matemáticas de la antigua India que tenían un sustento empírico. Por ejemplo, la lógica nyaya generó una teoría de razonamiento fundamentada en la causalidad (Crespo, Farfán y Lezama, 2009). También, se pueden considerar los ensayos de pruebas y refutaciones como los dados por Lakatos (1978), quien considera que las matemáticas son falibles, pues los teoremas están sujetos al escrutinio constante y pueden ser rechazados mediante contraejemplos. De esta manera, las demostraciones, más que justificaciones, son una fuente de descubrimiento que permiten desarrollar conceptos y refinar conjeturas.

Otras demostraciones por tomar en cuenta son las pruebas deductivas hechas por computadora, como la prueba de Appel y Haken del teorema de los cuatro colores, que precisaba la verificación por computadora de 1482 configuraciones diferentes. Este tipo de pruebas no está sujeto a métodos axiomáticos y puede ser considerado como poco riguroso, lo que ha obligado a replantearse el significado y el rol de las demostraciones en las matemáticas (Kleiner, 1991). En este sentido, Tymoczko (1986) fue pionero al advertir los cambios suscitados en la concepción de las demostraciones matemáticas, a partir del teorema de los cuatro colores. Considera que las pruebas por computadora son evidencia suficiente a favor de una filosofía cuasi-empirista (Alcolea, 2007).

La diferencia fundamental entre las pruebas mencionadas anteriormente y las demostraciones clásicas es que la conclusión que se establece por estas últimas es un resultado que, en el cuerpo de conocimientos o la teoría deductiva en la que tiene lugar, tiene validez universal (Vega, 2012b).

La demostración en las Matemáticas

El concepto de demostración matemática ha evolucionado históricamente. Lo que es una demostración y cuándo es válida es una construcción o comprensión relativa al contexto sociocultural que se considere. La mayor parte de las ciencias, incluyendo a las matemáticas, utiliza la inducción junto con la intuición para enunciar proposiciones. En las matemáticas, el razonamiento inductivo permite observar patrones en búsqueda de regularidades para la generalización y formulación de conjeturas. Estas conjeturas deben ser validadas o rechazadas, por lo tanto, se deben hacer demostraciones que requieren la deducción (Crespo y Farfán, 2005).

La demostración matemática es una práctica social de la comunidad matemática que tiene como principal objetivo validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad. En la actualidad, dicha demostración se rige por argumentaciones deductivas, sin embargo, históricamente esto no ha sido así. Existe evidencia de que los principios de la lógica clásica son construcciones socioculturales. En civilizaciones antiguas en Egipto, China y América precolombina, se usaron formas de argumentación diferentes a las utilizadas por los griegos. No obstante, en Occidente, la forma predominante de la argumentación matemática ha estado influenciada por la lógica de Aristóteles, el avance de la ciencia se ha basado en el razonamiento deductivo y, por lo tanto, se ha asumido que dicha lógica es innata al ser humano (Crespo, Farfán y Lezama, 2010).

En las matemáticas interesa someter a un control lógico riguroso las hipótesis iniciales. Para ello, se escogen, mediante algún criterio de racionalidad, unos enunciados a los que se les da el nombre de axiomas o postulados. Una vez hecho esto, los únicos enunciados aceptables serán aquellos que se deduzcan de los axiomas, por medio de la inferencia lógica; dichos enunciados se llaman teoremas. Este tipo de deducción constituye el método axiomático. Un sistema axiomático tiene los siguientes elementos: *(1) un idioma subyacente*: una tabla de símbolos primitivos o alfabeto; *(2) un repertorio de reglas de formación de* *fórmulas*: unos serán términos indefinidos y otros serán términos formalmente definidos llamados definiciones; *(3) las fórmulas primitivas del sistema:* una lista de axiomas o postulados, que se suponen verdaderos, y *(4) un sistema de lógica deductiva:* un repertorio de reglas de inferencia. Los dos primeros elementos componen el lenguaje o la gramática y los otros dos, la lógica del sistema. La regla de inferencia establece que una fórmula, llamada conclusión, puede ser inferida de otras, llamadas premisas. (Garrido, 1991 y Roberts, 2010).

La demostración matemática es un proceso, un razonamiento, una serie de relaciones o una secuencia finita de fórmulas tales que cada una es un axioma o una consecuencia inmediata de algunas fórmulas precedentes, gracias a las reglas de inferencia. La fórmula final de la demostración se llama teorema o fórmula derivada. Se caracteriza por ser un género del discurso con una forma estrictamente codificada (Balacheff, 2000; Chambadal, 1976; Garrido, 1991; Lucena, 2005; Vera, 1960). Se basa en *las definiciones,* oraciones que dan significado a las palabras utilizadas en la demostración; *los axiomas*, proposiciones que obedecen a construcciones mentales, las cuales son necesarias para la organización del conocimiento, y *los principios del razonamiento*, las llamadas leyes del pensamiento que están implícitas en todos los campos del conocimiento de la humanidad, tales como *la ley de identidad* (plantea que la naturaleza esencial de las cosas es constante), *la ley de contradicción* (significa que una cosa no puede ser lo que es y, al mismo tiempo, lo que no es) y *la ley de exclusión del término medio* (plantea que no hay nada intermedio entre las cosas contradictorias) (Patterson, 1950).

Realizar una demostración en matemáticas es un proceso cognitivo complejo que implica el uso de la intuición, la prueba, el error y el refinamiento para producir una demostración final de un teorema (Flores, 2007; Montoro, 2007). La mayoría de matemáticos considera que una demostración es más valiosa cuando favorece la comprensión; por esta razón, tales demostraciones se pueden ver más como entidades conceptuales, entendidas como una secuencia lógica de ideas matemáticas relacionadas, en las que el enfoque de derivación no es lo principal. De este modo, la calidad de una demostración matemática puede ser evaluada con criterios sintácticos, sin embargo, hacen falta otros. En ausencia de estos, generalmente se usan juicios de valor con un significado impreciso, tales como comprensible, ingenioso, explicativo, elegante, profundo, hermoso, entre otros. Dichos atributos van más allá de la corrección lógica de la demostración de un teorema, pero, en las matemáticas como en la educación matemática, esas propiedades cuasi estéticas, mal definidas, son muy importantes para el reconocimiento de una demostración como algo más que un certificado de la verdad (Hanna, 2014).

La demostración en las Matemáticas Escolares

Según Stylianides (2007), la demostración en las matemáticas escolares es un argumento matemático que tiene las siguientes características: *(1) un conjunto de menciones aceptadas*: utiliza afirmaciones aceptadas como verdaderas por la comunidad del aula y que están disponibles para su uso, tales como las definiciones, los axiomas, los teoremas, entre otros; *(2) los modos de argumentación*: usa formas de razonamiento que son válidas para la comunidad del aula o que se ubican en el alcance conceptual de esta, como las reglas lógicas de inferencia, el uso de definiciones para derivar afirmaciones generales, la enumeración sistemática de todos los casos a los que se reduce una proposición cuando estos sean un número finito, la construcción de contraejemplos, el desarrollo de un razonamiento que muestra que se puede llegar a una contradicción, entre otros, y *(3) los modos de* *representación de argumentos*: la comunicación se lleva a cabo empleando formas de expresión apropiadas, conocidas y en el alcance conceptual de la comunidad de la clase, formas que incluyen el lenguaje oral, el uso de diagramas, las representaciones pictóricas, tabulares, entre otras.

La definición anterior excluye a los *argumentos empíricos*, es decir, aquellos basados en el uso de ejemplos que confirman y ofrecen una evidencia incompleta sobre la veracidad de una proposición matemática. La razón primordial de esta distinción es que no se considera pertinente llamar demostraciones a los argumentos matemáticamente no calificados; de esta manera, la demostración en la clase de matemáticas estaría en concordancia con las matemáticas como disciplina, donde los argumentos empíricos no se consideran demostraciones matemáticas. Lo anterior no significa que se deban devaluar las exploraciones empíricas para la identificación de patrones, la generación de conjeturas y obtener evidencias acerca de lo que se quiere demostrar (Stylianides, 2007).

Según Crespo, Farfán y Lezama (2010), en la clase de matemática existen formas de razonamiento que no están en concordancia con la conceptualización de la demostración matemática en un sistema axiomático, normalmente se generan por la transferencia a escenarios académicos de formas de argumentación utilizadas en contextos cotidianos no académicos. Se distinguen las *argumentaciones abductivas*, en las que se tienen como premisas una implicación, su consecuente y se concluye el antecedente; las *argumentaciones inductivas*, en las cuales se concluye la veracidad de una proposición a partir del examen de un número limitado de casos; las *argumentaciones no monotónicas*, en las que se pueden modificar los supuestos iniciales a partir de casos nuevos; las *argumentaciones visuales* que establecen conclusiones con base en diagramas; las *argumentaciones a conocimiento cero*, cuando se hace referencia a demostraciones que realmente no lo son, y las *argumentaciones gestuales* en las cuales se argumenta con gestos y ademanes.

Términos asociados a la demostración: razonamiento, argumentación, explicación y prueba

El razonamiento

Es un proceso esquemático que permite deducir una proposición llamada conclusión, a partir de una serie de proposiciones que se aceptan, denominadas premisas. El razonamiento se llama válido si la conclusión se deduce de las premisas mediante reglas o resultados aceptados en lógica, en caso contrario, se denomina inválido. La veracidad de una proposición que forma parte del razonamiento, desde el punto de vista real, depende de si lo expuesto en ella se ajusta o no a la experiencia o conocimiento de la realidad sobre la que predica. En general, la veracidad de una premisa se da como supuesto. De este modo, la validez de un razonamiento garantiza que, si se suponen verdaderas las premisas, se puede deducir la veracidad de la conclusión. Esta validez no garantiza la veracidad de las premisas ni de la conclusión (Valverde, 2012).

La argumentación

Para Vega (2012a), la palabra *argumentar* se refiere a la forma de dar cuenta y razón de algo. alguien o ante alguien, con el objetivo de lograr su comprensión y aprobación. La *argumentación* es la acción de argumentar o el producto de ella, es una interacción discursiva e intencional presente en un conversatorio o en un texto que involucra a un agente, el cual brinda la razón de algo y unos destinatarios reales, potenciales o imaginarios. El *argumento* es una unidad discursiva básica en la argumentación, entendida como la actividad de argumentar o como un producto en un texto. El argumento se puede entender de diferentes maneras, dependiendo del enfoque de la argumentación, como se detalla:

(1) El argumento en la argumentación discursiva: en las argumentaciones presentes en la práctica social regida por normas, convenciones, hábitos, entre otros elementos, el *argumento* es una acción o procedimiento cuyo objetivo es persuadir de manera racional a la persona a la que se dirige.

(2) El argumento en la argumentación como producto textual de una interacción discursiva: el argumento es un conjunto de proposiciones dirigidas a mostrar que una de ellas está justificada por las restantes. Este tipo de argumento es el objeto favorito del análisis lógico de la argumentación y su propósito fundamental es justificar la conclusión con base en sus premisas. Su forma característica es la esquematización de sus tres componentes: premisas, conclusión y vínculo inferencial entre ellas, como se muestra a continuación.

Esquema 1: $P_1 \cdots P_n \,||\!-C$. Es decir, de las premisas $P_1 \cdots P_n$ se sigue o se desprende como conclusión C.

Esquema 2: $C -\!||\, P_1 \cdots P_n$. Es decir, C se sigue o se desprende como conclusión de las premisas $P_1 \cdots P_n$.

Según Lo Cascio (1998) existen lugares canónicos para la argumentación y cada uno tiene su propio código: una conversación, una disputa, una discusión oral, un debate, una demostración matemática, etc. Por lo tanto, existen diferentes tipos de argumentaciones como la oral y escrita, la coloquial y la formal, el texto argumentativo con la intención de demostrar y el texto argumentativo con la intención de persuadir. Además, diferencia a la argumentación en general de la argumentación demostrativa:

1. *La argumentación demostrativa:* parte de premisas indiscutibles y llega a conclusiones lógicas por procedimientos deductivos los cuales son dictados por la lógica de la razón. Son razonamientos argumentativos universales centrados en lo racional y no tiende a convencer a un público en particular o a cambiar su opinión. El razonamiento filosófico y el matemático en general tienen carácter demostrativo, sin embargo, cuando intervienen elementos morales y éticos se vuelve opinable debido a que las premisas utilizadas requieren la aprobación del público.

2. *La argumentación en general:* no parte necesariamente de premisas indiscutibles para llegar a conclusiones lógicas, por lo tanto, no es siempre un razonamiento evidente e irrefutable. Los hablantes de una lengua en general tienden a justificar sus afirmaciones sin poderlas probar de manera formal, estos intentos de justificación son las argumentaciones, por lo tanto, la argumentación es un complemento de la prueba formal y la teoría de la argumentación debe ser complementaria de la lógica formal y debe hacer referencia a los casos en los que se consideran valores, por lo que no es posible una verificación empírica o una prueba formal. La argumentación, cuando se basa en premisas y leyes subjetivas, genera un razonamiento que deviene opinable, es decir, que puede tener diversos resultados según el consenso de los interlocutores, de esta manera, su éxito no está asegurado como en la argumentación demostrativa.

Para Toulmin (1958) todos los tipos de argumentación son racionales y las normas de validez dependen del carácter de los problemas a los que hace referencia. Propone un modelo en donde considera seis categorías que pueden componer la argumentación: *(1) los argumentos* que son los hechos, las pruebas, los datos o los argumentos que se tienen sobre un hecho determinado; *(2) la opinión* que corresponde a la tesis, la opinión o hipótesis avanzada, la pretensión inferida a partir de los datos; *(3) la regla general* que son las garantías o reglas generales a partir de las que si se tienen ciertos datos o argumentos, se pueden sostener y, por lo tanto, se justifican ciertas tesis u opiniones; *(4) la fuente* que es el fundamento de las garantías o la fuente de las informaciones, es decir, datos ulteriores para sostener la tesis y que permiten garantizar las reglas generales o la verdad de los datos; *(5) el calificador* que es el elemento que caracteriza, aunque relativizándolas, las tesis aducidas o los argumentos propuestos y; *(6) la reserva* que son las informaciones o datos que conducen a conclusiones o tesis hacia las que se está prevenido. Se trata de dudas y reservas sobre la validez u oportunidad de las tesis que ya han sido preanunciadas del hecho de que la tesis o conclusión se acompañe por un operador modal, es decir, por un calificador. El razonamiento es válido, si se ha seguido el procedimiento expuesto en el modelo y si la relación entre tesis y argumentos está justificada de forma conveniente.

Para Pedemonte (2007) la argumentación y la demostración en las matemáticas poseen características comunes: *(1) Son justificaciones racionales:* tanto en la construcción de demostraciones matemáticas como en las argumentaciones se presentan justificaciones de los pasos desarrollados; *(2) Se realizan para convencer:* ambas se desarrollan cuando se desea convencer de la veracidad de una afirmación, para ello tienen que modificar las opiniones apelando a la racionalidad; *(3) Están dirigidas a una audiencia universal:* ambas pretenden convencer a una audiencia que debe tener la capacidad de defender sus propias opiniones con respecto a la demostración o al argumento esbozado por el interlocutor, esta audiencia está compuesta por la comunidad matemática, el aula, el profesor, el mismo interlocutor, entre otros; y *(4) pertenecen a un campo:* las proposiciones que son objeto de demostración o argumentación matemática pertenecen a un campo teórico que delimitan su validez: el álgebra, el análisis, la geometría, entre otros.

La explicación

Permite establecer y garantizar la validez de una proposición a un locutor. Está arraigada en sus conocimientos y en lo que para él son sus reglas personales de decisión de la verdad, es decir, su propia racionalidad. Cuando la explicación aparece en un discurso tiene como propósito hacer evidente al público la veracidad de una proposición que ya ha sido asumida por el locutor. La explicación no necesariamente se reduce a una secuencia deductiva y en general la base es el lenguaje natural (Balacheff, 2000).

La prueba

Refiere a una explicación que ha sido reconocida y aceptada socialmente por una comunidad. Sin embargo, esta aceptación no es definitiva, puede evolucionar con el avance de los saberes en los que se apoya. Una prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra (Balacheff, 2000).

4.1.2.2 Los tipos de demostraciones en Matemáticas

En general todas las proposiciones matemáticas que se desean demostrar tienen la forma $P \Rightarrow Q$ de manera explícita o implícita. Cuando no tenga la forma de manera explícita, se entiende que la proposición P hace referencia a los axiomas, definiciones y teoremas que brindan información verídica sobre los objetos matemáticos a los que refiere la proposición Q (Murillo, 2010).

Se pueden consideran dos tipos fundamentales de demostraciones matemáticas para proposiciones de la forma $P \Rightarrow Q$, las *demostraciones directas* y las *demostraciones indirectas*. Posteriormente, se discutirán otros tipos de demostraciones en función de estructuras simbólicas particulares en donde las demostraciones directas o indirectas estarán presentes.

Las demostraciones directas

Estas demostraciones se basan en las reglas de inferencia silogismo hipotético $\left[(P \to Q) \wedge (Q \to R) \right] \to (P \to R)$ y el modus ponendo ponens $\left[P \wedge (P \to Q) \right] \to Q$. La proposición $P \Rightarrow Q$ será verdadera si es una tautología, es decir, si cada vez que la proposición P es verdadera se sigue necesariamente que la proposición Q es verdadera. En la demostración directa se inicia suponiendo que P es verdadera. Luego se debe construir una cadena de proposiciones $R_1, R_2, \cdots, R_n$ de forma tal que $P \Rightarrow R_1$ sea verdadera. Como P es verdadera entonces por la regla de inferencia modus ponendo ponens se sigue que R_1 es verdadera. Posteriormente se debe garantizar que la proposición $R_1 \Rightarrow R_2$ sea verdadera, como R_1 es verdadera por modus ponendo ponens se sigue que R_2 es verdadera. En general la secuencia de implicaciones es la siguiente: $P \Rightarrow R_1, R_1 \Rightarrow R_2, \cdots, R_n \Rightarrow Q$. Al final del proceso se sigue necesariamente que la proposición Q es verdadera (Bartle y Sherbert, 2004; Roberts, 2010).

Cuando se explicitan todas las proposiciones de la cadena y se indican todas las justificaciones para cada paso, la demostración se llama *demostración formal*. Cuando se hace una redacción en prosa más simple en donde se omiten las justificaciones sobre las reglas de inferencia usadas y sobre los presupuestos matemáticos que fundamentan cada paso de la demostración, recibe el nombre de *demostración informal*. Esta distinción es sobre la forma de presentación y no tiene que ver con el rigor, generalmente se prefieren las demostraciones informales pues son más simples de seguir (Bartle y Sherbert, 2004; Roberts, 2010).

Las demostraciones indirectas

Existen dos tipos de demostraciones indirectas para demostrar una proposición matemática de la forma $P \Rightarrow Q$, las demostraciones por *contraposición* y las demostraciones por *reducción al absurdo* (Bartle y Sherbert, 2004; Roberts, 2010).

1. *Las demostraciones por contraposición:* en lugar de demostrar la proposición $P \Rightarrow Q$ se demuestra la proposición contrapositiva $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Este tipo de demostraciones se basan en la equivalencia lógica llamada *contrapositiva*

$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$. Para demostrar la proposición $\neg Q \Rightarrow \neg P$ se procede como en las demostraciones directas (Bartle y Sherbert, 2004; Roberts, 2010).

2. *La demostración por reducción al absurdo:* este tipo de demostraciones se basan en la equivalencia lógica llamada *neutro* la cual establece que $P \vee F_0 \equiv P$ en donde F_0 representa a cualquier contradicción. De esta manera en lugar de demostrar la proposición $P \Rightarrow Q$ se demuestra la proposición equivalente $(P \Rightarrow Q) \vee F_0$. La proposición $(P \Rightarrow Q) \vee F_0$ es equivalente a la proposición $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow F_0$ que es la que en la práctica se demuestra. Para proceder con la demostración se trabaja como si fuese una demostración directa, es decir, se supone que $P \wedge \neg Q$ es verdadera hasta deducir una proposición contradictoria que haría el papel de F_0 (Bartle y Sherbert, 2004; Roberts, 2010).

Demostraciones conjuntivas, disyuntivas, exhaustivas, bicondicionales y con cuantificadores

Como se mencionó anteriormente, las proposiciones matemáticas pueden presentar la estructura condicional $P \Rightarrow Q$ de manera explícita o implícita. En este apartado se discute de manera breve la forma de proceder en proposiciones que involucran otros conectores lógicos. En cada uno de estos casos se pueden hacer demostraciones directas o indirectas.

1. *Demostraciones conjuntivas:* para demostrar la proposición $P \wedge Q$ se deben demostrar por separado cada una de las proposiciones P y Q (Murillo, 2010).
2. *Demostraciones disyuntivas:* para demostrar la proposición $P \vee Q$ se puede utilizar la proposición equivalente $\neg P \Rightarrow Q$. Esto es posible en virtud de la equivalencia llama implicación y disyunción que establece que $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ (Murillo, 2010).
3. *Demostraciones exhaustivas o por casos:* para demostrar la proposición $(P_1 \vee P_2 \vee \cdots P_n) \Rightarrow R$ se deben demostrar por separado cada una de las siguientes n implicaciones $P_1 \Rightarrow R,\ P_2 \Rightarrow R,\ \cdots,\ P_n \Rightarrow R$. Están basadas en la equivalencia lógica denominada exhaución $(P \vee Q) \to R \equiv \left[\ (P \to R) \wedge (Q \to R)\ \right]$ (Roberts, 2010).
4. *Demostraciones bicondicionales:* Para demostrar la proposición $P \Leftrightarrow Q$ se deben demostrar por separado cada una de las siguientes dos implicaciones $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$. Se basa en la definición del bicondicional $P \leftrightarrow Q \equiv \left[\ (P \to Q) \wedge (Q \to P)\ \right]$ (Murillo, 2010; Roberts, 2010).
5. *Demostraciones con cuantificadores universales:* Dada la proposición $\forall x \in U(P(x))$, en donde $P(x)$ es una frase abierta de variable x en un dominio o universo de discurso U, se debe garantizar que todos los elementos de ese dominio hacen verdadera a la proposición que se obtiene al sustituirlos en la frase abierta. Se puede demostrar de manera directa, para ello se debe considerar un elemento arbitrario x del universo U, y justificar que la proposición $P(x)$ es verdadera.

También se puede demostrar de forma indirecta, específicamente por reducción al absurdo, al suponer cierta la proposición $\neg\forall x \in U\left(P\left(x \right)\right)$, la cual es equivalente a suponer que $\exists x \in U\left(\neg P\left(x \right)\right)$, es verdadera (Murillo, 2010; Roberts, 2010).

6. *Demostraciones con cuantificadores existenciales:* dada la proposición $\exists x \in U\left(P\left(x \right)\right)$, en donde $P\left(x \right)$ es una frase abierta de variable x en un dominio o universo de discurso U, se debe garantizar que existe al menos un elemento de ese dominio que satisface la frase abierta. Se puede demostrar de manera directa de dos formas: (1) mediante la llamada *prueba constructiva* en la cual se exhibe o se explica cómo se construye un elemento x del universo U, que verifica que la proposición $P\left(x \right)$ es verdadera o (2) mediante la llamada *prueba no constructiva* en la cual se garantiza la existencia de un elemento x del universo U, que satisface la frase abierta utilizando otros teoremas (Murillo, 2010; Roberts, 2010). Cuando solamente un elemento del universo satisface una frase abierta se tiene el llamado *teorema de existencia y unicidad* que simbólicamente se expresa $\exists ! x \in U\left(P\left(x \right)\right)$. Esta proposición afirma dos cosas: que al menos un elemento del universo de discurso satisface la frase abierta y que solo ese elemento es capaz de satisfacerla. La proposición es equivalente a $\left(\exists x \in U\left(P\left(x \right)\right) \wedge \forall a, b \in U\left[\left(P\left(a \right) \wedge P\left(b \right)\right) \Rightarrow a = b\right]\right)$. Se puede demostrar directamente demostrando cada una de las proposiciones por separado como se indicó en la prueba conjuntiva, una parte demuestra la existencia y la otra la unicidad; cada una de estas partes es susceptible de demostrarse directa o indirectamente. Se puede demostrar de manera indirecta, por reducción al absurdo, suponiendo que la negación de toda la proposición dada es verdadera y a partir de esto se obtiene una contradicción (Roberts, 2010).

4.1.2.3 Las funciones de las demostraciones matemáticas

Según Silva (2002) la demostración matemática tiene tres funciones:

1. *La función lógico-epistemológica:* la demostración se entiende como una entidad objetiva existente en un espacio lógico, tiene una existencia matemática ideal, independientemente de que un agente real la conozca. Establece la veracidad de una afirmación matemática al revelar las conexiones lógicas que garantizan la validez del enunciado, aunque no necesariamente logra la convicción, por ejemplo, en una demostración de 10^{25} pasos que es prácticamente imposible de seguir.

2. *La función retórica:* la demostración es una experiencia que permite generar una vivencia de convicción en un agente real al posibilitar la comprensión de relaciones lógicas ideales. Es convincente sobre la veracidad de una afirmación, siempre y cuando se acepten los presupuestos de los que la demostración depende, presupuestos que pueden ser injustificados, por lo tanto, puede ser lógicamente incorrecta y de este modo no existe la garantía de la validez de la afirmación.

3. *La función heurística:* la demostración induce al conocimiento matemáticos, hace referencia al papel de la demostración según la perspectiva epistemológica falibilista

de Popper (2000) la cual se representa en la filosofía de las matemáticas por la dialéctica de pruebas y refutaciones de Lakatos (1978). Esta función depende de la incorrección lógica de la demostración lo que permite la formulación de contraejemplos que favorecen el progreso de las matemáticas.

Para Silva (2002), una demostración cumple la función lógico-epistemológica, si es correcta desde el punto de vista lógico, aunque no sea convincente. Puede satisfacer la función retórica si es convincente, aunque no necesariamente correcta y cumple la función heurística, si es lógicamente imperfecta. En consecuencia, pareciera complicado que una demostración matemática cumpla con las tres funciones señaladas, sin embargo, no es imposible. En efecto, una demostración lógicamente correcta puede constituir un desafío epistemológico si su convicción induce una curiosidad intelectual en el sujeto para pensar en variaciones de interés sobre las nociones implicadas que pudieran generar contraejemplos del resultado demostrado, lo que aporta a su función heurística. Normalmente estas variaciones se logran mediante generalizaciones de los resultados a contextos más amplios en donde no hay garantía de validez.

Para que una demostración lógicamente correcta pueda ejercer la función retórica, debe estar acompañada de todos los pasos y cada uno de ellos debe ser comprendido. Debe ser percibida por un ser humano, el cual debe ser convencido sobre sus bases racionales. Por tal razón, las demostraciones deben tener un número finito de pasos. Una demostración matemáticamente perfecta, debe ser lógicamente correcta, convincente para un ser humano con limitaciones cognitivas y estimulante desde el punto de vista heurístico (Silva, 2002).

Las demostraciones matemáticas han sido relegadas, casi de manera exclusiva, a la verificación de afirmaciones, lo que constituye una visión formalista que desvirtúa la naturaleza real de éstas. En las últimas décadas matemáticos y educadores matemáticos han diferido de la visión que resalta al razonamiento deductivo que culmina en demostraciones formales, como el aspecto más relevante de las matemáticas. Las demostraciones pueden tener diferentes grados de validez formal y obtener el mismo nivel de aceptación. (De Villiers, 1993; Hanna, 2002).

Para De Villiers (1993) las demostraciones matemáticas pueden tener las siguientes funciones:

1. *La verificación:* la demostración se considera como la máxima autoridad para asegurar la validez de una afirmación matemática. Se considera que detrás de cada teorema hay una secuencia de transformaciones lógicas para obtener la conclusión a partir de las hipótesis asumidas. Se considera esta visión como incorrecta pues la demostración lógico-formal no es un garante de convicción.

2. *La explicación:* la demostración brinda las razones por las que una afirmación matemática es verdadera. Esta función es importante para comprender las razones que hacen verdadero a un resultado evidente de manera intuitiva o por evidencia cuasi-empírica.

3. *La sistematización:* la demostración permite organizar varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas lo que favorece la identificación de inconsistencias, verifica y simplifica teorías matemáticas y brinda una visión global sobre una temática que favorece sus aplicaciones en diferentes campos.

4. *El descubrimiento:* la demostración es un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva, que permite descubrir nuevos resultados los cuales serían difíciles de determinar de forma intuitiva o con procesos cuasi-empíricos. Un ejemplo de esta función es el descubrimiento de las geometrías no euclidianas al modificar el postulado de las paralelas.
5. *La comunicación:* la demostración permite divulgar los resultados a los diferentes miembros de la comunidad científica: matemáticos, profesores, alumnos, entre otros. Debido a la complejidad del conocimiento matemático, se deben generar procesos de negociación subjetiva de significados de los temas involucrados de manera que las argumentaciones sean aceptables. Esta función comunicativa expone las demostraciones a la sanción pública que permite refinar, simplificar, modificar y hasta refutar los resultados presentados.

En matemáticas, la convicción se puede lograr por formas alternativas a una demostración lógico-formal. La demostración es un argumento para validar una afirmación y puede asumir varias formas diferentes, siempre y cuando sea convincente. La aceptación de un teorema en matemáticas es un proceso social que depende más de la comprensión y el significado que de una demostración rigurosa. En general, los matemáticos aceptan un nuevo teorema cuando se tienen los siguientes factores: *(1) la comprensión del teorema:* son claros los conceptos incorporados en él, sus antecedentes lógicos y sus implicaciones; *(2) la importancia:* el teorema tiene implicaciones en al menos una rama de las matemáticas; *(3) la compatibilidad:* el teorema es consistente con los resultados matemáticos aceptados; *(4) la reputación:* el autor del teorema es reconocido como experto en la temática abordada; y *(5) la convicción:* se da un argumento matemático convincente, riguroso o no, de la validez del teorema (De Villiers, 1993; Hanna, 2002).

Cuando una prueba es válida sólo en virtud de su forma, sin tener en cuenta el contenido, puede aportar poco a la comprensión del tema y puede resultar poco convincente. Los resultados matemáticos que se publican normalmente se presentan en forma de teoremas y demostraciones, aunque estas últimas no son evaluadas necesariamente por criterios de rigor. Cuando un matemático revisa una demostración pone su énfasis en las ideas matemáticas que están relacionadas en ella, la importancia, el objetivo que persigue y sus implicaciones. La adecuación lógico-formal en la que se presenta es algo secundario (Hanna, 2002).

Según De Villiers (1993) en la educación secundaria ha predominado la visión formalista de la demostración matemática en donde la verificación de afirmaciones matemáticas es prácticamente la única función que se le atribuye. Considera que muchas de las dificultades que muestran los alumnos con las demostraciones están asociadas a la incapacidad de observar otras funciones que promuevan la comprensión de su significado, su propósito y utilidad.

Una manera de promover en los estudiantes la percepción de otras funciones de las demostraciones es mediante la formulación de conjeturas. La geometría Euclídea es un área especialmente adecuada para este tipo de actividades, pues muchas veces se hace una introducción formal a los estudiantes sin permitirles una exploración experimental de las propiedades de las figuras geométricas. La introducción de algunos paquetes de software geométrico como Cabri-Geometry o Geometer's Sketchpad permiten que los estudiantes realicen tales exploraciones al hacer construcciones geométricas complejas que pueden modificarse fácilmente. De este modo, se favorece la formulación de conjeturas y las argumentaciones experimentales que confirman resultados, pero que no explican necesariamente cómo tales resultados se derivan de otros que les son familiares, de esta manera se promueve la necesidad de hacer demostraciones matemáticas como una forma de explicación más que de validación (De Villiers, 2009).

Para una persona cuya preparación matemática es nula o parcial, puede parecer que el rigor y la forma de presentar una demostración es lo central en la práctica matemática, lo que puede inducir a que se conciba el aprendizaje de las matemáticas como un entrenamiento para crear estas formas. Lo fundamental es enseñar la importancia del razonamiento cuidadoso para la construcción de argumentos que puedan ser examinados y revisados con base en la claridad de ideas. La formalización es importante trabajarla, pero de manera secundaria (Hanna, 2002).

En la educación matemática la principal función de la demostración es la explicación, por lo tanto, la demostración en la clase de matemática no debe presentarse como un ritual que refleje de manera vaga e imprecisa la práctica matemática, por el contrario, debe abordarse como una actividad educativa con significado. Una demostración puede ejercer la función explicativa de diferentes maneras dependiendo del grado y el contexto en el que se realiza la enseñanza: la realización de un cálculo, una prueba preformal, una prueba informal o una prueba estrictamente rigurosa. El elemento en común en todos los niveles y contextos es que los estudiantes están aprendiendo matemáticas y que se les dan resultados que ellos saben que son verdaderos. El reto es hacerles comprender por qué son verdaderos (Hanna, 1995).

Para que una demostración logre la función explicativa, el profesor de matemáticas debe lograr que los estudiantes comprendan los conceptos utilizados, que conozcan los patrones de argumentación y los términos involucrados como: suposición, conjetura, ejemplo, contraejemplo, refutación y generalización. Debe estructurar y presentar la demostración para que sea clara y convincente. En la medida que los estudiantes aprendan modos de pensamiento lógico adquirirán la capacidad y la confianza para evaluar y construir una demostración matemática. Muchas demostraciones se pueden reestructurar para que se puedan utilizar en la clase de matemáticas, no obstante, pueden presentar diferencias sustanciales en cuanto a su poder explicativo. Se puede distinguir entre *las demostraciones que prueban* y *las demostraciones que explican*. Las primeras justifican que un teorema es verdadero, las segundas también logran lo mismo, pero la evidencia que se presenta se deriva del fenómeno al cual refiere tal teorema (Hanna, 1995).

Un ejemplo de lo anterior lo propone Hanna (1995) al considerar el teorema que afirma que la suma de los primeros n números naturales es $\frac{n(n+1)}{2}$. Este teorema se puede demostrar mediante el principio de la inducción matemática, sin embargo, tiene poco valor explicativo porque no le indica a los estudiantes el porqué es verdadero. Una demostración que explica, podría mostrar la razón de la validez del teorema al utilizar dos representaciones de la suma como se muestra a continuación:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

$$2S = n\,(n+1)$$

$$S = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Síntesis del concepto de demostración, los tipos de demostraciones y las funciones atribuidas

Con base en los resultados presentados en este apartado, se pueden sintetizar las siguientes apreciaciones sobre el concepto de demostración, los tipos de demostraciones y las funciones atribuidas:

1. El término *demostración* tiene muchos significados y el sentido en el que se utilice depende del contexto o marco institucional como la lógica y los fundamentos de las matemáticas, la matemática profesional, las ciencias experimentales, la enseñanza de las matemáticas y la vida cotidiana. En un contexto informal se refiere a sentimientos, habilidades o sobre el funcionamiento de algo. En un sentido formal y de mayor tecnicismo, trata sobre las proposiciones. (Godino y Recio, 2001; Vega 2012b). En un sentido amplio, puede considerarse como la prueba de algún hecho mediante verdades evidentes y universales, es decir, como un razonamiento convincente (Alvar, 1998; Comte-Sponville, 2005; Diccionario ilustrado Océano de la lengua española, 1994; Real Academia Española, 2006). De una forma más específica, se puede considerar como un razonamiento en el que la veracidad de una proposición se logra mediante la aplicación de reglas lógicas (Martí, 2003).
2. La demostración clásica se entiende como una deducción que hace saber la necesidad racional de que algo sea el caso. Se caracteriza porque la validez de un argumento es sancionada por la comunidad académica de la que forma parte, posee un cuerpo de conocimientos en donde una nueva demostración no afectará su consistencia y no es posible demostrar deductivamente una negación de la proposición en cuestión, además, goza de claridad, es decir, que una demostración deductiva de una proposición debe permitir comprender que tal proposición en efecto sea verdadera. (Vega, 2012b).
3. La demostración en las Matemáticas se puede considerar como una práctica social cuyo objetivo primordial es la validación del conocimiento matemático producido por la sociedad, es regida por argumentaciones deductivas debido a la influencia de la lógica aristotélica (Crespo, Farfán y Lezama, 2010). En el sentido deductivo, es un género del discurso estrictamente codificado, es un razonamiento o una serie de relaciones formada por una secuencia finita de fórmulas de modo tal que, cada una de ellas es un axioma o es una consecuencia de algunas de las fórmulas precedentes, debido a las reglas de inferencia. La última fórmula de la demostración se llama fórmula derivada o teorema (Balacheff, 2000; Chambadal, 1976; Garrido, 1991; Lucena, 2005; Vera, 1960).

4. En las Matemáticas Escolares la demostración es un argumento que utiliza afirmaciones que la comunidad del aula aceptó como verdaderas: definiciones, axiomas, teoremas, entre otros. Emplea formas de razonamiento válidas para el aula tales como las reglas lógicas de inferencia, el uso de definiciones para derivar afirmaciones generales, la construcción de contraejemplos, entre otros. Además, considera los modos de representación para los argumentos, es decir, que la comunicación se realiza en el aula mediante formas de expresión apropiadas como el lenguaje oral, el uso de diagramas, las representaciones pictóricas, tabulares, entre otras. Los argumentos empíricos no forman parte de esta conceptualización de la demostración en el aula de matemáticas, la cual debe estar en concordancia con las matemáticas como disciplina. No obstante, esto no significa que se deban devaluar las exploraciones empíricas, las que tienen relevancia para la identificación de patrones, el establecimiento de conjeturas y en general, para obtener evidencia sobre lo que se desea demostrar (Stylianides (2007).

5. Las proposiciones matemáticas, explícita o implícitamente, tienen la forma de implicación $P \Rightarrow Q$ y existen dos tipos de demostraciones para ellas: directas e indirectas. En la demostración directa, se inicia suponiendo que P es verdadera y posteriormente se debe garantizar que la proposición Q es verdadera. En la demostración indirecta, se puede proceder de dos maneras: *(1) por contraposición*, en donde se demuestra de forma directa la proposición equivalente $\neg Q \Rightarrow \neg P$ y *(2) por reducción al absurdo*, en donde se supone que $P \wedge \neg Q$ es verdadera hasta deducir una proposición contradictoria (Bartle y Sherbert, 2004; Murillo, 2010;Roberts, 2010).

6. La principal función atribuida a la demostración matemática ha sido la validación del conocimiento, sin embargo, en los últimos años, matemáticos y educadores matemáticos difieren de esta visión formalista (De Villiers, 1993; Hanna, 2002). Según De Villiers (1993) la demostración matemática tiene las siguientes funciones: *(1) la verificación:* permite garantizar de manera inequívoca la validez de una afirmación matemática; *(2) la explicación:* permite comprender las razones por las que una afirmación matemática es verdadera; *(3) la sistematización:* organiza diferentes resultados en un sistema deductivo que incluye axiomas, teoremas y definiciones, lo que favorece apreciar inconsistencias, comprobar y simplificar teorías matemáticas y, ofrecer una visión general sobre la temática abordada; (4) *el descubrimiento:* permite mediante la exploración y el análisis teórico, descubrir nuevos resultados que de forma intuitiva o con procesos cuasi-empíricos sería muy complejo hallar y; (5) *la comunicación:* permite divulgar los resultados a los diferentes miembros de la comunidad científica: matemáticos, profesores, alumnos, entre otros.

El análisis conceptual de la demostración nos ha permitido observar que es una noción compleja, que se ha entendido de diferentes maneras a lo largo de la historia, que tiene múltiples significados dependiendo del contexto en donde se ubique y con diferentes funciones. En las Matemáticas es fundamental para validar el conocimiento, no obstante, el rigor y el formalismo de los argumentos no son necesariamente los criterios fundamentales para la aceptación de nuevos resultados, sino que se consideran otros elementos como su función explicativa. En las Matemáticas Escolares, estos elementos deben ser tomados en cuenta para la enseñanza de la demostración, lo que sugiere que el profesor de matemáticas debe tener un conocimiento adecuado sobre ella para su desempeño profesional.

En el caso de nuestra investigación, este análisis conceptual ha sido importante para precisar algunos elementos que hemos considerado que deben formar parte del conocimiento de los profesores de matemáticas sobre la demostración tales como, los aspectos lógico-sintácticos y los matemáticos. Esto ha dado fundamento a las dimensiones planteadas en las fases empíricas del estudio, a la construcción de los instrumentos para la recolección de la información y a la generación de las categorías de análisis para las respuestas de los sujetos de investigación.

4.2 RESULTADOS DE LA FASE EMPÍRICA 1: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE LA VALIDEZ LÓGICA DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

En esta *fase 1* participaron 25 profesores de matemáticas en formación inicial de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, 18 matriculados en el cuarto año (Grupo de Bachillerato) y 7 en el quinto año (Grupo de Licenciatura). Se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de dos cuestionarios*:*

(1) *el cuestionario 1* que consta de seis tareas y en cada una de ellas se presenta una proposición matemática, de forma verbal y simbólica, desprovista de elementos matemáticos concretos. En cada tarea los sujetos debían: *(a) explicar la forma general en la que realizarían la demostración matemática de la proposición genérica dada* y *(b) proporcionar un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo brindado*. Los resultados de este cuestionario 1 se presentan en el apartado denominado *4.2.1 Formas de proceder en una demostración en función de la estructura lógico-sintáctica*.

(2) *El cuestionario 2* que consta de cuatro tareas y en cada una de ellas se presenta un argumento matemático para garantizar la validez de la proposición matemática *P: cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.* En cada tarea los sujetos de investigación debían indicar si el argumento correspondía o no a una demostración matemática de la proposición en cuestión y, además, explicar de manera amplia las razones de su escogencia. Los resultados de este cuestionario 2 se presenta en el apartado denominado *4.2.2 Evaluación de argumentos matemáticos en función de la estructura lógico-sintáctica. Categoría 3. El tipo de conectiva lógica: implicación universal*.

4.2.1 Formas de proceder en una demostración en función de la estructura lógico-sintáctica

En esta sección se reproduce de forma íntegra, el apartado de resultados del artículo denominado *Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración* de Alfaro, Flores y Valverde (2020). El artículo completo se puede obtener en el sitio web de la Revista PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática en el siguiente enlace electrónico: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/pna.v14i2.9363.

Los resultados se presentan considerando las tres categorías definidas para analizar las respuestas de los sujetos en torno a dos cuestiones: *(a) la explicación de la forma de proceder en la demostración de cada proposición genérica* y (*b) la demostración realizada del ejemplo propuesto*.

La categoría *(1) tipo de demostración* es transversal a las otras dos. En las categorías *(2) tipo de cuantificador* y *(3) tipo de conectiva lógica* se establecieron indicadores de conocimiento para cada cuantificador y para cada conectiva lógica con cuantificación universal, separados por el tipo de demostración: directa e indirecta. Dichos indicadores se muestran de la tabla 14 a la tabla 19. En cada una de ellas se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas conocimiento de los indicadores planteados para la explicación de la forma de demostrar la proposición genérica (PG) y para la demostración del ejemplo propuesto (DE). En las categorías *(2)* y *(3)* se hace también la transcripción de algunas respuestas representativas para ilustrar los casos. En la tabla 3 se presenta la cantidad de sujetos que hicieron referencia a la demostración directa o indirecta.

Se presenta, además, la síntesis de las respuestas de los sujetos sobre las formas de proceder en la demostración que no fueron contempladas en los indicadores de conocimiento y el promedio de sujetos que presentaron un ejemplo concreto que se ajustaba a la estructura sintáctica de la proposición genérica solicitada en cada una de las seis tareas.

4.2.1.1 Categoría 1. El tipo de demostración: directa o indirecta

En la tabla 13 se presenta el número de sujetos que mencionaron el uso de la demostración directa o indirecta en cada una de las seis tareas, tanto para la proposición genérica como para la demostración del ejemplo que brindaron. Esta tabla sintetiza la información sobre el tipo de demostración de las tablas 14 a la 19.

Tabla 13

Número de sujetos que evidencian en las tareas la demostración directa e indirecta

Tipo de demostración		**Tarea 1**	**Tarea 2**	**Tarea 3**	**Tarea 4**	**Tarea 5**	**Tarea 6**
Directa	**PG**	21	20	22	17	17	22
	DE	20	20	21	14	14	20
Indirecta	**PG**	04	06	06	02	00	02
	DE	02	00	01	00	00	00

PG: proposición genérica. DE: demostración del ejemplo

Se puede observar que prácticamente todos los sujetos de investigación fueron capaces de explicar de qué manera se puede abordar la demostración de una proposición genérica. En general, para todas las tareas la suma de las cantidades de sujetos que evidenciaron conocimiento sobre el tipo de demostración directa o indirecta es mayor o igual a 17. En el caso de la demostración del ejemplo propuesto, se puede notar que ha disminuido la cantidad de sujetos que brindaron indicios de conocimiento. Asimismo, las demostraciones de implicaciones son mejor descritas que las disyunciones y conjunciones.

La demostración directa fue el método preferido por los profesores de matemática en formación inicial en las seis tareas. En el caso de la proposición genérica fue mencionada por 20 sujetos en promedio y en la demostración del ejemplo fue empleada por 18 sujetos en promedio. Por su parte, tres sujetos en promedio hicieron referencia a la demostración indirecta en la proposición genérica y fue empleada en la demostración del ejemplo únicamente por tres sujetos: dos en la tarea 1 y uno en la tarea 3. El programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria costarricense plantea que el profesor realice demostraciones a sus alumnos, la mayoría mediante el tipo de demostración directa, sin embargo, también se plantean resultados que deben demostrarse de forma indirecta, como la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, lo que hace necesario tener el conocimiento de este tipo de demostración.

4.2.1.2 Categoría 2. El tipo de cuantificador: universal o existencial

El cuantificador universal: $\forall x \in U\left(P(x) \right)$

El cuantificador universal estuvo presente en todas las tareas, excepto en la tarea 2 que trataba sobre el cuantificador existencial. En la tabla 14 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para este cuantificador cuando se empleaba el tipo de demostración directa e indirecta.

Tabla 14

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento del cuantificador universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento		Tarea 1	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6
Demostración directa						
Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario del universo	**PG**	21	18	15	16	16
	DE	20	18	14	13	19
Manifiesta que la propiedad se satisface para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario	**PG**	03	01	01	01	01
	DE	01	00	00	00	00
Demostración indirecta						
Manifiesta que se debe suponer la negación de la proposición dada	**PG**	04	02	02	00	00
	DE	02	01	00	00	00
Manifiesta cuál es la equivalencia de la negación de la proposición dada	**PG**	03	02	02	00	00
	DE	02	01	00	00	00
Manifiesta que debe llegarse a una contradicción	**PG**	03	01	02	00	00
	DE	02	01	00	00	00
Manifiesta que una vez determinada la contradicción podía concluirse que la proposición original era verdadera	**PG**	02	01	01	00	00
	DE	02	01	00	00	00

PG: proposición genérica. DE: demostración del ejemplo

En el caso de la demostración directa, los sujetos evidenciaron conocimiento de que debían considerar un elemento arbitrario del universo de discurso, específicamente, 17 sujetos en promedio, tanto para la proposición genérica como en la demostración del ejemplo. De este modo, la mayoría de los sujetos tenía claro que en proposiciones con cuantificación universal su demostración no puede abordarse apelando a casos particulares. Se presentan dos respuestas representativas, la del sujeto EBM05 para la proposición genérica y la del sujeto ELH06 en el ejemplo y su demostración, ambos en la tarea 1:

- Primero aclaro que inicia la prueba. Seguidamente tomaría un elemento arbitrario del conjunto U. Después llevaría el elemento de forma que se aprecie el cumplimiento de la propiedad $P(x)$. Finalmente concluyo que el elemento satisface la propiedad $P(x)$ y escribo que ha finalizado la prueba (EBM05).
- Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}\left(\left(x^2+1\right)>0\right)$. Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}$. Por tricotomía, todo elemento $x \in \mathbb{R}$ cumple que $x>0$, $x=0$ o $x<0$. Elevando al cuadrado se tiene que $x^2>0$ o $x^2=0$. Como $1>0$ y sumando miembro a miembro se concluye que $x^2+1>0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (ELH06).

Pocos sujetos mostraron indicios de conocimiento de que la propiedad en cuestión se satisfacía para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario. En la proposición genérica, este hecho fue mencionado por tres sujetos en la tarea 1 y por un sujeto en las tareas 3, 4, 5 y 6. En la demostración del ejemplo, solo un sujeto evidenció este indicador de conocimiento en la tarea 1. Una respuesta que evidencia este conocimiento es la del sujeto EBH16 en la proposición genérica de la tarea 1:

- Como la proposición se cumple para cualquier "x" elemento del conjunto "U" entonces la demostración debe iniciarse escogiendo a un elemento cualquiera, pero fijo. Como un representante del conjunto y luego probar que este elemento cumple con la propiedad "$P(x)$". Así como el elemento escogido es genérico aseguramos que se cumple para cualquiera dentro del conjunto (EBH16).

La demostración indirecta, fue mencionada en las tareas 1, 3 y 4 en promedio por tres sujetos, tanto para la proposición genérica como en la demostración del ejemplo, quienes evidenciaron conocimiento de que se debía suponer la negación de la proposición dada $\neg\forall x \in U\left(P(x)\right)$, que era equivalente a la proposición $\exists x \in U\left(\neg P(x)\right)$, que debía llegarse a una contradicción y que una vez hecho esto podía concluirse que la proposición original $\forall x \in U\left(P(x)\right)$ era verdadera. Una respuesta que muestra conocimiento sobre la demostración indirecta en la proposición genérica de la tarea 1, es la del sujeto ELH03:

- Primeramente, es importante definir un elemento que pertenece al conjunto, este debe ser expresado de manera general, ya que casos particulares no garantizan o justifican adecuadamente que la proposición se cumple para todos los elementos de U. Seguidamente, se procede a verificar que dicho elemento "x" cumple con tal proposición, aquí podríamos utilizar una demostración directa o indirecta, esta última consiste en negar la proposición con la esperanza de llegar a alguna contradicción, y de esta manera, al ser la proposición negada falsa, la proposición sin negar sería verdadera por deducción (ELH03).

El cuantificador existencial: $\exists x \in U\left(P(x)\right)$

Este cuantificador estuvo presente en la tarea 2 del cuestionario. En la tabla 15 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para este cuantificador cuando se empleaba el tipo de demostración directa e indirecta.

Tabla 15

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento del cuantificador existencial en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento de la tarea 2	PG	DE
Demostración directa		
Manifiesta que debe mostrarse un elemento del universo que cumpla la propiedad o se dice que tal elemento se podría obtener de alguna forma (prueba constructiva del existencial).	19	20
Manifiesta que es posible garantizar que un elemento del universo cumple la propiedad mediante teoremas que justifiquen tal existencia (prueba no constructiva del existencial).	01	00
Demostración indirecta (Reducción al absurdo)		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la proposición $\neg\exists x \in U\left(P\left(x\right)\right)$	06	00
Manifiesta que la proposición $\neg\exists x \in U\left(P\left(x\right)\right)$ es equivalente a la proposición $\forall x \in U\left(\neg P\left(x\right)\right)$.	03	00
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\exists x \in U\left(P\left(x\right)\right) \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	05	00
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\exists x \in U\left(P\left(x\right)\right)$ debe ser falsa y que en consecuencia $\exists x \in U\left(P\left(x\right)\right)$ debe ser verdadera	01	00

PG: proposición genérica. DE: demostración del ejemplo

La mayor parte de los profesores de matemáticas en formación inicial evidenciaron una preferencia por la demostración directa para proposiciones con cuantificación existencial, particularmente consideraron que para proceder en la demostración debía exhibirse un elemento concreto del universo que cumpliera la propiedad y, además, manifestaron una preocupación por contar con algún procedimiento, posiblemente de tipo algebraico, para determinar tal elemento. En el caso de la proposición genérica, tal procedimiento consistiría en analizar el predicado $P(x)$ para tener algún indicio de cuál elemento podría funcionar, sin embargo, los sujetos no aclararon si tal procedimiento lo considerarían como parte de la demostración. Algunas respuestas representativas de este caso son las siguientes:

- Debo analizar $P(x)$ de tal manera que, este señale algún valor $x \in U$, tal que cumpla $P(x)$ (EBH02).
- En este tipo de proposición, basta con mostrar algún elemento de U que cumpla con la condición $P(x)$, pero no siempre es fácil encontrarlo, por lo que se podría despejar a "x" en $P(x)$ para ver su forma, y ayudarnos a determinarlo (ELH03).

Un grupo de ocho profesores consideró que ese procedimiento de obtención formaba parte de la demostración del ejemplo, aunque tal forma de proceder asume de forma implícita la existencia. Una respuesta representativa de este caso es la del sujeto EBM09:

- Proposición: $\exists x \in \mathbb{R} : \left(x^2 = 1\right)$. Demostración: $x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x-1=0 \vee x+1=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$. Basta tomar 1 y -1. $\therefore$ Los valores que existen son 1 y -1 (EBM09).

En general, los profesores solo mencionan casos de existenciales en los que es posible exhibir un elemento de manera simple, sin aludir a aquellos cuya existencia debe ser garantizada apelando a elementos más teóricos.

El programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria de Costa Rica, establece como parte del proceso razonar y argumentar que los estudiantes formulen conjeturas y se trabaje con ellas en tres etapas: la verificación de casos particulares, la propuesta de un argumento matemático para su justificación y finalmente la demostración. En cada una de estas etapas el conocimiento del profesor de matemática sobre los cuantificadores, universal y existencial, es fundamental para determinar la generalidad o particularidad de una proposición matemática sobre la que se conjetura y en función de ello, garantizar la validez de un argumento matemático para su demostración.

4.2.1.3 Categoría 3. El tipo de conectiva lógica: implicación universal, disyunción universal, conjunción universal y doble implicación universal

La implicación universal: $\forall x \in U\left[P(x) \Rightarrow Q(x)\right]$

La implicación con cuantificador universal estuvo presente en la tarea 3 del cuestionario. En la tabla 16 se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas los indicadores propuestos para la demostración directa e indirecta, en el caso de esta última se consideró la reducción al absurdo y la contraposición.

Tabla 16

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la implicación universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento de la tarea 3	PG	DE
Demostración directa		
Manifiesta que debe suponerse que $P(x)$ es una proposición verdadera	22	21
Manifiesta que debe garantizarse que $Q(x)$ es una proposición verdadera con base en $P(x)$ y en la teoría matemática en donde están insertas las proposiciones $P(x)$ y $Q(x)$.	22	21
Demostración indirecta (Reducción al absurdo)		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la negación de proposición dada y que es equivalente a la proposición $\exists x \in U\left[P(x) \wedge \neg Q(x)\right]$.	02	01
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in U\left[P(x) \Rightarrow Q(x)\right] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	01	01
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in U\left[P(x) \Rightarrow Q(x)\right]$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in U\left[P(x) \Rightarrow Q(x)\right]$ debe ser verdadera.	01	01
Demostración indirecta (Contraposición)		
Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario x del universo y demostrar de forma directa la proposición $\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$.	05	00

PG: proposición genérica. DE: demostración del ejemplo

Hubo una preferencia de los profesores de matemáticas en formación inicial por la demostración directa, 22 en el caso de la proposición genérica y 21 en la demostración del ejemplo, quienes mostraron conocimiento sobre los dos indicadores que refieren al criterio de validez de la implicación, a saber, que debía suponerse que el antecedente $P(x)$ era verdadero y que debía garantizarse que el consecuente $Q(x)$ era verdadero con base en la información asumida en la hipótesis y con la teoría matemática en donde estaban insertas las proposiciones $P(x)$ y $Q(x)$. Igualmente, la mayoría de los futuros profesores de matemáticas identifica una propiedad que corresponde a una implicación y describe la forma de demostrarla, cubriendo los pasos previos. Una minoría de sujetos optaron por la demostración indirecta, seis para la proposición genérica y uno para la demostración del ejemplo propuesto. En este caso la mayoría se inclinaron por el uso de la contraposición $\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$. Una respuesta representativa de demostración directa es la del sujeto ELM04:

- En este caso se observa la demostración por implicación, esta demostración se puede realizar por negación $\neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$, pero la forma usual es cuando se toma un elemento x que cumple con la propiedad $P(x)$ y llegar que justamente ese mismo elemento también cumple con la propiedad $Q(x)$ (ELM04).

La disyunción universal: $\forall x \in U\left[P(x) \vee Q(x)\right]$

La disyunción con cuantificador universal estuvo presente en la tarea 4 del cuestionario. En la tabla 17 se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas los indicadores propuestos para la demostración directa e indirecta.

Tabla 17

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la disyunción universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento de la tarea 4	**PG**	**DE**
Demostración directa		
Manifiesta que el incumplimiento de alguna de las proposiciones, $P(x)$ o $Q(x)$ debe implicar el cumplimiento de la otra proposición. Es decir, que debe demostrarse $\neg P(x) \Rightarrow Q(x)$ o $\neg Q(x) \Rightarrow P(x)$.	12	09
Demostración indirecta		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la proposición $\neg\forall x \in U\left[P(x) \vee Q(x)\right]$ la cual es equivalente a la proposición $\exists x \in U\left[\neg P(x) \wedge \neg Q(x)\right]$.	02	00
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in U\left[P(x) \vee Q(x)\right] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	02	00
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in U\left[P(x) \vee Q(x)\right]$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in U\left[P(x) \vee Q(x)\right]$ debe ser verdadera.	01	00

PG: proposición genérica. DE: demostración del ejemplo

Sólo la mitad de los futuros profesores de matemáticas pudo explicar cómo demostrar de manera directa una disyunción universal, teniendo dificultades para encontrar un ejemplo que cubra esta forma de afirmación matemática. En el caso de la demostración directa, los pocos sujetos que evidencian conocimiento de su demostración, 12 en la proposición genérica y nueve en la demostración del ejemplo, todos ellos transformaron la disyunción en una implicación, planteando que se demostraba evidenciando que el incumplimiento de alguna de las proposiciones, $P(x)$ o $Q(x)$ debía implicar el cumplimiento de la otra proposición, es decir, que debía demostrarse $\neg P(x) \Rightarrow Q(x)$ o $\neg Q(x) \Rightarrow P(x)$. La demostración indirecta fue mencionada por dos sujetos en la proposición genérica y no fue empleada por ninguno en la demostración del ejemplo, pero ambos sujetos mostraron evidencia de los indicadores de conocimiento planteados en este caso. Se presentan dos respuestas representativas que evidencian conocimiento sobre la demostración directa, la del sujeto EBH04 en la proposición genérica y la del sujeto ELH01 en el ejemplo y su demostración:

- En esta demostración pues me basaría en hacer casos o por una proposición equivalente sería suponer falsa $P(x)$ y llegar a demostrar $Q(x)$ o suponer falsa $Q(x)$ y llegar a demostrar $P(x)$ (EBH04).
- Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}(x < 0 \vee x+1 > 0)$. Demostración: usaré su equivalencia $\forall x \in \mathbb{R}(\neg(x<0) \Rightarrow x+1>0)$. Sea $x \in \mathbb{R}$, supóngase que $x<0$ es falsa, luego $x \geq 0$ (por ley de tricotomía para los números reales) y como $1>0$, $x+1>0$ (ELH01).

La conjunción universal: $\forall x \in U\left[P(x) \wedge Q(x)\right]$

La conjunción con cuantificador universal estuvo presente en la tarea 5 del cuestionario. En la tabla 18 se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas los indicadores propuestos para la demostración directa e indirecta.

Tabla 18

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la conjunción universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento de la tarea 5	PG	DE
Demostración directa		
Manifiesta que $P(x)$ y $Q(x)$ son proposiciones para el elemento arbitrario x seleccionado.	16	13
Manifiesta que debe garantizarse que tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son proposiciones verdaderas con base en la teoría matemática en donde están insertas dichas proposiciones.	15	12
Demostración indirecta		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la proposición $\neg\forall x \in U\left[P(x) \wedge Q(x)\right]$ la cual es equivalente a la proposición $\exists x \in U\left[\neg P(x) \vee \neg Q(x)\right]$.	00	00
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in U\left[P(x) \wedge Q(x)\right] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	00	00

Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in U\left[P(x) \wedge Q(x)\right]$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in U\left[P(x) \wedge Q(x)\right]$ debe ser verdadera.	00	00

PG: proposición genérica. DE: demostración del ejemplo

También la conjunción generó una menor cantidad de respuestas. De los 16 sujetos que evidenciaron indicadores de conocimiento en esta tarea, todos ellos hicieron referencia únicamente a la demostración directa y la mayoría evidenció en la proposición genérica y en la demostración del ejemplo, que $P(x)$ y $Q(x)$ eran proposiciones para el elemento arbitrario x seleccionado, 16 y 13 sujetos respectivamente. En cuanto al indicador de conocimiento sobre el criterio de validez de la conjunción, es decir, el conocimiento de que debía garantizarse que $P(x)$ y $Q(x)$ eran proposiciones verdaderas con base en la teoría matemática en donde están insertas dichas proposiciones, 15 sujetos lo evidenciaron en la proposición genérica y 12 sujetos en la demostración del ejemplo. Dos respuestas representativas, una de la proposición genérica y otra sobre el ejemplo y su demostración, son las de los sujetos EBM15 y ELH02:

- Primero se da un elemento "x" en U. Luego se requiere probar ambas proposiciones $P(x)$ y $Q(x)$. Se podría trabajar cada una por aparte (EBM15).
- Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2+5>2 \wedge x<x+3\right)$. Demostración: sea $x \in \mathbb{R}$. Luego sabemos que $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+5 \geq 5 \Rightarrow x^2+5 \geq 5 \wedge 5>2 \Rightarrow x^2+5>2$. Además, se sabe que $x \leq x \wedge 0<3 \Rightarrow x<x+3$ (ELH02).

La doble implicación universal: $\forall x \in U\left[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\right]$

La doble implicación con cuantificador universal estuvo presente en la tarea 6 del cuestionario. En la tabla 19 se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas a los indicadores propuestos para la demostración directa e indirecta.

Tabla 19

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la doble implicación universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento de la tarea 6	**PG**	**DE**
Demostración directa		
Manifiesta que debe garantizarse que tanto $P(x) \Rightarrow Q(x)$ como $Q(x) \Rightarrow P(x)$ son proposiciones verdaderas.	22	20
Demostración indirecta (Reducción al absurdo)		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la proposición $\neg\forall x \in U\left[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\right]$ la cual es equivalente a la proposición $\exists x \in U\left[\left(P(x) \wedge \neg Q(x)\right) \vee \left(Q(x) \wedge \neg P(x)\right)\right]$.	00	00
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in U\left[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\right] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	00	00
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in U\left[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\right]$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in U\left[P(x) \Leftrightarrow Q(x)\right]$ debe ser verdadera.	00	00

Demostración indirecta (Contraposición) Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario x del universo y demostrar de forma directa la proposición $\neg Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x)$.	02	00

PG: proposición genérica. DE: demostración del ejemplo

La mayoría de los futuros profesores de matemáticas explicaron cómo demostrar este tipo de proposición mediante una demostración directa. La gran mayoría de los sujetos evidenció conocimiento sobre el indicador fundamental de cómo proceder en este tipo de demostración, a saber, que debía garantizarse que tanto $P(x) \Rightarrow Q(x)$ como $Q(x) \Rightarrow P(x)$ eran proposiciones verdaderas, 22 en la proposición genérica y 20 en la demostración del ejemplo. La demostración indirecta solo fue mencionada por dos sujetos en la proposición genérica y ambos conocían que debía considerarse un elemento arbitrario x del universo y demostrar de forma directa la proposición $\neg Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x)$. Se presenta un par de respuestas típicas de la demostración directa, la del sujeto ELM07 para la proposición genérica y la del sujeto EBH07 para el ejemplo y su demostración:

- Se da un elemento genérico del universo y se realiza la demostración en ambas direcciones, es decir, se prueba que $\forall x \in U\left(P(x) \Rightarrow Q(x)\right)$ y $\forall x \in U\left(Q(x) \Rightarrow P(x)\right)$ (ELM07).

- Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}\left(\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1\right)$. Demostración: sea $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow)$ Supongamos que: $\ln(x) = 0$. Debemos probar que $x = 1$. Veamos: $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 \Rightarrow x = 1$. $\Leftarrow)$ Supongamos que: $x = 1$. Debemos probar que $\ln(x) = 0$. Veamos: $x = 1 \Rightarrow \ln(x) = \ln(1) \Rightarrow \ln(x) = 0$ (EBH07).

4.2.1.4 Formas alternativas de proceder en la demostración no contempladas en los indicadores de conocimiento y ajuste del ejemplo concreto a la estructura sintáctica

A continuación, se presenta una síntesis de las respuestas de los sujetos que presentaron formas de proceder en la demostración no contempladas en los indicadores de conocimiento que hemos propuesto en este estudio:

1. La inducción matemática fue mencionada en la tarea 1 por cuatro profesores de matemáticas en formación inicial como una posible forma de proceder en la demostración de la proposición genérica $\forall x \in U\left(P(x)\right)$, tres de ellos aclararon que siempre que el conjunto universo fuera el conjunto de los números naturales. Se presenta un par de respuestas, la del sujeto EBH04 que no aclara si el conjunto universo es el conjunto de los números naturales y la del sujeto ELM07 que si lo indica:

   - Lo que sugiere esta demostración es que para cualquier número que usted se tome del conjunto U o no necesariamente es un número, puede ser un elemento, debe vivir o satisfacer la propiedad $P(x)$, por lo que un método a usar sería inducción matemática (EBH04).

   - Dado que se debe satisfacer la propiedad para todos los elementos, debe presentarse un elemento genérico del universo. Si la forma del elemento interfiere en los pasos para la demostración (por ejemplo en $\mathbb{Z}$, se puede tener $x = 0$, $x = a$ $(a \in \mathbb{N})$, $x = -a$), a veces es necesario presentar la demostración por casos. Por ejemplo, si $U = \mathbb{N}$, debe evaluarse la posibilidad de que se demuestre por medio del axioma de inducción matemática, por el principio de inducción matemática o por el principio de inducción fuerte (ELM07).

2. El uso de un conjunto universo finito fue propuesto por dos sujetos en la tarea 4, tres sujetos en la tarea 5 y un sujeto en la tarea 6. En todos los casos, los sujetos brindaron un ejemplo de proposición en donde el conjunto tenía pocos elementos y en su demostración verificaron el cumplimiento de la propiedad en todos los casos. Una respuesta representativa es la del sujeto EBH03 en la tarea 5:

   - Proposición: Sea $U=\{2,4,6,8\}$ $\forall x \in U\left(x=2k\left(k=1,2,3,4\right) \wedge x>0\right)$. Demostración: para 2: $x=2\cdot 1=2 \quad 2>0$, para 4: $x=2\cdot 2=4 \quad 4>0$, para 6: $x=2\cdot 3=6 \quad 6>0$, para 8: $x=2\cdot 4=8 \quad 8>0$ (EBH03).

3. Dos sujetos en la demostración del ejemplo de la tarea 4 consideraron a un elemento arbitrario del universo y posteriormente presentaron una demostración adecuada por casos. Un ejemplo es la respuesta del sujeto EBM09:

   - Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2>0 \vee x=0\right)$. Demostración: sea $x \in \mathbb{R}$. Por tricotomía: caso 1 $x>0$. $x>0 \wedge x>0 \Rightarrow x\cdot x>0 \Rightarrow x^2>0$, caso 2 $x<0$. $x<0 \wedge x<0 \Rightarrow x\cdot x>0 \Rightarrow x^2>0$ caso 3 $x=0$. $x=0 \wedge x=0 \Rightarrow x\cdot x=0 \Rightarrow x^2=0 \quad \therefore x^2>0 \vee x=0$ (EBM09).

4. Cuatro sujetos mencionaron en la proposición genérica de la tarea 6 que podría trabajarse la doble implicación de manera simultánea, es decir, como condición necesaria y suficiente simultáneamente, sin necesidad de trabajar las dos implicaciones por separado. Como ejemplo se presenta la respuesta del sujeto EBM15:

   - Primero, me doy un elemento del conjunto U. Luego se decide en cuál de los dos sentidos del sí y sólo sí, se quiere trabajar, pues muchas veces hay un caso sencillo y otro más complejo. Si se inicia en el sentido $\Rightarrow$), se supone $P(x)$ verdadera y se prueba $Q(x)$; luego se prueba $\Leftarrow$), es decir se supone $Q(x)$ verdadera y se prueba $P(x)$. Ahora, hay demostraciones en donde se puede trabajar el $\Leftrightarrow$ directamente sin necesidad de demostrar las dos direcciones (EBM15).

Las formas alternativas de proceder en la demostración mencionadas por los sujetos, evidencian conocimiento sobre la demostración matemática. Aunque la inducción matemática y las demostraciones en donde se utiliza un conjunto universo finito, no tienen presencia en el programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria costarricense, ambos procedimientos pueden ser empleados por el profesor de matemáticas en la exploración de conjeturas para la verificación de casos particulares antes de presentar una demostración matemática formal.

Por otra parte, 21 sujetos en promedio brindaron un ejemplo concreto de la proposición genérica, en cada una de las seis tareas del cuestionario, que se ajustaba a la estructura sintáctica solicitada. Dos respuestas representativas son las de los sujetos EBH02 para la proposición de la tarea 1 y ELM07 para la proposición de la tarea 2:

- Proposición en la estructura $\forall x \in U\left(P\left(x\right)\right)$ en la tarea 1 : $\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2 \geq 0\right)$(EBH02).

- Proposición en la estructura $\exists x \in U\left(P\left(x\right)\right)$ en la tarea 2 : $\exists x \in \mathbb{Z}\left(x+1=0\right)$(ELM07).

Con base en los resultados presentados en este apartado, se pueden sintetizar las siguientes apreciaciones sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial sobre las formas de proceder en una demostración en función de la estructura lógico-sintáctica:

1. El conocimiento sobre la forma de demostrar y qué ejemplos hay de cada proposición es amplio en la muestra de sujetos examinados.
2. Una gran mayoría de los sujetos expresa con claridad cómo se demuestran proposiciones de los tipos señalados y muestra conocimiento para buscar un ejemplo de cada una de ellas, y describir cómo se realiza su demostración.
3. La mayoría de los sujetos evidencia conocimiento sobre el tipo de demostración directa, aunque algunos muestran conocimiento sobre el tipo de demostración indirecta.
4. Las proposiciones con disyunción y conjunción presentan menos respuestas, tanto en su explicación de cómo demostrarlas como en los ejemplos de las mismas.
5. Los futuros profesores describen con más claridad la demostración del cuantificador universal, pues las del cuantificador existencial las identifican muchos de ellos con la necesidad de construcción del elemento que lo satisface.
6. Aparecen algunas categorías de conocimiento sobre demostración que fueron más allá de lo demandado en el cuestionario, como la demostración por inducción o la relación entre la doble implicación y la condición *necesaria y suficiente*.

4.2.2 Evaluación de argumentos matemáticos en función de la estructura lógico-sintáctica. Categoría 3. El tipo de conectiva lógica: implicación universal

Los resultados se presentan considerando la categoría denominada *implicación universal* para analizar las respuestas de los sujetos en torno a dos cuestiones: *(a) indicar si el argumento correspondía o no a una demostración matemática de la proposición P: cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos* y *(b) explicar de manera amplia las razones de su escogencia*. Se establecieron indicadores de conocimientos para cada uno de los cuatro argumentos considerados. En cada uno de ellos se presenta la cantidad de sujetos que lo consideraron o no como una demostración y que evidenciaron en sus respuestas conocimiento de los indicadores propuestos.

Se presenta, además, y cuando corresponda para cada argumento, la síntesis de las respuestas de los sujetos que no fueron contempladas en los indicadores y que evidencian conocimiento de los aspectos lógico-sintácticos de la demostración.

4.2.2.1 Argumento 1: demostración de un caso particular

En la evaluación de este argumento, 23 sujetos de los 25 consideraron que no correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y todos ellos evidenciaron conocimiento de que esto obedecía a que el argumento consideraba un caso particular. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- Al tratarse de una proposición que aplica a todos los elementos del conjunto $(\mathbb{R})$, no es posible demostrarla mediante un ejemplo puntual con uno de los elementos en particular, sino que debe partirse tomando un elemento genérico del conjunto que represente a cualquier elemento del conjunto y probar con él que se satisface la propiedad (EBH10).

- Pues debe garantizarse que la proposición es verdadera para cualquier número real "x" y en el argumento brindado se toma el caso particular $x = 2 - \sqrt{3}$ (ELM07).

Un grupo de seis profesores consideró que el argumento sería una demostración matemática si la proposición tuviera un cuantificador existencial, lo que evidencia conocimiento sobre cómo demostrar una proposición con dicho cuantificador exhibiendo un elemento concreto del universo. Dos respuestas representativas son las siguientes:

- Se toma específicamente el número $\left(2-\sqrt{3}\right)$ y la proposición es para todo número, así que el argumento es válido para mostrar que existe uno que sí lo cumple (EBM05).
- Considero que no es una demostración adecuada pues la proposición dice que se cumple para cualquier $r \in \mathbb{R}$ y en la demostración solo se usa un valor específico y eso no indica que sirve para todos, solo indica que sirve para $r = 2 - \sqrt{3}$ y a partir de eso no se puede generalizar para todos los reales. Esto puede probar una existencia, sin embargo, no un para todo (EBM09).

4.2.2.2 Argumento 2: demostración del recíproco

En la evaluación de este argumento, 23 sujetos de los 25 consideraron que no correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y 19 de ellos evidenciaron conocimiento de que esto obedecía a que el argumento consideraba el recíproco del predicado. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- Porque la proposición tiene una forma de implicación $(P \Rightarrow Q)$ así que debe suponerse cierto el antecedente y probar el consecuente, no al revés, puesto que la estructura lógica no es esa (EBH16).
- Pues la proposición P es $\forall x \in \mathbb{R}\left(\left(x>0\right) \Rightarrow \left(x + x^{-1} \geq 2\right)\right)$ (expresada de manera simbólica) y en el argumento dado, se demuestra el recíproco, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}\left(\left(x + x^{-1} \geq 2\right) \Rightarrow \left(x>0\right)\right)$ (ELM07).

4.2.2.3 Argumento 3: demostración directa de la implicación universal

En la evaluación de este argumento, 22 sujetos de los 25 consideraron que correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y todos ellos manifestaron conocimiento. En la tabla 20 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para la demostración directa de la implicación universal.

Tabla 20

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la demostración directa de la implicación universal

Indicadores de conocimiento	Tarea 3
Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario del universo $\mathbb{R}$.	8
Manifiesta que debe suponerse que el antecedente $x > 0$ es una proposición verdadera.	20

Manifiesta que debe garantizarse que el consecuente $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$ es una proposición verdadera con base en el antecedente $x>0$ y en la teoría matemática en donde están insertas ambas proposiciones.	20
Manifiesta que la propiedad $x>0\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$ se satisface para todos los elementos del conjunto universo $\mathbb{R}$ en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario.	0

Como puede observarse en la tabla anterior, la mayoría de los sujetos evidencia conocimiento sobre la forma de proceder en la demostración directa de la implicación universal, es decir, conocen que debe suponerse verdadero el antecedente y posteriormente debe garantizarse la veracidad del consecuente. No obstante, muy pocos sujetos hicieron referencia explícita a la escogencia de un elemento arbitrario del conjunto universo, que precisamente es lo que avala la forma de proceder en la demostración directa de la implicación. Asimismo, ninguno de los sujetos sintió necesidad de expresar la validez de la propiedad para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se garantizó para un elemento genérico. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- Porque como la proposición tiene forma de implicación, se supone que $x>0$ como cierto y se debe verificar que la suma del número y su inverso multiplicativo es cierto, justo como muestra el recuadro. Además de que se hace para un valor de x, arbitrario pero fijo (EBH16).
- Se inicia de forma correcta según el cuantificador dándose un elemento cualquiera que sea real. Luego utiliza la implicación de manera correcta, con la hipótesis de que $x>0$ y menciona el consecuente (lo que debe probar) llegando a probarlo a partir de la operación $x+\frac{1}{x}-2$ utilizada por conveniencia, ya sabiendo que la expresión que es equivalente a ella es mayor o igual a cero, así ella también lo es y logra probar el consecuente de la implicación (ELH02).

4.2.2.4 Argumento 4: demostración por reducción al absurdo de la implicación universal

En la evaluación de este argumento, 21 sujetos de los 25 consideraron que correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y 16 de ellos manifestaron conocimiento de los tres indicadores propuestos. Además, hubo cuatro sujetos que afirmaron que el argumento era una demostración, aunque su respuesta no evidenció ningún indicador al igual que en los cuatro sujetos que manifestaron que no era una demostración matemática. En la tabla 21 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para la demostración por reducción al absurdo de la implicación universal.

Tabla 21

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la demostración por reducción al absurdo de la implicación universal

Indicadores de conocimiento	Tarea 3
Manifiesta que debe suponerse verdadera la negación de proposición dada y que es equivalente a la proposición $\exists x \in \mathbb{R}\left[x > 0 \wedge \left(\frac{x^2+1}{x}\right) < 2\right]$.	16
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg \forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2\right) \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria, en este caso F_0 es la contradicción $\left((x-1)^2 < 0 \wedge (x-1)^2 \geq 0\right)$	16
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg \forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2\right)$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in \mathbb{R}\left(x > 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2\right)$ debe ser verdadera.	16

Algunas respuestas representativas de los sujetos que evidenciaron conocimiento son las siguientes:

- Esta si corresponde a una demostración de un para todo $(\forall)$ o para cualquier número real positivo, porque parte de la suposición de que exista un elemento que no cumpla la proposición y al llegar a una contradicción, no queda más que concluir que la proposición es verdadera (EBH17).
- Se está partiendo del supuesto que la proposición *P* es falsa y se está llegando a una contradicción lógica, esto concluye que la proposición *P* no puede ser falsa y de acuerdo con la Ley del medio excluido la proposición debe ser verdadera, correspondiendo a una demostración para la proposición *P* (ELH06).

Con base en los resultados presentados en este apartado, se aprecia que una gran mayoría de los futuros profesores de matemáticas evidencia conocimiento para discriminar si una argumentación es o no demostración matemática de una propiedad aritmética como la propuesta. Muestran conocimiento para apreciar formas perversas de justificar que no pueden considerarse demostraciones, como la demostración para un caso particular, o la del teorema recíproco, así como para reconocer cuando se han realizado los pasos precisos para demostrar la proposición. No obstante, disminuye considerablemente la cantidad de sujetos que identifica los pasos cuando se plantea una demostración por reducción al absurdo.

4.3 RESULTADOS DE LA FASE EMPÍRICA 2: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE LA VALIDEZ MATEMÁTICA DE LA DEMOSTRACIÓN

Los resultados se presentan considerando las cuatro categorías definidas en esta fase para analizar las respuestas de los sujetos de investigación en torno a las siguientes cuestiones: *(a) indicar si el argumento correspondía o no a una demostración matemática de la proposición dada, (b) explicar de manera amplia las razones de su escogencia* y *(c) en el caso de que el* *argumento dado no correspondiera a una demostración matemática de la proposición dada, indicar cuál o cuáles modificaciones harían al argumento matemático para que lo sea*.

Para cada una de las cuatro categorías de análisis definidas: *(1) el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo* presente en la tarea 1, *(2) el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo* presente en la tarea 2, *(3) el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar* presente en la tarea 3 y *(4) el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana* presente en la tarea 4, se establecieron indicadores de conocimiento. Se presenta para cada una de ellas la cantidad de sujetos que consideraron o no al argumento propuesto como una demostración y que evidenciaron en sus respuestas conocimiento de los indicadores propuestos.

Se presenta, además, y cuando corresponda, la síntesis de las respuestas de los sujetos que no fueron contempladas en los indicadores y que evidencia conocimiento de los aspectos matemáticos de la demostración.

4.3.1 Categoría 1: el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo

En la evaluación de este argumento en la tarea 1, 17 sujetos de los 19 consideraron que no correspondía a una demostración matemática de la proposición dada y 15 de ellos evidenciaron al menos uno de los indicadores de conocimiento definidos. Además, dos sujetos afirmaron que el argumento era una demostración, pero no evidenciaron ningún indicador al igual que otros dos sujetos que manifestaron que no era una demostración matemática. En la tabla 22 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Tabla 22

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la categoría 1: el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo

Indicadores de conocimiento	**Tarea 1**
Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usa parcialmente la hipótesis $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$.	15
Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ en la corrección del argumento pero no exhibe ninguno de los números reales que cumplen la existencia.	8
Manifiesta que debe considerarse la hipótesis $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ para exhibir alguno de los números reales $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la corrección del argumento.	7

Se presentan las respuestas representativas de dos sujetos que manifestaron que el argumento no era una demostración debido al uso parcial de la hipótesis, el sujeto ELH06 completa su apreciación exhibiendo un número real para satisfacer la existencia, lo que no hace el sujeto EBM12:

- Explicación: Únicamente demuestra que la proposición matemática es válida para el caso cuando $b^2-4ac=0$, faltaría demostrarla para el caso cuando $b^2-4ac>0$. Utiliza un caso particular. Corrección: Para el caso cuando $b^2 - 4ac > 0$. Basta considerar el número real $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Luego $ax^2 + bx + c = a\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c$

$$= \frac{\cancel{a}}{4\cancel{a}^2}\left(b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2-4ac} + b^2\right) + \frac{b\sqrt{b^2-4ac} - b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2-4ac} + b^2}{4a} + \frac{b\sqrt{b^2-4ac} - b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{2b^2 - 4ac - 2b\sqrt{b^2-4ac}}{4a} + \frac{b\sqrt{b^2-4ac} - b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{\cancel{2}\left(b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2-4ac}\right)}{\cancel{4}a} + \frac{b\sqrt{b^2-4ac} - b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2-4ac} + b\sqrt{b^2-4ac} - b^2 + 2ac}{2a}$$

$$= \frac{0}{2a}$$

$$= 0$$

Así, el número real $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ satisface la existencia (ELH06).

- Explicación: En la hipótesis dice que $b^2 - 4ac \geq 0$, pero cuando se hace la demostración solo se toma en cuenta el caso en que $b^2 - 4ac = 0$ y no se toma en cuenta cuando es mayor a cero, por lo cual la demostración no está del todo correcta. Corrección: Tomaría los dos casos, cuando $b^2 - 4ac = 0$ y cuando $b^2 - 4ac > 0$. Por lo que, faltará buscar un $x \in \mathbb{R}$ que cumpla el segundo caso (EBM12).

4.3.2 Categoría 2: el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo

En este argumento, presente en la tarea 2, únicamente siete sujetos apreciaron la cualidad abusiva del razonamiento, manifestando que no era una demostración matemática y de ellos cinco evidenciaron la razón mediante alguno de los indicadores propuestos. En la tabla 23 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Tabla 23

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la categoría 2: el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo

Indicadores de conocimiento	**Tarea 2**
Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se emplea de manera incorrecta el axioma del inverso multiplicativo al considerar al número real n^{-1} sin garantizarse que $n \neq 0$.	5

Manifiesta que deben considerarse dos casos en la corrección del argumento: (1) cuando $n \neq 0$ y ahí emplear el axioma del inverso al multiplicar por n^{-1} y (2) cuando $n = 0$ para deducir que $m = 0$ y por lo tanto $\lvert m \rvert = \lvert n \rvert$.	4

Como puede observarse en la tabla anterior, cinco sujetos manifestaron que el argumento no era una demostración debido al uso indebido del axioma del inverso multiplicativo y de ellos, cuatro dieron evidencia en la corrección del argumento de la necesidad de considerar dos casos: cuando $n \neq 0$ y cuando $n = 0$.

Se presentan las respuestas representativas de dos sujetos que manifestaron que el argumento no era una demostración debido al uso indebido del axioma del inverso multiplicativo, el sujeto EBH02 que en la corrección del argumento hace referencia a la consideración de casos para utilizar el inverso multiplicativo y el sujeto EBH03 que no lo hace:

- Explicación: Porque se generaliza para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$ y parte de que m divide a n y n divide a m aunque si uno de ellos es cero para que sean divisibles uno con otro ambos deben ser cero. Para evitar el n^{-1} el cual se indefine en el caso que sea cero. Corrección: Tomado $n, m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ caso I como se realizó. Por aparte Caso II para $n = 0$ y $m / n \Rightarrow m / 0 \Rightarrow mq = 0,\ q \in \mathbb{Z}$ y como $n / m \Rightarrow nk = m,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0k = m \Rightarrow m = 0$. Por lo tanto $\lvert 0 \rvert = \lvert 0 \rvert$. Así por caso I y caso II $\lvert m \rvert = \lvert n \rvert$ (EBH02).

- Explicación: La demostración le falta, ya que se utiliza la definición de que un número sea divisible por otro de una manera correcta, y todo el resto de los pasos están bien. Pero parece que si se debe incluir el caso si $n = 0$ o $m = 0$, ya que en un paso se está multiplicando a ambos lados de la desigualdad por n^{-1}, pero es claro que n no va a ser 0 ya que se contradeciría la hipótesis de que m / n y n / m, pues $m / 0$ y $0 \nmid m$. Lo mismo pasaría si $m = 0$. Para que se cumpla con 0, ambos m, n deben ser 0. Corrección: Si $m = 0$, $n \neq 0$, $n / 0$ y $0 \nmid n$ ¡! contradice la hipótesis. Si $n = 0$, $m \neq 0$, $m / 0$ y $0 \nmid m$ ¡! contradice la hipótesis. Si $m = 0$ y $n = 0$, $0 / 0$ y $0 / 0$, se cumple el teorema pues $\lvert 0 \rvert = \lvert 0 \rvert$ (EBH03).

En cuanto a los 12 sujetos que manifestaron que el argumento era una demostración matemática, ninguno de ellos evidenció algunos de los indicadores propuestos. Sin embargo, tres de ellos hicieron referencia en su explicación al inverso multiplicativo. El sujeto EBM11 planteó que no era necesario que n^{-1} fuese un número entero, pero sin precisar que su existencia no estaría garantizada en el caso de que n fuera cero. Los sujetos EBM05 y EBH16 manifestaron que n^{-1} existe cuando n sea diferente de cero, no obstante, evidenciaron un conocimiento de la divisibilidad que implicaba que n era diferente de cero. A continuación, se presentan las tres respuestas:

- Explicación: No se necesita que el n^{-1} sea un número entero, por ello no nos afectaría en ningún momento. Además, se parte de la definición para concluir con un valor de verdad (EBM11).

- Explicación: Los argumentos están correctos. Es claro que si m / n y n / m no pueden ser cero n y m. Así sería bueno especificar que existe n^{-1}. Parte las hipótesis, traduce bien y aplica las propiedades adecuadas. Realiza claramente la conclusión que evidencia lo que tiene que mostrar (EBM05).

- Explicación: El único problema que podría presentar el argumento, es cuando se multiplica por n^{-1} en la igualdad, pero como por hipótesis m/n; entonces $m \neq 0$ y como n/m entonces $n \neq 0$ por lo que n^{-1} está perfectamente definido. Por lo que el resto de razonamientos a partir de ahí, tienen todo el sentido, y también se cubren todos los huecos que podrían quedar, lo único que se puede agregar es que la sustitución se puede hacer en cualquiera de las dos ecuaciones resultantes de la definición de m/n y n/m (EBH16).

Las respuestas anteriores muestran que los sujetos EBM05 y EBH16 consideraron al argumento como una demostración debido a imprecisiones en su conocimiento sobre la divisibilidad, pero evidencian conocimiento de que un número real posee inverso multiplicativo si es diferente de cero.

4.3.3 Categoría 3: el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar

En este argumento, presente en la tarea 3, 16 sujetos de los 19 manifestaron que no era una demostración matemática y de ellos 14 evidenciaron alguno de los indicadores propuestos. Además, tres sujetos afirmaron que el argumento era una demostración, pero no evidenciaron ningún indicador al igual que otros dos sujetos que manifestaron que no era una demostración matemática. En la tabla 24 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Tabla 24

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la categoría 3: el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar

Indicadores de conocimiento	**Tarea 2**
Manifiesta que el argumento no es una demostración debido a que se usan de forma incorrecta las definiciones de número par e impar.	13
Manifiesta que debe emplearse en la corrección del argumento la definición de número *impar* para expresar que $2p+1=m$ y $2q+1=n$; y la definición de número *par* para concluir que $m+n=2j$ con $j \in \mathbb{Z}$	14

Como se observa en la tabla anterior, 13 sujetos manifestaron que el argumento no era una demostración por el uso indebido de las definiciones de número par e impar y todos ellos evidenciaron en la corrección del argumento el uso correcto de las definiciones. Hubo un sujeto, EBH02, que no evidenció el primer indicador en su explicación, sin embargo, en la corrección del argumento manifestó conocimiento del segundo indicador.

Se presentan las respuestas representativas de tres sujetos que manifestaron que el argumento no era una demostración. La respuesta del sujeto EBH02 mencionado en el párrafo anterior y las respuestas de los sujetos EBM12 y ELH02 que presentan evidencia de los dos indicadores de conocimiento planteados:

- Explicación: En línea 3 toma $2m+1=p$, claramente toma p como un número par. Así $2m+1=p \Rightarrow 2m=p-1 \Rightarrow m=\dfrac{p-1}{2}$ y p es par, entonces $p-1$ es impar, entonces $m=\dfrac{p-1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ya que $2 \nmid (p-1)$. Misma idea para $2n+1=q$. Corrección: En línea 3, $m=2p+1$ y $n=2q+1$. Luego $m+n=2p+1+2q+1=2p+2q+2=2(p+q+2)$.

Donde $p+q+2 \in \mathbb{Z}$. Tome $a=p+q+2$. Así $m+n=2(p+q+2)=2a$ lo cual es definición de ser par. Garantizando que $m+n$ es par (EBH02).

- Explicación: Al decir que $2m+1=p$ garantiza que p es impar, sin embargo, no garantiza que el m sea impar, ya que si m es par o impar se cumple lo mismo. Por otra parte, llega a que $2(m+n)=j, j \in \mathbb{Z}$ esto garantiza que j es par pero no que $m+n$ es par, esta suma podría ser impar que al multiplicarla por 2 el j da par. Corrección: Tomaría más bien la definición para m y n $m=2p+1$ y $n=2q+1$ así al sumarlos me quedaría $m+n=2(p+q+1)$ donde asegura que $m+n$ si es par (EBM12).
- Explicación: Se define de forma incorrecta los valores de m y n como enteros, debe ir al revés el valor de m por p, y de igual forma n por q. Corrección: Como m y n son impares cumplen que: $m=2p+1$ y $n=2q+1$, con $p,q \in \mathbb{Z}$. Luego $m+n=2p+2q+2$ $\Rightarrow$ $m+n=2(p+q+1)$, con $p+q+1 \in \mathbb{Z}$. Así, $m+n=2 \cdot r$, con $r=p+q+1$ y $r \in \mathbb{Z}$ teniendo la forma de un número par $m+n$ (ELH02).

4.3.4 Categoría 4: el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la geometría euclidiana

En este argumento, presente en la tarea 4, todos los 19 sujetos manifestaron que era una demostración matemática, aunque la mayoría se limitó a realizar esta apreciación, pues solo nueve evidenciaron alguno de los indicadores de conocimiento propuestos. En la tabla 25 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Tabla 25

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la categoría 4: el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana

Indicadores de conocimiento	Tarea 2
Manifiesta que la hipótesis del teorema es que se considera un triángulo cualquiera en la Geometría Euclidiana.	0
Manifiesta que se emplea en el argumento el postulado de las paralelas en la Geometría Euclidiana.	6
Manifiesta que se emplean en el argumento definiciones matemáticas.	2
Manifiesta que se emplean en el argumento teoremas matemáticos.	5

Con base en la tabla anterior, se puede notar que, pese a que todos los futuros profesores de matemáticas identificaron como válida la demostración de la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo, ninguno hizo referencia a que la proposición es una afirmación general, que parte de la hipótesis de que se consideraba un triángulo cualquiera en la Geometría Euclidiana. Sin embargo, dos sujetos, dieron evidencia de conocimiento sobre el uso del postulado de las paralelas, definiciones y teoremas simultáneamente; cuatro sujetos dieron evidencia únicamente del uso del postulado de las paralelas y tres sujetos dieron evidencia únicamente del uso de teoremas matemáticos en el argumento. Para ilustrar esto, se presentan tres respuestas: la del sujeto EBM12 que evidencia el uso del postulado de las paralelas, definiciones y teoremas; la del sujeto EBH02 que refiere únicamente al postulado de las paralelas y la del sujeto EBM05 que refiere únicamente al uso de teoremas:

- Explicación: Los teoremas que está utilizando ya han sido probados, el postulado de las paralelas y el de los ángulos alternos internos entre paralelas. De igual manera se emplean bien las definiciones, como la de par lineal, ángulo interior (EBM12).
- Explicación: Se garantiza que se establece la geometría euclidiana. Por lo que el 5^{to} postulado es cierto. Además, garantiza que los puntos generados, crean un par lineal para sustituir correctamente los ángulos por sus alternos internos correspondientes. Demostrando que la suma de ángulos internos es 180^0 (EBH02).
- Explicación: Utiliza todos los enunciados y los teoremas de forma correcta. Muestra claramente que es verdadero cada uno de los pasos. Utiliza propiedades. Parte de las hipótesis, aplica las propiedades de forma correcta y muestra claramente lo que debe probar. Realiza la conclusión (EBM05).

En el caso de los 10 sujetos de investigación que indicaron que el argumento era una demostración de la proposición dada pero que no evidenciaron ninguno de los indicadores propuestos, en sus respuestas apreciamos imprecisiones para justificar la validez de un argumento matemático cuando este es correcto, basando sus respuestas en generalidades como: la presencia de una estructura lógica adecuada, es decir, el partir de una proposición verdadera y generar conclusiones parciales verdaderas que conducen a la conclusión, la consideración de todas las posibilidades y su correspondiente justificación, el uso de resultados anteriores de la geometría euclidiana y la claridad del argumento.

Con base en los resultados presentados en este apartado, se aprecia que la totalidad de los futuros profesores de matemáticas evidencia conocimiento para determinar cuándo un argumento constituye una demostración matemática de una proposición, aunque pocos sujetos brindan las justificaciones para ello. Asimismo, la gran mayoría evidencia conocimiento para discriminar si un argumento no corresponde a una demostración matemática en función de aspectos matemáticos como el uso parcial de la hipótesis y el uso indebido de las definiciones. Sin embargo, hay una disminución importante de sujetos que identifica el uso indebido del axioma del inverso multiplicativo.

En cuanto a la corrección de los argumentos que no corresponden a una demostración matemática, hay un descenso de la cantidad de sujetos que consideran en sus propuestas de modificación al argumento, los aspectos matemáticos que lo invalidaban: *(1) en el argumento 3,* 14 de 19 sujetos sugirieron que debían modificarse las definiciones de número par e impar, *(2) en el argumento 1,* siete de 19 sujetos indicaron que debía emplearse la hipótesis completa del discriminante no negativo y exhibieron algún número real para satisfacer la existencia mientras que ocho de 19 sujetos sólo hicieron referencia al uso de la hipótesis completa y *(3) en el argumento 2,* cuatro de 19 sujetos manifestaron que debían considerarse dos casos para el número en cuestión, cuando era cero y cuando era diferente de cero para poder emplear el axioma del inverso multiplicativo.

4.4 RESULTADOS DE LA FASE EMPÍRICA 3: LA CONVICCIÓN DE UN ARGUMENTO MATEMÁTICO

Los resultados se presentan considerando las respuestas de los sujetos de investigación en torno a las siguientes cuestiones: *(a) escoger el orden en el que los argumentos le parecen más convincentes, (b) explicar las razones por las que ha escogido al argumento más convincente* y *(c) explicar las razones por las que ha escogido al argumento que le parece menos convincente*.

En la tabla 26, se presenta para cada argumento, la cantidad de sujetos que lo consideran como el más convincente y el menos convincente.

Tabla 26

Número de sujetos que consideran a los argumentos más o menos convincentes

Número de argumento	**Cantidad de sujetos que lo eligen como el más convincente**	**Cantidad de sujetos que lo eligen como el menos convincente**
1	0	7
2	1	7
3	16	0
4	1	2
5	1	3

Con base en la tabla anterior, se puede observar que la gran mayoría de sujetos de investigación consideró al *argumento 3* como el más convincente. Este argumento es el que usualmente se presenta a los profesores de matemáticas en formación inicial en algunos cursos de la carrera de enseñanza de la matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica, por lo que podríamos suponer que les es bastante familiar. Además, es el argumento que se presenta en las recomendaciones metodológicas en el programa de estudios de matemáticas para la educación secundaria en Costa Rica dirigidas a los profesores para favorecer el proceso de razonar y argumentar en sus alumnos.

Asimismo, se puede notar que los *argumentos 1 y 2* fueron los menos convincentes para los sujetos de investigación. Como se indicó en el capítulo 3 sobre la metodología de la investigación, específicamente en el apartado de análisis de la información del cuestionario 4, las características de los argumentos menos convincentes para los sujetos de investigación, no las consideramos ya que no eran nuestro objetivo de estudio. No obstante, es interesante que, solo el *argumento 2* no corresponde a una demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, ya que únicamente demuestra su existencia y, sin embargo, solo siete sujetos lo eligieron como el menos convincente. Además, solo cinco de ellos detectaron que no era una demostración de la proposición dada en función de ese hecho. A continuación, se presentan dos respuestas representativas:

- La idea de $f(x) = x^2 - 2$ se plantea de la nada, si se usa esto, agregaría una introducción de porqué sirve usarla, sin embargo, la conclusión de $\sqrt{2}$ irracional no parece tener sentido pues entre 1 y 2 hay números racionales, por lo que no le veo sentido a usar ese Teorema de Bolzano para demostrar algo que no tiene que ver. Toda la demostración tiene sentido, pero no con la conclusión (EBM09).

- Escogí el argumento 2 porque considero que no sustenta la proposición, es decir, considero que el hecho de que $\exists c \in \left]1,2\right[\left(c^2 = 2 \right)$ no asegura que 2 se irracional o no (ELH01).

Si la convicción sobre la validez de un argumento estuviera basada únicamente en aspectos lógico-matemáticos, sería esperable que el *argumento 2* sea el menos convincente de todos, por no ser una demostración matemática de la propiedad dada, sin embargo, no es el caso en nuestro estudio. Esta situación, nos permite observar que la convicción de los profesores de matemáticas sobre la validez de un argumento matemático tiene muchos matices.

En cuanto a las características de los argumentos más convincentes, se consideran las seis categorías de análisis mencionadas en el capítulo 3, a saber: *(1) el uso de elementos concretos en el argumento*, *(2) la familiaridad del argumento*, *(3) la forma ritual del argumento*, *(4) la validez del argumento*, *(5) la simplicidad matemática del argumento y (*6) *la claridad del argumento*. En la tabla 27, se presentan el número de sujetos que evidenciaron en sus respuestas algunas de las características mencionadas.

Tabla 27

Número de sujetos asociados a las características de los argumentos más convincentes

Características de los argumentos más convincentes	**Cantidad de sujetos**
(1) El uso de elementos concretos en el argumento.	1
(2) La familiaridad del argumento.	3
(3) La forma ritual del argumento.	2
(4) La validez del argumento.	17
(5) La simplicidad matemática del argumento.	8
(6) La claridad del argumento.	12

A continuación, se presenta cada una de las categorías con ejemplos ilustrativos de las respuestas de los sujetos de investigación.

4.4.1 Categoría 1: el uso de elementos concretos en el argumento

En esta categoría, el argumento es convincente debido a que se basa en ejemplos específicos o utiliza alguna referencia visual. Solamente un sujeto de investigación se refirió a ella en su respuesta al elegir el argumento 5 como el más convincente:

- Es una demostración, desde la parte geométrica por lo cual es una manera más simple de poder visualizar, cada uno de los procesos (ELM04*).*

4.4.2 Categoría 2: la familiaridad del argumento

En esta categoría, el argumento es convincente debido a que el profesor lo conoce o lo ha utilizado anteriormente, la convicción no se basa en las matemáticas utilizadas, sino en la experiencia previa del profesor de matemáticas con el argumento. Tres sujetos evidenciaron esta característica en sus respuestas, EBM19, ELM05, ELM07 al elegir el argumento 3 como el más convincente:

- Tomando en consideración de que es el método con el que a mí me enseñaron a demostrar valores irracionales (EBM19).
- Es la demostración clásica que estudiamos en un curso durante mi carrera (ELM05).
- Tal vez es la que más me convence porque fue el modo en que me la presentaron en la carrera (ELM07).

4.4.3 Categoría 3: la forma ritual del argumento

En esta categoría, el argumento es convincente en función de su apariencia superficial en lugar de considerar los elementos de fondo. Dos sujetos evidenciaron esta categoría, el sujeto EBH02 al escoger al argumento 3 como el más convincente y el sujeto ELH06 al elegir el argumento 2:

- Inicialmente se escoge debido a la extensión de la prueba ya que es de las más cortas, de los argumentos presentados (EBH02).
- Su demostración visualmente es más pequeña que las demás (ELH06).

4.4.4 Categoría 4: la validez del argumento

En esta categoría, el argumento es convincente debido al uso de elementos lógicos o matemáticos correctos. Fue la característica que la mayoría de sujetos evidenció en sus respuestas, 14 sujetos al elegir al argumento 3 como el más convincente, a saber, EBH03, EBH04, EBM05, EBH07, EBH08, EBM09, EBM11, EBM12, EBM15. EBH16, EBM19, ELH01, ELH03 y ELM05; el sujeto ELH02 al escoger el argumento 4, el sujeto ELM04 al escoger el argumento 5 y el sujeto ELH06 al elegir el argumento 2. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- Primero que nada, porque se está haciendo por contradicción, aparte de usar la definición de lo que es un número racional y garantizar que son naturales, aparte argumenta o utiliza muy bien el término de ser divisor de un número, la sustitución es bien realizada y por último se llega a contradecir lo que se quería con su respectiva argumentación (EBH08).
- Utiliza de forma correcta la demostración por contradicción, con el formalismo del caso. Plantea las hipótesis requeridas, tiene sentido lógico la demostración, utiliza de forma adecuada el principio de la buena ordenación (ELH02).
- La demostración de la existencia de los números inconmensurables, es más sencilla realizarla por contradicción suponiendo que se trata de un número racional y ejemplificando o demostrando porque no lo es. Además, en mi criterio cuando se desea demostrar que un elemento cumple *“x”* propiedad, tomar la contradicción y considerar que la propiedad no se cumple para así poder formar la contradicción (ELM04).
- El argumento 2 me parece más convincente pues es el único que no se aborda mediante contradicción (ELH06).

4.4.5 Categoría 5: la simplicidad matemática del argumento

En esta categoría, el argumento es convincente porque se emplean elementos matemáticos simples y básicos que facilitan la compresión del argumento. Fue la característica ubicada en el tercer lugar en cuanto a la cantidad de sujetos que la evidenció en sus respuestas, 7 sujetos al elegir al argumento 3 como el más convincente, a saber, EBH02, EBH04, EBM05, EBM15, EBH16, ELH03 y ELM07 y; el sujeto ELH06 al elegir el argumento 2. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- Utiliza argumentos simples de divisibilidad y de números primos, no requiere una construcción elaborada (EBH02).
- Considero que si se maneja la teoría o la parte matemática a como lo es la divisibilidad, es una demostración que se le pudo haber ocurrido a uno o tener la idea por lo menos. No utiliza mucha complejidad (EBH04).
- La demostración usa ideas simples y argumentos de divisibilidad básicos, fáciles de recordar, para llegar a la contradicción, de una manera secuencial simple (EBH16).
- En el proceso de demostración se utilizan propiedades de la divisibilidad, las cuales considero fáciles de explicar y comprender. Siento que es una demostración poco compleja y que no requiere de mucho desarrollo (ELH03).
- Considero que los contenidos utilizados en la demostración no son muy avanzados y cualquier estudiante puede llegar a comprender la demostración por su facilidad (ELH06).

4.4.6 Categoría 6: la claridad del argumento

En esta categoría, el argumento es convincente debido a que las ideas planteadas se comprenden de manera clara y sencilla. Fue la característica ubicada en el segundo lugar en cuanto a la cantidad de sujetos que la evidenció en sus respuestas, 11 sujetos al elegir al argumento 3 como el más convincente, a saber, EBH02, EBH03, EBH04, EBM05, EBM09, EBM15, EBH16, EBM19, ELH01, ELH03, y ELM07 y; el sujeto ELM04 al elegir el argumento 5. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

- Al leerse pueda realizarse de una manera fluida y simple si una persona no posee muchos conocimientos sobre teoremas (EBH02).
- Es totalmente claro todos los pasos que se realizan, de las 5 propuestas fue la única que no me perdí al leerla. Es clara en su totalidad (EBH04).
- Me convence el argumento 3 ya que: es claro en las ideas que se hacen, usa claramente que 2 es primo y así $2/a$, por razones claras se llega a $(2m)^2 = 2b^2$, considero que se debe aclarar mejor que $2/b$, como así $2(2m^2)b^2 \Rightarrow 2/b$ (2 primo), seguido me parece claro como expresan la contradicción. En general utilizan argumentos claros y simples (EBM05).
- Es una demostración, desde la parte geométrica por lo cual es una manera más simple de poder visualizar, cada uno de los procesos (ELM04).

De acuerdo a los resultados obtenidos en este apartado, podemos observar que las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores en formación inicial en orden de descendente son: la validez para 17 de los 19 sujetos, la claridad para 12 de los 19 sujetos y la simplicidad matemática para 8 de los 19 sujetos. Todas estas características apelan más a elementos de fondo que de forma en el argumento. Esto podría explicarse porque los sujetos de investigación están finalizando su formación inicial en la que han estado involucrados en procesos de demostración más formales en donde se brinda mayor importancia a los aspectos rigurosos.

Se puede apreciar que las características que aluden más a la forma del argumento han sido señaladas por pocos sujetos: la familiaridad en tres de los 19 sujetos, la forma ritual en dos de los 19 sujetos y el uso de elementos concretos en uno de los 19 sujetos. Como se ha indicado en marco teórico, en las Matemáticas la convicción puede estar asociada a otros elementos alternativos a los aspectos lógico-formales, de hecho, la aceptación de nuevos resultados en la comunidad matemática, se considera un proceso social en donde quizás los aspectos más relevantes sean la comprensión y el significado (De Villiers, 1993; Hanna, 2002).

CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

Índice del capítulo

Este capítulo consta de cinco apartados. En el primero, *Conclusiones en relación con el primer objetivo. Fase teórica 0: análisis conceptual de la demostración matemática*, se presentan las conclusiones sobre el estudio teórico en función de los cuatro elementos centrales del mismo: los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas, el concepto de demostración, los tipos de demostraciones y las funciones atribuidas a estas.

En el segundo apartado, *Conclusiones en relación con el segundo objetivo. Fase empírica 1: el conocimiento especializado sobre la validez lógica de la demostración matemática*, se presentan las conclusiones sobre el conocimiento de los sujetos de investigación de las formas de proceder en la demostración en función de los aspectos lógicos y sintácticos en proposiciones genéricas, es decir, desprovistas de contenido matemático y las conclusiones sobre la evaluación de argumentos matemáticos en función de dichos aspectos.

En el tercer apartado, *Conclusiones en relación con el tercer objetivo. Fase empírica 2: el conocimiento especializado sobre la validez matemática de la demostración*, se presentan las conclusiones sobre el conocimiento de los sujetos de investigación sobre los aspectos matemáticos de la demostración tales como el uso de las hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas.

En el cuarto apartado, *Conclusiones en relación con el cuarto objetivo. Fase empírica 3: la convicción de un argumento matemático*, se presentan las conclusiones sobre las características de los argumentos matemáticos que más convencen a los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional.

En el quinto apartado, *Aportes de la investigación y líneas futuras*, se describen los principales aportes de este estudio a la investigación sobre el conocimiento de la demostración en profesores de matemáticas y a la formación de estos profesionales, además, se plantean algunas líneas abiertas de investigación sobre el conocimiento especializado de la demostración.

5.1 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL PRIMER OBJETIVO. FASE TEÓRICA 0: ANÁLISIS CONCEPTUAL DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Este apartado se divide en dos partes. En el primero se presentan algunas conclusiones sobre los *elementos históricos de la demostración en las Matemáticas*. En el segundo se consideran las conclusiones sobre los otros elementos del análisis conceptual de la demostración, a saber: *el concepto de demostración*, *los tipos de demostraciones* y *las funciones atribuidas*.

5.1.1 Conclusiones sobre elementos históricos de la demostración en las Matemáticas

El concepto de demostración matemática es una noción que ha estado presente en las diferentes etapas históricas de las Matemáticas. No obstante, en cada época y cultura, ha sido comprendida de diferentes maneras y se ha priorizado su estudio, en función de las preocupaciones intelectuales surgidas con la producción de conocimiento matemático y el contexto social de cada una.

En la Antigüedad, algunas culturas como los babilonios y los egipcios tuvieron un desarrollo matemático que hizo énfasis en el uso de procedimientos prácticos fundamentados en la evidencia empírica y otras, como los griegos se preocuparon en mayor medida por los aspectos lógicos y axiomáticos (Domingues, 2002; Kleiner, 1991; Ruíz, 2003).

En la Edad Media y el Renacimiento no hubo grandes avances en la demostración. En el caso de la Edad Media, la complejidad del contexto social de occidente con la situación religiosa no permitió grandes avances en las Matemáticas en general y en culturas como los árabes, los hindúes y los chinos sus preocupaciones intelectuales no priorizaban los aspectos demostrativos. En el caso del Renacimiento, en el siglo XV a pesar de que hubo mayor acceso a la literatura de la antigua Grecia no se tuvieron progresos relevantes (Domingues, 2002; Ruíz, 2003).

En los siglos XVII, XVIII y XIX hubo grandes avances en el conocimiento matemático, sin embargo, se dio un uso liberal de los procesos infinitos, del uso de la intuición y de los razonamientos heurísticos y geométricos lo que originó la aparición de paradojas. A raíz de la crisis matemática de fundamentos, la demostración fue sometida a mayor rigor. A finales del siglo XIX e inicios del siglo XX hubo intentos por formalizar a las Matemáticas con diferentes propuestas provenientes de tres escuelas principales de pensamiento: *el logicismo*, *el formalismo* y *el intuicionismo.* No obstante, el trabajo de Kurd Gödel en 1931 demostró la imposibilidad de formalizar a las Matemáticas de manera absoluta y aun en las partes formalizadas se cuestionó su consistencia (Domingues, 2002; Durand-Guerrier et al., 2012a; Kleiner, 1991; Ruíz, 2003).

Las crisis de fundamentos mencionadas y los trabajos de Toulmin y Perelman sobre la argumentación en la década de 1950 generaron mayores inquietudes sobre la naturaleza de las matemáticas y la noción demostrativa. Esto ha generado tensiones sobre la forma de concebir a la práctica matemática en donde se distinguen dos posiciones, una de mayor apertura que enfatiza en el proceso de la invención matemática y otra en donde lo fundamental es la formalidad de los argumentos matemáticos (Durand-Guerrier et al., 2012a; Mariotti, 2006).

5.1.2 Conclusiones sobre el concepto de demostración, los tipos de demostraciones y las funciones atribuidas

En esta sección se reproduce de forma íntegra, el apartado de conclusiones del artículo denominado *La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas* de Alfaro, Flores y Valverde (2019). El artículo completo se puede obtener en el sitio web de la Revista UNICIENCIA en el siguiente enlace electrónico: https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/11481/14808.

La palabra demostración tiene diversos significados dependiendo del contexto en el que se le considere. En contextos informales puede hacer alusión a la evidencia de sentimientos, habilidades y sobre el funcionamiento de algún objeto, de manera más formal se utiliza para garantizar la validez de proposiciones. No obstante, aún en contextos formales existen diferencias en cuanto a lo que es una demostración, en efecto, existen pruebas por constatación que utilizan representaciones gráficas, procedimientos empíricos, pruebas por computadora y las llamadas demostraciones clásicas que son pruebas deductivas formalizadas.

La demostración matemática no es ajena a la variedad de significados y a la evolución histórica. En efecto, qué es una demostración matemática y cuándo es válida son elementos fuertemente vinculados al contexto sociocultural. En lo que parece existir consenso es que su objetivo fundamental es el de validar el conocimiento matemático generado por la sociedad, las diferencias radican en la manera de hacerlo. Por ejemplo, en civilizaciones antiguas en Egipto, China y América precolombina las formas argumentativas empleadas diferían de las formas utilizadas por los griegos. En el caso de occidente, la demostración matemática ha sido influenciada por la lógica aristotélica, es decir, por el razonamiento deductivo y se ha tomado como postulado que dicha lógica es natural en el ser humano.

Formalmente se puede entender la demostración matemática como un proceso, un razonamiento o una secuencia de fórmulas de manera que cada una de ellas es un axioma o una consecuencia de fórmulas precedentes mediante las reglas de inferencia. Bajo este enfoque se pueden considerar como un discurso estrictamente codificado. Una demostración matemática no establece un hecho *A*, sino que establece una proposición del tipo *si B entonces A*, lo que indica que los teoremas matemáticos son afirmaciones condicionales que dependen de los elementos del sistema axiomático de la teoría en la que están involucrados y de las tesis particulares de dichos teoremas. Para demostrar es necesario responder dos cuestiones básicas ¿qué significa que una afirmación matemática sea verdadera? y ¿qué debería hacerse para demostrar que una afirmación matemática es cierta? Las respuestas a ambas preguntas dependen directamente de las reglas de inferencia de la lógica de predicados y de la estructura sintáctica de las definiciones involucradas, por tal razón, se hace relevante distinguir los tipos de demostraciones matemáticas, directas e indirectas.

Otro elemento fundamental de las demostraciones matemáticas es el grado de convicción. Aunque las demostraciones tienen el rol de validar el conocimiento matemático también es importante su función explicativa mediante la que se brindan las razones por las que una afirmación matemática es verdadera.

En la educación secundaria de Costa Rica el papel del profesor de matemática es fundamental para promover que los estudiantes se familiaricen con el sentido de la demostración matemática. Debe realizar demostraciones de algunos teoremas y solicitar a los estudiantes que realicen demostraciones sobre algunos resultados matemáticos. La demostración es considerada como una fase formal de la argumentación y tiene un papel relevante en la formulación de conjeturas. Una vez que los estudiantes han formulado una conjetura se deben trabajar tres etapas: en la primera se debe hacer la verificación en casos particulares, en una segunda etapa los estudiantes deben proponer un argumento que justifique la validez de la conjetura y finalmente, en una tercera etapa deben realizar la demostración (Ministerio de Educación Pública, 2012).

Lo anterior sugiere que la demostración matemática debe formar parte del conocimiento especializado del profesor. Para ello debe tener un dominio sobre el concepto de demostración y las maneras de entenderse en función del contexto en que se considere: la vida cotidiana, las matemáticas y la educación matemática. Asimismo, consideramos que debe tener conocimiento sobre los siguientes aspectos: *(1) la validez lógica de la demostración*, es decir, conocer las etapas que se requieren para demostraciones en las diversas variedades de estructura lógica de la proposición a demostrar, proponer ejemplos de las mismas, y apreciar cuándo un razonamiento reúne los requisitos lógicos de una demostración, *(2) la validez matemática de la demostración*, es decir, conocer sobre la estructura de las teorías matemáticas en donde están involucradas las demostraciones y el uso adecuado de los axiomas, hipótesis, definiciones y teoremas relacionados y *(3) las funciones de la demostración*, es decir, conocer los diferentes roles de las demostraciones, en particular apreciar el grado de convicción que puede generar la calidad explicativa de una demostración.

Algunas investigaciones han evidenciado que los profesores de matemáticas identifican de manera correcta un argumento válido, pero también aceptan argumentos inválidos como demostraciones. Por otra parte, los criterios utilizados por los profesores para evaluar un argumento difieren mucho entre sí, aunque existen algunos elementos comunes como los esquemas simbólicos o rituales, la forma del argumento, las manipulaciones algebraicas utilizadas, entre otros. Sobre las funciones de la demostración, algunas investigaciones muestran que los profesores se inclinan por la verificación de resultados como la principal función en detrimento de la función explicativa y la de promover la comprensión. Además, los profesores encuentran que un argumento es convincente por factores tales como el uso de ejemplos concretos, la referencia visual y no necesariamente su validez lógico-matemática (Cabassut et al., 2012).

Con base en lo anterior, es necesario que el profesor de matemática conozca la variedad de significados de la palabra demostración, pero es fundamental que tenga claridad sobre lo que es una demostración matemática, sobre cómo se demuestra una proposición matemática y el para qué realizar demostraciones matemáticas. Asimismo, es importante su conocimiento sobre procesos asociados como el razonamiento, la explicación y la argumentación, de forma que pueda diferenciarlos y encontrar elementos de convergencia (Buchbinder y McCrone, 2018; Cabassut et al., 2012; De Villiers, 1993; Durand-Guerrier et al., 2012b; Flores-Medrano, 2015; Knuth, 2002; Lin et al., 2012; Lo y McCrory, 2009; Pietropaolo y Campos, 2009; Tabach et al., 2009).

5.2 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL SEGUNDO OBJETIVO. FASE EMPÍRICA 1: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE LA VALIDEZ LÓGICA DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Este apartado consta de dos partes. En la primera se presentan las conclusiones sobre las formas de proceder en la demostración en función de los aspectos lógicos y sintácticos en proposiciones genéricas, es decir, desprovistas de contenido matemático, así como sobre la forma en que ejemplificaron dichas proposiciones genéricas y las demostraron. En la segunda parte se presentan las conclusiones sobre la evaluación de argumentos matemáticos en función de dichos aspectos.

5.2.1 Conclusiones sobre las formas de proceder en una demostración en función de la estructura lógico-sintáctica

En esta sección se reproduce de forma íntegra, el apartado de conclusiones del artículo denominado *Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración* de Alfaro, Flores y Valverde (2020). El artículo completo se puede obtener en el sitio web de la Revista PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática en el siguiente enlace electrónico: https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/pna.v14i2.9363.

En esta investigación se ha logrado caracterizar el conocimiento de los futuros profesores de matemáticas sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* ha permitido lograr parcialmente este objetivo, debido a que en el subdominio de la práctica matemática se incluye a la categoría *demostrar*, sin embargo, en este estudio hemos tenido que completar la categorización para la demostración que se ha difundido del MTSK (Flores-Medrano, 2015), con base en investigaciones sobre la demostración en profesores de matemáticas, creando nuevos subcomponentes que pueden ser considerados como evidencias del conocimiento matemático en dos de los componentes propuestos por Flores-Medrano (2015) sobre la demostración: (*1) el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática* y *(2) el conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas.* Además, hemos propuesto un componente nuevo denominado *(3) la convicción de un argumento matemático.*

Dentro de la primera componente se ha considerado el subcomponente denominado la *validez lógica* y se han precisado los elementos que lo conforman, lo que generó para esta investigación tres categorías que nos permitieron estudiar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial: *(1) el tipo de demostración: directa o indirecta*; *(2) el tipo de cuantificador: universal o existencial* y *(3) el tipo de conectiva lógica: implicación universal, disyunción universal, conjunción universal y doble implicación universal*. Estas componentes han generado *indicadores de conocimiento*, los cuales hacen referencia a frases para determinar en las respuestas de los sujetos evidencias de conocimiento sobre las formas de proceder desde el punto de vista lógico-sintáctico en la demostración.

Los indicadores de conocimiento establecidos para este estudio nos permitieron clasificar la gran mayoría de respuestas de los profesores de matemáticas en formación inicial en las seis tareas del cuestionario. Fueron pocas las respuestas de los sujetos que presentaron formas de proceder en la demostración no contempladas en tales indicadores tales como el uso de la inducción matemática, la verificación de todos los casos cuando el conjunto universo es finito, las demostraciones por casos y la demostración simultánea de la doble implicación lógica universal. Estas formas alternativas de proceder en la demostración de una proposición matemática, nos sugiere que debemos considerar más indicadores de conocimiento que contemplen estos casos no previstos a priori en nuestra investigación. No obstante, por la gran variedad de formas de demostrar, consideramos que es complejo contar con un conjunto de indicadores que abarquen todos los casos posibles. En este sentido, pensamos que esta investigación puede brindar insumos para el desarrollo de trabajos similares y de este modo, contar con una mayor variedad de categorías e indicadores de conocimiento.

La gran mayoría de los profesores de matemáticas en formación inicial mostraron conocimiento sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración matemática. En el caso del ejemplo concreto de proposición genérica una amplia mayoría ofreció una proposición que correspondía en su forma sintáctica a lo solicitado en cada una de las tareas.

En cuanto al *tipo de demostración directa o indirecta*, tuvieron preferencia por la demostración directa tanto en la explicación de la forma de demostrar una proposición genérica, como en la demostración del ejemplo propuesto. Consideramos que una posible explicación de este hecho, es que normalmente en los cursos de matemáticas de la carrera de enseñanza de la matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica, los futuros profesores están expuestos mayoritariamente a demostraciones directas, pues las proposiciones que se les presentan se han asumido como teoremas y, por ende, verdaderas.

Según Durand-Guerrier et al. (2012a) a los estudiantes pocas veces se les presentan proposiciones matemáticas falsas para que analicen su validez y determinen bajo qué condiciones podrían ser verdaderas. De hecho, actividades tales como la exploración, la validación y la interpretación, generan la necesidad de comprensión al encontrarse con resultados no previstos, contradicciones o ambigüedades. En el programa de matemáticas de la educación secundaria de Costa Rica y en otras propuestas curriculares, se enfatiza la importancia y la necesidad de que los alumnos de secundaria formulen y analicen conjeturas, en donde no hay certeza de la validez de los resultados obtenidos. Esto promueve la necesidad de realizar procesos de razonamiento, argumentación y demostración. Por tanto, consideramos relevante que los futuros profesores sean sometidos a esos mismos procesos matemáticos en sus planes formativos.

En cuanto al *tipo de cuantificador universal* la mayor parte evidenció que para su demostración se debía considerar un elemento arbitrario del conjunto universo y que sobre tal elemento se podía garantizar la veracidad de la propiedad en cuestión, sin embargo, muy pocos indicaron que una vez garantizada la veracidad se podía concluir que la propiedad era válida para la totalidad de los elementos del conjunto universo.

Esto último es relevante, pues como lo indican Durand-Guerrier et al. (2012b) si se puede demostrar que una propiedad es cierta para un objeto particular elegido de manera arbitraria, la generalización universal permite concluir que la propiedad es válida para todos los objetos de ese tipo. Creemos que la comprensión de esta generalización universal es necesaria para la solidez de la conclusión de un resultado matemático. En este sentido Knuth (2002) menciona que para algunos profesores de matemáticas la demostración es una construcción falible y que, una vez realizada la demostración de una afirmación matemática, podrían existir contraejemplos u otro tipo de evidencia que pusieran en duda la generalidad de la demostración. Además, señala que algunos profesores sienten la necesidad de hacer una verificación empírica como un elemento adicional de convicción.

En el caso del *cuantificador existencial*, la mayoría se inclinó por la demostración constructiva, es decir, por brindar un elemento concreto del universo que cumpliera la propiedad en cuestión, además mostraron preocupación por la forma de determinar dicho elemento y en algunos consideraron parte de la demostración el procedimiento de búsqueda del elemento en cuestión.

Concordamos con Durand-Guerrier et al. (2012b) en que la demostración constructiva es importante debido a que cuando se sabe que existe un objeto de cierto tipo se le puede asignar un nombre y que esto es útil en la introducción de símbolos y definiciones. Consideramos que la demostración no constructiva del existencial también debe observarse con más intensidad en los futuros profesores de matemáticas, pues muchas afirmaciones existenciales se justifican empleando otros elementos como axiomas o teoremas precedentes en la teoría matemática en estudio. Por ejemplo, la demostración de que $\exists x \in \mathbb{R}\left(x^7 + x + 1\right)$ requiere el uso de otros argumentos matemáticos diferentes a la exhibición de un número particular que cumpla la propiedad.

El manejo de los cuantificadores es relevante en la manipulación de objetos matemáticos, pues como Durand-Guerrier et al. (2012b) mencionan, algunos matemáticos destacados como Leibniz, Wolf y D'Alembert cometieron errores importantes al resolver problemas de sumas infinitas, límites, convergencia y divergencia debido a un débil control sintáctico y formal sobre los conceptos que estaban tratando y al manejo inadecuado de cuantificadores anidados. En el caso de la Educación Matemática y específicamente, en la formación inicial de profesores de matemáticas, como señalan Durand-Guerrier et al. (2012b), el control sintáctico es importante sobre todo cuando el control semántico es inestable, de esta manera una disminución del rigor lógico puede generar malos entendidos en el abordaje de la demostración matemática.

En cuanto al tipo de conectiva lógica, la demostración de proposiciones con estructura de implicación y doble implicación universales fueron claramente descritas por la gran mayoría de los sujetos mientras que la demostración de proposiciones que encierran conjunción y disyunción universales presentaron más dificultades. La implicación y la doble implicación fueron abordadas mayoritariamente de forma directa. En el caso de la primera, los sujetos evidenciaron conocimiento sobre la forma de proceder asumiendo como verdadero el antecedente y garantizando la veracidad del consecuente; en el caso de la segunda, evidenciaron conocimiento al indicar que debían probarse las dos implicaciones. Puede que haya influido en esta situación el hecho de que, en los cursos de la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, la gran mayoría de proposiciones que los sujetos abordan en los cursos tienen las estructuras sintácticas implicación y doble implicación. Son más escasas las demostraciones de conjunción y la disyunción, lo que se manifestó también en la búsqueda de ejemplos para este tipo de proposiciones.

Aunque el objetivo principal de este estudio es caracterizar el conocimiento de los sujetos de investigación, consideramos dignas de mención algunas limitaciones observadas en varias respuestas de los sujetos de investigación tales como: el reemplazo de la explicación por la interpretación de la proposición, la confusión entre una propiedad y un conjunto, la verificación de una propiedad en casos particulares de un universo infinito como ejemplo de demostración de una propiedad que afecta el cuantificador universal, la inversión de los cuantificadores universal y existencial, poco manejo de los criterios de verdad de las conectivas lógicas disyunción y conjunción y el uso indebido de algunas equivalencias lógicas.

Según Knuth (2002) el hecho de que algunos profesores de matemáticas presenten limitaciones sobre la demostración no es algo sorprendente, pero la responsabilidad de mejorar la situación recae principalmente en los encargados de su formación.

Creemos que las evidencias de conocimiento halladas en el estudio y estos fenómenos señalados, pueden ser un insumo a considerarse en el abordaje de la demostración en la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. En dicha carrera, la demostración es empleada para la verificación de los resultados matemáticos lo que responde al primer nivel planteado por Lo y McCrory (2009), sin embargo, hace falta profundizar en los otros dos niveles mencionados por ambas autoras, a saber, como objeto matemático regulado por reglas y como elemento que favorece el desarrollo de sus futuros alumnos.

5.2.2 Conclusiones sobre la evaluación de argumentos matemáticos en función de la estructura lógico-sintáctica

La mayoría de los profesores de matemáticas en formación inicial evidenció conocimiento de los aspectos lógico-sintácticos en la evaluación de los cuatro argumentos matemáticos propuestos en el cuestionario 2, para la implicación universal, correspondiente a la proposición matemática *P: cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos*.

En los dos primeros argumentos la mayoría de los sujetos manifestó que no correspondían a una demostración, apreciando que en el primero la demostración aludía a un caso particular y que en el segundo se demostraba el recíproco del predicado. En los argumentos tercero y cuarto la mayoría de sujetos indicaron que correspondían a una demostración.

En el caso del tercero, sobre la demostración directa de la implicación universal, la mayoría evidenció conocimiento de que debía suponerse cierto el antecedente y posteriormente, garantizarse la veracidad del consecuente. No obstante, sólo una minoría evidenció conocimiento sobre la consideración de un elemento genérico del universo y ninguno hizo referencia a que la propiedad era válida en virtud de que se había garantizado para un elemento genérico que representa a cualquiera del universo. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Durand-Guerrier et al. (2012b).

En el cuarto argumento, sobre la demostración por reducción al absurdo de la implicación universal, la mayoría brindó evidencias de conocimiento de los tres indicadores propuestos, a saber, que debía suponerse la negación de la proposición dada, que debía generarse una contradicción y que una vez generada se podría concluir que la proposición original era verdadera.

La proposición del cuestionario 2, fue empleada por Knuth (2002) en su investigación con profesores de matemáticas en donde les planteó un argumento que demostraba el predicado recíproco. Según este investigador, 10 profesores lo consideraron como una demostración y se enfocaron en la corrección de las manipulaciones algebraicas más que en los aspectos de validez. En nuestro estudio, la mayoría de los profesores de matemáticas en formación inicial se enfocaron en la corrección lógica más que en las matemáticas empleadas en cada argumento, lo que nos permite observar un conocimiento adecuado sobre estos aspectos lógico-sintácticos de la implicación universal. Concretamente, evidencian conocimiento de que un caso particular no demuestra, y aprecian el argumento que emplea esta falacia. También han demostrado conocimiento sobre cómo proceder en la demostración directa y por reducción al absurdo.

5.3 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL TERCER OBJETIVO. FASE EMPÍRICA 2: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO SOBRE LA VALIDEZ MATEMÁTICA DE LA DEMOSTRACIÓN

Consideramos que estudiar el conocimiento sobre los aspectos matemáticos de la demostración es complejo ya que además de los elementos lógico-sintácticos intervienen los conceptos y sus significados en la teoría matemática en la que se inserta la demostración. En este sentido Mariotti (2006) señala que, contrario a los que ocurre dentro de una teoría formal, en la práctica de la deducción matemática hay dependencia de la compresión y de la asimilación previa del significado de los conceptos a partir de los cuales ciertas propiedades se siguen de manera lógica.

Los aspectos matemáticos considerados en nuestro estudio como *las hipótesis*, *los axiomas*, *las definiciones* y *los teoremas* podrían tener diferentes niveles de dificultad para comprender una demostración. En el caso del primer argumento, correspondiente a la categoría denominada *el uso parcial de la hipótesis sobre el discriminante no negativo* (en una ecuación de segundo grado en una variable real), la hipótesis aparece de forma explícita en la proposición a demostrar. La gran mayoría de los sujetos de investigación evidenció que no era una demostración debido a este uso parcial. En la corrección del argumento, una minoría de los sujetos evidenció conocimiento de que debía considerarse la hipótesis del discriminante en su totalidad y además buscó y propuso un número real que cumpliera con la existencia. En los restantes tres argumentos las definiciones, axiomas y teoremas empleados no necesariamente están explícitos en la proposición a demostrar y, por lo tanto, se requiere que los sujetos los conozcan a profundidad para poder evaluar su uso en la demostración.

En el segundo argumento correspondiente a la categoría denominada *el uso indebido del axioma de la existencia del inverso multiplicativo* (para demostrar la igualdad en valor absoluto de dos números enteros divisibles entre sí), muy pocos sujetos evidenciaron conocimiento de que el argumento no era una demostración por el uso inadecuado del inverso multiplicativo. Asimismo, fueron muy pocos los que en la corrección del argumento manifestaron que debía considerarse que el número en cuestión debía ser no negativo para poder emplear su inverso multiplicativo.

En el tercer argumento correspondiente a la categoría denominada *el uso indebido de las definiciones de número entero par e impar* (para demostrar la paridad de la suma de dos números impares), la mayoría evidenció que no era una demostración debido a este uso inadecuado de las definiciones. En la corrección del argumento, la mayoría de los sujetos evidenció conocimiento de las condiciones algebraicas que caracterizan a los números pares e impares, posiblemente porque las han empleado con frecuencia en los cursos de la carrera. No obstante, el desconocimiento de todas las condiciones de las definiciones podría derivar en que los sujetos evalúen de forma errónea un argumento. Por ejemplo, en el segundo argumento dos sujetos consideraron que en la definición de divisibilidad los números involucrados son necesariamente no nulos, por lo tanto, estaba justificada para ellos la existencia del inverso multiplicativo, lo que implicó que consideraran el argumento como una demostración.

En el cuarto argumento correspondiente a la categoría denominada *el uso adecuado de hipótesis, axiomas, definiciones y teoremas en la demostración del teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo en la Geometría Euclidiana*, la totalidad de los sujetos manifestó que el argumento era una demostración matemática. Sin embargo, solo una minoría evidencio conocimiento de los indicadores propuestos. Este hecho hace pensar que es más sencillo explicar cuándo un argumento matemático posee errores que justificar porque es correcto.

Según Mariotti (2006), tradicionalmente la demostración se considera en sí misma como si fuera posible separarla de la proposición a la que da sustento y del marco teórico dentro del que tal soporte tiene sentido. Nuestros resultados han podido evidenciar que la gran mayoría de los sujetos de investigación han apreciado que en una demostración todos estos elementos están involucrados de forma simultánea y no es posible comprender el sentido de una demostración matemática sin vincularla la proposición a la cual refiere y a la teoría matemática en donde se inscribe. De esta forma, en la práctica matemática se demuestran proposiciones verdaderas, pero el término *verdad* debe entenderse siempre en relación con una teoría particular.

Nuestros resultados apoyan la apreciación de Cabassut et al. (2012) en la que afirman que la demostración matemática no establece hechos, sino que garantiza la validez de proposiciones del tipo *si-entonces* lo que implica que las hipótesis, axiomas, teoremas y definiciones deben entenderse y aplicarse en sus significados precisos en una teoría matemática. Consideramos que los aspectos matemáticos de la demostración pueden contribuir al conocimiento especializado de los profesores de matemática para comprender que los resultados matemáticos no son verdades universales. Por ejemplo, cuando se afirma que la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180 grados el conocimiento sobre la validez matemática de la demostración permite entender que en cierta teoría este resultado puede ser derivado.

5.4 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL CUARTO OBJETIVO. FASE EMPÍRICA 3: LA CONVICCIÓN DE UN ARGUMENTO MATEMÁTICO

El estudio de las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los profesores de matemáticas puede tener aristas más complejas que la sola consideración de los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos. En la convicción pueden intervenir elementos psicológicos, pues como señala Knuth (2002) en su investigación, algunos profesores estaban más convencidos por argumentos empíricos, aunque eran conscientes de que tales argumentos no eran demostraciones. Según Knuth (2002), es posible que los profesores de matemáticas tengan diferentes tipos de convicción, tales como la convicción matemática o la convicción personal o psicológica.

De los cinco argumentos matemáticos propuestos como demostraciones de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos en el cuestionario 4, el argumento 3 fue considerado como el más convincente por los profesores de matemáticas en formación inicial. Dicho argumento es el que tradicionalmente se presenta a los sujetos de investigación en diferentes cursos de la carrera y es el que se recomienda emplear a los profesores en el programa de estudios de matemática en la educación secundaria costarricense. Es posible que la familiaridad de los sujetos de investigación con dicho argumento influyera en su escogencia, sin embargo, la gran mayoría brindaron otras razones diferentes a esta.

Los argumentos 1 y 2 fueron los que más sujetos de investigación eligieron como los menos convincentes. El hecho de que solo siete sujetos eligieran al argumento 2 como el menos convincente sugiere que los profesores pueden basar su convicción en otros aspectos diferentes a la corrección lógico-matemática. Es decir, si la validez lógico-matemática hubiese sido el único criterio de elección, sería esperable que los 19 sujetos escogieran al argumento 2 como el menos convincente por no corresponder a una demostración de la irracionalidad de raíz cuadrada de dos. Aunque el objetivo de nuestra investigación no era estudiar las características de los argumentos menos convincentes, hemos considerado este hecho digno de mención y como un elemento a considerarse en la formación inicial de los profesores de matemáticas.

En cuanto a las seis características de los argumentos más convincentes consideradas en nuestro estudio, hemos apreciado que su ordenación por la cantidad de menciones, es: I *(4) la validez del argumento*, II (6) *la claridad del argumento* y III *(5) la simplicidad matemática del argumento*. Las restantes características, *(1) el uso de elementos concretos en el argumento*, *(2) la familiaridad del argumento* y *(3) la forma ritual del argumento*, tuvieron muy pocas menciones. Por lo tanto, la mayoría de los sujetos encuentran a un argumento matemático convincente debido al uso de elementos lógicos o matemáticos correctos, porque las ideas planteadas se comprenden de manera clara y sencilla y además porque se emplean elementos matemáticos simples y básicos que facilitan la compresión del argumento.

Las características de los argumentos matemáticos a las que la mayoría de sujetos de investigación hicieron referencia en nuestro estudio están relacionadas más con el fondo que con la forma del argumento. Este resultado difiere de lo hallado por Knuth (2002) en su investigación, pues según este autor las características de los argumentos que los profesores de matemáticas consideraron más convincentes en gran parte se relacionaban más con la forma que con el fondo, es decir, que los profesores se referían a cualidades relacionadas con la forma de un argumento: características del argumento, la familiaridad del profesor con el argumento, la cantidad de detalles proporcionados por el argumento o el método particular utilizado al construir el argumento. Para buscar una posible explicación de esta diferencia destacamos que en nuestro estudio los sujetos de investigación eran profesores de matemáticas en formación inicial, por lo tanto, posiblemente el componente matemático tiene mayor importancia y relevancia en su convicción mientras que en el estudio de Knuth (2002) los 16 profesores participantes tenían una experiencia laboral entre los 3 a 20 años por lo que es posible que consideren otros factores, además de los aspectos lógico-matemáticos.

Existe consenso y un amplio reconocimiento a nivel internacional sobre el papel de la demostración matemática en la formación de los estudiantes en todos los niveles educativos (Cabassut et al., 2012; Mariotti, 2006; Stylianides, Stylianides y Weber, 2017). En algunas ocasiones, como parte del desempeño profesional de los profesores de matemáticas deben promover en sus alumnos procesos de razonamiento y argumentación para que comprendan la manera en la que esta actividad se lleva a cabo en la disciplina matemática, los orígenes y las conexiones del conocimiento matemático y nuevos métodos para resolver problemas (Durand-Guerrier et al., 2012a; Stylianides et al., 2017; Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki-Landman, 2012). Esto implica que el profesor tenga que plantear tareas a sus estudiantes en las que deban realizar exploraciones, validar e interpretar resultados que origine la necesidad de realizar demostraciones (Durand-Guerrier et al., 2012a; Zaslavsky et al., 2012).

Lo anterior sugiere que la demostración matemática debe formar parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, sin embargo, consideramos que las características de los argumentos más convincentes para los profesores de matemáticas pueden tener una influencia importante en su conocimiento y en la forma en la que aborde la enseñanza de este tema en la clase de matemáticas, por lo tanto, merece especial atención en futuras investigaciones como en la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas.

5.5 APORTES DE LA INVESTIGACIÓN Y LÍNEAS FUTURAS

El estudio sobre el conocimiento del profesor es tema de investigación desde hace tiempo y cobró más relevancia en la década de 1980 (Ponte y Chapman, 2006) con los trabajos pioneros de Elbaz (1981) y Shulman (1986). En el caso del profesor de matemáticas, algunos investigadores han planteado modelos analíticos como el *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* por Ball y colaboradores (Ball, Thames y Phelps, 2008) y más recientemente el *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* por Carrillo y colaboradores en la Universidad de Huelva (Carrillo et al., 2018).

En este tipo de modelos, se suelen reconocer dos dimensiones: el conocimiento del contenido a enseñar y el conocimiento didáctico del contenido a enseñar. Sin embargo, recientemente se ha visto la necesidad y la relevancia de considerar dentro del estudio del conocimiento matemático, una dimensión sobre el quehacer matemático, es decir, el conocimiento sobre las matemáticas mismas y su funcionamiento (Carrillo et al., 2018; Flores-Medrano et al., 2016). El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)* ha considerado dentro del dominio del conocimiento matemático un subdominio sobre la práctica matemática y sus autores se encuentran actualmente precisando la categorización del mismo (Carrillo et al., 2018).

A pesar de la complejidad de caracterizar el subdominio de la práctica matemática, existen consenso en que el conocimiento sobre la demostración matemática forma parte de tales categorías (Carrillo et al., 2018). En este sentido, consideramos que este trabajo hace un aporte a la investigación sobre el conocimiento de la demostración en profesores de matemáticas, concretamente en los siguientes aspectos:

1. La realización de un análisis conceptual sobre la demostración que incluye los aspectos históricos de la demostración en Matemáticas, el concepto, los tipos de demostraciones en matemáticas y las funciones atribuidas. Este análisis podría servir de insumo para la formulación de marcos teóricos en investigaciones relacionadas con este concepto.

2. La propuesta de componentes y subcomponentes para el estudio del conocimiento sobre la demostración matemática planteados en el capítulo 1, en el apartado 1.1.5 y en el capítulo 2, específicamente en el apartado 2.3. Estos elementos complementan las categorías de indicadores para la categorización de la demostración en el subdominio de la práctica matemática en el *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)*.

3. La propuesta de categorías de análisis e indicadores de conocimiento para el estudio del conocimiento de los profesores de matemáticas sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración, en la *validez lógica* y sobre los aspectos matemáticos en la *validez matemática*. Consideramos que estas categorías e indicadores de conocimiento favorecen un estudio más analítico de estos conocimientos.

4. La propuesta de categorías de análisis para el estudio de las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los profesores. Como hemos apreciado, la convicción tiene aristas más complejas, debido a que pueden intervenir elementos personales, sin embargo, su estudio es relevante ya que los elementos de convicción pueden tener influencia en el estudio del conocimiento sobre la demostración.

5. Los instrumentos para la recolección de la información diseñados en esta investigación, podrían ser utilizados en futuras investigaciones, tanto en su aplicación directa o como una guía en la construcción de instrumentos similares.

En cuanto a la formación de profesores de matemáticas, los resultados de esta investigación muestran un amplio conocimiento de los futuros profesores costarricenses examinados, aunque marcan aspectos que pueden ser considerados en el planteamiento de estrategias metodológicas para el abordaje de la demostración en el plan de estudios de la carrera de enseñanza de la matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica. Igualmente, las apreciaciones pueden influir sobre otros planes de formación inicial y en propuestas de formación continua.

Esta investigación se ha delimitado al estudio del conocimiento matemático sobre la demostración, específicamente sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos. Además, se tomó en cuenta la convicción de un argumento matemático, siempre considerando el grupo de profesores de matemáticas en formación inicial que ha respondido a los cuestionarios. Por lo tanto, consideramos que quedan abiertas muchas líneas de investigación tales como:

1. El análisis de las respuestas emitidas por los sujetos, realizando un estudio de las características de cada uno, para llegar a obtener tipos de conocimiento, según las respuestas completas de cada sujeto. Este estudio puede aprovechar los datos actuales.
2. El estudio del conocimiento de los profesores de matemáticas sobre otros componentes matemáticos no considerados en este trabajo tales como: *el concepto de demostración* y las *funciones atribuidas* a las demostraciones en las Matemáticas y en las Matemáticas Escolares.
3. El estudio del conocimiento de los profesores de matemáticas sobre el componente *didáctico específico para la enseñanza de la demostración* que refiere al conocimiento del contenido; de los alumnos y particularmente de las concepciones de estos sobre la demostración; de la enseñanza; del plan de estudios; de la propuesta de tareas apropiadas para favorecer el desarrollo de la demostración entre otros.
4. La construcción de instrumentos, categorías de análisis e indicadores de conocimientos para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas sobre los aspectos señalados en los dos puntos anteriores.
5. El diseño y la implementación de acciones formativas para profesores de matemáticas, tanto en la formación inicial como en servicio, orientadas a fortalecer el conocimiento especializado de la demostración matemática para coadyuvar en su desempeño profesional.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A

Alcolea, J. (2007). Razonamientos no rigurosos y demostraciones asistidas por ordenador. *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía, 12*. doi: http://dx.doi.org/10.24310/Contrastescontrastes.v12i0.1432

Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, *33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA 14*(2), 85-117.

Alvar, M. (1998). Diccionario ideológico de la lengua española. España, Barcelona: Biblograf, S. A.

Arnal, A. & Oller, A. (2017). Teacher Training and Mathematical Proof. Exploratory Study and Implications. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 135-157. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n57/0103-636X-bolema-31-57-0135.pdf

Ayalon, M. & Even, R. (2008). Deductive reasoning: In the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 235-247.

B

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59(*5), 398-407.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (p. 200). una empressa docente. Colombia, Bogotá: Editorial de la Universidad de los Andes. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document

Barrantes, H. (2001). *Introducción a la matemática.* Costa Rica, San José. EUNED.

Bartle, R. y Sherbert, D. (2004). *Introdución al análisis matemático de una variable.* México, Ciudad de México. Editorial Limusa, S.A. de C.V.

Bryman, A. (2012). *Social research methods,4th Edition*. Oxford: Oxford University Press.

Buchbinder, O. & McCrone, S. (2018). Taking proof into secondary classrooms–supporting future mathematics teachers. In T.E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

C

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. & Morselli, F. (2012). Conceptions of proof–In research and teaching. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Springer, Dordrecht: Doi: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. Á. & Flores, P. (2013). Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. *Proceedings of the CERME, 8*, 2976-2984.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Chambadal, L. (1976). *Diccionario de las matemáticas modernas*. Francia, Paris: Larousse.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education (sixth edition)*. London: Routledge.

Comte-Sponville, A. (2005). *Diccionario filosófico*. España, Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S.A.

Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa, 8(3), 287-317. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/335/33508304.pdf

Crespo, C., Farfán, R. y Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12*(1), 29-66. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362009000100003&script=sci_arttext&tlng=en

Crespo, C., Farfán, R. y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *13*(3), 283-306. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362010000300003

Crespo, C. y Ponteville, C. (2005). Las funciones de la demostración en el aula de matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*, 307-312. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/5954/1/CrespoFuncionesAlme2005.pdf

D

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30.

De Villiers, M. (2009). The future of secondary school geometry. *Colección Digital Eudoxus*, *1*(2).

Diccionario ilustrado Océano de la lengua española. (1994). España, Barcelona: OCEANO.

Domingues, H. (2002). A demonstração ao longo dos séculos. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *15*(18), 55-67.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S. & Tanguay, D. (2012a). Argumentation and proof in the mathematics classroom. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-367). Dordrecht: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-94-007-2129-6

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S. & Tanguay, D. (2012b). Examining the role of logic in teaching proof. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). Dordrecht: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-94-007-2129-6

E

Elbaz, F. (1983) *Teacher Thinking. A Study of Practica! Knowledge*. London, Croom Helm.

Escudero, A. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). En J. Carrillo, L. Contreras, y Montes, M (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* (pp. 49-54). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12509/Reflexionando_sobre_el_conocimiento.pdf?sequence=2

Escudero, D., Climent, N. y Vasco, D. (2015). Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). En J. Carrillo, L. Contreras, y Montes, M (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* (pp. 42-48). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12509/Reflexionando_sobre_el_conocimiento.pdf?sequence=2

Escudero, D., Contreras, L. y Vasco, D. (2015). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). En J. Carrillo, L. Contreras, y Montes, M (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* (pp. 35-41). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12509/Reflexionando_sobre_el_conocimiento.pdf?sequence=2

Espinoza, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *21*(3), 301–324.

F

Flores, Á. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Flores-Medrano, E. (2015). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En Carrillo, J., Contreras, L y Montes, M (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* 2, (pp. 30-34). Huelva, España.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L., Muñoz-Catalán, M. y Liñán, M. (2016). El Papel del MTSK como Modelo de Conocimiento del Profesor en las Interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 204-221. Doi 10.1590/1980-4415v30n54a10.

Furinghetti, F. & Morselli, F. (2009). Teachers' beliefs and the teaching of proof. In F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 166-171). Recuperado de http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_1.pdf#page=201

G

Garrido, M. (1991). *Lógica simbólica*. España, Madrid: Editorial Tecnos.

Godino, J. D. y Recio, Á. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *19*(3), 405-414. Recuperado de http://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/21763/21597

Godino, J.D. Gonzato, M. y Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

Góngora, E. (1983). *Introducción al pensamiento lógico matemático*. Costa Rica, San José. EUNED.

H

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the Learning of mathematics*, *15*(3), 42-49. Disponible en https://pdfs.semanticscholar.org/eb5e/a4b7982e8c6ab38d8e1d50c38e6f21675e24.pdf

Hanna, G. (2002). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Springer. Doi https://doi. org/10.1007/978-94-007-2129-6_1

Hanna, G. (2014). The width of a proof. PNA, 9(1), 29-39. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/33232/1/Hanna2014PNA9(1)Thewidth.pdf

Hanna, G. & De Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1-10). Dordrecht: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-94-007-2129-6

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence. RI: American Mathematical Society. Recuperado de http://math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/Students'%20Proof%20Schemes.pdf

Herbst, P. (2000). ¿A dónde va la investigación sobre la prueba? En N. Balacheff (Ed.), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (pp. 191-197). Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). Metodología de la Investigación. 6ta edición McGRAW-HILL. *Educación, México*.

I

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación matemática*, *9*(2), 65-104. Recuperado de http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol9/2/06Ortega.pdf

K

Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, *64*(5), 291-314.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology*. California, United States of America: Sage publications.

L

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.

Lin, F. L., Yang, K. L., Lo, J. J., Tsamir, P., Tirosh, D. & Stylianides, G. (2012). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 327-346). Dordrecht: Springer. Doi https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_14

Liñán, M., Contreras, L. y Barrera, V. (2015). Conocimiento de los Temas (KOT). En J. Carrillo, L. Contreras, y Montes, M (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* (pp. 12-20). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12509/Reflexionando_sobre_el_conocimiento.pdf?sequence=2

Lo Cascio, V. (1998). *Gramática de la argumentación: estrategias y estructuras*. España, Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Lo, J. & McCrory, R. (2009). Proof and proving in mathematics for prospective elementary teachers. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education Vol. 2* (pp. 41-46). Dordrecht: Springer.

Lucena, N. (2005). *Diccionario esencial de Matemáticas*. España, Barcelona: SPES Editorial, S.L.

M

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics* education (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publisher.

Martí, I. (2003). *Diccionario enciclopédico de educación*. España, Barcelona: Grupo Editorial Ceac, S.A.

Martínez-Recio, A. (1999). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. Costa Rica, San José: autor Recuperado de https://mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Montes, M. A. y Climent, N. (2015). Conocimiento de la estructura matemática (KSM). En J. Carrillo, L. Contreras, y Montes, M (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* (pp. 21-29). Recuperado de http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12509/Reflexionando_sobre_el_conocimiento.pdf?sequence=2

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *2*(1), 101-121.

Murillo, M. (2010). *Introducción a la matemática discreta*. Costa Rica, Cartago. Editorial Tecnológica de Costa Rica.

N

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

P

Patterson, C. (1950). *Los principios del pensamiento correcto: lógica.* Argentina, Buenos Aires: Editorial Americalee.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational studies in mathematics*, *66*(1). Disponible en https://www.researchgate.net/profile/Bettina_Pedemonte/publication/225469822_How_can_the_relationship_between_argumentation_and_proof_be_analysed/links/53fe75170cf21edafd1512a1.pdf

Pietropaolo, R. & Campos, T. (2009). Considerations about Proof in School Mathematics and in Teacher Development Programmes. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education Vol. 2*. (pp. 142-147). Dordrecht: Springer.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future*. (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publisher.

Popper, K. (2000). *La sociedad abierta y sus enemigos*. Barcelona: Paidós.

R

Ramos, M., Moreno, G. y Marmolejo, E. (2015). Concepciones de Profesores de Bachillerato sobre la Demostración Matemática en contexto escolar. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 14*. Recuperado de http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1046/428

Real Academia Española. (2006). *Diccionario esencial de la lengua española*. España, Madrid: Espasa Calpe. Recuperado de http://www.rae.es/

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática.* España: Universidad de Granada. Recuperado de http://funes. uniandes.edu.co/523/1/RicoL01-2593.PDF

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.1-22). Granada: Comares, S. L.

Roberts, C. (2010). *Introduction to mathematical proofs: a transition*. USA, New York: Chapman y Hall/CRC.

Rodríguez, J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Revista del Instituto de Investigaciones Educativas, 7*(12), 23-40.

Romero, I. y Rico, L. (1996). Sobre la introducción del concepto de irracionalidad en enseñanza secundaria: El caso de $\sqrt{2}$. *Educación Matemática, 8*(02), 18-32.

Ruiz, Á. (2003). Historia y filosofía de las matemáticas. *San José: EUNED*.

S

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación: fundamentos y tradiciones.* España: McGraw-Hill.

Schwarz, B. & Kaiser, G. (2009). Professional Competence of Future Mathematics Teachers on Argumentation and Proof and How to Evaluate It. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education Vol. 2* (pp. 190-195). Dordrecht: Springer.

Schön, D. (1992). *La formación del profesional reflexivo.* Barcelona: Paidós. MEC.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge ghrotw in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Silva, J. (2002). Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 15*(18), 68-78.

Stacey, K. (2008). Mathematics for secondary teaching: Four components of discipline knowledge for a changing teacher workforce. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*. *The Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1* (pp. 87-113). Rotterdam: Sense Publisher.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Stylianides, G.J. & Stylianides, A.J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*, 314-352.

Stylianides, A.J., Bieda, K. N. & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In A. Gutiérrez, G.C. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotherham: Sense.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237–266).

Sullivan, P. (2008). Knowledge for Teaching Mathematics: An Introduction. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching* Development. *The Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1* (pp. 1-9). Rotterdam: Sense Publisher.

Sullivan, P. & Woods, T. (Eds.) (2008a). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Rotterdam: Sense Publisher.

Sullivan, P. & Wood, T. (Eds.) (2008b). *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching an Teaching Development*. *The Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 1* (pp. 1-9). Rotterdam: Sense Publisher.

T

Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D. & Dreyfus, T. (2009). Teachers' Knowledge of Students' Correct and Incorrect Proof Constructions. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education Vol. 2*. (pp. 214-219). Dordrecht: Springer.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M. & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-49). Springer, Dordrecht.

Toulmin, S. (1958). *The use of arguments*. Cambridge: University Press.

Tymoczko, T. (1986). *New Direction in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkauser.

V

Valverde, L. (2012). *Introducción al razonamiento lógico matemático*. Costa Rica, San José: Editorial UCR.

Vasco, D. y Climent N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA*, *12*(3), 129-146.

Vega, L. (2012a). Compendio de lógica, argumentación y retórica. En L. Vega. y P. Olmos (Eds), *Argumentación*. (p.66-74). Madrid: Editorial Trotta, S.A.

Vega, L. (2012b). Compendio de lógica, argumentación y retórica. En L. Vega. y P. Olmos (Eds), *Demostración*. (p.182-184). Madrid: Editorial Trotta, S.A.

Vera, F. (1960). *Matemática: lexicón kapelusz*. Argentina, Buenos Aires: Editorial Kapeluz.

Vicario, V. y Carrillo, J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática: el caso de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos y las funciones de la demostración. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática*. *Noveno Simposio de la SEIEM*. (pp. 145-152). Córdoba, Universidad de Córdoba.

Viseu, F. Menezes, L., Fernandes, J. A., Gomes, A., & Martins, P. M. (2017). Conceções de Professores do Ensino Básico sobre a Prova Matemática: influência da experiência profissional. *Bolema*, *31*(57), 430-453.

Z

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I. & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229). Springer, Dordrecht.

ANEXOS

ANEXO 1
CUESTIONARIO 1

FASE 1
CUESTIONARIO 1

UNIVERSIDAD DE GRANADA

I PARTE. INFORMACIÓN GENERAL

Este cuestionario, no constituye una prueba o un examen. Se ha elaborado con el propósito de recoger información sobre sus conocimientos como profesor de matemática en formación inicial, en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, sobre la naturaleza de la demostración matemática.

Forma parte de una investigación sobre el conocimiento de la práctica matemática de la demostración que manifiestan profesores de matemática en formación inicial. La información será tratada con la mayor confidencialidad y responsabilidad. Por favor, responda a cada cuestión de forma individual, con base en sus conocimientos matemáticos con creatividad e interés en los espacios destinados para tal fin. Se solicita que sus respuestas sean lo más claras, amplias y explicativas posibles.

Muchas gracias de antemano por su valiosa colaboración.

Nombre: ____

Número de teléfono: ____________________________________

Correo electrónico: _____________________________________

Edad: ____

Sexo: ____

Nombre del curso en que se aplica el cuestionario 1: ____________________

Se encuentra ejerciendo como profesor de matemática en alguna institución pública o privada (responda sí o no): ______________________________

En caso afirmativo, indique el nombre de la institución y las labores que desempeña: ____

____

____

____

____

II PARTE. CONSIDERACIONES GENERALES

En este cuestionario se entiende por *proposición matemática* a un enunciado, verbal o simbólico, que puede catalogarse como falso o verdadero. Se llama *propiedad* a una colección de palabras y símbolos llamados variables, que se transforman en proposiciones cuando las variables se sustituyen por ciertos objetos de un conjunto que se llama el *dominio* o *universo de discurso* de la propiedad. Por ejemplo, el enunciado que afirma que *todo número real satisface que la suma de su cuadrado y uno es positiva*, es una proposición matemática que se puede expresar de forma simbólica así: $\forall x \in \mathbb{R} \left(\left(x^2 + 1\right) > 0\right)$. En este caso la *propiedad* presente en la proposición se puede escribir como $P(x): \left(x^2 + 1\right) > 0$ con $x \in \mathbb{R}$. Además, el universo de discurso es el conjunto de los números reales denotado $\mathbb{R}$.

El cuestionario consta de seis tareas. En cada una de ellas se presentan de manera verbal y simbólica, proposiciones matemáticas genéricas. En la manera simbólica se hace uso del cuantificador universal $(\forall)$, del cuantificador existencial $(\exists)$ y de las conectivas lógicas: implicación $(\Rightarrow)$, disyunción $(\vee)$, conjunción $(\wedge)$, y doble implicación $(\Leftrightarrow)$. En cada caso, asuma que la proposición matemática presentada es verdadera. Además, *U* representa al dominio o universo de discurso.

III PARTE. FORMAS DE PROCEDER EN UNA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

El cuestionario se compone de seis tareas. Para cada una realice lo siguiente:

1. Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de la proposición genérica brindada.

2. Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado. Se sugiere utilizar proposiciones y demostraciones sencillas de las matemáticas escolares, es decir, de temas como álgebra, números, geometría, relaciones y funciones que se abordan en la educación secundaria costarricense.

TAREA 1

Forma verbal: *Todos los elementos de un conjunto* U *satisfacen una propiedad* $P(x)$.

Forma simbólica: $\forall x \in U\left(P(x) \right)$.

1.1 Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de esta proposición genérica.

1.2 Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado.

TAREA 2

Forma verbal: *Al menos un elemento de un conjunto* U *satisface una propiedad* $P(x)$.

Forma simbólica: $\exists x \in U\left(P(x) \right)$.

2.1 Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de esta proposición genérica.

2.2 Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado.

TAREA 3

Forma verbal: *Todos los elementos de un conjunto* U *cumplen que, si satisfacen una propiedad* $P(x)$ *entonces satisfacen una propiedad* $Q(x)$.

Forma simbólica: $\forall x \in U \left[P(x) \Rightarrow Q(x) \right]$.

3.1 Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de esta proposición genérica.

3.2 Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado.

TAREA 4

Forma verbal: *Todos los elementos de un conjunto* U *satisfacen una propiedad* $P(x)$ *o satisfacen una propiedad* $Q(x)$.

Forma simbólica: $\forall x \in U \left[P(x) \vee Q(x) \right]$.

4.1 Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de esta proposición genérica.

4.2 Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado.

TAREA 5

Forma verbal: *Todos los elementos de un conjunto* U *satisfacen de manera simultánea una propiedad* $P(x)$ *y una propiedad* $Q(x)$.

Forma simbólica: $\forall x \in U \left[P(x) \wedge Q(x) \right]$.

5.1 Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de esta proposición genérica.

5.2 Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado.

TAREA 6

Forma verbal: *Todos los elementos de un conjunto* U *satisfacen una propiedad* $P(x)$ *siempre y cuando satisfacen una propiedad* $Q(x)$.

Forma simbólica: $\forall x \in U \left[P(x) \Leftrightarrow Q(x) \right]$.

6.1 Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de esta proposición genérica.

6.2 Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado.

ANEXO 2
CUESTIONARIO 2

FASE 1

CUESTIONARIO 2

UNIVERSIDAD DE GRANADA

I PARTE. INFORMACIÓN GENERAL

Este cuestionario, no constituye una prueba o un examen. Se ha elaborado con el propósito de recoger información sobre sus conocimientos como profesor de matemática en formación inicial, en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, sobre la naturaleza de la demostración matemática.

Forma parte de una investigación sobre el conocimiento de la práctica matemática de la demostración que manifiestan profesores de matemática en formación inicial. La información será tratada con la mayor confidencialidad y responsabilidad. Por favor, responda a cada cuestión de forma individual, con base en sus conocimientos matemáticos con creatividad e interés en los espacios destinados para tal fin. Se solicita que sus respuestas sean lo más claras, amplias y explicativas posibles.

Muchas gracias de antemano por su valiosa colaboración.

Nombre: ____

Número de teléfono: ____

Correo electrónico: ____

Edad: ____

Sexo: ____

Nombre del curso en que se aplica el cuestionario 2: ______________________________

Se encuentra ejerciendo como profesor de matemática en alguna institución pública o privada (responda sí o no): ____

En caso afirmativo indique el nombre de la institución y las labores que desempeña en ella:

____

____

____

____

II PARTE. CONSIDERACIONES GENERALES

En este cuestionario se entiende por *proposición matemática* a un enunciado, verbal o simbólico, que puede catalogarse como falso o verdadero. Se llama *propiedad* a una colección de palabras y símbolos llamados variables, que se transforman en proposiciones cuando las variables se sustituyen por ciertos objetos de un conjunto que se llama el *dominio* o *universo de discurso* de la propiedad. Por ejemplo, el enunciado que afirma que *todo número real satisface que la suma de su cuadrado y uno es positiva*, es una proposición matemática que se puede expresar de forma simbólica así: $\forall x \in \mathbb{R}\left(\left(x^{2}+1\right)>0\right)$. En este caso la *propiedad* presente en la proposición se puede escribir como $P(x):\left(x^{2}+1\right)>0$ con $x \in \mathbb{R}$. Además, el universo de discurso es el conjunto de los números reales denotado $\mathbb{R}$.

El cuestionario consta de cuatro tareas. En cada una de ellas se presenta un argumento matemático para garantizar la validez de la proposición matemática ***P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.*** Asuma que dicha proposición es verdadera.

III PARTE. EVALUACIÓN DE ARGUMENTOS MATEMÁTICOS

El cuestionario consta de cuatro tareas. Para cada una de ellas realice lo siguiente.

1. Marque con una equis (X), en el espacio correspondiente, si el argumento corresponde o no a una demostración matemática de la proposición ***P***.

2. Explique, de la manera más amplia posible, la escogencia realizada sobre cada argumento. En cada uno de ellos aparece la proposición ***P*** para mayor comodidad.

TAREA 1

P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

Considere el número real $\left(2-\sqrt{3}\right)$. Es claro que $\left(2-\sqrt{3}\right)>0$.

Además, $\left(2-\sqrt{3}\right)+\dfrac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{4-4\sqrt{3}+3+1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}}=4.$

Puesto que es verdadero que $4\geq 2$ entonces se garantiza la validez de la proposición ***P***.

¿El argumento brindado en la tarea 1 corresponde a una demostración matemática de la proposición ***P***?

Sí ______ **NO ______**

Justificación

TAREA 2

P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

Considere un número real cualquiera x. Supóngase verdadero que la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos, es decir que $\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq 2$.

Luego, $\frac{x^2+1}{x}\geq 2$ y de esta manera se tiene que $\frac{x^2+1}{x}-2\geq 0$.

Al efectuar la resta en el lado izquierdo de la desigualdad se obtiene que $\frac{x^2+1-2x}{x}\geq 0$ y ordenando y factorizando el numerador de la fracción se sigue que $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$.

Como $\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$ es cierto y además, $(x-1)^2\geq 0$ también es verdadero, se concluye que $x>0$. En consecuencia la proposición ***P*** es verdadera.

¿El argumento brindado en la tarea 2 corresponde a una demostración matemática de la proposición ***P***?

Sí ______ **NO ______**

Justificación

TAREA 3

P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

Considere un número real cualquiera x. Supóngase verdadero que el número es positivo, es decir que $x > 0$.

Se debe garantizar que la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos, es decir que $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$.

En efecto, $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$.

Como $(x-1)^2 \geq 0$ es verdadera y además, $x > 0$ entonces es cierto que $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$.

De este modo, es verdadero que $\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) \geq 0$ y así necesariamente se cumple que $\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2$ es verdadero, como se quería demostrar. En consecuencia, la proposición ***P*** es verdadera.

¿El argumento brindado en la tarea 3 corresponde a una demostración matemática de la proposición ***P***?

Sí ______ **NO ______**

Justificación

TAREA 4

P: Cualquier número real satisface que, si es positivo, entonces la suma de este y su inverso multiplicativo es mayor o igual a dos.

Supóngase que existe un número real x que satisface que es positivo y que la suma de este y su inverso multiplicativo es menor a dos, es decir que, $x > 0$ y $\left(x + \frac{1}{x}\right) < 2$.

Luego se tiene que $\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) < 0$.

Por otro lado $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$.

En consecuencia $\frac{(x-1)^2}{x} < 0$ y como $x > 0$ necesariamente debe cumplirse que $(x-1)^2 < 0$.

Puesto que es verdadero que $(x-1)^2 \geq 0$ entonces la proposición $\left((x-1)^2 < 0 \wedge (x-1)^2 \geq 0\right)$ es verdadera, no obstante, se tiene certeza de que es falsa. En consecuencia, la proposición ***P*** es verdadera.

¿El argumento brindado en la tarea 4 corresponde a una demostración matemática de la proposición ***P***?

Sí ______ **NO ______**

Justificación

ANEXO 3
CUESTIONARIO 3

FASE 2
CUESTIONARIO 3

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

I PARTE. INFORMACIÓN GENERAL

Este cuestionario, no constituye una prueba o un examen. Se ha elaborado con el propósito de recoger información sobre sus conocimientos como profesor de matemática en formación inicial, en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, sobre la naturaleza de la demostración matemática.

Forma parte de una investigación sobre el conocimiento de la práctica matemática de la demostración que manifiestan profesores de matemática en formación inicial. La información será tratada con la mayor confidencialidad y responsabilidad. Por favor, responda a cada cuestión de forma individual, con base en sus conocimientos matemáticos con creatividad e interés en los espacios destinados para tal fin. Se solicita que sus respuestas sean lo más claras, amplias y explicativas posibles.

Muchas gracias de antemano por su valiosa colaboración.

Nombre: ____

Número de teléfono: ____

Correo electrónico: ____

Edad: ____

Sexo: ____

Nombre del curso en que se aplica el cuestionario 3: ______________________________

Se encuentra ejerciendo como profesor de matemática en alguna institución pública o privada (responda sí o no): ____

En caso afirmativo indique el nombre de la institución y las labores que desempeña en ella:

____

____

____

____

II PARTE. CONSIDERACIONES GENERALES

En este cuestionario se entiende por *proposición matemática* a un enunciado, verbal o simbólico, que puede catalogarse como falso o verdadero. El cuestionario consta de cuatro tareas, en cada una de ellas se presenta un argumento matemático para garantizar la validez de una proposición matemática dada. En cada caso debe:

(1) indicar marcando con una equis (X) si el argumento brindado en la tarea corresponde o no a una demostración matemática de la proposición dada,

(2) explicar de la manera más amplia la escogencia mencionada anteriormente y

(3) en el caso de que el argumento dado no corresponda a una demostración matemática de la proposición dada, se debe indicar cuál o cuáles modificaciones haría usted al argumento para que lo sea.

III PARTE. TAREAS

TAREA 1

Proposición matemática P1: *Si* $a,b,c\in\mathbb{R}$ son tales que $a\neq 0$ y $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$, entonces $\exists x\in\mathbb{R}\ \left(ax^2+bx+c=0\right)$.

ARGUMENTO MATEMÁTICO PARA GARANTIZAR LA VALIDEZ DE LA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA P1

Supóngase que se tienen $a,b,c\in\mathbb{R}$ tales que $a\neq 0$ y $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$. Se debe demostrar que $\exists x\in\mathbb{R}\ \left(ax^2+bx+c=0\right)$. En efecto, considérese el número real $x=\frac{-b}{2a}$. Luego $ax^2+bx+c=a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+c=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}$. Por hipótesis se tiene que $\left(b^2-4ac\right)\geq 0$ por lo tanto se puede suponer en particular que $\left(b^2-4ac\right)=0$ y de esta manera $ax^2+bx+c=\frac{-\left(b^2-4ac\right)}{4a}=\frac{-0}{4a}=0$. Luego el número real $x=\frac{-b}{2a}$ satisface la existencia.

1.1 Indique marcando con una equis (X) si el argumento brindado en la tarea 1 corresponde a una demostración matemática de la proposición **P1.**

Sí ______ **NO ______**

1.2 Explique de la manera más amplia la escogencia realizada anteriormente.

1.3 En el caso de que el argumento dado no corresponde a una demostración matemática de la proposición **P1**, indique cuál o cuáles modificaciones haría al argumento para que sea una demostración matemática de la proposición **P1.**

TAREA 2

Proposición matemática P2: *Si* $m, n \in \mathbb{Z}$ son tales que m divide a n y viceversa, entonces $|m| = |n|$.

ARGUMENTO MATEMÁTICO PARA GARANTIZAR LA VALIDEZ DE LA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA P2

Supóngase que se tienen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que m divide a n y viceversa. Se debe demostrar que $|m| = |n|$. En efecto, como m divide a n y viceversa, entonces existen dos números enteros p, q tales que (1) $m = n \cdot p$ y (2) $n = m \cdot q$. Sustituyendo (1) en (2) se sigue que $n = (n \cdot p) \cdot q$ y de este modo multiplicando a ambos lados de la igualdad por n^{-1} se tiene que $p \cdot q = 1$. Como p y q son números enteros se tiene que $p = q = 1$ o $p = q = -1$. Si $p = q = 1$ entonces sustituyendo en (1) se tiene que $m = n$ y en consecuencia $|m| = |n|$. Si $p = q = -1$ entonces sustituyendo en (1) se tiene que $m = -n$ y en consecuencia $|m| = |n|$. En cualquier caso se garantiza que $|m| = |n|$.

2.1 Indique marcando con una equis (X) si el argumento brindado en la tarea 2 corresponde a una demostración matemática de la proposición **P2.**

Sí ______ **NO ______**

2.2 Explique de la manera más amplia la escogencia realizada anteriormente.

2.3 En el caso de que el argumento dado no corresponde a una demostración matemática de la proposición **P2**, indique cuál o cuáles modificaciones haría al argumento para que sea una demostración matemática de la proposición **P2.**

TAREA 3

Proposición matemática P3: *Si* $m,n \in \mathbb{Z}$ son tales que m y n son números impares, entonces $m+n$ es un número par.

ARGUMENTO MATEMÁTICO PARA GARANTIZAR LA VALIDEZ DE LA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA P3

Supóngase que se tienen $m,n \in \mathbb{Z}$ tales que tales que m y n son números impares. Se debe demostrar que $m+n$ es un número par. En efecto, como m y n son números impares, entonces de acuerdo a la definición de números impares se sigue que existen dos números enteros p,q tales que (1) $2m+1=p$ y (2) $2n+1=q$. Luego $(2m+1)+(2n+1)=p+q$ y de esta manera se sigue que $2m+2n+2=p+q$, es decir que, $2(m+n)=p+q-2$. Sea $j=p+q-2$ y como $p,q,2 \in \mathbb{Z}$ entonces $j \in \mathbb{Z}$. De esta manera $2(m+n)=j$ con $j \in \mathbb{Z}$ lo que según la definición de número par, garantiza que el número $m+n$ es un número par.

3.1 Indique marcando con una equis (X) si el argumento brindado en la tarea 3 corresponde a una demostración matemática de la proposición **P3.**

Sí ______ **NO ______**

3.2 Explique de la manera más amplia la escogencia realizada anteriormente.

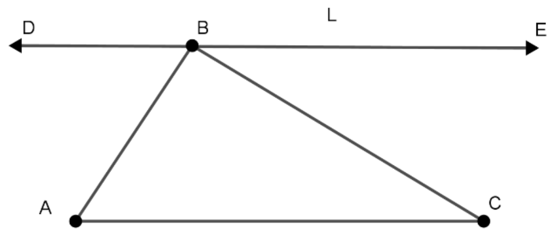
3.3 En el caso de que el argumento dado no corresponde a una demostración matemática de la proposición **P3**, indique cuál o cuáles modificaciones haría al argumento para que sea una demostración matemática de la proposición **P3.**

TAREA 4

Proposición matemática P4: En cualquier triángulo en la geometría euclidiana la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados. Es decir, dado cualquier triángulo ΔABC, se cumple que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$.

ARGUMENTO MATEMÁTICO PARA GARANTIZAR LA VALIDEZ DE LA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA P4

Supóngase que se tiene un triángulo cualquiera ΔABC en la geometría euclidiana. Se debe demostrar que la suma de las medidas de sus ángulos internos es 180 grados, es decir, que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$. En efecto, como el punto B no pertenece a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ entonces, en virtud del postulado de las paralelas, existe y es única la recta L que contiene a B y es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Considérese la siguiente figura en la que se muestra lo anterior:



Sean D y E dos puntos de la recta L tales que $D-B-E$ y los puntos A y D del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{BC}$. Como el punto A está en el interior del ángulo $\angle DBC$, se sigue que $m\angle DBC = m\angle DBA + m\angle ABC$. Además, $m\angle DBC + m\angle CBE = 180^0$, pues los dos ángulos forman un par lineal. De esta manera se tiene que $m\angle DBA + m\angle ABC + m\angle CBE = 180^0$. (*) Por otro lado, $m\angle DBA = m\angle BAC$ pues los ángulos son alternos internos entre paralelas. Además, $m\angle CBE = m\angle BCA$ por ser también alternos internos entre paralelas. Al sustituir en (*) se obtiene que $m\angle BAC + m\angle ABC + m\angle BCA = 180^0$ lo que equivale a $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^0$.

4.1 Indique marcando con una equis (X) si el argumento brindado en la tarea 4 corresponde a una demostración matemática de la proposición **P4.**

Sí ______ **NO ______**

4.2 Explique de la manera más amplia la escogencia realizada anteriormente.

4.3 En el caso de que el argumento dado no corresponde a una demostración matemática de la proposición **P4**, indique cuál o cuáles modificaciones haría al argumento para que sea una demostración matemática de la proposición **P4.**

ANEXO 4
CUESTIONARIO 4

FASE 3
CUESTIONARIO 4

UNIVERSIDAD DE GRANADA

I PARTE. INFORMACIÓN GENERAL

Este cuestionario, no constituye una prueba o un examen. Se ha elaborado con el propósito de recoger información sobre sus conocimientos como profesor de matemática en formación inicial, en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, sobre la convicción de un argumento matemático.

Forma parte de una investigación sobre el conocimiento de la práctica matemática de la demostración que manifiestan profesores de matemática en formación inicial. La información será tratada con la mayor confidencialidad y responsabilidad. Por favor, responda a cada cuestión de forma individual, con base en sus conocimientos matemáticos con creatividad e interés en los espacios destinados para tal fin. Se solicita que sus respuestas sean lo más claras, amplias y explicativas posibles.

Muchas gracias de antemano por su valiosa colaboración.

Nombre: ____

Número de teléfono: ____________________________________

Correo electrónico: _____________________________________

Edad: ____

Sexo: ____

Nombre del curso en que se aplica el cuestionario 4: ________________

Se encuentra ejerciendo como profesor de matemática en alguna institución pública o privada (responda sí o no): ____________________________________

En caso afirmativo, indique el nombre de la institución y las labores que desempeña:

____

____

II PARTE. CONSIDERACIONES GENERALES

La irracionalidad de la raíz cuadrada de dos es un resultado matemático que normalmente se expresa de manera simple diciendo que $\sqrt{2}$ *es un número irracional*.

Se presentan cinco argumentos matemáticos cuyo propósito es garantizar la validez de la proposición matemática ***P:*** $\sqrt{2}$ ***es un número irracional*** y que usted debe analizar detalladamente. Posteriormente se presentan tres tareas en las que debe trabajar:

> ***(1)*** en la primera debe escoger el orden en el que los argumentos le parecen más convincentes,
> ***(2)*** en la segunda debe explicar las razones por las que ha escogido al argumento más convincente y
> ***(3)*** en la tercera debe explicar las razones por las que ha escogido al argumento que le parece menos convincente.

III PARTE. ARGUMENTOS MATEMÁTICOS PARA GARANTIZAR LA VALIDEZ DE LA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA *P:* $\sqrt{2}$ *ES UN NÚMERO IRRACIONAL*

ARGUMENTO 1

Si $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Luego $a^2 = 2b^2$. Se puede hacer una análisis de las posibles terminaciones de los números naturales a^2 y $2b^2$. Para ello, considérese la siguiente tabla en la que se plasman todas las posibilidades:

a	a^2	b	b^2	$2b^2$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	2
2	4	2	4	8
3	9	3	9	8
4	6	4	6	2
5	5	5	5	0
6	6	6	6	2
7	9	7	9	8
8	4	8	4	8
9	1	9	1	2

Como se pude observar en la tabla anterior, las terminaciones del número natural a^2 son 0, 1, 4, 5, 6 y 9; las terminaciones del número $2b^2$ son 0, 2 y 8. Dado que $a^2 = 2b^2$ se sigue que ambos números deben tener las mismas terminaciones, por lo tanto, ambos deben terminar en 0 que es el único dígito en el que coinciden. En tal caso se tiene que a debe terminar en *0* y b debe terminar en *0* o en *5*. Sin embargo, en cualquiera de los dos casos, los números a y b tendrían a 5 como un divisor común, lo que contradice el hecho de que ambos eran primos relativos entre sí. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

ARGUMENTO 2

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^2-2$. Es claro que $f(1)=-1$ y $f(2)=2$. Dado que la función f es continua en $\mathbb{R}$, se tiene en particular, que es continua en el intervalo real $[1,2]$. Por el teorema del valor intermedio de Bolzano se sigue que $\exists c\in\,]1,2[\,(f(c)=0)$ lo que equivale a afirmar que $\exists c\in\,]1,2[\,(c^2=2)$. Esto garantiza $\sqrt{2}$ es un número irracional.

ARGUMENTO 3

Si $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$. Luego $a^2=2b^2$. De lo anterior se deduce que 2 es un divisor de a^2 y puesto que 2 es un número primo, se sigue necesariamente que 2 es un divisor de a, en consecuencia $\exists m\in\mathbb{Z}\,(a=2m)$. Sustituyendo en la igualdad $a^2=2b^2$ se tiene que $(2m)^2=2b^2$ de donde se sigue que $2m^2=b^2$ y en tal caso 2 es un divisor de b^2 y al ser 2 primo se cumple que divide a b. Con base en lo anterior se tiene que 2 es un divisor común de a y b lo cual es imposible, pues ambos números eran primos relativos entre sí. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

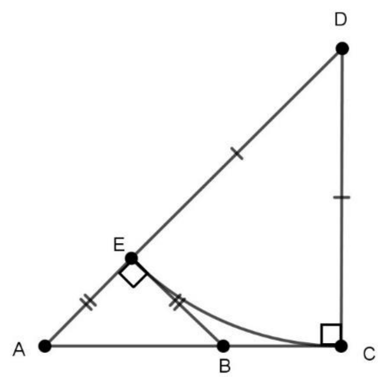
ARGUMENTO 4

Sea S el conjunto $S=\left\{n\in\mathbb{N}:\left(n\sqrt{2}\right)\in\mathbb{N}\right\}$ con $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$. Si el conjunto S no es vacío, se sigue por el principio de la buena ordenación en los números naturales, que S tiene un primer elemento, llámese k. Dado que $\left(\sqrt{2}-1\right)k>0$ se sigue que $\left(k\sqrt{2}-k\right)>0$. Puesto que $k\in S$ se tiene que $\left(k\sqrt{2}\right)\in\mathbb{N}$, por lo tanto, $\left(k\sqrt{2}-k\right)\in\mathbb{N}$. Además, $\left(k\sqrt{2}-k\right)\sqrt{2}=2k-k\sqrt{2}$ y como $\left(2k-k\sqrt{2}\right)\in\mathbb{N}$ se sigue que $\left(k\sqrt{2}-k\right)\in S$ lo cual es imposible pues $\left(k\sqrt{2}-k\right)<k$ y k es el primer elemento de S. Por lo tanto el conjunto S es vacío.

Si $\sqrt{2}$ es un número racional entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$. Luego $b\sqrt{2}=a$ y como $\left(b\sqrt{2}\right)\in\mathbb{N}$ se seguiría que $b\in S$ lo cual es imposible. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

ARGUMENTO 5

Dado un triángulo rectángulo con catetos de medida 1 se cumple, por el teorema de Pitágoras, que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$. Si $\sqrt{2}$ es un número racional, entonces existen dos números naturales a, b primos relativos entre sí tales que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Como $b\sqrt{2} = a$ existe otro triángulo rectángulo ACD de catetos $\overline{DC}$ y $\overline{AC}$ de longitud b e hipotenusa $\overline{AD}$ de medida a como se muestra en la siguiente figura:



Se puede considerar una circunferencia de centro en D y que contenga a los puntos E y C en donde los radios $\overline{DE}$ y $\overline{DC}$ sean de longitud b y el punto E pertenezca al segmento $\overline{AD}$. Por el punto E existe una única recta perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y que interseca a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ en el punto B. Los segmentos $\overline{BE}$ y $\overline{BC}$ son ambos tangentes a la circunferencia de centro D y por lo tanto son congruentes. Como el triángulo AEB es rectángulo isósceles se sigue que la longitud del segmento $\overline{AE}$ es igual a la del segmento $\overline{BE}$, ambos con medida $a-b$. La medida del segmento $\overline{AB}$ es igual a $b-(a-b)$, es decir, $2b-a$.

Se tiene así que el triángulo rectángulo isósceles AEB satisface que la longitud de sus tres lados son números naturales y cada uno de ellos es menor que sus correspondientes en el triángulo original ACD. En el triángulo AEB se puede replicar el proceso realizado y de esta manera existiría otro triángulo rectángulo isósceles en donde sus lados tendrían como longitudes a números naturales menores que los correspondientes en el triángulo AEB. Este proceso se podría continuar de manera infinita lo que generaría una sucesión decreciente infinita de números naturales, lo cual es imposible. Por lo tanto $\sqrt{2}$ es un número irracional.

IV PARTE. TAREAS

TAREA 1

De los cinco argumentos presentados para garantizar la validez de la proposición matemática ***P:*** $\sqrt{2}$ ***es un número irracional*** indique en la siguiente tabla el orden de prioridad en el que le han parecido **más** convincentes. El de **prioridad 1** es el que le ha parecido más convincente y así sucesivamente hasta el de **prioridad 5** que es el que le ha parecido menos convincente. En la columna denominada **Número del argumento**, debe colocar los números **1, 2, 3, 4, y 5** que corresponden a los números de los argumentos matemáticos presentados, de manera que cada uno de ellos **aparezca una sola vez**.

ORDEN DE PRIORIDAD	NÚMERO DEL ARGUMENTO
PRIORIDAD 1	
PRIORIDAD 2	
PRIORIDAD 3	
PRIORIDAD 4	
PRIORIDAD 5	

TAREA 2

Explique de la manera más amplia posible, todas las razones por las que ha escogido al argumento **que le convence más**, es decir, al argumento que ha seleccionado como **PRIORIDAD 1.** En su explicación, incluya las **características** de este argumento, tanto de forma como de fondo, que le hacen más convincente para usted.

TAREA 3

Explique de la manera más amplia posible, todas las razones por las que ha escogido al argumento **que le convence menos**, es decir, al argumento que ha seleccionado como **PRIORIDAD 5.** En su explicación, incluya las **características** de este argumento, tanto de forma como de fondo, que le hacen menos convincente para usted.

ÍNDICE DE ANEXOS DIGITALES

Los siguientes anexos digitales están incluidos en el disco compacto que acompaña a este trabajo.