



ugr

Universidad
de Granada

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Una metodología difusa para
aproximar conjuntos difusos
de la recta real
mediante números difusos

Autor

Miguel Ángel Tíscar Soria

Directores

Antonio Francisco Beatriz Roldán López de Hierro

Concepción Roldán López de Hierro

MEMORIA DE TESIS DOCTORAL

para optar al grado de doctor por la Universidad de Granada
dentro del programa de Doctorado *Estadística Matemática y Aplicada*



FACULTAD DE CIENCIAS

Granada, enero de 2023

Tesis Doctoral

Doctorado en Estadística Matemática y Aplicada



Universidad de Granada

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

**Una metodología difusa para
aproximar conjuntos difusos
de la recta real
mediante números difusos**

Miguel Ángel Tíscar Soria

Granada, enero de 2023

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Miguel Ángel Tíscar Soria
ISBN: 978-84-1117-805-1
URI: <https://hdl.handle.net/10481/81256>

El doctorando / The doctoral candidate:

Miguel Ángel Tíscar Soria

y los directores de la tesis / and the thesis supervisors:

Dr. Antonio Francisco Roldán López de Hierro

Dr. Concepción Beatriz Roldán López de Hierro

Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección del director de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

/

Guarantee, by signing this doctoral thesis, that the work has been done by the doctoral candidate under the direction of the thesis supervisor/s and, as far as our knowledge reaches, in the performance of the work, the rights of other authors to be cited (when their results or publications have been used) have been respected.

Lugar y fecha / Place and date: Granada, a 15 de enero de 2023.

Director de la Tesis / Thesis supervisor:

Antonio Fco. Roldán López de Hierro

Concepción B. Roldán López de Hierro

Doctorando / Doctoral candidate:

Miguel Ángel Tíscar Soria

Agradecimientos

Esta Memoria no habría visto la luz sin la tutela y el acompañamiento de mis co-directores, el profesor Dr. D. Antonio Roldán y la profesora Dra. D^a Concepción Roldán. Vaya, pues, para ambos el máximo de los reconocimientos y el supremo de los agradecimientos.

A mis compañeros del Departamento de Matemáticas del IES *Castillo de la Yedra* y, en especial, al profesor D. Francisco del Hoyo, que releyó, puntualizó y corrigió acertadamente esta Memoria, y a la profesora D^a Mariola Fuentes, cuyo ímpetu nos hace estar vivos.

Al profesor Dr. D. Marcos Bonvin por sus acertadas observaciones lingüísticas y su estrictamente creciente función de amistad e imagen de cariño sincero.

Al profesor Dr. D. Pedro Javier Romero, que ocultó caballerosamente las sonrisas provocadas por mi poco dominio de la norma anglosajona escrita.

Al profesor Dr. D. Antonio José Sáez, *in memoriam*, que allá por el inicio de este milenio inculcó en mí el espíritu de la matemática, que no es otro distinto del que mueve el ¿por qué? en mi quehacer diario.

A D. Pablo Bobillo, *in memoriam*, que aplicó con dureza, cariño y sensatez el teorema del “niño consentido” a un, entonces, veinteañero jugador de rugby poco preocupado por sus estudios.

A mis padres, Ángel y Paquita, a los que estas notas volverán, allá donde estén, simplemente felices. Y a Montse, Alberto y Javier por ser el \mathcal{A} y Ω de mi dominio de existencia.

Publicaciones

- ▶ A.F. Roldán López de Hierro, **M.Á. Tíscar Soria**, C. Roldán & H. Bustince. *A fuzzy methodology for approaching fuzzy sets of the real line by fuzzy numbers*. Fuzzy Sets and Systems **435** (2022), 55–77

Factor de impacto 4.462, **primer decil** en la categoría “*Statistics & Probability*” según JCR 2021, Q1.

<https://doi.org/10.1016/j.fss.2021.08.024>

- ▶ A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán, **M.Á. Tíscar Soria**, Z. Takáč, R.H.N. Santiago, G. Dimuro, J. Fernández & H. Bustince. *Type-(2, k) overlap indices*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, publicado online.

Factor de impacto 12.253, **primer decil** en la categoría “*Computer Science, Artificial Intelligence*” según JCR 2021, Q1.

<https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2022.3188918>

Contribuciones a congresos

- A.F. Roldán López de Hierro, **M.Á. Tíscar Soria**, C. Roldán & H. Bustince. *Approximating fuzzy sets by fuzzy numbers, and a study of fixed points*. New trends in theoretical data analysis and computation techniques, September 2-3, 2022, Thammasat University (Rangsit Campus), Tailandia.
- A.F. Roldán López de Hierro, **M.Á. Tíscar Soria**, C. Roldán & H. Bustince. *On the approximation of fuzzy sets by fuzzy numbers*. 3rd International Workshop on Applied Nonlinear Analysis (IWANA), September 5-6, 2022, Chon Buri, Tailandia.

Índice

Resumen	I
Abstract	III
Introducción	VII
1. Objetivos	1
2. Metodología. Conjuntos y números difusos	9
2.1. Funciones reales de una o varias variables reales	11
2.1.1. Las funciones de agregación	13
2.1.2. Las funciones de solapamiento	15
2.2. Los números difusos	16
2.2.1. Los conjuntos difusos	17
2.2.2. Algunos elementos geométricos y algebraicos asociados a los conjuntos difusos	19
2.2.3. Los números difusos	24
2.2.4. Los tipos más usuales de números difusos	28
2.2.5. Acerca de los conjuntos de nivel de un número difuso y de su soporte	35

2.2.6. Marco estadístico de los números difusos	38
2.2.7. Los conjuntos difusos de tipo 2	43
3. Resultados principales	51
3.1. Introducción a los operadores de aproximación	53
3.2. Sobre la necesidad y la utilidad de un operador de aproximación	57
3.3. Conjuntos difusos generados por familias de conjuntos anidados	60
3.3.1. Algunas propiedades de la familia de conjuntos de nivel asociados a un conjunto difusos	60
3.3.2. Algunas relaciones entre conjuntos difusos y números difusos	63
3.3.3. El conjunto difuso asociado a una familia de subconjuntos encajados de \mathbb{I}	67
3.3.4. Los límites laterales de los extremos de los conjuntos de nivel de un conjunto difuso	73
3.4. Aproximación de conjuntos difusos por números difusos	76
3.5. Algunas propiedades de los operadores de aproximación	85
3.6. El operador de aproximación sobre números difusos de tipo LR	92
3.7. Introducción a las funciones y a los índices de solapamiento . . .	95
3.7.1. Discusión sobre la noción de índice de solapamiento de tipo $(2, k)$	96
3.7.2. Funciones más generales que las funciones de solapamiento	98
3.8. Los índices de solapamiento de tipo $(2, k)$	102
3.8.1. Índices de solapamiento del tipo $(2, 0)$	105
3.8.2. Índices de solapamiento de tipo $(2, 1)$	113
3.8.3. Índices de solapamiento de tipo $(2, 2)$	120
3.9. Algoritmos de inferencia para sistemas interpolativos difusos . .	123

ÍNDICE

3.9.1. Un primer algoritmo	124
3.9.2. Un segundo algoritmo	130
3.9.3. Ejemplo y discusión	132
4. Conclusiones e investigaciones futuras	143
Índice de Figuras	150
Bibliografía	153

Resumen

En la presente Memoria estudiamos dos problemas abiertos en el contexto de los conjuntos difusos, introducidos por L.A. Zadeh en 1965 como una forma matemática de expresar la incertidumbre que nos rodea en el mundo real.

Por un lado, presentamos un *operador de aproximación* que asocia un único número difuso normal a cada conjunto difuso del intervalo $[0, 1]$. La necesidad y la enorme aplicabilidad de este operador viene justificada por el hecho de que las principales técnicas matemáticas y estadísticas que se han propuesto hasta el momento (regresión, distancias, etc.) hacen uso exclusivamente de números difusos. Dichas técnicas no pueden ser aplicadas en general en contextos en los que los datos de entrada son conjuntos difusos arbitrarios, pues requieren de las especiales propiedades algebraicas y geométricas que verifican concretamente los números difusos. De esta forma, el operador propuesto es capaz de tomar los datos difusos de entrada y transformarlos, de una forma razonable, en números difusos con los que poder trabajar después. Este operador depende de una amplia colección de parámetros iniciales que le aportan gran ductilidad desde su propia concepción. Adicionalmente, se muestran las principales propiedades que satisface este operador, entre las que destacamos el estudio de sus puntos fijos y la propiedad minimizante que verifica.

Por otro lado, presentamos un definición de *índice de solapamiento* en el marco de los conjuntos difusos de tipo 2. Habíamos observado que, tras la introducción de las *funciones de solapamiento* y su posterior éxito al ser aplicadas

a distintos problemas de investigación, algunos autores habían tratado de extender esta noción al campo de los conjuntos difusos de tipo 1, lo cual se había conseguido a la luz del *índice de consistencia de Zadeh*. De esta forma, era interesante abordar el caso de los conjuntos difusos de tipo 2, que son capaces de modelizar situaciones de incertidumbre a través de una estructura algebraica más fina donde los propios conjuntos difusos de tipo 1 no alcanzan. De esta forma, introducimos las principales condiciones que ha de verificar un índice de solapamiento sobre conjuntos difusos de tipo 2, estudiamos sus primeras propiedades y mostramos amplias familias de ejemplos de esta clase de índices, relacionando los diferentes niveles de estructuras difusas. Además, discutimos la condición de normalidad para esta clase de índices y mostramos alternativas a la que aquí se presenta. Finalmente, ilustramos cómo emplear los índices de solapamiento de tipo $(2, 0)$ y $(2, 1)$ para implementar algoritmos inferenciales para sistemas interpolativos difusos de tipo 2, de tal forma que se pueda extraer una conclusión a partir de unas premisas y un hecho, todos ellos expresados con conjuntos difusos de tipo 2.

Palabras clave: Conjunto difuso, Número difuso, Conjuntos encajados, Índice de solapamiento, Sistema interpolativo.

Abstract

In this Memory we study two open problems in the context of fuzzy sets, introduced by L.A. Zadeh in 1965 as a mathematical way of expressing the uncertainty that surrounds us in the real world.

On the one hand, we present an approximation operator that associates a unique normal fuzzy number to each fuzzy set in the interval $[0, 1]$. The need and the great applicability of this operator is justified by the fact that the main mathematical and statistical techniques that have been proposed up to now (regression, distances, etc.) make exclusively use of fuzzy numbers. Such techniques cannot be applied in general contexts where the input data are arbitrary fuzzy sets, since they require the special algebraic and geometric properties that, concretely, fuzzy numbers verify. In this way, the proposed operator is able to transform the fuzzy input data, in a reasonable way, into fuzzy numbers to work with afterwards. This operator depends on a wide collection of initial parameters that give it great ductility from its very conception. Additionally, the main properties that this operator satisfies are shown, among which we highlight the study of its fixed points and the minimizing property that it verifies.

On the other hand, we introduce a definition of *overlap index* in the framework of type-2 fuzzy sets. We had observed that, after the introduction of *overlap functions* and their subsequent success in applications to different research problems, some authors had tried to extend this notion to the field of type-1 fuzzy sets, which had been achieved inspired by *Zadeh's consistency in-*

dex. Thus, it was interesting to address the case of type-2 fuzzy sets, which are able to model uncertainty situations through a finer algebraic structure where type-1 fuzzy sets themselves do not reach. In this way, we introduce the main conditions to be verified by an overlap index on type-2 fuzzy sets, we study its first properties and we show large families of examples of this class of indices, relating the different levels of fuzzy structures. Furthermore, we discuss the normality condition for this class of indices and we show alternatives to the one presented here. Finally, we illustrate how to employ overlap indices of type $(2, 0)$ and $(2, 1)$ to implement inferential algorithms for type-2 fuzzy interpolative fuzzy systems, such that a conclusion can be drawn from fuzzy rules and a fact, all of them expressed as type-2 fuzzy sets.

Key words: Fuzzy set, Fuzzy number, Nested sets, Overlap index, Interpolative system.

EPIGRAMMA PTOLEMAEO ADSCRIPTUM	Traducción
Quotidie morior, fateorque: sed inter Olympi Dum tenet assiduas me mea cura vias: Non pedibus Terram contingo: sed ante Tonantem Nectare divina pascor et ambrosia.	Me voy muriendo cada día y lo reconozco; Pero mientras me tienen ocupado Los constantes derroteros de las estrellas No pisan mis pies sobre la tierra, Sino que ante Zeus me alimento De néctar, de divina ambrosía.

Introducción

Con este supuesto epigrama de Ptolomeo (transcrito literalmente, junto a su traducción, de la edición de Altaya – *Grandes Obras del Pensamiento*), Johannes Kepler abría “*El secreto del universo*”. A finales del siglo XVI no cabía lugar a duda alguna: “*Dios regla el universo con leyes rígidas y certeras. El hombre se acerca a la obra divina escrita en un lenguaje bello y preciso*”. Este lenguaje alcanza su bautismo de verdad en “*Il saggiaiore*” de Galileo, quien unos cincuenta años más tarde no duda en aseverar: “*Dios escribió el universo en el lenguaje de las matemáticas*”.

El trasfondo filosófico de estos autores, mencionados como primera iniciativa a lo que hoy denominamos *ciencia experimental*, se traslada durante casi trescientos años al *corpus* científico. La ciencia es un compendio de verdades y certezas *medibles* y con consecuencias derivadas de nuestra observación (evidentemente, el espíritu humano debe caminar en ese libro de verdad para obtener todas las claves de su realidad).

El siglo XIX formaliza una rama matemática, hasta entonces sujeta a aspectos menores, incluso rebajada al papel de entretenimiento de mentes y forjadora de bolsas. La Probabilidad adquiere su *corpus* doctrinal e introduce, formalmente, la duda tasada en la ciencia.

El desarrollo de la Estadística Matemática a partir de la segunda mitad del siglo XX, con el aporte del cálculo computacional, abre y reforma vías de trabajo. De los treinta y siete problemas del milenio de Hilbert, en 1900, a

las tres mil cuatrocientas vías de investigación formalmente recogidas en 2000, existe un enfoque distinto: la *incertidumbre*.

En el inicio del siglo XX, la obra de Max Plank nos introduce en un mundo de posiciones relativas. El uso de la Mecánica Estadística nos lleva a la “predicción” del comportamiento de sistemas macroscópicos mediante los datos que nos aportan algunos de sus componentes. Aún así, estamos ante un esquema “clásico”. La colección de datos medibles nos aporta conclusiones comprobables. Sin embargo, esa situación es simplemente idílica y limitada a sus campos de trabajo. La realidad es bien distinta. Los datos nos desbordan y deben ser analizados y filtrados, pero no siempre son medibles o, cuando menos, mensurables. Además, aportan información sobre múltiples aspectos, no necesariamente comparables entre sí y en los que debemos apoyar nuestra decisión (generalmente, una elección). La cantidad de información nos debería proporcionar un método o algoritmo de elección para garantizar la correcta decisión. Si esto fuese posible, podríamos dotar a los sistemas electrónicos de capacidad de elección bajo criterios de optimización, en la mayoría de los casos en que, no necesariamente, coinciden con criterios éticos y morales.

Una situación muy frecuente de este conflicto lo plantea el sistema que controla el tráfico en una gran ciudad. Éste puede regular los periodos semafóricos en función de la densidad de circulación (una respuesta tabulable ante una información numérica). Sin embargo, la presencia de vehículos de urgencias introduce una variable cualitativa que puede modificar, por completo, la regulación automática. Y si contamos con dos contingencias de urgencias a la vez y en puntos confluyentes, el sistema debería decidir una prioridad de paso en base a criterios fáciles de entender desde una perspectiva humana pero difíciles de implementar en un sistema automático.

Aparecen nuevas variables, absolutamente cualitativas y no necesariamente ordinales, como el tipo de vehículo, el servicio prestado, el tipo de urgencia, etc. El sistema sólo reaccionará bajo un estricto patrón de comportamiento, es decir, bajo un algoritmo claro y preciso. Un algoritmo que deberá “operar”

variables cualitativas y que, con este adjetivo, escapan de cualquier tipo de álgebra operacional.

Nuestra formación clásica busca una medida de nuestra decisión. La *probabilidad*, medida normada, es la gran valedora de este camino. La introducción de funciones de riesgo o el simple análisis bayesiano de los posibles resultados establece una tasa de actuación. Pero, y ahí está el gran enigma, necesita de un álgebra de sucesos, es decir, necesita una base sólida y algebraica sobre la que desarrollar toda su potencia. Sin embargo, en el mundo de la información y los datos, estos no necesariamente se ajustan a nuestros patrones clásicos de agrupamiento.

Observaciones sobre los gustos de los colores en la moda, la preferencia entre dos conocidos refrescos de cola o la animadversión a ciertos equipos de fútbol no permiten establecer una base conjuntista sobre la que trabajar con las herramientas clásicas (pues requieren una estructura algebraica consistente para ser aplicadas). Por tanto, la toma de decisiones está sujeta, inexorablemente, a una avalancha de información, en forma de datos disponibles.

En las situaciones reales, no sólo la información nos produce un desborde en cantidad y calidad: la propia clasificación de la misma puede, y de hecho es, una fuente de incertidumbre más. La información disponible no siempre puede ser clasificada en categorías “mutuamente excluyentes” y, sobre todo, no siempre se comparte un mismo criterio en las “etiquetas” que asociamos a esa información. Además, dichas etiquetas no manifiestan de forma determinista a qué categoría pertenecería cada objeto de poder contar con una categorización clara.

En este contexto de incertidumbre en el que vivimos, es necesario establecer una sólida base matemática y estadística sobre la que construir el edificio del conocimiento de la realidad, tan sujeta al azar y a los cambios aleatorios pero, a la vez, tan rígida en cuanto a sus leyes fundamentales. Después de la introducción de la noción de *función de probabilidad* a través de los axiomas de Kolmogorov (asentada, como hemos comentado, sobre los cimientos de la σ -álgebra) y de las distintas aproximaciones al concepto de *espacio métrico probabilístico* (en

este sentido, no podemos dejar de citar los estudios de Menger [75, 76] y los espacios de Schweizer y Sklar [108]), el siguiente gran hito en esta línea de investigación de la incertidumbre llegó con la introducción en 1965 por parte de L.A. Zadeh del concepto de *conjunto difuso* (véase [117]). Matemáticamente, un conjunto difuso A es un par (X, μ_A) donde X es un conjunto no vacío (en su concepción clásica), denominado *universo del discurso* o *referencial*, y $\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$ es una aplicación que asocia a cada elemento $x \in X$ su *grado de pertenencia* $\mu_A(x)$ al conjunto difuso A . En los últimos cincuenta años se han descrito varias interpretaciones epistémicas acerca del significado de la función μ_A . Tres de las *semánticas* más importantes la interpretan como un grado de *incertidumbre* (propuesta por Zadeh como una herramienta clave en la *teoría de la posibilidad* [119] y el *razonamiento aproximado* [120]), como un grado de *similaridad* o como un grado de *preferencia* (véase [42, 44]). Cada uno de estos puntos de vista conlleva ciertas peculiaridades dependiendo del contexto en el que se utilizan los conjuntos difusos. Lo único que es común a todas las corrientes de pensamiento difuso es que cuando $\mu_A(x)$ toma el valor 1 (su máximo valor posible), entonces decimos que el elemento pertenece al conjunto con seguridad, y si dicho valor es 0 (el mínimo valor posible), entonces estamos seguros de que no pertenece. Entre medias de los valores 0 y 1 surge toda una escala de grises cuya riqueza se pone de manifiesto por el enorme éxito que ha tenido esta teoría en el ámbito científico en general y, en especial, en el ámbito de la Computación. Algunos de sus avances más importantes se han producido en los ámbitos del análisis de decisiones [25, 29, 58, 80, 102, 116], ranking de posibles alternativas [1, 5, 33, 63, 81, 99, 113, 114], teoría de regresión [27, 56, 93, 101], imagen [69, 57, 84, 17], clasificación [64, 105, 106], aproximación [109], Medicina [107], interconexiones algebraicas [92], etc. Todo ello ha originado una teoría, muy al contrario de lo que pueda parecer por el hecho de manejar cierto grado de incertidumbre, es muy consistente y ha dado pie a algunos de los descubrimientos más significativos en el desarrollo de la Inteligencia Artificial (con todo lo que ello lleva aparejado).

“La lógica clásica es como quien va a una fiesta vestido con un traje negro, una camisa blanca almidonada, una corbata negra, zapatos lustrosos, etcétera. Y la lógica difusa es un poco como quien va vestido informalmente con vaqueros, camiseta y zapatillas. En el pasado esta ropa informal no habría sido aceptable. Hoy es la otra manera que hay de vestir”, manifestaba Zadeh en 1984, como ejemplificación del nuevo enfoque. En la lógica difusa, la realidad no es blanca o negra: es simplemente gris, con todos sus matices.

En la teoría clásica de conjuntos, la relación binaria más importante es la relación de *inclusión* de tal manera que un conjunto puede estar incluido dentro de otro, dando lugar a la noción de *subconjunto*. En el contexto difuso, los conjuntos difusos no son solo conjuntos, sino que llevan asociados unas aplicaciones muy concretas que, como hemos comentado, se denominan “funciones de pertenencia”, que marcan el grado de pertenencia de un elemento al conjunto difuso. La relación de inclusión entre conjuntos clásicos se extiende, de manera natural, al ámbito difuso, mediante la relación de orden \leq entre las funciones de pertenencia. De esta forma, la inclusión de conjuntos difusos no está determinada por los elementos, sino por las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos (eso sí, se comprueba la desigualdad \leq elemento a elemento en el universo del discurso). La relación de inclusión entre conjuntos es un *orden parcial* (reflexiva, antisimétrica y transitiva), propiedad que hereda la inclusión \leq de conjuntos difusos, que también es un orden parcial. Sin embargo, la notación \leq entraña un riesgo importante: puede dar lugar a la creencia de que también representa la relación euclídea de orden entre números reales. Esta interpretación es falsa por dos motivos: ni todos los conjuntos difusos pueden ser interpretados como números, ni aunque lo fuesen, el orden parcial \leq entre conjuntos difusos generalizaría el orden euclídeo entre números reales. En cualquier caso, surge la necesidad de introducir la noción de “número difuso”.

Inspirados por los números reales, existen unos conjuntos difusos muy especiales que, sin duda, son la traducción natural de los números reales al ámbito difuso. Se definen de la siguiente manera. En el contexto de los números reales

(conjunto denotado por \mathbb{R}), el conocimiento de un número real $r \in \mathbb{R}$ puede interpretarse en términos de una función de pertenencia $\mu_r : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ como la siguiente: dado $t \in \mathbb{R}$, definimos $\mu_r(t) = 1$ si $t = r$ (porque estamos absolutamente seguros de que t toma el valor exacto del número real r) y $\mu_r(t) = 0$ si $t \neq r$ (porque estamos absolutamente seguros de que t no coincide con r). De esta forma, estamos considerando el conjunto difuso (\mathbb{R}, μ_r) cuya función de pertenencia $\mu_r : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ viene dada como acabamos de mostrar.

Aunque la noción de “número difuso” en general pudiese no estar clara en un principio, lo que sí está claro es que el conjunto difuso (\mathbb{R}, μ_r) debe satisfacer cualquier posible definición que consideremos razonable de “número difuso”. A la vista de las propiedades que satisfacen las funciones de pertenencia $\{\mu_r : r \in \mathbb{R}\}$, la cuestión que surge espontáneamente es: ¿cuáles son las propiedades algebraicas que debe verificar una función de pertenencia para ser considerada proveniente de un “número difuso”? Esta cuestión ni es trivial ni posee una única respuesta. Además, cualquier posible respuesta debe afrontar una segunda cuestión no menos importante: la necesidad de extender las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división) al contexto difuso, intentando a la vez heredar cuantas más propiedades reales mejor (asociatividad, conmutatividad, etc.), lo cual no es una tarea en absoluto sencilla.

A lo largo de los últimos años, se han propuesto varias definiciones, todas ellas cargadas de matices concretos que las hacen especialmente sensibles a ligeros cambios. La definición más extendida y más utilizada en los estudios científicos es la siguiente (véanse [40, 41, 96, 97, 99, 101]): un *número difuso (de la recta real)* es un conjunto difuso (\mathbb{R}, μ) cuya función de pertenencia $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ verifica las propiedades de *normalidad*, *convexidad difusa* y *semicontinuidad superior* (véase la Definición 2.2.4). Estas tres propiedades dan lugar a infinidad de posibilidades algebraicas, y conllevan una enorme carga de subjetividad en el manejo de este concepto (véanse los comentarios posteriores a la Definición 2.2.4). En la Subsección 2.2.4 mostraremos algunas familias notables de números difusos sobre la recta real. Destacamos el hecho de que, recientemente, se

ha entablado un acalorado debate sobre la necesidad de replantearse esta definición. Además, debemos aclarar desde este momento que la anterior no será la definición que nosotros utilicemos de “número difuso” a lo largo de la presente memoria, pues reemplazaremos la condición de normalidad por la *existencia de máximo absoluto* (la cual es una propiedad más débil).

Los números difusos constituyen objetos matemáticos susceptibles de algebraización operativa y aportan el tan deseado soporte de trabajo a las diferentes técnicas “clásicas”. Evidentemente, las condiciones de “regularidad” que caracterizan a los números difusos no son características naturales de los conjuntos difusos. Como acabamos de describir, la subfamilia de los números difusos está formada por conjuntos difusos más “manipulables” y, por ende, más restrictivos. De esta forma, los números difusos suponen un caso particular de conjunto difuso convexo y, en cierto sentido, son una extensión, por debilitamiento, del concepto de número real. De hecho, un número real puede entenderse como número difuso (en este contexto, se le denomina número difuso *crisp*).

Los conjuntos difusos y los números difusos son, sin lugar a dudas, estructuras algebraicas que hunden sus raíces en el terreno abonado de la Estadística y de la Probabilidad. Este hecho ya se ha puesto de manifiesto en tesis doctorales anteriores bajo la misma dirección o codirección. Por ejemplo, A.F. Roldán López de Hierro interpretó los números difusos en [94] como la yuxtaposición, en tiempo finito, de una función de distribución y una función de supervivencia a través de las partes izquierda y derecha del número difuso. Dos años después, G. Alfonso describió en [3] los números difusos como métodos para construir intervalos de confianza asociados a un valor desconocido. En el meollo de la pandemia, A. Márquez introdujo en [71] los números difusos como cantidades inciertas asociadas a afirmaciones imprecisas que utilizamos en la vida cotidiana. Recientemente, M. Sánchez-Maldonado empleó números difusos en [104] como una forma de representar etiquetas lingüísticas en contextos de incertidumbre, especialmente en situaciones que anteriormente habían sido abordadas desde el ámbito de las escalas de Likert. En esta Memoria no queremos ser menos y vamos

a aportar un par de nuevas posibles semánticas en las que los números difusos se desenvuelven a la perfección. En primer lugar, describiremos los conjuntos de nivel de un número difuso según el grado de conocimiento que aporten respecto de la afirmación original. De esta forma, los interpretaremos como conjuntos de valores *compatibles* (entiéndase, con la afirmación), *posibles* o *probables*. En segundo lugar justificaremos que la función masa de probabilidad de cualquier variable aleatoria es, en sí misma, un conjunto difuso. Pero también existen casos incluso más generales, especialmente cuando del universo del discurso no es un subconjunto de \mathbb{R} : ilustraremos alguna situación en la que el referencial de partida es un conjunto finito de personas sobre las que puede establecerse alguna afirmación de tipo probabilístico (véase la Subsección 2.2.6).

Aunque la extensión del concepto de número real al marco difuso conlleva un buen comportamiento operacional (suma, multiplicación, etc.), también es cierto que el orden euclídeo de los reales no es, en este caso, exportable. De hecho, parece imposible construir una relación de orden (aún de tipo parcial) sobre la familia formada por todos los números difusos sobre la recta real que sea, a la vez, coherente con la intuición humana y equivalente a las introducidas *ad-hoc* en los diferentes procesos concretos de investigación experimentales. En todo caso, existe un gran consenso en que cualquier definición de orden debe ser compatible con el orden de los reales, en el sentido de que su restricción a números difusos “*crisp*” sea reconocible como el orden real.

La búsqueda de un orden parcial sobre la familia formada por todos los números difusos de la recta real que, a la vez, sea coherente con la intuición humana y extienda el orden euclídeo de los números reales, es solo uno de los problemas abiertos en el contexto difuso. Pero existen otros muchos, provenientes de áreas científicas aplicadas, que encuentran en el marco difuso las herramientas algebraicas necesarias para su adecuado desarrollo. La Inteligencia Artificial y las Tecnologías de la Información y de la Comunicación son claros ejemplos de áreas emergentes que se benefician especialmente de los avances en el campo científico difuso, donde encuentran gran parte de su justificación y de su potencialidad.

Debido a su enorme aplicabilidad al mundo de la Computación, el campo difuso es especialmente rico en problemas abiertos, que luego son implementados en contextos concretos, resolviendo problemas que hubiesen sido imposibles de afrontar años atrás. En esta investigación hemos indagado, humildemente y desde la perspectiva estadística y matemática, dos problemas concretos que surgen de manera natural en el campo de la Computación y que vamos a tratar de explicar a continuación, junto con los avances conseguidos. Es por ello que el Capítulo 3, dedicado en su integridad a mostrar los avances conseguidos en la presente investigación, está constituido por dos partes claramente diferenciadas, correspondientes a los dos artículos de investigación sobre los que se fundamenta la presente Memoria (a saber, [103] y [100] atendiendo a su orden temporal).

La primera parte de la investigación afronta el problema que comentamos a continuación. Como hemos sugerido, la subfamilia de los números difusos sobre \mathbb{R} es mucho más rica estructural y algebraicamente que la familia de los conjuntos difusos sobre \mathbb{R} . Un conjunto difuso puede representar información de muchas formas, pero un número difuso tiene que ajustarse a unas reglas muy severas: convexidad difusa, semi-continuidad superior y existencia de máximo (usualmente, alcanzando el valor 1). Estas propiedades provienen de la necesidad de operar con números difusos. De hecho, las operaciones aritméticas justifican que se les llame “números”. Sin embargo, sus formas geométricas tan restringidas conllevan el siguiente inconveniente: si los datos de nuestra investigación son conjuntos difusos, pero no son números difusos, ¿podemos operar con ellos con un significado esencialmente idéntico al real? La respuesta es no.

Las técnicas matemáticas que habitualmente se realizan con números reales se han podido, en muchos casos, trasladar al contexto difuso, no sin afrontar importantes dificultades. En el ámbito de la Estadística podemos destacar, por ejemplo, los modelos de regresión (véase [4, 27, 56, 93, 97, 101]) que hacen uso de distancias (o semidistancias) para las cuales son esenciales las operaciones básicas. Pero, ¿y si los datos de entrada no son exactamente números difusos? Usualmente las mencionadas técnicas no funcionan.

Esta suposición que hace que los datos de entrada deban de ser necesariamente números difusos tiene una doble vertiente: por un lado parece una condición natural para el desarrollo de la investigación pero, por otro, obliga a satisfacer ciertas condiciones que, en ocasiones, pueden ser excesivamente restrictivas. En la mayoría de los casos, utilizar números difusos es un requerimiento, no una opción, pues no se puede trabajar con conjuntos difusos en general. Sin embargo, hay ocasiones en las que los datos de entrada pudieran ser conjuntos difusos que, a pesar de no ser números difusos, les falta muy poco para serlo. Un caso extremo es el siguiente: tomando un número difuso y modificando su valor en un único punto, es posible que se pierda la condición de convexidad difusa o de semicontinuidad superior, lo que lo convierte en un conjunto difuso que ya no es un número difuso. Pero ese nuevo conjunto difuso es muy similar al número difuso de partida y, sin embargo, invalida cualquier posibilidad de aplicar las técnicas estadísticas y matemáticas más usuales. De esta forma, como problema principal de investigación nos surgió la posibilidad de introducir una metodología que asociase un único número difuso a cualquier conjunto difuso de la recta real. Este procedimiento debería ser capaz de reconstruir el número difuso cuando éste se ha distorsionado en un único punto perdiendo su condición de número difuso. Teniendo en mente este problema de investigación, en la primera parte del Capítulo 3 vamos a introducir y a estudiar las principales propiedades de una amplia familia de operadores paramétricos del tipo:

$$\Phi_{f,g,T_1,T_2} : \text{FS}([0, 1]) \rightarrow \text{FN}([0, 1])$$

que asocian un único número difuso normal (cuya familia se denota por $\text{FN}([0, 1])$) a cada conjunto difuso en el intervalo $[0, 1]$ (cuya familia es denotada por $\text{FS}([0, 1])$). A lo largo de la Memoria justificaremos que la familia $\text{FS}([0, 1])$ es lo suficientemente rica como para reducir el problema a este intervalo especial. Las principales ventajas de la familia de operadores que vamos a presentar son las siguientes.

- Estos operadores pueden ser útiles para extender las técnicas difusas que, por el momento, sólo se aplican actualmente al caso restringido en el que

los datos de entrada o de salida deben ser números difusos, a un marco general en el que los datos involucrados son conjuntos difusos arbitrarios de la recta real.

- Esta familia proporciona varias formas de aproximar un conjunto difuso de la recta real por un número difuso. Por lo tanto, en muchos casos, puede ser útil en el razonamiento aproximado.
- Esta familia depende de una amplia gama de funciones iniciales que se pueden usar como parámetros para definir un operador de aproximación particular. Por lo tanto, cada investigador tiene la libertad de elegir los parámetros involucrados para obtener el número difuso que mejor se ajuste al conjunto difuso original de la recta real según su punto de vista o sus propios intereses.
- Pequeñas “variaciones” entre conjuntos difusos deberían respetar la asociación inicial.
- Esta metodología debe ser lo suficientemente dúctil como para adaptarse a las diversas situaciones prácticas.

Aunque los conjuntos difusos pueden interpretarse desde varias semánticas, a lo largo de esta Memoria no vamos a estar interesados en ninguno de esos puntos de vista. El contenido de esta parte del capítulo es más bien algebraico. Deberá ser el investigador quien interprete los resultados que aquí vamos a mostrar desde la semántica particular que esté empleando en su investigación.

En la Sección 3.5 ilustraremos algunas propiedades de los operadores de aproximación introducidos, prestando especial atención a sus características minimizantes y al estudio de sus puntos fijos que, como era de esperar, deben ser números difusos normales. Para su mejor comprensión, hemos concretado una configuración de referencia (a la que denominamos *elección estándar*) de las condiciones iniciales que puede ser aplicada por la mayoría de investigadores que se acerquen por primera vez a esta familia de operadores.

Las herramientas algebraicas que se han empleado para la resolución de este primer problema de investigación nos han introducido de pleno en el segundo problema de investigación que abordamos en la presente Memoria. Como veremos, las condiciones iniciales de esta familia de operadores de aproximación necesitan de un par de funciones T_1 y T_2 definidas sobre un triángulo dentro del cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$ en el plano real \mathbb{R}^2 . En su momento, nos planteamos estudiar las propiedades esenciales que debían verificar estas funciones para ser admisibles dentro de la familia de operadores de aproximación. Las funciones que mejor se adaptaban al principio a nuestros requerimientos eran las funciones *mínimo* (para T_1) y *máximo* (para T_2), y sus propiedades básicas eran dos: no decrecimiento dentro del cuadrado unidad y condiciones de frontera razonables. En esta línea, aparecieron dos familias muy importantes de funciones bivariadas que cumplían estos dos requisitos: las *funciones de agregación* y, como caso particular, las *funciones de solapamiento*. Damos a continuación unas ideas generales sobre ellas.

En multitud de ocasiones, es importante resumir la información en un único dato. En mundo en el que vivimos genera cada vez más datos, de un modo prácticamente exponencial, de tal forma que cada vez es más complicado tomar una decisión en base a los datos, pues estos han comenzado a ser, en cierto sentido, inabarcables. Es por ello que, en el contexto científico, desde hace unos años, han tomado un papel muy destacado las *funciones de fusión* (véase [77]) que asocian un único valor a un conjunto de n datos de un mismo tipo. En el contexto más sencillo, supuesto que los datos de entrada sean n números reales del intervalo $[0, 1]$, una función de fusión trata de resumirlos en un único dato también del intervalo $[0, 1]$. Este dato trata de representar lo mejor que puede la información contenida en los n datos originales. Por ejemplo, la media aritmética es, posiblemente, la función de fusión más utilizada en la práctica por cuanto, en gran medida, condiciona nuestro presente y nuestro futuro (por ejemplo, que un estudiante pueda acceder, o no, a una determinada carrera dependerá de la nota media, quizá ponderada, que obtenga en ciertas asignaturas y en ciertos

exámenes, y dicha posibilidad marcará de una forma crucial el resto de su vida). Pero el mínimo, el máximo o el producto de todos los valores son funciones con infinidad de aplicaciones prácticas en el mundo computacional y que inspirarán, en cierto sentido, parte de los contenidos de la presente Memoria.

Desde el punto de vista puramente estadístico, las funciones de fusión pueden interpretarse como medidas de centralización, que resumen la información en un único dato representativo. La media aritmética, la moda o la mediana son las medidas de centralización por excelencia, y han sido utilizadas como funciones de fusión en multitud de contextos.

En la práctica, las aplicaciones a la vida real suelen requerir que dichas funciones satisfagan ciertas propiedades acordes al tema tratado. Por ejemplo, la función $T(t, s) = (t - s)^2$, definida en el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$, tiene el inconveniente de que no es creciente (en este caso, $T(0.5, 0) = 0.25 > 0 = T(0.7, 0.7)$), lo cual es ciertamente molesto cuando se están modelizando magnitudes que crecen cuando los argumentos también crecen. De esta forma, el crecimiento global de la función es uno de los condicionantes más empleados en la práctica. A esta restricción se le suelen unir otras varias, tanto en la frontera como en lo referente a continuidad. De esta forma, a lo largo de la presente Memoria, irán surgiendo toda una familia de funciones que enriquecerán los contenidos de la misma. En primer lugar destacamos las *funciones de agregación* (véase [12, 98, 95]) que son funciones no decrecientes que fijan los valores extremos cuando todos los argumentos se repiten y son iguales a dichos valores extremos (véase la Definición 2.1.1). Las funciones de agregación satisfacen los mínimos requerimientos que permiten trabajar en el campo de la Computación, y con ellas se han desarrollado multitud de aplicaciones. Entre las funciones de agregación nos fijamos, en su momento, en una familia muy especial por sus especiales características: las *funciones de solapamiento* (del inglés, *overlap functions*).

Las funciones de solapamiento fueron introducidas por Bustince y otros en [15]. En términos generales, pueden verse como funciones bivariadas no nece-

sariamente asociativas, definidas sobre el cuadrado unidad, que son no decrecientes, continuas y satisfacen las condiciones de contorno apropiadas (véase la Definición 2.1.3). Desde una perspectiva abstracta, las funciones de solapamiento son medidas de situaciones en las que la ausencia de conocimiento (por ejemplo, cuando alguien está comparando dos objetos difusos) es máxima. En un contexto en el que estemos determinando si dos funciones de pertenencia siguen una distribución similar a la distribución Normal, una función de solapamiento es útil para medir el grado de solapamiento entre ellas. Esta medida puede verse como la duda del experto sobre la pertenencia de cada punto con respecto a cada función de pertenencia.

Las buenas propiedades que presentan las funciones de solapamiento, tales como su clausura con respecto a la suma convexa y la agregación por composiciones generalizadas internas (véase [35, 37]) permiten un alto grado de aplicabilidad en comparación con otras clases de funciones de agregación conjuntivas (por ejemplo, las *t-normas* [61]). Además, las funciones de solapamiento nacieron con la condición de verificar ciertas propiedades interesantes, algunas de las cuales son necesarias para el desarrollo de ciertas aplicaciones, tal y como ha sido estudiado por Bustince y otros [19], Bedregal y otros [11], Dimuro y otros [36, 38, 34], Qiao y otros [89, 87, 88, 86], Wang y Hu [112], Zhou y Yan [121], y Zhu y otros [122].

Desde su introducción, las funciones de solapamiento han sido empleadas con éxito en muchos campos de estudio como son el procesamiento de imágenes [59, 70], la toma de decisiones [18, 45], interfaces cerebrales computacionales [48], detección de incendios forestales [50], sistema de diagnóstico de calidad de energía difusa por ondas [82], detección de comunidades difusas [53], redes sociales [47] y clasificación [65, 67, 64, 66, 6, 8].

Uno de los contextos más interesantes en los que se han utilizado las funciones de solapamiento es el de los sistemas difusos interpolativos [49], que pueden interpretarse como casos particulares de sistemas basados en reglas difusas. En esta clase de sistemas existe un conjunto finito de reglas expresadas en térmi-

nos de conjuntos difusos. Utilizándolos, es posible deducir una consecuencia (la conclusión) de una premisa inicial (el hecho), los cuales también se expresan como conjuntos difusos. Usualmente, este proceso requiere la aplicación en primer lugar de un índice de consistencia entre las reglas y el hecho y, posteriormente, entre el valor resultante y el consecuente.

El *índice de consistencia*, introducido por Zadeh en [119] como una extensión razonable del índice booleano de solapamiento cuando el universo de discurso es finito, fue mejorado por varios autores (por ejemplo, Dubois y otros [39] y Pal y Pal [85]) para ser aplicado con éxito en el ámbito de los sistemas difusos interpolativos. Con el fin de superar algunas contradicciones que surgieron de manera natural al usar las definiciones anteriores, estos estudios destacaron la necesidad de introducir la noción de *índice de solapamiento* (véase [49]) como una función que asocia un número real en el intervalo $[0, 1]$ a cada par de conjuntos difusos sobre el conjunto referencial (finito), la cual debe cumplir ciertas condiciones (véase también [37, 18, 16, 14]). Este tipo de índices permitió el desarrollo de algoritmos de inferencia para sistemas interpolativos de acuerdo con algunas de las propiedades propuestas por Fukami y otros en [46] y, casi simultáneamente, por Baldwin y Pilsworth en [9].

Las construcciones algebraicas que hemos comentado hasta ahora involucran números reales o, como mucho, conjuntos difusos (normalmente, números difusos de la recta real). Este último tipo de objetos matemáticos asocia un número real perteneciente a $[0, 1]$ a cada punto del universo del discurso. Sin embargo, determinar un número real totalmente preciso y único que represente perfectamente la ambigüedad del punto considerado podría interpretarse como una restricción muy fuerte (véase [13]). Obviamente la potencia del aparato real no supe la pérdida de información y la falta de garantías que esta asignación produce. En algunos contextos, teniendo en cuenta la imprecisión intrínseca de los elementos del conjunto referencial, es mejor asociarlos a conjuntos difusos (generalmente, números difusos cuyos soportes están incluidos en $[0, 1]$) que a números reales (por ejemplo, la opinión de un experto sobre alguna característi-

ca de un vino concreto). Aparece de manera natural la noción de *conjunto difuso de tipo 2*, que se ha aplicado con éxito en varios contextos, como en los trabajos de Mendel y sus coautores (por ejemplo, sobre el pronóstico de series temporales [60] y el reconocimiento de patrones [115]), de Garibaldi y otros (por ejemplo, sobre la toma de decisiones [51]), de Hagrais y otros (por ejemplo, sobre la inteligencia ambiental [54]), y por Wagner y otros (por ejemplo, sobre optimización multiobjetivo [20]). En particular, en el mundo de la imagen, la necesidad de clasificar elementos, en un principio, desconocidos, que aparecen, generalmente, en forma de contrastes de color o matiz, es un campo idóneo en el que aplicar los índices de solapamiento.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, en la segunda parte del Capítulo 3 abordamos el siguiente problema de investigación: introducir una definición razonable de *índice de solapamiento con conjuntos difusos de tipo 2* que sea capaz de generalizar tanto la noción de función de solapamiento como el concepto de índice de solapamiento con conjuntos difusos de tipo 1. Eso sí, dicha generalización debe ser lo suficientemente concreta como para ser capaz de producir buenos resultados en contextos concretos en los que se han aplicado los conceptos anteriores con éxito. Para desarrollar este objetivo, nos hemos inspirado en tres pilares fundamentales: por un lado, las propiedades esenciales que definen las funciones de solapamiento, interpretando los números reales del intervalo $[0, 1]$ como conjuntos difusos de tipo 0; por otro lado, las propiedades que definen los índices de solapamiento con conjuntos difusos de tipo 1, introducidos por García-Jiménez y otros en [49], junto con sus aplicaciones prácticas; finalmente, las propiedades que verifica lo que debería ser el índice de consistencia de Zadeh extendido al caso de conjuntos difusos de tipo 2.

Con estos ingredientes presentamos (véase la Definición 3.8.1) el concepto de *índice de solapamiento de tipo $(2, k)$* (siendo $k \in \{0, 1, 2\}$) en el conjunto formado por todos los conjuntos difusos de tipo 2 como una extensión natural de los índices de consistencia previos. Para ello, debilitamos la noción de función de solapamiento, considerando familias más generales intercaladas entre las

funciones de agregación y las funciones de solapamiento. Estas funciones generalizadas nos permiten fijar las propiedades fundamentales que ha de satisfacer un índice de tipo 2 para ser operativo en la familia (tremendamente general) de conjuntos difusos de tipo 2. Por supuesto, a continuación, mostramos ejemplos de índices de solapamiento de diversos tipos (en particular, $(2, 0)$, $(2, 1)$ y $(2, 2)$), prestando especial atención al caso $(2, 1)$ pues es el que verdaderamente centra la extensión de los índices de solapamiento introducidos por García-Jiménez y otros en [49]. El hecho de poder considerar índices de solapamiento de diversos niveles nos ha permitido estudiar la relación entre varios de ellos y sus conceptos correspondientes en niveles inferiores, dado lugar a diagramas conmutativos que relacionan las diversas estructuras algebraicas.

Como colofón a este estudio y a los contenidos de la presente Memoria, presentamos una aplicación de los índices de solapamiento al contexto de la lógica difusa. En concreto, mostramos cómo llevar a cabo el *modus ponens* cuando los datos de entrada (las reglas y los hechos) son conjuntos difusos de tipo 2 en lugar de escalares reales o de conjuntos difusos de tipo 1. Recordemos que el *modus ponens* es una técnica muy conocida en el ámbito de la lógica difusa para obtener una consecuencia a partir de un conjunto de reglas y un antecedente concreto. En la parte final del Capítulo 3 presentamos dos algoritmos distintos para afrontar el problema de determinar un conjunto difuso de tipo 2 consecuente cuando tanto el conjunto finito de reglas como el hecho son modelizados por conjuntos difusos de tipo 2. Para llevar a cabo esta tarea, será importante el uso de un índice de solapamiento de tipo $(1, 0)$ (como en el caso del Algoritmo 1 que introduciremos) o un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$ (véase el Algoritmo 2).

En los últimos años, se han propuesto varios métodos de razonamiento interpolativo difuso basados en conjuntos difusos tipo 1 y tipo 2 (en este último caso, intervalares). Para ejemplos de lo primero, véanse los trabajos de Chang y otros [21], Chen y Adam [23], Chen y Chen [26], y las referencias contenidas en dichos trabajos. Ahora, para ver ejemplos de esto último, pueden consultarse

los artículos de Chen y Barman [24], Chen y Shen [31], Chen y otros [28], y las referencias discutidas por ellos. Para otras técnicas, como conjuntos difusos “*rough*” [30], véase también [32]. Sin embargo, fueron García-Jiménez y otros [49] quienes propusieron utilizar índices de solapamiento en sistemas difusos interpolativos.

Mostramos un ejemplo de utilización de los dos algoritmos propuestos en el que desarrollamos todas las operaciones necesarias para describir todos los conjuntos difusos que se van obteniendo en las etapas intermedias, y que dan lugar al conjunto difuso de tipo 2 que sirve como conclusión. Estudiaremos las principales propiedades que verifican estos algoritmos, algunas de los cuales podrán observarse en el ejemplo propuesto. Finalmente, compararemos los resultados obtenidos mediante las dos metodologías propuestas.

Los contenidos de la presente Memoria se han organizado en cuatro capítulos atendiendo a la siguiente estructura general.

- El primer capítulo describe formalmente las distintas clases de objetivos a alcanzar que se plantearon al principio de la investigación, o que fueron surgiendo a lo largo de la misma.
- El segundo capítulo formaliza los conceptos y herramientas necesarios para alcanzar los objetivos expuestos. Entre ellos cabe destacar la noción de “conjunto difuso” (tanto de tipo 1 como de tipo 2) y de “número difuso”, y toda una amplia gama de funciones en una o varias variables que dan consistencia al aparato algebraico sobre el que se sustenta la Memoria.
- En el tercer capítulo se formalizan los resultados principales de la investigación y se postulan las primeras aplicaciones tanto teóricas como prácticas de los contenidos introducidos.
- Finalmente, el cuarto capítulo recoge algunas de las principales conclusiones de la investigación y propone las vías de trabajo futuro.

Completamos la Memoria con una fuente bibliográfica de los textos empleados.

CAPÍTULO 1

Objetivos

A la vista de los contenidos descritos en la introducción, se nos plantea la necesidad de concretar los objetivos generales que vamos a tratar de alcanzar mediante el desarrollo de la presente investigación. Como en trabajos de investigación anteriores en este ámbito, clasificamos dichos objetivos en diferentes categorías, a saber, objetivos matemáticos y estadísticos, objetivos informáticos o experimentales, y objetivos de cara a la Sociedad de la Información y de la Comunicación. Evidentemente, los primeros serán los más importantes dentro de este programa de doctorado, pero no debemos olvidarnos en absoluto de las dos últimas clases, pues enmarcan esta investigación dentro de la sociedad y para la sociedad en su conjunto.

En el mundo de la información y de la comunicación, en la que la misma se presenta en forma de cataratas de datos, la concreción de objetivos determina los objetivos previos o “técnicos”. Las matemáticas son la única ciencia humana en la que “el fin sí justifica los medios” .

Objetivos matemáticos y estadísticos

Desde un punto de vista genuinamente matemático y estadístico, planteamos los siguientes objetivos para el desarrollo de la investigación que aquí se presenta. En el capítulo final haremos una recopilación de los objetivos alcanzados, y

describiremos las causas por las que no pudimos conseguir algunos de ellos.

- Introducir una amplia familia de operadores de aproximación que sean capaces de asociar un único número difuso normal a cada conjunto difuso dentro de un cierto rango.
- Explicar la utilidad de dichos operadores aproximantes, en especial en el contexto del trabajo con números difusos.
- Determinar contextos reales en los que se puedan emplear algunos de los operadores que se introduzcan, donde se muestre su ductilidad y utilidad.
- Hacer depender dicha familia de una amplia gama de parámetros iniciales, implementados como constantes o como funciones reales de variable real, que pueda ser fijada atendiendo a las necesidades o los intereses de la investigación a desarrollar.
- Estudiar la influencia de cada uno de los parámetros iniciales sobre el resultado final de la aproximación, de tal forma que se puedan controlar aspectos concretos de la geometría de los números difusos obtenidos.
- Determinar una configuración estándar de las condiciones iniciales que pueda ser aplicada por la mayoría de investigadores que se acerquen inicialmente a esta investigación.
- Estudiar las propiedades generales de los operadores de la familia introducida, prestando especial atención a las propiedades minimizantes que puedan verificarse.
- Estudiar la posible existencia de puntos fijos de dichos operadores, especialmente en casos sencillos.
- Explicar en detalle las nociones de conjunto difuso y de número difuso, describiendo sus semejanzas y sus diferencias, tanto a nivel gráfico como analítico.

- Poner de manifiesto la estrecha relación entre conjunto difuso y las distribuciones de probabilidad, siendo los primeros una extensión “natural” de las segundas.
- La sistematización en la construcción del operador y su maleabilidad, debida a su alto componente paramétrico, pretende dotar a futuros investigadores de una herramienta potente y computable de trabajo.
- Establecer una metodología clara y sencilla que permita a otros investigadores su aplicación rápida, estableciendo, además, nuevas vías de estudio en base a la modificación en el número, forma y/o propiedades de los parámetros iniciales considerados.
- Introducirnos en el estudio y la aplicabilidad de las funciones de solapamiento que han sido empleadas con gran éxito en contextos computacionales para la determinación de posibles solapamientos entre los bordes de figuras en imágenes dadas.
- Estudiar los antecedentes acerca de la noción de índice de solapamiento para el caso de conjuntos difusos de tipo 1.
- Describir los conjuntos difusos de tipo 2 y su posible utilización en el contexto del manejo de la incertidumbre. Téngase en cuenta que la existencia de etiquetas en el mundo educativo justifica completamente el uso de conjuntos difusos tipo 2 para conseguir que esas etiquetas cualitativas de calificación reúnan el mayor consenso posible.
- Introducir el uso de categorías comunes cuyos límites no están claramente establecidos a través de números difusos de tipo 2, facilitando su uso, con todos los matices de aplicación que sean necesarios, sin tener que hacerlos rígidos.
- Analizar las propiedades esenciales que verifican las funciones de solapamiento y los índices de solapamiento existentes, de cara a su posible generalización.

- Introducir una definición adecuada de índice de solapamiento para el caso de conjuntos difusos de tipo 2.
- Analizar la posibilidad de extender dicha definición a diferentes niveles difusos de forma que un mismo concepto tenga diferentes particularizaciones según el nivel difuso en el que nos encontremos.
- Mostrar varios ejemplos de utilización de operadores de esta familia en contextos donde puedan observarse con claridad sus características más esenciales, así como ejemplos prácticos de su dependencia paramétrica.
- Establecer una definición razonable de normalidad en el contexto de los índices de solapamiento, con objeto de recuperar algunas de las propiedades que se verifican con números reales o conjuntos difusos de tipo 1.
- Presentar amplias familias de ejemplos de índices de solapamiento de conjuntos difusos de tipo 2, relacionándolos con las estructuras algebraicas previas.
- Estudiar la existencia de diagramas conmutativos capaces de describir fielmente las interconexiones entre unos conceptos y otros.
- Mostrar ejemplos concretos de toda clase de índices de solapamiento que puedan ser interesantes ya sea por su concepción o por su aplicabilidad en casos prácticos.
- Analizar la posible aplicación de esta clase de índices en el contexto de los sistemas interpolativos basados en reglas difusas cuando los antecedentes, los hechos y las conclusiones son expresados como conjuntos difusos de tipo 2.
- Introducir, si es posible, algoritmos de ejecución que permitan deducir conclusiones a partir de reglas y hechos difusos de tipo 2.
- Estudiar las propiedades que puedan satisfacer dichos algoritmos.

- Establecer una metodología clara que pueda llevar a conclusiones difusas de tipo 2.
- Interpretar dichos algoritmos como operadores que, a partir de cierta información imprecisa, pueda llevar, de la forma más contundente posible, a conclusiones válidas y coherentes tanto con las premisas como con la intuición humana.
- Estudiar la mejor forma de expresar afirmaciones humanas que conlleven cierta carga de imprecisión mediante conjuntos difusos de tipo 2 y reglas difusas implementadas con estas estructuras.
- Utilizar las estructuras de espacio métrico estadístico como base del trabajo con funciones de solapamiento.
- Comparar los resultados obtenidos con los procedimientos que se propongan, buscando regularidades en el comportamiento de cada uno de ellos.
- Establecer una vía de trabajo sólida para el futuro con resultados derivados de esta línea de investigación.
- Completar las técnicas estadísticas utilizadas en los análisis de resultados (por ejemplo, de tipo docente) con un amplio espectro de matices subjetivos que, incluso, sean “difusos” en su propia clasificación.
- Enfocar el estudio de los conjuntos difusos de tipo 2 mediante técnicas clasificatorias y, por ende, criterios de priorización de información.
- El algoritmo de construcción de los diferentes conceptos de la presente Memoria debe ser lo suficientemente sencillo en su aplicación para que cualquier investigador haga uso de él. Incluso, pueda ser utilizado como herramienta de trabajo en tareas avanzadas del alumnado de Bachillerato (en especial, los de la materia optativa de Estadística en sus investigaciones prácticas).

Objetivos informáticos y experimentales

- Dotar, a futuros trabajos, de una herramienta computacional sencilla y de fácil aplicación en R [123]. La elección de R (también manejable desde R *Studio* [124]) se debe a su universalidad y gratuidad.
- Dotar de flexibilidad a la herramienta para adecuarla a múltiples situaciones.
- Dar acceso a la comunidad investigadora y docente haciendo pública la librería relacionada con los contenidos que aquí se traten.
- Realizar una aplicación práctica de la herramienta indicando futuras vías de modificación.
- Poner a disposición de la sociedad en su conjunto los diferentes recursos informáticos que puedan desarrollarse, tanto en repositorios de R como en el repositorio institucional de la Universidad de Granada, o en cualquier otro repositorio de índole científica.
- Desarrollar una herramienta sencilla que permita modelizar tanto conjuntos difusos como números difusos que estén formados por trozos lineales, describiendo el número de trozos, sus puntos extremos y su carácter (abierto, cerrado, semi-abierto o semi-cerrado).

Objetivos de cara a la Sociedad de la Información y de la Comunicación

En la tesis doctoral de D. Antonio Márquez-Montávez [71], centrada en la descripción de la forma de actuar de una relación binaria de orden entre números difusos trapezoidales, se establece un primer objetivo divulgativo. El idioma básico de la literatura actual referida al tema está en inglés, independientemente de la lengua materna del investigador; por lo que se constituye en manual de usos sobre el tema en castellano y que hacemos nuestra. Esto justifica algunos de los siguientes objetivos.

- Plantear una guía certera de conceptos previos.
- Utilizar una notación clara y precisa, lo suficientemente general, que permita una aplicación rápida y ágil al campo experimental. Dicha notación debe permitir conocer el tipo de estructura que se maneja con solo reconocer la caligrafía empleada.
- Participar en congresos y conferencias sobre el tema, aprendiendo de otros investigadores, y divulgando los resultados aquí obtenidos por si fuesen del interés de algún investigador o de la comunidad científica en general.
- Interpretar el concepto de límite a través de una familia de conjuntos encajados que muestre, de nuevo, su utilidad práctica.

CAPÍTULO 2

Metodología. Conjuntos difusos y números difusos

En esta investigación hemos utilizado la metodología usual en trabajos de este tipo, comúnmente arraigada en el método científico general. Como parte de la misma, describimos en este capítulo los preliminares necesarios para comprender adecuadamente los desarrollos que hemos llevado a cabo en el desarrollo de la fase investigadora. En este aspecto, son cuatro las principales nociones sobre las que se fundamenta la presente Memoria.

- En primer lugar debemos mencionar el concepto de *conjunto difuso*, visto como una forma sencilla de representar información que conlleva un cierto grado de incertidumbre. Los conjuntos difusos se adaptan muy bien a la representación del mundo en el que vivimos, pues ocurren a nuestro alrededor todo tipo de fenómenos aleatorios que no obedecen a las estrictas normas determinísticas de las principales leyes naturales.
- Como una parte esencial de los conjuntos difusos debemos destacar la familia formada por todos los *números difusos sobre la recta real*, que tratan de extender la estructura algebraica de los números reales al ambiente difuso. Para nuestros intereses, las operaciones aritméticas básicas con números difusos no supondrán una parte importante de nuestra investigación, pero

sí es cierto que hay que aclarar que la noción actual de número difuso (que, como comentaremos, hoy está en entredicho) nace de la necesidad no solo de extender el concepto, sino también las operaciones con números reales.

- Una forma de ampliar la noción de conjunto difuso pasa por la consideración de *conjuntos difusos de tipo 2* que, como se ha comentado en la introducción, parten de la asunción natural de suponer que incluso los grados de pertenencia de elementos al conjunto difuso pueden conllevar, de manera coherente a su contexto, un cierto grado de incertidumbre.
- Finalmente presentaremos el concepto de *índice de solapamiento*, tal y como ha sido introducido y manejado en recientes investigaciones en el campo computacional.

A lo largo de la presente Memoria, denotaremos por \mathbb{R} al conjunto formado por todos los números reales organizados de forma lineal sobre la recta real $(-\infty, +\infty)$. En este conjunto consideraremos siempre su ordenación natural \leq y su topología euclídea que deriva de la métrica también llamada euclídea. En el contexto difuso existe un intervalo, a saber, el intervalo cerrado y acotado $[0, 1]$, cuya importancia es máxima, por lo que reservamos la letra \mathbb{I} para denotarlo de forma especial. En general, utilizaremos letras minúsculas como t , s o r para representar escalares reales, mientras que reservaremos las primeras letras del alfabeto griego (α , β , ...) para referirnos a números del intervalo \mathbb{I} .

En lo sucesivo, X representará siempre un conjunto no vacío y, dado $n \in \mathbb{N}$, escribiremos X^n para significar el producto cartesiano $X \times X \times \dots \times X$ de n copias idénticas de X . De esta forma, se utilizará \mathbb{I}^2 para el cuadrado unidad $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ e \mathbb{I}^n para un producto cartesiano de n copias de \mathbb{I} .

2.1. Funciones reales de una o varias variables reales

La base topológica es la proporcionada por la topología euclídea de \mathbb{R} asociada a la métrica euclídea $d(t, s) = |t - s|$ y, por ende, la medida euclídea μ que asocia a cada subintervalo cerrado y acotado de \mathbb{R} su anchura, es decir, $\mu([t, s]) = s - t$. Cualquier subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ puede ser considerado como un espacio topológico con la topología inducida por la topología euclídea real. Usaremos la notación \overline{D} para referirnos a la clausura del conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ en la topología euclídea de \mathbb{R} .

Un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ de números reales es un *intervalo* si contiene a todas las combinaciones lineales convexas que se pueden hacer con dos de sus elementos, es decir, si dados $t, s \in I$ y $\lambda \in \mathbb{I}$, se cumple que $\lambda t + (1 - \lambda)s \in I$. El conjunto vacío \emptyset y el conjunto total \mathbb{R} son ejemplos de intervalos. Existen intervalos *acotados* y *no acotados*. Entre los intervalos acotados, podemos distinguir cuatro clases según sean *abiertos* (del tipo (a, b) , siendo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$), *cerrados* (a los que denotaremos por $[a, b]$, siendo $a \leq b$), *semiabiertos a la izquierda* $(a, b]$ o *semiabiertos a la derecha* $[a, b)$. Los números a y b se denominan *extremos* del intervalo (“ a ” es el *extremo inferior* y “ b ” es el *extremo superior*). El intervalo que juega un papel primordial en el contexto difuso es el intervalo cerrado y acotado $[0, 1]$, al que, por su importancia, en lo sucesivo, denotaremos por \mathbb{I} .

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real definida sobre un conjunto no vacío $D \subseteq \mathbb{R}$ (llamado *dominio* de la función f) y sea $H \subseteq D$ un cierto subconjunto no vacío de D . Diremos que f es *creciente* (o *no decreciente*) en H si $f(t_1) \leq f(t_2)$ para cada $t_1, t_2 \in H$ tales que $t_1 \leq t_2$. Si la desigualdad es estricta cuando $t_1 < t_2$, hablamos de función *estrictamente creciente* en H . La versión correspondiente al *decrecimiento* es análoga. Si una función es creciente o decreciente en H , diremos que es *monótona* en H , y, dado $c \in \mathbb{R}$, si $f(t) = c$

para cada $t \in H$, entonces diremos que f es *constante en H* .

Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *afín* en un intervalo $I \subseteq D$ si existen dos números $m, n \in \mathbb{R}$ tales que $f(t) = mt + n$ para todo $t \in I$. Toda función afín sobre un intervalo es continua y monótona. Cuando $n = 0$, la función f se dice *lineal*.

Si una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ está acotada superiormente (es decir, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) \leq s_0$ para cada $t \in D$), denotaremos el *supremo de f en D* como $\sup(f) = \sup(\{f(t) : t \in D\})$. Igualmente, si f está acotada inferiormente, utilizaremos $\inf(f)$ para referirnos a su *ínfimo*.

Una función bivariada $T : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es:

- *asociativa* si $T(t, T(s, r)) = T(T(t, s), r)$ para todo $t, s, r \in \mathbb{I}$;
- *conmutativa* (o *simétrica*) if $T(t, s) = T(s, t)$ para todo $t, s \in \mathbb{I}$;
- *creciente* si $T(t_1, s_1) \leq T(t_2, s_2)$ para todo $t_1, t_2, s_1, s_2 \in \mathbb{I}$ tales que $t_1 \leq t_2$ and $s_1 \leq s_2$;
- *continua* si lo es respecto a la topología usual en \mathbb{I} ;
- una *función promedio* (del inglés, *averaging*) si $\min\{t, s\} \leq T(t, s) \leq \max\{t, s\}$ para todo $t, s \in \mathbb{I}$;
- *0-dependiente* si $T^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$, es decir, $T(t, s) = 0$ si, y sólo si, $t = s = 0$;
- *1-dependiente* si $T^{-1}(\{1\}) = \{(1, 1)\}$, es decir, $T(t, s) = 1$ si, y sólo si, $t = s = 1$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, una función $T : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ será:

- *creciente* si $T(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq T(s_1, s_2, \dots, s_n)$ para todo $(t_1, t_2, \dots, t_n), (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{I}^n$ tales que $t_j \leq s_j$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$;

- *simétrica* si $T(t_{\sigma(1)}, t_{\sigma(2)}, \dots, t_{\sigma(n)}) = T(t_1, t_2, \dots, t_n)$ para cada $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{I}^n$ y toda permutación $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$;
- *conjuntiva* si $T \leq \text{mín}$, es decir, $T(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq \text{mín} \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ para todo $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{I}^n$;
- *disyuntiva* si $T \geq \text{máx}$, es decir, $T(t_1, t_2, \dots, t_n) \geq \text{máx} \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ para todo $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{I}^n$;
- *promediada* si $\text{mín} \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \leq T(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq \text{máx} \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ para todo $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{I}^n$.

2.1.1. Las funciones de agregación

Como comentamos en la introducción, en el mundo en el que vivimos, a menudo es importante resumir la información en un único dato, pues cada vez se generan más y más datos. Matemáticamente, ello se consigue a través de las *funciones de fusión* (del inglés, *fusion functions*) que asocian un único valor a un conjunto de n datos de un mismo tipo. En nuestro caso, son funciones $T : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ que tratan de elegir un único representante en una muestra de n de ellos. En verdad cumplen la función de las medidas de centralización, aunque con menos restricciones y sin necesidad de tener un significado claro. La media aritmética, el mínimo y el máximo son ejemplos de funciones de fusión.

En la práctica, las aplicaciones suelen requerir que dichas funciones satisfagan ciertas propiedades. Una de las más empleadas es el no decrecimiento, pues tiene un significado muy claro: cuando ciertas magnitudes crecen, la variable dependiente también crece. A esta restricción se le suelen unir otras varias, tanto en la frontera como en lo referente a continuidad. De esta forma, a lo largo de la presente Memoria, irán surgiendo toda una familia de funciones que enriquecerán los contenidos de la misma. Como punto de partida, las *funciones de agregación* que presentamos a continuación definen una familia muy amplia de operadores con multitud de aplicaciones en el campo de la computación.

Formalmente su definición es la siguiente.

Definición 2.1.1 *Una función de agregación (del inglés, aggregation function) es una función creciente $T : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ que verifica las condiciones de frontera $T(0, 0, \dots, 0) = 0$ y $T(1, 1, \dots, 1) = 1$.*

Ejemplos de funciones de agregación son los siguientes:

$$T_{\min}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \min\{t_1, t_2, \dots, t_n\},$$

$$T_{\max}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \max\{t_1, t_2, \dots, t_n\},$$

$$T_{\text{media}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n},$$

$$T(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \dots + \lambda_n t_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}, \quad \text{siendo } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, +\infty)$$

$$\text{con } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n > 0,$$

$$T(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{t_1^{\lambda_1} + t_2^{\lambda_2} + \dots + t_n^{\lambda_n}}{n}, \quad \text{siendo } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in (0, +\infty),$$

$$T_{\text{prod}}(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n,$$

$$T(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1^{\lambda_1} \cdot t_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot t_n^{\lambda_n}, \quad \text{siendo } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in (0, +\infty).$$

La variedad de ejemplos de funciones de agregación es amplísima y todas ellas pueden ser utilizadas (con mayor o menor significado) como procedimientos para resumir la información contenido en los números $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{I}$. Sin embargo, en las aplicaciones, suelen utilizarse especialmente tres de estas funciones: el mínimo, la media aritmética y el producto de todos los argumentos. Las propiedades adicionales que se le impongan a una función de agregación determinarán su comportamiento en el ámbito práctico. Es por ello que, en la introducción de esta sección, hemos presentado algunas de las propiedades que más se suelen emplear (continuidad, simetría, asociatividad, conjuntividad, etc.) Una clase muy concreta de funciones bivariadas de agregación, que surgieron inicialmente en un contexto probabilístico, es la siguiente.

Definición 2.1.2 *Una norma triangular (más conocida como t-norma) es una función creciente, conmutativa y asociativa $T : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ con elemento neutro 1 (es decir, $T(1, t) = t$ para todo $t \in \mathbb{I}$).*

Ejemplos de t-normas son los siguientes:

$$T_{\min}(t, s) = \min\{t, s\}, \quad T_{\text{prod}}(t, s) = t \cdot s, \quad T_L(t, s) = \min\{t + s - 1, 0\}.$$

Toda t-norma es una función de agregación y puede ser extendida, utilizando su simetría y su asociatividad, a cualquier número de argumentos de la siguiente forma:

$$T(t_1, t_2, \dots, t_n) = T(t_1, T(t_2, T(\dots, T(t_{n-1}, t_n))))$$

para cada $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{I}^n$. Además, el número 0 es un elemento cero de cualquier t-norma, es decir, $T(0, t) = 0$ para cada $t \in \mathbb{I}$ pues, del crecimiento y del elemento neutro se deduce que

$$0 \leq T(0, t) \leq T(0, 1) = 0$$

para cada $t \in \mathbb{I}$.

2.1.2. Las funciones de solapamiento

Las t-normas T_{\min} y T_{prod} presentan dos propiedades que son especialmente inspiradoras en la posterior definición.

- $T(t, s) = 0 \Leftrightarrow t \cdot s = 0 \Leftrightarrow \min\{t, s\} = 0 \Leftrightarrow [t = 0 \text{ o } s = 0]$;
- $T(t, s) = 1 \Leftrightarrow t \cdot s = 1 \Leftrightarrow t = s = 1$.

Su origen y sus aplicaciones han sido comentadas brevemente en la introducción, y su éxito queda de manifiesto en la gran cantidad de artículos de investigación que han hecho uso de ellas desde 2010 hasta ahora. Por ello, pasamos directamente a su definición.

Definición 2.1.3 (Bustince y otros [15]) *Una función de solapamiento (del inglés, overlap function) es una función $G : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ que verifica las siguientes propiedades.*

(G_1) G es conmutativa;

(G_2) G es creciente;

(G_3) $G(t, s) = 0$ si, y solo si $t \cdot s = 0$ (es decir, $t = 0$ o $s = 0$);

(G_4) normalidad: $G(t, s) = 1$ si, y sólo si, $t \cdot s = 1$ (es decir, $G^{-1}(\{1\}) = \{(1, 1)\}$);

(G_5) G es continua.

La palabra “*overlap*” puede ser traducida al castellano de diversas maneras. Entre ellas, pudiera traducirse por “*superposición*”. Sin embargo, con esta segunda traducción no le haríamos justicia a su origen: las funciones de solapamiento nacieron en el contexto del reconocimiento de objetos en imágenes, cuando sus bordes no están nítidamente determinados, sino que unas figuras se solapan con otras. En tal caso, dado un pixel en una zona de la imagen que pudiera pertenecer a dos posibles objetos que se solapan, ¿a cuál de ellos pertenece con mayor seguridad? Esta tarea no es sencilla ni siquiera para un ser humano, pues las dos figuras pudieran tener colores muy parecidos, o confundirse entre ellas si la iluminación no es la más adecuada. Es por ello que hemos preferido, y así procederemos a lo largo de la presente Memoria, utilizar el nombre de “*funciones de solapamiento*”.

La Figura 2.1 muestra algunos ejemplos de funciones de solapamiento. En la Subsección 3.7.2 extenderemos esta familia de funciones a una clase aún más general con objeto de tener el campo abonado de cara a la introducción de los índices de solapamiento.

2.2. Los números difusos

Esta sección está dedicada a presentar las nociones de *conjunto difuso* y de *número difuso*. De esta forma, aprovecharemos para describir las propiedades más importantes de cada uno de estos conceptos algebraicos.

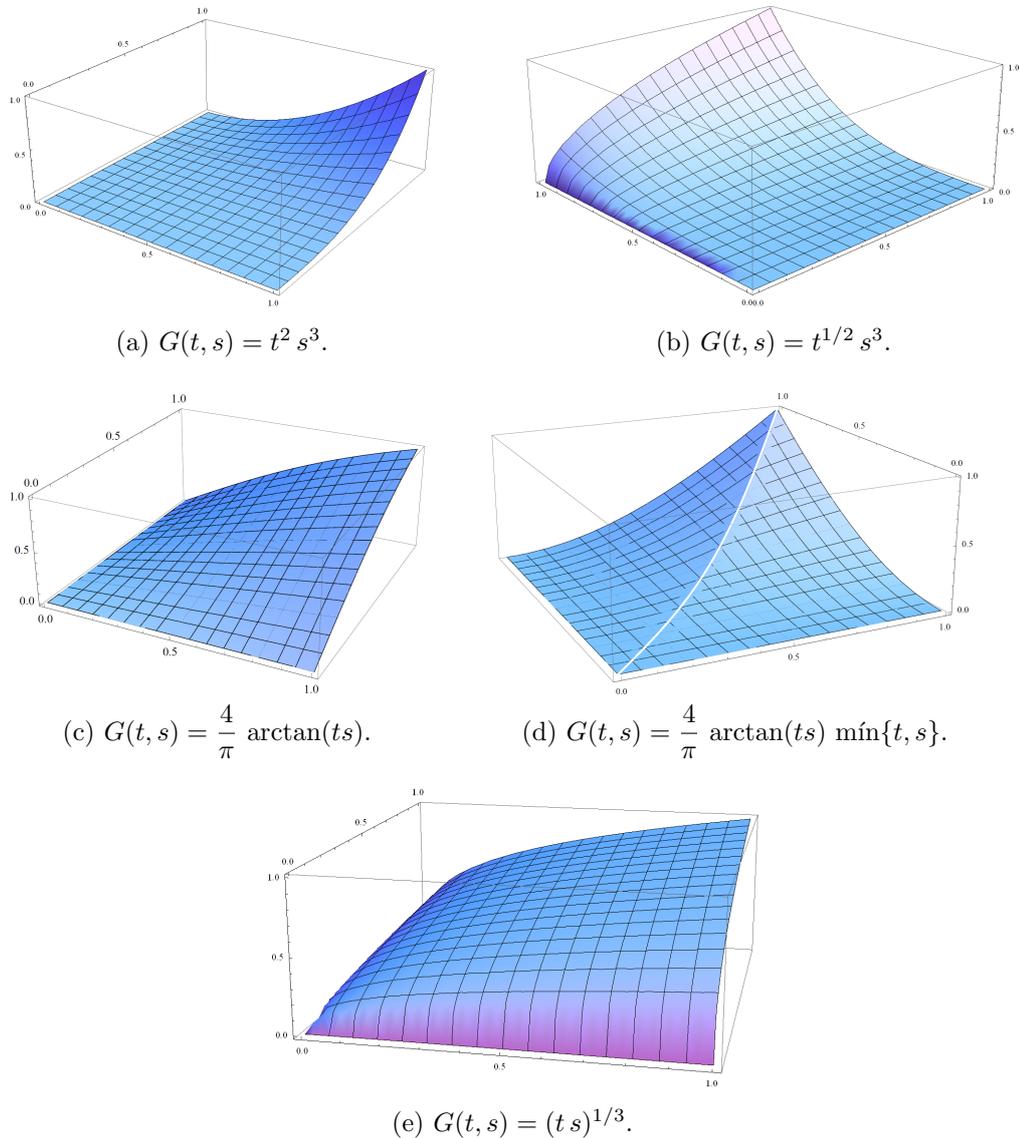


Figura 2.1: Representación gráfica de diferentes funciones de solapamiento

2.2.1. Los conjuntos difusos

Cómo se indicaba en la introducción, básicamente, un conjunto difuso sobre un conjunto no vacío, X , se puede identificar con una función real sobre X que mide el grado de pertenencia de un elemento de X al conjunto surgido de un determinado criterio clasificador. La siguiente definición se suele dar más bien en ambientes computacionales.

Definición 2.2.1 *Dado un conjunto no vacío X , un conjunto difuso (del inglés, fuzzy set) sobre X es una familia de pares $\{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$, siendo $\mu_A : X \rightarrow \mathbb{I}$ una función definida sobre X que toma valores en el intervalo \mathbb{I} (la cual se denomina función de pertenencia). Denotaremos por $\text{FS}(X)$ a la familia formada por todos los conjuntos difusos sobre X .*

El conjunto X se denomina *universo del discurso* o *referencial*. Dado un punto $x \in X$ el valor $\mu_A(x) \in \mathbb{I}$ representa el *grado de certeza* que poseemos de que el elemento $x \in X$ pertenezca, o no, al conjunto difuso A . Cuando este grado vale 1, estamos completamente seguros de que el elemento x pertenece al conjunto. Al contrario, cuando toma el valor 0, estamos absolutamente seguros de que no perteneces al mismo. No obstante, en general, cuando $\mu_A(x) \in (0, 1)$, la información que nos aporta el conjunto difuso se interpreta en forma de incertidumbre como un grado concreto, en la escala $[0, 1]$, sobre la posibilidad de que el elemento x pertenezca, o no, al conjunto difuso. De esta forma, cuanto más cercano esté a uno, mayor confianza tendremos en que el elemento pertenezca al conjunto, mientras que cuanto más cercano esté a cero, más certeza tendremos de que el elemento no pertenece al conjunto.

Se suele decir que los conjuntos difusos conllevan siempre un cierto grado de incertidumbre, pero esta afirmación no es cierta. Los conjuntos difusos que toman valores en el conjunto discreto $\{0, 1\}$ en vez de en el rango real $[0, 1]$, es decir, las funciones $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$, no conllevan en absoluto ninguna clase de incertidumbre: en ellos se sabe perfectamente cuándo un elemento pertenece, o no, al conjunto. En tales casos al conjunto difuso se le conoce como “*crisp*”.

El objeto matemático que se describe en la Definición 2.2.1 como *conjunto difuso* es lo que en un ambiente más matemático se denomina la *gráfica de la función* μ_A , cuyos puntos son pares cuya primera componente es un elemento arbitrario del conjunto X y su segunda componente es el valor que le asocia la función de pertenencia a dicho elemento. Es por ello que, desde un punto de vista práctico, nosotros vamos a llamar *conjunto difuso* a cualquier función $A : X \rightarrow \mathbb{I}$. De esta forma, abusando de la notación, para nosotros, a lo largo de

la presente Memoria, el conjunto difuso será la propia función de pertenencia, a la que denotaremos directamente por A en lugar de μ_A . Esto nos ayudará en gran medida a simplificar la notación y reducir la nomenclatura.

Dado que cualquier conjunto difuso sobre X toma únicamente valores en el intervalo \mathbb{I} , es obvio que se trata de una función acotada, tanto superior como inferiormente. Por ello, cualquier conjunto difuso sobre X posee ínfimo y supremo. Por su relevancia en lo que sigue, denotaremos por

$$\alpha_A = \sup(A) = \sup(\{A(x) : x \in X\})$$

al supremo de cualquier conjunto difuso $A \in \text{FS}(X)$. Este supremo puede, o no, ser el máximo de la función. Recordemos que un conjunto difuso $A : X \rightarrow \mathbb{I}$ posee *máximo* si existe un elemento $x_0 \in X$ tal que $A(x_0) \geq A(x)$ para cada $x \in X$. En tal caso, se dice que la función A *alcanza máximo* en el punto x_0 , y que el *valor máximo* de la función A es $A(x_0)$. Obviamente, una función con máximo puede alcanzarlo en uno o en varios puntos. El valor máximo de la función A , cuando éste existe, sí es único y, en lo que sigue, se denotará por $\text{máx}(A)$. Al igual que un conjunto difuso siempre tiene supremo, también es cierto que puede no tener máximo. No obstante, si un conjunto difuso posee máximo, entonces dicho valor necesariamente coincide con su supremo.

2.2.2. Algunos elementos geométricos y algebraicos asociados a los conjuntos difusos

Existe toda una serie de conceptos de diversa índole que, aunque los utilizaremos esencialmente en lo que sigue en el contexto de los números difusos sobre la recta real, pueden ser considerados sobre toda clase de conjuntos difusos, por lo que vamos a introducirlos con toda su generalidad en esta subsección.

Dado un conjunto difuso $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ y un número $\alpha \in (0, 1]$, llamaremos α -corte (o *conjunto de nivel α*) del conjunto difuso A , y lo denotaremos por A_α ,

al conjunto:

$$A_\alpha = \{ x \in X : A(x) \geq \alpha \}. \quad (2.1)$$

Claramente, cada α -corte es un subconjunto (vacío o no) del universo X . La importancia de los α -cortes en el campo difuso es tal que nos permiten discernir cuándo dos conjuntos difusos son iguales o no, sin necesidad de hacer intervenir ninguna topología.

Proposición 2.2.2 Dos conjuntos difusos $A, B \in \text{FS}(X)$ son iguales si, y sólo si, sus conjuntos de nivel son iguales en cada nivel $\alpha \in (0, 1]$ (es decir, $A_\alpha = B_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, 1]$).

Llamaremos *núcleo* (del inglés, *kernel*) del conjunto difuso A , y lo denotaremos por $\ker(A)$, a su 1-corte, es decir,

$$\ker(A) = A_1 = \{ x \in X : A(x) \geq 1 \}.$$

Dado que el número 1 es una cota superior de la imágenes de cualquier conjunto difuso, en realidad dicho núcleo puede ser descrito como:

$$\ker(A) = \{ x \in X : A(x) = 1 \}.$$

El núcleo de un conjunto difuso puede ser vacío. Esta situación se produce cuando no existe ningún elemento en X del que tengamos la certeza absoluta de que pertenece al conjunto difuso A . Ni siquiera cuando el supremo de A sea igual a 1 podremos estar seguros de que el núcleo de A es no vacío, pues, incluso en tal caso, el conjunto difuso puede no alcanzar su máximo.

En la mayoría de textos sobre el tema, se define el *soporte de un conjunto difuso* A como el conjunto de elementos de X sobre los que tenemos alguna certeza de que puedan pertenecer al conjunto difuso A , es decir, al conjunto:

$$\{ x \in X : A(x) > 0 \} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} A_\alpha.$$

Esta definición es muy adecuada cuando el conjunto X no está dotado de una topología. Sin embargo, a lo largo de la presente Memoria, sólo consideraremos

conjuntos difusos sobre la recta real, es decir, tomaremos $X = \mathbb{R}$, conjunto en el que no podemos obviar su topología usual. El por ello que, cuando X esté dotado de una topología concreta, llamaremos *soporte de un conjunto difuso* $A \in \text{FS}(X)$, y lo denotaremos por $\text{supp}(A)$, a la clausura en dicha topología del conjunto descrito anteriormente, es decir,

$$\text{supp}(A) = \overline{\{x \in X : A(x) > 0\}} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} A_\alpha}. \quad (2.2)$$

Es usual utilizar la notación A_0 para referirse al soporte de A , si bien debemos aclarar que dicho soporte no es un α -corte con la definición usual dada en (2.1). Esta notación tiene la desventaja de que necesita de una topología en X , pero tiene la ventaja de que cualquier soporte de un conjunto difuso es un conjunto necesariamente cerrado en la topología considerada. Para nosotros, esta segunda propiedad será muy importante, por lo que la notación que empleamos para el soporte simplificará el enunciado de los resultados que vayamos obteniendo en el caso real.

Es claro que si $\alpha, \beta \in (0, 1]$ verifica que $\alpha \leq \beta$, entonces

$$\ker(A) = A_1 \subseteq A_\beta \subseteq A_\alpha \subseteq \{x \in X : A(x) > 0\} \subseteq \text{supp}(A), \quad (2.3)$$

lo que significa que la familia de α -cortes $\{A_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]}$ es una familia de conjuntos *encajados* encajados los unos dentro de los otros. La cadena de inclusiones dada por (2.3) será el motor sobre el que desarrollaremos la Sección 3.3. Comentar finalmente que existen ejemplos de que cualquiera de las inclusiones anteriores podrían ser estrictas o podrían ser igualdades.

Cuando, como hemos hecho, acotamos la imagen de las funciones reales al intervalo \mathbb{I} , su interpretación es más sencilla. De esta forma, podemos observar el cuerpo probabilístico como una restricción del *corpus* difuso. En lo que sigue, estamos únicamente interesados en el manejo de conjuntos difusos sobre la recta real, es decir, tomaremos $X = \mathbb{R}$ y consideraremos, exclusivamente, conjuntos difusos de la familia $\text{FS}(\mathbb{R})$. Sin embargo, aunque pueda no parecerlo, la variedad y vastedad de esta familia la hacen, en muchos casos, inmanejable. Nuestras

pretensiones no son tan amplias como para tener la necesidad de abarcar este conjunto en general. Es por ello que nos restringiremos, en muchas ocasiones, al conjunto $\text{FS}(\mathbb{I})$ formado por todos los conjuntos difusos sobre el intervalo cerrado y acotado $\mathbb{I} = [0, 1]$. Dado que utilizaremos muy a menudo el conjunto $\text{FS}(\mathbb{I})$, en lo que sigue, lo denotaremos simplemente por FS . Cualquier conjunto difuso $A \in \text{FS}(\mathbb{R})$ cuyo soporte esté contenido en \mathbb{I} verifica que $A(t) = 0$ para cada $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$. Recíprocamente, cualquier conjunto difuso $A \in \text{FS}$ puede ser extendido a \mathbb{R} con tal de definir:

$$\tilde{A}(t) = \begin{cases} A(t), & \text{si } t \in \mathbb{I}, \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}. \end{cases}$$

De esta forma, $\tilde{A} \in \text{FS}(\mathbb{R})$ y su restricción a \mathbb{I} coincide con A . Es por ello que, en lo sucesivo, no haremos distinciones entre conjuntos difusos sobre \mathbb{I} (de la familia FS) y conjuntos difusos de $\text{FS}(\mathbb{R})$ con soporte incluido en \mathbb{I} .

El siguiente enunciado muestra que, en general, el conjunto FS es tan variado, e incluso más, que la familia $\text{FS}(\mathbb{R})$.

Lema 2.2.3 (a) Si $a, b \in \mathbb{R}$ son dos números reales tales que $a < b$ y denotamos por $\phi : \mathbb{I} \rightarrow [a, b]$ a la función definida por $\phi(t) = (1 - t)a + tb$ para cada $t \in \mathbb{I}$, entonces la aplicación $\psi_1 : \text{FS}([a, b]) \rightarrow \text{FS}$, definida, para cada $A \in \text{FS}([a, b])$, como:

$$[\psi_1(A)](t) = \begin{cases} A(\phi(t)), & \text{si } t \in \mathbb{I}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es una biyección entre $\text{FS}([a, b])$ y FS .

(b) Si $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función biyectiva¹ entre el intervalo $(0, 1)$ y \mathbb{R} , entonces la aplicación $\psi_2 : \text{FS}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{FS}$ definida, para cada $A \in \text{FS}(\mathbb{R})$, como:

$$[\psi_2(A)](t) = \begin{cases} A(\varphi(t)), & \text{si } t \in (0, 1), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

¹La función $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \frac{t - 0.5}{t(1 - t)}$ puede ser computada en este apartado.

es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN: **(a)** La función $\phi : \mathbb{I} \rightarrow [a, b]$ dada por $\phi(t) = (1 - t)a + bt$ con $t \in \mathbb{I}$ es una biyección entre el intervalo \mathbb{I} y el intervalo $[a, b]$, y su función inversa viene dada por

$$\phi^{-1}(s) = \frac{s - a}{b - a} \quad \text{para cada } s \in [a, b].$$

Probemos, en primer lugar, que ψ_1 es inyectiva. Sean $A, B \in \text{FS}([a, b])$ tales que $\psi_1(A) = \psi_1(B)$. Entonces $A, B : [a, b] \rightarrow \mathbb{I}$ son dos conjuntos difusos que satisfacen que:

$$A(\phi(t)) = [\psi_1(A)](t) = [\psi_1(B)](t) = B(\phi(t)) \quad \text{para cada } t \in \mathbb{I}.$$

Dado que ϕ es una biyección, deducimos que $A(s) = B(s)$ para cada $s \in [a, b]$, de donde se concluye que $A = B$ y, por tanto, ψ_1 es inyectiva.

Veamos ahora que ψ_1 es sobreyectiva. Sea $A' \in \text{FS}$ arbitrario. Entonces $A' : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es una función del intervalo \mathbb{I} en el intervalo \mathbb{I} . Llamemos A a la composición $A = A' \circ \phi^{-1}$. Entonces $A = A' \circ \phi^{-1} : [a, b] \rightarrow \mathbb{I}$, lo que significa que $A \in \text{FS}([a, b])$ es un conjunto difuso sobre $[a, b]$. Además, este conjunto verifica que, para cada $s \in [a, b]$,

$$[\psi_1(A)](s) = A(\phi(s)) = (A' \circ \phi^{-1})(\phi(s)) = A'(\phi^{-1}(\phi(s))) = A'(s).$$

Por consiguiente, $\psi_1(A) = A'$ y esto demuestra que ψ_1 es sobreyectiva.

(b) Se procede de forma similar al caso anterior. ■

El lema anterior nos muestra que la familia FS de conjuntos difusos definidos sobre \mathbb{I} (o definidos sobre \mathbb{R} pero con soporte contenido en \mathbb{I}) es algebraicamente idéntica a la familia $\text{FS}([a, b])$ de conjuntos difusos definidos sobre cualquier intervalo cerrado y acotado real no reducido a un punto. Es más, aunque pudiéramos pensar que la inclusión $\text{FS} \subset \text{FS}(\mathbb{R})$ es estricta, desde el punto de vista del Álgebra también es cierto que $\text{FS}(\mathbb{R}) \subset \text{FS}$. En definitiva, el hecho de restringir este estudio a la familia de conjuntos difusos con soporte en \mathbb{I} no parece, en absoluto, una restricción importante.

Obsérvese también que la familia FS es incluso mayor que la imagen $\psi_2(\text{FS}(\mathbb{R}))$. Por ejemplo, el conjunto difuso $A \in \text{FS}$ definido por $A(t) = 1$ para cada $t \in \mathbb{I}$ no pertenece a $\psi_2(\text{FS}(\mathbb{R}))$ ya que los conjuntos difusos de la imagen $\psi_2(\text{FS}(\mathbb{R}))$ están obligados a verificar que $[\psi_2(A)](0) = [\psi_2(A)](1) = 0$.

2.2.3. Los números difusos

La realidad cotidiana está caracterizada por la incertidumbre. La función de pertenencia, una “argucia” para cuantificar esa incertidumbre (no siempre posible e, incluso, ni tan siquiera medible en sí misma), tiene un claro componente probabilístico. Pero ese carácter exige una regularidad a la propia función.

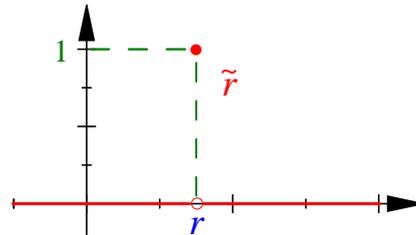
Por supuesto, si las condiciones de medibilidad fuesen las exigidas a la medida de probabilidad, el aparato estadístico haría su trabajo de forma eficiente. La idea de tipificar “mínimamente” esas medidas generan un tipo especial de conjuntos difusos, conservando la intencionalidad del campo probabilístico pero debilitado y, por tanto, abarcando una gran cantidad de situaciones. Nace, pues, la noción de *número difuso*.

En primer lugar, hemos de aclarar que la noción de “número difuso” no es única, es decir, no existe una definición globalmente aceptada y uniformemente empleada de “número difuso”. Consultando diferentes textos sobre esta temática, nos damos cuenta rápidamente de que distintos autores emplean restricciones diferentes para establecer la noción de “número difuso”, lo que da lugar a conceptos ligeramente diferentes de unos estudios a otros.

En lo que no hay discusión alguna es en el ejemplo clave que motiva a extender la noción de número real al ambiente difuso. Dado un número real $r \in \mathbb{R}$, un conjunto difuso sobre \mathbb{R} que trate de extender al número real al contexto difuso debe ser una función $\tilde{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ que tome dos clases de valores: el valor 1 sobre r , ya que estamos absolutamente seguros de que deseamos generalizar el número real r , y el valor 0 sobre todos los demás números reales, de los que estamos absolutamente seguros que son diferentes a r . De esta forma, la función

$\tilde{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ debe estar definida, para cada $t \in \mathbb{R}$, como:

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = r, \\ 0, & \text{si } t \neq r. \end{cases}$$



A esta clase de números difusos se les denomina *crisp* pero, ¿cuáles son las propiedades analíticas, geométricas y algebraicas que caracterizan a esta clase de conjuntos difusos para que luego puedan ser extendidas también al contexto difuso las operaciones aritméticas básicas reales?

Para responder a esta cuestión, vamos a presentar a continuación la definición concreta que nosotros utilizaremos a lo largo de la presente Memoria, avisando desde ya que no es la más usual (pueden consultarse otras definiciones en [40, 41, 90, 91, 110, 111]), y aclararemos después las distintas condiciones en las que suelen diferir las nociones presentadas por otros autores.

Definición 2.2.4 (cf. [96, 97, 99, 101]) *Un número difuso (de la recta real) es un conjunto difuso $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ sobre \mathbb{R} que satisface las siguientes propiedades.*

(FN₁) Existencia de máximo absoluto: *existe un punto $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}(t_0) \geq \mathcal{A}(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.*

(FN₂) Convexidad difusa: *para cada $t, s \in \mathbb{R}$ y cada $\lambda \in \mathbb{I}$ se verifica que*

$$\mathcal{A}(\lambda t + (1 - \lambda)s) \geq \min \{ \mathcal{A}(t), \mathcal{A}(s) \}. \quad (2.4)$$

(FN₃) Semicontinuidad superior: *para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$t \in \mathbb{R}, |t - t_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t_0) < \varepsilon.$$

Un número difuso se dice normal si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{A}(t_0) = 1$.

Denotaremos por $\text{FN}(\mathbb{R})$ a la familia formada por todos los números difusos de la recta real, y por $\text{FN} = \text{FN}(\mathbb{I})$ a la familia formada por todos los números difusos de la recta real cuyo soporte esté contenido en el intervalo \mathbb{I} .

Acerca de la definición anterior, cabe realizar los siguiente comentarios.

- En primer lugar, debemos aclarar la notación. Para distinguir los números difusos de los conjuntos difusos, emplearemos letras enfatizadas (del tipo \mathcal{A} , \mathcal{B} o \mathcal{C}) para referirnos a números difusos sobre \mathbb{R} , y emplearemos la caligrafía usual (como A , B o C) para referirnos a conjuntos difusos generales sobre \mathbb{R} (o conjuntos difusos que no poseen una estructura *a priori* pero que, tras su estudio detallado, resulten ser números difusos).
- En segundo lugar, observemos que cualquier número difuso sobre la recta real es, en particular, un conjunto difuso sobre \mathbb{R} , y, consecuentemente, podemos asociarle todas las estructuras algebraicas que de han definido en la subsección anterior. Por ejemplo, cualquier número difuso \mathcal{A} posee:
 - ▶ α -cortes, definidos por $\mathcal{A}_\alpha = \{t \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(t) \geq \alpha\}$ para cada $\alpha \in (0, 1]$;
 - ▶ núcleo, que es $\ker \mathcal{A} = \{t \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(t) = 1\}$;
 - ▶ soporte, dado por

$$\mathcal{A}_0 = \text{supp}(\mathcal{A}) = \overline{\{t \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(t) > 0\}} = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \mathcal{A}_\alpha,$$

para cuya definición se emplea la topología euclídea de \mathbb{R} .

- Obsérvese que la condición de *convexidad difusa* no se corresponde en absoluto con la condición de *convexidad* de funciones en el ambiente del Análisis Funcional. La condición general de convexidad para funciones impone que el dominio de la función sea un intervalo I y que, dentro del mismo, debe cumplirse que, para cada $t, s \in I$ y cada $\lambda \in \mathbb{I}$:

$$\mathcal{A}(\lambda t + (1 - \lambda)s) \leq \lambda \mathcal{A}(t) + (1 - \lambda)\mathcal{A}(s).$$

Obviamente, esta condición es muy distinta de la expresada por la inecuación (2.4), por lo que debemos ser cautos y distinguir entre *convexidad* general y *convexidad difusa*.

- Como se ha comentado anteriormente, no existe un acuerdo mayoritario sobre la definición de “número difuso”, siendo su carácter dúctil (adaptable a cada investigador e investigación) su ventaja y, por ende, su dificultad de unificación. Mientras que, en los conjuntos difusos, la función de pertenencia recibe la carga de variaciones, las propiedades exigibles a un número difuso se manifiestan, al menos en la mayoría de los autores, mediante tres principios, que son los comentados en la Definición 2.2.4.
- A modo de ejemplo, comentamos dos aspectos en los que las definiciones empleadas en los artículos científicos suelen diferir. Por un lado, en el contexto real, unos autores consideran que el soporte de un número difuso debe ser siempre acotado en \mathbb{R} , y otros hacen caso omiso de esta condición. Esto da lugar claramente a familias de conjuntos difusos bien distintas. Por otro lado, lo más frecuente es imponer que un número difuso debe ser obligatoriamente normal, es decir, debe alcanzar el valor 1 en algún punto de su dominio. No obstante, a lo largo de la presente Memoria, vamos a considerar conjuntos difusos que no alcanzan necesariamente la condición de normalidad, por lo que no nos conviene imponer, de entrada, que un número difuso sea necesariamente normal. En definitiva, independientemente de la cuestión del soporte, en la mayoría de trabajos científicos se llama “número difuso” a lo que aquí denominaremos “número difuso normal”.
- Teniendo en cuenta el comentario anterior, debemos aconsejar a cualquier investigador que se acerque a un artículo de investigación que, desde el principio, se haga una idea clara y precisa de la definición de número difuso que emplea ese autor o autores, pues de las propiedades que se impongan dependerán los resultados que se obtengan.

- Consideramos que la propiedad de normalidad es muy restrictiva al modelar el tipo de números difusos y, para el propósito de esta Memoria, puede resultar excesivamente fuerte; por lo que, sólo cuando sea necesario, se indicará el carácter normal del número difuso de trabajo. No obstante, la normalidad ofrece ventajas innegables como, por ejemplo, una identificación topológica sencilla de un número difuso normal.
- La palabra “*normalidad*” es la que se usa más a menudo para referirse a la condición según la cual un conjunto difuso $A : X \rightarrow \mathbb{I}$ disfruta de un punto $x_0 \in X$ tal que $A(x_0) = 1$. Pensamos que también pudiera emplearse en castellano la palabra “*normabilidad*”, pues ésta hace referencia a la condición de que el conjunto difuso alcanza el máximo de su rango normado entre 0 y 1.
- Recientemente se ha abierto un amplio debate sobre si la noción de número difuso es excesivamente restrictiva y se ha planteado la necesidad de modificar algunos de los axiomas que lo definen. Puede tratarse esta cuestión de una línea de estudio de gran interés para el futuro.
- Al igual que ocurre con los conjuntos difusos, los conjuntos de nivel caracterizan completamente al número difuso. Su uso constituirá la base de nuestra estrategia sobre la que construiremos el operador de aproximación en el Capítulo 3.
- Los núcleos de los números difusos son vacíos excepto en el caso de que sean normales.

2.2.4. Los tipos más usuales de números difusos

Para comprender a fondo el concepto de número difuso, lo mejor es recurrir a la representación gráfica del mismo, toda vez que sabemos que es una función real de variable real. A continuación, describiremos algunas familias notables de números difusos, especialmente porque se emplean a menudo en los estudios

científicos que involucran números difusos. Como se podrá observar, todas estas familias se corresponden con representaciones geométricas muy sencillas que, precisamente, dotan de nombre propio a la familia en su conjunto. En todos los casos puede demostrarse fácilmente que se cumplen las propiedades de la Definición 2.2.4, pero llamamos la atención sobre las siguientes características comunes a todos ellos que pueden deducirse de los axiomas correspondientes.

- Las siguientes familias están formadas por números difusos normales. Además, si t_0 es un punto en el que se alcanza la normalidad, entonces el número difuso \mathcal{A} es no decreciente en $(-\infty, t_0]$ y no creciente en $[t_0, +\infty)$.
- Como consecuencia, los números difusos son funciones continuas casi por doquier en \mathbb{R} .
- Los conjuntos de nivel de los números difusos son subintervalos cerrados reales (ya sean acotados o no).
- Cuando un número difuso $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ es una función no continua en un punto $t_0 \in \mathbb{R}$, en dicho punto existen los límites laterales $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathcal{A}(t)$ y $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathcal{A}(t)$, y el valor de la función \mathcal{A} en t_0 coincide con el mayor de los dos límites anteriores, es decir,

$$\mathcal{A}(t_0) = \max \left\{ \lim_{t \rightarrow t_0^-} \mathcal{A}(t), \lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathcal{A}(t) \right\}. \quad (2.5)$$

Detallamos a continuación algunas de estas familias de números difusos.

Los números difusos *crisp*

Su principal interés radica en que aportan una visión “difusa” del número real, es decir, representan la extensión natural del concepto número real a la terminología difusa. Como se ha comentado antes, si $r \in \mathbb{R}$ es un número real,

definimos el número difuso *crisp* $\tilde{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ como:

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = r, \\ 0, & \text{si } t \neq r. \end{cases}$$

La condición de *normalidad* que se requiere a un número difuso en muchos contextos difusos tiene su origen en esta clase de números difusos, que alcanzan el valor 1 cuando $t = r$.

Los números difusos rectangulares

Estos responden a la siguiente expresión:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [a, b], \\ 0, & \text{si } t \notin [a, b], \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son números reales ordenados en la forma $a \leq b$. En el caso de que $a = b$, hablaríamos de un número difuso *crisp*, es decir, los números difusos *crisp* se pueden ver como números rectangulares degenerados. Por consiguiente, los números difusos *crisp* son los números rectangulares fruto de la simplificación máxima en sus condiciones. La Figura 2.2 nos muestra los dos tipos anteriores.

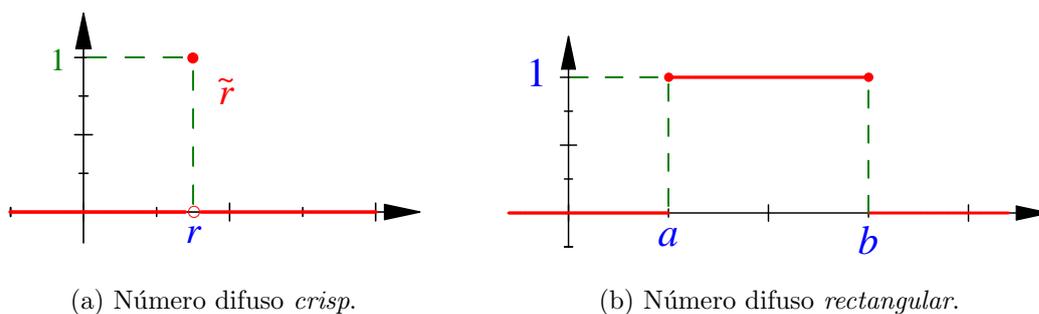


Figura 2.2: Ejemplos de números difusos: *crisp* y *rectangular*

Los números difusos triangulares

Una de las situaciones más simples, y no por ello menos difundidas y aplicadas, consiste en considerar a las funciones como aplicaciones afines a trozos.

De esta forma, surgen las siguientes definiciones. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tres números reales tales que $a \leq b \leq c$. Mediante la expresión $\mathcal{A} = (a/b/c)$ denotamos al número difuso *triangular* definido como:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & \text{si } a < t < b, \\ 1, & \text{si } t = b, \\ \frac{c-t}{c-b}, & \text{si } b < t < c, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Los números a, b y c se denominan las *esquinas* del número difuso triangular \mathcal{A} . Cuando $a < b < c$, su gráfica es claramente triangular, como se muestra en la Figura 2.3, (a). Dado cualquier $\alpha \in (0, 1]$, el α -corte del número difuso triangular $\mathcal{A} = (a/b/c)$ es:

$$\mathcal{A}_\alpha = [(1-\alpha)a + \alpha b, (1-\alpha)c + \alpha b],$$

expresión que también es válida para $\alpha = 0$. Si $b = \frac{a+c}{2}$ hablamos de número difuso triangular *simétrico*. Cuando $a = b$ o $b = c$, el número difuso triangular $(a/b/c)$ no es una función continua en $t = b$. Es más, cuando $a = b = c$, el número triangular es, concretamente, *crisp*. Sin embargo, los números rectangulares no pueden ser modelizados como triangulares.

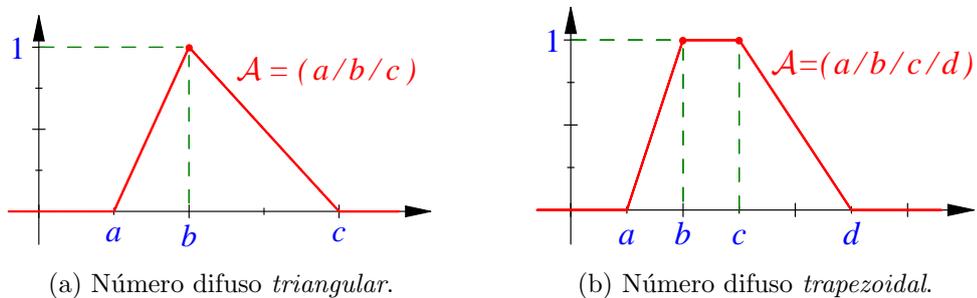


Figura 2.3: Ejemplos de números difusos: triangular y trapezoidal

Los números difusos trapezoidales

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq b \leq c \leq d$. Con la expresión $\mathcal{A} = (a/b/c/d)$ denotamos al número difuso:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & \text{si } a < t < b, \\ 1, & \text{si } b \leq t \leq c, \\ \frac{d-t}{d-c} & \text{si } c < t < d, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

cuya gráfica, como muestra la Figura 2.3, (b), se corresponde con la de un trapecio cuando $a < b < c < d$. Los números a, b, c y d se denominan *esquinas* del número difuso. Su α -corte viene dado por:

$$\mathcal{A}_\alpha = [(1-\alpha)a + \alpha b, (1-\alpha)d + \alpha c]$$

para cada $\alpha \in (0, 1]$. Cuando $a = b$, el número difuso trapezoidal $(a/b/c/d)$ es una función no continua en $t = b$, y cuando $c = d$, no es continua en $t = c$. Nos encontramos con una subfamilia de números difusos que recoge a todos los casos anteriormente mostrados. Estos números son muy frecuentes en los ámbitos experimentales. Los investigadores suelen recurrir a ellos cuando establecen una certeza empírica de que la mayor parte de la información se encuentra en el núcleo del número difuso.

Los números difusos de tipo LR

Abandonamos la linealidad de los “lados” del número difuso y trabajamos con funciones más generales. Sean $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ cuatro números reales tales que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ y sean $\omega_1, \omega_2 \in (0, 1]$ con $\omega_1 \leq \omega_2$. Sean $L : [a_1, a_2] \rightarrow [0, \omega_1]$ y $R : [a_3, a_4] \rightarrow [0, \omega_1]$ dos funciones continuas tales que L es estrictamente creciente, R es estrictamente decreciente, $L(a_1) = 0 = R(a_4)$ y

$L(a_2) = \omega_1 = R(a_3)$ Al número difuso \mathcal{A} , definido mediante:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{cases} L(t), & \text{si } a_1 < t < a_2, \\ \omega_2, & \text{si } a_2 \leq t \leq a_3, \\ R(t) & \text{si } a_3 < t < a_4, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (2.6)$$

se le denomina *número difuso de tipo LR* (del inglés, *left-right*). En lo sucesivo lo denotaremos por $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}$. Una posible representación gráfica se muestra en la Figura 2.4, (a).

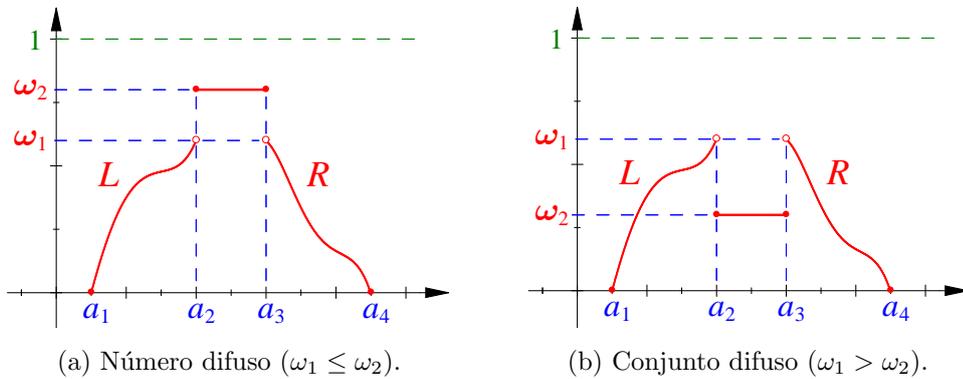


Figura 2.4: Representación gráfica de las dos clases de conjuntos difusos *LR* de tipo

$$\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}$$

Los elementos propios de este tipo de números difusos vienen dados por:

$$\text{supp}(\mathcal{A}) = [a_1, a_4] \quad \text{y} \quad \text{ker}(\mathcal{A}) = \begin{cases} [a_2, a_3], & \text{si } \omega_2 = 1, \\ \emptyset, & \text{si } \omega_2 < 1. \end{cases}$$

Dado que suponemos que $\omega_1 \leq \omega_2$, el número difuso $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}$ posee máximo absoluto en todos los puntos del intervalo $[a_2, a_3]$, y dicho máximo absoluto es ω_2 . La interpretación gráfica de ω_2 es una meseta a altura ω_2 que, en el caso $\omega_2 < 1$, da lugar a números difusos no normales.

Si $\omega_2 = 1$ y las funciones L y R adquieren un carácter afín, estaremos en el caso de las subfamilias anteriores.

Otras familias de números difusos

Dado que se utilizarán más adelante, introducimos aquí las siguientes clases de números difusos. Dados $r, \omega \in \mathbb{I}$, denotamos por \mathbf{r} y por \tilde{r}_ω a las siguientes aplicaciones de \mathbb{I} en \mathbb{I} (véase la Figura 2.5):

$$\mathbf{r}(t) = r \quad \text{para cada } t \in \mathbb{I}; \quad \tilde{r}_\omega(t) = \begin{cases} \omega, & \text{si } t = r, \\ 0, & \text{si } t \neq r. \end{cases}$$

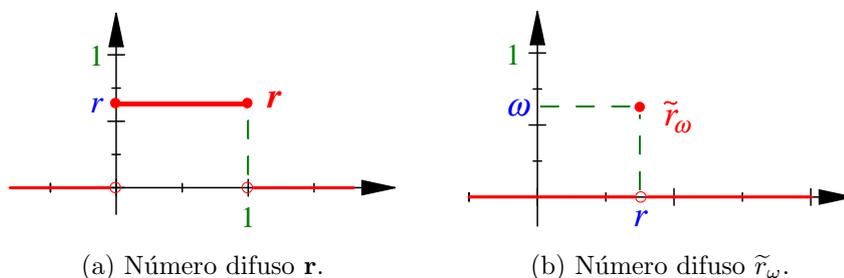


Figura 2.5: Representación gráfica de los números difusos \mathbf{r} y \tilde{r}_ω

Por un lado, aunque no verifica la condición de normalidad, el número difuso $\mathbf{0}$ es un número difuso muy especial: por ejemplo, desde esta perspectiva, es el único número difuso (de hecho, el único conjunto difuso) cuyo soporte es vacío. Además, cualquier proceso coherente de ranking entre números difusos de la familia FN debería determinar que $\mathbf{0}$ es su mínimo absoluto. Por otro lado, los números difusos *crisp* $\{\tilde{r}_1 = \tilde{r} : r \in \mathbb{I}\}$ corresponde a los números reales del intervalo \mathbb{I} . Desde nuestro punto de vista, el número difuso *crisp* $\tilde{1}_1$, que se corresponde con el número real 1, debería ser considerado el máximo absoluto del conjunto FN cuando se aplica cualquier metodología de ranking en FN. Obsérvese que muchos autores solo aceptarían que son números difusos $\mathbf{1}$ y $\{\tilde{r}_1 : r \in \mathbb{I}\}$, pues las restantes funciones no satisfacen la condición de normalidad. Es más, declarar que “ $\mathbf{0}$ es un número difuso” es una afirmación ciertamente curiosa, que podría impactar en ciertos ambientes que requieren la condición de normalidad.

2.2.5. Acerca de los conjuntos de nivel de un número difuso y de su soporte

Salvo por la concatenación mostrada por la cadena de inclusiones dada en (2.3), los conjuntos de nivel de un conjunto difuso sobre la recta real pueden adquirir una forma muy extraña, caprichosamente arbitraria. No obstante, ello no puede pasar con los conjuntos de nivel de un número difuso, pues estos deben ser, obligatoriamente, subintervalos cerrados de \mathbb{R} (ya sean acotados o no). Esta condición se deduce de la convexidad difusa dada por la condición (FN_2) , que afirma que para cada $t, s \in \mathbb{R}$ y cada $\lambda \in \mathbb{I}$ se verifica que

$$\mathcal{A}(\lambda t + (1 - \lambda)s) \geq \min \{\mathcal{A}(t), \mathcal{A}(s)\}.$$

De esta forma, si $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ es un número difuso y tomamos cualesquiera $t, s \in \mathcal{A}_\alpha$, con $\alpha \in (0, 1]$, tendremos que $\mathcal{A}(t) \geq \alpha$ y $\mathcal{A}(s) \geq \alpha$. Así, $\min \{\mathcal{A}(t), \mathcal{A}(s)\} \geq \alpha$, de donde $\mathcal{A}(\lambda t + (1 - \lambda)s) \geq \alpha$, lo que demuestra que $\lambda t + (1 - \lambda)s$ también pertenece a \mathcal{A}_α . Consecuentemente, \mathcal{A}_α es un subintervalo real. Por otro lado, su condición de conjunto cerrado se deduce de la semicontinuidad superior. Para demostrarlo, tomemos un subintervalo abierto no vacío y acotado (a, b) contenido en \mathcal{A}_α , dentro del cual sabemos que $\mathcal{A}(t) \geq \alpha$ para cada $t \in \mathcal{A}_\alpha$. Según (2.5),

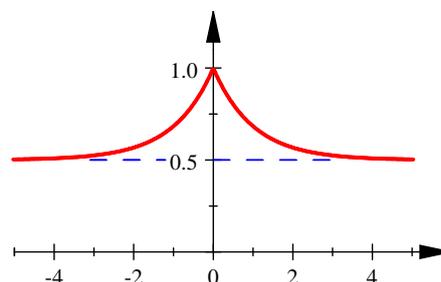
$$\mathcal{A}(a) = \max \left\{ \lim_{t \rightarrow a^-} \mathcal{A}(t), \lim_{t \rightarrow a^+} \mathcal{A}(t) \right\} \geq \lim_{t \rightarrow a^+} \mathcal{A}(t) \geq \alpha,$$

por lo que $a \in \mathcal{A}_\alpha$, e igualmente se prueba que $b \in \mathcal{A}_\alpha$, lo que significa que \mathcal{A}_α contiene a los puntos de su posible frontera, es decir, es un conjunto cerrado en \mathbb{R} .

Cuando el soporte de un número difuso \mathcal{A} no es acotado, los conjuntos de

nivel pueden ser intervalos no acotados. Es el caso del número difuso dado por:

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1 + e^{-|t|}}{2} \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$



el cual verifica que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{2},$$

por lo que $\mathcal{A}_\alpha = \mathbb{R}$ para cada $\alpha \in (0, 0.5]$. Esta condición de no acotación del soporte suele ser, en muchos casos, contraintuitiva. Cuando se hace un estudio empírico, lo usual es esperar valores de una variable dentro de un rango concreto. Es cierto que a veces nos encontramos con *valores extremos* (o *outliers*), pero estos tampoco son excesivamente sorprendentes (por ejemplo, al medir la estatura de una persona, el intervalo entre 0 y 4 metros debe ser más que suficiente). Es por ello que la mayoría de autores optan por uno de los dos siguientes caminos: o bien en la Definición 2.2.4 de número difuso añaden la condición de que el soporte debe ser necesariamente acotado, o bien no la añaden, pero comentan que, en sus respectivos estudios, sólo están interesados en el manejo de números difusos de soporte compacto. Ambas perspectivas son coherentes con el hecho de que la mayoría de los números difusos que se manejan en los estudios empíricos utilizan ejemplos de los que hemos mostrado en la subsección anterior (como mucho suelen ser trapezoidales), los cuales tienen siempre soporte acotado.

La discusión anterior nos permite también entender la razón por la que, en el caso de los números difusos de la recta real, no hemos definido el soporte como el conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(t) > 0\}$, sino como su clausura en la topología euclídea. Veamos un ejemplo. Si consideramos el número difuso triangular $\mathcal{A} = (1/2/3)$, se tiene que el conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \mathcal{A}(t) > 0\}$ coincide con el intervalo abierto $(1, 3)$. Es cierto que se trata de un intervalo acotado, pero no es compacto. En general, suele desearse que el soporte de un número difuso sobre la recta real sea compacto (cerrado y acotado) debido a las especiales características de los

conjuntos compactos. De esta forma, en lo sucesivo, cuando tomemos un número difuso de la recta real y sepamos que su soporte es acotado, entonces podremos afirmar que es compacto.

Para el caso particular de la presente Memoria, la consideración de números difusos como entidades algebraicas de soporte acotado o no carecerá de sentido pues, en el Capítulo 3 nos restringiremos a números difusos de la familia FN, cuyo soporte está contenido en el intervalo \mathbb{I} . Por consiguiente, sus soportes serán siempre compactos (conjuntos cerrados dentro de un conjunto compacto).

Cuando un número difuso \mathcal{A} posee soporte acotado, sus conjuntos de nivel $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ son subintervalos cerrados dentro de un conjunto acotado. Por consiguiente, son conjuntos compactos que, en el caso de los intervalos, se plasma en intervalos cerrados y acotados. Es por ello que cada conjunto de nivel es un intervalo de la forma

$$\mathcal{A}_\alpha = [\mathcal{A}_L(\alpha), \mathcal{A}_U(\alpha)], \quad \text{donde } \alpha \in (0, 1].$$

Surgen así dos funciones $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_U : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que determinan los extremos inferior y superior de cada uno de los α -cortes. De hecho, esta expresión también es válida para $\alpha = 0$, cuando, por convenio, hemos fijado que $\mathcal{A}_0 = \text{supp}(\mathcal{A})$ denote el soporte de \mathcal{A} . Estas funciones determinan completamente los α -cortes y, dado que los α -cortes caracterizan al conjunto difuso en general, es posible demostrar el siguiente enunciado.

Lema 2.2.5 (cf. [52, 68]) Un conjunto difuso $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ de soporte acotado es un número difuso si, y solo si, existen dos funciones continuas a la izquierda $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_U : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que \mathcal{A}_L es no decreciente, \mathcal{A}_U es no creciente y $\mathcal{A}_\alpha = [\mathcal{A}_L(\alpha), \mathcal{A}_U(\alpha)]$ para cada $\alpha \in \mathbb{I}$.

En algunos textos, las funciones \mathcal{A}_L y \mathcal{A}_U se denotan por \underline{a} y \bar{a} (véase, por ejemplo, [99, 102, 103]), empleándose la notación siendo $\underline{a}_\alpha = \underline{a}(\alpha) = \mathcal{A}_L(\alpha)$ y $\bar{a}_\alpha = \bar{a}(\alpha) = \mathcal{A}_U(\alpha)$, que es cómoda a la hora de escribir $\mathcal{A}_\alpha = [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha]$ para cada $\alpha \in \mathbb{I}$.

2.2.6. Marco estadístico de los números difusos

La ejemplarización del concepto de función de pertenencia mediante la función de distribución es un excelente icono del propio conjunto difuso. Sin embargo, limitarse a estas situaciones “idílicas” restarían interés a la propia lógica difusa. El aparato estadístico debe ser considerado una restricción muy específica de la teoría difusa, convirtiéndose, ésta, en una potente extensión de la probabilidad.

En la estadística clásica o, más allá, en los métodos robustos, es fundamental la existencia o construcción de una distribución, limitada por sus propios axiomas. Escapar de ese marco normativo es un buen intento para manejar más y mejor la información.

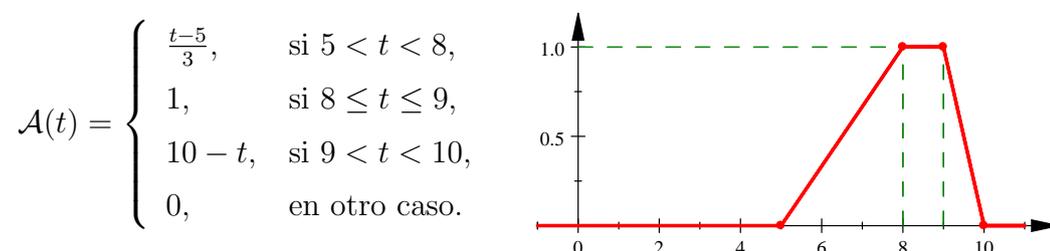
A lo largo de trabajos anteriores en castellano, especialmente asociados a tesis doctorales, se presentaron los números difusos desde diferentes perspectivas de índole estadístico. En [94], A.F. Roldán López de Hierro interpretó los números difusos como la yuxtaposición, en tiempo finito, de una función de distribución y una función de supervivencia a través de las partes izquierda y derecha del número difuso. En [3], G. Alfonso describió los números difusos como métodos originales de construir intervalos de confianza asociados a un valor desconocido. En [71], A. Márquez introdujo los números difusos como cantidades inciertas asociadas a afirmaciones imprecisas que utilizamos casi todos los días en nuestra vida diaria. Finalmente, en [104], M. Sánchez-Maldonado empleó números difusos como una forma de representar etiquetas lingüísticas en contextos de incertidumbre, especialmente en situaciones que anteriormente habían sido abordados desde el ámbito de las escalas de Likert. En este trabajo queremos aportar un par de nuevas posibles semánticas en las que los números difusos se desenvuelven a la perfección.

En primer lugar, los objetos que mejor describen a los números difusos, además de su función de pertenencia, son sus conjuntos de nivel. Hemos visto que los conjuntos de nivel caracterizan completamente a los números difusos (de

hecho, caracterizan a cualquier conjunto difuso; véase la Proposición 2.2.2). En el caso de los números difusos de soporte compacto, los conjuntos de nivel son intervalos cerrados y acotados que están ordenados por la relación de inclusión, es decir, están encajados unos dentro de otros. Supongamos que un número difuso modeliza una afirmación en la que existe cierta naturaleza imprecisa. Por ejemplo, un número difuso \mathcal{A} modeliza la afirmación:

$$\mathcal{A} = \text{“he hecho un examen de Estadística y, sabiendo que he aprobado, he sacado, aproximadamente, entre 8 y 9”}.$$

Esta afirmación deja la puerta abierta a una amplia variedad de notas, todas ellas entre 5 y 10 puntos ya que se ha aprobado el examen. Pero la afirmación da más pistas: pensamos que, según los ejercicios a los que hemos respondido en el examen, vamos a obtener una calificación final entre 8 y 9 puntos. En ningún caso tenemos seguridad de ello. De lo único de lo que estamos seguros es de que hemos aprobado. Esta afirmación puede representarse a través del siguiente número difuso trapezoidal:



De esta forma podemos hacer la siguiente interpretación de los conjuntos de nivel del número difuso \mathcal{A} .

- El soporte está formado por todos los *valores compatibles* con la afirmación, es decir, calificaciones entre 5 y 10 puntos.
- El núcleo está formado por los *valores más probables*, atendiendo a la información de que se dispone (en este caso, entre 8 y 9 puntos).
- Entre los valores más probables (el núcleo), situado en la parte superior de la gráfica (recta horizontal $y = 1$) y los valores compatibles con la

afirmación (el soporte, interpretado como un rango de seguridad), situado en la parte inferior de la gráfica (recta horizontal $y = 0$), se sitúa todo un intervalo de *valores posibles*, cada uno de ellos situados a un cierto nivel, representados por los conjuntos de nivel \mathcal{A}_α .

De esta forma, el número difuso es una representación algebraica de los valores probables, posibles y compatibles con la afirmación, tal y como se muestra en la Figura 2.6.

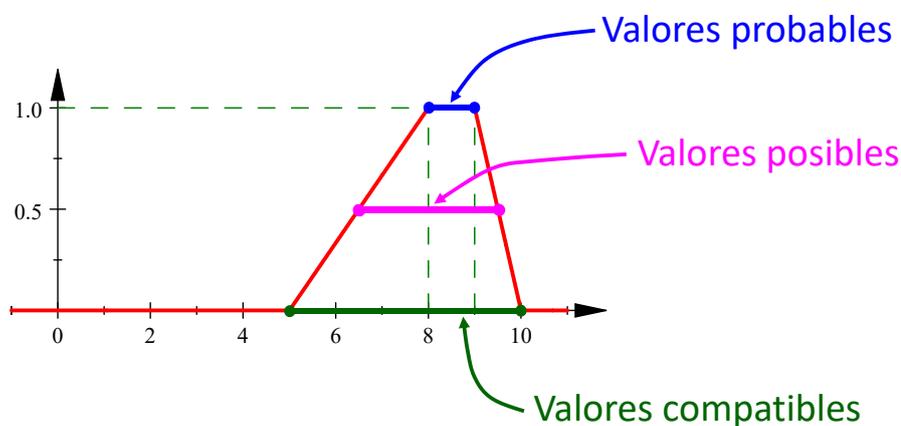


Figura 2.6: Interpretación de los diferentes conjuntos de nivel de un número difuso

Aunque no se trate de un número difuso, obsérvese que la función masa de probabilidad de cualquier variable aleatoria discreta es un conjunto difuso. Veámoslo. La función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta es de la forma $\{(x_i, p_i)\}_{i \in \Lambda}$, donde Λ es un conjunto finito o infinito numerable de índices, $\{x_i\}_{i \in \Lambda}$ es un subconjunto (finito o infinito numerable) de números reales y $\{p_i\}_{i \in \Lambda}$ es un conjunto (finito o infinito numerable) de números reales entre 0 y 1 que suman 1, es decir,

$$\sum_{i \in \Lambda} p_i = 1.$$

Si llamamos $X = \{x_i : i \in \Lambda\}$ tendremos un subconjunto de números reales (el universo del discurso) sobre el que podemos definir la función de pertenencia

$\mu_A : X \rightarrow \mathbb{I}$ dada por

$$\mu_A(x_i) = p_i \quad \text{para cada } i \in \Lambda.$$

De esta forma, la función masa de probabilidad $\{(x_i, p_i)\}_{i \in \Lambda}$ de una variable aleatoria discreta está perfectamente identificada a través del conjunto difuso (X, μ_A) . En particular, las funciones masa de probabilidad de distribuciones binomiales, de Poisson, geométricas, hipergeométricas, etc., pueden ser perfectamente manejadas en el contexto difuso. Si nos pasamos a variables aleatorias continuas, este concepto de corresponde más con el de funciones de distribución, que deben satisfacer ciertas características (véase [94]).

Obsérvese que, en el caso de las variable aleatorias discretas, el universo del discurso X es un subconjunto de \mathbb{R} , que se interpreta como el conjunto de puntos en los que la variable aleatoria toma valores reales (donde $p_i > 0$). Pero el concepto de conjunto difuso es aún más amplio, y puede servir para modelizar situaciones incluso más generales, sin necesidad de que X sea un subconjunto de números reales. Imaginemos que va a entregar un premio a uno de los cinco mejores estudiantes de un centro educativo atendiendo a una prueba concreta de habilidades sociales que se organizará el mes que viene. Supongamos que se ha determinado de antemano quiénes son esos cinco estudiantes: Ana, Juan, Sofía, Pedro y María. En uno de estos estudiantes recaerá el premio, pero no se sabe quién lo ganará. Este desconocimiento significa que el siguiente objeto:

$$B = \text{“estudiante sobre el que recaerá el premio”}$$

es, *a priori*, indeterminado. Se trata, pues, de un contexto en el que existe cierta incertidumbre, y la mecánica difusa nos aporta una herramienta sencilla pero potente para modelizar esta situación de la siguiente forma. Sobre el conjunto referencial (finito) $X = \{ \text{“Ana”}, \text{“Juan”}, \text{“Sofía”}, \text{“Pedro”}, \text{“María”} \}$, podemos considerar un conjunto difuso que asocie a cada estudiante su probabilidad de ganar el premio. Si el premio se sortease al azar, cada uno de estos cinco estudiantes tendría probabilidad $1/5$ de ganarlo, y el conjunto difuso tomaría el

valor $1/5$ de manera constante. Pero si el premio depende, al final, de una prueba de habilidades, es posible que cada estudiante tenga un bagaje previo diferente en este tipo de pruebas, y el conjunto difuso ya no tomará un valor constante (tal y como se muestra en la Figura 2.7). En cualquier caso, el marco difuso nos provee de una herramienta para representar y manejar matemáticamente esta incertidumbre.

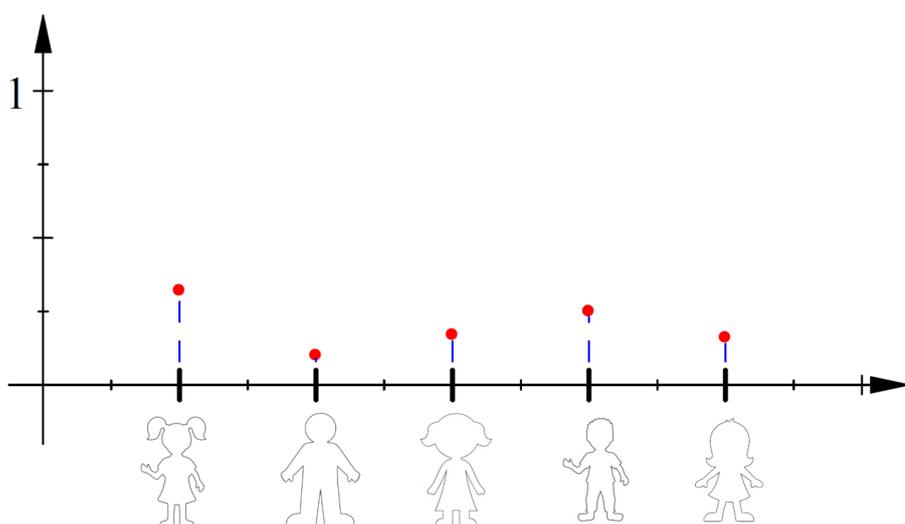


Figura 2.7: Un conjunto difuso cuyo soporte no está contenido en la recta real

Hacemos hincapié en un último aspecto. Obsérvese que el conjunto finito $X = \{ \text{“Ana”}, \text{“Juan”}, \text{“Sofía”}, \text{“Pedro”}, \text{“María”} \}$ no está dotado, en principio, de ninguna topología prefijada. Es por ello que, en determinados ambientes, el soporte de un conjunto difuso se define como la familia de elementos de X donde la función de pertenencia es estrictamente positiva. No tiene sentido considerar su clausura porque no hay fijada una topología. Sin embargo, en el caso de los números reales, dotados de forma natural de la topología euclídea, tomaremos el soporte como la clausura del conjunto anterior, lo que nos asegurará, si ésta es acotada, que forma un conjunto compacto de \mathbb{R} .

2.2.7. Los conjuntos difusos de tipo 2

En la introducción de la presente Memoria se perfiló la idea de una función de pertenencia cuyos valores puntuales eran, a su vez, conjuntos difusos. Es decir, la incertidumbre acompaña, incluso, a las propias categorías de agrupamiento de la experiencia. Es por ello que este tipo de conjuntos difusos se encuentran muy relacionados con las etiquetas lingüísticas de las observaciones. Para los objetivos que deseamos alcanzar, construiremos una definición formal que nos permita englobar la situación “clásica” de lógica difusa, como una particularidad de estos nuevos “sumideros de información”.

Algebraicamente, la idea que subyace detrás de los conjuntos difusos de tipo 2 es la siguiente. Un conjunto difuso $A : X \rightarrow \mathbb{I}$ es capaz de albergar incertidumbre sobre si un elemento $x \in X$ pertenece o no al conjunto A asociándole un único número real $A(x) \in \mathbb{I}$, que se interpreta como el grado de pertenencia del elemento x al conjunto A . Este valor se sitúa entre 0 y 1, de tal manera que cuanto más cercano esté a 1, más certeza tendremos sobre la pertenencia del elemento x al conjunto A . Ya hemos visto que esta concepción, a pesar de ser muy simple, es suficiente para expresar la incertidumbre de los sucesos naturales que ocurren a nuestro alrededor, y los trabajos científicos en el contexto difuso muestran que esta interpretación mejora los resultados que se obtienen con números reales. No obstante, existe una pequeña incoherencia con la filosofía del ambiente difuso: el número real $A(x)$ es exacto, y no expresa, por sí solo, ningún tipo de incertidumbre. Sin embargo, en la práctica, es razonable pensar que los datos experimentales nos obliguen a razonar de una forma ligeramente diferente: dado un elemento $x \in X$, lo razonable sería expresar alguna incertidumbre sobre el valor que debe tomar la función de pertenencia sobre el elemento x . Resulta pues que dicha función de pertenencia, en lugar de tomar un único valor real sobre x , podría ser expresada más bien como un rango de valores (por ejemplo, un intervalo) dentro del intervalo \mathbb{I} o como un conjunto difuso en general. Nacen así los conjuntos difusos de tipo 2: a cada elemento $x \in X$ le asocian un conjunto difuso (a menudo, un número difuso) con soporte

en el intervalo \mathbb{I} . Esto es precisamente lo que concretamos a continuación, donde recordamos que FS representa la familia FS(\mathbb{I}) de todos los conjuntos difusos con soporte en el intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$.

Definición 2.2.6 *Un conjunto difuso de tipo 2 es cualquier aplicación $\mathbb{A} : X \rightarrow \text{FS}$. Denotaremos por $\text{FS}_2(X)$ a la familia de todos los conjuntos difusos de tipo 2 sobre X .*

En la Figura 2.8 puede observarse la gráfica de un conjunto difuso \mathbb{A} de tipo 2 sobre el referencial $X = [0, 1]$ (eje de abscisas) donde cada $\mathbb{A}(x_0)$ es un número difuso rectangular de FS representado por un segmento vertical (en color rojo).

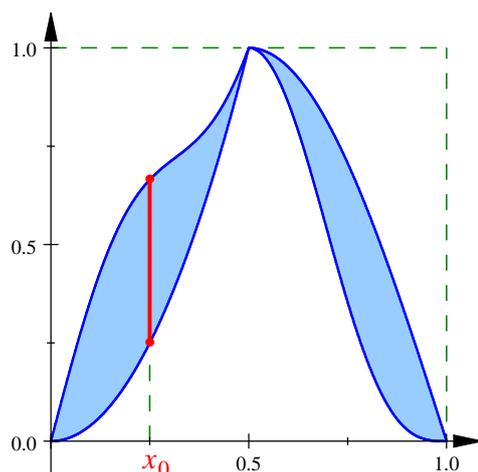


Figura 2.8: Representación gráfica de un conjunto difuso de tipo 2 sobre el referencial $X = [0, 1]$

En primer lugar, es conveniente clarificar la notación. Al igual que empleamos letras mayúsculas en caligrafía usual para denotar conjuntos difusos sobre un conjunto general X , es decir, $A, B, C : X \rightarrow \mathbb{I}$, y letras enfatizadas para números difusos de la recta real, $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$, utilizaremos las primeras letras del alfabeto en formato “*blackboard bold*” para representar conjuntos difusos de tipo 2, $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} : X \rightarrow \text{FS}$ (recordemos que la letra \mathbb{I} está exclusivamente reservada para el intervalo $[0, 1]$). De esta forma, de ahora en adelante, adoptamos el siguiente convenio.

- Los elementos de X se notan por $x, y, z \in X$.
- Si X es finito, usaremos $X = U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.
- Los escalares del intervalo $[0, 1]$ serán del tipo $t, s, r \in [0, 1]$.
- Los conjuntos difusos sobre X se notan con letras mayúsculas $A, B, A_i \in \text{FS}(X)$.
- Los números difusos sobre \mathbb{R} se escriben con letras mayúsculas caligráficas $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}_i \in \text{FS}(X)$.
- Los conjuntos difusos tipo 2 sobre X se notan con letras mayúsculas con una doble línea vertical del tipo $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{A}_i \in \text{FS}_2(X)$.

La nomenclatura “*de tipo 2*” (que también podría escribirse como “*de tipo II*”) nos obliga a aclarar también qué es un conjunto difuso “*de tipo 1*”, que no es más que un conjunto difuso $A : X \rightarrow \mathbb{I}$ de los que hemos utilizado hasta el momento. Con objeto de simplificar la notación que utilizaremos en la segunda parte del Capítulo 3, nos parece conveniente llamar conjunto difuso “*de tipo 0*” a los escalares t del intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$. Con ello podremos hablar de un “*conjunto difuso de tipo k* ”, donde k es un número del conjunto $\{0, 1, 2\}$. Resumiendo, utilizaremos la siguiente notación.

Definición 2.2.7 *Dado $k \in \{0, 1, 2\}$, un conjunto difuso de tipo k sobre un conjunto X es un elemento de $\text{FS}_k(X)$, donde:*

$\text{FS}_0(X) = [0, 1] =$ familia de todos los conjuntos difusos de tipo 0;

$\text{FS}_1(X) = \text{FS}(X) =$ familia de todos los conjuntos difusos de tipo 1;

$\text{FS}_2(X) =$ familia de todos los conjuntos difuso de tipo 2.

Volviendo al aspecto puramente algebraico, si $\mathbb{A} : X \rightarrow \text{FS}$ es un conjunto difuso de tipo 2, entonces cada $\mathbb{A}(x) \in \text{FS}$ es un conjunto difuso de tipo 1 sobre el intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$. Así, $\mathbb{A}(x) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ es una aplicación de \mathbb{I} sobre sí mismo (se denomina una *hoja* o una *rebanada*, del inglés *slice*, de \mathbb{A}) que a cada valor $t \in \mathbb{I}$

le asocia un único valor $\mathbb{A}(x)(t) \in \mathbb{I}$. Esto significa que, desde una perspectiva genuinamente algebraica, no podemos distinguir entre un conjunto difuso de tipo 2 sobre X y un conjunto difuso de tipo 1 sobre el producto cartesiano $X \times \mathbb{I}$, de tal forma que

$$\text{FS}_2(X) \equiv \text{FS}_1(X \times \mathbb{I})$$

mediante la identificación

$$\mathbb{A}(x)(t) = \mathbb{A}(x, t) \quad \text{para cada } x \in X \text{ y para cada } t \in \mathbb{I}.$$

Lo anterior nos permite establecer diferencias sustanciales en la naturaleza de $\text{FS}(X)$ y $\text{FS}_2(X)$. Mientras que el universo X puede ser finito (en este caso lo notamos por $X = U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$) o incluso infinito numerable, el conjunto $X \times \mathbb{I}$ siempre es infinito y no numerable, lo que supone aumentar un nivel la dificultad en el manejo de esta clase de conjuntos difusos.

La estructura difusa de nivel 2 nos obliga a introducir alguna notación para evitar posibles confusiones. Para cada $\mathbb{A} \in \text{FS}_2(X)$, denotamos:

$$\begin{aligned} \sup \mathbb{A} &= \sup(\{ \mathbb{A}(x)(t) : x \in X, t \in \mathbb{I} \}), \\ \inf \mathbb{A} &= \inf(\{ \mathbb{A}(x)(t) : x \in X, t \in \mathbb{I} \}). \end{aligned}$$

No debe confundirse este supremo, que es un número entre 0 y 1, como el conjunto difuso supremo $\widetilde{\sup} \mathbb{A} \in \text{FS}(X)$ definido por

$$(\widetilde{\sup} \mathbb{A})(x) = \sup(\mathbb{A}(x)) \quad \text{para cada } x \in X.$$

Dado $\mathbb{A} \in \text{FS}_2(X)$, el conjunto difuso sobre X que contiene la información complementaria de \mathbb{A} es $\mathbb{A}_c \in \text{FS}_2(X)$ dado por:

$$\mathbb{A}_c(x)(t) = 1 - \mathbb{A}(x)(t) \quad \text{para cada } x \in X \text{ y para cada } t \in \mathbb{I}.$$

Dada una aplicación $T : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{I}$ y $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n \in \text{FS}_2(X)$, notamos por $T(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n)$ al conjunto difuso de tipo 2 sobre X definido, para cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$,

$$T(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n)(x)(t) = T(\mathbb{A}_1(x)(t), \mathbb{A}_2(x)(t), \dots, \mathbb{A}_n(x)(t)).$$

Dado $t \in \mathbb{I}$, denotamos por F^t y \mathbb{F}^t a dos conjuntos difusos constantes, tipo 1 y tipo 2 respectivamente, dados por:

$$\begin{aligned} F^t &\in \text{FS}_1(X), & F^t(x) &= t \quad \text{para cada } x \in X, \\ \mathbb{F}^t &\in \text{FS}_2(X), & \mathbb{F}^t(x)(s) &= t \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } s \in \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Dado $A \in \text{FS}_1(X)$ notamos por $\mathbb{F}^A \in \text{FS}_2(X)$ al conjunto difuso de tipo 2 definido por:

$$\mathbb{F}^A(x)(t) = A(x) \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I}.$$

Existen aplicaciones inyectivas de una estructura difusa en su conjunto superior que, globalmente consideradas, generan el diagrama conmutativo de la Figura 2.9.

$$\begin{aligned} j_{01} : \text{FS}_0(X) &\rightarrow \text{FS}_1(X), & j_{01}(t) &= F^t \\ j_{02} : \text{FS}_0(X) &\rightarrow \text{FS}_2(X), & j_{02}(t) &= \mathbb{F}^t \\ j_{12} : \text{FS}_1(X) &\rightarrow \text{FS}_2(X), & j_{12}(A) &= \mathbb{F}^A \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{FS}_0(X) = [0, 1] & \xrightarrow{j_{02}} & \text{FS}_2(X) \\ \downarrow j_{01} & \equiv & \uparrow j_{12} \\ \text{FS}_1(X) = \text{FS}(X) & & \end{array} \quad j_{12} \circ j_{01} = j_{02}$$

Figura 2.9: Diagrama que relaciona las inclusiones j_{01} , j_{02} y j_{12} .

El orden usual \leq en $\text{FS}_0(X) = \mathbb{I}$ puede ser extendido a $\text{FS}_1(X)$ y $\text{FS}_2(X)$ como un orden parcial (reflexivo, transitivo y antisimétrico) de la siguiente manera:

- $A \leq B$ si $A(x) \leq B(x)$ para cada $x \in X$;
- $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ si $\mathbb{A}(x) \leq \mathbb{B}(x)$ para cada $x \in X$; es decir, $\mathbb{A}(x)(t) \leq \mathbb{B}(x)(t)$ para cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$.

Es claro que las inyecciones j_{01} , j_{02} y j_{12} mostradas en la Figura 2.9 preservan el orden.

Es interesante resaltar que todo conjunto difuso sobre \mathbb{I} puede ser visto como un conjunto difuso, tipo 2, sobre cualquier conjunto no vacío X , con una “rebanada” constante mediante la aplicación

$$j_X : \text{FS} \rightarrow \text{FS}_2(X)$$

que asocia a cada $A \in \text{FS}$ el conjunto difuso $j_X(A) \in \text{FS}_2(X)$ definido por:

$$[j_X(A)](x) = A \quad \text{para cada } x \in X.$$

La aplicación j_X es inyectiva y preserva el orden. Obsérvese que, dado $\mathbb{A} \in \text{FS}_2(X)$, la composición $j_X \circ \mathbb{A}$:

$$X \xrightarrow{\mathbb{A}} \text{FS}([0, 1]) \xrightarrow{j_X} \text{FS}_2(X),$$

permite recuperar el conjunto difuso original ya que:

$$[(j_X \circ \mathbb{A})(x)](t) = \mathbb{A}(x)(t) \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I}. \quad (2.8)$$

El conjunto $\text{FS}_k(X)$ posee elementos mínimo (\mathfrak{m}_k) y máximo (\mathfrak{M}_k) absolutos en el sentido de la relación de orden parcial inducida, siendo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_0 = 0 \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}_0 = 1, & \quad \text{si } k = 0, \\ \mathfrak{m}_1 = F^0 \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}_1 = F^1, & \quad \text{si } k = 1, \\ \mathfrak{m}_2 = \mathbb{F}^0 \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}_2 = \mathbb{F}^1, & \quad \text{si } k = 2. \end{aligned}$$

El hecho de que $\mathfrak{m}_k \leq \mathbf{x} \leq \mathfrak{M}_k$ para cada $\mathbf{x} \in \text{FS}_k(X)$ nos lleva a afirmar que $(\text{FS}_k(X), \leq)$ es un retículo acotado. En particular, $(\text{FS}_2(X), \leq)$ es un retículo acotado con mínimo absoluto $\mathfrak{m}_2 = \mathbb{F}^0$ y máximo absoluto $\mathfrak{M}_2 = \mathbb{F}^1$. En este contexto, una *función de agregación sobre* $(\text{FS}_2(X), \leq)$ es una aplicación creciente $\mathbb{T} : \text{FS}_2(X)^p \rightarrow \text{FS}_2(X)$ tal que $\mathbb{T}(\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2, \dots, \mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}_2$ y $\mathbb{T}(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_2$.

Proposición 2.2.8 Toda función de agregación $T : \mathbb{I}^p \rightarrow \mathbb{I}$ induce una función de agregación $\mathbb{T}_T : \text{FS}_2(X)^p \rightarrow \text{FS}_2(X)$ definida por:

$$\mathbb{T}_T(\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_p)(x)(t) = T(\mathbb{A}_1(x)(t), \mathbb{A}_2(x)(t), \dots, \mathbb{A}_p(x)(t))$$

para cada $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_p \in \text{FS}_2(X)$ y cada $t \in \mathbb{I}$.

Definición 2.2.9 Decimos que:

- dos conjuntos difusos tipo 0, $t, s \in \mathbb{I}$, son completamente disjuntos si $t \cdot s = 0$;
- dos conjuntos difusos tipo 1, $A, B \in \text{FS}(X)$, son completamente disjuntos si $A(x) \cdot B(x) = 0$ para cada $x \in X$;
- dos conjuntos difusos tipo 2, $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, son completamente disjuntos si $\mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t) = 0$ para cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$.

Es inmediato comprobar que:

- $A, B \in \text{FS}_1(X)$ son completamente disjuntos si, y sólo si, $A(x)$ y $B(x)$ son completamente disjuntos para cada $x \in X$;
- $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ son completamente disjuntos si, y sólo si, $\mathbb{A}(x)$ y $\mathbb{B}(x)$ son completamente disjuntos para cada $x \in X$, lo que equivale a que $\mathbb{A}(x)(t)$ y $\mathbb{B}(x)(t)$ son completamente disjuntos para cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$.

CAPÍTULO 3

Resultados principales

En el presente capítulo vamos a exponer los principales resultados obtenidos durante el periodo de investigación, fruto del estudio que se ha realizado de los contenidos del capítulo previo, todo ello teniendo en cuenta en todo momento los objetivos planteados al comienzo de la misma.

Aunque a lo largo de este periodo de investigación hemos afrontado varios desafíos, la realidad es que hemos obtenido resultados avanzados principalmente en dos líneas de investigación, lo que justifica que este capítulo esté organizado de una forma clara en dos partes muy diferentes, aunque también muy relacionadas debido a que manejan, en esencia, las mismas herramientas algebraicas.

Por un lado afrontamos el reto de concebir un operador de aproximación que asociase un único número difuso a cada conjunto difuso. Aunque en el capítulo anterior hemos definido que un número difuso puede no ser normal (porque no alcance a tomar el valor 1 en ningún punto), también es cierto que la mayoría de investigadores en este campo llama “número difuso” a una aplicación que satisface la condición de normalidad. Es por ello que desde el principio nos planteamos que el número difuso que se le asocie a cada conjunto difuso debe ser, obligatoriamente, un número difuso normal, provenga o no de un conjunto difuso normal. Con ello conseguiremos que se puedan aplicar todas las técnicas propiamente difusas que han sido desarrolladas con números difusos normales.

El operador que proponemos dependerá de una amplia gama de parámetros iniciales que han de ser definidos por el investigador desde el comienzo de su estudio. Esto hace que el método constructivo sea lo suficientemente dúctil y adaptable a cada necesidad de trabajo a través de un componente paramétrico suficientemente amplio. Además, mostramos algunas de las primeras propiedades que verifica esta familia de operadores de aproximación, entre las que destacamos el estudio de sus puntos fijos y su propiedad de minimización.

Por otro lado, el desarrollo de la investigación nos ha llevado a indagar en el concepto de *índice de solapamiento* en el marco de los conjuntos difusos de tipo 2. Habíamos observado que, tras la introducción de las *funciones de solapamiento* por Bustince y otros en [15] y su posterior éxito al ser aplicadas a distintos problemas de investigación (véase, por ejemplo, [6, 7, 8, 11, 18, 19]), algunos autores habían tratado de extender esta noción al campo de los conjuntos difusos de tipo 1. Así, García-Jiménez y otros habían mostrado en [49] una posible definición de índice de solapamiento que asocia un único número real a dos conjuntos difusos de tipo 1 sobre un conjunto referencial finito. Habíamos observado que las definiciones previas se habían inspirado fundamentalmente en el concepto de *índice de consistencia de Zadeh*, que asocia a cada par de conjuntos difusos de tipo 1 sobre un referencial finito el valor máximo en todo el espacio de las cantidades comparadas de los dos conjuntos difusos a través de su mínimo. Teniendo en mente estas líneas de investigación, nos dimos cuenta de lo interesante que podría ser introducir esta clase de índices en el contexto de los conjuntos difusos de tipo 2, que aún no habían sido estudiados desde este punto de vista. Así lo hemos hecho, llegando a la conclusión de que las propiedades que presentamos son las condiciones mínimas que debe cumplir cualquier índice de solapamiento. Además proponemos diferentes opciones para la condición de normalidad de un índice de solapamiento, pues se trata de una restricción que debe ser estudiada con más detenimiento en futuras investigaciones hasta alcanzar la condición que mejor se ajuste a las aplicaciones prácticas. En esta línea de investigación mostraremos cómo emplear los índices de solapamiento

de tipo $(2, 0)$ y $(2, 1)$ para implementar algoritmos inferenciales para sistemas interpolativos difusos de tipo 2, de tal forma que se pueda extraer una conclusión a partir de unas premisas y un hecho, todos ellos expresados con conjuntos difusos de tipo 2.

Los resultados principales de este capítulo han sido publicados en sendos artículos de investigación en revistas del primer decil de sus respectivas categorías, incluidas en el *Journal Citation Reports* de *Clarivate Analytics* (índices de 2021 publicados en 2022). Pueden ser consultados a través de las referencias [100] y [103].

3.1. Introducción a los operadores de aproximación

Los conjuntos difusos han sido empleados con éxito en la representación e interpretación de información difusa. En tales contextos, las técnicas clásicas, basadas en números reales absolutamente precisos (también llamados números *crisp*) carecen de un significado claro y deben ser reemplazados por procedimientos que tengan en cuenta la naturaleza intrínsecamente imprecisa de los datos y de los desarrollos experimentales. Hoy en día muchas metodologías tienen en cuenta los números difusos, que conforman una subfamilia notable de la categoría de todos los conjuntos difusos de la recta real bajo ciertas condiciones de regularidad. Sin embargo, los conjuntos difusos de la recta real son mucho más generales que los números difusos y pueden modelar la información de una manera más variada.

Como hemos visto en el capítulo anterior, algebraicamente, un *conjunto difuso* es un par (X, μ_X) donde X es un conjunto no vacío y $\mu_X : X \rightarrow [0, 1]$ es una función (denominada *función de pertenencia* del conjunto difuso). En los últimos cincuenta años se han descrito varias interpretaciones epistémicas acerca del significado de la función μ_X . Tres de las semánticas más importantes

la interpretan como un grado de *incertidumbre* (propuesta por Zadeh como una herramienta clave en la *teoría de la posibilidad* [119] y el *razonamiento aproximado* [120]), como un grado de *similaridad* o como un grado de *preferencia* (véase [42, 44]). Cada un de estos puntos de vista conlleva ciertas peculiaridades dependiendo del contexto en el que se utilizan los conjuntos difusos. Sin embargo, lo que es común a todas ellas es que esta teoría ha demostrado ser una teoría muy consistente que ha producido avances significativos en muchos campo de estudio: análisis de decisiones [25, 29, 58, 80, 102, 116], ranking de posibles alternativas [1, 5, 33, 63, 81, 99, 113, 114], teoría de regresión [27, 56, 93, 101], imagen [69, 57, 84, 17], clasificación [64, 105, 106], aproximación [109], Medicina [107], interconexiones algebraicas [92], etc.

Por otro lado, los números difusos, especialmente los trapezoidales o triangulares, han demostrado ser muy populares (y útiles) entre investigadores y profesionales. Por lo tanto, se han implementado ampliamente en muchas metodologías difusas debido a su simplicidad y eficiencia computacional. Un *número difuso de la recta real* es un conjunto difuso $A : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ que cumple ciertas condiciones: normalidad, convexidad difusa y semicontinuidad superior en cada punto (recuérdese la Definición 2.2.4). Existe una aritmética difusa que, involucrando números difusos, generaliza la aritmética habitual con números reales (véase [40, 41, 43, 52]). En general, el conjunto $\text{FN}(\mathbb{R})$ formado por todos los números difusos de la recta real disfruta de mejores propiedades que la familia $\text{FS}(\mathbb{R})$ de todos los conjuntos difusos en \mathbb{R} . De hecho, el conjunto $\text{FS}(\mathbb{R})$ es bastante complicado, por lo que la mayoría de las técnicas que se pueden desarrollar con números reales o difusos no se pueden extender al conjunto $\text{FS}(\mathbb{R})$. Por ejemplo, los *índices de ordenación* [5, 10, 99] (es decir, las defusificaciones $\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ de un subconjunto $\Lambda \subseteq \text{FN}(\mathbb{R})$ en \mathbb{R}) generalmente se basan en argumentos geométricos (baricentro, centro de gravedad, distancia p -signo, magnitud, etc.) o herramientas analíticas (integración, diferenciación, maximización, etc.) que no están disponibles en toda la familia $\text{FS}(\mathbb{R})$. Otra forma notable de ordenar los números difusos se basa en auténticas relaciones binarias difusas, es decir,

procedimientos que requieren un conocimiento previo de los dos números difusos que se van a comparar (véase [99]). En esta línea, algunas metodologías utilizan *grados de dominancia* de un número difuso sobre otro como *posibilidad* o *necesidad de dominancia* (véase el capítulo 10 en [43]). Estos procedimientos generan procesos de ordenación a partir de un índice de comparación por pares que puede interpretarse como el valor que cuantifica cómo de preferible es un número difuso frente a otro, lo que puede ayudarnos a tomar una decisión en el entorno difuso.

Teniendo en cuenta este problema abierto de ordenación de números difusos y sus posibles aplicaciones en varios contextos de incertidumbre, en esta primera parte del capítulo vamos a introducir y a estudiar las principales propiedades de una amplia familia de operadores paramétricos del tipo:

$$\Phi_{f,g,T_1,T_2} : \text{FS}(\mathbb{I}) \rightarrow \text{FN}(\mathbb{I})$$

que asocian un único número difuso normal a cada conjunto difuso en el intervalo $\mathbb{I} = [0, 1]$. A lo largo de la Memoria justificaremos que la familia $\text{FS}(\mathbb{I})$ es lo suficientemente rica como para reducir el problema a este intervalo especial. Las principales ventajas de la familia de operadores que vamos a presentar son las siguientes.

- En primer lugar, debemos comentar que introducimos estos operadores para proporcionar una metodología novedosa para traducir a la amplísima familia $\text{FS}(\mathbb{I})$ algunas propiedades razonables de los números difusos. Teniendo en cuenta que hay muchos procedimientos que se pueden implementar en el contexto de los números difusos, pero no con conjuntos difusos generales, los operadores anteriores pueden ser muy útiles de cara a extender dichos procedimientos al contexto de los conjuntos difusos de la recta real (especialmente cuando son muy similares a los números difusos).
- Estos operadores pueden ser útiles para extender las técnicas difusas que, por el momento, sólo se aplican actualmente al caso restringido en el que

los datos de entrada o salida deben ser números difusos, a un marco general en el que los datos involucrados son conjuntos difusos arbitrarios de la recta real.

- Esta familia proporciona varias formas de aproximar un conjunto difuso de la recta real por un número difuso. Por lo tanto, en muchos casos, puede ser útil en el razonamiento aproximado.
- Esta familia depende de una amplia gama de funciones iniciales que se pueden usar como parámetros para definir un operador de aproximación particular. Por lo tanto, cada investigador puede elegir los parámetros involucrados para obtener el número difuso que mejor se ajuste al conjunto difuso original de la recta real según su punto de vista o sus propios intereses. Incluimos más adelante un ejemplo ilustrativo acerca de cómo dichas funciones iniciales afectan directamente a los resultados obtenidos.

Finalmente, comentar que, aunque los conjuntos difusos pueden interpretarse desde varias semánticas, a lo largo de esta Memoria no vamos a estar interesados en ninguno de esos puntos de vista. El contenido de esta parte del capítulo es más bien algebraico. Por ello, avisamos desde este momento de que trataremos los conjuntos difusos desde un punto de vista algebraico asumiendo que cada conjunto difuso es, en sí mismo, una función $A : X \rightarrow \mathbb{I}$ (es decir, identificamos el conjunto difuso con su función de pertenencia). Deberá ser el investigador quien interprete los resultados que aquí vamos a mostrar desde la semántica particular que esté empleando en su investigación.

Antes de introducir esta familia de operadores de aproximación, realizamos un estudio detallado del comportamiento de la familia de conjuntos de niveles de cada número difuso, que nos permitirá luego definir el único número difuso normal asociado a cada conjunto difuso de la recta real mediante sus correspondientes conjuntos de nivel. A continuación, estudiamos las principales propiedades de esta familia de operadores de aproximación y mostramos, entre otras propiedades, que, como era de esperar, los números difusos normales son

puntos fijos de ciertos operadores de esta familia. Antes de ello, justificamos la necesidad de esta clase de operadores de aproximación.

3.2. Sobre la necesidad y la utilidad de un operador de aproximación

En esta sección vamos a describir la motivación que nos llevó a estudiar la mejor forma de aproximar un conjunto difuso cualquiera de la recta real por un número difuso normal. Nuestro razonamiento parte de la principal diferencia entre estos dos conceptos. Un conjunto difuso puede representar información de muchas formas, pero un número difuso tiene que ajustarse a unas reglas muy severas: convexidad difusa, semi-continuidad superior y existencia de máximo (usualmente, alcanzando el valor 1). Estas restricciones provienen de la necesidad de representar los números reales como conjuntos difusos de forma que se herede una propiedad esencial: la capacidad para realizar operaciones aritméticas. Si empleando números difusos no pudiésemos sumar, restar, multiplicar o dividir como lo hacemos con números reales, entonces la estructura algebraica se derrumbaría. Posiblemente no los podríamos seguir llamando “números”. Pero resulta que el concepto de número difuso es apropiado para extender tanto el concepto de número real como sus operaciones al contexto difuso. Sin embargo, llega ahí el problema esencial: si nuestros datos son conjuntos difusos pero no son números difusos, ¿podemos operar con ellos con un significado esencialmente idéntico al real? La respuesta es no.

Las técnicas matemáticas que habitualmente se realizan con números reales se han podido, en muchos casos, llevar al contexto difuso con mayor o menor dificultad. Realmente, éste es un campo de estudio muy amplio: ¿cómo tomar una decisión basándose en información difusa?, ¿cómo realizar procedimientos de regresión?, ¿cómo calcular distancias entre entidades probabilísticas? Cuando se ha conseguido tener éxito en una de estas tareas, lo normal es que los datos

de entrada no sean conjuntos difusos en general, sino números difusos. Por ello, en las investigaciones que tratan de extender nociones reales, aparecen exclusivamente datos expresados en forma de números difusos. Pero, ¿y si los datos de entrada no son exactamente números difusos? Usualmente las mencionadas técnicas no funcionan.

Esta suposición que hace que los datos de entrada deban de ser necesariamente números difusos tiene una doble vertiente: por un lado parece una condición natural pero, por otro, obliga a satisfacer ciertas condiciones que, en ocasiones, pueden ser excesivamente restrictivas. Mostramos a continuación un par de ejemplos.

Supongamos que nos preguntan acerca del número de la calle en la que vive una persona, y no estamos muy seguros: o vive en el número 17 o vive en el número 19. Ahora mismo no estamos muy seguros, pero lo que sabemos con seguridad es que o bien vive en el número 17 o bien vive en el número 19. Es sencillo representar esta incertidumbre mediante un conjunto difuso como el siguiente:

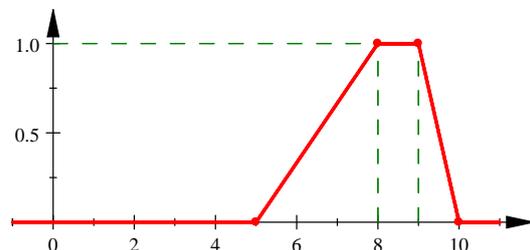
$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}, \quad A(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \{17, 19\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La información que transmite este conjunto difuso es muy clara: o bien toma el valor 17 o bien toma el valor 19, y entre ellos no hay una preferencia clara. El gran problema de este conjunto difuso es que, indiscutiblemente, no es un número difuso, por lo que no podría ser empleado en investigaciones que requiriesen hacer operaciones con números difusos o, en general, aunque no se realicen operaciones, no se podría utilizar en estudios que requieran que los datos de entrada sean números difusos.

En otras ocasiones, la información de la que disponemos está expresada en forma de un número difuso, pero aparecen datos que nos obligan a desechar esta idea. Volvamos al ejemplo de la Subsección 2.2.6. En aquel momento expresamos la información $\mathcal{A} =$ “he hecho un examen de Estadística y, sabiendo que he aprobado, he sacado, aproximadamente, entre 8 y 9” como el número difuso

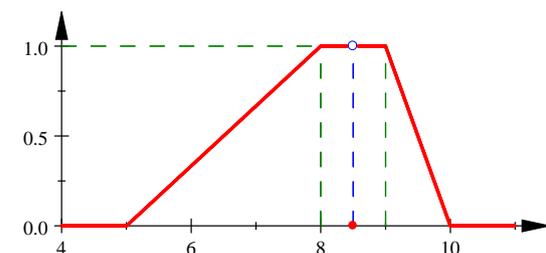
trapezoidal $\mathcal{A} = (5/8/9/10)$, que viene dado por la función de pertenencia:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{cases} \frac{t-5}{3}, & \text{si } 5 < t < 8, \\ 1, & \text{si } 8 \leq t \leq 9, \\ 10-t, & \text{si } 9 < t < 10, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Éste sí es un número difuso y, por tanto, es susceptible de emplearse en investigaciones científicas. Sin embargo, imaginemos que disponemos de una minúscula información adicional: el profesor de la asignatura nos indica que nadie de la clase ha sacado un 8.5 en el examen. Seguimos contemplando un escenario de incertidumbre, pero ahora debemos incorporar la información $\mathcal{A}(8.5) = 0$ a nuestro número difuso, obteniendo la función de pertenencia siguiente:

$$\mathcal{A}'(t) = \begin{cases} \frac{t-5}{3}, & \text{si } 5 < t < 8, \\ 1, & \text{si } t \in [8, 9] \setminus \{8.5\}, \\ 10-t, & \text{si } 9 < t < 10, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



El conjunto difuso así obtenido deja de ser un número difuso (ya que no verifica la propiedad de convexidad difusa) y, por tanto, pierde su condición óptima para ser empleado en ciertos estudios. Lo cierto es que no es un número difuso pero, por así decirlo, está muy cerca de serlo. Y es en este contexto en el que tiene sentido el operador que vamos a introducir: cuando los datos que manejemos no sean números difusos, pero, en algún sentido, estén cercanos a serlo, debemos pensar en una forma sistemática que nos ofrezca la posibilidad de transformarlos en entidades operativas que podamos manejar en la investigación. En esos casos posiblemente necesitemos números difusos (usualmente, normales) que se parezcan lo más posible a los datos originales. Y es aquí donde entra de pleno la familia de operadores que vamos a introducir en este capítulo: estos ofrecen una metodología rápida y sencilla de aplicar que garantiza la transformación de conjuntos difusos en números difusos normales con los que poder trabajar.

Evidentemente, la aplicación de este operador tendrá sentido cuando los conjuntos difusos de entrada estén “cercaños” a ser números difusos. Cuando los conjuntos difusos iniciales no se parecen en nada a números difusos, los resultados podrían ser poco apropiados. En esta caso, habría que estudiar cada posible aplicación del operador.

3.3. Conjuntos difusos generados por familias de conjuntos anidados

En el capítulo anterior se apuntó la importancia y caracterización de los conjuntos difusos mediante sus α -cortes. Aportamos aquí sus principales propiedades y apuntalamos el camino para un trabajo ágil al considerar límites en los extremos de los α -cortes de trabajo.

3.3.1. Algunas propiedades de la familia de conjuntos de nivel asociados a un conjunto difusos

Para simplificar la notación, recordemos que $\mathbb{I} = [0, 1]$ y que, al considerar los conjuntos difusos sobre \mathbb{R} , notaremos $\text{FS} = \text{FS}(\mathbb{I})$.

Proposición 3.3.1 Si $A \in \text{FS}$ entonces las siguientes propiedades se cumplen:

1. $\alpha_A \in \mathbb{I}$.
2. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ son tales que $\alpha \leq \beta$, entonces $A_1 \subseteq A_\beta \subseteq A_\alpha \subseteq A_0 \subseteq \mathbb{I}$.
3. $\alpha_A = 0$ si, y sólo si, $A = \mathbf{0}$.
4. Si $\alpha \in [0, \alpha_A)$, entonces $A_\alpha \neq \emptyset$, y si $\alpha \in (\alpha_A, 1]$, entonces $A_\alpha = \emptyset$,

El siguiente ejemplo no sólo nos ilustra una familia multiparamétrica de conjuntos difusos sobre \mathbb{I} sino que aporta una primera herramienta de trabajo práctico.

Ejemplo 3.3.2 *Dados dos números $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{I}$ tales que $\omega_0 > 0$, sea $A_{\omega_0, \omega_1} \in \text{FS}$ el conjunto difuso sobre \mathbb{I} definido por:*

$$A_{\omega_0, \omega_1}(t) = \begin{cases} \omega_1, & \text{si } t = \frac{1}{2}, \\ 2\omega_0 t, & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2\omega_0(1-t), & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La representación gráfica del conjunto difuso A_{ω_0, ω_1} corresponde a un triángulo isósceles cuya base mide una unidad y cuya altura mide ω_0 . Sin embargo, el vértice más alto del triángulo está situado a una altura ω_1 . La Figura 3.1 muestra los tres casos distintos que nos podemos encontrar que corresponden con los casos $\omega_0 < \omega_1$, $\omega_0 = \omega_1$ y $\omega_0 > \omega_1$. Observemos que los únicos conjuntos difusos del tipo A_{ω_0, ω_1} que son números difusos corresponden a la ordenación $\omega_0 \leq \omega_1$, en cuyo caso son números difusos normales si, y sólo si, $\omega_0 \leq \omega_1 = 1$. Además, el conjunto difuso A_{ω_0, ω_1} , visto como función de \mathbb{I} sobre \mathbb{I} , es continuo si, y sólo si, $\omega_0 = \omega_1$.

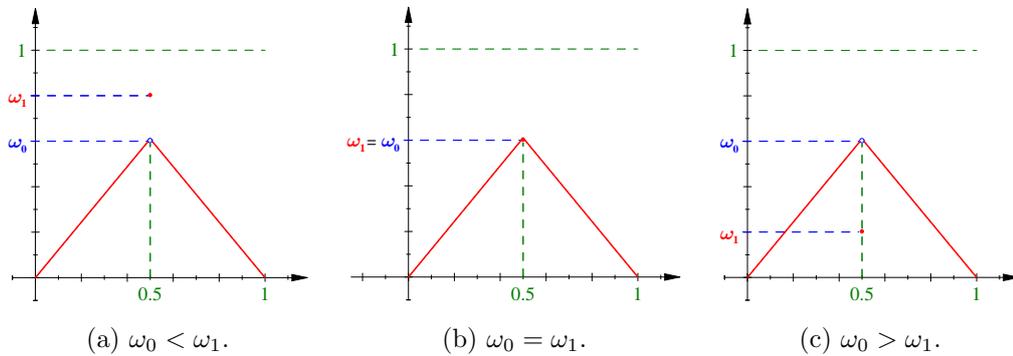


Figura 3.1: Representaciones gráficas de los conjuntos difusos A_{ω_0, ω_1} del Ejemplo 3.3.2 correspondientes a $\omega_0 < \omega_1$, $\omega_0 = \omega_1$ y $\omega_0 > \omega_1$

Dado un conjunto difuso $A \in \text{FS}$, la familia

$$F^A = \{ A_\alpha : \alpha \in (0, 1] \}$$

formada por todos su α -cortes satisface una propiedad muy concreta que está directamente relacionada con el uso de la desigualdad \geq en la definición de α -corte $A_\alpha = \{ t \in \mathbb{I} : A(t) \geq \alpha \}$.

Proposición 3.3.3 Dado cualquier conjunto difuso $A \in \text{FS}$, sus conjuntos de nivel verifican la siguiente propiedad:

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} A_\beta \quad \text{para cada } \alpha \in (0, 1].$$

DEMOSTRACIÓN: El apartado 3.3.1 de la Proposición 3.3.1 garantiza que si $0 < \beta < \alpha$, entonces $A_\alpha \subseteq A_\beta$ y, por consiguiente,

$$A_\alpha \subseteq \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} A_\beta.$$

Para demostrar la inclusión contraria, tomemos cualquier punto $t_0 \in \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} A_\beta$. Dado que $t_0 \in A_\beta$, deducimos que $A(t_0) \geq \beta$ para cada $\beta \in (0, \alpha)$. Razonemos por contradicción. Si ocurriese que $A(t_0) < \alpha$, entonces podríamos encontrar $\beta_0 \in (0, \alpha)$ tal que $A(t_0) < \beta_0 < \alpha$. Sin embargo, la condición $A(t_0) < \beta_0$ contradice que $A(t_0) \geq \beta$ para cada $\beta \in (0, \alpha)$. De esta contradicción deducimos que la desigualdad $A(t_0) < \alpha$ es imposible. Por tanto, $A(t_0) \geq \alpha$ y $t_0 \in A_\alpha$, lo que concluye la inclusión contraria. ■

En la misma línea de la proposición anterior puede demostrarse la siguiente propiedad, que depende directamente de la utilización de la desigualdad \geq en la definición de A_α .

Proposición 3.3.4 Si un conjunto difuso $A \in \text{FS}$ es continuo como función $A : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, entonces sus α -cortes son subconjuntos cerrados de \mathbb{I} (y también cerrados en \mathbb{R}) para cada $\alpha \in \mathbb{I}$.

DEMOSTRACIÓN: Para $\alpha = 0$ tenemos $A_0 = \text{supp}(A)$ que es un conjunto cerrado por definición (se define como una clausura), mientras que si $\alpha \in (0, 1]$, podemos expresar

$$A_\alpha = A^{-1}([\alpha, 1]) = A^{-1}([\alpha, \infty) \cap \mathbb{I}),$$

el cual es un conjunto cerrado al ser A una función continua. ■

3.3.2. Algunas relaciones entre conjuntos difusos y números difusos

En este apartado mostramos algunas propiedades asociadas a los conjuntos de nivel de los números difusos. En primer lugar, resaltamos el siguiente resultado en el que la función involucrada satisface, en un conjunto cerrado, la condición (FN_3) de la Definición 2.2.4, es decir, es semicontinua superiormente en un conjunto cerrado apropiado.

Teorema 3.3.5 Dado un conjunto difuso $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$, sea $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $\{A(t_n)\} \rightarrow \sup(A)$. Si la sucesión $\{t_n\}$ está acotada en \mathbb{R} y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que A es semicontinua superiormente en cada punto de un subconjunto cerrado de \mathbb{R} que contiene a $\{t_n : n \geq n_0\}$, entonces A posee máximo absoluto.

DEMOSTRACIÓN: Si $A = \mathbf{0}$, entonces A posee máximo absoluto en \mathbb{R} . Supongamos que $A \neq \mathbf{0}$, esto es, $\alpha_A = \sup(A) > 0$. Razonando por contradicción, supongamos que este supremo no es un máximo absoluto (aquí buscaremos la contradicción). Dado que la sucesión $\{t_n\}$ está acotada, ésta posee una subsucesión parcial convergente $\{t_{\sigma(n)}\}$. Sea $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\{t_n\} \rightarrow s_0$. Como s_0 no es un máximo absoluto para A , entonces $A(s_0) < \alpha_A$. Llamemos $\varepsilon = (\alpha_A - A(s_0))/2 > 0$ y $\beta_0 = A(s_0) + \varepsilon$. Entonces:

$$\beta_0 = A(s_0) + \varepsilon = A(s_0) + \frac{\alpha_A - A(s_0)}{2} = \frac{A(s_0) + \alpha_A}{2} < \alpha_A.$$

Por tanto, β_0 es constante que verifica que $\beta_0 < \alpha_A$. Como la función A es semicontinua superiormente en cada punto de un subconjunto cerrado (llamémosle Ω) de \mathbb{R} que contiene a $\{t_n : n \geq n_0\}$ (para algún $n_0 \in \mathbb{N}$), entonces A es semicontinua superior en s_0 (ya que $s_0 \in \overline{\{t_n : n \geq n_0\}} \subseteq \overline{\Omega} = \Omega$). Como consecuencia, existe $\delta > 0$ tal que $A(t) - A(s_0) < \varepsilon$ para cada $t \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. De esta forma, $A(t) < A(s_0) + \varepsilon = \beta_0$ para todo $t \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$. Como $\{t_{\sigma(n)}\} \rightarrow s_0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, con $n_1 > n_0$, tal que $t_{\sigma(n)} \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ para cada $n \geq n_1$. Por tanto, $A(t_{\sigma(n)}) < \beta_0 < \alpha_A$ para todo $n \geq n_1$, lo que contradice el hecho de que $A(t_{\sigma(n)}) \rightarrow \alpha_A$. Esta contradicción garantiza que A tiene máximo absoluto. ■

Corolario 3.3.6 Si el soporte de un conjunto difuso $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ está acotado en \mathbb{R} y A es semicontinua superiormente en cada $s_0 \in \text{supp}(A)$, entonces A posee máximo absoluto.

DEMOSTRACIÓN: Es consecuencia de que si $\{A(t_n)\} \rightarrow \sup(A) > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A(t_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{t_n\}_{n \geq n_0} \subseteq \text{supp}(A)$ y se puede aplicar el teorema 3.3.5 a esta sucesión. ■

Corolario 3.3.7 Si un conjunto difuso $A \in \text{FS}$ es una función semicontinua superiormente en cada punto de \mathbb{I} , entonces A posee máximo absoluto.

La traducción directa del Teorema 3.3.5 nos lleva a que, utilizando la notación de la Definición 2.2.4:

$$(FN_3) + \text{soporte acotado} \Rightarrow (FN_1).$$

La condición de que el soporte sea acotado es necesaria para poder deducir la propiedad (FN_1) ya que, aún cumpliendo las propiedades (FN_2) y (FN_3) , no está garantizado que se pueda deducir la propiedad (FN_1) sin la exigencia de que el soporte sea acotado. El siguiente ejemplo ilustra esta afirmación.

Ejemplo 3.3.8 Dado $\omega_0 \in (0, 1]$, sea $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ el conjunto difuso definido por:

$$A(t) = \omega_0 \left(\frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

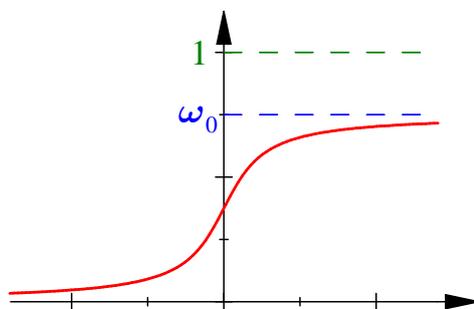


Figura 3.2: Conjunto difuso de soporte no acotado

Entonces A es una biyección continua y estrictamente creciente en \mathbb{R} con codominio $(0, \omega_0)$ (véase la Figura 3.2). Claramente se verifican las propiedades (FN_2) y (FN_3) (aun más: la función A no sólo es semicontinua superiormente, sino que es continua en todo \mathbb{R}). Sin embargo, el conjunto difuso A no alcanza ningún máximo absoluto sobre \mathbb{R} . Obsérvese que su núcleo es vacío ($A_1 = \emptyset$). De hecho, el resto de conjuntos de nivel son los intervalos cerrados no acotados dados por:

$$A_\alpha = \begin{cases} [A^{-1}(\alpha), +\infty), & \text{si } \alpha \in (0, \omega_0), \\ \emptyset, & \text{si } \alpha \in [\omega_0, 1]. \end{cases}$$

Si $\mathcal{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ es un número difuso, la condición (FN_2) equivale a decir que cada α -corte $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ es un subintervalo de \mathbb{R} (incluyendo la posibilidad de que sea vacío), y la propiedad (FN_3) significa que cada intervalo \mathcal{A}_α es cerrado en \mathbb{R} (pudiendo estar acotado o no). En este caso, su soporte $\text{supp}(\mathcal{A})$ es también un subintervalo cerrado de \mathbb{R} . Además, la condición (FN_1) puede ser interpretada diciendo que los α -cortes $\{\mathcal{A}_\alpha\}$ son no vacíos para cada α en un intervalo cerrado maximal $[0, \alpha_0] \subseteq \mathbb{I}$. Estos argumentos demuestran el siguiente resultado, que se interpreta como una primera aproximación para determinar el número difuso a través de sus conjuntos de nivel.

Proposición 3.3.9 Un conjunto difuso $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ es un número difuso si, y sólo si, tiene máximo absoluto y cada α -corte A_α , con $\alpha \in (0, 1]$, es un subintervalo cerrado de \mathbb{R} (incluyendo la posibilidad de que sea vacío). Además, A es normal si, y sólo si, su núcleo A_1 es un conjunto no vacío.

La condición de que A tiene máximo absoluto es imprescindible ya que el resultado anterior no es cierto si no se supone que el conjunto difuso A posea máximo absoluto (recuérdese el Ejemplo 3.3.8). Sin embargo, para soportes acotados, esta condición no es necesaria. Si éste es el caso, deducimos el siguiente resultado en el que se aprecia cómo los extremos de los conjuntos de nivel asociados al número difuso lo caracterizan completamente. De hecho, las funciones que determinan tales conjuntos de nivel deben satisfacer ciertas condiciones. El

lector interesado puede comparar este resultado con los expuestos en [52, 68].

Teorema 3.3.10 Si $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$ es un conjunto difuso con soporte acotado y $A \neq \mathbf{0}$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

- (a) A es un número difuso.
- (b) Existen dos funciones continuas por la izquierda $A_L, A_U : (0, \alpha_A] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que A_L es creciente, A_U es decreciente y

$$A_\alpha = \begin{cases} [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], & \text{si } \alpha \in (0, \alpha_A], \\ \emptyset, & \text{si } \alpha \in (\alpha_A, 1]. \end{cases}$$

En tal caso, se verifican las siguientes propiedades.

1. Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que A alcanza máximo absoluto en \mathbb{R} en t_0 , y $A(t_0) = \alpha_A > 0$.
2. La restricción $A|_{(-\infty, t_0]}$ es una función creciente y continua a la derecha.
3. La restricción $A|_{[t_0, \infty)}$ es una función decreciente y continua a la izquierda.
4. $A_L((0, 1]) \subseteq (-\infty, t_0]$ y $A_U((0, 1]) \subseteq [t_0, \infty)$, por lo que podemos considerar las funciones A_L y A_U definidas como:

$$A_L : (0, 1] \rightarrow (-\infty, t_0] \quad \text{y} \quad A_U : (0, 1] \rightarrow [t_0, +\infty)$$

DEMOSTRACIÓN: **(b) \Rightarrow (a)**. Dado que cada α -corte es un intervalo, entonces A verifica la propiedad de convexidad difusa, es decir, satisface (FN_2) . Comprobamos ahora que se verifica (FN_3) . Supongamos que A no es semicontinua superiormente en algún punto $s_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión $\{t_n\} \rightarrow s_0$ tal que $A(t_n) \geq A(s_0) + \varepsilon_0$. Llamemos $\beta_0 = A(s_0) + \varepsilon_0$. Dado que $A(s_0) < \beta_0$, entonces $s_0 \notin A_{\beta_0}$. Sin embargo, como $A(t_n) \geq \beta_0$, entonces $t_n \in A_{\beta_0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la hipótesis (b), como $A_{\beta_0} \neq \emptyset$, entonces $A_{\beta_0} = [A_L(\beta_0), A_U(\beta_0)]$ es un intervalo cerrado y acotado de \mathbb{R} . Por tanto,

$s_0 \in \overline{\{t_n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{A_{\beta_0}} = A_{\beta_0}$, lo que contradice el hecho de que $s_0 \notin A_{\beta_0}$. Esta contradicción significa que A es semicontinua superiormente en cada punto $s_0 \in \mathbb{R}$, por lo que A satisface el axioma (FN_3) . Como hemos supuesto que A tiene soporte compacto, el Corolario 3.3.6 garantiza que A tiene máximo absoluto, por lo que verifica la propiedad (FN_1) .

(a) \Rightarrow (b). La demostración es inmediata eligiendo t_0 como un punto en el que A alcance su máximo absoluto y las funciones A_L y A_U como las funciones que determinan los extremos de cada conjunto de nivel (una demostración puede consultarse en [52, 68] para el caso de un número difuso normal, pero los argumentos que allí se utilizan son también válidos en el caso no normal). ■

3.3.3. El conjunto difuso asociado a una familia de subconjuntos encajados de \mathbb{I}

En este apartado mostramos cómo cualquier familia de subconjuntos *encajados* (también puede usarse el adjetivo “*anidados*”) de \mathbb{I} genera un conjunto difuso cuyos conjuntos de nivel son muy similares a los subconjuntos de la familia. ¿Qué entendemos por una familia de subconjuntos *encajados*? Para evitar cualquier tipo de confusión, aclaramos que vamos a utilizar el término *encajados* para denotar a una familia $F = \{\Omega_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ de subconjuntos de \mathbb{R} tales que $\Omega_\alpha \subseteq \Omega_\beta$ para todo $\alpha, \beta \in (0, 1]$ verificando que $\beta \leq \alpha$. Con esta óptica incluimos la posibilidad de que algunos, o todos, los miembros de la familia sean conjuntos vacíos. Obsérvese que en los siguientes resultados el posible conjunto Ω_0 no juega ningún papel ya que el soporte de un conjunto difuso se define como en (2.2), por lo que no es un conjunto de nivel.

En primer lugar, mostramos que existen familias de este tipo en las que la propiedad establecida en la Proposición 3.3.3 no se cumple, aun cuando los conjuntos de la familia sean intervalos cerrados y no vacíos.

Ejemplo 3.3.11 Para cada $\alpha \in (0, 1]$, sea

$$\Omega_\alpha = \begin{cases} \{0.5\}, & \text{si } \alpha \in [0.5, 1], \\ [0.25, 0.75], & \text{si } \alpha \in (0, 0.5). \end{cases}$$

Entonces $F = \{\Omega_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ es una familia de intervalos encajados, cerrados, acotados y no vacíos (verificando que $\Omega_\alpha \subseteq \Omega_\beta \subset \mathbb{I}$ para cada $\alpha, \beta \in (0, 1]$ con $\beta \leq \alpha$). Sin embargo, si $\alpha = 0.5$, el conjunto $\Omega_{0.5} = \{0.5\}$ satisface:

$$\Omega_{0.5} = \{0.5\} \subsetneq [0.25, 0.75] = \bigcap_{\beta \in (0, 0.5)} \Omega_\beta.$$

Por tanto, se da la inclusión, pero no se da la igualdad.

A pesar de lo anterior, vamos a establecer, en el siguiente enunciado, un procedimiento que asociará un conjunto difuso a cualquier familia de subconjuntos encajados reales.

Teorema 3.3.12 Sea $F = \{\Omega_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ una familia de subconjuntos encajados de \mathbb{I} (de admite la posibilidad de que algunos de ellos sean vacíos). Definimos: $A^F : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, para cada $t \in \mathbb{I}$, como:

$$A^F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \mathbb{I} \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} \Omega_\alpha \right), \\ \sup(\{\beta : t \in \Omega_\beta\}), & \text{si existe } \beta_0 \in (0, 1] \text{ tal que } t \in \Omega_{\beta_0}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Entonces $A^F \in \text{FS}$ es un conjunto difuso que verifica las siguientes propiedades.

1. $A^F = \mathbf{0}$ si, y sólo si, Ω_α es vacío para todo $\alpha \in (0, 1]$.
2. El conjunto difuso A^F puede ser descrito equivalentemente de la siguiente forma:

$$A^F(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \Omega_\alpha \text{ para todo } \alpha \in (0, 1), \\ \inf(\{\beta : t \notin \Omega_\beta\}), & \text{si existe } \beta_0 \in (0, 1) \text{ tal que } t \notin \Omega_{\beta_0}. \end{cases} \quad (3.2)$$

3. Para cada $\alpha \in (0, 1]$,

$$\Omega_\alpha \subseteq (A^F)_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} \Omega_\beta. \quad (3.3)$$

4. El supremo de A^F es:

$$\begin{aligned} & \sup(A^F) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } \Omega_\alpha = \emptyset \text{ para todo } \alpha \in (0, 1), \\ \sup(\{\beta : \Omega_\beta \neq \emptyset\}), & \text{si existe } \beta_0 \in (0, 1) \text{ tal que } \Omega_{\beta_0} \neq \emptyset \end{array} \right\} \quad (3.4) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } \Omega_\alpha \neq \emptyset \text{ para todo } \alpha \in (0, 1), \\ \inf(\{\beta : \Omega_\beta = \emptyset\}), & \text{si existe } \beta_0 \in (0, 1) \text{ tal que } \Omega_{\beta_0} = \emptyset. \end{array} \right. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: El conjunto A^F está bien definido como conjunto difuso sobre el intervalo \mathbb{I} ($A^F \in \text{FS}$). A lo largo de esta demostración, vamos a denotar por A_α^F el α -corte del conjunto difuso A^F , es decir, $A_\alpha^F = (A^F)_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$.

[**Apartado 1**] Si $\Omega_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, la definición (3.2) nos lleva a $A^F(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{I}$, y así $A^F = \mathbf{0}$. Si existe $\alpha_0 \in (0, 1]$ tal que $\Omega_{\alpha_0} \neq \emptyset$, tendremos, al menos, un $t_0 \in \Omega_{\alpha_0}$. Como $A^F(t_0) = \sup(\{\beta : t_0 \in \Omega_\beta\}) \geq \alpha_0 > 0$, entonces el número difuso A^F es distinto de $\mathbf{0}$ (ya que $A^F(t_0) > 0$).

[**Apartado 2**] Sea $t \in \mathbb{I}$ un elemento arbitrario. Las definiciones (3.1) y (3.2) coinciden si $A^F(t) = 0$ o $A^F(t) = 1$. Supongamos que existen $s_0 = \sup(\{\beta : t \in \Omega_\beta\})$ e $i_0 = \inf(\{\beta : t \notin \Omega_\beta\})$ (es decir, $t \in \Omega_1$ y existe $\beta \in (0, 1)$ tal que $t \in \Omega_\beta$), y vamos a demostrar, por contradicción, que $s_0 = i_0$.

- Supongamos que $s_0 < i_0$. Sea $\beta_0 \in (s_0, i_0)$, es decir, $s_0 < \beta_0 < i_0$. Si $t \in \Omega_{\beta_0}$, entonces s_0 no es el supremo del conjunto $\{\beta : t \in \Omega_\beta\}$ pues $\beta_0 > s_0$. Sin embargo, si $t \notin \Omega_{\beta_0}$, entonces i_0 no puede ser el ínfimo del conjunto $\{\beta : t \notin \Omega_\beta\}$ pues $\beta_0 < i_0$. En cualquier caso obtenemos una contradicción.
- Supongamos, ahora, que $s_0 > i_0$. Como $s_0 = \sup(\{\beta : t \in \Omega_\beta\})$ es el supremo e $i_0 < s_0$, existirá $\beta_1 \in (i_0, s_0]$ tal que $t \in \Omega_{\beta_1}$. Así, $i_0 < \beta_1 \leq s_0$. De igual forma, como $i_0 = \inf(\{\beta : t \notin \Omega_\beta\})$ es el ínfimo e $i_0 < \beta_1$, tendremos un $\beta_2 \in [i_0, \beta_1)$ tal que $t \notin \Omega_{\beta_2}$. Por tanto, la cadena $i_0 \leq \beta_2 < \beta_1 \leq s_0$ nos lleva a $\Omega_{\beta_1} \subseteq \Omega_{\beta_2}$ y a la contradicción de que $t \in \Omega_{\beta_2} \subseteq \Omega_{\beta_1}$, sabiendo que $t \notin \Omega_{\beta_2}$.

Por tanto $i_0 = s_0$ y las dos expresiones definen la misma función.

[Apartado 3] Sea $\alpha \in (0, 1]$ un elemento arbitrario. Si $t \in \Omega_\alpha$, entonces $A^F(t) = \sup(\{\beta : t \in \Omega_\beta\}) \geq \alpha$ y, por tanto, $t \in A_\alpha^F$. Esto demuestra que $\Omega_\alpha \subseteq A_\alpha^F$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. A continuación, probamos la igualdad (3.3). Para ese α arbitrario inicial tomamos $t \in A_\alpha^F$, y tendremos que $A^F(t) \geq \alpha > 0$. Sea $\beta \in (0, \alpha)$ arbitrario y probaremos que $t \in \Omega_\beta$ (de donde se deducirá que $t \in \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} \Omega_\beta$). Como $A^F(t) = \sup(\{\gamma : t \in \Omega_\gamma\}) \geq \alpha > \beta$, entonces existe $\gamma_0 \in (\beta, A^F(t))$ tal que $t \in \Omega_{\gamma_0}$. Dado que $\beta < \gamma_0$, se tiene que $t \in \Omega_{\gamma_0} \subseteq \Omega_\beta$. Recíprocamente, sea $t \in \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} \Omega_\beta$ y probemos que $t \in A_\alpha^F$. Consideremos una sucesión estrictamente creciente $\{\beta_n\} \subset (0, \alpha)$ tal que $\{\beta_n\} \rightarrow \alpha$. Como $t \in \Omega_{\beta_n} \subseteq A_{\beta_n}^F$, entonces $A^F(t) \geq \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y como $\{\beta_n\} \rightarrow \alpha$, deducimos que $A^F(t) \geq \alpha$, de donde $t \in A_\alpha^F$.

[Apartado 4] Comprobemos que la igualdad (3.4) es correcta. Si $\Omega_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in (0, 1)$, entonces $A^F = \mathbf{0}$ y $\sup(A^F) = 0$. Supongamos que existe $\beta \in (0, 1)$ tal que $\Omega_\beta \neq \emptyset$ y sea $s_0 = \sup(\{\beta : \Omega_\beta \neq \emptyset\})$. Claramente $s_0 > 0$. Tomemos un elemento arbitrario $\varepsilon \in (0, s_0/2)$. Entonces existe $\beta_\varepsilon \in (s_0 - \varepsilon, s_0]$ tal que $\Omega_{\beta_\varepsilon} \neq \emptyset$. Sea $t_\varepsilon \in \Omega_{\beta_\varepsilon}$. Como $\Omega_{\beta_\varepsilon} \subseteq A_{\beta_\varepsilon}^F$, entonces $A^F(t_\varepsilon) \geq \beta_\varepsilon > s_0 - \varepsilon$, de donde $\sup(A^F) \geq A^F(t_\varepsilon) > s_0 - \varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0, s_0/2)$. De esta forma, $\sup(A^F) \geq s_0$. Para probar la igualdad en esta última desigualdad, supongamos, por contradicción, que $s_0 < \sup(A^F)$. Entonces existirá $t_0 \in \mathbb{I}$ tal que $s_0 < A^F(t_0) \leq \sup(A^F)$. Si llamamos $\alpha_0 = A^F(t_0)$, entonces $s_0 < \alpha_0 \leq \sup(A^F)$ y, por el apartado anterior,

$$t_0 \in A_{\alpha_0}^F = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha_0)} \Omega_\beta.$$

Si tomamos cualquier $\alpha_1 \in (s_0, \alpha_0)$, ocurrirá que $s_0 < \alpha_1 < \alpha_0$ y que $t_0 \in \Omega_{\alpha_1}$. Por consiguiente, $\Omega_{\alpha_1} \neq \emptyset$, lo que contradice el hecho de que $s_0 < \alpha_1$ cuando, en realidad, $s_0 = \sup(\{\beta : \Omega_\beta \neq \emptyset\})$.

Para comprobar que las dos descripciones de $\sup(A^F)$ coinciden, se procede de idéntica manera que en la demostración del apartado 2. ■

Ejemplo 3.3.13 Sea $F = \{\Omega_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ la familia de subconjuntos encajados de \mathbb{I} descrita en el Ejemplo 3.3.11. Recordemos que F no verifica la propiedad de que, para cualquier $\alpha \in (0, 1]$, se tiene que $\Omega_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} \Omega_\beta$. Sin embargo, mediante el Teorema 3.3.12 podemos computar el conjunto difuso A^F asociado a la familia F , obteniendo el siguiente conjunto difuso (representado en la Figura 3.3).

$$A^F(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = 0.5, \\ 0.5, & \text{si } t \in [0.25, 0.75] \setminus \{0.5\}, \\ 0, & \text{si } t \in [0, 0.25) \cup (0.75, 1]. \end{cases}$$

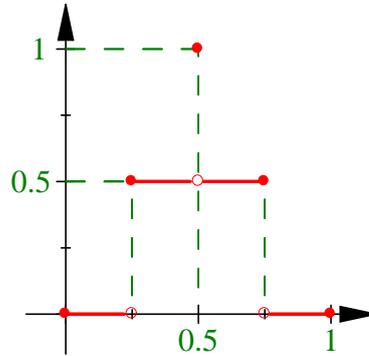


Figura 3.3: Representación gráfica del número difuso A^F del Ejemplo 3.3.13

Por ello, los conjuntos de nivel asociados a A^F son, para cada $\alpha \in (0, 1]$:

$$(A^F)_\alpha = \begin{cases} \{0.5\}, & \text{si } \alpha \in (0.5, 1], \\ [0.25, 0.75], & \text{si } \alpha \in (0, 0.5]. \end{cases}$$

Por consiguiente, tenemos que $\Omega_\alpha \subseteq (A^F)_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, 1]$, pero no se da la igualdad para $\alpha = 0.5$. Obsérvese que A^F es un número difuso de tipo finito en el sentido dado en [4].

Corolario 3.3.14 Sea $F = \{\Omega_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ una familia de subconjuntos encajados de \mathbb{I} (pudiendo ser vacíos algunos de ellos). Sea A^F el conjunto difuso asociado a la familia F mediante la construcción del Teorema 3.3.12. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.

- a) $(A^F)_\alpha = \Omega_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, 1]$.
- b) $\Omega_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} \Omega_\beta$ para cada $\alpha \in (0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN: La implicación [(a) \Rightarrow (b)] la obtenemos del hecho de que A^F es un conjunto difuso y sus conjuntos de nivel son los conjuntos Ω_α de la familia F . Por tanto, la Proposición 3.3.3 nos garantiza el resultado (b). Recíprocamente, la aplicación del tercer apartado del Teorema 3.3.12 garantiza el resultado (a) a partir de (b). ■

Corolario 3.3.15 Dado un conjunto difuso $A \in \text{FS}$, sea $F^A = \{A_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ la familia de todos sus α -cortes y sea $A^{F^A} \in \text{FS}$ el conjunto difuso asociado a la familia F^A en el sentido del Teorema 3.3.12. Entonces $A^{F^A} = A$.

DEMOSTRACIÓN: Si analizamos la expresión $(A^{F^A})_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} A_\beta = A_\alpha$, observamos que los conjuntos difusos A y A^{F^A} tienen los mismos conjuntos de nivel y, por tanto, coinciden (recuérdese la Proposición 2.2.2). ■

Observación 3.3.16 *Las condiciones impuestas por los resultados previos nos indican que no siempre se verifica la correspondiente propiedad de “reciprocidad”, es decir, si en vez de partir de un número difuso (como ocurre en el Corolario 3.3.15) partimos de una familia F de conjuntos encadenados y construimos la familia F^{A^F} , entonces no necesariamente coincidirá ésta con la de partida. Así, en general, $F^{A^F} \neq F$. Para ilustrar esta afirmación, tómesese la familia F del Ejemplo 3.3.11 y recuérdese que, en general, se tiene que $\Omega_\alpha \subseteq (A^F)_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, pero $\Omega_{0.5} \neq (A^F)_{0.5}$.*

Como consecuencia del corolario 3.3.14 podemos obtener el siguiente resultado utilizando subintervalos cerrados de \mathbb{I} .

Corolario 3.3.17 Sea $F = \{I_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ una familia de subintervalos cerrados y encajados de \mathbb{I} (pudiendo ser vacíos algunos de ellos). Sea $A^F : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ definida,

para cada $t \in \mathbb{I}$ como:

$$A^F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \mathbb{I} \setminus (\cup_{\alpha \in (0,1]} I_\alpha), \\ \sup(\{\beta : t \in I_\beta\}), & \text{si existe } \beta_0 \in (0, 1] \text{ tal que } t \in I_{\beta_0}. \end{cases}$$

Entonces A^F es un conjunto difuso que verifica la siguiente propiedad.

$$\begin{aligned} & \left[(A^F)_\alpha = I_\alpha \text{ para todo } \alpha \in (0, 1] \right] \\ & \Leftrightarrow \left[I_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} I_\beta \text{ para todo } \alpha \in (0, 1] \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

En este caso, A^F es un número difuso en \mathbb{I} , que será normal si, y sólo si, I_1 es no vacío.

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia del Corolario 3.3.14. Además, puede aplicarse el Teorema 3.3.12, y la condición (3.5) significa que las funciones A_L y A_U son continuas a la izquierda. ■

3.3.4. Los límites laterales de los extremos de los conjuntos de nivel de un conjunto difuso

Del apartado 3.3.1 de la Proposición 3.3.1 se sigue que, dado un conjunto difuso $A \in \text{FS}$, el α -corte A_α es no vacío si $\alpha < \alpha_A$, pero es vacío si $\alpha > \alpha_A$. ¿Qué ocurre cuando $\alpha = \alpha_A$? La existencia de máximo absoluto determinará la respuesta a esta pregunta.

Lema 3.3.18 Dado $A \in \text{FS} \setminus \{\mathbf{0}\}$, se verifican las siguientes propiedades.

1. Para cada $\alpha \in (0, \alpha_A]$, existen los siguientes límites:

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta, \quad \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta \in \mathbb{I},$$

y además se verifica que:

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \leq \inf A_\beta \leq \sup A_\beta \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta \quad \text{para cada } \alpha \in (0, \alpha_A).$$

Esta propiedad también es cierta para $\alpha = \alpha_A$ si el α -corte A_{α_A} es no vacío.

2. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \alpha_A]$ son tales que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, entonces

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha_2^-} \inf A_\beta \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha_1^-} \inf A_\beta \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha_1^-} \sup A_\beta \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha_2^-} \sup A_\beta.$$

3. Los siguientes límites

$$\ell_L^A = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \quad \text{y} \quad \ell_U^A = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta$$

existen y verifican:

$$0 \leq \inf A_\alpha \leq \ell_L^A \leq \ell_U^A \leq \sup A_\alpha \leq 1 \quad \text{para todo } \alpha \in (0, \alpha_A).$$

4. El conjunto de nivel A_{α_A} es no vacío si, y sólo si, A tiene máximo absoluto en \mathbb{I} (es decir, existe $t_0 \in \mathbb{I}$ tal que $A(t_0) = \alpha_A$).

5. Si $A_{\alpha_A} \neq \emptyset$ (A tiene máximo absoluto), entonces:

$$\ell_L^A \leq \inf A_{\alpha_A} \leq \sup A_{\alpha_A} \leq \ell_U^A.$$

DEMOSTRACIÓN: Dado que $A \neq \mathbf{0}$, sabemos que $\alpha_A > 0$, y el apartado 3.3.1 de la Proposición 3.3.1 garantiza que $A_\beta \neq \emptyset$ para todo $\beta \in (0, \alpha_A)$.

[**Apartados 1, 2 y 3**] Si $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha_A)$ son tales que $\alpha_1 \leq \alpha_2$, entonces $\emptyset \neq A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2}$. De donde:

$$\inf A_{\alpha_2} \leq \inf A_{\alpha_1} \leq \sup A_{\alpha_1} \leq \sup A_{\alpha_2}. \quad (3.6)$$

Dado $\alpha \in (0, \alpha_A]$, la función $\phi_\alpha : (0, \alpha) \rightarrow \mathbb{I}$ dada por $\phi_\alpha(\beta) = \inf A_\beta$ está bien definida sobre el intervalo $(0, \alpha)$. Teniendo en cuenta que está acotada y que es creciente, el límite $\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta$ existe y pertenece a \mathbb{I} (ya que $\text{supp } A \subseteq \mathbb{I}$). De igual forma podemos deducir que existe el límite $\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta$. Las propiedades de la función ϕ_α garantizan los resultados anunciados en estos apartados.

[**Apartado 4**] Si $A_{\alpha_A} \neq \emptyset$, entonces existe $t_1 \in A_{\alpha_A}$. Este punto verifica $A(t_1) \geq \alpha_A = \sup(A) \geq A(t)$ para todo $t \in \mathbb{I}$. Luego t_1 es un máximo absoluto de A en \mathbb{I} . Recíprocamente, supongamos que A posee máximo absoluto en \mathbb{I} , es

decir, existe $t_0 \in \mathbb{I}$ tal que $A(t_0) \geq A(t)$ para todo $t \in \mathbb{I}$. Entonces tendremos que $\alpha_A = \sup(A) = A(t_0)$, luego $t_0 \in A_{\alpha_A}$ y, por tanto, este α -corte es no vacío.

[**Apartado 5**] Supongamos que α_A es el máximo de A sobre \mathbb{I} . El apartado anterior nos garantiza que $A_{\alpha_A} \neq \emptyset$, y el razonamiento dado en (3.6) garantiza que:

$$\inf A_\alpha \leq \inf A_{\alpha_A} \leq \sup A_{\alpha_A} \leq \sup A_\alpha \quad \text{para cada } \alpha \in [0, \alpha_A].$$

Tomando $\alpha \rightarrow \alpha_A^-$ deducimos que $\ell_L^A \leq \inf A_{\alpha_A} \leq \sup A_{\alpha_A} \leq \ell_U^A$. ■

Ejemplo 3.3.19 *El resultado de la Proposición 3.3.3 establece que, dado $A \in \text{FS}$, tenemos $A_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha_A)} A_\beta$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, lo que nos lleva a pensar que, cuando A tiene máximo absoluto, ocurre la igualdad en el apartado 5 del lema anterior, es decir, $\ell_L^A = \inf A_{\alpha_A}$ y $\ell_U^A = \sup A_{\alpha_A}$. Sin embargo, esto es falso. Veamos la siguiente situación.*

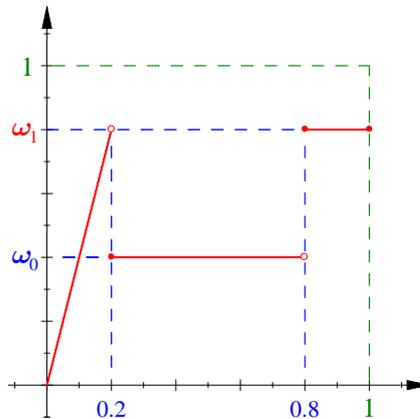


Figura 3.4: Representación gráfica del conjunto difuso A del Ejemplo 3.3.19

Sean $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{I}$ dos números reales tales que $0 < \omega_0 < \omega_1 \leq 1$ y definamos $A : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ como:

$$A(t) = \begin{cases} \frac{\omega_1 t}{0.2}, & \text{si } 0 \leq t < 0.2, \\ \omega_0, & \text{si } 0.2 \leq t < 0.8, \\ \omega_1, & \text{si } 0.8 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

representado en la Figura 3.4. Los α -cortes de A son:

$$A_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \alpha \in (\omega_1, 1], \\ [0.8, 1], & \text{si } \alpha = \omega_1, \\ \left[\frac{0.2\alpha}{\omega_1}, 0.2 \right) \cup [0.8, 1], & \text{si } \alpha \in (\omega_0, \omega_1), \\ \left[\frac{0.2\alpha}{\omega_1}, 1 \right], & \text{si } \alpha \in [0, \omega_0]. \end{cases}$$

Observemos que A tiene máximo absoluto, que es $\alpha_A = \omega_1 > 0$. Además:

$$A_{\omega_1} = [0.8, 1] \quad \text{y} \quad A_\alpha = \left[\frac{0.2\alpha}{\omega_1}, 0.2 \right) \cup [0.8, 1] \quad \text{para cada } \alpha \in (\omega_0, \omega_1).$$

Entonces $\inf A_{\alpha_A} = \min A_{\omega_1} = 0.8$ pero:

$$\inf A_\alpha = \frac{0.2\alpha}{\omega_1} \quad \text{para cada } \alpha \in (\omega_0, \omega_1).$$

De esta forma,

$$\ell_L^A = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \inf A_\beta = \lim_{\alpha \rightarrow \omega_1^-} \frac{0.2\alpha}{\omega_1} = 0.2 < 0.8 = \min A_{\alpha_A}.$$

3.4. Aproximación de conjuntos difusos por números difusos

En esta sección introducimos uno de los resultados más interesantes de la Memoria, fruto del estudio previo que hemos realizado. Se trata de un método que nos permite asociar un único número difuso normal $\mathcal{A} \in \text{FN}$ para cada conjunto difuso $A \in \text{FS}$ con soporte en $\mathbb{I} = [0, 1]$. Este proceso puede ser interpretado como una forma de aproximar cada conjunto difuso $A \in \text{FS}$ por un único número difuso normal $\Phi(A) \in \text{FN}$, es decir, introducimos un *operador de aproximación* $\Phi : \text{FS} \rightarrow \text{FN}$. Mostraremos que este operador es lo suficientemente flexible para adaptarse a muy distintas situaciones de estudio. Para ello es fundamental describir algunas de las propiedades que caracterizarán a estas herramientas.

Básicamente, el proceso dependerá de:

- dos funciones continuas y crecientes $f, g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ tales que $f \leq g$ (es decir, $f(t) \leq g(t)$ para cada $t \in \mathbb{I}$); y
- dos funciones $T_1, T_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{I}$ tales que

$$f(t) \leq T_1(t, s) \leq T_2(t, s) \leq g(s) \quad \text{para cada } (t, s) \in \Delta,$$

siendo Δ el triángulo sobre el plano de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$, es decir,

$$\Delta = \{ (t, s) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} : t \leq s \}.$$

En primer lugar, aclaramos que si $\mathcal{A} = \mathbf{0}$, el operador Φ debe estar definido como $\Phi(A) = \mathbf{0}$. A continuación estudiamos el caso $A \in \text{FS} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Teorema 3.4.1 Sean $f, g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ dos funciones continuas y crecientes y sean $T_1, T_2 : \Delta \rightarrow \mathbb{I}$ dos funciones tales que $f(t) \leq T_1(t, s) \leq T_2(t, s) \leq g(s)$ para todo $(t, s) \in \Delta$. Para cada conjunto difuso $A \in \text{FS} \setminus \{\mathbf{0}\}$ existe un único número difuso normal $\mathcal{A} \in \text{FN}$ cuyos conjuntos de nivel $\{\mathcal{A}_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] : \alpha \in (0, 1]\}$ vienen dados por los siguientes extremos:

$$A_L(\alpha) = \begin{cases} f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \right), & \text{si } \alpha \in (0, \alpha_A], \\ T_1(\ell_L^A, \ell_U^A), & \text{si } \alpha \in (\alpha_A, 1]; \end{cases} \quad (3.7)$$

$$A_U(\alpha) = \begin{cases} g \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta \right), & \text{si } \alpha \in (0, \alpha_A], \\ T_2(\ell_L^A, \ell_U^A), & \text{si } \alpha \in (\alpha_A, 1]. \end{cases} \quad (3.8)$$

DEMOSTRACIÓN: Dado que $A \neq \mathbf{0}$, sabemos que $\alpha_A \in (0, 1]$. El apartado 1 del Lema 3.3.18 nos garantiza que existen los siguientes límites:

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \quad \text{y} \quad \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta$$

sea cual sea $\alpha \in (0, \alpha_A]$. Por tanto, para todo $\alpha \in (0, \alpha_A]$,

$$A_L(\alpha) = f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \right) \leq f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta \right) \leq g \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta \right) = A_U(\alpha).$$

Además, si $\alpha \in (\alpha_A, 1]$, entonces $A_L(\alpha) = T_1(\ell_L^A, \ell_U^A) \leq T_2(\ell_L^A, \ell_U^A) = A_U(\alpha)$. Por tanto $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$ es un subintervalo cerrado no vacío de \mathbb{I} para cada $\alpha \in (0, 1]$. Veamos que A_L es una función creciente. Para probarlo, sean $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$ tales que $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Si $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha_A, 1]$, tenemos que $A_L(\alpha_1) = T_1(\ell_L^A, \ell_U^A) = A_L(\alpha_2)$. Mientras que si $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \alpha_A]$, entonces el apartado 2 del Lema 3.3.18 muestra que:

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha_1^-} \inf A_\beta \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha_2^-} \inf A_\beta,$$

y como f es creciente, entonces:

$$A_L(\alpha_1) = f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha_1^-} \inf A_\beta \right) \leq f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha_2^-} \inf A_\beta \right) = A_L(\alpha_2).$$

Por último, si $\alpha_1 \in (0, \alpha_A]$ y $\alpha_2 \in (\alpha_A, 1]$, observamos que

$$\begin{aligned} A_L(\alpha_1) &= f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha_1^-} \inf A_\beta \right) \leq f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha_2^-} \inf A_\beta \right) \\ &= f(\ell_L^A) \leq T_1(\ell_L^A, \ell_U^A) = A_L(\alpha_2). \end{aligned}$$

En todo caso, podemos afirmar que $A_L(\alpha_1) \leq A_L(\alpha_2)$ para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$ con $\alpha_1 \leq \alpha_2$, luego A_L es creciente. De manera similar se puede comprobar que A_U es una función decreciente.

Comprobamos ahora que A_L es continua a la izquierda. Como A_L es constante en $(\alpha_A, 1]$, claramente es continua en ese intervalo. Sea $\alpha \in (0, \alpha_A]$ arbitrario y sea $\{\alpha_n\} \subset (0, \alpha)$ una sucesión estrictamente creciente tal que $\{\alpha_n\} \rightarrow \alpha$. Como la función $\phi_\alpha : (0, \alpha_A) \rightarrow \mathbb{I}$ dada por $\phi_\alpha(\beta) = \inf A_\beta$ para cada $\beta \in (0, \alpha)$ está bien definida y es creciente en $(0, \alpha)$, y dado que la función f es continua, deducimos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_L(\alpha_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha_n^-} \inf A_\beta \right) = f \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\beta \rightarrow \alpha_n^-} \inf A_\beta \right) \\ &= f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \right) = A_L(\alpha). \end{aligned}$$

Luego, A_L es continua por la izquierda en α , lo que prueba que A_L es continua por la izquierda en $(0, 1]$. El mismo razonamiento nos vale para probar que A_U es continua por la izquierda en $(0, 1]$.

A continuación, sea $\mathcal{A} \in \text{FS}$ el conjunto difuso asociado a la familia $F = \{ [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] : \alpha \in (0, 1] \}$ por el Teorema 3.3.12, es decir, \mathcal{A} viene dado por:

$$\mathcal{A}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in \mathbb{I} \setminus (\cup_{\alpha \in (0,1]} [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]), \\ \sup(\{ \beta : t \in [A_L(\beta), A_U(\beta)] \}), & \\ \text{si existe } \beta_0 \in (0, 1] \text{ tal que } t \in [A_L(\beta_0), A_U(\beta_0)]. & \end{cases}$$

El apartado 3 del Teorema 3.3.12 nos lleva a que, para cada $\alpha \in (0, 1]$:

$$[A_L(\alpha), A_U(\alpha)] \subseteq \mathcal{A}_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} [A_L(\beta), A_U(\beta)].$$

Pero como las funciones A_L y A_U son continuas por la izquierda en $(0, 1]$, entonces:

$$\mathcal{A}_\alpha = \bigcap_{\beta \in (0, \alpha)} [A_L(\beta), A_U(\beta)] = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] \quad \text{para cada } \alpha \in (0, 1].$$

Observemos que $\mathcal{A}_1 = [A_L(1), A_U(1)] = [T_1(\ell_L^A, \ell_U^A), T_2(\ell_L^A, \ell_U^A)]$ es un intervalo no vacío, por lo que el conjunto difuso \mathcal{A} es normal. Como consecuencia, el Teorema 3.3.10 (aplicado al caso $\omega_0 = 1$) garantiza que \mathcal{A} es un número difuso. Además, \mathcal{A} es el único número difuso cuyos conjuntos de nivel vienen dados por las expresiones (3.7)-(3.8). ■

Este resultado nos permite definir el operador de aproximación

$$\Phi = \Phi_{f,g,T_1,T_2} : \text{FS} \rightarrow \text{FN}$$

para cada conjunto difuso $A \in \text{FS}$, como:

$$\Phi(A) = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } A = \mathbf{0}, \\ \mathcal{A}, & \text{si } A \neq \mathbf{0}, \end{cases}$$

donde $\mathcal{A} \in \text{FN}$ es el único número difuso normal cuyos conjuntos de nivel $\{ \mathcal{A}_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] : \alpha \in (0, 1] \}$ vienen dados por las expresiones (3.7)-(3.8) del Teorema 3.4.1.

Observación 3.4.2 *La definición $\Phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ hace que, en verdad, no podamos afirmar siempre que $\Phi(A)$ sea un número difuso normal ya que $\mathbf{0}$ es un número difuso, pero no es normal. No obstante, este hecho no debe desviar nuestra atención y, por ello, no lo destacaremos. Otra posibilidad es definir $\Phi(\mathbf{0}) = \tilde{\mathbf{0}}_1$, pero ello conllevaría una cierta complejidad en las demostraciones en la que no estamos interesados en absoluto.*

Una de las primeras características de este operador es el gran número de parámetros iniciales de los que depende, a saber, las cuatro funciones f, g, T_1 y T_2 . Esto permitirá a cualquier investigador que desee utilizarlo configurar su forma de actuar según sean los aspectos principales de la investigación que está desarrollando.

Nos resulta especialmente interesante el caso particular en el que:

$$\begin{cases} f = g = \text{aplicación identidad en } \mathbb{I}, \\ T_1 = \text{mín}, \\ T_2 = \text{máx}. \end{cases}$$

A esta elección concreta de los parámetros iniciales la denominaremos *elección estándar*. En tal caso, denotamos por

$$\Phi_0 : \text{FS} \rightarrow \text{FN}$$

al operador que resulta al seleccionar los parámetros iniciales bajo la elección estándar. Por completitud, describimos cómo actúa este operador en el siguiente enunciado.

Corolario 3.4.3 Para cada conjunto difuso $A \in \text{FS} \setminus \{\mathbf{0}\}$ existe un único número difuso normal $\Phi_0(A) = \mathcal{A} \in \text{FN}$ cuyos conjuntos de nivel $\{\mathcal{A}_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] : \alpha \in (0, 1]\}$ vienen dados por los siguientes extremos:

$$A_L(\alpha) = \begin{cases} \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta, & \text{si } \alpha \in (0, \alpha_A], \\ \text{mín}(\ell_L^A, \ell_U^A), & \text{si } \alpha \in (\alpha_A, 1]; \end{cases}$$

$$A_U(\alpha) = \begin{cases} \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta, & \text{si } \alpha \in (0, \alpha_A], \\ \text{máx}(\ell_L^A, \ell_U^A), & \text{si } \alpha \in (\alpha_A, 1]. \end{cases}$$

El operador Φ puede ser visto como un operador paramétrico; precisamente la ductilidad de las cuatro funciones debería permitirnos un ajuste apropiado a cada situación experimental. Las funciones T_1 y T_2 pueden conllevar matices de t-normas en éste y otros futuros trabajos; además, el manejo de f y g mediante funciones polinómicas permiten establecer herramientas potentes a la vez que sencillas en la programación de resultados. Veamos un ejemplo de la forma de actuar de este operador, en primer lugar bajo la elección estándar y después en el caso de otra elección distinta.

Ejemplo 3.4.4 Sea $A \in \text{FS}$ el conjunto difuso (véase la Figura 3.5) definido por:

$$A(t) = \begin{cases} 2t, & \text{if } 0 \leq t < 0.2, \\ 4t - 0.8, & \text{if } 0.2 \leq t \leq 0.4, \\ 0.2, & \text{if } 0.4 < t \leq 0.6, \\ 3.2 - 4t, & \text{if } 0.6 < t \leq 0.8, \\ t - 0.6, & \text{if } 0.8 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

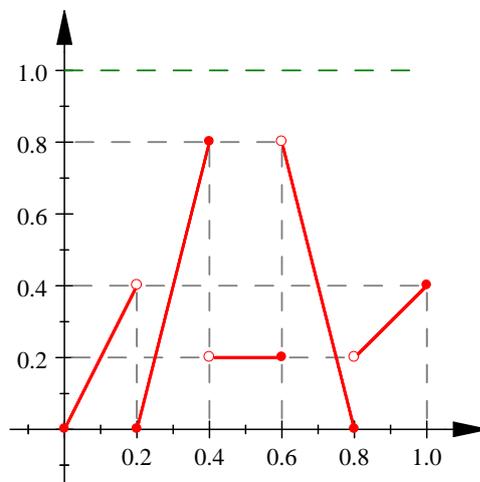


Figura 3.5: Representación gráfica del conjunto difuso del Ejemplo 3.4.4

Para cada $\alpha \in (0, 1]$, el conjunto de nivel α de A viene dado por:

$$A_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \alpha \in (0.8, 1], \\ \left[\frac{\alpha + 0.8}{4}, 0.4 \right] \cup \left(0.6, \frac{3.2 - \alpha}{4} \right], & \text{si } \alpha \in (0.4, 0.8], \\ \left[\frac{\alpha}{2}, 0.2 \right) \cup \left[\frac{\alpha + 0.8}{4}, 0.4 \right] \cup \left(0.6, \frac{3.2 - \alpha}{4} \right] \cup [\alpha + 0.6, 1], & \text{si } \alpha \in (0.2, 0.4], \\ \left[\frac{\alpha}{2}, 0.2 \right) \cup \left[\frac{\alpha + 0.8}{4}, \frac{3.2 - \alpha}{4} \right] \cup [\alpha + 0.6, 1], & \text{si } \alpha \in (0, 0.2], \\ [0, 1], & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

En consecuencia, el supremo de A es $\alpha_A = 0.8$ y los extremos de los α -cortes son, para cada $\alpha \in (0, 0.8]$,

$$\begin{aligned} \inf A_\alpha &= \begin{cases} \frac{\alpha + 0.8}{4}, & \text{si } \alpha \in (0.4, 0.8], \\ \frac{\alpha}{2}, & \text{si } \alpha \in (0, 0.4]; \end{cases} \\ \sup A_\alpha &= \begin{cases} \frac{3.2 - \alpha}{4}, & \text{si } \alpha \in (0.4, 0.8], \\ 1, & \text{si } \alpha \in (0, 0.4]. \end{cases} \end{aligned}$$

Las funciones que a cada $\alpha \in (0, 0.8]$ le asignan $\inf A_\alpha$ y $\sup A_\alpha$, respectivamente, son continuas por la izquierda pero no continuas en $\alpha = 0.4$. Obsérvese que:

$$\ell_L^A = \lim_{\beta \rightarrow 0.8^-} \inf A_\beta = 0.4 \quad \text{y} \quad \ell_U^A = \lim_{\beta \rightarrow 0.8^-} \sup A_\beta = 0.6.$$

Si utilizamos la opción estándar, $T_1(\ell_L^A, \ell_U^A) = \min(0.4, 0.6) = 0.4$ y $T_2(\ell_L^A, \ell_U^A) = \max(0.4, 0.6) = 0.6$. Tendremos entonces que:

$$\Phi_0(A)_\alpha = \begin{cases} [0.4, 0.6], & \text{si } \alpha \in (0.8, 1], \\ \left[\frac{\alpha + 0.8}{4}, \frac{3.2 - \alpha}{4} \right], & \text{si } \alpha \in (0.4, 0.8], \\ \left[\frac{\alpha}{2}, 1 \right], & \text{si } \alpha \in (0, 0.4]. \end{cases}$$

Así, bajo la elección estándar, el número difuso normal $\Phi_0(A)$ asociado a A

mediante Φ_0 viene dado por:

$$\Phi_0(A)(t) = \begin{cases} 2t, & \text{if } 0 \leq t < 0.2, \\ 0.4, & \text{if } 0.2 < t \leq 0.3, \\ 4t - 0.8, & \text{if } 0.3 < t < 0.4, \\ 1, & \text{if } 0.4 \leq t \leq 0.6, \\ 3.2 - 4t, & \text{if } 0.6 < t \leq 0.7, \\ 0.4, & \text{if } 0.7 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

el cual se representa en la Figura 3.6.

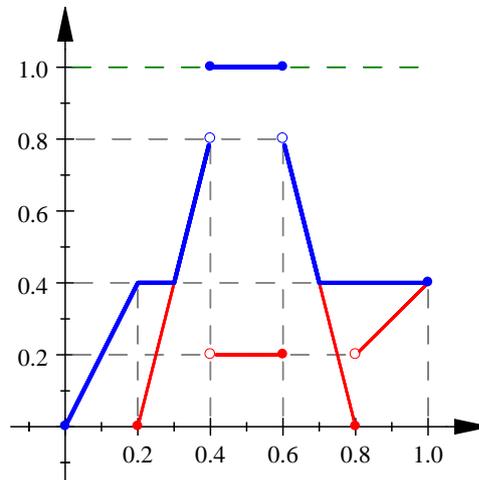


Figura 3.6: Número difuso obtenido como aproximación en el Ejemplo 3.4.4

Ejemplo 3.4.5 Supongamos ahora que las condiciones iniciales del operador Φ vienen dadas por las siguientes funciones:

$$\begin{cases} f(t) = t^3, \\ T_1(t, s) = (\text{mín} \{t, s\})^2, \\ T_2(t, s) = \sqrt{\text{máx} \{t, s\}}, \\ g(t) = \sqrt[3]{t}, \end{cases}$$

para cada $t, s \in \mathbb{I}$ tales que $t \leq s$. Consideremos el número difuso $A \in \text{FS}$ expuesto en el Ejemplo 3.4.4 por la definición (3.9). Entonces, si llamamos

$\mathcal{B} = \Phi_{f,g,T_1,T_2}(A)$, se tiene que:

$$B_L(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} T_1(\ell_L^A, \ell_U^A), & \text{si } \alpha \in (0.8, 1], \\ f\left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta\right), & \text{si } \alpha \in (0, 0.8] \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0.4^2, & \text{si } \alpha \in (0.8, 1], \\ \left(\frac{\alpha + 0.8}{4}\right)^3, & \text{si } \alpha \in (0.4, 0.8], \\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3, & \text{si } \alpha \in (0, 0.4]; \end{array} \right.$$

e igualmente

$$B_U(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} T_2(\ell_L^A, \ell_U^A), & \text{si } \alpha \in (0.8, 1], \\ g\left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta\right), & \text{si } \alpha \in (0, 0.8] \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{0.6}, & \text{si } \alpha \in (0.8, 1], \\ \sqrt[3]{\frac{3.2 - \alpha}{4}}, & \text{si } \alpha \in (0.4, 0.8], \\ 1, & \text{si } \alpha \in (0, 0.4]. \end{array} \right.$$

Si dibujamos estas funciones, obtenemos la representación gráfica dada en la Figura 3.7, (a).

Por consiguiente, el único número difuso $\Phi_{f,g,T_1,T_2}(A)$ cuyos extremos de sus conjuntos de nivel viene dados por las funciones previas es el siguiente, representado en la Figura 3.7, (b).

$$\Phi_{f,g,T_1,T_2}(A)(t) = \begin{cases} \sqrt[3]{8t}, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.008, \\ 0.4, & \text{si } 0.008 < t \leq 0.027, \\ 4\sqrt[3]{t} - 0.8, & \text{si } 0.027 < t \leq 0.064, \\ 0.8, & \text{si } 0.064 < t \leq 0.16, \\ 1, & \text{si } 0.16 \leq t \leq \sqrt{0.6}, \\ 0.8, & \text{si } \sqrt{0.6} \leq t \leq \sqrt[3]{0.6}, \\ 3.2 - 4t^3, & \text{si } \sqrt[3]{0.6} \leq t \leq \sqrt[3]{0.7}, \\ 0.4, & \text{si } \sqrt[3]{0.7} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

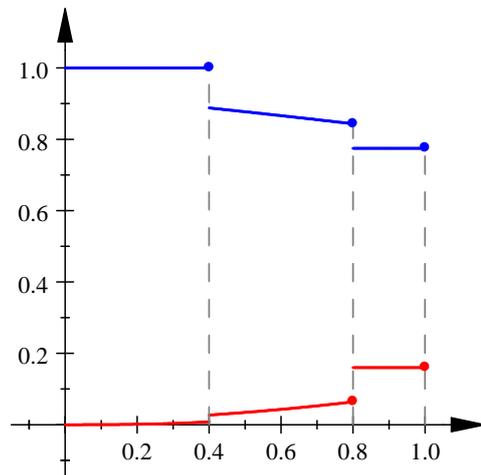
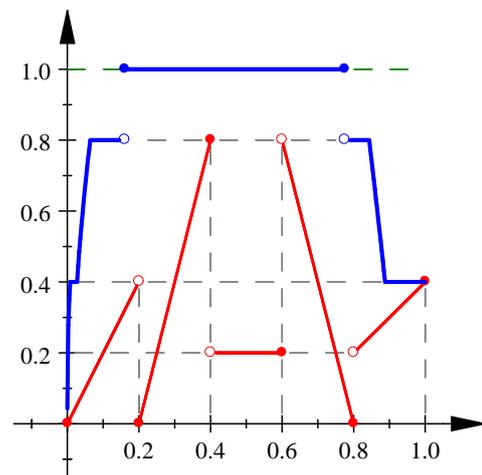
(a) Funciones extremas B_L y B_U .(b) Número difuso $\mathcal{B} = \Phi_{f,g,T_1,T_2}(A)$.

Figura 3.7: Representación gráfica de: (a) los extremos B_L y B_U ; (b) el número difuso $\mathcal{B} = \Phi_{f,g,T_1,T_2}(A)$ obtenido en el Ejemplo 3.4.5

3.5. Algunas propiedades de los operadores de aproximación

Si recordamos, una de las primeras propiedades que le íbamos a requerir al operador de aproximación es que, bajo ciertas condiciones iniciales, los números difusos normales que se asocian a números difusos normales sean ellos mismos

(pues ya cumplen la condición de ser números difusos normales), es decir, los números difusos normales deben ser puntos fijos del operador Φ y, por tanto, se aproximan por ellos mismos. Es lo que vamos a demostrar en el siguiente resultado.

Teorema 3.5.1 Si f y g se eligen como la aplicación identidad en \mathbb{I} , entonces cada número difuso normal en \mathbb{I} es un punto fijo del operador de aproximación $\Phi = \Phi_{f,g,T_1,T_2}$. Además, en este caso, el operador Φ es sobreyectivo en la familia de todos los números difusos normales.

DEMOSTRACIÓN: El número difuso $\mathbf{0}$ es un punto fijo de Φ por definición. Sea $\mathcal{B} \in \text{FN} \setminus \{\mathbf{0}\}$ cualquier número difuso normal no nulo. Entonces $\alpha_{\mathcal{B}} = 1$ y sus conjuntos de nivel son del tipo $\mathcal{B}_{\alpha} = [B_L(\alpha), B_U(\alpha)]$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, donde $B_L, B_U : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas por la izquierda (recuérdese el Teorema 3.3.10). Sea $\mathcal{A} = \Phi(\mathcal{B}) \in \text{FN}$ el único número difuso normal asociado a \mathcal{B} bajo el razonamiento usado en el Teorema 3.4.1. Como f es la aplicación identidad, entonces, para todo $\alpha \in (0, 1]$,

$$A_L(\alpha) = f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf \mathcal{B}_{\beta} \right) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf \mathcal{B}_{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} B_L(\beta) = B_L(\alpha),$$

donde la última igualdad sucede porque B_L es continua a la izquierda. El mismo tipo de razonamiento nos lleva a $A_U(\alpha) = B_U(\alpha)$ para cada $\alpha \in (0, 1]$. Por tanto, al ser iguales los conjuntos de nivel de los números difusos \mathcal{A} y \mathcal{B} , podemos asegurar, por la Proposición 2.2.2, que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. De esta forma, $\mathcal{B} = \mathcal{A} = \Phi(\mathcal{B})$ es un punto fijo de Φ . Esto además que Φ es sobreyectiva sobre la familia de todos los números difusos normales, pues siempre se obtiene un número difuso normal al calcular $\Phi(A)$ y, además, cualquier número difuso normal es la imagen de sí mismo. ■

Una visión, bastante simple, de los conjuntos difusos es aquella que los expone como generalizaciones de los conjuntos *crisp* bajo un cierto grado de incertidumbre. La relación de orden parcial por excelencia en estos últimos es la inclusión \subseteq . Es precisamente esta relación la que nos permite generalizarla al

contexto de los conjuntos difusos de la siguiente forma: dados dos conjuntos difusos $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$, el conjunto difuso A está *incluido en el conjunto difuso* B si $A \leq B$, es decir, $A(t) \leq B(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta relación puede ser interpretada en términos de α -cortes de la siguiente manera.

Lema 3.5.2 Dados dos conjuntos difusos $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}$, se cumple que A está incluido en B ($A \leq B$) si, y sólo si, $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, 1]$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $A \leq B$. Dado $\alpha \in (0, 1]$, sea $t \in A_\alpha$. Como $B(t) \geq A(t) \geq \alpha$, entonces $t \in B_\alpha$, luego $A_\alpha \subseteq B_\alpha$. De forma inversa, supongamos que $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, 1]$. Sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario y sea $\alpha = A(t)$. Si $\alpha = 0$, entonces $A(t) = 0 \leq B(t)$. Supongamos que $\alpha > 0$. Entonces $t \in A_\alpha$, con $B(t) \geq \alpha = A(t)$. En cualquier caso, $A \leq B$. ■

Veamos un primer resultado que tiene en consideración la inclusión en conjuntos difusos.

Teorema 3.5.3 Si f y g verifican que $f(t) \leq t \leq g(t)$ para todo $t \in \mathbb{I}$, entonces $A \leq \Phi(A)$ para todo $A \in \text{FS}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $A = \mathbf{0}$, entonces $\Phi(A) = A$. Supongamos que $A \neq \mathbf{0}$, esto es, $\alpha_A > 0$. Sea $t_0 \in \mathbb{I}$ arbitrario y sea $\alpha_0 = A(t_0)$. Si $\alpha_0 = 0$, entonces $A(t_0) = 0 \leq \Phi(A)(t_0)$. Supongamos ahora que $\alpha_0 = A(t_0) > 0$. Como $t_0 \in A_{\alpha_0}$, tendremos que $A_{\alpha_0} \neq \emptyset$. El primer apartado del Lema 3.3.18 garantiza que:

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha_0^-} \inf A_\beta \leq \inf A_{\alpha_0} \leq \sup A_{\alpha_0} \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha_0^-} \sup A_\beta.$$

Por consiguiente:

$$A_L(\alpha_0) = f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha_0^-} \inf A_\beta \right) \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha_0^-} \inf A_\beta \leq \inf A_{\alpha_0},$$

y

$$A_U(\alpha_0) = g \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha_0^-} \sup A_\beta \right) \geq \lim_{\beta \rightarrow \alpha_0^-} \sup A_\beta \geq \sup A_{\alpha_0}.$$

Como consecuencia,

$$t_0 \in A_{\alpha_0} \subseteq [\inf A_{\alpha_0}, \sup A_{\alpha_0}] \subseteq [A_L(\alpha_0), A_U(\alpha_0)] = \Phi(A)_{\alpha_0}.$$

Esto significa que $\Phi(A)(t_0) \geq \alpha_0 = A(t_0)$, lo que completa la demostración.

■

El siguiente resultado muestra que Φ verifica una propiedad minimizante.

Teorema 3.5.4 Sea $A \in \text{FS}$ un conjunto difuso tal que $\alpha_A = 1$ y sea $\mathcal{B} \in \text{FN}$ un número difuso tal que $A \leq \mathcal{B}$. Si f y g son la aplicación identidad sobre \mathbb{I} , entonces $\Phi(A) \leq \mathcal{B}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{A} = \Phi(A) \in \text{FN}$. Como $A \leq \mathcal{B}$, entonces:

$$A_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\alpha = [B_L(\alpha), B_U(\alpha)] \quad \text{para todo } \alpha \in (0, 1]$$

(resultado apuntado en Lema 3.5.2). Como $\alpha_A = 1$, entonces $A_\beta \neq \emptyset$ para todo $\beta \in (0, 1)$. En particular, $B_L(\beta) \leq \inf A_\beta \leq \sup A_\beta \leq B_U(\beta)$ para cada $\beta \in (0, 1)$. Así, para cada $\alpha \in (0, 1]$,

$$A_L(\alpha) = f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \right) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \geq \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} B_L(\beta) = B_L(\alpha)$$

y también

$$A_U(\alpha) = g \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta \right) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} B_U(\beta) = B_U(\alpha).$$

Como consecuencia,

$$\mathcal{A}_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] \subseteq [B_L(\alpha), B_U(\alpha)] = \mathcal{B}_\alpha$$

para cada $\alpha \in (0, 1]$, lo que demuestra, aplicando el Lema 3.5.2, que $\Phi(A) = \mathcal{A} \leq \mathcal{B}$. ■

Nuestro próximo objetivo es observar cómo se comporta el operador sobre dos conjuntos difusos muy similares entre sí. Para ello, necesitamos un resultado técnico previo.

Proposición 3.5.5 Si un conjunto difuso $A \in \text{FS}$ no tiene máximo absoluto, entonces existe una sucesión $\{t_n\} \subseteq \mathbb{I}$ tal que $\{t_n\} \rightarrow s_0 \in \mathbb{I}$, $\{A(t_n)\}$ es estrictamente creciente y $\{A(t_n)\} \rightarrow \alpha_A$.

DEMOSTRACIÓN: Como A no tiene máximo absoluto, $A(t) < \alpha_A$ para todo $t \in \mathbb{I}$. Como α_A es el supremo de A , entonces existe una sucesión $\{s_n\} \subset \mathbb{I}$ tal que $\{A(s_n)\} \rightarrow \alpha_A$. Como $A(s_n) < \alpha_A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{s_n\}$ posee una subsucesión parcial $\{s_{\sigma(n)}\}$ tal que $\{A(s_{\sigma(n)})\}$ es estrictamente creciente (y convergente a α_A). Por último, sabiendo que $\{s_{\sigma(n)}\}$ está acotada, entonces dicha sucesión posee una parcial convergente $\{t_n\}$ que verifica todas las propiedades del enunciado. ■

Teorema 3.5.6 Dado un conjunto difuso $A \in \text{FS}$ sin máximo absoluto, sea $\{t_n\} \subset \mathbb{I}$ una sucesión tal que $\{t_n\} \rightarrow s_0 \in \mathbb{I}$, $\{A(t_n)\}$ es estrictamente creciente y $\{A(t_n)\} \rightarrow \alpha_A$. Definamos $B \in \text{FS}$ como:

$$B(t) = \begin{cases} \alpha_A, & \text{si } t = s_0, \\ A(t), & \text{si } t \neq s_0. \end{cases}$$

Entonces $B \in \text{FS}$ es un conjunto difuso que tiene máximo absoluto (el cual es α_A) y que verifica que $\Phi(A) = \Phi(B)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\gamma_0 = A(s_0)$. Como A no tiene máximo absoluto, entonces $\gamma_0 = A(s_0) < \alpha_A$. Claramente B es un conjunto difuso que tiene máximo absoluto, el cual es $\alpha_B = \alpha_A$. Además:

$$B_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \alpha \in (\alpha_A, 1], \\ A_\alpha \cup \{s_0\}, & \text{si } \alpha \in (\gamma_0, \alpha_A], \\ A_\alpha & \text{si } \alpha \in (0, \gamma_0]. \end{cases}$$

El apartado 3.3.1 de la Proposición 3.3.1 garantiza que $A_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha \in (0, \alpha_A)$ y que $A_\alpha = \emptyset$ para cada $\alpha \in (\alpha_A, 1]$. Pero A no tiene máximo absoluto, deducimos que $A_\alpha = \emptyset$ para todo $\alpha \in (\alpha_A, 1]$. En particular $B_{\alpha_A} = \{s_0\}$ y $s_0 \in B_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in (0, \alpha_A]$. Dado que $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ para todo

$\alpha \in (0, \alpha_A)$, entonces $\inf B_\alpha \leq \inf A_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, \alpha_A)$. Definamos $\phi_A, \phi_B : (0, \alpha_A) \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\phi_A(\alpha) = \inf A_\alpha \quad \text{y} \quad \phi_B(\alpha) = \inf B_\alpha \quad \text{para cada } \alpha \in (0, \alpha_A).$$

Ambas funciones ϕ_A y ϕ_B son crecientes y acotadas superiormente (recordemos que $\text{supp } A \subseteq \mathbb{I}$). Vamos a sistematizar el resto de la demostración en 7 pasos.

Paso 1. Veamos que $\inf B_\beta \leq s_0$ para todo $\beta \in (0, \alpha_A]$ y $\ell_L^B \leq s_0$. Dado que $s_0 \in B_\beta$ para cada $\beta \in (0, \alpha_A]$, tenemos que $\inf B_\beta \leq s_0$ para cada $\beta \in (0, \alpha_A]$. En particular, $\ell_L^B = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \inf B_\beta \leq s_0$.

Paso 2. Probemos que $\ell_L^A \leq s_0$. Definamos $\beta_n = A(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{A(t_n)\}$ es estrictamente creciente pero A no tiene máximo absoluto, entonces $\beta_n < \beta_{n+1} < \alpha_A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{\beta_n\} \rightarrow \alpha_A$. Además, como $t_n \in A_{\beta_n}$, entonces $\inf A_{\beta_n} \leq t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que $\{t_n\} \rightarrow s_0$ y ϕ_A es creciente y acotada superiormente, entonces:

$$\ell_L^A = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \inf A_\beta = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \phi_A(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_A(\beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_{\beta_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s_0.$$

Paso 3. Comprobamos que $\inf A_\alpha \leq s_0$ para cada $\alpha \in (0, \alpha_A)$. Sea $\alpha \in (0, \alpha_A)$ arbitrario. Si $\beta \in (\alpha, \alpha_A)$, entonces $\alpha < \beta < \alpha_A$, y como ϕ_A es creciente, tenemos que $\phi_A(\alpha) \leq \phi_A(\beta)$. Así:

$$\inf A_\alpha = \phi_A(\alpha) \leq \lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \phi_A(\beta) = \ell_L^A \leq s_0.$$

Paso 4. Establecemos que $\inf A_\alpha = \inf B_\alpha$ para cada $\alpha \in (0, \alpha_A)$. Si $\alpha \in (0, \gamma_0]$, entonces $B_\alpha = A_\alpha$, luego $\inf A_\alpha = \inf B_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, \gamma_0]$. Supongamos que $\alpha \in (\gamma_0, \alpha_A)$. En este caso, A_α es no vacío y está acotado superiormente, luego $s_0 \notin A$. Como $\inf A_\alpha \leq s_0$ por el paso 3, entonces $\inf A_\alpha = \inf(A_\alpha \cup \{s_0\}) = \inf B_\alpha$.

Paso 5. Demostramos que $\ell_L^A = \ell_L^B$. Basta utilizar el paso anterior para deducir que:

$$\ell_L^B = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \inf B_\beta = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \inf A_\beta = \ell_L^A.$$

Repitiendo los pasos 1 a 5, se demuestra de una forma similar que $\ell_U^A = \ell_U^B$.

Paso 6. Observamos que $\lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \inf A_\beta = \lim_{\beta \rightarrow \alpha_A^-} \inf B_\beta$ para todo $\alpha \in (0, \alpha_A]$. Nuevamente es una consecuencia directa del paso 4.

Paso 7. Probamos que $A_L(\alpha) = B_L(\alpha)$ para cada $\alpha \in (0, 1]$. Utilizando la expresión (3.7) expuesta en el Teorema 3.4.1 y el paso 6, si $\alpha \in (0, \alpha_A]$, deducimos que:

$$A_L(\alpha) = f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \right) = f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf B_\beta \right) = B_L(\alpha),$$

y si $\alpha \in (\alpha_A, 1]$, entonces:

$$A_L(\alpha) = T_1(\ell_L^A, \ell_U^A) = T_1(\ell_L^B, \ell_U^B) = B_L(\alpha).$$

En cualquier caso, $A_L(\alpha) = B_L(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Un razonamiento idéntico nos permite establecer $A_U(\alpha) = B_U(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Por consiguiente, $\Phi(A)_\alpha = \Phi(B)_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, lo que demuestra que $\Phi(A) = \Phi(B)$. ■

Este resultado (Teorema 3.5.6) nos muestra que el operador aproximación Φ nunca es inyectivo. Por tanto, podemos reducir el estudio al caso en el que los conjuntos difusos de FS tienen máximo absoluto.

Teorema 3.5.7 Bajo la elección estándar, el operador de aproximación Φ_0 es creciente en FS con respecto a la relación binaria \leq anteriormente descrita. Además se verifica que $\Phi_0(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y $\Phi_0(\tilde{1}_1) = \tilde{1}_1$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $A, B \in \text{FS}$ dos conjuntos difusos tales que $A \leq B$. El Teorema 3.5.3 nos garantiza que $B \leq \Phi_0(B)$, por lo que $A \leq \Phi_0(B)$. Pero como $\Phi_0(B) \in \text{FN}$ es un número difuso normal, el Teorema 3.5.4 nos dice que $\Phi_0(A) \leq \Phi_0(B)$. Por tanto, Φ_0 es creciente en FS con respecto a la citada relación binaria \leq . ■

3.6. El operador de aproximación aplicado a números difusos de tipo LR

La cuestión que vamos a abordar en esta sección es: bajo la elección estándar, ¿cómo se comporta el operador de aproximación sobre la familia de conjuntos difusos de tipo LR que introdujimos en la Subsección 2.2.4? Para ser exactos, en el capítulo anterior los introdujimos en el caso de que fuesen números difusos. Vamos a retomar la misma definición, admitiendo el caso de que pudiesen no ser números difusos.

Un conjunto difuso A sobre la recta real es de *tipo LR* si puede ser expresado como:

$$A(t) = \begin{cases} L(t), & \text{si } a_1 < t < a_2, \\ \omega_2, & \text{si } a_2 \leq t \leq a_3, \\ R(t) & \text{si } a_3 < t < a_4, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ son cuatro números reales que verifican $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, $\omega_1, \omega_2 \in (0, 1]$, $L : [a_1, a_2] \rightarrow [0, \omega_1]$ es una función continua estrictamente creciente tal que $L(a_1) = 0$ y $L(a_2) = \omega_1$, y $R : [a_3, a_4] \rightarrow [0, \omega_1]$ es una función continua estrictamente decreciente tal que $R(a_3) = \omega_1$ y $R(a_4) = 0$. En tal caso, se utiliza la notación

$$A = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}.$$

La Figura 2.4 mostraba distintos casos para esta clase de conjuntos difusos, y allí comentamos que $A = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}$ era un número difuso si, y sólo si, $\omega_1 \leq \omega_2$. Si se da el caso de que $\omega_1 > \omega_2$, entonces A no es un número difuso porque, entre otras cuestiones, carece de máximo absoluto.

Cuando $\omega_1 \leq \omega_2$, los α -cortes del número difuso $(a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}$ vienen dados por:

$$\mathcal{A}_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \alpha \in (\omega_2, 1], \\ [a_2, a_3], & \text{si } \alpha \in [\omega_1, \omega_2], \\ [L^{-1}(\alpha), R^{-1}(\alpha)], & \text{si } \alpha \in (0, \omega_1). \end{cases}$$

En el siguiente enunciado mostramos cómo actúa Φ_0 sobre esta familia de conjuntos difusos.

Lema 3.6.1 Bajo la elección estándar, si $A = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR} \in \text{FS}$ es un conjunto difuso de tipo LR con soporte en \mathbb{I} , entonces

$$\Phi_0(A) = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, 1)_{LR}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{B} el número difuso normal de tipo LR dado por $(a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, 1)_{LR}$, y queremos probar que $\Phi_0(A) = \mathcal{B}$. Sus conjuntos de nivel son:

$$\mathcal{B}_\alpha = \begin{cases} [L^{-1}(\alpha), R^{-1}(\alpha)], & \text{si } \alpha \in (0, \omega_1], \\ [a_2, a_3], & \text{si } \alpha \in (\omega_1, 1]. \end{cases}$$

Sea $\mathcal{A} = \Phi_0(A)$ y denotemos por $\{\mathcal{A}_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] : \alpha \in (0, 1]\}$ su familia de α -cortes. Estudiamos el caso $\omega_2 < \omega_1$ porque es más difícil que el caso contrario. Suponemos también que $a_1 < a_2$ y que $a_3 < a_4$. Entonces $L^{-1} : [0, \omega_1] \rightarrow [a_1, a_2]$ es estrictamente creciente, $R^{-1} : [0, \omega_1] \rightarrow [a_3, a_4]$ es estrictamente decreciente, $L^{-1}(0) = a_1$, $L^{-1}(\omega_1) = a_2$, $R^{-1}(\omega_1) = a_3$ y $R^{-1}(0) = a_4$ (véase la Figura 3.8). Ambas funciones L^{-1} y R^{-1} son continuas. En este caso:

$$A_\alpha = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \alpha \in (\omega_1, 1], \\ [L^{-1}(\alpha), a_2] \cup (a_3, R^{-1}(\alpha)], & \text{si } \alpha \in (\omega_2, \omega_1), \\ [L^{-1}(\alpha), R^{-1}(\alpha)], & \text{si } \alpha \in (0, \omega_2]. \end{cases}$$

Por tanto, si $\beta \in (0, \omega_1) = (0, \alpha_A)$, entonces $\inf A_\beta = L^{-1}(\beta) \in [a_1, a_2]$ y $\sup A_\beta = R^{-1}(\beta) \in [a_3, a_4]$. Como consecuencia, para cada $\alpha \in (0, \alpha_A]$,

$$A_L(\alpha) = f \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta \right) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \inf A_\beta = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} L^{-1}(\beta) = L^{-1}(\alpha),$$

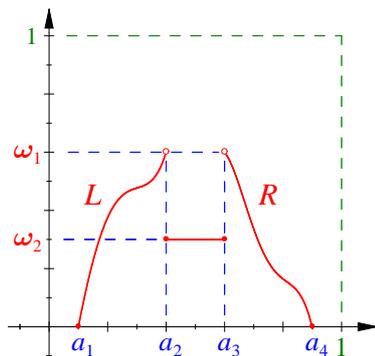


Figura 3.8: Representación gráfica de un número difuso de tipo LR dado por $(a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}$

e igualmente,

$$A_U(\alpha) = g \left(\lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta \right) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} \sup A_\beta = \lim_{\beta \rightarrow \alpha^-} R^{-1}(\beta) = R^{-1}(\alpha).$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \ell_L^A &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_A^-} \inf A_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \omega_1^-} L^{-1}(\alpha) = L^{-1}(\omega_1) = a_2 \quad \text{y} \\ \ell_U^A &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_A^-} \sup A_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \omega_1^-} R^{-1}(\alpha) = R^{-1}(\omega_1) = a_3. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $T_1(\ell_L^A, \ell_U^A) = \min(a_2, a_3) = a_2$ y $T_2(\ell_L^A, \ell_U^A) = \max(a_2, a_3) = a_3$.

Esto significa que:

$$A_L(\alpha) = \begin{cases} L^{-1}(\alpha), & \text{si } \alpha \in (0, \omega_1], \\ a_2, & \text{si } \alpha \in (\omega_1, 1]; \end{cases} \quad A_U(\alpha) = \begin{cases} R^{-1}(\alpha), & \text{si } \alpha \in (0, \omega_1], \\ a_3, & \text{si } \alpha \in (\omega_1, 1]. \end{cases}$$

Así, para cada $\alpha \in (0, 1]$,

$$\mathcal{A}_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] = \begin{cases} [L^{-1}(\alpha), R^{-1}(\alpha)], & \text{si } \alpha \in (0, \omega_1], \\ [a_2, a_3], & \text{si } \alpha \in (\omega_1, 1] \end{cases} = \mathcal{B}_\alpha.$$

Dado que estos son exactamente los conjuntos de nivel del número difuso normal $\mathcal{B} = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, 1)_{LR}$, concluimos, por la Proposición , que $\Phi_0(A) = \mathcal{A} = \mathcal{B} = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, 1)_{LR}$. ■

Corolario 3.6.2 Para cada $r \in \mathbb{I}$ y cada $\omega \in (0, 1]$, $\Phi_0(\tilde{r}_\omega) = \tilde{r}_1 \equiv r$.

3.7. Introducción a las funciones y a los índices de solapamiento

En la Introducción de la presente Memoria comentamos los antecedentes que llevaron a Bustince y otros a introducir en [15] las funciones de solapamiento. Básicamente, se trata de funciones que tienen multitud de aplicaciones en diferentes campos de las ciencias, pero que destacan en el ámbito de la Computación gracias a sus excelentes cualidades (que, por otro lado, son impuestas en la propia definición).

Cuando estas funciones se emplean en el ámbito difuso, sirven para comparar no sólo números difusos, sino conjuntos difusos en general. Su forma de actuar se lleva a cabo, en principio, punto a punto, pero las propiedades resultantes de los objetos calculados llevaron a García-Jiménez y otros a proponer en [49] una noción de *índice de solapamiento* que resultó tener un gran éxito para llevar a cabo diferentes tareas.

Teniendo en cuenta el interés que habían generado tanto las funciones de solapamiento como los índices de solapamiento entre diversos investigadores (véase, por ejemplo, [19, 11, 36, 38, 34, 89, 87, 88, 86, 46, 9]), y dado que en cierta manera estaban relacionadas con los contenidos que habíamos estudiado anteriormente, comenzaron a interesarnos sus bondades prácticas, y observamos que no se habían estudiado aún en el ámbito de los conjuntos difusos de tipo 2. Fue entonces cuando nos planteamos los siguientes objetivos, que marcarán el devenir de esta segunda parte del presente capítulo.

1. Introducir la noción de *índice de solapamiento de tipo $(2, k)$* (siendo $k \in \{0, 1, 2\}$) en el conjunto formado por todos los conjuntos difusos de tipo 2 como una extensión natural de los índices de consistencia previos.
2. Estudiar las relaciones que puedan existir entre esta nueva clase de índices de solapamiento y los índices de solapamiento que han sido definidos pre-

viamente en el contexto de los números reales o de los conjuntos difusos de tipo 1.

Antes de comenzar su estudio detallado, en la siguiente subsección comentamos las principales ideas que dieron lugar a la extensión de las funciones de solapamiento que presentaremos más adelante y, posteriormente, a cómo ayudaron éstas a determinar las características esenciales que debe cumplir un índice de solapamiento sobre conjuntos difusos de tipo 2.

3.7.1. Discusión sobre la noción de índice de solapamiento de tipo $(2, k)$

Las normas triangulares fueron introducidas para extender la desigualdad triangular a espacios métricos estadísticos de Menger. Sus propiedades fueron exhaustivamente analizadas para adaptarlas a cualquier situación práctica. Cada contexto necesita diferentes propiedades de las funciones bivariantes involucradas $T : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$. En un principio, las funciones de agregación son unas buenas candidatas para reducir el conjunto de axiomas que deben ser impuestos a las funciones.

Las funciones de solapamiento tiene un gran campo de aplicaciones en varios contextos. Fueron introducidas por Bustince et al. La principal ventaja de este tipo de funciones es la gran cantidad de propiedades interesantes que pueden ser deducidas de los cinco axiomas (G_1) - (G_5) y la familia de ejemplos diferentes que pueden ser considerados. No obstante, debemos establecer dos comentarios. Por un lado, la continuidad fue introducida para la posible aplicación de funciones de solapamiento en situaciones de procesamiento de imágenes. De hecho, en la mayoría de los resultados teóricos la continuidad no es una condición necesaria. Por otro lado, la condición de normalidad, dada en (G_4) es demasiado estricta en dos sentidos; no es fácil su generalización a ajustes difusos y es difícil encontrar ejemplos prácticos en contextos más generales. Recordemos que la condición

(G_4) podía expresarse en dos propiedades:

$$(G_{4,1}) \quad G(1, 1) = 1;$$

$$G_{4,2}) \quad \text{Si } G(t, s) = 1, \text{ entonces } t = s = 1;$$

García-Jiménez y otros decidieron introducir la noción de índice de solapamiento en el ajuste de un conjunto finito $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ como una aplicación $O : \text{FS}(U) \times \text{FS}(U) \rightarrow \mathbb{I}$ verificando las siguientes propiedades:

(O_1) O es simétrica;

(O_2) O es creciente;

(O_3) $O(A, B) = 0$ si, y sólo si, A y B son completamente disjuntos.

Bajo (O_1) , la monotonía creciente es equivalente a $O(A_1, B) \leq O(A_2, B)$ para todo $A_1, A_2, B \in \text{FS}(U)$ tales que $A_1 \leq A_2$. Claramente las propiedades (O_1) - (O_3) generalizan a (G_1) - (G_3) asociadas a una función de solapamiento débil. La condición (G_4) fue debilitada por la condición $(G_{4,1})$ a través del siguiente concepto: un índice de solapamiento O es normal si verifica

(O'_4) Si $A, B \in \text{FS}(U)$ son tales que existe $u_{j_0} \in U$ verificando $A(u_{j_0}) = B(u_{j_0}) = 1$, entonces $O(A, B) = 1$.

Remarcamos dos hechos. Por un lado, dado que la inversa no es necesariamente cierta, no tenemos información adicional sobre A y B cuando $O(A, B) = 1$. Sólo sabemos que si O es normal, entonces $O(A, F^1) = 1$ para todo $A \in \text{FS}(U)$ tales que $A(u_{j_0}) = 1$ para algún $u_{j_0} \in U$ (en particular, $O(F^1, F^1) = 1$)

Por otra parte, la palabra “solapamiento” dentro de la expresión “índice de solapamiento” se debe interpretar como un reconocimiento del papel fundamental de las funciones de solapamiento para construir ejemplos de índices de solapamiento. En todo caso, existen índices de solapamiento que no están, necesariamente, asociados a una determinada función de solapamiento.

Así, bajo nuestro planteamiento, para establecer un conjunto minimal de axiomas consistentes, consideramos una cantidad mínima de propiedades necesarias para desarrollar ejemplos prácticos, introduciendo funciones mas generales

que las funciones de solapamiento, evitando alguno de los axiomas previos. Incluso no emplearemos el término “de solapamiento”, pero asumimos la importancia capital de las funciones de solapamiento en este contexto.

3.7.2. Funciones más generales que las funciones de solapamiento

Como se comentó en la Subsección 2.1.2, las funciones de solapamiento vienen definidas por cinco propiedades de las más utilizadas en el ambiente matemático. Por su interés para lo que sigue, reproducimos de nuevo a continuación dichas propiedades, refiriéndonos a una función del tipo $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$:

(G_1) G es conmutativa;

(G_2) G es creciente;

(G_3) $G(t, s) = 0$ si, y solo si $t \cdot s = 0$ (es decir, $t = 0$ o $s = 0$);

(G_4) *normalidad*: $G(t, s) = 1$ si, y sólo si, $t \cdot s = 1$ (es decir, $G^{-1}(\{1\}) = \{(1, 1)\}$);

(G_5) G es continua.

Podemos decir que son propiedades “naturales”, en el sentido de que las funciones que verifican, por separado, cada una de estas propiedades, suelen ser de interés en el contexto matemático (por ejemplo, la continuidad de funciones es una herramienta clave en el Análisis Matemático). Algunas de estas propiedades han de verificarse en todo el cuadrado unidad \mathbb{I}^2 (por ejemplo, (G_1), (G_2) y (G_3)) y otras de ellas afectan únicamente al borde de dicho cuadrado (en concreto, (G_3) y (G_4)). De estas últimas se dice que son *condiciones de frontera*. Sin embargo, aunque todas ellas tienen entidad matemática propia, al considerarlas todas al unísono damos pie a una estructura matemática muy sólida (verificará magníficas propiedades) pero muy rígida (se restringirá mucho la clase de funciones que pertenecen a esta familia). Es decir, la familia de las funciones de

agregación es “mucho” más amplia que la familia de las funciones de solapamiento. Esto tiene una consecuencia inmediata en el ámbito de las aplicaciones: la utilización de funciones de solapamiento garantiza un comportamiento bastante regular, sin estridencias, pero, a la vez, hay poca variedad de funciones de solapamiento que puedan ser empleadas en el contexto práctico. De esta forma, pensando sobre todo en las aplicaciones, varios autores han mostrado una cierta tendencia a emplear funciones bivariadas que, a pesar de ser de agregación, no llegan a ser de solapamiento. Ello puede conseguirse de una forma muy sencilla: restringiendo el número de condiciones que se le imponen a las funciones de la familia. Es por ello que, seleccionando entre las propiedades (G_1) - (G_5) sólo algunas de ellas (en concreto, las que de verdad nos hagan falta en las aplicaciones concretas que deseemos desarrollar), surgirán familias de funciones intermedias entre las de agregación y las de solapamiento. Para nuestros intereses a lo largo de esta Memoria, destacamos y nombramos los siguientes tipos de funciones.

Definición 3.7.1 *Diremos que una función $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ es:*

- *una función de solapamiento débil si verifica (G_1) , (G_2) y (G_3) ;*
- *una función de solapamiento débil normal si verifica (G_1) , (G_2) , (G_3) y $(G_{4,1})$.*

La palabra “débil” hace referencia a que toda función de solapamiento es una función de solapamiento débil, es decir, las funciones de solapamiento débil forman una clase más general que las funciones de solapamiento. Lo primero que vamos a hacer es poner varios ejemplos, discutiendo las propiedades concretas que se satisfacen.

Ejemplo 3.7.2 *Dados tres números reales $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (0, 1]$ tales que $0 < \lambda_1 \leq$*

$\lambda_2 \leq \lambda_3 \leq 1$, sea $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ la función definida, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, por:

$$G(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } t = 0 \text{ o } s = 0, \\ \lambda_1, & \text{si } t, s \in (0, 1), \\ \lambda_2, & \text{si } 0 < s < t = 1 \text{ o } 0 < t < s = 1, \\ \lambda_3, & \text{si } t = s = 1. \end{cases}$$

Entonces G es una función de solapamiento débil. Además, G es normal si, y sólo si, $\lambda_3 = 1$. De hecho, verifica la condición $(G_{4,2})$ si, y sólo si, $\lambda_2 < \lambda_3 = 1$. Observemos que G nunca es continua ya que $0 < \lambda_1$, por lo que no es una función de solapamiento.

Ejemplo 3.7.3 Dado $\lambda \in (0, 1]$, sea $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ la función definida, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, por:

$$G(t, s) = \lambda t s.$$

Entonces G es una función de solapamiento débil continua. Obsérvese que G es normal si, y sólo si, $\lambda = 1$. En tal caso, G también verifica la condición $(G_{4,2})$, es decir, es una auténtica función de solapamiento.

Ejemplo 3.7.4 Dados $\lambda \in (0, 1/2]$ y $a, b \in (0, +\infty)$, sea $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ la función definida, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, por:

$$G(t, s) = \lambda t^a s^a (t^b + s^b).$$

Entonces G es una función de solapamiento débil. De hecho, es continua. Además, G es normal si, y sólo si, $\lambda = 1/2$. En tal caso, es una función de solapamiento.

Ejemplo 3.7.5 Consideremos la función $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ definida, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, por:

$$G(t, s) = \begin{cases} t s, & \text{si } t s \leq 0.6, \\ 0.6, & \text{si } 0.6 < t s < 0.8, \\ 2t s - 1, & \text{si } t s \geq 0.8. \end{cases}$$

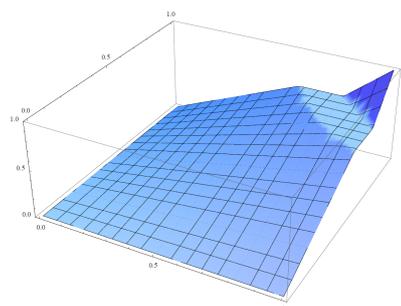
La función G posee una zona a altura constante como se aprecia en la Figura 3.9, (a). Ello hace que algunos cortes no sean funciones estrictamente crecientes. Sin

embargo, G cumple los requisitos para ser no solo una función de solapamiento débil, sino una función de solapamiento.

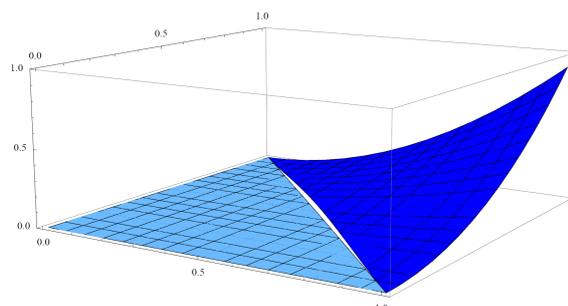
Ejemplo 3.7.6 Dados dos números reales $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1]$ tales que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$, sea $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ la función definida, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, por:

$$G(t, s) = \begin{cases} \lambda_1 t^3 s^3, & \text{si } t + s \leq 1, \\ \lambda_2 t^2 s^2, & \text{si } t + s > 1. \end{cases}$$

Entonces G es una función de solapamiento débil. Además, G es normal si, y sólo si, $\lambda_2 = 1$. Observemos que G no es continua en los puntos del segmento abierto $\{(t, 1-t), t \in (0, 1)\}$, por lo que no es una función de solapamiento, como se puede apreciar en la Figura 3.9, (b).



(a) Función del Ejemplo 3.7.5.



(b) Función del Ejemplo 3.7.6.

Figura 3.9: Representación gráfica de diferentes funciones de solapamiento débil

Ejemplo 3.7.7 Sea $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ la función definida, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, mediante la expresión:

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{2 - t + 2s - \sqrt{4(1-t) + (t-2s)^2}}{2}, & \text{si } t \geq s, \\ \frac{2 - s + 2t - \sqrt{4(1-s) + (s-2t)^2}}{2}, & \text{si } t < s. \end{cases}$$

Puede probarse que, para cada $t, s \in \mathbb{I}$,

$$G(t, s) = \frac{1}{2} \left[2 - \max(t, s) + 2 \min(t, s) - \sqrt{4(1 - \max(t, s)) + (\max(t, s) - 2 \min(t, s))^2} \right].$$

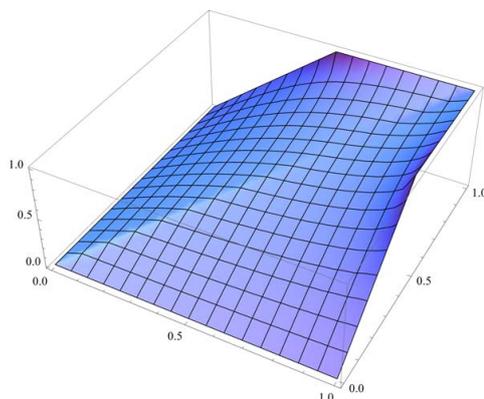


Figura 3.10: función de solapamiento débil del Ejemplo 3.7.7

Entonces G es una función de solapamiento débil, continua y normal (véase la Figura 3.10). Sin embargo, no cumple la propiedad $(G_{4,2})$ ya que, dados $t, s \in \mathbb{I}$,

$$G(t, s) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (t = 1 \text{ y } s \in [0.5, 1]) \quad \text{o} \quad (s = 1 \text{ y } t \in [0.5, 1]).$$

No obstante, obsérvese que $G(t, t) = t$ para cada $t \in \mathbb{I}$.

3.8. Los índices de solapamiento de tipo $(2, k)$

En la presente sección vamos a introducir la definición de índice de solapamiento aplicado a un par de conjuntos difusos de tipo 2. El resultado debe ser otro conjunto difuso, en principio de tipo 1. Sin embargo, dado que las propiedades algebraicas que se emplean son las mismas en diferentes niveles, plantearemos la definición de general, de manera que el índice de solapamiento de dos conjuntos difusos de tipo 2 será un conjunto difuso de tipo k , siendo k un número entero del conjunto $\{0, 1, 2\}$.

Recordemos que, dado $k \in \{0, 1, 2\}$, denotamos con $(\text{FS}_k(X), \leq)$ al retículo acotado cuyo mínimo absoluto es \mathfrak{m}_k y cuyo máximo absoluto es \mathfrak{M}_k .

Definición 3.8.1 Dado $k \in \{0, 1, 2\}$, llamaremos índice de solapamiento de tipo $(2, k)$ a cualquier aplicación:

$$\theta : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}_k(X)$$

que cumpla las siguientes propiedades:

θ_1) θ es simétrica, es decir, $\theta(\mathbb{B}, \mathbb{A}) = \theta(\mathbb{A}, \mathbb{B})$;

θ_2) θ es creciente, o sea, si $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$, entonces $\theta(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \leq \theta(\mathbb{B}, \mathbb{C})$ para todo $\mathbb{C} \in \text{FS}_2(X)$;

θ_3) $\theta(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \mathfrak{m}_k$ si, y sólo, si \mathbb{A} y \mathbb{B} son completamente disjuntos.

Además, un índice de solapamiento tipo- $(2, k)$ θ es normal si, adicionalmente, verifica:

θ_4) Si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ son conjuntos difusos de tipo 2 tales que para toda $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{I}$ verificando que $\mathbb{A}(x)(t_x) = \mathbb{B}(x)(t_x) = 1$, entonces $\theta(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \mathfrak{M}_k$.

Como veremos más adelante, el axioma (θ_4) es una generalización razonable de la condición (O'_4) al caso de conjuntos difusos de tipo 2. Sin embargo, se pudieran haber tenido en cuenta otras posibles condiciones con objeto de generalizar la propiedad $(G_{4,1})$. Describimos, a continuación, dos posibilidades que quizá deban estudiarse en el futuro para ver cuál de ellas verifica mejores propiedades.

θ'_4) Si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ son dos conjuntos difusos de tipo 2 tales que existen $x_0 \in X$ y $t_0 \in \mathbb{I}$ verificando que $\mathbb{A}(x_0)(t_0) = \mathbb{B}(x_0)(t_0) = 1$, entonces $\theta(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \mathfrak{M}_k$.

θ'_4) $\theta(\mathbb{F}^1, \mathbb{F}^1) = \theta(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_k$.

Ambas propiedades nos conducen a nociones distintas a la que vamos a considerar a lo largo de la presente Memoria (empleando (θ_4)). Sin embargo, y bajo la premisa de ductilidad y adaptación de todo el proceso, el investigador

interesado puede optar por una de las que acabamos de introducir en base a los intereses de su estudio.

Mostramos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 3.8.2 Sea $\theta : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}(X)$ la aplicación definida, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, mediante:

$$\theta(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = \sup_{t \in \mathbb{I}} \left\{ \mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t) \right\}$$

para cada $x \in X$. Entonces θ es un índice de solapamiento normal de tipo $(2, 1)$.

Ejemplo 3.8.3 Sea $\theta : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}(X)$ la aplicación definida, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, mediante:

$$\theta(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = \sup_{t \in \mathbb{I}} \frac{\tan(\mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t))}{\tan 1}$$

para cada $x \in X$. Entonces θ es un índice de solapamiento normal de tipo $(2, 1)$.

Ejemplo 3.8.4 Sea $\theta : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}(X)$ la aplicación definida, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, mediante:

$$\theta(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = \sup_{t \in \mathbb{I}} \left\{ \frac{1 + \mathbb{A}(x)(t)^2 + \mathbb{B}(x)(t)^2}{3} \cdot \frac{\sin(\mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t))}{\sin 1} \right\}$$

para cada $x \in X$. Entonces θ es un índice de solapamiento normal de tipo $(2, 1)$.

Al haber introducido ya tantos conceptos, la notación que se emplee puede ayudar o bien a su comprensión o bien a todo lo contrario. Con objeto de conseguir lo primero, aclaramos la notación que vamos a utilizar para los distintos tipos de índices de solapamiento en los diferentes niveles. En concreto, los índices:

- de tipo $(2, 0)$ se denotarán por $i : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$;
- de tipo $(2, 1)$ se denotarán por $I : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}(X)$;
- de tipo $(2, 2)$ se denotarán por $\mathcal{I} : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}_2(X)$;

- de tipo $(1, 0)$ se denotarán por $o : \text{FS}(X) \times \text{FS}(X) \rightarrow \mathbb{I}$;
- de tipo $(1, 1)$ se denotarán por $O : \text{FS}(X) \times \text{FS}(X) \rightarrow \text{FS}(X)$;
- de tipo $(0, 0)$ se denotarán por $f : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$.

Así, una aplicación $T : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ será un índice de solapamiento de tipo $(0, 0)$ si, y sólo, si es una función de solapamiento débil. Bajo este enfoque, las funciones de solapamiento débil se convierten en semillas para la teoría de índices de solapamiento. Como se verá más adelante, éstas se han manifestado como poderosas herramientas en la construcción de múltiples ejemplos de índices de orden superior.

3.8.1. Índices de solapamiento del tipo $(2, 0)$

Nuestro objetivo en este apartado es introducir una gran familia de solapamiento de tipo $(2, 0)$ y, como indicábamos anteriormente, la generaremos mediante funciones de solapamiento débil.

Lema 3.8.5 Dada una función de solapamiento débil $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$, definamos $i_G : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, como:

$$i_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup (\{ G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I} \}). \quad (3.10)$$

Entonces i_G es un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$ que verifica las siguientes propiedades.

- 1) Si G es normal, entonces i_G también es normal.
- 2) Si $G \leq \text{máx}$, entonces $i_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \leq \text{máx} \{ \sup(\mathbb{A}), \sup(\mathbb{B}) \}$ para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$. En tal caso, $i_G(\mathbb{A}, \mathbb{A}) \leq \sup(\mathbb{A})$.
- 3) Si $G(t_1, t_2) = s$, entonces $i_G(\mathbb{F}^{t_1}, \mathbb{F}^{t_2}) = s$. En particular el siguiente diagrama

conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] \times [0, 1] & & \\
 \downarrow j_{02} \times j_{02} & \searrow G & \\
 \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) & \xrightarrow{i_G} & [0, 1]
 \end{array}
 \quad G = i_G \circ (j_{02} \times j_{02})$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, dado que G es simétrica, entonces i_G también lo es. Además, dados $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, decir que $i_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0$ es equivalente a:

$$\begin{aligned}
 i_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0 &\Leftrightarrow i_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup(\{G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}) = 0 \\
 &\Leftrightarrow G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) = 0 \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I} \\
 &\Leftrightarrow \mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t) = 0 \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I} \\
 &\Leftrightarrow \mathbb{A} \text{ y } \mathbb{B} \text{ son completamente disjuntos.}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, dados $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ tales que $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$, se tiene que $\mathbb{A}(x)(t) \leq \mathbb{B}(x)(t)$ para cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$. Por tanto, como G es creciente,

$$G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{C}(x)(t)) \leq G(\mathbb{B}(x)(t), \mathbb{C}(x)(t)) \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I}.$$

Tomando supremos se tiene que

$$\begin{aligned}
 i_G(\mathbb{A}, \mathbb{C}) &= \sup(\{G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{C}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}) \\
 &\leq \sup(\{G(\mathbb{B}(x)(t), \mathbb{C}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}) \\
 &= i_G(\mathbb{B}, \mathbb{C}),
 \end{aligned}$$

lo que significa que i_G es un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$. Estudiamos ahora los demás apartados.

[**Apartado (1)**] Supongamos que G es normal, y sean $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ dos conjuntos difusos de tipo 2 tales que para cada $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{I}$ verificando $\mathbb{A}(x)(t_x) = \mathbb{B}(x)(t_x) = 1$. Como G verifica el axioma $(G_{4,1})$, se tiene que $G(1, 1) = 1$, de donde $G(\mathbb{A}(x)(t_x), \mathbb{B}(x)(t_x)) = G(1, 1) = 1$ para cada $x \in X$. Por ello,

$$i_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup(\{G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}) = 1.$$

[**Apartado (2)**] Supongamos que $G \leq \text{máx}$. Entonces para cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$ se verifica que:

$$G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) \leq \text{máx} \{(A)(x)(t), (B)(x)(t)\}.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} i_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \sup(\{G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}) \\ &\leq \sup(\{\text{máx}(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}) \\ &\leq \text{máx}(\sup \mathbb{A}, \sup \mathbb{B}). \end{aligned}$$

[**Apartado (3)**] Supongamos que $t_1, t_2, s \in \mathbb{I}$ son tales que $G(t_1, t_2) = s$. De esta forma:

$$\begin{aligned} i_G(\mathbb{F}^{t_1}, \mathbb{F}^{t_2}) &= \sup(\{G(\mathbb{F}^{t_1}(x)(t), \mathbb{F}^{t_2}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}) \\ &= G(t_1, t_2) = s. \end{aligned}$$

En particular, para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} [i_G \circ (j_{02} \times j_{02})](t_1, t_2) &= i_G[(j_{02} \times j_{02})(t_1, t_2)] = i_G(j_{02}(t_1), j_{02}(t_2)) \\ &= i_G(\mathbb{F}^{t_1}, \mathbb{F}^{t_2}) = G(t_1, t_2), \end{aligned}$$

lo que demuestra que $G = i_G \circ (j_{02} \times j_{02})$. ■

El Lema 3.8.5 permite establecer varios resultados parciales y una nueva definición para nuestros objetivos.

Corolario 3.8.6 Si G es una función de solapamiento entonces i_G , definida como en (3.10), es un índice de solapamiento normal de tipo $(2, 0)$.

Corolario 3.8.7 Si T es una t-norma que verifica la propiedad (G_3) entonces i_T , definido como en (3.10), es un índice de solapamiento normal de tipo $(2, 0)$.

Además si T está promediada, entonces $i_T(\mathbb{A}, \mathbb{A}) = \sup \mathbb{A}$. Y si $T = T_{\text{mín}}$, entonces $i_{T_{\text{mín}}}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup \mathbb{A}$ para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ con $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$.

La siguiente particularización es especialmente interesante en las aplicaciones.

Definición 3.8.8 El índice de solapamiento de Zadeh de tipo $(2, 0)$ es i_{\min} definido, para $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, por:

$$i_{\min}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup(\{\min(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}).$$

Corolario 3.8.9 El índice de solapamiento de Zadeh de tipo $(2, 0)$ es un índice de solapamiento normal de tipo $(2, 0)$ normal que verifica las siguientes propiedades para cada par de $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$:

- 1) Si $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$, entonces $i_{\min}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup \mathbb{A}$.
- 2) Si $i_{\min}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 1$ entonces existen dos sucesiones $\{x_n\} \subseteq X$ y $\{t_n\} \subseteq \mathbb{I}$ tales que $\{\mathbb{A}(x_n)(t_n)\} \rightarrow 1$ y $\{\mathbb{B}(x_n)(t_n)\} \rightarrow 1$. Y, en este caso, $\sup \mathbb{A} = \sup \mathbb{B} = 1$.

DEMOSTRACIÓN: El segundo apartado se deduce del hecho de que $i_{\min}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ es un supremo. Si toma el valor 1, es decir, si $i_{\min}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 1$, entonces existen dos sucesiones $\{x_n\} \subseteq X$ y $\{t_n\} \subseteq \mathbb{I}$ de manera que

$$\min\{\mathbb{A}(x_n)(t_n), \mathbb{B}(x_n)(t_n)\} \rightarrow 1.$$

Y esto implica que $\min\{\mathbb{A}(x_n)(t_n)\} \rightarrow 1$ y que $\min\{\mathbb{B}(x_n)(t_n)\} \rightarrow 1$. ■

El Lema 3.8.5 nos mostrado una manera natural de definir índices de solapamiento de tipo $(2, 0)$ asociados a funciones de solapamiento débil. De idéntica manera tenemos el proceso recíproco, el cual resaltamos en el siguiente resultado.

Proposición 3.8.10 Dado un índice de solapamiento $i : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(2, 0)$, sea $G_i : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$ la función bivariada definida, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, por $G_i(t, s) = i(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s)$. Entonces G_i es una función de solapamiento débil que verifica las siguientes propiedades.

- 1) La función G_i puede ser expresada como $i \circ (j_{02} \times j_{02})$ de forma que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{G_i} & [0, 1] \\
 \downarrow j_{02} \times j_{02} & \equiv & \uparrow i \\
 \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) & \xrightarrow{i} & [0, 1]
 \end{array}
 \quad G_i = i \circ (j_{02} \times j_{02})$$

- 2) Si i es normal, entonces G_i es normal.
- 3) Si G es una función de solapamiento débil, entonces $G_{i_G} = G$.

DEMOSTRACIÓN: Claramente, G_i es simétrica. Si $t_1, t_2 \in \mathbb{I}$ son tales que $t_1 \leq t_2$, entonces $\mathbb{F}^{t_1}(x)(s) = t_1 \leq t_2 = \mathbb{F}^{t_2}(x)(s)$ para todo $x \in X$ y todo $s \in \mathbb{I}$. Por tanto, $\mathbb{F}^{t_1} \leq \mathbb{F}^{t_2}$. De esta forma, $G_i(t_1, s) = i(\mathbb{F}^{t_1}, \mathbb{F}^s) \leq i(\mathbb{F}^{t_2}, \mathbb{F}^s) = G_i(t_2, s)$. Consecuentemente, G_i es creciente. Por último, sean $t, s \in \mathbb{I}$. Entonces, dado que i es un índice de solapamiento, se verifica:

$$\begin{aligned}
 G_i(t, s) = 0 & \Leftrightarrow i(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \mathbb{F}^t \text{ y } \mathbb{F}^s \text{ son completamente disjuntos} \\
 & \Leftrightarrow \mathbb{F}^t(x)(r) \cdot \mathbb{F}^s(x)(r) = 0 \quad \text{para cada } x \in X \text{ y } r \in \mathbb{I} \\
 & \Leftrightarrow t \cdot s = 0.
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, G_i es una función de solapamiento débil.

[**Apartado (1)**] Es sencillo deducir que si $t, s \in \mathbb{I}$, entonces:

$$[i \circ (j_{02} \times j_{02})](t, s) = i(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s) = G_i(t, s).$$

[**Apartado (2)**] Supongamos que i es normal. De la condición $\mathbb{F}^1(x)(t) = 1$ para cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$ se desprende que:

$$G_i(1, 1) = i(\mathbb{F}^1, \mathbb{F}^1) = i(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_2) = \mathfrak{M}_0 = 1.$$

[**Apartado (3)**] Si G es una función de solapamiento débil, el apartado 3 del Lema 3.8.5 nos asegura que, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, $G_{i_G}(t, s) = i_G(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s) = G(t, s)$. De ahí que $G_{i_G} = G$. ■

El tercer apartado del resultado anterior nos asegura que $G_{i_G} = G$, es decir, si partimos de una función de solapamiento interior G , construimos el índice de solapamiento i_G de tipo $(2, 0)$ conforme al Lema 3.8.5 y, posteriormente, defusificamos este índice hacia una función de solapamiento débil G_{i_G} utilizando la Proposición 3.8.10, el resultado del proceso será el rescate de la función inicial G . El mismo proceso cambiando el punto de partida no ofrecería el mismo resultado, es decir, en general, $i_{G_i} \neq i$. Lo que puede decirse es que i_{G_i} pierde información con respecto a i , es decir, i es más rica que i_{G_i} en el sentido de que la imagen de i es usualmente más amplia que la imagen de i_{G_i} .

Además, en general, no existe una relación entre los índices de solapamiento tipo $(2, 0)$, i , y los de tipo i_{G_i} ya que:

$$i_{G_i}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup(\{i(\mathbb{F}^{\mathbb{A}(x)(t)}, \mathbb{F}^{\mathbb{B}(x)(t)}) : x \in X, t \in \mathbb{I}\})$$

para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$. El único hecho destacable en este sentido, que puede deducirse del tercer apartado de la Proposición 3.8.10, es que si $i' = i_G$ es un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$ asociado a una función de solapamiento normal G , entonces sí es cierto que $i_{G_{i'}} = i'$.

El siguiente resultado caracteriza completamente a los índices de solapamiento de tipo $(2, 0)$.

Teorema 3.8.11 Una aplicación $i : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$ es un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$ si, y sólo si, existen dos aplicaciones $i^+, i^- : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$ de manera que están relacionadas de la siguiente forma:

$$i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \frac{i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B})}{i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \quad \text{para cada } \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X), \quad (3.11)$$

y se verifican las siguientes propiedades:

- (a) i^+ e i^- son simétricas;
- (b) i^+ es creciente e i^- es decreciente;
- (c₁) $i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0 \Leftrightarrow i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{A}$ y \mathbb{B} son completamente disjuntos.

Además, i es normal si, y sólo si, i^- verifica la siguiente condición (que podríamos denominar “*anti-normalidad*”):

(c_2) Si $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ son tales que para cada $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{I}$ verificando $\mathbb{A}(x)(t_x) = \mathbb{B}(x)(t_x) = 1$, entonces $i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0$.

El resultado anterior puede interpretarse diciendo que i es un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$ si, y sólo si, dicha aplicación i puede leerse como la interpolación geométrica de dos aplicaciones extremas.

DEMOSTRACIÓN: [\Rightarrow] Supongamos que i es un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$ y definamos las aplicaciones $i^+, i^- : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$ de la siguiente manera:

$$i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = i(\mathbb{A}, \mathbb{B}), \quad i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 1 - i(\mathbb{A}, \mathbb{B})$$

para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$. Con esta definición se demuestra fácilmente que se cumple la igualdad (3.11) y las propiedades anunciadas (a), (b) y (c_1).

[\Leftarrow] Supongamos que existen dos aplicaciones $i^+, i^- : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$ de manera que se verifica la igualdad (3.11) y las propiedades (a), (b) y (c_1). Dado que el denominador en (3.11) no puede anularse, observamos que

$$i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) > 0$$

para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$. Por la ecuación (3.11) y la condición (a), la aplicación i es claramente simétrica. Además, dados $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$,

$$i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{A} \text{ y } \mathbb{B} \text{ son completamente disjuntos.}$$

Supongamos que $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ son tales que $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$. Como i^+ es creciente e i^- es decreciente, tendremos que:

$$0 \leq i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \leq i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \quad \text{y} \quad 0 \leq i^-(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \leq i^-(\mathbb{A}, \mathbb{C}).$$

Multiplicando las desigualdades anteriores, deducimos que:

$$i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \cdot i^-(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \leq i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \cdot i^-(\mathbb{A}, \mathbb{C}),$$

de donde:

$$\begin{aligned} i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \cdot [i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C}) + i^-(\mathbb{B}, \mathbb{C})] &= i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \cdot i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C}) + i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \cdot i^-(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \\ &\leq i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \cdot i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C}) + i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \cdot i^-(\mathbb{A}, \mathbb{C}) \\ &\leq i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C}) \cdot [i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C}) + i^-(\mathbb{A}, \mathbb{C})]. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$i(\mathbb{A}, \mathbb{C}) = \frac{i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C})}{i^-(\mathbb{A}, \mathbb{C}) + i^+(\mathbb{A}, \mathbb{C})} \leq \frac{i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C})}{i^-(\mathbb{B}, \mathbb{C}) + i^+(\mathbb{B}, \mathbb{C})} = i(\mathbb{B}, \mathbb{C}).$$

Por lo que i es un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$.

Tratamos ahora la normalidad. Supongamos que i es normal y sean $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ dos conjuntos difusos de tipo 2 tales que para cada $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{I}$ verificando $\mathbb{A}(x)(t_x) = \mathbb{B}(x)(t_x) = 1$. Como i es normal,

$$1 = i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \frac{i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B})}{i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B})},$$

lo que nos permite deducir que $i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0$, y se cumple la propiedad (c_2) .

De manera inversa, supongamos que i^- verifica (c_2) . Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ tales que para todo $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{I}$ verificando $\mathbb{A}(x)(t_x) = \mathbb{B}(x)(t_x) = 1$. Como i^- verifica la propiedad (c_2) , se tiene que $i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 0$, de donde se concluye que $i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = 1$ por la igualdad (3.11), lo que significa que i es un índice normal. ■

Bajo las condiciones del teorema anterior, podemos afinar un poco más acerca de las aplicaciones que intervienen.

Proposición 3.8.12 Bajo las hipótesis del Teorema 3.8.11, si i es un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$, las siguientes propiedades se verifican.

1) Dados $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ y $t \in \mathbb{I}$, se verifica que

$$i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = t \quad \Leftrightarrow \quad (1 - t)i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = t i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}).$$

En particular, si $t < 1$, entonces

$$i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \frac{t}{1 - t} i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}).$$

2) Para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ se cumple que

$$i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cdot i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = (1 - i(\mathbb{A}, \mathbb{B})) i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}).$$

DEMOSTRACIÓN: Nuevamente, debemos destacar que $i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) > 0$ para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$. De esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B})}{i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B})} &= i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = t \\ \Leftrightarrow i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= t(i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B})) \\ \Leftrightarrow (1 - t)i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= t i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}). \end{aligned}$$

De aquí, si $t < 1$, podemos despejar $i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ en función de $i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ y la constante multiplicativa $t/(1 - t)$. Además:

$$\begin{aligned} i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \frac{i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B})}{i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B})} \\ \Leftrightarrow i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cdot i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) + i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cdot i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \\ \Leftrightarrow i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cdot i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) - i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cdot i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \\ \Leftrightarrow i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \cdot i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B})(1 - i(\mathbb{A}, \mathbb{B})) \end{aligned}$$

lo que prueba la segunda parte del enunciado. ■

Ejemplo 3.8.13 Supongamos que $i^+, i^- : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$ vienen dados, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, mediante las expresiones:

$$\begin{aligned} i^+(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \sup(\{\sqrt[3]{\mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t)} : x \in X, t \in \mathbb{I}\}), \\ i^-(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \inf(\{\text{máx}(1 - \mathbb{A}(x)(t), 1 - \mathbb{B}(x)(t)) : x \in X, t \in \mathbb{I}\}). \end{aligned}$$

Entonces las aplicaciones i^+ e i^- cumplen todas las condiciones del Teorema 3.8.11, por lo que la aplicación $i : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \mathbb{I}$, definida a través de la expresión (3.11), es un índice de solapamiento normal de tipo $(2, 0)$.

3.8.2. Índices de solapamiento de tipo $(2, 1)$

En [119], Zadeh introdujo el *índice de consistencia* entre dos conjuntos difusos A y B sobre el mismo conjunto referencial finito $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, como

la extensión natural del índice de solapamiento *booleano* de la siguiente forma:

$$O_Z(A, B) = \max(\{ \min \{A(u_j), B(u_j)\} : j \in \{1, 2, \dots, n\} \}).$$

Esta definición se puede extender de forma natural a cualquier conjunto referencial X (tanto finito como no finito) como:

$$O_Z(A, B) = \sup(\{ \min \{A(x), B(x)\} : x \in X \})$$

para cada $A, B \in \text{FS}(X)$. Es sencillo comprobar que $O_Z : \text{FS}(X) \times \text{FS}(X) \rightarrow \mathbb{I}$ es un índice de solapamiento normal de tipo $(1, 0)$ asociado a la función de solapamiento $G = \min$. La concepción de Zadeh, en el caso finito en particular, inspiró la mayoría de las propiedades de los índices de solapamiento que luego se aplican en la práctica (véase, por ejemplo, [49]). En esta subsección, en base a lo trabajado previamente en este capítulo, introducimos algunas propiedades para los índices de solapamiento de tipo $(2, 1)$. Veamos, como introducción, algunas familias de esta clase de índices.

Lema 3.8.14 Dado un índice de solapamiento $o : \text{FS}(\mathbb{I}) \times \text{FS}(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(1, 0)$ sobre \mathbb{I} , la función $I_o : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}(X)$ definida mediante:

$$I_o(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = o(\mathbb{A}(x), \mathbb{B}(x))$$

para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ y cada $x \in X$, es un índice de solapamiento de tipo $(2, 1)$ que verifica las siguientes propiedades.

- 1) El índice o es normal si, y sólo si, el índice I_o es normal.
- 2) Si $j_X : \text{FS}(\mathbb{I}) \rightarrow \text{FS}_2(X)$ es la, ya conocida, inyección definida en (2.8), entonces $j_{01} \circ o = I_o \circ (j_X \times j_X)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{FS}(\mathbb{I}) \times \text{FS}(\mathbb{I}) & \xrightarrow{o} & [0, 1] \\ \downarrow j_X \times j_X & \equiv & \downarrow j_{01} \\ \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) & \xrightarrow{I_o} & \text{FS}(X) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que la aplicación I_o está bien definida ya que $\mathbb{A}(x), \mathbb{B}(x) \in \text{FS}(\mathbb{I})$ para cada $x \in X$. Además, I_o es obviamente simétrica. Veamos que es no decreciente. Sean $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ tres conjuntos difusos de tipo 2 tales que $\mathbb{A}_1 \leq \mathbb{A}_2$. Así, $\mathbb{A}_1(x) \leq \mathbb{A}_2(x)$ para cada $x \in X$. Como o es un índice de solapamiento de tipo $(1, 0)$ tenemos que, para cada $x \in X$,

$$I_o(\mathbb{A}_1, \mathbb{B})(x) = o(\mathbb{A}_1(x), \mathbb{B}(x)) \leq o(\mathbb{A}_2(x), \mathbb{B}(x)) = I_o(\mathbb{A}_2, \mathbb{B})(x).$$

Por tanto, $I_o(\mathbb{A}_1, \mathbb{B}) \leq I_o(\mathbb{A}_2, \mathbb{B})$, es decir, I_o es creciente. Finalmente, observemos que, dados $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$,

$$\begin{aligned} I_o(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = F^0 &\Leftrightarrow o(\mathbb{A}(x), \mathbb{B}(x)) = 0 \quad \text{para cada } x \in X \\ &\Leftrightarrow \mathbb{A}(x) \text{ y } \mathbb{B}(x) \text{ son completamente disjuntos para cada } x \in X \\ &\Leftrightarrow \mathbb{A} \text{ y } \mathbb{B} \text{ son completamente disjuntos.} \end{aligned}$$

Lo anterior garantiza que I_o es un índice de solapamiento de tipo $(2, 1)$.

[**Apartado 1**] Supongamos que o es un índice de solapamiento normal y probemos que I_o también lo es. Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ tales que para cada $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{I}$ verificando $\mathbb{A}(x)(t_x) = \mathbb{B}(x)(t_x) = 1$. Dado cualquier $x_0 \in X$, definamos $A = \mathbb{A}(x_0)$ y $B = \mathbb{B}(x_0)$. Claramente $A = \mathbb{A}(x_0), B = \mathbb{B}(x_0) \in \text{FS}(\mathbb{I})$. En este caso, sabemos que existe un valor común $t_{x_0} \in \mathbb{I}$ tal que $\mathbb{A}(x_0)(t_{x_0}) = \mathbb{B}(x_0)(t_{x_0}) = 1$, lo que significa que $A(t_{x_0}) = B(t_{x_0}) = 1$. Dado que o es un índice normal, deducimos que

$$I_o(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x_0) = o(\mathbb{A}(x_0), \mathbb{B}(x_0)) = o(A, B) = 1.$$

Por tanto, $I_o(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = F^1$ en todo el conjunto X , por lo que I_o es un índice normal.

Recíprocamente, supongamos que I_o es un índice de solapamiento normal y probemos que o también lo es. Sean $A, B \in \text{FS}(\mathbb{I})$ dos conjuntos difusos sobre \mathbb{I} de manera que existe un valor $t_0 \in \mathbb{I}$ tal que $A(t_0) = B(t_0) = 1$. Definamos $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ como $\mathbb{A}(x) = A$ y $\mathbb{B}(x) = B$ para cada $x \in X$. Entonces los conjuntos difusos de tipo 2 \mathbb{A} y \mathbb{B} verifican que, para cada $x \in X$, existe un

valor $t_0 \in \mathbb{I}$ tal que $\mathbb{A}(x)(t_0) = A(t_0) = 1$ y $\mathbb{B}(x)(t_0) = B(t_0) = 1$. Como I_o es un índice de solapamiento normal, resultará que $I_o(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = F^1 \in \text{FS}(X)$. Por consiguiente, dado cualquier $x_0 \in X$, observamos que

$$o(A, B) = o(\mathbb{A}(x_0), \mathbb{B}(x_0)) = I_o(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x_0) = F^1(x_0) = 1.$$

Esto demuestra que o es un índice de solapamiento normal.

[Apartado 2] Sean $A, B \in \text{FS}(\mathbb{I})$ y $x \in X$. Entonces:

$$[(j_{01} \circ o)(A, B)](x) = [j_{01}(o(A, B))](x) = F^{o(A, B)}(x) = o(A, B)$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} [(I_o \circ (j_X \times j_X))(A, B)](x) &= [I_o((j_X \times j_X)(A, B))](x) \\ &= [I_o(j_X(A), j_X(B))](x) = o(j_X(A)(x), j_X(B)(x)) = o(A, B). \end{aligned}$$

De esta forma, $j_{01} \circ o = I_o \circ (j_X \times j_X)$ y el diagrama anterior conmuta. ■

Definición 3.8.15 *El índice de consistencia de Zadeh de tipo (2, 1) es la aplicación $I_Z : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}(X)$ definida, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ y cada $x \in X$, mediante:*

$$I_Z(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = \sup(\{\min\{\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)\} : t \in \mathbb{I}\}).$$

Corolario 3.8.16 El índice de consistencia de Zadeh de tipo (2, 1), formalizado en la Definición 3.8.15, sobre X es un índice de solapamiento normal de tipo (2, 1) que verifica, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, las siguientes propiedades.

- 1) Si $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$ entonces $I_Z(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \widetilde{\sup} \mathbb{A} \in \text{FS}(X)$ (es decir, $I_Z(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = \sup(\mathbb{A}(x))$ para cada $x \in X$).
- 2) $I_Z(\mathbb{A}, \mathbb{A}) = \widetilde{\sup} \mathbb{A} \in \text{FS}(X)$.
- 3) $I_Z(\mathbb{F}^0, \mathbb{A}) = F^0 \in \text{FS}(X)$.
- 4) $I_Z(\mathbb{A}, \mathbb{F}^1) = \widetilde{\sup} \mathbb{A} \in \text{FS}(X)$.

5) $I_Z(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s) = \widetilde{\sup} \mathbb{F}^{\min(t,s)} \in \text{FS}(X)$ para cada $t, s \in \mathbb{I}$.

DEMOSTRACIÓN: Denotemos por $o_Z^{\mathbb{I}}$ al índice de consistencia de Zadeh de tipo (1, 0), es decir, a la aplicación $o_Z^{\mathbb{I}} : \text{FS}(\mathbb{I}) \times \text{FS}(\mathbb{I}) \rightarrow \mathbb{I}$ dada por

$$o_Z^{\mathbb{I}}(A, B) = \sup(\{\min\{A(t), B(t)\} : t \in \mathbb{I}\}).$$

Dado que $o_Z^{\mathbb{I}}$ es un índice de solapamiento de tipo (1, 0), el Lema 3.8.14 garantiza que $I_Z = I_{o_Z^{\mathbb{I}}}$ es un índice de solapamiento normal de tipo (2, 1). Probemos las propiedades anunciadas.

[**Apartado 1**] Dado dos conjuntos difusos $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ de tipo 2 tales que $\mathbb{A} \leq \mathbb{B}$, se verifica que, para cada $x \in X$:

$$\begin{aligned} I_Z(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) &= \sup(\{\min\{\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)\} : t \in \mathbb{I}\}) \\ &= \sup(\{\mathbb{A}(x)(t) : t \in \mathbb{I}\}) = \sup(\mathbb{A}(x)) = (\widetilde{\sup} \mathbb{A})(x). \end{aligned}$$

[**Apartado 2**] Se deduce del apartado anterior tomando $\mathbb{B} = \mathbb{A}$.

[**Apartado 3**] Dado que $\mathbb{F}^0 \leq \mathbb{A}$, se tiene que, para cada $x \in X$,

$$I_Z(\mathbb{F}^0, \mathbb{A})(x) = (\widetilde{\sup} \mathbb{F}^0)(x) = \sup(\mathbb{F}^0(x)) = 0 = \mathbb{F}^0(x).$$

[**Apartado 4**] Dado que $\mathbb{A} \leq \mathbb{F}^1$, el primer apartado garantiza que $I_Z(\mathbb{A}, \mathbb{F}^1) = \widetilde{\sup} \mathbb{A}$.

[**Apartado 5**] Si $t \leq s$, entonces $\mathbb{F}^t \leq \mathbb{F}^s$, de donde $I_Z(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s) = \widetilde{\sup} \mathbb{F}^t = \widetilde{\sup} \mathbb{F}^{\min(t,s)}$. ■

El índice de consistencia de Zadeh de tipo (2, 1) es un ejemplo de índice de solapamiento de tipo (2, 1) generado por funciones de solapamiento débil, como en el siguiente resultado.

Lema 3.8.17 Dada una función de solapamiento débil $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$, definamos $I_G : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}(X)$ mediante la expresión:

$$I_G(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = \sup(\{G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : t \in \mathbb{I}\})$$

para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ y cada $x \in X$. Entonces I_G es un índice de solapamiento de tipo $(2, 1)$ que verifica las siguientes propiedades.

- 1) Si G es normal, entonces I_G es normal.
- 2) El siguiente diagrama conmuta, es decir, $j_{01} \circ G = I_G \circ (j_{02} \times j_{02})$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I} \times \mathbb{I} & \xrightarrow{G} & \mathbb{I} \\
 j_{02} \times j_{02} \downarrow & \equiv & \downarrow j_{01} \\
 \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) & \xrightarrow{I_G} & \text{FS}(X)
 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: La aplicación I_G es claramente simétrica y creciente. Además:

$$\begin{aligned}
 I_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= F^0 \\
 \Leftrightarrow \sup(\{G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : t \in \mathbb{I}\}) &= 0 \quad \text{para cada } x \in X \\
 \Leftrightarrow G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) &= 0 \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I} \\
 \Leftrightarrow \mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t) &= 0 \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I} \\
 \Leftrightarrow \mathbb{A} \text{ y } \mathbb{B} \text{ son completamente disjuntos.}
 \end{aligned}$$

Por tanto, I_G es un índice de solapamiento de tipo $(2, 1)$.

[Apartado 1] Supongamos que G es normal y sean $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ tales que para cada $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{I}$ verificando $\mathbb{A}(x)(t_x) = \mathbb{B}(x)(t_x) = 1$. Entonces, $G(\mathbb{A}(x)(t_x), \mathbb{B}(x)(t_x)) = G(1, 1) = 1$, de donde se deduce que, para cada $x \in X$,

$$I_G(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = \sup(\{G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : t \in \mathbb{I}\}) = 1.$$

Por consiguiente podemos afirmar que $I_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = F^1$ en X , lo que demuestra que I_G es un índice de solapamiento normal.

[Apartado 2] Sean $t, s \in \mathbb{I}$ y $x \in X$. Entonces, por un lado,

$$[j_{01}(G(t, s))](x) = F^{G(t, s)}(x) = G(t, s)$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} [I_G((j_{02} \times j_{02})(t, s))](x) &= [I_G(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s)](x) \\ &= \sup(\{G(\mathbb{F}^t(x)(r), \mathbb{F}^s(x)(r)) : r \in \mathbb{I}\}) \\ &= \sup(\{G(t, s) : r \in \mathbb{I}\}) = G(t, s). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $j_{01} \circ G = I_G \circ (j_{02} \times j_{02})$. ■

Ejemplo 3.8.18 *La función de solapamiento G , definida por $G(t, s) = \min(t, s)$ para cada $t, s \in \mathbb{I}$, proporciona el índice de solapamiento $o_G : \text{FS}(X) \times \text{FS}(X) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(1, 0)$ dado por:*

$$o_G(A, B) = \sup(\{\min(A(x), B(x)) : x \in X\})$$

para cada $A, B \in \text{FS}(X)$, el cual, a su vez, induce el índice de solapamiento $I_G : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}(X)$ de tipo $(2, 1)$ dado por

$$I_G(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) = \sup(\{\min(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) : t \in \mathbb{I}\})$$

para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ y cada $x \in X$.

Ejemplo 3.8.19 *De igual forma, la función de solapamiento G , dada por $G(t, s) = t \cdot s$ para cada $t, s \in \mathbb{I}$, genera las siguientes estructuras superiores:*

$$\begin{aligned} o_G : \text{FS}(X) \times \text{FS}(X) &\rightarrow \mathbb{I}, \\ o_G(A, B) &= \sup(\{A(x) \cdot B(x) : x \in X\}); \\ I_G : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) &\rightarrow \text{FS}(X), \\ I_G(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x) &= \sup(\{\mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t) : t \in \mathbb{I}\}), \end{aligned}$$

para cada $A, B \in \text{FS}(X)$, cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ y cada $x \in X$.

Una extensión del diagrama del Lema 3.8.17 nos permite visualizar como actúa una función de solapamiento débil en la construcción de índices de solapamiento de tipo $(1, 0)$ y $(2, 1)$, de tal forma que el diagrama mostrado en

el segundo apartado de Lema 3.8.17 puede ser visto como la contracción del siguiente diagrama doble:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I} \times \mathbb{I} & \xrightarrow{G} & \mathbb{I} \\
 \downarrow j_{01} \times j_{01} & \equiv & \downarrow \\
 \text{FS}(X) \times \text{FS}(X) & \xrightarrow{o_G} & \mathbb{I} \\
 \downarrow j_{12} \times j_{12} & \equiv & \downarrow j_{01} \\
 \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) & \xrightarrow{I_G} & \text{FS}(X)
 \end{array}$$

siendo $o_G : \text{FS}(X) \times \text{FS}(X) \rightarrow \mathbb{I}$ el índice de solapamiento de tipo $(1, 0)$ definido, como en la sección precedente, por:

$$o_G(A, B) = \sup(\{ G(A(x), B(x)) : x \in X \})$$

para cada $A, B \in \text{FS}(X)$.

3.8.3. Índices de solapamiento de tipo $(2, 2)$

En esta subsección trabajaremos con elementos de $\text{FS}_2(X)$ cuya variabilidad es aun mayor que en los casos clásicos. La primera víctima de esta generalización será la normalidad, no pudiendo afirmar, en general, que el uso de funciones de solapamiento débil normal genere índices de solapamiento de tipo $(2, 2)$ normales.

Lema 3.8.20 Dada una función de solapamiento débil $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$, definamos $\mathcal{I}_G : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}_2(X)$ como:

$$\mathcal{I}_G(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x)(t) = G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t))$$

para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$. Entonces \mathcal{I}_G es un índice de solapamiento de tipo $(2, 2)$ que verifica las siguientes propiedades.

1) El siguiente diagrama conmuta, es decir, $j_{02} \circ G = I_G \circ (j_{02} \times j_{02})$:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I} \times \mathbb{I} & \xrightarrow{G} & \mathbb{I} \\
 \downarrow j_{02} \times j_{02} & \equiv & \downarrow j_{02} \\
 \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) & \xrightarrow{\mathcal{I}_G} & \text{FS}_2(X)
 \end{array}$$

2) $\mathcal{I}_G(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s) = \mathbb{F}^{G(t,s)}$ para cada $t, s \in \mathbb{I}$.

3) Si G es normal entonces $\mathcal{I}_G(\mathbb{F}^1, \mathbb{F}^1) = \mathbb{F}^1$.

DEMOSTRACIÓN: Claramente \mathcal{I}_G es simétrica y creciente. Además, dados $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, se verifica que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_G(\mathbb{A}, \mathbb{B}) &= \mathbb{F}^0 \\
 \Leftrightarrow G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) &= 0 \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I} \\
 \Leftrightarrow \mathbb{A}(x)(t) \cdot \mathbb{B}(x)(t) &= 0 \quad \text{para cada } x \in X \text{ y cada } t \in \mathbb{I} \\
 \Leftrightarrow \mathbb{A} \text{ y } \mathbb{B} &\text{ son completamente disjuntos.}
 \end{aligned}$$

Luego \mathbb{F}_G es un índice de solapamiento de tipo $(2, 2)$.

[**Apartado 1**] Sean $t, s, r \in \mathbb{I}$ y sea $x \in X$. Entonces

$$[(j_{02} \circ G)(t, s)](x)(r) = [j_{02}(G(t, s))](x)(r) = \mathbb{F}^{G(t,s)}(x)(r) = G(t, s)$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}
 [(I_G \circ (j_{02} \times j_{02}))(t, s)](x)(r) &= [\mathcal{I}_G((j_{02} \times j_{02})(t, s))](x)(r) \\
 &= [\mathcal{I}_G(j_{02}(t), j_{02}(s))](x)(r) = [\mathcal{I}_G(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s)](x)(r) \\
 &= G(\mathbb{F}^t(x)(r), \mathbb{F}^s(x)(r)) = G(t, s).
 \end{aligned}$$

Por tanto, $j_{02} \circ G = \mathbb{F} \circ (j_{02} \times j_{02})$.

[**Apartado 2**] Es inmediato que para cada $t, s, r \in \mathbb{I}$ y cada $x \in X$,

$$\mathcal{I}_G(\mathbb{F}^t, \mathbb{F}^s)(x)(r) = G(\mathbb{F}^t(x)(r), \mathbb{F}^s(x)(r)) = G(t, s) = \mathbb{F}^{G(t,s)}(x)(r).$$

[**Apartado 3**] Supongamos que G es normal, es decir, $G(1, 1) = 1$. Entonces, por el apartado anterior, $\mathcal{I}_G(\mathbb{F}^1, \mathbb{F}^1) = \mathbb{F}^{G(1,1)} = \mathbb{F}^1$. ■

Retomando la pequeña introducción al inicio de esta subsección, el hecho de que G sea normal no implica que \mathcal{I}_G lo sea. Para probarlo, sean $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ tales que para todo $x \in X$ existe $t_x \in \mathbb{I}$ que verifica $\mathbb{A}(x)(t_x) = \mathbb{B}(x)(t_x) = 1$. Entonces

$$G(\mathbb{A}(x)(t_x), \mathbb{B}(x)(t_x)) = G(1, 1) = 1,$$

pero

$$\mathcal{I}_G(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x)(t) = G(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t))$$

no tiene por qué tomar el valor 1 para un $t \in \mathbb{I}$ arbitrario, incluso si G es normal. Por tanto, sólo podemos garantizar, atendiendo al tercer apartado del lema anterior que, si G es normal, entonces $\mathcal{I}_G(\mathbb{F}^1, \mathbb{F}^1) = \mathbb{F}^1$.

Ejemplo 3.8.21 Definamos $\mathcal{I} : \text{FS}_2(X) \times \text{FS}_2(X) \rightarrow \text{FS}_2(X)$, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$, cada $x \in X$ y cada $t \in \mathbb{I}$, mediante la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbb{A}, \mathbb{B})(x)(t) = & \frac{1}{2} \left[2 - \text{máx}(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) \right. \\ & + 2 \text{mín}(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) - \left(4(1 - \text{máx}(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t))) \right. \\ & \left. \left. + (\text{máx}(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)) - 2 \text{mín}(\mathbb{A}(x)(t), \mathbb{B}(x)(t)))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Entonces \mathcal{I} es un índice de solapamiento normal de tipo (2, 2) ya que \mathcal{I} coincide con el índice \mathcal{I}_G construido en el Lema 3.8.20 asociado a la función de solapamiento débil normal G definida, para cada $t, s \in \mathbb{I}$, como

$$\begin{aligned} G(t, s) = & \frac{1}{2} \left[2 - \text{máx}(t, s) + 2 \text{mín}(t, s) \right. \\ & \left. - \sqrt{4(1 - \text{máx}(t, s)) + (\text{máx}(t, s) - 2 \text{mín}(t, s))^2} \right] \end{aligned}$$

(recordemos que G no es una función de solapamiento tal y como se mostró en el Ejemplo 3.7.7).

3.9. Algoritmos de inferencia para sistemas interpolativos difusos de tipo 2 usando índices de solapamiento

Los índices de solapamiento pueden ser de gran ayuda en las aplicaciones. En esta sección ilustramos la aplicabilidad de los índices de solapamiento dentro de un marco concreto de la lógica difusa. Establecemos este ejemplo en el contexto de la aplicación del *modus ponens* cuando los datos de entrada (las reglas y los hechos) son conjuntos difusos de tipo 2 en lugar de escalares reales o conjuntos difusos de tipo 1. El *modus ponens* es una técnica muy conocida en el ámbito de la lógica difusa para obtener una consecuencia a partir de un conjunto de reglas y un antecedente concreto. En las siguientes líneas presentamos dos algoritmos distintos para afrontar el problema de determinar un conjunto difuso de tipo 2 consecuente cuando tanto el conjunto finito de reglas como el hecho son modelizados por conjuntos difusos de tipo 2. Para llevar a cabo esta tarea, será importante el uso de un índice de solapamiento de tipo $(1, 0)$ (como en el caso del Algoritmo 1 que introduciremos) o un índice de solapamiento de tipo $(2, 0)$ (véase el Algoritmo 2).

En los últimos años, se han propuesto varios métodos de razonamiento interpolativo difuso basados en conjuntos difusos tipo 1 y tipo 2 (en este último caso, intervalares). Para ejemplos de lo primero, véanse los trabajos de Chang y otros [21], Chen y Adam [23], Chen y Chen [26], y las referencias contenidas en dichos trabajos. Ahora, para ver ejemplos de esto último, pueden consultarse los artículos de Chen y Barman [24], Chen y Shen [31], Chen y otros [28], y las referencias discutidas por ellos. Para otras técnicas, como conjuntos difusos “*rough*” [30], véase también [32]. Sin embargo, fueron García-Jiménez y otros [49] quienes propusieron utilizar índices de solapamiento en sistemas difusos interpolativos.

El siguiente desarrollo pudiera igualmente desarrollarse en conjuntos arbitra-

rios X e Y . Sin embargo, debido al hecho de que el caso finito es especialmente interesante de cara a las aplicaciones, limitamos este estudio al caso de dos conjuntos finitos $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, adaptando la notación a este caso.

Dados $\mathbb{A} \in \text{FS}_2(U)$ y $t \in \mathbb{I}$, denotemos por $\mathbb{A}(\cdot)(t) \in \text{FS}(U)$ al conjunto difuso sobre U definido por $[\mathbb{A}(\cdot)(t)](x) = \mathbb{A}(x)(t)$ para cada $x \in U$.

Dados $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_p, \mathbb{A}' \in \text{FS}_2(U)$ y $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p, \mathbb{B}' \in \text{FS}_2(V)$, consideremos el siguiente sistema difusos basado en reglas de tipo 2:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Regla } R_1 : & \text{Si } (u, t) \text{ es } \mathbb{A}_1, \text{ entonces } (v, s) \text{ es } \mathbb{B}_1 \\
 \text{Regla } R_2 : & \text{Si } (u, t) \text{ es } \mathbb{A}_2, \text{ entonces } (v, s) \text{ es } \mathbb{B}_2 \\
 \dots\dots & \dots\dots \dots\dots \\
 \text{Regla } R_p : & \text{Si } (u, t) \text{ es } \mathbb{A}_p, \text{ entonces } (v, s) \text{ es } \mathbb{B}_p \\
 \text{Hecho:} & (u, t) \text{ es } \mathbb{A}' \\
 \hline
 \text{Conclusión:} & (v, s) \text{ es } \mathbb{B}'
 \end{array} \tag{3.12}$$

Para simplificar la notación, denotamos por “ $R_j : \mathbb{A}_j \rightarrow \mathbb{B}_j$ ” a la regla difusa de tipo 2 dada por: “si (u, t) es \mathbb{A}_j , entonces (v, s) es \mathbb{B}_j ” (donde $j \in \{1, 2, \dots, p\}$). El objetivo principal de este sistema es determinar el conjunto difuso tipo-2 salida \mathbb{B} que se puede deducir bajo la premisa de que se verifican las reglas del sistema y se constata el hecho desencadenante. En las siguientes subsecciones describimos dos procedimientos distintos para llevar a cabo esta tarea empleando, de manera crucial, índices de solapamiento de distintos tipos.

3.9.1. Un primer algoritmo

Proponemos, en primer lugar, utilizar el siguiente algoritmo para calcular el conjunto difuso \mathbb{B}' de tipo 2 a partir de las reglas $(R_j : \mathbb{A}_j \rightarrow \mathbb{B}_j)$ y el hecho (\mathbb{A}') . Este algoritmo involucra tres herramientas algebraicas principales:

- 1) una función de solapamiento $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$;
- 2) una función de agregación $M : \mathbb{I}^p \rightarrow \mathbb{I}$; y

- 3) un índice de solapamiento $O : \text{FS}(U) \times \text{FS}(U) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(1, 0)$ sobre el conjunto U .

Con estos ingredientes, proponemos desarrollar el siguiente algoritmo.

Algoritmo 1

Entrada: Un conjunto de p reglas $\{R_j : \mathbb{A}_j \rightarrow \mathbb{B}_j\}_{j=1}^p$ y un hecho \mathbb{A}' .

Salida: \mathbb{B}' .

1: Elegir una función de agregación M , una función de solapamiento débil G y un índice de solapamiento O de tipo $(1, 0)$ en U

2: **for** $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ **y** $t \in \mathbb{I}$ **do**

3: Calcular $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))$

4: **end for**

5: Construir $\mathbb{B}' \in \text{FS}_2(V)$ dado, para cada $v \in V$ y $t \in \mathbb{I}$, por

$$\mathbb{B}'(v)(t) = \overset{p}{M} G(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))).$$

Veamos que \mathbb{B}' está bien definido, es decir, es un conjunto difuso de tipo 2 sobre V . Sean $v \in V$ y $t \in \mathbb{I}$. Teniendo en cuenta que $\mathbb{A}'(\cdot)(t) \in \text{FS}(U)$ y $\mathbb{A}_j(\cdot)(t) \in \text{FS}(U)$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, podemos considerar el número real $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)) \in \mathbb{I}$. Por tanto, como $\mathbb{B}_j(v)(t) \in \mathbb{I}$, podemos calcular el solapamiento $G(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))) \in \mathbb{I}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, y, agregando tales números, obtenemos $\mathbb{B}'(v)(t) \in \mathbb{I}$.

El algoritmo 1 aparece de forma natural en el contexto de conjuntos difusos de tipo 2 con objeto de ser coherente con el Algoritmo 1 descrito en [49]. Como consecuencia, también verifica muchas de las principales propiedades de tal procedimiento, como mostramos en el siguiente resultado.

Teorema 3.9.1 Consideremos el sistema basado en reglas difusas de tipo 2 descrito en (3.12), donde $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_p, \mathbb{A}' \in \text{FS}_2(U)$ y $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p \in \text{FS}_2(V)$

son conocidos. En este contexto, bajo el Algoritmo 1, se verifican las siguientes propiedades.

1. Si $\mathbb{A}', \mathbb{A}'' \in \text{FS}_2(U)$ son tales que $\mathbb{A}' \leq \mathbb{A}''$, entonces $\mathbb{B}' \leq \mathbb{B}''$.
2. Si \mathbb{A}' es completamente disjunto a cada \mathbb{A}_j , $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, entonces $\mathbb{B}' = \mathbb{F}^0$ sobre V .
3. Si M es disyuntiva (es decir, $M \geq \text{máx}$), $G(t, 1) = t$ para cada $t \in \mathbb{I}$ y $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)) = 1$ para cada $t \in \mathbb{I}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, entonces $\mathbb{B}' \geq \text{máx}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p)$.
4. Si $M = \text{máx}$, $G(t, 1) = t$ para cada $t \in \mathbb{I}$ y $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)) = 1$ para cada $t \in \mathbb{I}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, entonces $\mathbb{B}' = \text{máx}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p)$.
5. Si $M \geq \text{máx}$, $G \geq \text{mín}$ y $\mathbb{B}_j(v)(t) \leq O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))$ para cada $t \in \mathbb{I}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, entonces $\mathbb{B}' \geq \text{máx}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p)$.

DEMOSTRACIÓN: **(1)** Supongamos que $\mathbb{A}' \leq \mathbb{A}''$, es decir, $\mathbb{A}'(u)(t) \leq \mathbb{A}''(u)(t)$ para cada $u \in U$ y cada $t \in \mathbb{I}$. Entonces $\mathbb{A}'(\cdot)(t) \leq \mathbb{A}''(\cdot)(t)$ para cada $t \in \mathbb{I}$. Como O es un índice de solapamiento de tipo $(1, 0)$, él es creciente, por lo que $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)) \leq O(\mathbb{A}''(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))$. También, como la función de solapamiento débil G y la función de agregación M son crecientes, deducimos, para cada $v \in V$ y cada $t \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}'(v)(t) &= \dot{M}_{j=1}^p G(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))) \\ &\leq \dot{M}_{j=1}^p G(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}''(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))) = \mathbb{B}''(v)(t). \end{aligned}$$

(2) Supongamos que \mathbb{A}' y \mathbb{A}_j son completamente disjuntos para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Entonces $\mathbb{A}'(u)(t) \cdot \mathbb{A}_j(u)(t) = 0$ para cada $u \in U$ y cada $t \in \mathbb{I}$. En particular, los conjuntos difusos $\mathbb{A}'(\cdot)(t)$ y $\mathbb{A}_j(\cdot)(t)$ son completamente disjuntos para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ y cada $t \in \mathbb{I}$. Como O es un índice de solapamiento de

tipo $(1, 0)$, deducimos que $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)) = 0$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ y cada $t \in \mathbb{I}$. Por tanto, como G es una función de solapamiento débil,

$$G(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))) = G(\mathbb{B}_j(v)(t), 0) = 0$$

para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, cada $t \in \mathbb{I}$ y cada $v \in V$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}'(v)(t) &= \overset{p}{\underset{j=1}{M}} G(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))) \\ &= M(0, 0, \dots, 0) = 0 \end{aligned}$$

para cada $v \in V$ y cada $t \in \mathbb{I}$, lo que significa que $\mathbb{B}' = \mathbb{F}^0$.

(3) En este caso, para cada $v \in V$ y cada $t \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}'(v)(t) &= \overset{p}{\underset{j=1}{M}} G(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))) \\ &= \overset{p}{\underset{j=1}{M}} G(\mathbb{B}_j(v)(t), 1) = \overset{p}{\underset{j=1}{M}} \mathbb{B}_j(v)(t) \\ &= M(\mathbb{B}_1(v)(t), \mathbb{B}_2(v)(t), \dots, \mathbb{B}_p(v)(t)) \\ &\geq \text{máx} \{\mathbb{B}_1(v)(t), \mathbb{B}_2(v)(t), \dots, \mathbb{B}_p(v)(t)\} \quad (3.13) \\ &= (\text{máx} \{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p\})(v)(t). \end{aligned}$$

(4) Si $M = \text{máx}$, entonces la desigualdad dada en (3.13) es, en realidad, una igualdad.

(5) Se sigue del hecho de que, para cada $v \in V$ y cada $t \in \mathbb{I}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}'(v)(t) &= \overset{p}{\underset{j=1}{M}} G(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))) \\ &\geq \overset{p}{\underset{j=1}{M}} \text{mín}(\mathbb{B}_j(v)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))) \\ &= \overset{p}{\underset{j=1}{M}} \mathbb{B}_j(v)(t) \\ &\geq \text{máx} \{\mathbb{B}_1(v)(t), \mathbb{B}_2(v)(t), \dots, \mathbb{B}_p(v)(t)\} \\ &= (\text{máx} \{\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p\})(v)(t). \end{aligned}$$

■

La fuerza de este resultado radica en el manejo de sistemas difusos de tipo 2 de “amplio rango”. Pero no debemos olvidar que, en la mayoría de las situaciones experimentales, el número de reglas es muy reducido, generalmente en pro de la simplificación de operaciones o la economía de medios. Por eso es muy interesante el siguiente corolario, en el que el sistema se reduce a una única regla. En particular, es muy frecuente que, además, el hecho coincida con el antecedente.

En otras palabras, si retomamos la idea expuesta de punto fijo para el operador trabajado en la primera parte del capítulo, el Algoritmo 1, bajo un escenario suficientemente “adelgazado”, mantiene, en cierta medida, ese concepto de punto fijo.

De esta forma, una primera consecuencia del teorema anterior se produce cuando consideramos una única regla y el hecho es igual al antecedente en la regla.

Corolario 3.9.2 Si $G = \text{mín}$ y $O(\mathbb{A}(\cdot)(t), \mathbb{A}(\cdot)(t)) = 1$ para cada $t \in \mathbb{I}$, entonces la conclusión del *modus ponens* particular de tipo 2 siguiente:

Regla: Si (u, t) es \mathbb{A} , entonces (v, s) es \mathbb{B}
 Hecho: (u, t) es \mathbb{A}

bajo el Algoritmo 1 es $\mathbb{B}' = \mathbb{B}$.

DEMOSTRACIÓN: Se deduce del apartado 4 del Teorema 3.9.1 utilizando $G = \text{mín}$, $p = 1$ y $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}'$. ■

Aplicando los apartados 3 y 4 del Teorema 3.9.1 al caso en el que todos los conjuntos difusos $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p$ de tipo 2 son iguales (es decir, $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2 = \dots = \mathbb{B}_p = \mathbb{B} \in \text{FS}_2(U)$), deducimos el siguiente resultado.

Corolario 3.9.3 Bajo el sistema basado en reglas difusas de tipo 2 descrito en (3.12), si $M \geq \text{máx}$, $G(t, 1) = t$ para cada $t \in \mathbb{I}$, $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)) = 1$ para

cada $t \in \mathbb{I}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ y $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2 = \dots = \mathbb{B}_p = \mathbb{B}$, entonces la conclusión \mathbb{B}' bajo el Algoritmo 1 satisface $\mathbb{B}' \geq \mathbb{B}$.

Además, si, adicionalmente, suponemos que $M = \text{máx}$, entonces $\mathbb{B}' = \mathbb{B}$.

En el siguiente resultado utilizamos los respectivos mínimos absolutos $\mathbb{F}_U^0 \in \text{FS}_2(U)$ y $\mathbb{F}_V^0 \in \text{FS}_2(V)$, y los respectivos máximos absolutos $\mathbb{F}_U^1 \in \text{FS}_2(U)$, $\mathbb{F}_V^1 \in \text{FS}_2(V)$ y $F_U^1 \in \text{FS}(U)$.

Corolario 3.9.4 Dados $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_p \in \text{FS}_2(U)$ y $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p \in \text{FS}_2(V)$, sea

$$\Phi : \text{FS}_2(U) \rightarrow \text{FS}_2(V)$$

la aplicación que asocia a cada $\mathbb{A}' \in \text{FS}_2(U)$ la conclusión \mathbb{B}' del sistema basado en reglas difusas de tipo 2 (3.12) bajo el Algoritmo 1. Entonces Φ satisface las siguientes propiedades..

1. Φ es creciente.
2. $\Phi(\mathbb{F}_U^0) = \mathbb{F}_V^0$.
3. Si $M \geq \text{máx}$, $G(t, 1) = t$ para cada $t \in \mathbb{I}$, $\text{máx}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p) = \mathbb{F}_V^1$ y $O(F_U^1, \mathbb{A}_j(\cdot)(t)) = 1$ para cada $t \in \mathbb{I}$ y cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, entonces $\Phi(\mathbb{F}_U^1) = \mathbb{F}_V^1$.

DEMOSTRACIÓN: Estas propiedades se deducen directamente de los apartados 1, 2 y 3 del Teorema 3.9.1. ■

El Corolario 3.9.4 nos recuerda que, dados $A_1, A_2, \dots, A_p \in \text{FS}(U)$ y $B_1, B_2, \dots, B_p \in \text{FS}(V)$, existe una aplicación

$$\phi : \text{FS}(U) \rightarrow \text{FS}(V)$$

que asocia a cada conjunto difuso $A' \in \text{FS}(U)$ la conclusión $B' \in \text{FS}(V)$ del

sistema basado en reglas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Regla } R_1 : & \text{Si } u \text{ es } A_1, \text{ entonces } v \text{ es } B_1 \\
 \text{Regla } R_2 : & \text{Si } u \text{ es } A_2, \text{ entonces } v \text{ es } B_2 \\
 \dots\dots & \dots\dots \dots\dots \\
 \text{Regla } R_p : & \text{Si } u \text{ es } A_p, \text{ entonces } v \text{ es } B_p \\
 \text{Hecho:} & u \text{ es } A' \\
 \hline
 \text{Conclusión:} & v \text{ es } B'
 \end{array} \tag{3.14}$$

bajo cualquier algoritmo que podamos imaginar.

3.9.2. Un segundo algoritmo

El algoritmo anterior presenta una peculiaridad muy significativa; el número $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))$ depende directamente de $t \in \mathbb{I}$. Este hecho puede interpretarse como una ventaja (porque tiene en cuenta directamente los valores concretos de \mathbb{A}' y cada \mathbb{A}_j) o como un inconveniente (porque tal vez requiera un esfuerzo de cálculo considerable). En el segundo caso, es posible reducir las necesidades de cálculo utilizando un número que no depende de t . Una forma razonable de llevar a cabo este cambio en el punto de vista es reemplazando el índice de solapamiento $O : \text{FS}(U) \times \text{FS}(U) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(1, 0)$ sobre el conjunto U por un índice de solapamiento $i : \text{FS}_2(U) \times \text{FS}_2(U) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(2, 0)$ sobre el mismo conjunto. En este caso, podemos considerar la siguiente segunda aproximación al problema, que dependerá de:

- 1) una función de solapamiento débil $G : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}$;
- 2) una función de agregación $M : \mathbb{I}^p \rightarrow \mathbb{I}$; y
- 3) un índice de solapamiento $i : \text{FS}_2(U) \times \text{FS}_2(U) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(2, 0)$ sobre el conjunto U .

De esta manera, proponemos el siguiente algoritmo.

Algoritmo 2

Entrada: Un conjunto de p reglas $\{R_j : \mathbb{A}_j \rightarrow \mathbb{B}_j\}_{j=1}^p$ y un hecho \mathbb{A}' .

Salida: \mathbb{B}' .

1: Elegir una función de agregación M , una función de solapamiento débil G y un índice de solapamiento i de tipo $(2, 0)$ sobre U .

2: **for** $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ **do**

3: Calcular $i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j)$

4: **end for**

5: Construir $\mathbb{B}' \in \text{FS}_2(V)$ dado, para cada $v \in V$ y cada $t \in \mathbb{I}$, por

$$\mathbb{B}'(v)(t) = \underset{j=1}{\overset{p}{M}} G(\mathbb{B}_j(v)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j)).$$

Este segundo algoritmo satisface también propiedades similares a las descritas en el Teorema 3.9.1.

Teorema 3.9.5 Consideremos el sistema basado en reglas difusas de tipo 2 descrito en (3.12), donde $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_p, \mathbb{A}' \in \text{FS}_2(U)$ y $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p \in \text{FS}_2(V)$ son conocidos. En este contexto, bajo el Algoritmo 2, se verifican las siguientes propiedades.

1. Si $\mathbb{A}', \mathbb{A}'' \in \text{FS}_2(U)$ son tales que $\mathbb{A}' \leq \mathbb{A}''$, entonces $\mathbb{B}' \leq \mathbb{B}''$.
2. Si \mathbb{A}' es completamente disjunto a cada \mathbb{A}_j , $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, entonces $\mathbb{B}' = \mathbb{F}^0$ sobre V .
3. Si $M \geq \text{máx}$, $G(t, 1) = t$ para cada $t \in \mathbb{I}$ y $i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j) = 1$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, entonces $\mathbb{B}' \geq \text{máx}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p)$.
4. Si $M = \text{máx}$, $G(t, 1) = t$ para cada $t \in \mathbb{I}$ y $i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j) = 1$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, entonces $\mathbb{B}' = \text{máx}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p)$.

5. Si $M \geq \text{máx}$, $G \geq \text{mín}$ y $\mathbb{B}_j(v)(t) \leq i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j)$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $v \in V$ y cada $t \in \mathbb{I}$, entonces $\mathbb{B}' \geq \text{máx}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_p)$.

DEMOSTRACIÓN: Veamos, por ejemplo, la demostración del primer apartado (el resto de propiedades se demuestran de igual forma).

(1) Supongamos que $\mathbb{A}' \leq \mathbb{A}''$. Dado que i es creciente, entonces $i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j) \leq i(\mathbb{A}'', \mathbb{A}_j)$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Además, el carácter creciente de G y de M nos lleva a que $\mathbb{B}' \leq \mathbb{B}''$. ■

Corolario 3.9.6 Si $G \geq \text{mín}$ y $\mathbb{B}(v)(t) \leq i(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ para cada $v \in V$ y cada $t \in \mathbb{I}$, entonces la conclusión del *modus ponens* particular de tipo 2 siguiente:

Regla: Si (u, t) es \mathbb{A} , entonces (v, s) es \mathbb{B}
 Hecho: (u, t) es \mathbb{A}

bajo el Algoritmo 2 satisface $\mathbb{B}' \geq \mathbb{B}$. Y si $G = \text{mín}$, entonces $\mathbb{B}' = \mathbb{B}$.

DEMOSTRACIÓN: En este caso particular, como $\mathbb{A}' = \mathbb{A}_1 = \mathbb{A}$ y $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}'(v)(t) &= G(\mathbb{B}_1(v)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j)) \\ &= G(\mathbb{B}(v)(t), i(\mathbb{A}, \mathbb{A})) \geq \text{mín}(\mathbb{B}(v)(t), i(\mathbb{A}, \mathbb{A})) \\ &= \mathbb{B}(v)(t) \end{aligned}$$

para cada $v \in V$ y cada $t \in \mathbb{I}$, por lo que $\mathbb{B}' \geq \mathbb{B}$. Y si $G = \text{mín}$, entonces se verifica la igualdad. ■

3.9.3. Ejemplo y discusión

En este apartado vamos a mostrar un ejemplo de aplicación de los dos algoritmos anteriores empleando números difusos triangulares en el conjunto $\text{FS}(\mathbb{I})$, y discutiremos los resultados que vayamos obteniendo. Recordemos que, dados tres números reales $a, b, c \in \mathbb{I}$ en el intervalo \mathbb{I} tales que $a \leq b \leq c$, utilizamos la

notación $(a/b/c)$ para referirnos al número difuso triangular de la familia FS(I) cuya función de pertenencia es, para cada $t \in \mathbb{I}$,

$$(a/b/c)[t] = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, & \text{si } a < t < b, \\ 1, & \text{si } t = b, \\ \frac{c-t}{c-b} & \text{si } b < t < c, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Sean $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $V = \{v_1, v_2\}$ dos conjuntos finitos arbitrarios. Consideremos las siguientes reglas $\{R_j : \mathbb{A}_j \rightarrow \mathbb{B}_j\}_{j=1}^2$ ($p = 2$) que emplean los siguientes números difusos de tipo 2:

$$\mathbb{A}_1 \equiv \begin{cases} \mathbb{A}_1(u_1) = (0.3/0.5/0.7), \\ \mathbb{A}_1(u_2) = (0.2/0.6/0.8), \\ \mathbb{A}_1(u_3) = (0.5/0.75/1); \end{cases} \quad \mathbb{B}_1 \equiv \begin{cases} \mathbb{B}_1(v_1) = (0.4/0.5/0.7), \\ \mathbb{B}_1(v_2) = (0.8/0.9/1); \end{cases}$$

$$\mathbb{A}_2 \equiv \begin{cases} \mathbb{A}_2(u_1) = (0.2/0.3/0.5), \\ \mathbb{A}_2(u_2) = (0.3/0.4/0.8), \\ \mathbb{A}_2(u_3) = (0.7/0.8/0.9); \end{cases} \quad \mathbb{B}_2 \equiv \begin{cases} \mathbb{B}_2(v_1) = (0.5/0.7/0.8), \\ \mathbb{B}_2(v_2) = (0.3/0.5/0.8), \end{cases}$$

y el hecho

$$\mathbb{A}' \equiv \begin{cases} \mathbb{A}'(u_1) = (0.4/0.6/0.8), \\ \mathbb{A}'(u_2) = (0.2/0.5/0.7), \\ \mathbb{A}'(u_3) = (0.8/0.9/1). \end{cases}$$

Mostramos la representación gráfica de las funciones de pertenencia de los números difusos triangulares previos en las Figuras 3.11, 3.12 y 3.13. Para simplificar los cálculos, utilizamos:

- la función de solapamiento débil $G(t, s) = t s$ para cada $t, s \in \mathbb{I}$, y
- la función de agregación $M(t, s) = (t + s)/2$ para cada $t, s \in \mathbb{I}$ (que posee $p = 2$ argumentos).

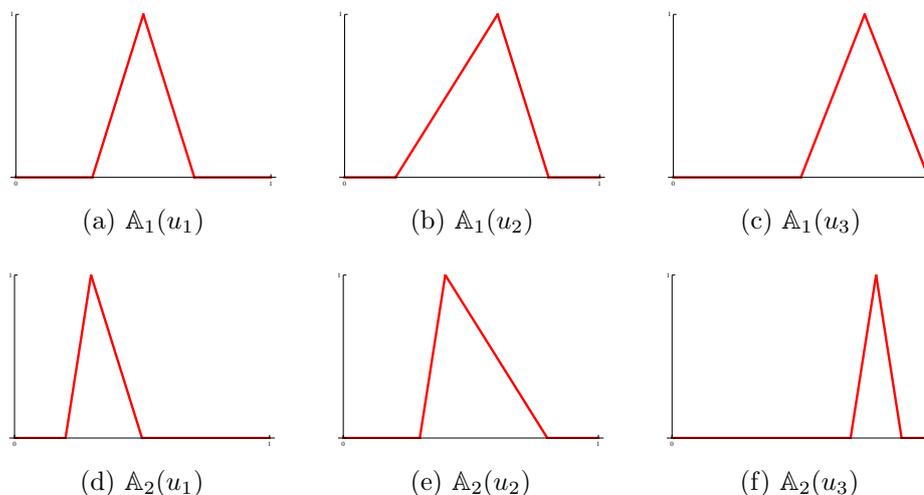


Figura 3.11: Representación gráfica de los números difusos $\mathbb{A}_j(u_i)$

Algoritmo 1

Empleamos el índice de solapamiento $O : \text{FS}(U) \times \text{FS}(U) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(1, 0)$ dado, para cada $A, B \in \text{FS}(U)$, por:

$$\begin{aligned}
 O(A, B) &= \sup_{u \in U} \min\{A(u), B(u)\} \\
 &= \max_{1 \leq i \leq 3} \left(\min\{A(u_i), B(u_i)\} \right) \\
 &= \max \left(\min\{A(u_1), B(u_1)\}, \min\{A(u_2), B(u_2)\}, \right. \\
 &\quad \left. \min\{A(u_3), B(u_3)\} \right).
 \end{aligned}$$

Para cada $j \in \{1, 2\}$ y cada $t \in \mathbb{I}$, calculamos

$$O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))$$

y obtenemos (véase la Figura 3.14):

$$O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_1(\cdot)(t)) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0,2, \\ 2,5t - 0,5, & \text{si } 0,2 < t \leq 8/15, \\ 3,5 - 5t, & \text{si } 8/15 < t \leq 0,7, \\ 0, & \text{si } 0,7 < t \leq 0,8, \\ 10t - 8, & \text{si } 0,8 < t \leq 6/7, \\ 4 - 4t, & \text{si } 6/7 < t \leq 1; \end{cases}$$

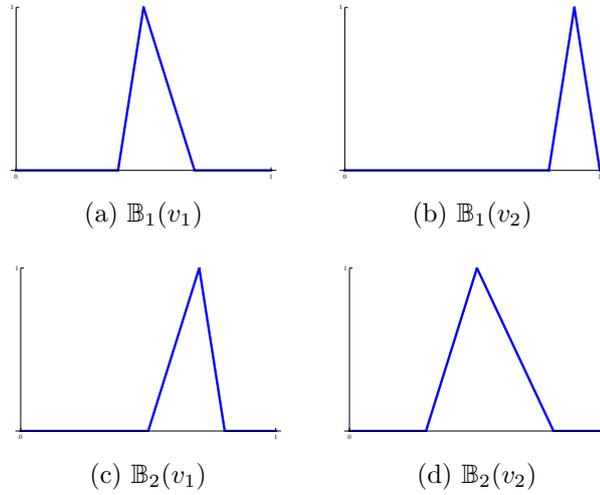


Figura 3.12: Representación gráfica de los números difusos $\mathbb{B}_j(v_k)$

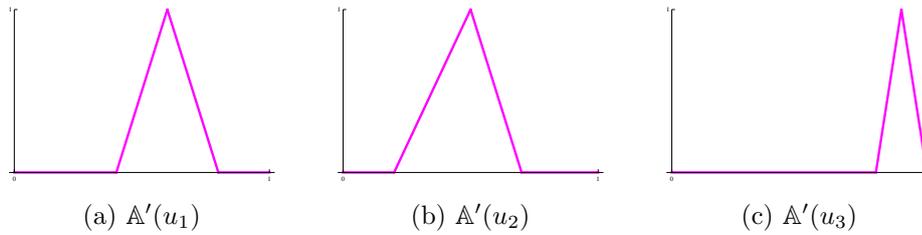


Figura 3.13: Representación gráfica de los números difusos $\mathbb{A}'(u_i)$

$$O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_2(\cdot)(t)) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.3, \\ -3 + 10t, & \text{si } 0.3 < t \leq 0.35, \\ (10t - 2)/3, & \text{si } 0.35 < t \leq 16/35, \\ 2 - 2.5t, & \text{si } 16/35 < t \leq 0.6, \\ 3.5 - 5t, & \text{si } 0.6 < t \leq 0.7, \\ 0, & \text{si } 0.7 < t \leq 0.8, \\ 10t - 8, & \text{si } 0.8 < t \leq 0.85, \\ 9 - 10t, & \text{si } 0.85 < t \leq 0.9, \\ 0, & \text{si } 0.9 < t \leq 1. \end{cases}$$

A continuación, calculamos, para $j, k \in \{1, 2\}$ y $t \in \mathbb{I}$,

$$G\left(\mathbb{B}_j(v_k)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))\right)$$

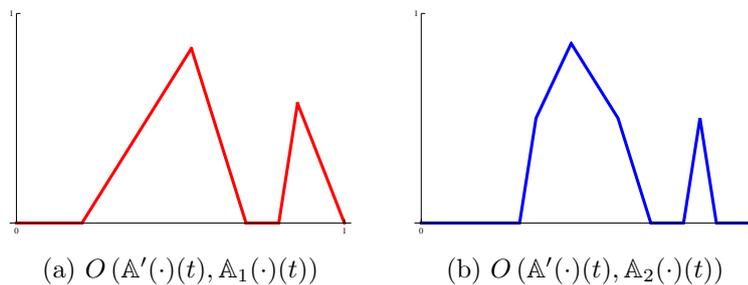


Figura 3.14: Representación gráfica de los conjuntos difusos $O(A'(\cdot)(t), A_2(\cdot)(t))$

y obtenemos (véase la Figura 3.15):

$$G(\mathbb{B}_1(v_1)(t), O(A'(\cdot)(t), A_1(\cdot)(t))) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.4, \\ 2 - 15t + 25t^2, & \text{si } 0.4 < t \leq 0.5, \\ -1.75 + 11.25t - 12.5t^2, & \text{si } 0.5 < t \leq 8/15, \\ (3.5 - 5t)^2, & \text{si } 8/15 < t \leq 0.7, \\ 0, & \text{si } 0.7 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$G(\mathbb{B}_1(v_2)(t), O(A'(\cdot)(t), A_1(\cdot)(t))) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.8, \\ 64 - 160t + 100t^2, & \text{si } 0.8 < t \leq 6/7, \\ -32 + 72t - 40t^2, & \text{si } 6/7 < t \leq 0.9, \\ 40(1 - t)^2, & \text{si } 0.9 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$G(\mathbb{B}_2(v_1)(t), O(A'(\cdot)(t), A_2(\cdot)(t))) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.5, \\ 1.25 - 8.75t + 12.5t^2, & \text{si } 0.5 < t \leq 8/15, \\ -8.75 + 30t - 25t^2, & \text{si } 8/15 < t \leq 0.7, \\ 0, & \text{si } 0.7 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$G(\mathbb{B}_2(v_2)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_2(\cdot)(t))) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.3, \\ 0.75 - 6.25t + 12.5t^2, & \text{si } 0.3 < t \leq 0.5, \\ (-4 + 25t - 25t^2)/3, & \text{si } 0.5 < t \leq 8/15, \\ (28 - 75t + 50t^2)/3, & \text{si } 8/15 < t \leq 0.7, \\ 0, & \text{si } 0.7 < t \leq 1. \end{cases}$$

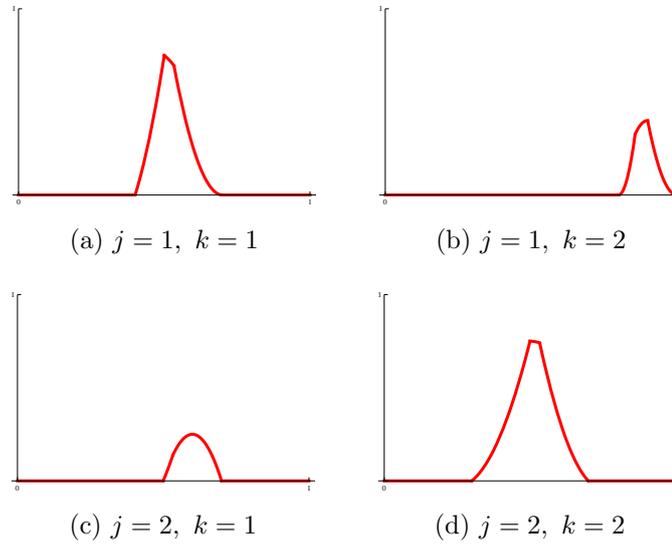


Figura 3.15: Representación gráfica de los conjuntos difusos definidos como

$$G(\mathbb{B}_j(v_k)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))), \text{ para } j, k \in \{1, 2\}$$

Finalmente, calculamos las expresiones del conjunto difuso \mathbb{B}' de tipo 2 dado por:

$$\mathbb{B}'(v_k)(t) = \bigvee_{j=1}^2 G(\mathbb{B}_j(v_k)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)))$$

y obtenemos (véase la Figura 3.16):

$$\mathbb{B}'(v_1)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.4, \\ 1 - 7.5t + 12.5t^2, & \text{si } 0.4 < t \leq 0.5, \\ -0.25 + 1.25t, & \text{si } 0.5 < t \leq 8/15, \\ 1.75 - 2.5t, & \text{si } 8/15 < t \leq 0.7, \\ 0, & \text{si } 0.7 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$\mathbb{B}'(v_2)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.3, \\ (3 - 25t + 50t^2)/8, & \text{si } 0.3 < t \leq 0.5, \\ (-4 + 25t - 25t^2)/6, & \text{si } 0.5 < t \leq 8/15, \\ (28 - 75t + 50t^2)/6, & \text{si } 8/15 < t \leq 0.7, \\ 0, & \text{si } 0.7 < t \leq 0.8, \\ 32 - 80t + 50t^2, & \text{si } 0.8 < t \leq 6/7, \\ -16 + 36t - 20t^2, & \text{si } 6/7 < t \leq 0.9, \\ 20(1 - t)^2, & \text{si } 0.9 < t \leq 1. \end{cases}$$

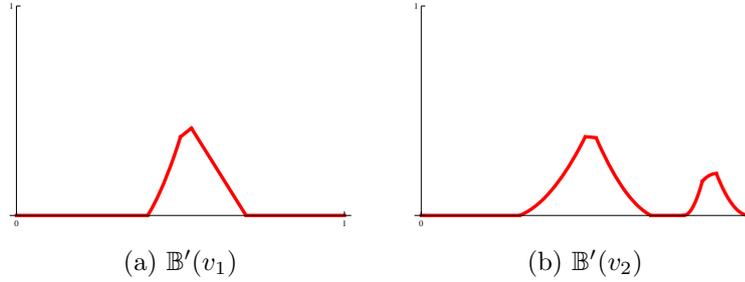


Figura 3.16: Representación gráfica de los conjuntos difusos que definen la salida \mathbb{B}' de tipo 2 empleando el Algoritmo 1

Algoritmo 2

En este segundo caso, para ser coherente con la elección que hemos hecho en el caso del primer algoritmo, utilizamos el índice de solapamiento $i : \text{FS}_2(U) \times \text{FS}_2(U) \rightarrow \mathbb{I}$ de tipo $(2, 0)$ dado, para cada $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(U)$, por:

$$i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \sup \left(\min\{\mathbb{A}(u)(t), \mathbb{B}(u)(t)\} : u \in U, t \in \mathbb{I} \right)$$

Como las funciones $\mathbb{A}(u_i)(\cdot), \mathbb{B}(u_i)(\cdot) : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ son continuas sobre el intervalo compacto, poseen máximos absolutos, por lo que

$$i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \max_{t \in \mathbb{I}} \left(\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \min\{\mathbb{A}(u_i)(t), \mathbb{B}(u_i)(t)\} \right\} \right).$$

Por tanto, para cada $j \in \{1, 2\}$,

$$i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j) = \max_{t \in \mathbb{I}} \left(\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \min\{\mathbb{A}'(u_i)(t), \mathbb{A}_j(u_i)(t)\} \right\} \right).$$

Observemos que, para cada $j \in \{1, 2\}$ y cada $t \in \mathbb{I}$,

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \min \{ \mathbb{A}'(u_i)(t), \mathbb{A}_j(u_i)(t) \} \right\} = O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)).$$

Estas funciones fueron dibujadas en la Figura 3.14. Por consiguiente, sus respectivos máximos absolutos son (véase la Figura 3.17):

$$i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_1) = \frac{5}{6} \quad \text{y} \quad i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_2) = \frac{6}{7}.$$

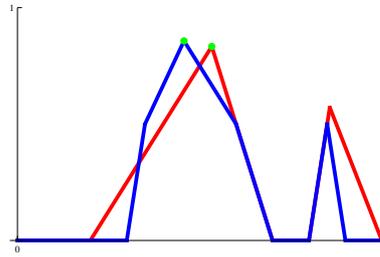


Figura 3.17: Representación gráfica de las funciones $\{ t \mapsto O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)) \}_{j=1}^2$ y de sus máximos absolutos

Utilizando la función de solapamiento débil $G(t, s) = ts$, podemos calcular $G(\mathbb{B}_j(v_k)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j))$ para cada $j, k \in \{1, 2\}$ y cada $t \in \mathbb{I}$, y obtenemos (véase la Figura 3.18):

$$G(\mathbb{B}_1(v_1)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_1)) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.4, \\ (25t - 10)/3, & \text{si } 0.4 < t \leq 0.5, \\ (35 - 50t)/12, & \text{si } 0.5 < t \leq 0.7, \\ 0, & \text{si } 0.7 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$G(\mathbb{B}_1(v_2)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_1)) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.8, \\ 5(5t - 4)/3, & \text{si } 0.8 < t \leq 0.9, \\ 25(1 - t)/3, & \text{si } 0.9 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$G(\mathbb{B}_2(v_1)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_2)) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.5, \\ 15(2t - 1)/7, & \text{si } 0.5 < t \leq 0.7, \\ 12(4 - 5t)/7, & \text{si } 0.7 < t \leq 0.8, \\ 0, & \text{si } 0.8 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$G(\mathbb{B}_2(v_2)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_2)) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.3, \\ 3(10t - 3)/7, & \text{si } 0.3 < t \leq 0.5, \\ 4(4 - 5t)/7, & \text{si } 0.5 < t \leq 0.8, \\ 0, & \text{si } 0.8 < t \leq 1. \end{cases}$$

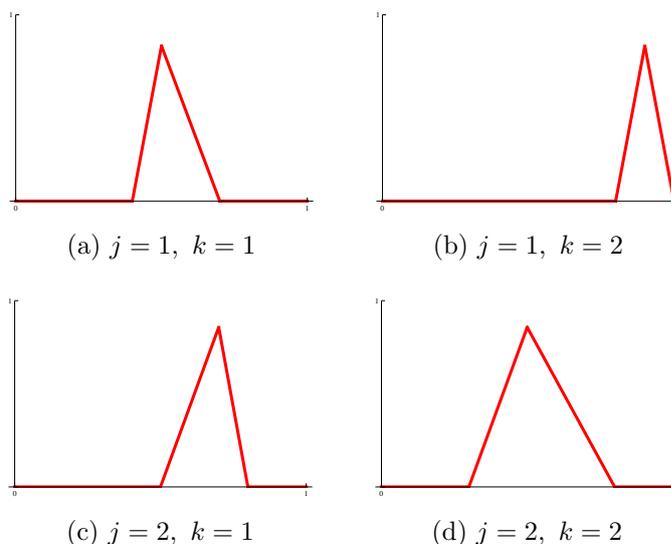


Figura 3.18: Representación gráfica de las funciones $G(\mathbb{B}_j(v_k)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j))$, para $j, k \in \{1, 2\}$

Utilizando la función de agregación M , podemos calcular el conjunto difuso \mathbb{B}' de tipo 2 empleando la expresión:

$$\mathbb{B}'(v_k)(t) = \underset{j=1}{M}^2 G(\mathbb{B}_j(v_k)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j))$$

y obtenemos, para cada $k \in \{1, 2\}$ y cada $t \in \mathbb{I}$ (véase la Figura 3.19):

$$\mathbb{B}'(v_1)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.4, \\ 5(5t - 2)/6, & \text{si } 0.4 < t \leq 0.5, \\ 5(2t + 13)/168, & \text{si } 0.5 < t \leq 0.7, \\ 6(4 - 5t)/7, & \text{si } 0.7 < t \leq 0.8, \\ 0, & \text{si } 0.8 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$\mathbb{B}'(v_2)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 0.3, \\ 3(10t - 3)/14, & \text{si } 0.3 < t \leq 0.5, \\ 2(4 - 5t)/7, & \text{si } 0.5 < t \leq 0.8, \\ 5(5t - 4)/6, & \text{si } 0.8 < t \leq 0.9, \\ 25(1 - t)/6, & \text{si } 0.9 < t \leq 1. \end{cases}$$

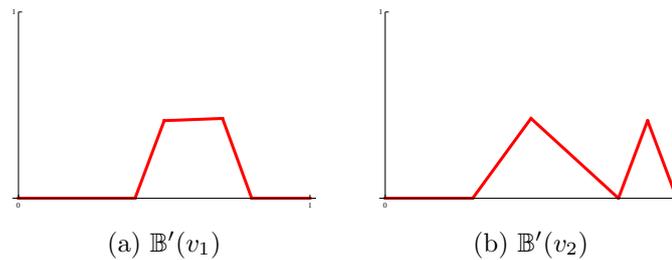


Figura 3.19: Representación gráfica de los conjuntos difusos que definen la salida \mathbb{B}' de tipo 2 empleando el Algoritmo 2

Comparación de resultados y discusión

La Figura 3.20 representa los conjuntos difusos $\mathbb{B}'(v_1)$ y $\mathbb{B}'(v_2)$ empleando el Algoritmo 1 (en color rojo) o el Algoritmo 2 (en color azul).

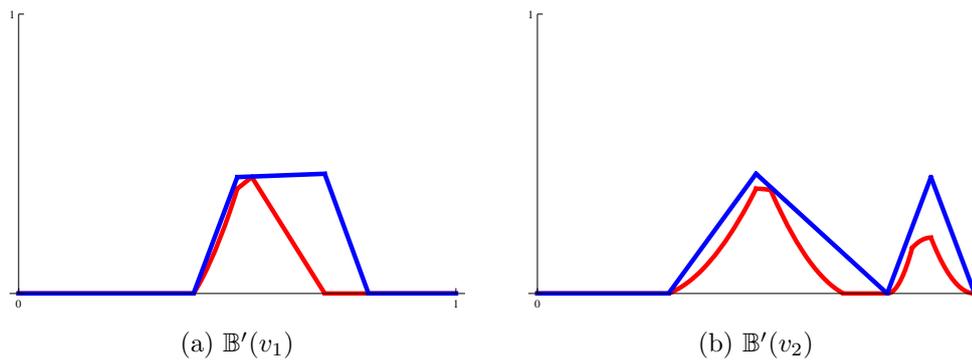


Figura 3.20: Comparación de las salidas difusas \mathbb{B}' de tipo 2 empleando los Algoritmos 1 (en rojo) y 2 (en azul)

Podemos observar que, al usar la función de solapamiento débil $G(t, s) = ts$, el Algoritmo 1 es más complicado porque conduce a un momento en el que las

funciones de pertenencia se multiplican. Por lo tanto, las funciones lineales (asociadas a números difusos triangulares) se transforman en funciones parabólicas (convexas o cóncavas), que son más difíciles de manejar.

Obsérvese que, dado que todas las funciones que hemos empleado son continuas, los conjuntos difusos de tipo 2 que hemos obtenido también son continuos al verlos como funciones.

En ejemplo previo se mostró que los conjuntos difusos $\mathbb{B}'(v_1)$ y $\mathbb{B}'(v_2)$ con el Algoritmo 1 son menores o iguales a sus funciones correspondientes al emplear el Algoritmo 2. Este comportamiento es, por ahora, una pregunta abierta para el futuro, pues no está claro si ha de verificarse siempre en general.

Para terminar esta sección, debemos destacar que existen otras configuraciones en las que los índices de solapamiento de tipo $(2, k)$ pueden ser de gran ayuda, especialmente en las aplicaciones. Por ejemplo, hay muchos contextos en los que los conjuntos difusos de tipo 1 o de tipo 2 se operan a través de funciones de agregación. Para ello, suele ser necesario descender al contexto real y allí, considerando números reales, aplicar la función de agregación. En otras palabras, es usual calcular una operación con dos conjuntos difusos $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \text{FS}_2(X)$ de tipo 2 aplicando una función de agregación M a los números reales $\mathbb{A}(x)(t)$ y $\mathbb{B}(x)(t)$, donde $x \in X$ y $t \in \mathbb{I}$. Sin embargo, los índices de solapamiento abren nuevas vías en las que los conjuntos difusos de tipo 2 \mathbb{A} y \mathbb{B} pueden operarse directamente obteniendo un conjunto difuso $\mathcal{I}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \text{FS}_2(X)$ de tipo 2, un conjunto difuso $I(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \text{FS}_1(X)$ de tipo 1, o incluso un escalar $i(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \text{FS}_0(X)$. Tales familias de aplicaciones enriquecen las posibilidades de la investigación. Éste es el caso de las medidas de similitud entre conjuntos difusos tipo 1 o tipo 2, que pueden verse como estructuras algebraicas que asocian un número real a cada par de conjuntos difusos de tipo 1 o de tipo 2 tratando de evaluar cuán similares o diferentes son los conjuntos difusos (véase [72, 79, 73]). Tales medidas difusas generalmente satisfacen una propiedad de solapamiento (véase [72, 73]). Parece razonable que, en futuros trabajos, se estudie el posible uso de índices de solapamiento de tipo $(2, k)$ en estos escenarios aplicados.

CAPÍTULO 4

Conclusiones e investigaciones futuras

Como es preceptivo en este tipo de memorias, bajo este último título realizamos una recapitulación de los contenidos de la misma, partiendo de los objetivos que nos planteamos en el primer capítulo y relacionándolos con los temas que se han abordado especialmente en el tercer capítulo. Describiremos algunos de los logros que se han alcanzado pero también debemos destacar algunos aspectos que, por una razón u otra, no se han conseguido y que, por supuesto, quedan pendientes para un futuro cercano. Además, teniendo en cuenta los resultados que se han obtenido, nos han ido surgiendo cuestiones que pueden ser de interés para desarrollar en futuras líneas de investigación.

Comenzamos este capítulo recordando algunos de los objetivos que se plantearon al inicio de la investigación junto con su grado de consecución. Hacemos un recorrido desde lo más general (repassando algunos propósitos muy amplios que decidimos abordar al principio del periodo de estudio), hasta lo particular de los objetivos matemáticos y estadísticos.

- ✓ En primer lugar, consideramos que hemos conseguido establecer una guía certera, en castellano, de conceptos previos a la que se puedan acercar los investigadores que puedan estar interesados tanto en el contexto de trabajo difuso en general como en temas de investigación más concretos.

- ✓ Hemos empleado una notación clara y precisa, lo suficientemente general, que nos ha permitido una descripción rápida y ágil de los contenidos de la Memoria. Para nosotros era importante que el lector conociese en cada momento el tipo de estructura algebraica que se está manejando (conjuntos o números difusos, de tipo 1 o de tipo 2) con solo observar la caligrafía utilizada.
- ✓ Hemos hecho hincapié en las nociones de conjunto difuso y de número difuso, describiendo sus semejanzas y sus diferencias, tanto a nivel gráfico como a nivel analítico.
- ✓ Desde el punto de vista estadístico, hemos puesto de manifiesto la estrecha relación entre la noción de conjunto difuso y las distribuciones de probabilidad. Hemos recordado las contribuciones realizadas en memorias anteriores y hemos puesto un nuevo grano de arena sobre el tema explicando los números difusos como niveles de probabilidad de afirmaciones que conllevan incertidumbre.

Desde el punto de vista de los objetivos matemáticos y estadísticos, podemos comentar los siguientes aspectos.

- ✓ Hemos introducido una amplia familia de operadores de aproximación

$$\Phi_{f,g,T_1,T_2} : \text{FS}(\mathbb{I}) \rightarrow \text{FN}(\mathbb{I})$$

que son capaces de asociar un único número difuso normal a cada conjunto difuso dentro de un cierto rango en el que se encuentra incluido el soporte.

- ✓ Antes de ello, hemos explicado tanto la necesidad de considerar una familia de este tipo de operadores como la utilidad que se le puede dar en diferentes contextos, en especial en el marco del trabajo con números difusos.
- ✓ Hemos conseguido que dicha familia dependa de una amplia gama de parámetros iniciales, implementados como funciones reales de variable real, que

pueden ser fijadas atendiendo a las necesidades o a los intereses de la investigación a desarrollar.

- ✓ Hemos concretado una configuración estándar de las condiciones iniciales que puede ser aplicada por la mayoría de investigadores que se acerquen inicialmente a esta familia de operadores.
- ✓ Hemos estudiado las propiedades generales de los operadores de la familia introducida, encontrando algunas propiedades que caracterizan a la familia: por ejemplo, su forma de actuación como operadores minimizantes respecto de la relación de orden parcial punto a punto (es decir, de inclusión de conjuntos difusos).
- ✓ Hemos descrito los puntos fijos de dichos operadores, especialmente en los casos más sencillos.
- ✓ Hemos realizado una introducción al estudio y a la aplicabilidad de las funciones de solapamiento, las cuales habían sido empleadas con gran éxito en contextos computacionales para la determinación de posibles solapamientos entre los bordes de figuras en imágenes dadas.
- ✓ Hemos mostrado los principales antecedentes acerca de la noción de índice de solapamiento para el caso de conjuntos difusos de tipo 1.
- ✓ Hemos descrito los conjuntos difusos de tipo 2 y su posible utilización en el contexto del manejo de la incertidumbre.
- ✓ Hemos realizado un análisis completo de las propiedades esenciales que verifican las funciones de solapamiento y los índices de solapamiento existentes, de cara a su posible generalización.
- ✓ Hemos introducido una definición adecuada de índice de solapamiento para el caso de los conjuntos difusos de tipo 2.

- ✓ Hemos indagado sobre la posibilidad de extender dicha definición a diferentes niveles difusos de forma que un mismo concepto tenga diferentes particularizaciones según el nivel difuso en el que nos encontremos.
- ✓ Hemos establecido una definición razonable de normalidad en el contexto de los índices de solapamiento, con objeto de recuperar algunas de las propiedades que se verifican en el contexto de los números reales o de los conjuntos difusos de tipo 1.
- ✓ Hemos presentado amplias familias de ejemplos de índices de solapamiento de conjuntos difusos de tipo 2, relacionándolos con las estructura algebraicas previas.
- ✓ Hemos puesto de manifiesto la existencia de diagramas conmutativos capaces de describir fielmente las interconexiones entre unos conceptos y otros.
- ✓ Hemos analizado la posible aplicación de esta clase de índices en el contexto de los sistemas interpolativos basados en reglas difusas cuando los antecedentes, los hechos y las conclusiones son expresados como conjuntos difusos de tipo 2.
- ✓ Hemos introducido algoritmos de ejecución que permiten deducir conclusiones a partir de reglas y hechos difusos de tipo 2.
- ✓ Hemos estudiado algunas de las propiedades que satisfacen dichos algoritmos.
- ✓ Hemos interpretado dichos algoritmos como operadores que, a partir de cierta información imprecisa, pueden llevar a conclusiones válidas y coherentes tanto con las premisas como con la intuición humana.
- ✓ Hemos comparado los resultados obtenidos con los dos procedimientos propuestos, y hemos buscado regularidades en el comportamiento de cada uno de ellos.

A tenor de los objetivos alcanzados que acabamos de mostrar, consideramos que hemos establecido una vía de trabajo sólida para el futuro con resultados

derivados de estas líneas de investigación. No obstante, al igual que se han alcanzado muchos de los objetivos que nos habíamos planteado al inicio de la investigación, también debemos reconocer humildemente que no hemos sido capaces de abordar otros desafíos que nos surgieron al principio. Es de justicia recopilar algunos de ellos, que nos servirán como base para seguir trabajando en esta línea.

- No hemos tenido tiempo, por el momento, de analizar la influencia de cada uno de los parámetros iniciales sobre el resultado final al aplicar los operadores de aproximación, de tal forma que no nos encontramos aún en condiciones de poder controlar aspectos concretos de la geometría de los números difusos obtenidos.
- No hemos relacionado las estructuras generales de la noción de espacio métrico estadístico como base del trabajo con funciones de solapamiento.
- No hemos podido reflexionar acerca de la mejor forma de expresar afirmaciones humanas que conlleven cierta carga de imprecisión mediante conjuntos difusos de tipo 2 y reglas difusas implementadas con estas estructuras.
- No hemos orientado el estudio de los conjuntos difusos de tipo 2 mediante técnicas clasificatorias y, por ende, mediante criterios de priorización de información.
- No hemos mostrado cómo utilizar algunas de las nociones aquí descritas como herramientas de trabajo en tareas avanzadas del alumnado de Bachillerato (en especial, del alumnado de la materia optativa de Estadística en sus investigaciones prácticas).
- No hemos desarrollado aplicaciones informáticas en software libre para el manejo de los conceptos que hemos introducido.

A la vista de los resultados obtenidos y de la forma concreta en la que se han obtenido, han surgido muchos interrogantes que, sin duda, pueden dar

lugar a nuevas líneas de investigación tan apasionantes como las que aquí se han afrontado. A modo de ejemplo, planteamos algunas cuestiones abiertas que deseamos investigar en un futuro cercano.

- ▶ Encontrar nuevas situaciones reales en las que los contenidos que aquí se han introducido y estudiado puedan ser aplicados con éxito y modificarlos, si fuese necesario, para adaptarlos a las necesidades de cada contexto difuso concreto.
- ▶ Estudiar la posibilidad de modificar los operadores de aproximación introducidos concibiéndolos para que se asocie un número difuso que no sea necesariamente normal, sino quedándonos a la altura adecuada.
- ▶ Estudiar la influencia exacta de los parámetros iniciales del método de aproximación, determinando la mejor forma de modificarlos para que los resultados sean lo más acordes posible a las necesidades de la investigación.
- ▶ Estudiar la existencia de puntos fijos de los operadores introducidos, incluso en casos más complicados que la elección estándar.
- ▶ Profundizar en el estudio de la diferentes condiciones de normalidad que se pueden plantear asociadas a un índice de solapamiento, ya que se trata de una restricción que debe ser estudiada con más detenimiento en futuras investigaciones hasta alcanzar la condición que mejor se ajuste a las aplicaciones prácticas.
- ▶ Introducir nuevas condiciones de regularidad sobre índices de solapamiento que permitan no solo relacionar, sino caracterizar en su más amplio sentido la diferentes interconexiones entre los distintos niveles de índices de solapamiento.
- ▶ Estudiar en profundidad los algoritmos inferenciales propuestos, encontrando nuevas propiedades que puedan satisfacer y modificándolos según las aplicaciones concretas en las que se empleen.

- ▶ Determinar contextos concretos donde se apliquen los algoritmos inferenciales descritos, siendo capaces de encontrar las mejores condiciones para expresar aspectos humanos que conlleven incertidumbre (por ejemplo, la afirmación “esta persona es alta”) implementándolos como conjuntos difusos de tipo 1 o de tipo 2.
- ▶ Programar en software libre diferentes librerías que sean capaces de llevar a cabo los algoritmos y procedimientos que se han descrito, y ponerlos a disposición de la comunidad científica en general a través del repositorio de la Universidad de Granada.

Índice de Figuras

2.1. Representación gráfica de diferentes funciones de solapamiento . . .	17
2.2. Ejemplos de números difusos: <i>crisp</i> y rectangular	30
2.3. Ejemplos de números difusos: triangular y trapezoidal	31
2.4. Representación gráfica de las dos clases de conjuntos difusos <i>LR</i> de tipo $\mathcal{A} = (a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}$	33
2.5. Representación gráfica de los números difusos \mathbf{r} y \tilde{r}_ω	34
2.6. Interpretación de los diferentes conjuntos de nivel de un número difuso	40
2.7. Un conjunto difuso cuyo soporte no está contenido en la recta real .	42
2.8. Representación gráfica de un conjunto difuso de tipo 2 sobre el refe- rencial $X = [0, 1]$	44
2.9. Diagrama que relaciona las inclusiones j_{01} , j_{02} y j_{12}	47
3.1. Representaciones gráficas de los conjuntos difusos A_{ω_0, ω_1} del Ejemplo 3.3.2 correspondientes a $\omega_0 < \omega_1$, $\omega_0 = \omega_1$ y $\omega_0 > \omega_1$	61
3.2. Conjunto difuso de soporte no acotado	64
3.3. Representación gráfica del número difuso A^F del Ejemplo 3.3.13 . .	71
3.4. Representación gráfica del conjunto difuso A del Ejemplo 3.3.19 . . .	75
3.5. Representación gráfica del conjunto difuso del Ejemplo 3.4.4	81
3.6. Número difuso obtenido como aproximación en el Ejemplo 3.4.4 . . .	83

3.7. Representación gráfica de: (a) los extremos B_L y B_U ; (b) el número difuso $\mathcal{B} = \Phi_{f,g,T_1,T_2}(A)$ obtenido en el Ejemplo 3.4.5	85
3.8. Representación gráfica de un número difuso de tipo LR dado por $(a_1/a_2/a_3/a_4; \omega_1, \omega_2)_{LR}$	94
3.9. Representación gráfica de diferentes funciones de solapamiento débil	101
3.10. función de solapamiento débil del Ejemplo 3.7.7	102
3.11. Representación gráfica de los números difusos $\mathbb{A}_j(u_i)$	134
3.12. Representación gráfica de los números difusos $\mathbb{B}_j(v_k)$	135
3.13. Representación gráfica de los números difusos $\mathbb{A}'(u_i)$	135
3.14. Representación gráfica de los conjuntos difusos $O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_2(\cdot)(t))$.	136
3.15. Representación gráfica de los conjuntos difusos definidos como $G(\mathbb{B}_j(v_k)(t), O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t)))$, para $j, k \in \{1, 2\}$	137
3.16. Representación gráfica de los conjuntos difusos que definen la salida \mathbb{B}' de tipo 2 empleando el Algoritmo 1	138
3.17. Representación gráfica de las funciones $\{t \mapsto O(\mathbb{A}'(\cdot)(t), \mathbb{A}_j(\cdot)(t))\}_{j=1}^2$ y de sus máximos absolutos	139
3.18. Representación gráfica de las funciones $G(\mathbb{B}_j(v_k)(t), i(\mathbb{A}', \mathbb{A}_j))$, para $j, k \in \{1, 2\}$	140
3.19. Representación gráfica de los conjuntos difusos que definen la salida \mathbb{B}' de tipo 2 empleando el Algoritmo 2	141
3.20. Comparación de las salidas difusas \mathbb{B}' de tipo 2 empleando los Algoritmos 1 (en rojo) y 2 (en azul)	141

Bibliografía

- [1] S. Abbasbandy, T. Hajjari. *A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers*. Comput. Math. Appl. **57** (3) (2009), 413-419.
- [2] J. Aisbett, J.T. Rickard, D.G. Morgenthaler. *Type-2 fuzzy sets as functions on spaces*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **18** (4) (2010), 841-844.
- [3] G. Alfonso. *Statistical analysis with fuzzy data of the Chinese economy*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, septiembre de 2017. <http://hdl.handle.net/10481/51617>
- [4] G. Alfonso, A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán. *A fuzzy regression model based on finite fuzzy numbers and its application to real-world financial data*. J. Comput. Appl. Math. **318** (2017), 47-58.
- [5] B. Asady, A. Zendehnam. *Ranking fuzzy numbers by distance dminimization*. Appl. Math. Model. **31** (2007), 2589-2598.
- [6] T.C. Asmus, G.P. Dimuro, B. Bedregal, J. A. Sanz, S.P. Jr., H. Bustince. *General interval-valued overlap functions and intervalvalued overlap indices*. Inf. Sci. **527** (2020), 27-50.
- [7] T.C. Asmus, G.P. Dimuro, B. Bedregal, J.A. Sanz, R. Mesiar, H. Bustince. *Towards interval uncertainty propagation control in bivariate aggregation processes and the introduction of width-limited interval-valued overlap functions*. Fuzzy Sets Syst. **441** (5) (2022), 130-168.

-
- [8] T.C. Asmus, J.A. Sanz, G.P. Dimuro, B. Bedregal, J. Fernández, H. Bustince. *N-dimensional admissibly ordered interval-valued overlap functions and its influence in interval-valued fuzzy rule-based classification systems*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **30** (4) (2022), 1060-1072.
- [9] J. Baldwin, B. Pilsworth. *Axiomatic approach to implication for approximate reasoning with fuzzy logic*. Fuzzy Sets Syst. **3** (2) (1980), 193-219.
- [10] A.I. Ban, L. Coroianu. *Simplifying the search for effective ranking of fuzzy numbers*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **23** (2) (2015), 327-339.
- [11] B.C. Bedregal, G.P. Dimuro, H. Bustince, E. Barrenechea. *New results on overlap and grouping functions*. Inf. Sci. **249** (2013), 148-170.
- [12] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo. *A practical guide to averaging functions*. Berlin, New York, Springer, 2016.
- [13] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, J. Fernández, Z. Xu, B. Bedregal, J. Montero, H. Hagraš, F. Herrera, B. de Baets. *A historical account of types of fuzzy sets and their relationships*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **24** (1) (2016), 179-194.
- [14] H. Bustince, E. Barrenechea, M. Pagola, F. Soria. *Weak fuzzy S-subsethood measures. Overlap index*. Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowl.-Based Syst. **14** (5) (2006), 537-560.
- [15] H. Bustince, J. Fernández, R. Mesiar, J. Montero, R. Orduna. *Overlap functions*. Nonlinear Anal. TMA **72** (3-4) (2010), 1488-1499.
- [16] H. Bustince, M. Pagola, E. Barrenechea. *Construction of fuzzy indices from fuzzy DI-subsethood measures: Application to the global comparison of images*. Inf. Sci. **177** (3) (2007), 906-929.
- [17] H. Bustince, M. Pagola, E. Barrenechea, J. Fernández, P. Melo-Pinto, P. Couto, H. R. Tizhoosh, J. Montero. *Ignorance functions. An application*

-
- to the calculation of the threshold in prostate ultrasound images. Fuzzy Sets Syst.* **161** (1) (2010), 20-36.
- [18] H. Bustince, M. Pagola, R. Mesiar, E. Hullermeier, F. Herrera. *Grouping, overlap, and generalized bientropic functions for fuzzy modeling of pairwise comparisons. IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **20** (3) (2012), 405-415.
- [19] H. Bustince, R. Mesiar, G. Dimuro, J. Fernandez, B. Bedregal. *The evolution of the notion of overlap functions*, in *Fuzzy Approaches for Soft Computing and Approximate Reasoning: Theories and Applications: Dedicated to Bernadette Bouchon-Meunier, M.-J. Lesot, C. Marsala* (eds). Cham: Springer International Publishing, 2021, pp. 21-29.
- [20] A.B. Cara, C. Wagner, H. Hagrass, H. Pomares, I. Rojas. *Multiobjective optimization and comparison of nonsingleton type-1 and singleton interval type-2 fuzzy logic systems. IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **21** (3) (2013), 459-476.
- [21] Y.-C. Chang, S.-M. Chen, C.-J. Liau. *Fuzzy interpolative reasoning for sparse fuzzy-rule-based systems based on the areas of fuzzy sets. IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **16** (5) (2008), 1285-1301.
- [22] P.-T. Chang, E.S. Lee. *Ranking of fuzzy sets based on the concept of existence. Comput. Math. Appl.* **27** (1994), 1-21.
- [23] S.-M. Chen, S.I. Adam. *Weighted fuzzy interpolated reasoning based on ranking values of polygonal fuzzy sets and new scale and move transformation techniques. Inf. Sci.* **435** (2018), 184-202.
- [24] S.-M. Chen, D. Barman. *Adaptive weighted fuzzy interpolative reasoning based on representative values and similarity measures of interval type-2 fuzzy sets. Inf. Sci.* **478** (2019), 167-185.
- [25] S.M. Chen, J.H. Chen. *Fuzzy risk analysis based on ranking generalized fuzzy numbers with different heights and different spreads. Expert Syst. Appl.* **36** (3) (2009), 6833-6842.

-
- [26] S.-M. Chen, Z.-J. Chen. *Weighted fuzzy interpolative reasoning for sparse fuzzy rule-based systems based on piecewise fuzzy entropies of fuzzy sets*. Inf. Sci. **329** (2016), 503-523.
- [27] L.H. Chen, C.-C. Hsueh. *Fuzzy regression models using the least-squares method based on the concept of distance*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **17** (6) (2009), 1259-1272.
- [28] S.-M. Chen, L.-W. Lee, V.R. Shen. *Weighted fuzzy interpolative reasoning systems based on interval type-2 fuzzy sets*. Inf. Sci. **248** (2013), 15-30.
- [29] S.-M. Chen, K. Sanguansat. *Analyzing fuzzy risk based on a new fuzzy ranking method between generalized fuzzy numbers*. Expert Syst. Appl. **38** (2011), 2163-2171.
- [30] C. Chen, Q. Shen. *A new method for rule interpolation inspired by rough-fuzzy sets*. Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2012, 1-8.
- [31] C. Chen, Q. Shen. *Transformation-based fuzzy rule interpolation using interval type-2 fuzzy sets*. Algorithms **10** (3) (2017), 1-20.
- [32] S.-M. Chen, X.-Y. Zou, D. Barman. *Adaptive weighted fuzzy rule interpolation based on ranking values and similarity measures of roughfuzzy sets*. Inf. Sci. **488** (2019), 93-110.
- [33] T.C. Chu, C.T. Tsao. *Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point*. Comput. Math. Appl. **43** (1-2) (2002), 111-117.
- [34] G.P. Dimuro, B. Bedregal. *Archimedean overlap functions: The ordinal sum and the cancellation, idempotency and limiting properties*. Fuzzy Sets Syst. **252** (2014), 39-54.
- [35] G.P. Dimuro, B. Bedregal. *On residual implications derived from overlap functions*. Inf. Sci. **312** (2015), 78-88.

-
- [36] G.P. Dimuro, B. Bedregal, H. Bustince, M. J. Asiáin, R. Mesiar. *On additive generators of overlap functions*. Fuzzy Sets Syst. **287** (2016), 76-96.
- [37] G.P. Dimuro, B. Bedregal, H. Bustince, A. Jurio, M. Baczyński, K. Miś. *QL-operations and QL-implication functions constructed from tuples (O, G, N) and the generation of fuzzy subethood and entropy measures*. Int. J. Approx. Reasoning **82** (2017), 170-192.
- [38] G.P. Dimuro, B. Bedregal, J. Fernández, M. Sesma-Sara, J. M. Pintor, H. Bustince. *The law of O-conditionality for fuzzy implications constructed from overlap and grouping functions*. Int. J. Approx. Reasoning **105** (2019), 27-48.
- [39] D. Dubois, W. Ostasiewicz, H. Prade. *Fuzzy sets: History and basic notions*. In: Fundamentals of Fuzzy Sets, D. Dubois, H. Prade (eds.), Kluwer, Boston, 2000, 21-124.
- [40] D. Dubois, H. Prade. *Operations on fuzzy numbers*. Int. J. Syst. Sci. **9** (3) (1978), 613-626.
- [41] D. Dubois, H. Prade. *Fuzzy sets and systems: Theory and applications*. Academic Press, New York, 1980.
- [42] D. Dubois, H. Prade. *The three semantics of fuzzy sets*. Fuzzy Sets Syst. **90** (1997), 141-150.
- [43] D. Dubois, H. Prade (Eds.) *Fundamentals of Fuzzy Sets*. Kluwer Academic Press, 2000.
- [44] D. Dubois, H. Prade. *Gradualness, uncertainty and bipolarity: Making sense of fuzzy sets*. Fuzzy Sets Syst. **192** (2012), 3-24.
- [45] M. Elkano, M. Galar, J.A. Sanz, P.F. Schiavo, S. Pereira, G.P. Dimuro, E.N. Borges, H. Bustince. *Consensus via penalty functions for decision making in ensembles in fuzzy rule-based classification systems*. Appl. Soft Comput. **67** (2018), 728-740.

- [46] S. Fukami, M. Mizumoto, K. Tanaka. *Some considerations on fuzzy conditional inference*. Fuzzy Sets Syst. **4** (3), 243-273.
- [47] J. Fumanal-Idocin, A. Alonso-Betanzos, O. Cordón, H. Bustince, M. Minárová. *Community detection and social network analysis based on the italian wars of the 15th century*. Futur. Gener. Comp. Syst. **113** (2020), 25-40.
- [48] J. Fumanal-Idocin, Y.-K. Wang, C.-T. Lin, J. Fernández, J.A. Sanz, H. Bustince. *Motor-imagery-based brain-computer interface using signal derivation and aggregation functions*. IEEE Trans. Cybernetics **52** (8) (2022), 7944-7955.
- [49] S. García-Jiménez, H. Bustince, E. Hüllermeier, R. Mesiar, N.R. Pal, A. Pradera. *Overlap indices: Construction of an application to interpolative fuzzy systems*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **23** (4) (2015), 1259-1273.
- [50] S. García-Jiménez, A. Jurio, M. Pagola, L. de Miguel, E. Barrenechea, H. Bustince. *Forest fire detection: A fuzzy system approach based on overlap indices*. Appl. Soft Comput. **52** (2017), 834-842.
- [51] J.M. Garibaldi, T. Ozen. *Uncertain fuzzy reasoning: A case study in modelling expert decision making*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **15** (1) (2007), 16-30.
- [52] R. Goetschel, W. Voxman. *Elementary fuzzy calculus*. Fuzzy Sets Syst. **18** (1986), 31-43.
- [53] D. Gómez, J.T. Rodríguez, J. Montero, J. Yáñez. *Fuzzy community detection based on grouping and overlapping functions*. Proceedings of the Conference of the International Fuzzy Systems Association and the European Society for Fuzzy Logic and Technology (IFSA-EUSFLAT-15). Atlantis Press, Paris, 2015, 1514-1519.

-
- [54] H. Hagrais, F. Doctor, V. Callaghan, A. López. *An incremental adaptive life long learning approach for type-2 fuzzy embedded agents in ambient intelligent environments*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **15** (1) (2007), 41-55.
- [55] F. Herrera, L. Martínez. *A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **8** (6) (2000), 746-752.
- [56] G. Hesamian, M.G. Akbari. *A fuzzy additive regression model with exact predictors and fuzzy responses*. Appl. Soft Comput. J. **95**, art. no. 106507 (2020).
- [57] L.G. Jaime, E.E. Kerre, M. Nachtegael, H. Bustince. *Consensus image method for unknown noise removal*. Knowl.-Based Syst. **70** (2014), 64-77.
- [58] R. Jain. *Decision-making in the presence of fuzzy variables*. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. **6** (1976), 698-703.
- [59] A. Jurio, H. Bustince, M. Pagola, A. Pradera, R. Yager. *Some properties of overlap and grouping functions and their application to image thresholding*. Fuzzy Sets Syst. **229** (2013), 69-90.
- [60] N.N. Karnik, J.M. Mendel. *Applications of type-2 fuzzy logic systems to forecasting of time-series*. Inf. Sci. **120** (1) (1999), 89-111.
- [61] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap. *Triangular Norms*. Dordrecht, Kluwer Academic Publisher, 2000.
- [62] L.-W. Lee, S.-M. Chen. *Fuzzy interpolative reasoning for sparse fuzzy rule-based systems based on the ranking values of fuzzy sets*. Expert Syst. Appl. **35** (2008), 850-864.
- [63] T.-S. Liou, M.-J. Wang. *Ranking fuzzy numbers with integral value*. Fuzzy Sets Syst. **50** (1992), 247-255.
- [64] G. Lucca, G. P. Dimuro, J. Fernández, H. Bustince, B. Bedregal, J.A. Sanz. *Improving the performance of fuzzy rule-based classification systems*

-
- based on a nonaveraging generalization of CC-integrals named CF1F2 - integrals.* IEEE Trans. Fuzzy Syst. **27** (1) (2019), 124-134.
- [65] G. Lucca, J.A. Sanz, G.P. Dimuro, B. Bedregal, M. J. Asiáin, M. Elcano, H. Bustince. *CC-integrals: Choquet-like copula-based aggregation functions and its application in fuzzy rule-based classification systems.* Knowledge-Based Syst. **119** (2017), 32-43.
- [66] G. Lucca, J.A. Sanz, G.P. Dimuro, B. Bedregal, H. Bustince. *A proposal for tuning the α parameter in $C_\alpha C$ -integrals for application in fuzzy rule-based classification systems.* Nat. Comput. **19** (2020), 533-546.
- [67] G. Lucca, J.A. Sanz, G.P. Dimuro, B. Bedregal, H. Bustince, R. Mesiar. *CF-integrals: A new family of pre-aggregation functions with application to fuzzy rule-based classification systems.* Inf. Sci. **435** (2018), 94-110.
- [68] M. Ma, M. Friedman, A. Kandel. *A new fuzzy arithmetic.* Fuzzy Sets Syst. **108** (1999), 83-90.
- [69] C. Marco-Detchart, H. Bustince, J. Fernández, R. Mesiar, J. Lafuente, E. Barrenechea, J.M. Pintor. *Ordered directional monotonicity in the construction of edge detectors.* Fuzzy Sets Syst. **421** (2021), 111-132.
- [70] C. Marco-Detchart, G. Lucca, C. López-Molina, L. de Miguel, G.P. Dimuro, H. Bustince. *Neuro-inspired edge feature fusion using choquet integrals.* Inf. Sci. 581 (2021), 740-754.
- [71] A. Márquez-Montávez. *Análisis de una metodología de ranking difuso utilizando números difusos trapezoidales con aplicaciones en Estadística.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, julio de 2020. <http://hdl.handle.net/10481/66170>
- [72] J. McCulloch, C. Wagner. *Measuring the similarity between z Slices general type-2 fuzzy sets with non-normal secondary membership functions.* Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2016, 461-468.

-
- [73] J. McCulloch, C. Wagner, U. Aickelin. *Extending similarity measures of interval type-2 fuzzy sets to general type-2 fuzzy sets*. Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2013, 1-8.
- [74] J.M. Mendel. *Uncertain rule-based fuzzy logic systems: Introduction and new directions*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2001.
- [75] K. Menger. *Statistical metrics*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **28** (12) (1942), 535-537.
- [76] K. Menger, *Ensembles flous et fonctions aléatoires*, C.R. Paris 232 (1951) 2001–2003.
- [77] R. Mesiar, A. Kolesárová, H. Bustince, G. Dimuro, B. Bedregal. *Fusion functions based discrete Choquet-like integrals*. Eur. J. Oper. Res. **252** (2) (2016), 601-609.
- [78] L. de Miguel, D. Gómez, J.T. Rodríguez, J. Montero, H. Bustince, G.P. Dimuro, J.A. Sanz. *General overlap functions*. Fuzzy Sets Syst. **372** (2019), 81-96.
- [79] L. de Miguel, R. Santiago, C. Wagner, J.M. Garibaldi, Z. Takáč, A.F. Roldán López de Hierro, H. Bustince. *Extension of restricted equivalence functions and similarity measures for type-2 fuzzy sets*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **30** (9) (2022), 4005-4016.
- [80] S. Murakami, S. Maeda, S. Imamura. *Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control system*. Proceedings of the IFAC symposium on fuzzy information, knowledge representation and decision analysis (1983), 363-368.
- [81] A.M. Nejad, M Mashinchi. *Ranking fuzzy numbers based on the areas on the left and the right sides of fuzzy number*. Comput. Math. Appl. **61** (2011), 431-442.

-
- [82] D.H. Nolasco, F.B. Costa, E.S. Palmeira, D.K. Alves, B.R. Bedregal, T.O. Rocha, R.L. Ribeiro, J.C. Silva. *Wavelet-fuzzy power quality diagnosis system with inference method based on overlap functions: Case study in an AC microgrid*. Eng. Appl. Artif. Intell. **85** (2019), 284-294.
- [83] R. Paiva, R. Santiago, B. Bedregal, E. Palmeira. *Lattice-valued overlap and quasi-overlap functions*. Inf. Sci. 562 (2021), 180-199.
- [84] M. Pagola, C. López-Molina, J. Fernández, E. Barrenechea, H. Bustince. *Interval type-2 fuzzy sets constructed from several membership functions: application to the fuzzy thresholding algorithm*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **21** (2) (2012), 230-244.
- [85] N.R. Pal, K. Pal. *Handling of inconsistent rules with an extended model of fuzzy reasoning*. J. Intell. Fuzzy Syst. **7** (1) (1999), 55-73.
- [86] J. Qiao. *Overlap and grouping functions on complete lattices*. Inf. Sci. **542** (2021), 406-424.
- [87] J. Qiao, B.Q. Hu. *On multiplicative generators of overlap and grouping functions*. Fuzzy Sets Syst. **332** (2018), 1-24.
- [88] J. Qiao, B.Q. Hu. *On homogeneous, quasi-homogeneous and pseudo-homogeneous overlap and grouping functions*. Fuzzy Sets Syst. **357** (2019), 58-90.
- [89] J. Qiao, B.Q. Hu. *On generalized migrativity property for overlap functions*. Fuzzy Sets Syst. **357** (2019), 91-116.
- [90] S.E. Rodabaugh. *Categorical foundations of variable-basis fuzzy topology*. Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory (U. Hohle and S. E. Rodabaugh, eds.), The Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol. 3, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 273-388, 1999.
- [91] S.E. Rodabaugh. *Fuzzy real lines and dual real lines as poslat topological, uniform, and metric ordered semirings with unity*. Mathematics of

-
- Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory (U. Hohle and S. E. Rodabaugh, eds.), The Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol. 3, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 607-631, 1999.
- [92] A. Roldán, J. Martínez-Moreno, C. Roldán. *On interrelationships between fuzzy metric structures*. Iran. J. Fuzzy Syst. **10** (2) (2013), 133-150.
- [93] C. Roldán, A. Roldán, J. Martínez-Moreno. *A fuzzy regression model based on distances and random variables with crisp input and fuzzy output data: A case study in biomass production*. Soft Comput. **16** (5) (2012), 785-795.
- [94] A.F. Roldán López de Hierro. *Métricas y normas en ambientes probabilísticos*. Tesis doctoral, Universidad de Jaén, mayo de 2012. <https://hdl.handle.net/10953/359>
- [95] A.F. Roldán López de Hierro, H. Bustince, J. Fernández, R. Mesiar, C. Roldán. *Two novel methodologies for considering aggregation functions by implicit equations and minimization problems*. Eur. J. Oper. Res. **270** (2018), 670-681.
- [96] A.F. Roldán López de Hierro, A. Márquez-Montávez, C. Roldán. *A novel fuzzy methodology applied for ranking trapezoidal fuzzy numbers and new properties*. Int. J. Comput. Math. **97** (1-2) (2020), 358-386.
- [97] A.F. Roldán López de Hierro, J. Martínez-Moreno, C. Roldán. *Some applications of the study of the image of a fuzzy number: Countable fuzzy numbers, operations, regression and a specificity-type ordering*. Fuzzy Sets Syst. **257** (2014), 204-216.
- [98] A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán, H. Bustince, J. Fernández, I. Rodríguez, H. Fardoun, J. Lafuente. *Affine construction methodology of aggregation functions*. Fuzzy Sets Syst. **414** (2021), 146-164.
- [99] A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán, F. Herrera. *On a new methodology for ranking fuzzy numbers and its application to real economic data*. Fuzzy Sets Syst. **353** (2018), 86-110.

-
- [100] A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán, M.Á. Tíscar, Z. Takáč, R.H.N. Santiago, G.P. Dimuro, J. Fernández, H. Bustince. *Type-(2, k) overlap indices*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. 2022, doi: 10.1109/TFUZZ.2022.3188918.
- [101] A.F. Roldán López de Hierro, C. Roldán López de Hierro, J. Martínez-Moreno, C. Aguilar Peña. *Estimation of a fuzzy regression model using fuzzy distances*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **24** (2016), 344-359.
- [102] A.F. Roldán López de Hierro, M. Sánchez, C. Roldán. *Multi-criteria decision making involving uncertain information via fuzzy ranking and fuzzy aggregation functions*. J. Comput. Appl. Math., art. no. 113138 (2020).
- [103] A.F. Roldán López de Hierro, M.Á. Tíscar, C. Roldán, H. Bustince. *A fuzzy methodology for approaching fuzzy sets of the real line by fuzzy numbers*. Fuzzy Set Syst. **435** (2022), 55-77.
- [104] M. Sánchez-Maldonado. *Una nueva metodología de toma de decisiones multi-criterio utilizando información imprecisa vía ranking difuso y funciones de agregación difusas*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, julio de 2022. <http://hdl.handle.net/10481/76797>
- [105] J.A. Sanz, D. Bernardo, F. Herrera, H. Bustince, H. Hagsras. *A compact evolutionary interval-valued fuzzy rule-based classification system for the modeling and prediction of real-world financial applications with imbalanced data*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **23** (4) (2014), 973-990.
- [106] J.A. Sanz, A. Fernández, H. Bustince, F. Herrera. *IVTURS: A linguistic fuzzy rule-based classification system based on a new interval-valued fuzzy reasoning method with tuning and rule selection*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **21** (3) (2013), 399-411.
- [107] J.A. Sanz, M. Galar, A. Jurio, A. Brugos, M. Pagola, H. Bustince. *Medical diagnosis of cardiovascular diseases using an interval-valued fuzzy rule-based classification system*. Appl. Soft Comput. **20** (2014), 103-111.

-
- [108] B. Schweizer, A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York, 1983.
- [109] Y. Shen, W. Pedrycz, X. Wang. *Approximation of fuzzy sets by interval type-2 trapezoidal fuzzy sets*. IEEE Trans. Cyber. **50** (11) (2020), 4722-4734.
- [110] J. Vicente Riera, J. Torrens. *Aggregation of subjective evaluations based on discrete fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **191** (2012), 21-40.
- [111] W. Voxman. *Canonical representations of discrete fuzzy numbers*. Fuzzy Sets Syst. **118** (2001), 457-466.
- [112] Y. Wang, B.Q. Hu. *Constructing overlap and grouping functions on complete lattices by means of complete homomorphisms*. Fuzzy Sets Syst. **427** (2022), 71-95.
- [113] X. Wang, E.E. Kerre. *Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I)*. Fuzzy Sets Syst. **118** (3) (2001), 375-385.
- [114] Y.-J. Wang, H.-S. Lee. *The revised method of ranking fuzzy numbers with an area between the centroid and original points*. Comput. Math. Appl. **55** (9) (2008), 2033-2042.
- [115] H. Wu, J.M. Mendel. *Classification of battlefield ground vehicles using acoustic features and fuzzy logic rule-based classifiers*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **15** (1) (2007), 56-72.
- [116] B. Yatsalo, L. Martínez. *Fuzzy rank acceptability analysis: A confidence measure of ranking fuzzy numbers*. IEEE Trans. Fuzzy Syst. **26** (6) (2018), 3579-3593.
- [117] L.A. Zadeh. *Fuzzy set*. Inf. Control **8** (1965), 338-353.
- [118] L.A. Zadeh. *Quantitative fuzzy semantics*. Inf. Sci. **3** (1971), 159-176.

- [119] L. Zadeh. *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*. Fuzzy Sets Syst. **1** (1) (1978), 3 - 28.
- [120] L.A. Zadeh. *A theory of approximate reasoning*. In: J.E. Hayes, D. Michie, L.I. Mikulich (Eds.), Machine Intelligence, vol. 9, Elsevier, New York, 1979, 149-194.
- [121] H. Zhou, X. Yan. *Migrativity properties of overlap functions over uni-norms*. Fuzzy Sets Syst. **403** (2021), 10-37.
- [122] K. Zhu, J. Wang, Y. Yang. *New results on the modularity condition for overlap and grouping functions*. Fuzzy Sets Syst. **403** (2021), 139-147.

Enlaces Web

- [123] *The R Project for Statistical Computing*: <https://www.r-project.org/>
- [124] *R-Studio*: <https://rstudio.com/>