



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Máster Universitario en Estructuras  
Curso 2020-2021

# Tema I: Análisis modal dentro del marco del mantenimiento de la salud estructural

Módulo: MÓDULO FUNDAMENTAL: CALIDAD Y DAÑO

Materia: **Análisis Modal y Detección de Defectos**

**Enrique García Macías**

[enriquegm@ugr.es](mailto:enriquegm@ugr.es)

**Departamento de Mecánica de Estructuras e  
Ingeniería Hidráulica**

# Desarrollo del curso

	FECHA			HORA	PROFESOR	TEMA	
<b>Clase 1</b>	Lunes	1	febrero	9:30-11:30	EGM	1	<b>Introducción: Análisis modal dentro del marco del mantenimiento de la salud estructural.</b>
Clase 2	Lunes	8	febrero	9:30-11:30	EGM	2	Fuentes de deterioro, patologías estructurales, y tecnologías de monitorización.
Clase 3	Lunes	15	febrero	9:30-11:30	EGM	3	Taller: procesamiento de señales.
Clase 4	Lunes	22	febrero	9:30-11:30	EGM	4	Análisis modal experimental.
Clase 5	Lunes	15	marzo	9:30-11:30	EGM	5	Análisis modal operacional.
Clase 6	Lunes	12	abril	9:30-11:30	EGM	6	Análisis modal operacional automatizado. Práctica de laboratorio I.
Clase 7	Lunes	19	abril	9:30-11:30	EGM	7	Taller: Identificación del daño estructural.
Clase 8	Lunes	26	abril	9:30-11:30	RCT	8	Técnicas de identificación dinámica basadas en análisis modal operacional.
Clase 9	Lunes	26	abril	12:00-14:00	RCT	9	Práctica de laboratorio II: Test de vibración ambiental.
Clase 10	Martes	27	abril	9:30-11:30	RCT	10	Casos de estudio.
Clase 11	Martes	27	abril	12:00-14:00	RCT		Presentación de trabajos.

ENTREGA DE TRABAJOS Y EVALUACIÓN

Del 3 al 28 de mayo



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# ÍNDICE

- Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural.
- Historia del SHM.
- Motivaciones y retos del SHM.
- Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM.



# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural.



## Structural Health Monitoring (SHM)

*The process of implementing a **damage identification** strategy for aerospace, civil and mechanical engineering infrastructure is referred to as Structural Health Monitoring (SHM) [1].*

*SHM is the integration of sensing and possibly also actuation devices to allow the loading and damaging conditions of a structure to be **recorded**, **analyzed**, **localized**, and **predicted** in a way that **nondestructive testing** (NDT) becomes an integral part of the structure and a material [2].*

[1] Farrar, C. R., & Worden, K. (2006). An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851), 303-315.

[2] Boller, C., Chang, F. K., & Fujino, Y. (Eds.). (2009). *Encyclopedia of structural health monitoring*. Wiley.

## Structural Health Monitoring (SHM)

The process of implementing a **damage identification** strategy for aerospace, civil and mechanical engineering infrastructure is referred to as Structural Health Monitoring (SHM) [1].

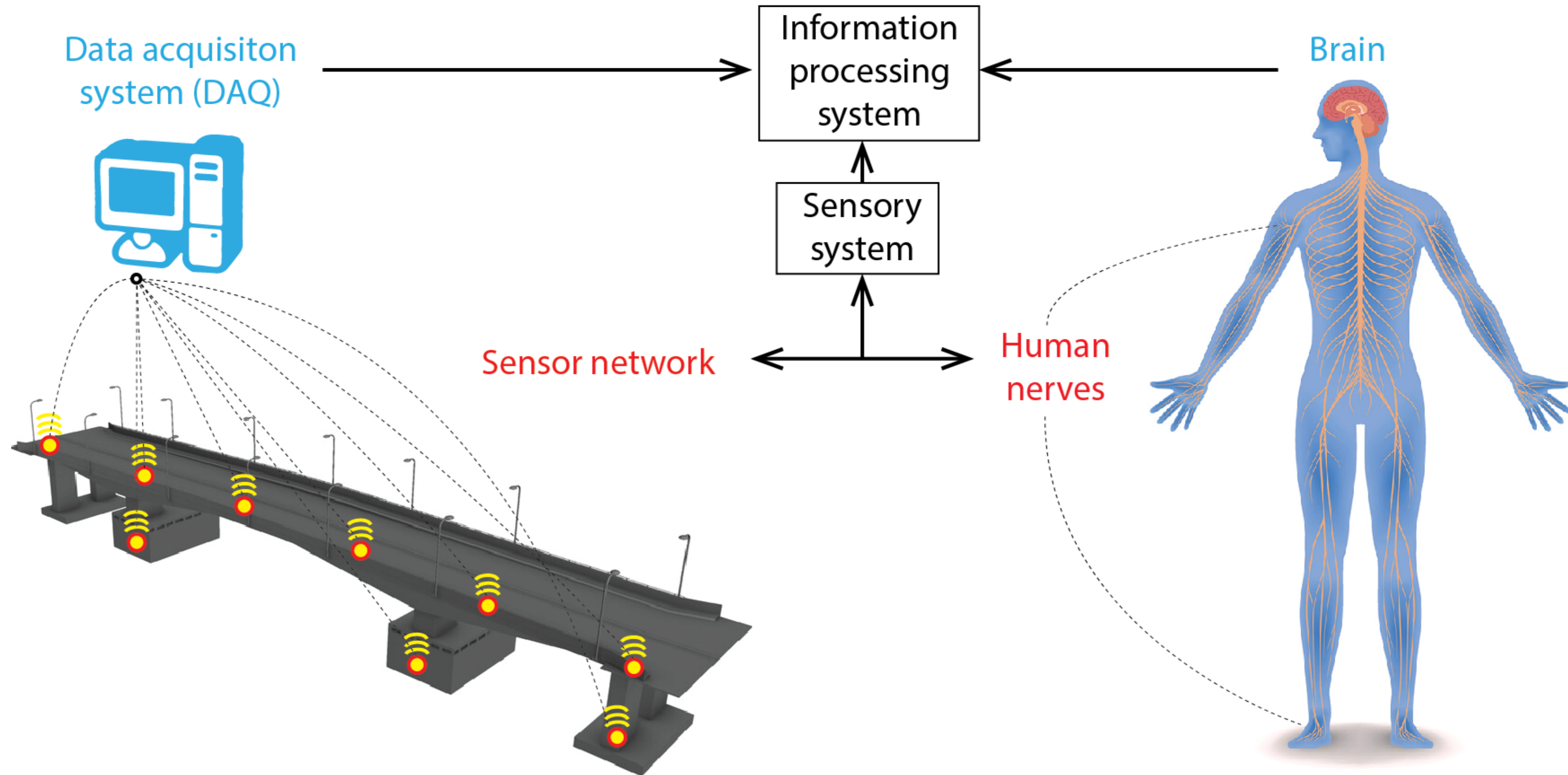
SHM is the integration of sensing and possibly also actuation devices to allow the loading and damaging conditions of a structure to be **recorded, analyzed, localized, and predicted** in a way that **nondestructive testing** (NDT) becomes an integral part of the structure and a material [2].

An **automated** process to conduct **non-destructive** damage **diagnosis, localization, and prognosis** of **structures**.

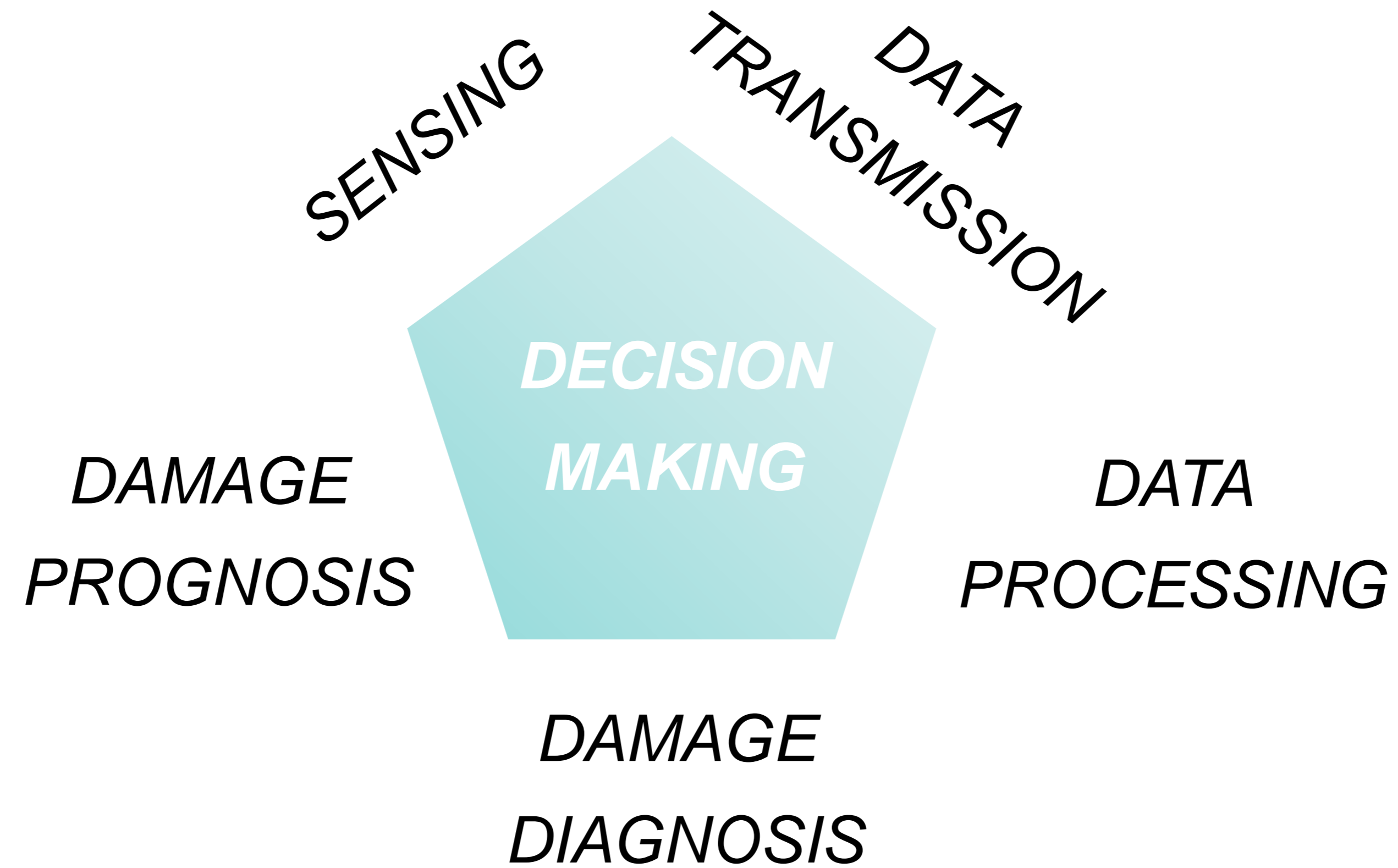
[1] Farrar, C. R., & Worden, K. (2006). An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851), 303-315.

[2] Boller, C., Chang, F. K., & Fujino, Y. (Eds.). (2009). *Encyclopedia of structural health monitoring*. Wiley.

# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural



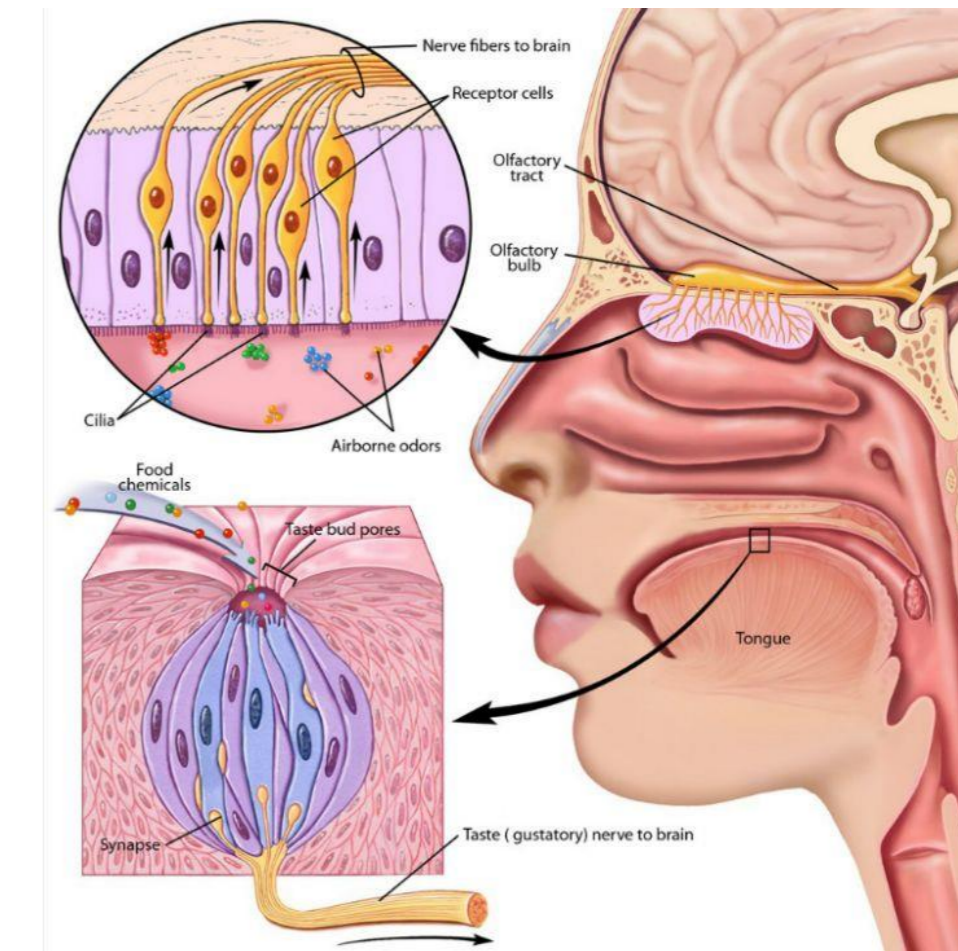
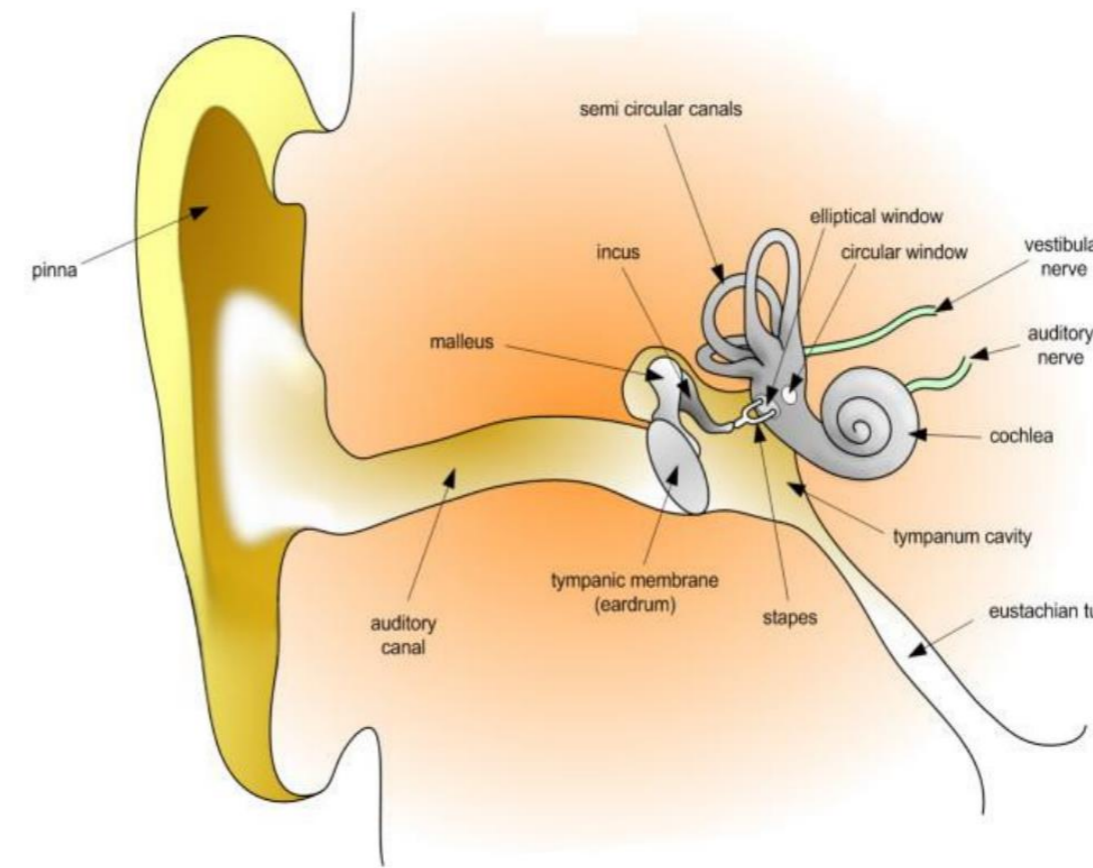
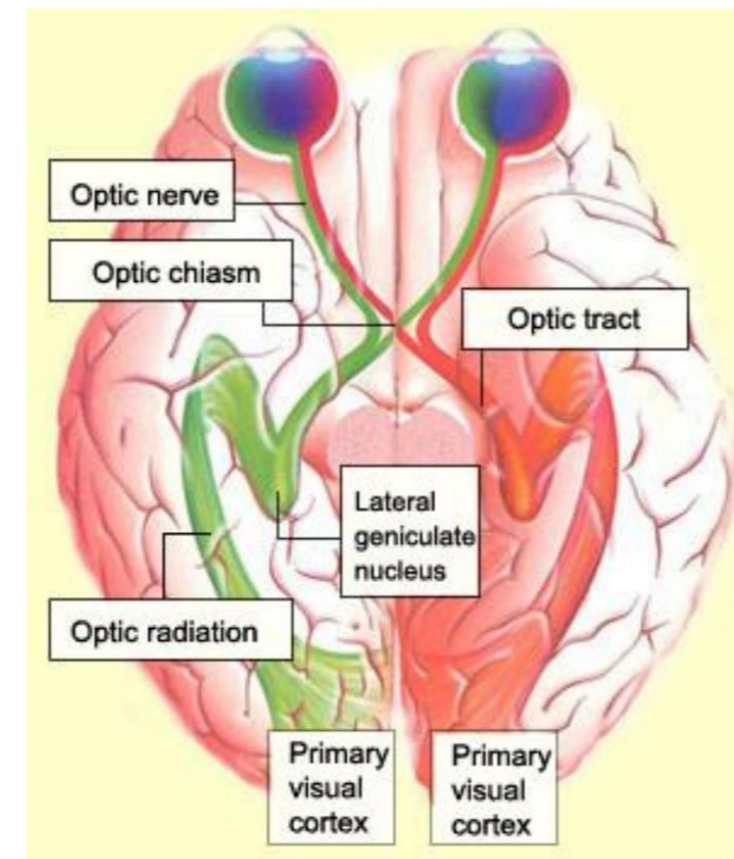
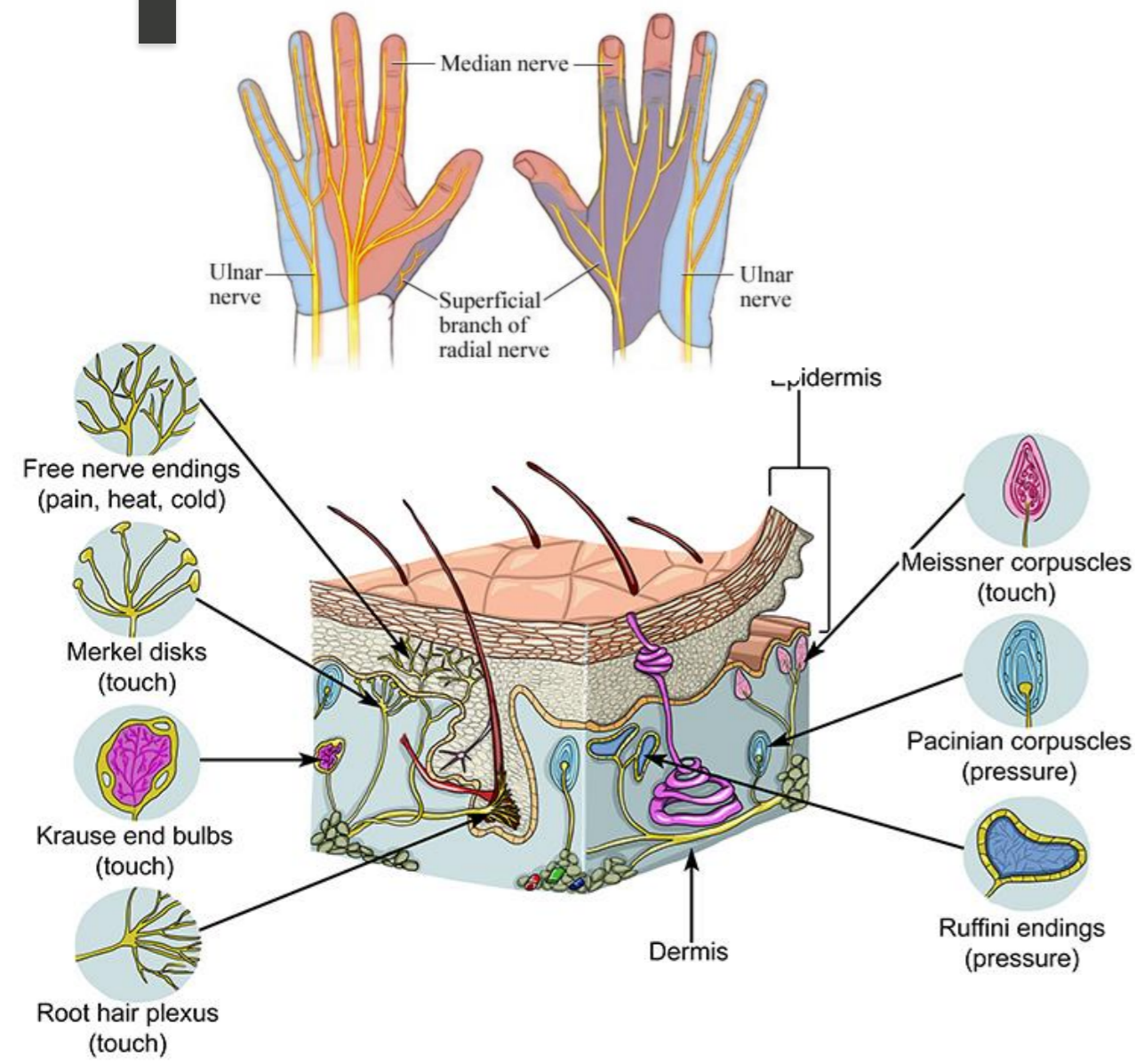
# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural





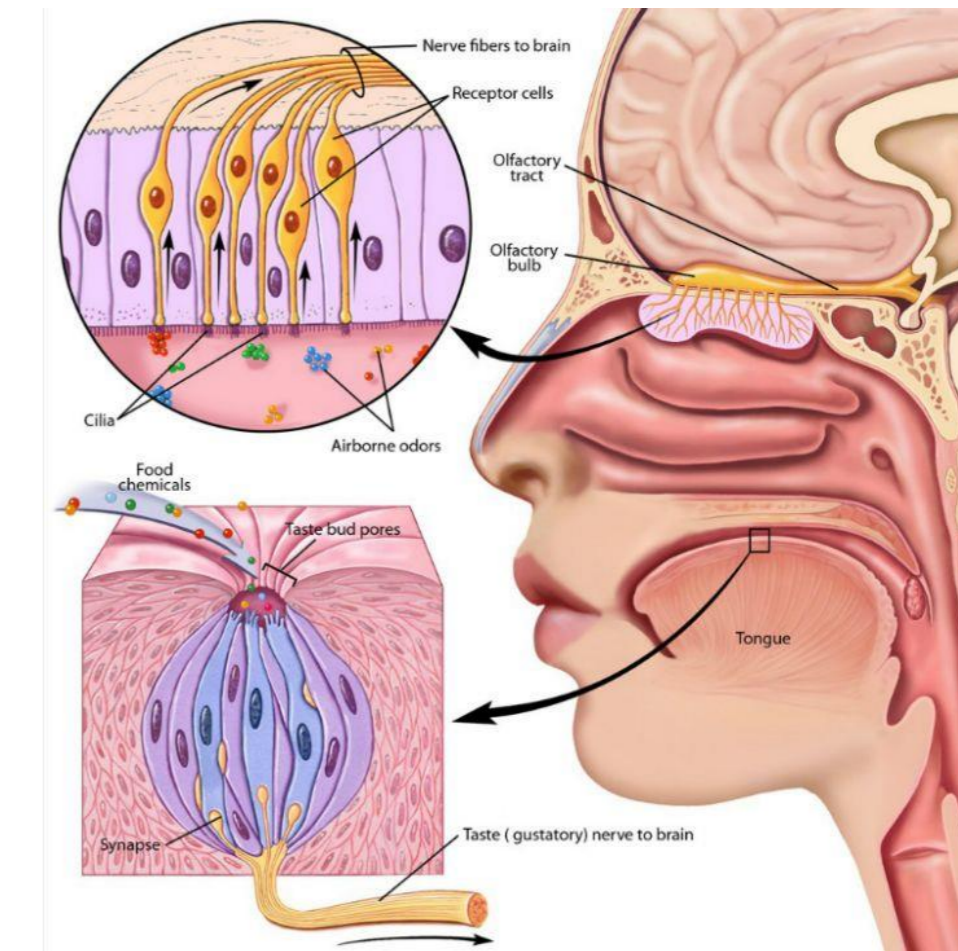
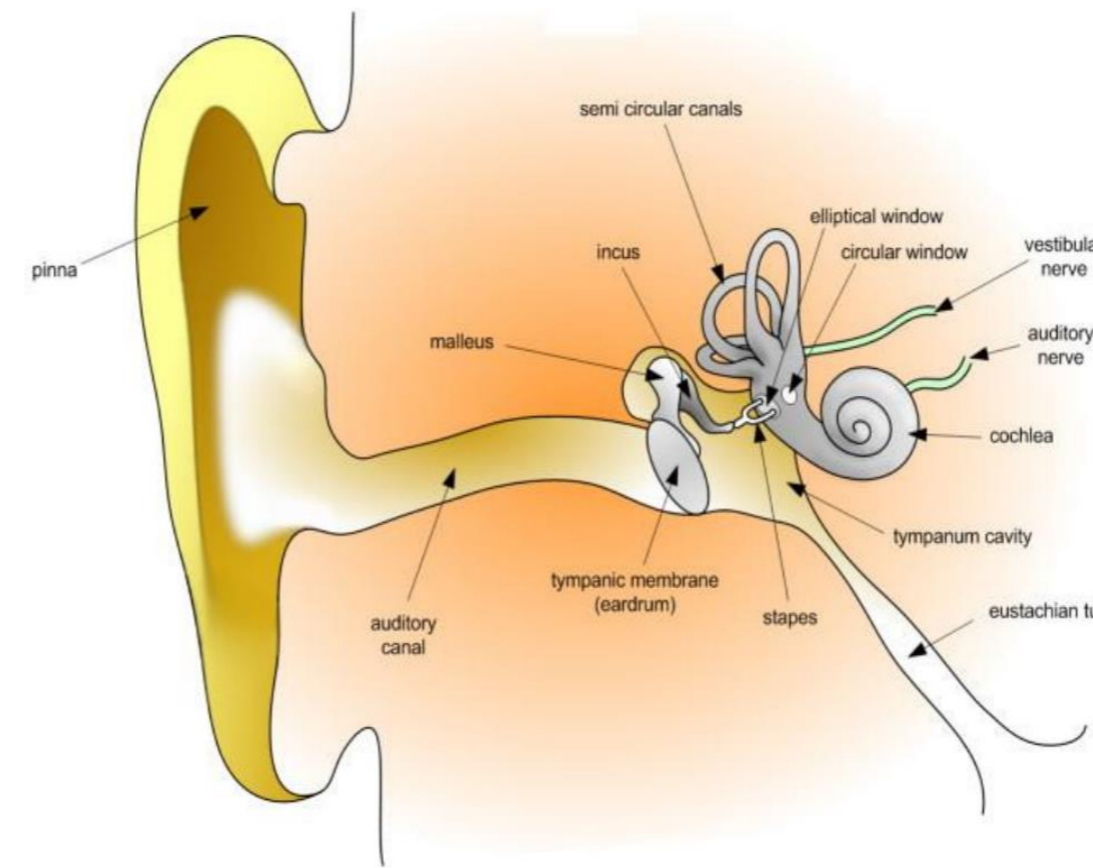
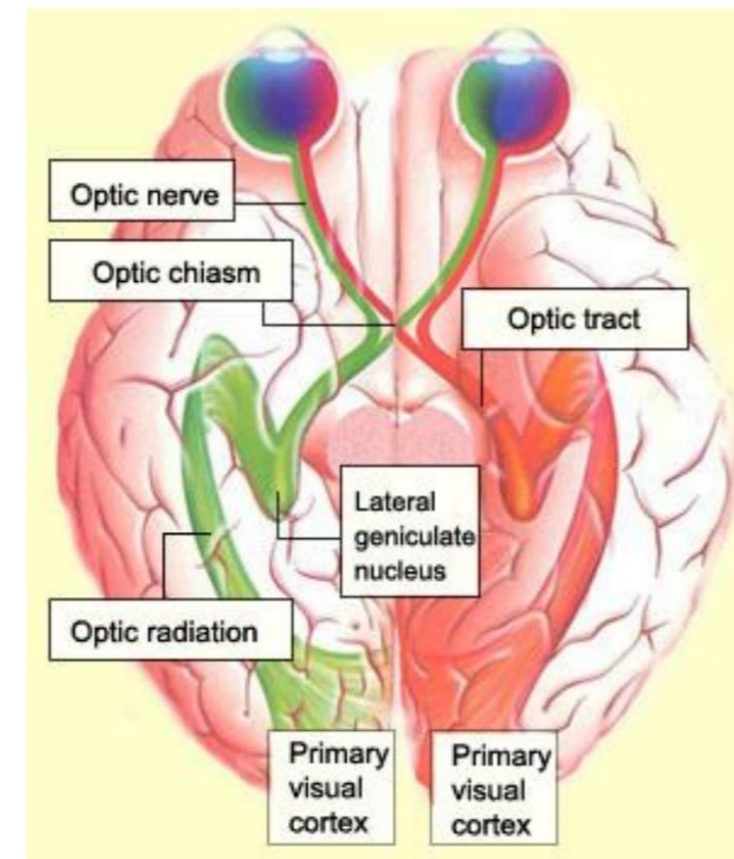
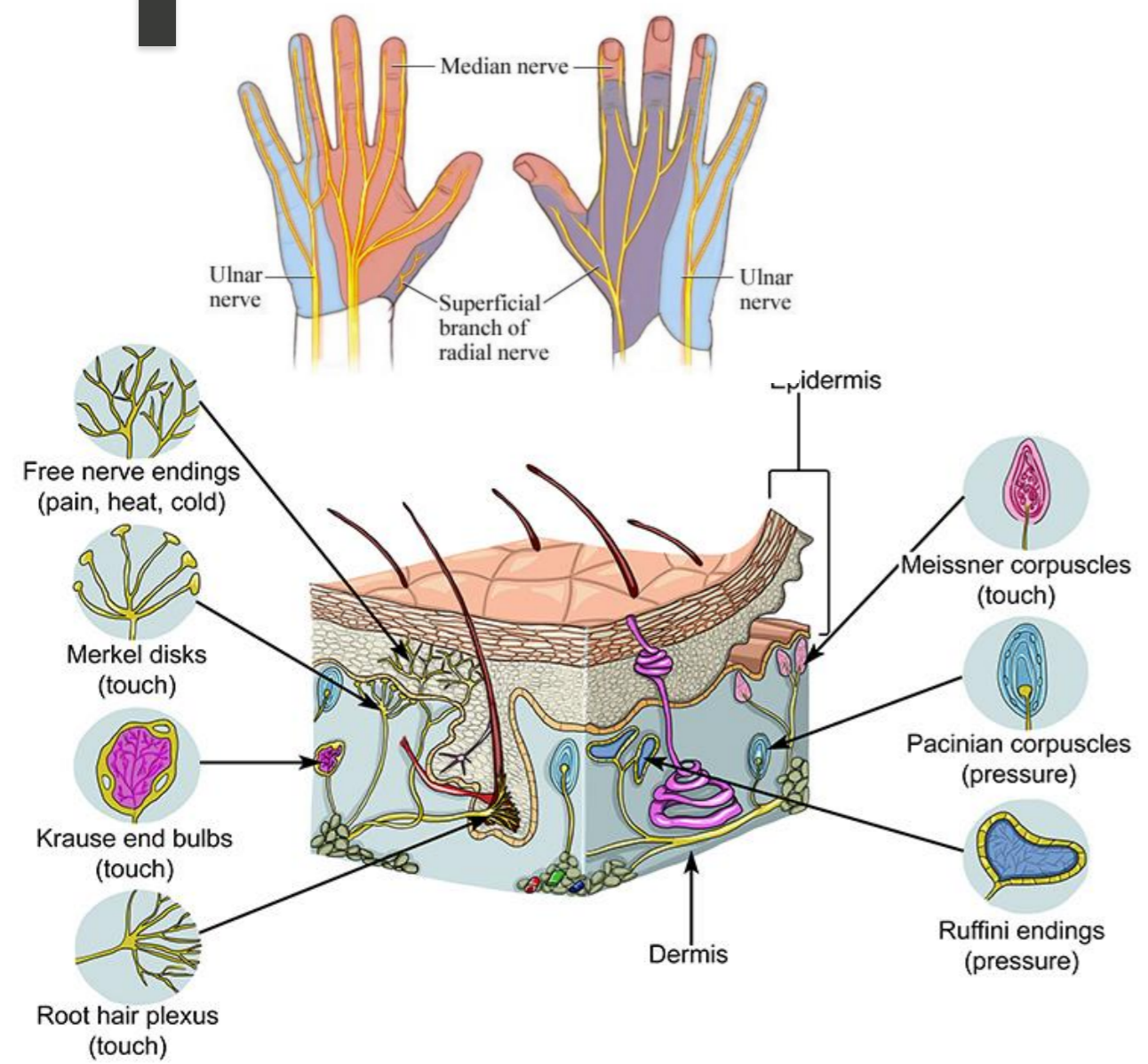
# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

## SENSING



# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

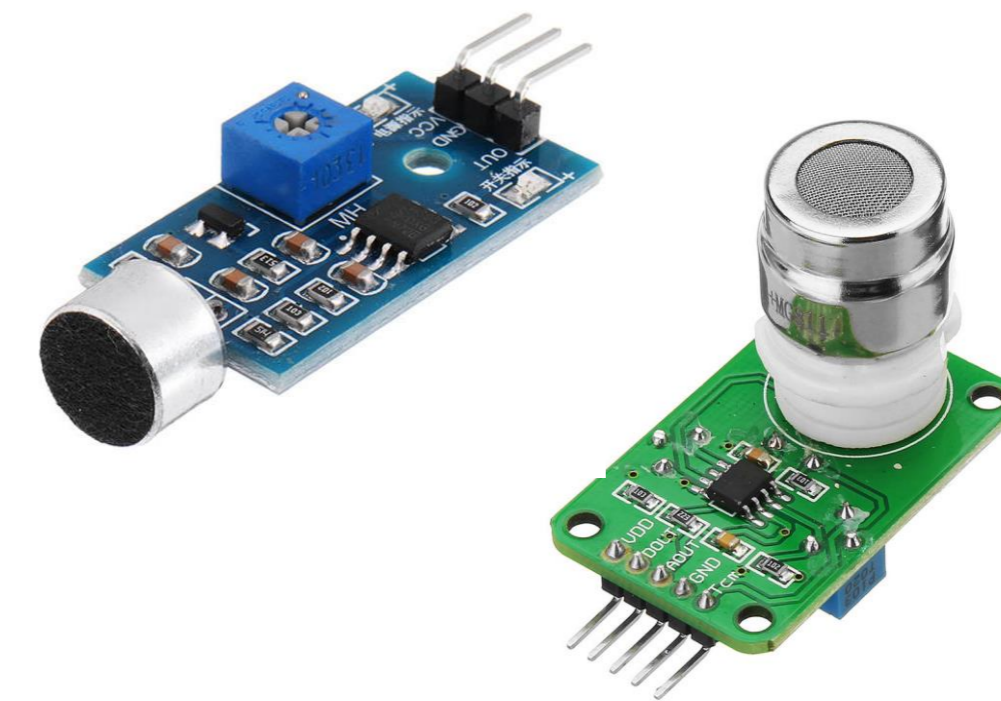
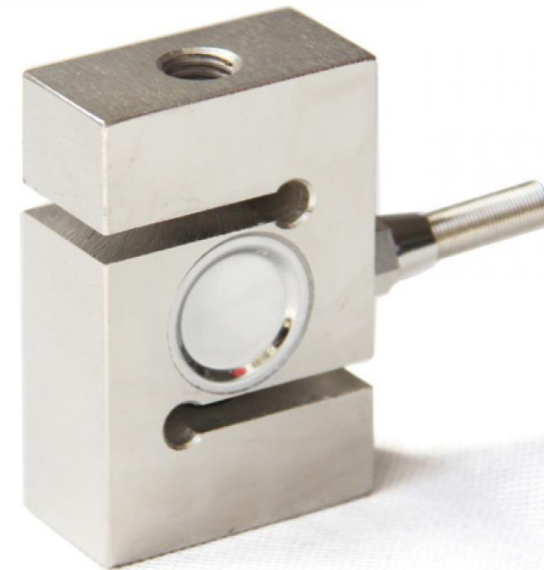
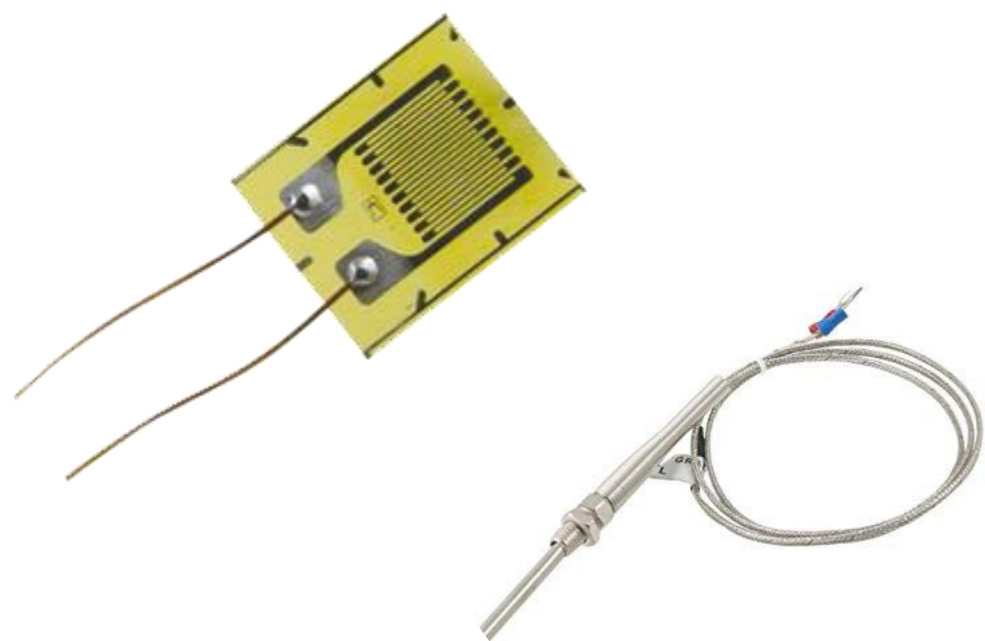
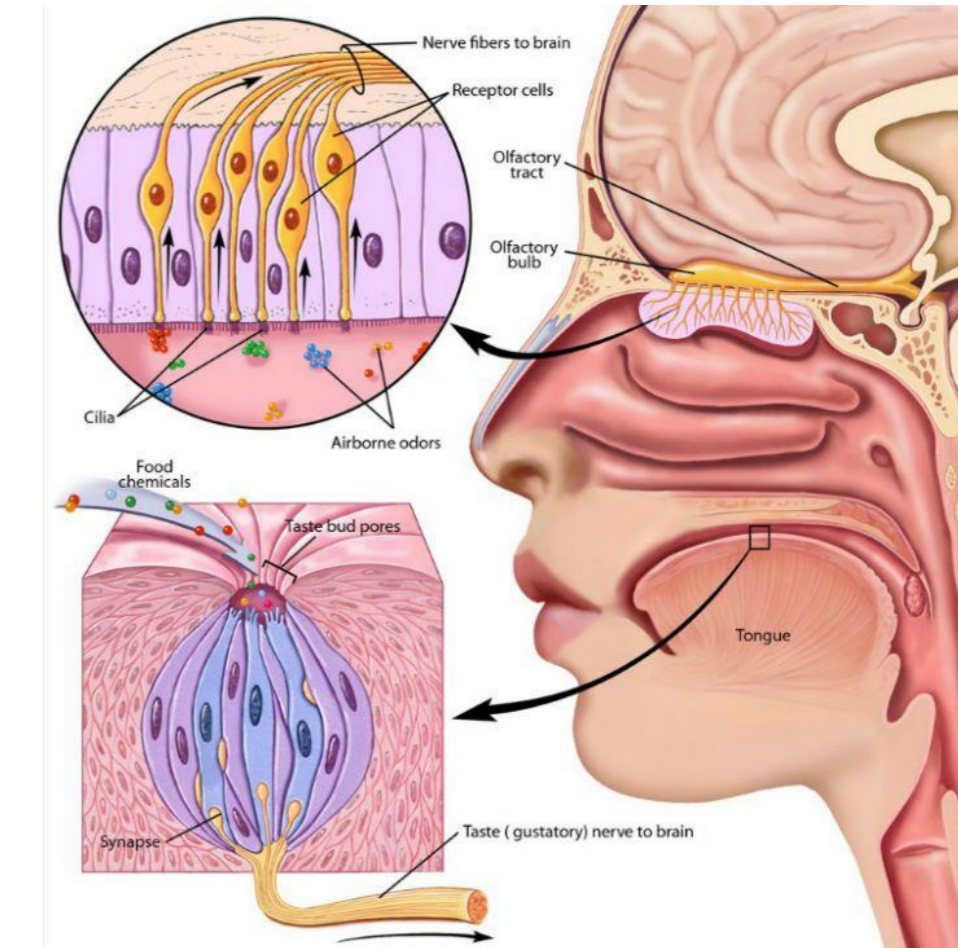
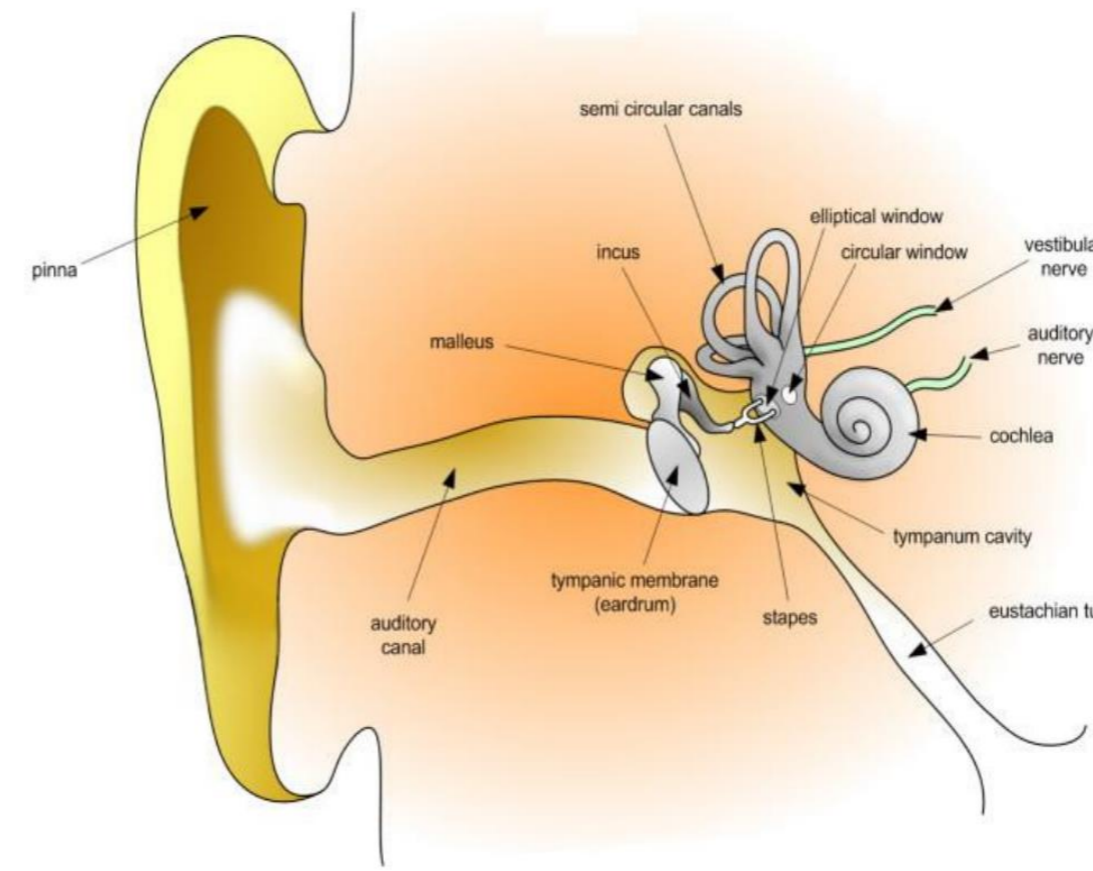
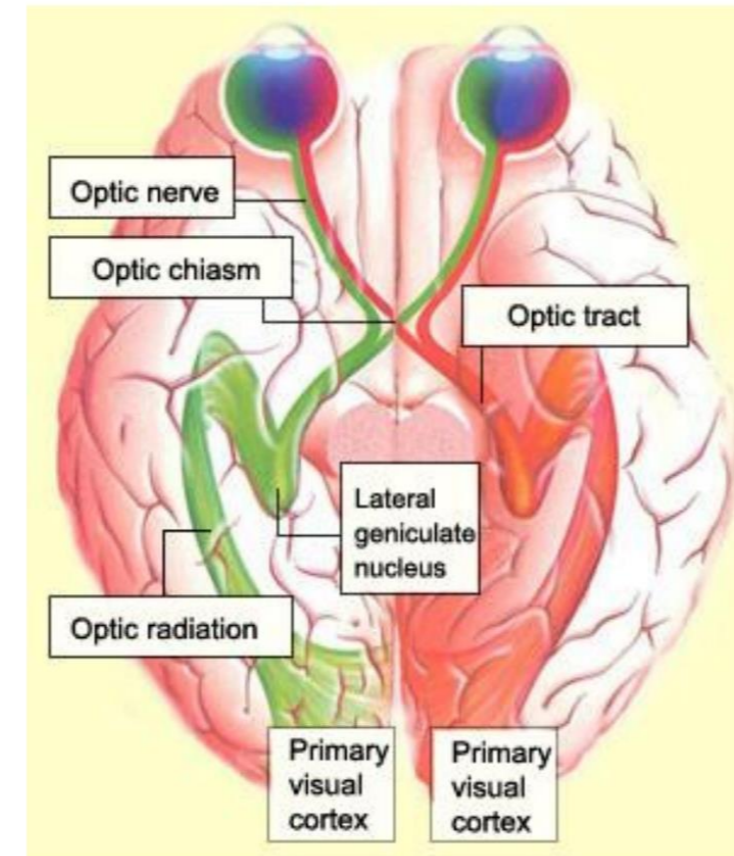
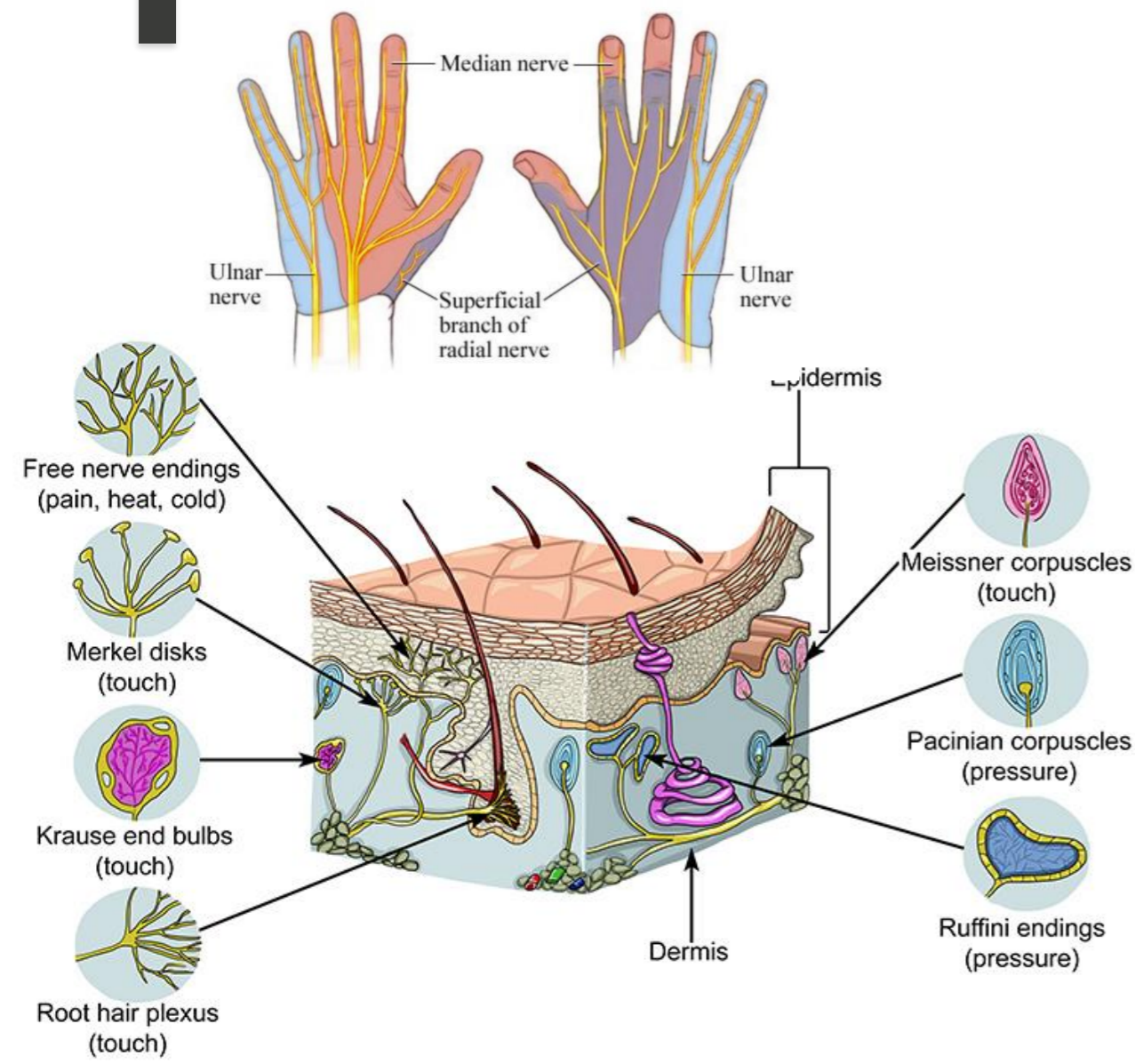
## SENSING



- ❖ *Long-term/permanent*
- ❖ *Automated*
- ❖ *Aggregated (it combines heterogeneous sensing solutions)*

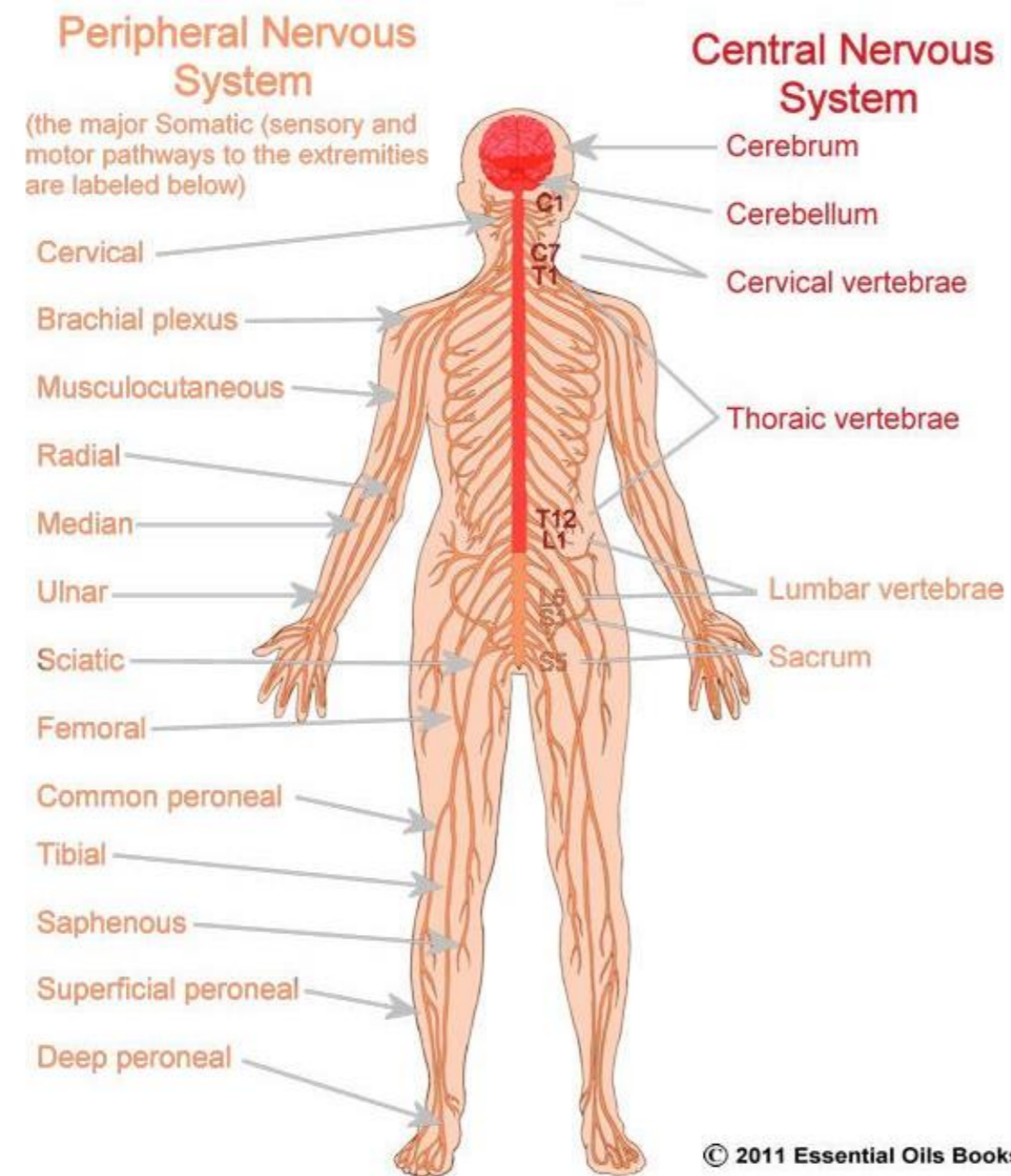
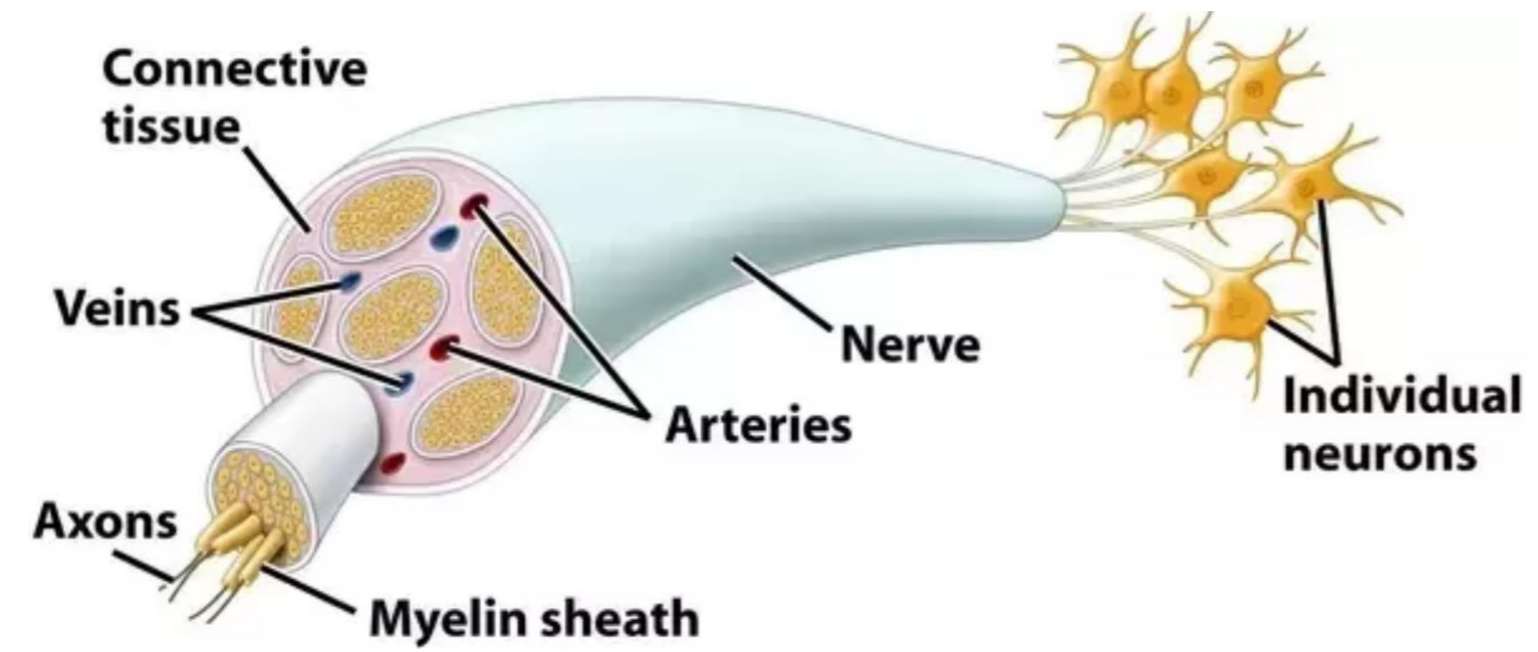
# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

## SENSING



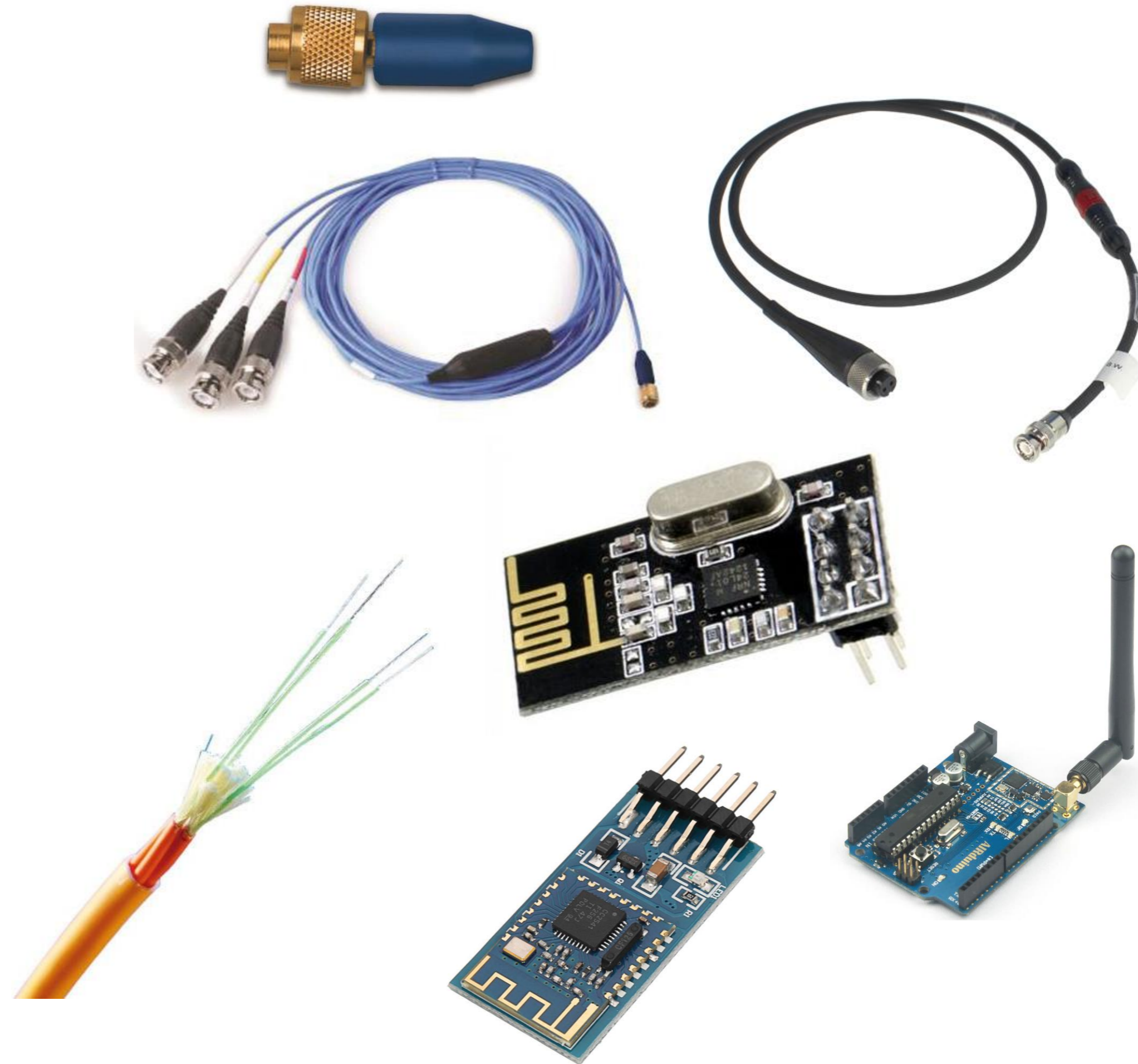
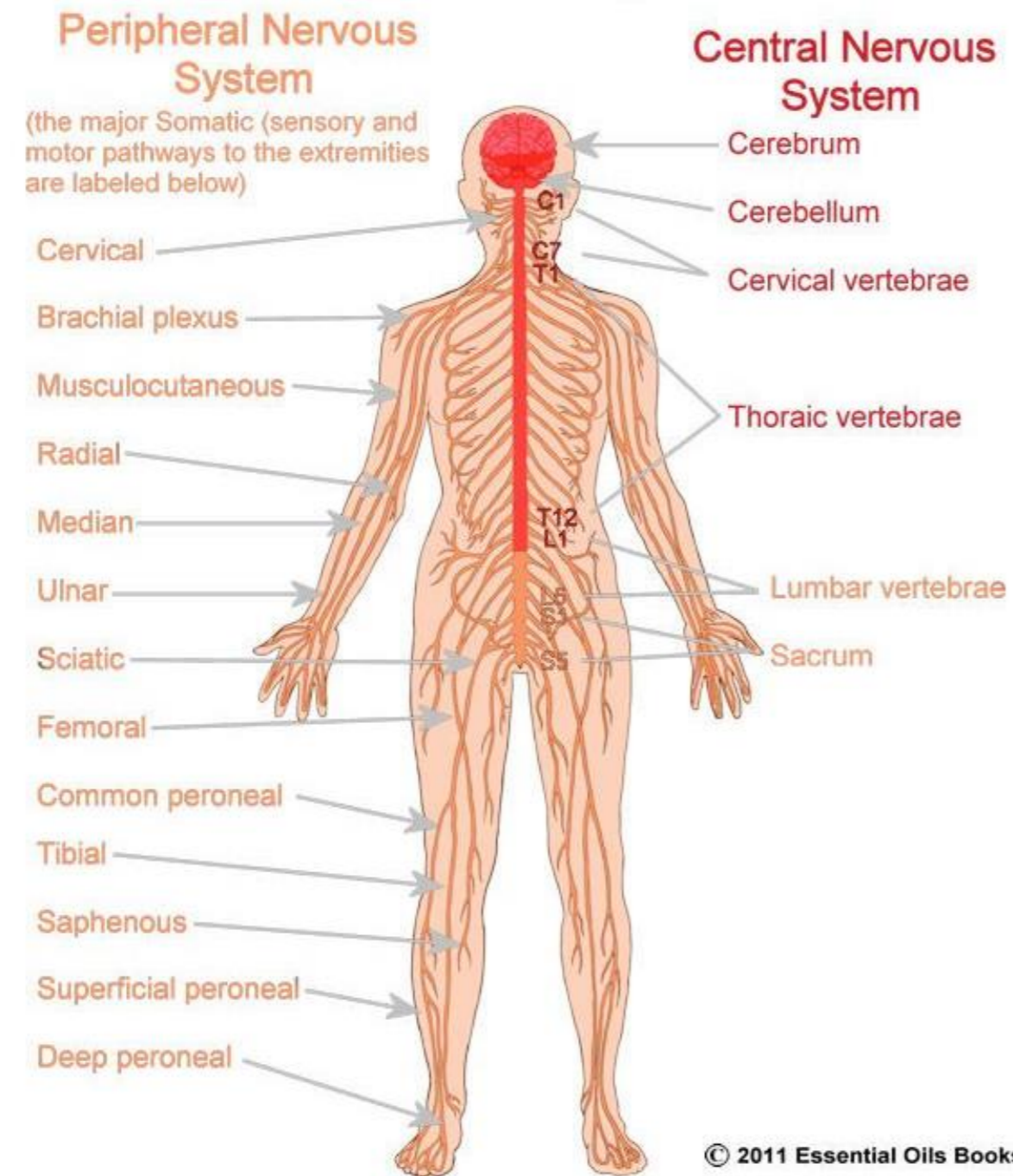
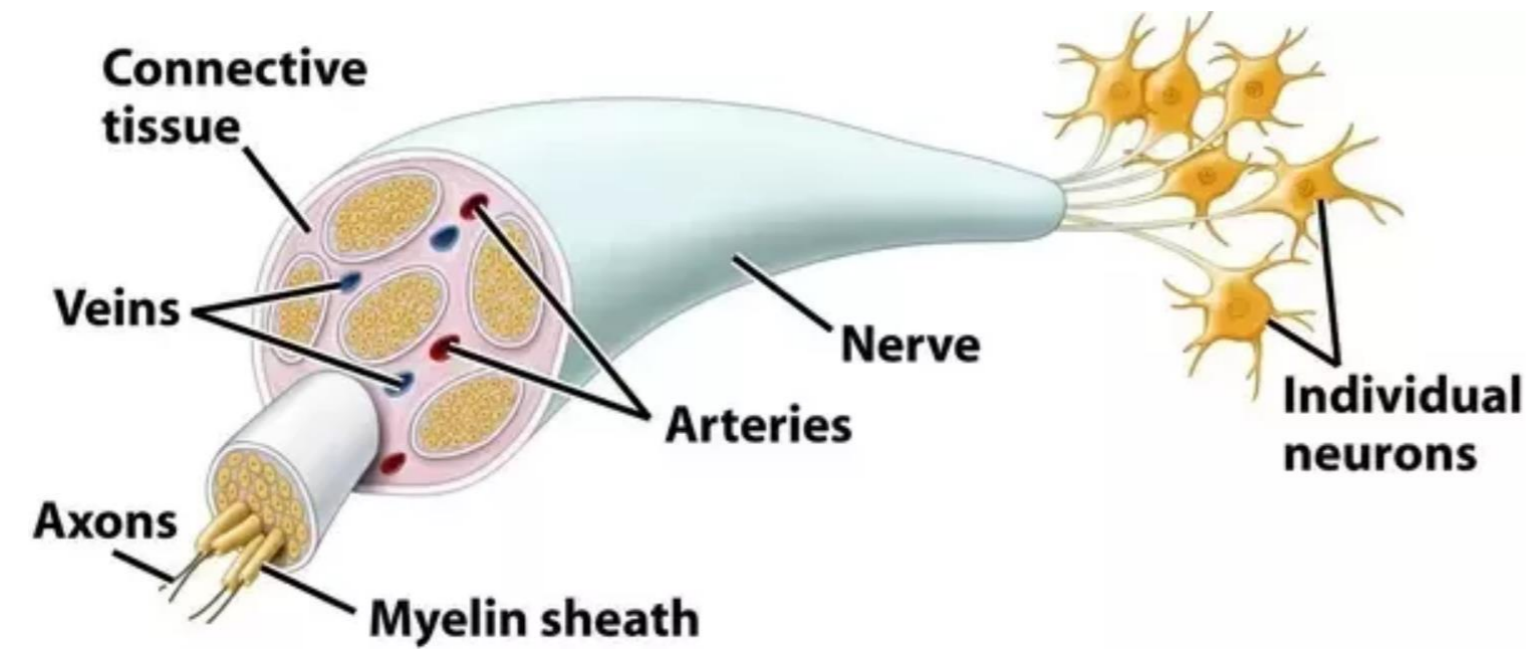
# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

## DATA TRANSMISSION



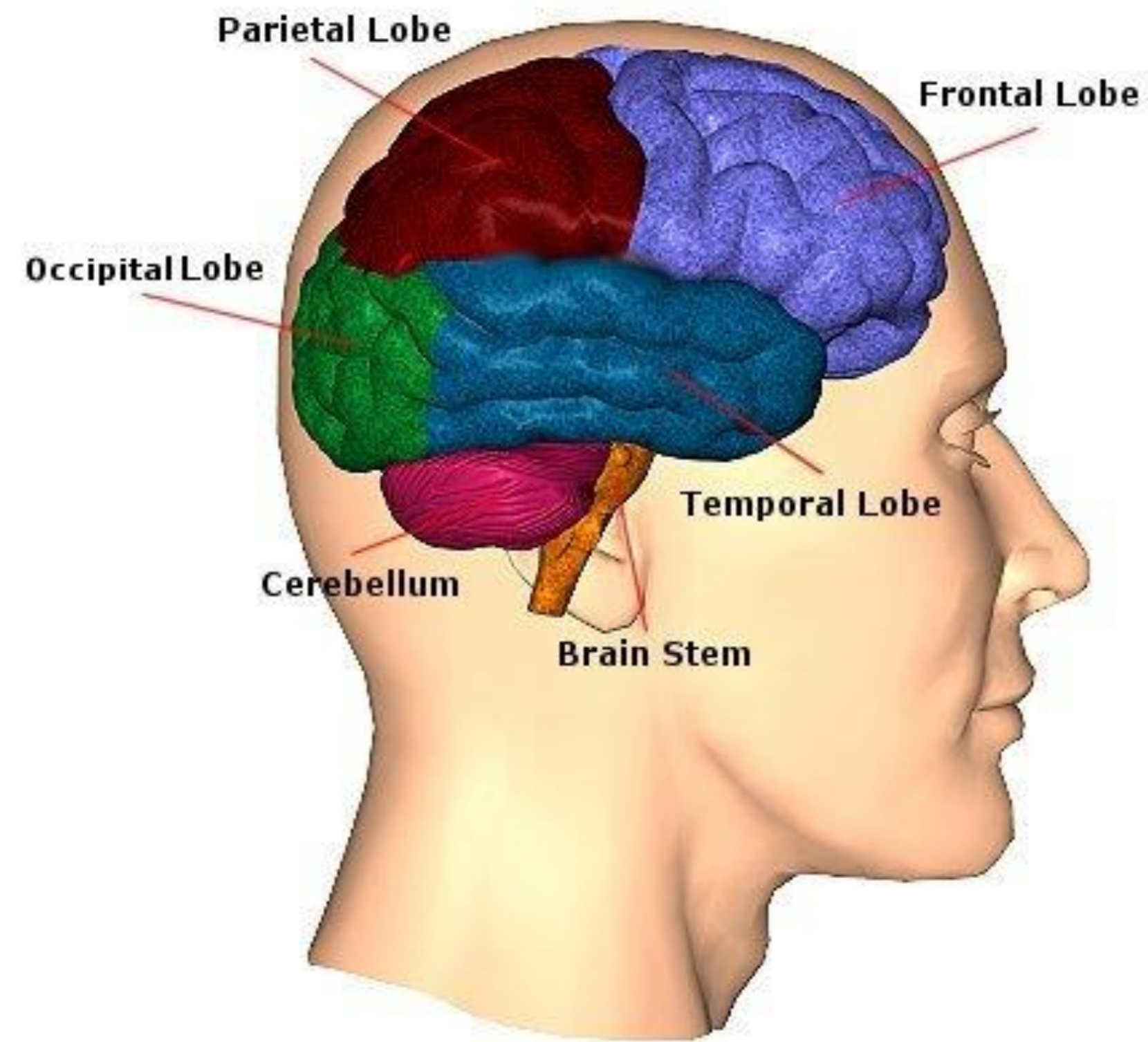
# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

## DATA TRANSMISSION

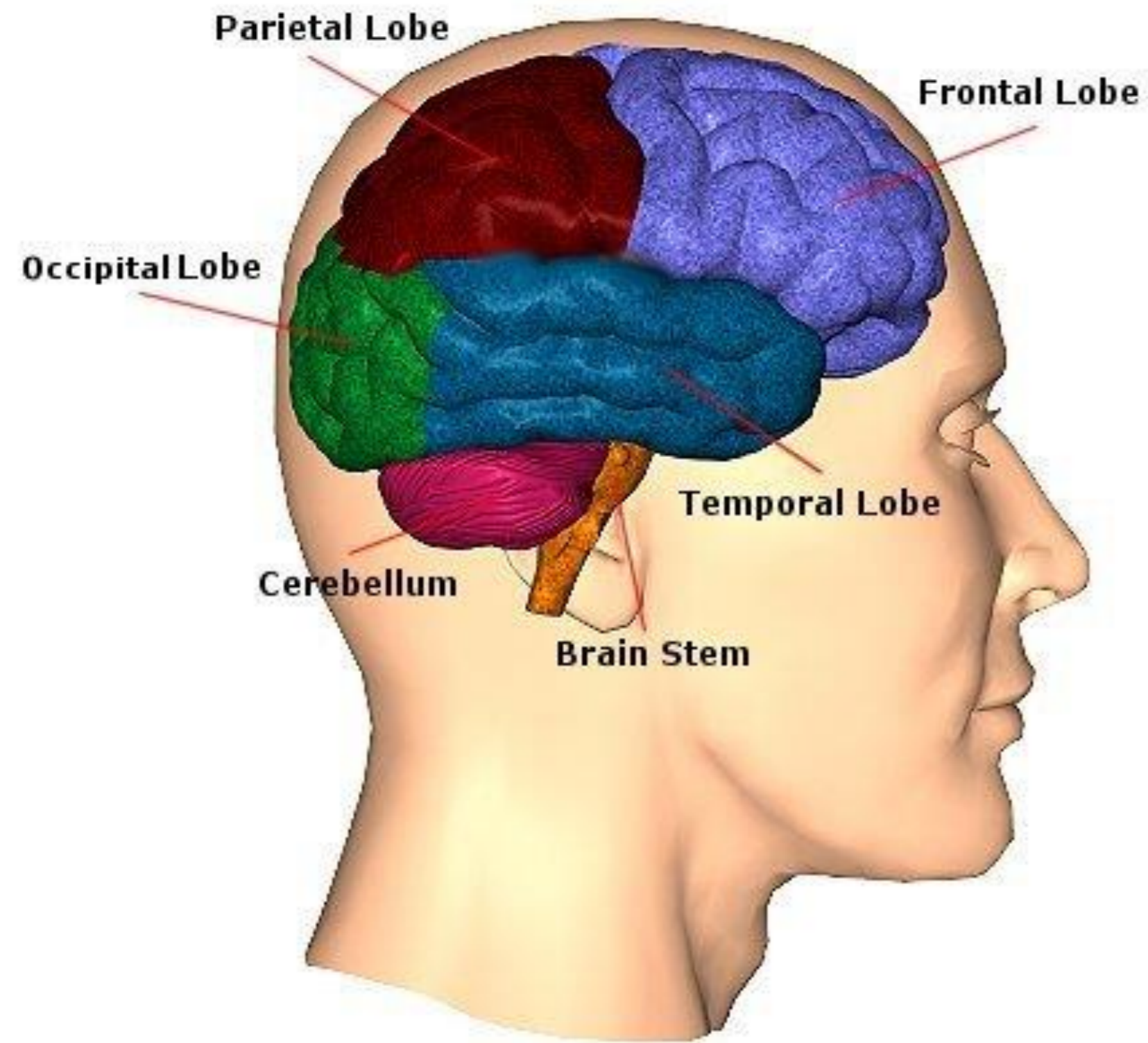


# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

DATA ACQUISITION  
(DAQs)



# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

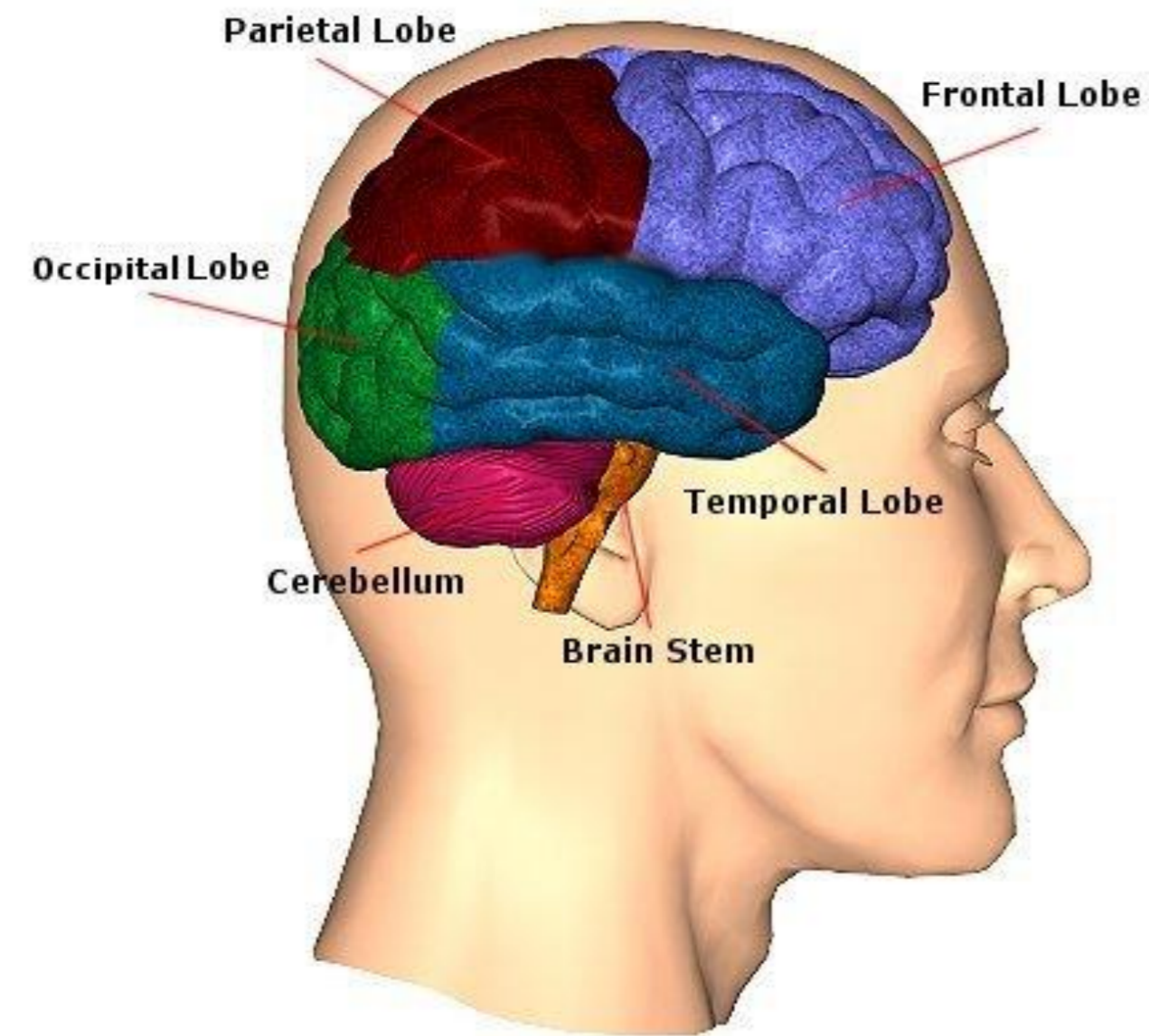


## DATA ACQUISITION (DAQs)



# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

DIAGNOSIS, PROGNOSIS,  
DECISION-MAKING



- ❖ *Diagnosis*
- ❖ *Prognosis*
- ❖ *Decision-making*





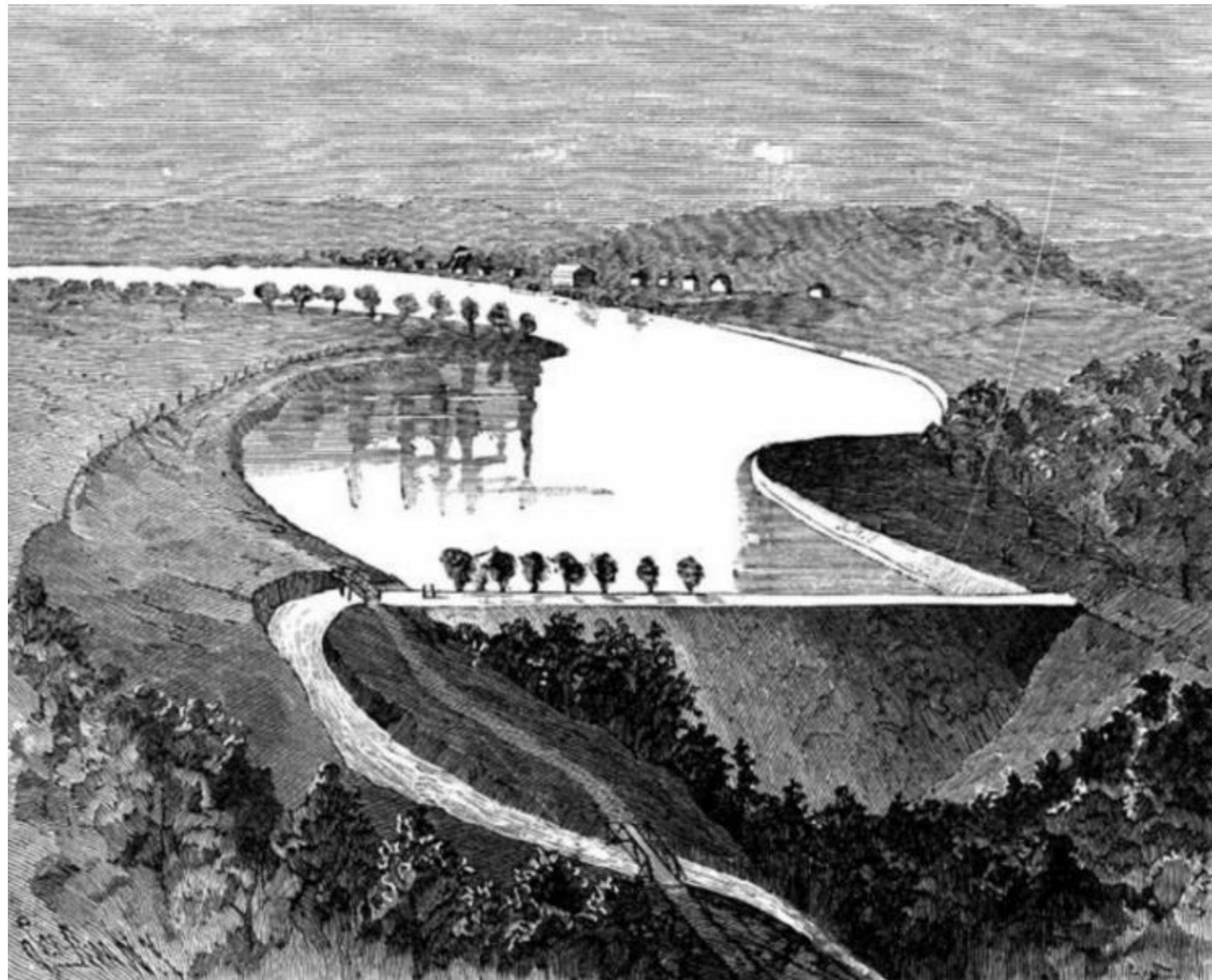


# Historia del SHM.



# Historia del SHM

South Fork Dam - The Johnstown Flood (1889)



## Historia del SHM



Tacoma Narrows, WA (1940)



<https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>



# Historia del SHM

Clifton Bridge (2015)



<https://www.youtube.com/watch?v=4we-3tplppw>

Nürnbergers stadium (2016)



<https://www.youtube.com/watch?v=X50qwgBuXpY>



# Historia del SHM

Kobe (1995)



# Historia del SHM

L'Aquila (2009)



# Historia del SHM



Morandi Bridge collapse (2018)





#IRAN #IMPEACHMENT FRANCE AFRICA CULTURE TV SHOWS FIGHT THE FAKE

Europe

## Genoa bridge collapse sounds the alarm on aging infrastructure in Europe



Issued on: 17/08/2018 - 19:24 Modified: 18/08/2018 - 16:55



Piero Cruciatti, AFP | This general view taken on August 15, 2018, shows abandoned vehicles on the Morandi motorway bridge after a section collapsed in the northwestern Italian city of Genoa.







# Motivaciones y retos del SHM.



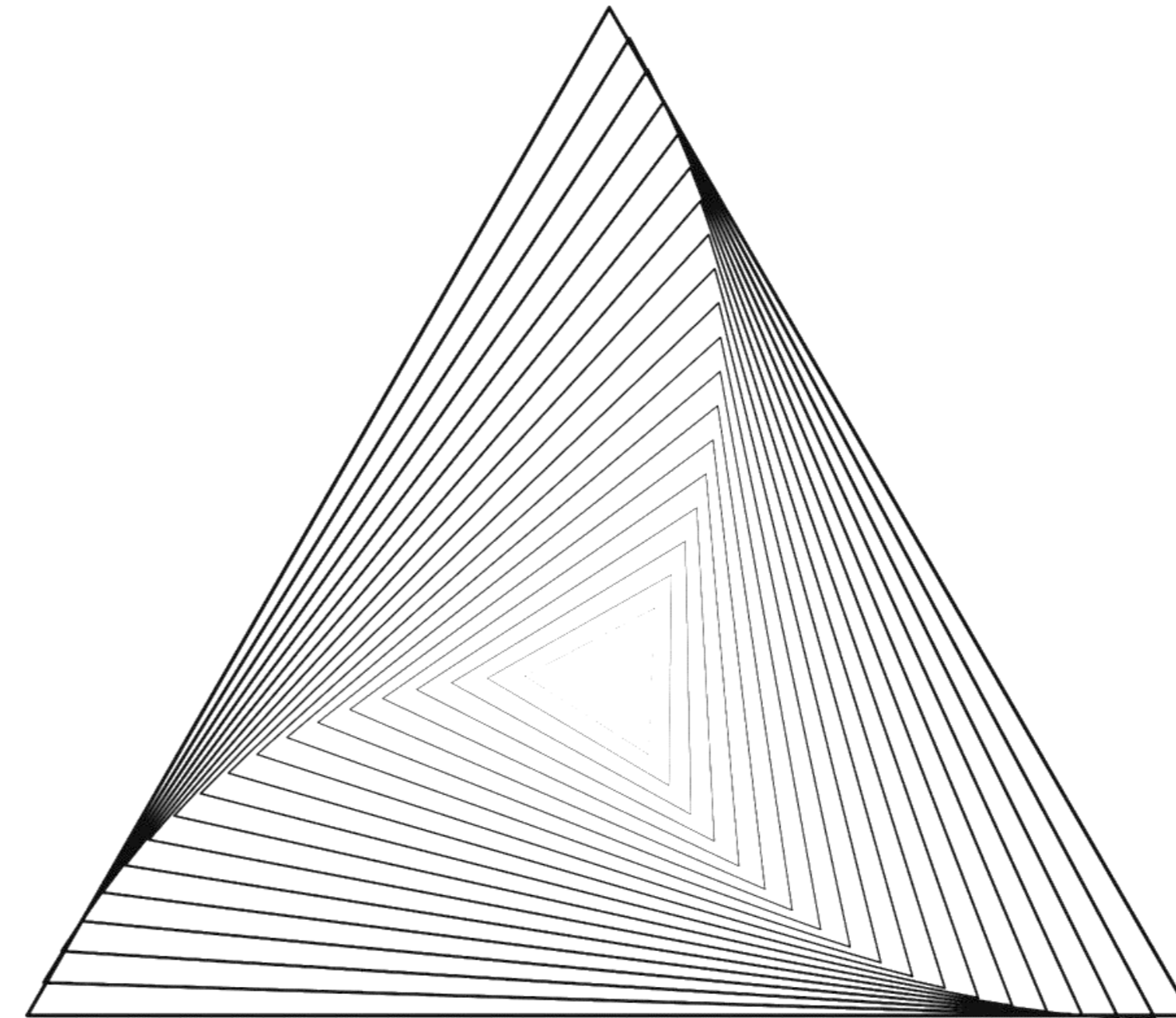
¿Cuáles son las motivaciones para implementar un sistema SHM?

## Motivaciones y retos del SHM

- ❖ Performance based design can be undertaken by recording site-specific environmental conditions such as wind, load demands or temperature.
- ❖ Design assumptions and parameters can be validated with the potential benefit of improving design specifications and guidelines for future similar structures.
- ❖ Inspections can be scheduled on an “as needed” basis informed by structure-specific data when indicated by monitoring data.
- ❖ Performance thresholds can be established to provide warning when prescribed limits are violated, such as for anomalies in loading and response.
- ❖ Real-time safety assessment can be carried out during normal operations or immediately after disasters and extreme events.
- ❖ Accuracy of in-situ inspections can be improved by analysing recorded structural response data.
- ❖ More accurate information can be used for optimally scheduling maintenance and repair activities, leading to cost savings.

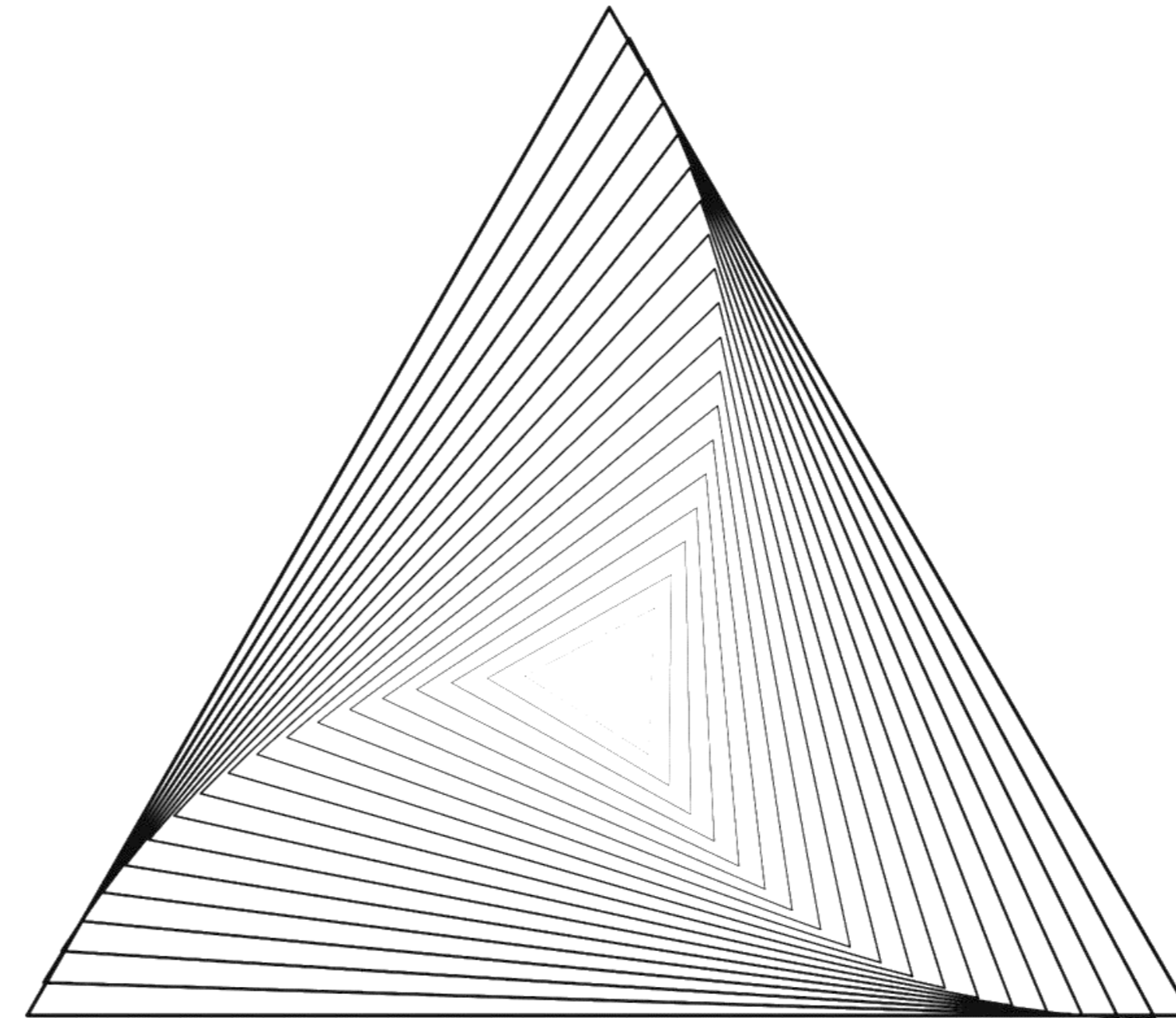
## Motivaciones y retos del SHM

- ❖ Improving safety.
- ❖ Automating inspections.
- ❖ Data for improving designs.



## Motivaciones y retos del SHM

- ❖ Improving safety.
- ❖ Automating inspections.
- ❖ Data for improving designs.



## Motivaciones y retos del SHM

**Improving safety:** optimal use of structures, a minimized downtime, and the avoidance of catastrophic failures.

Aloha Airlines Flight 243 (Boeing 737) (1988)



I-95's Mianus River Bridge collapse, Greenwich, Connecticut (1983)



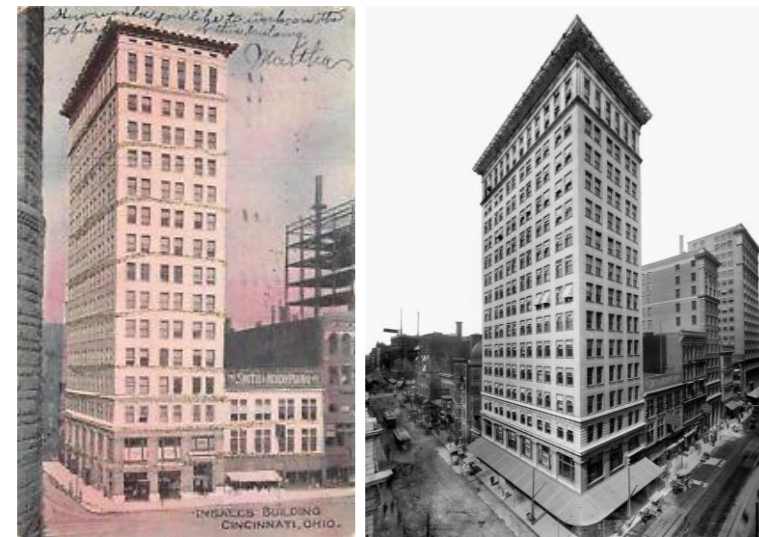
# Motivaciones y retos del SHM



- 1853 – The French industrialist François Coignet built the first reinforced concrete structure, a four-story house in Paris.



- 1875 – Joseph Monier built the first reinforced concrete bridge, the Chazalet Bridge (14 meters long span).



- 1903 – Ingalls Building. The world's first reinforced concrete skyscraper (16-story building, 54 meters tall, USA).



- 1936 – Franz Dischinger designed the first post-tensioned concrete bridge (Aue/Saxony).

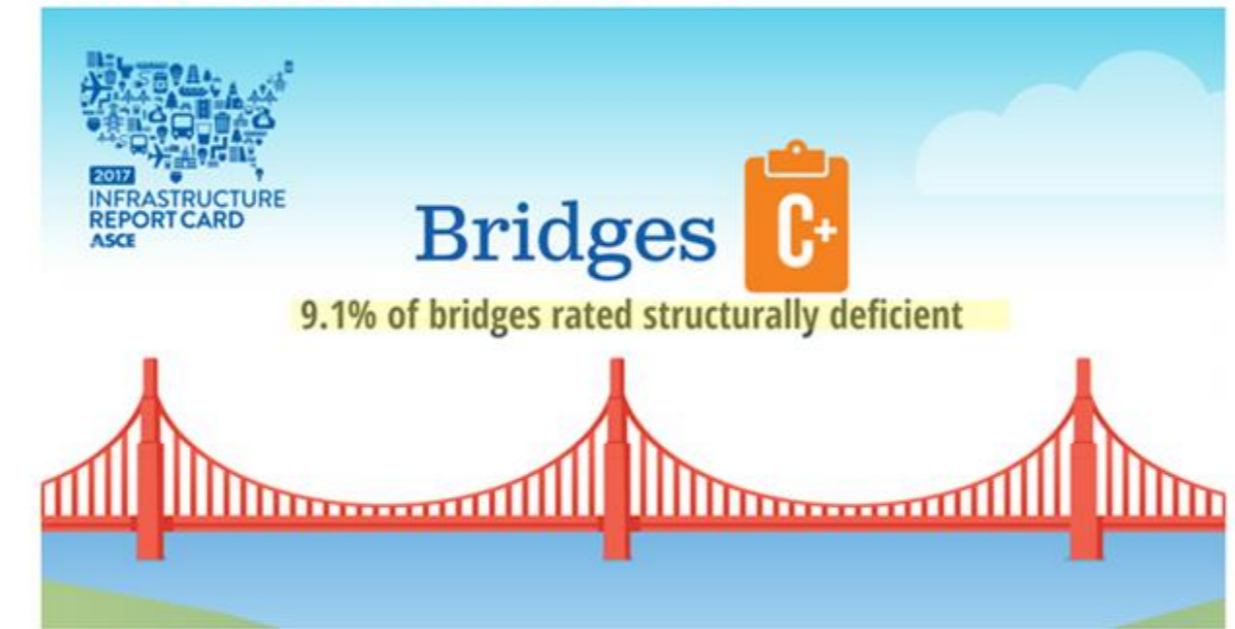


- 1938 - Eugène Freyssinet built the first pre-stressed concrete bridge (Algeria)
- 1940 - Oelde Bridge (Germany)

# Motivaciones y retos del SHM



## 2017 INFRASTRUCTURE REPORT CARD



**SUMMARY**  
 The U.S. has 614,387 bridges, almost four in 10 of which are 50 years or older. 56,007 — 9.1% — of the nation's bridges were structurally deficient in 2016, and on average there were 188 million trips across a structurally deficient bridge each day. While the number of bridges that are in such poor condition as to be considered structurally deficient is decreasing, the average age of America's bridges keeps going up and many of the nation's bridges are approaching the end of their design life. The most recent estimate puts the nation's backlog of bridge rehabilitation needs at \$123 billion.

## RAC Foundation Bridge maintenance backlog grows



£6.7 billion needed to clear workload

Analysis by the RAC Foundation of data for the 2017-18 financial year shows that an estimated £6.7 billion is needed to carry out all the work that would be required on the tens of thousands of local authority bridges (defined as structures over 1.5m in span).

## Corrosion Costs by Industry Sector

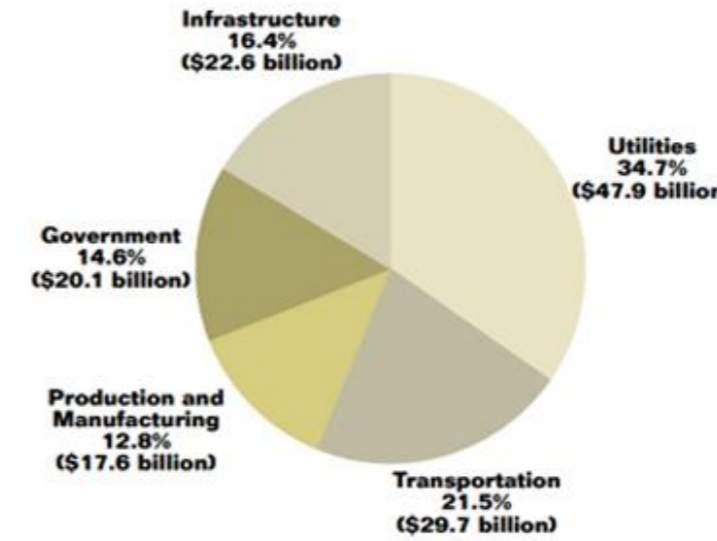


The U.S. economy was divided into five major sector categories for analysis in the corrosion cost study, and these were further broken down into 26 sectors. The categories were infrastructure, production and manufacturing, government, transportation, and utilities. When added together, the total cost of corrosion in the U.S. sectors was \$137.9 billion, extrapolated to the total U.S. economy at an annual cost of corrosion of \$22.6 billion (Figure 2).

### Infrastructure

The aging infrastructure is one of the most serious problems facing society today. In past decades, corrosion professionals focused primarily on new construction—specifying materials and designing corrosion prevention and control systems for buildings, bridges, and other infrastructure. In this study, the emphasis is on maintaining and extending the life of these valuable assets. Infrastructure in this study was divided into the following sectors: highway bridges, gas and liquid transmission pipelines, waterways and ports, hazardous materials storage, airports, and railroads. The annual direct cost in this category was estimated to be \$22.6 billion (Figure 2).

**FIGURE 1 COST OF CORROSION IN INDUSTRY CATEGORIES (\$137.9 BILLION)**



### GAS AND LIQUID TRANSMISSION PIPELINES

Corrosion is the primary factor affecting the longevity and reliability of pipelines that transport crucial energy sources throughout the nation. There are more than 528,000 km (328,000 miles) of natural gas transmission and gathering pipelines, 119,000 km (74,000 miles) of crude transmission and gathering pipelines, and 132,000 km (82,000 miles) of hazardous liquid transmission pipelines. The average annual corrosion-related cost is estimated to be \$2.6 billion, including \$3.8 billion to replace deficient bridges over the next 10 years, \$2 billion for maintenance and capital costs for concrete bridge decks and \$2 billion for their concrete substructures, and \$0.5 billion for maintenance painting of steel bridges. Indirect costs to the user, such as traffic delays and lost productivity, were estimated to be as high as 10 times that of direct corrosion costs.

Approximately 15% of these bridges are structurally deficient because of corroded steel and steel reinforcement. Annual direct cost estimates total \$8.3 billion, including \$3.8 billion to replace deficient bridges over the next 10 years, \$2 billion for main-

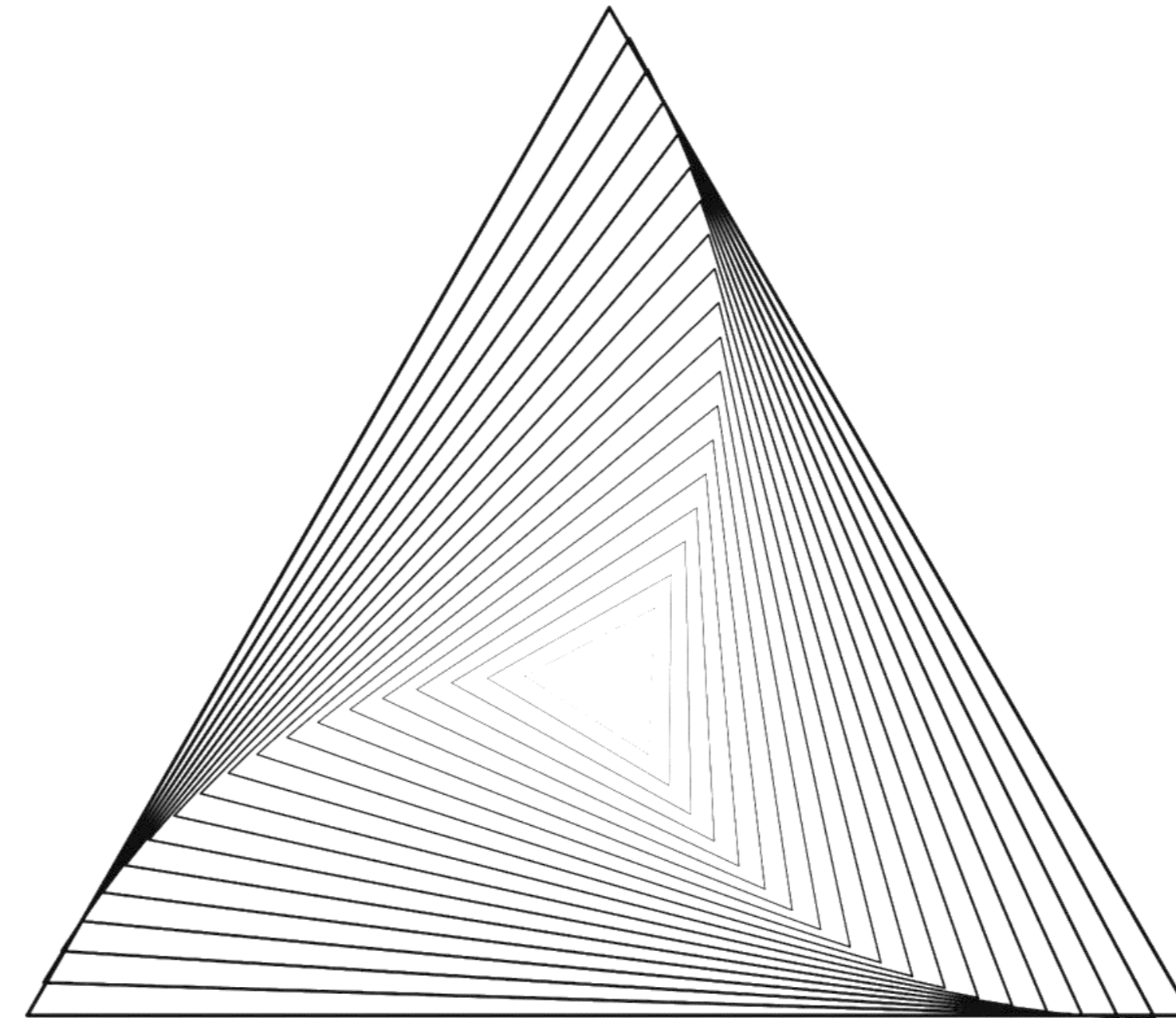


There are approximately 583,000 bridges in the U.S. Highway bridges are constructed of concrete, and the other construction materials are steel and steel reinforcement. Approximately 15% of these bridges are structurally deficient because of corroded steel and steel reinforcement. Annual direct cost estimates total \$8.3 billion, including \$3.8 billion to replace deficient bridges over the next 10 years, \$2 billion for maintenance and capital costs for concrete bridge decks and \$2 billion for their concrete substructures, and \$0.5 billion for maintenance painting of steel bridges. Indirect costs to the user, such as traffic delays and lost productivity, were estimated to be as high as 10 times that of direct corrosion costs.



## Motivaciones y retos del SHM

- ❖ Improving safety.
- ❖ Automating inspections.
- ❖ Data for improving designs.



# Motivaciones y retos del SHM

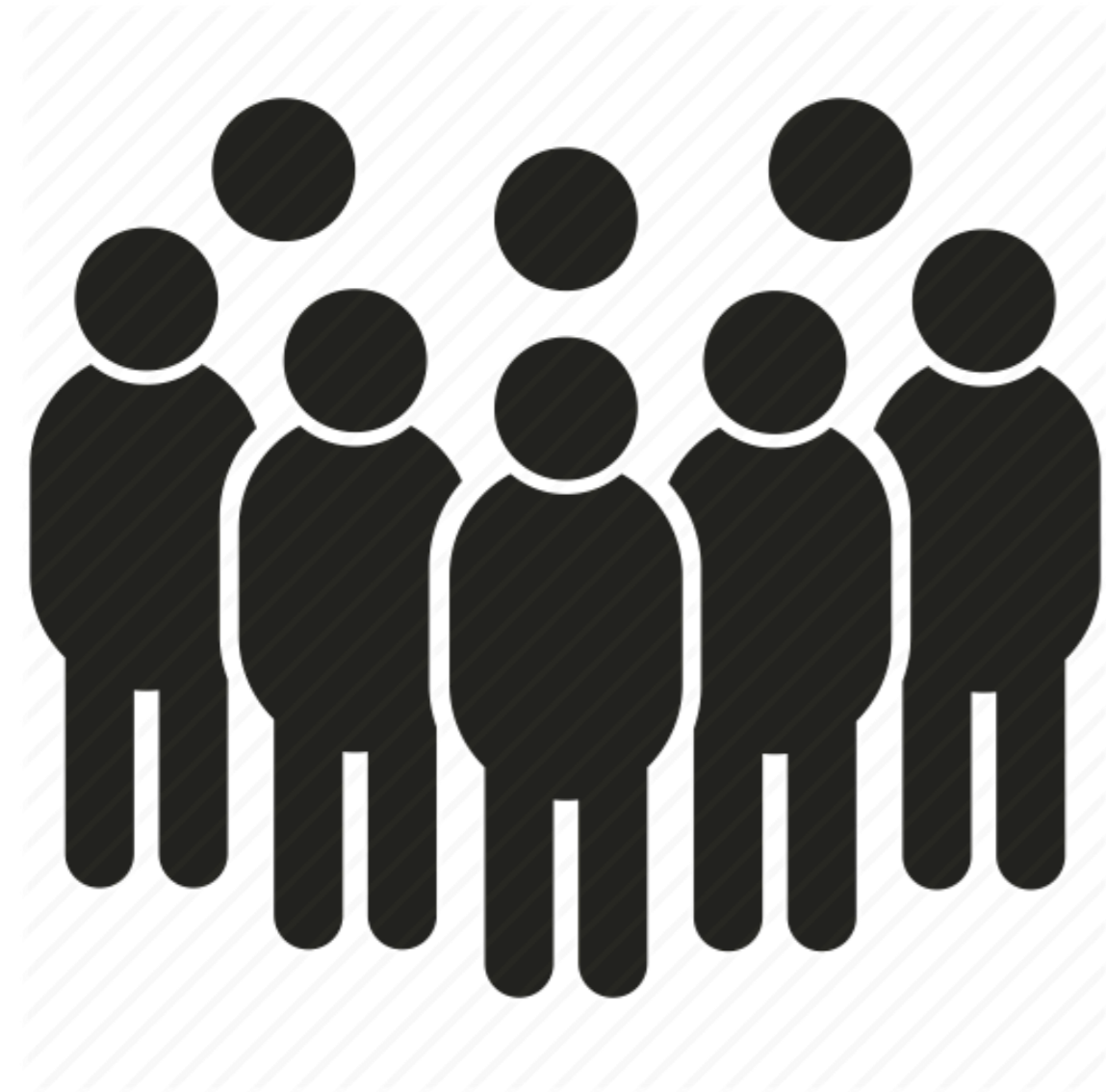
## MAINTENANCE STRATEGIES



Ageing degradation

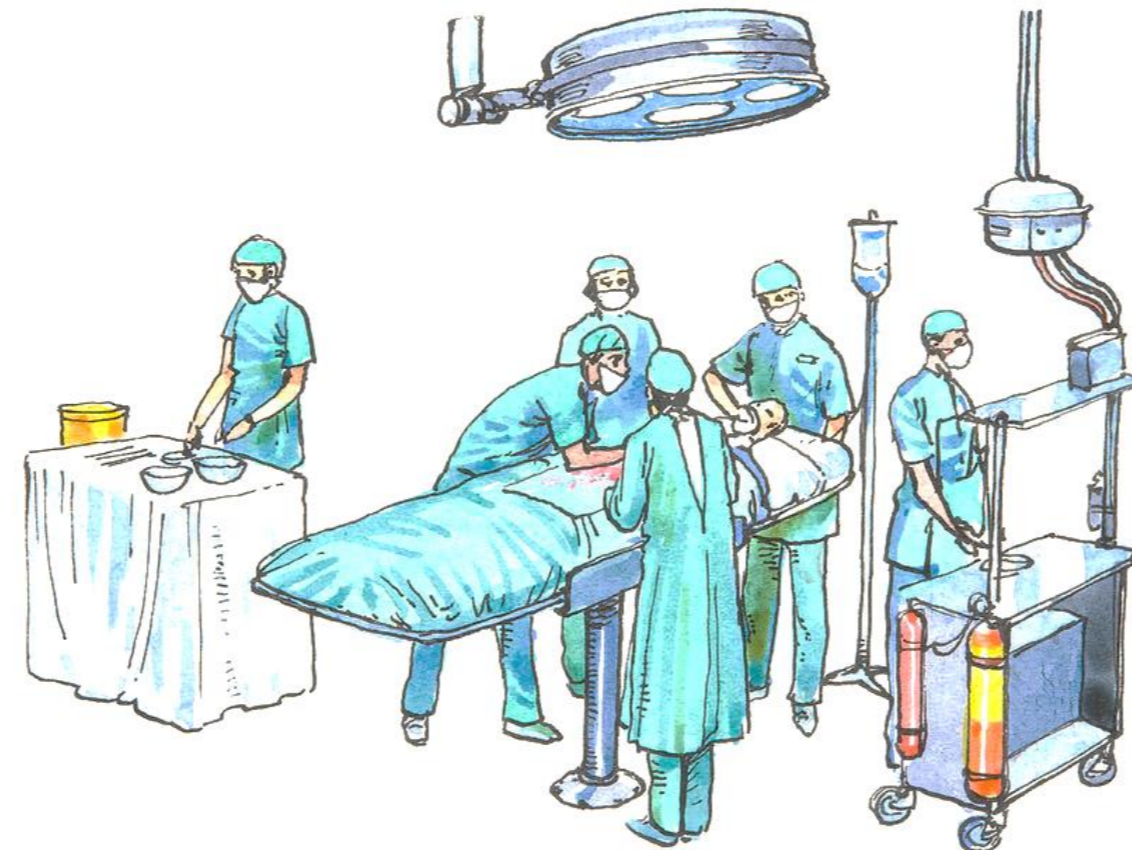
# Motivaciones y retos del SHM

## MAINTENANCE STRATEGIES



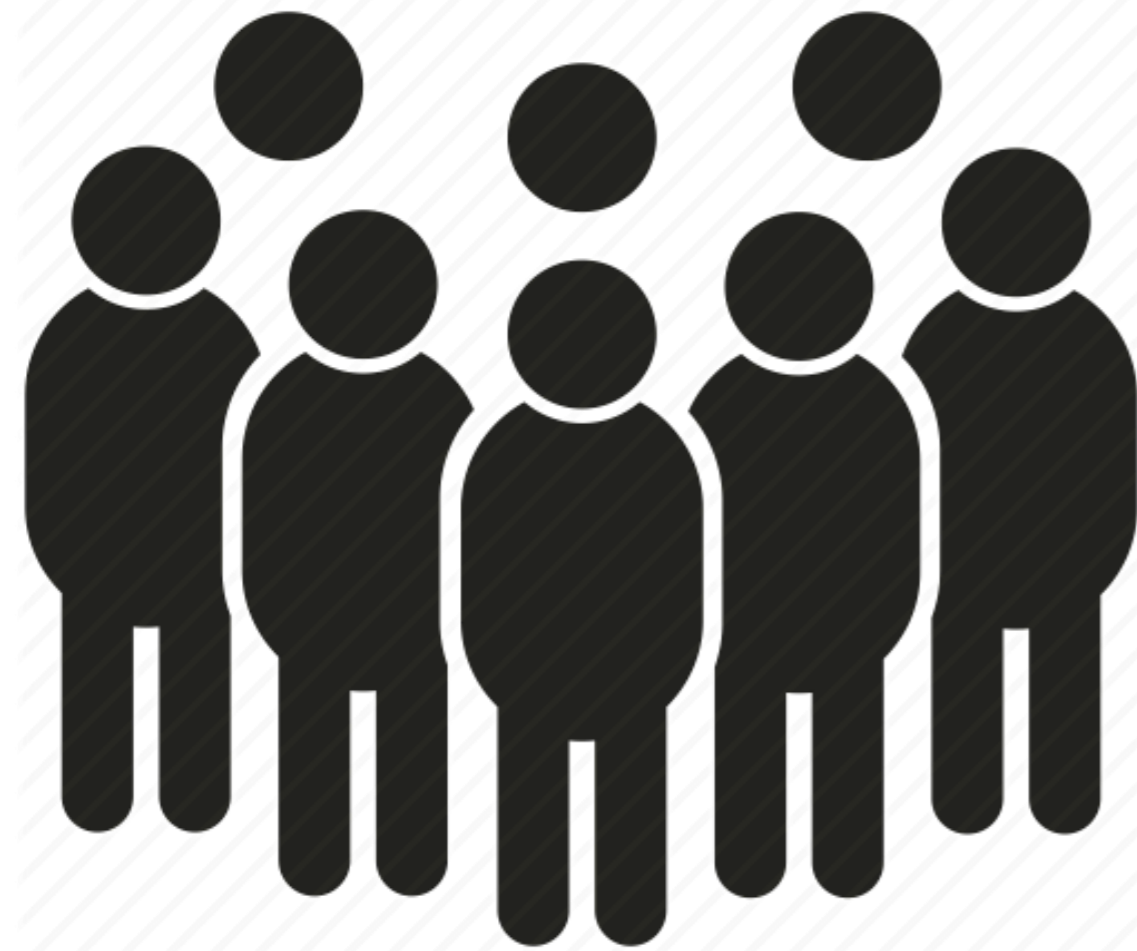
Ageing degradation

## Corrective maintenance



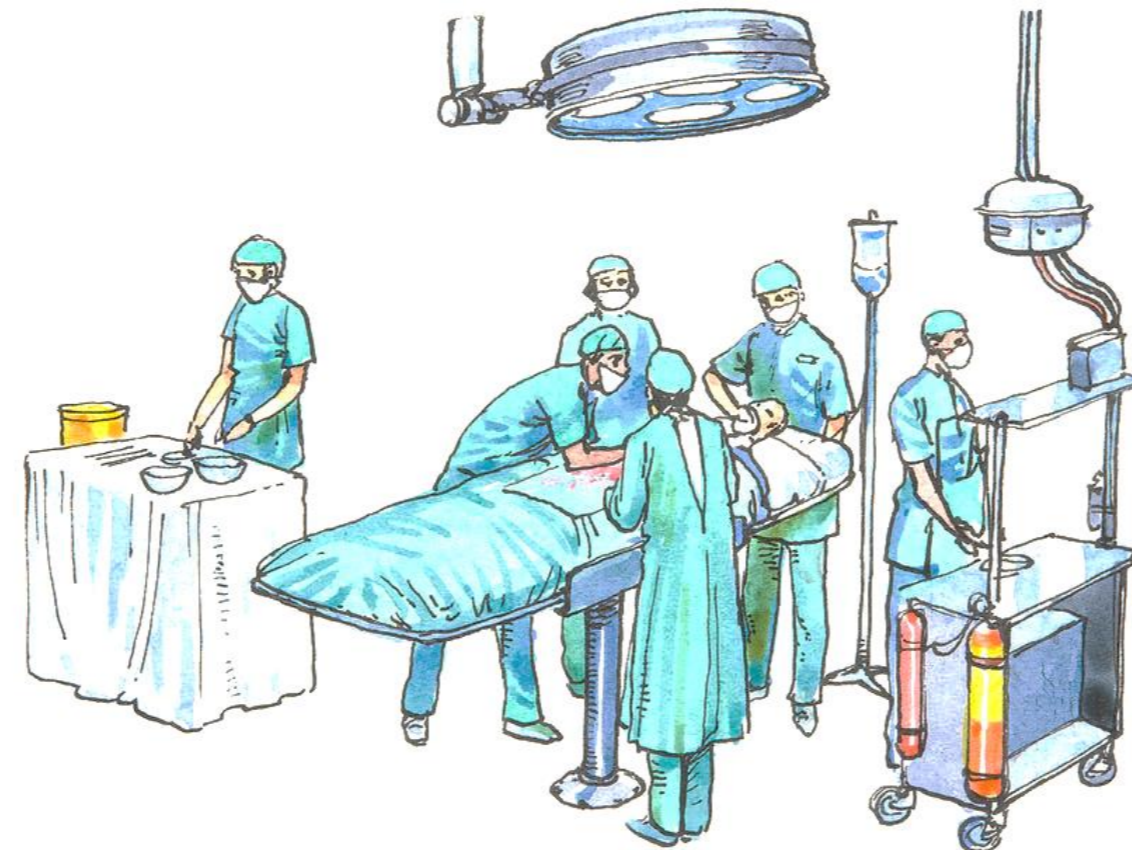
# Motivaciones y retos del SHM

## MAINTENANCE STRATEGIES

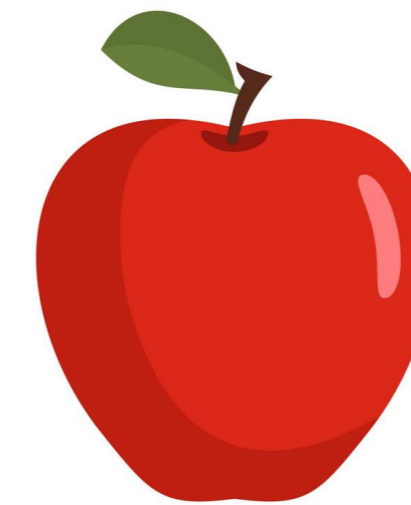


Ageing degradation

Corrective maintenance

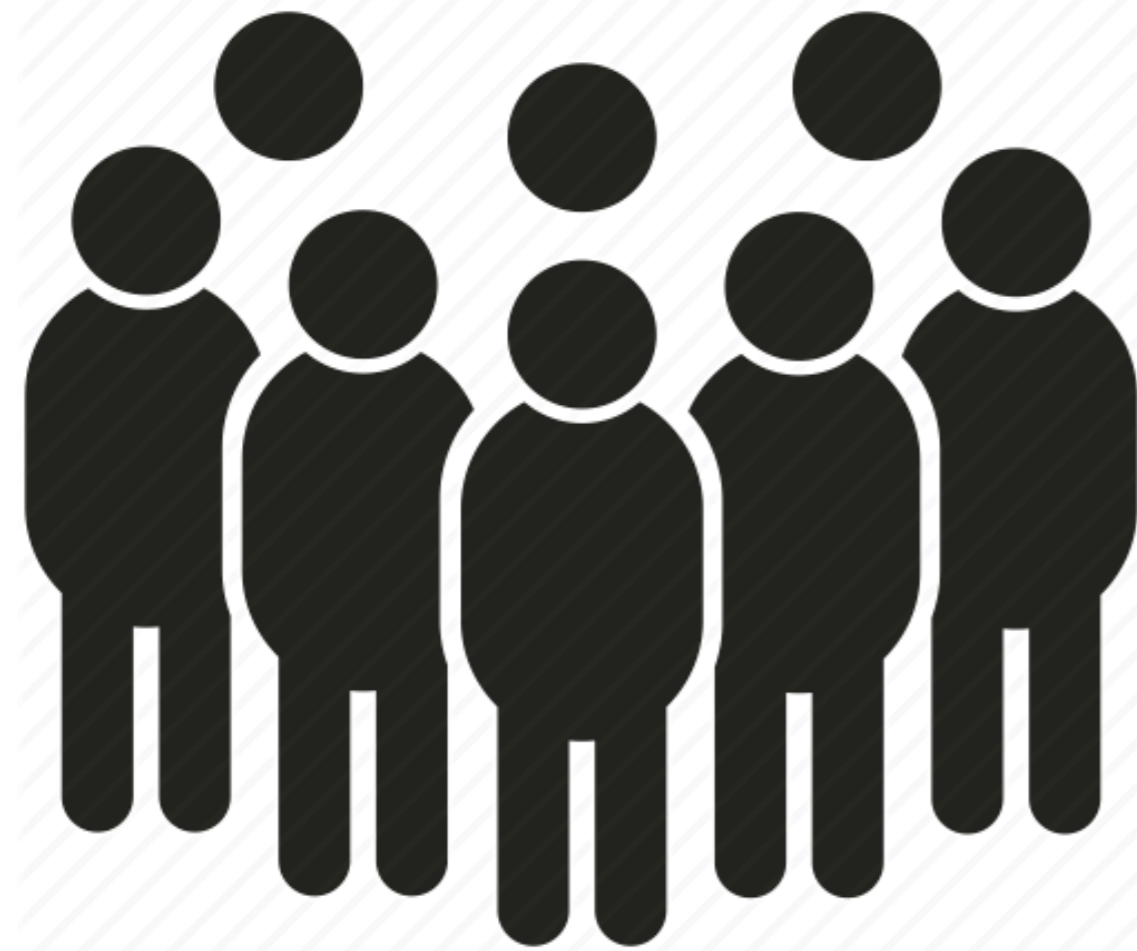


Preventive maintenance



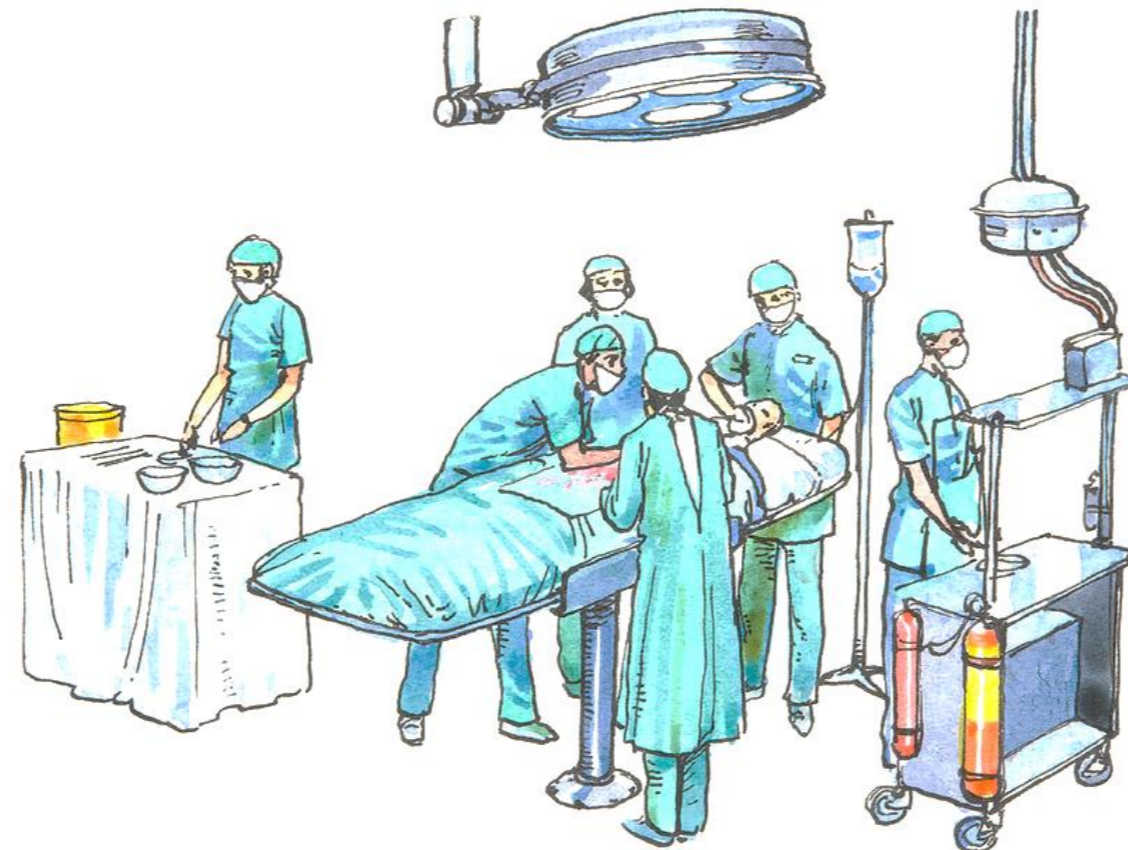
# Motivaciones y retos del SHM

## MAINTENANCE STRATEGIES

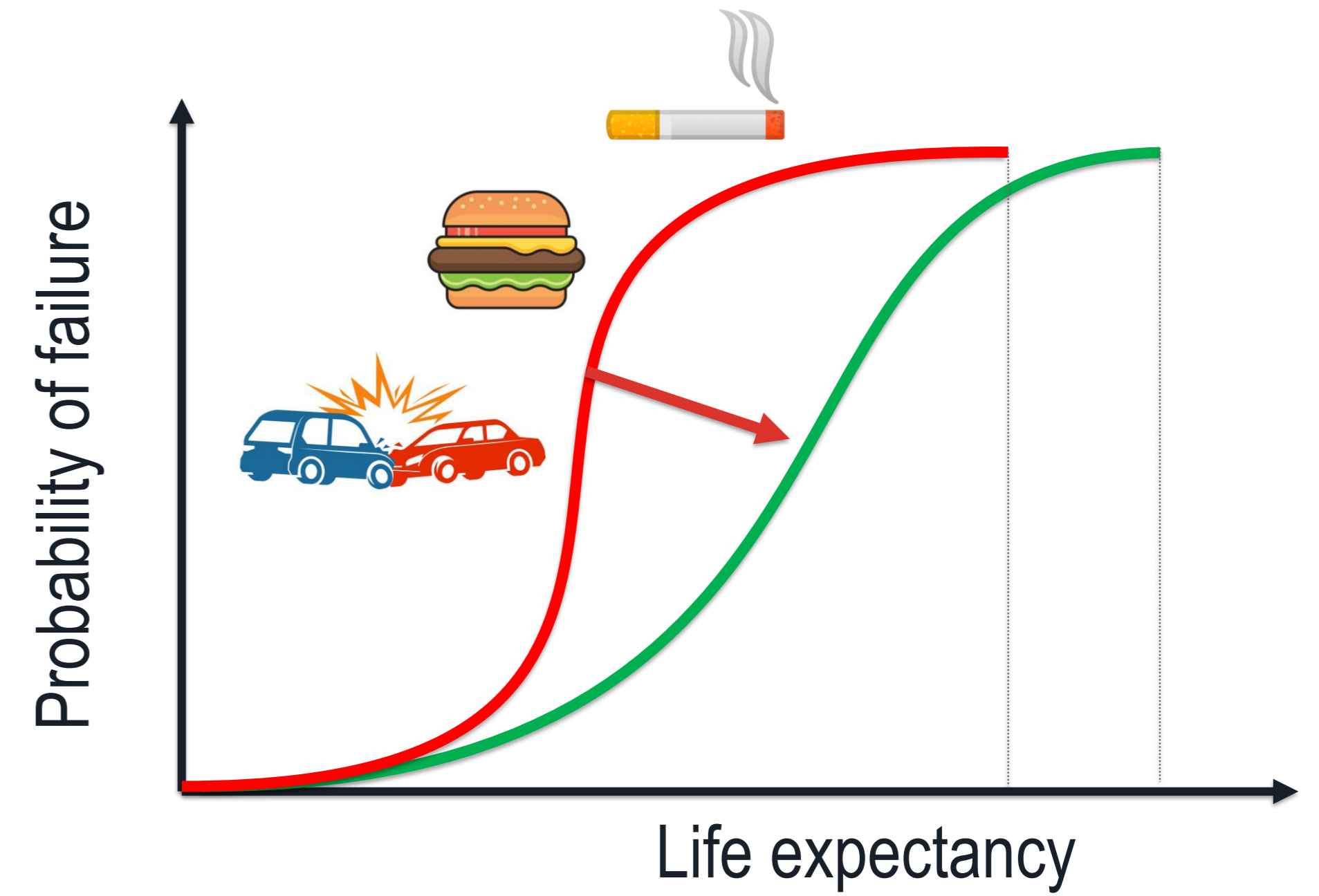
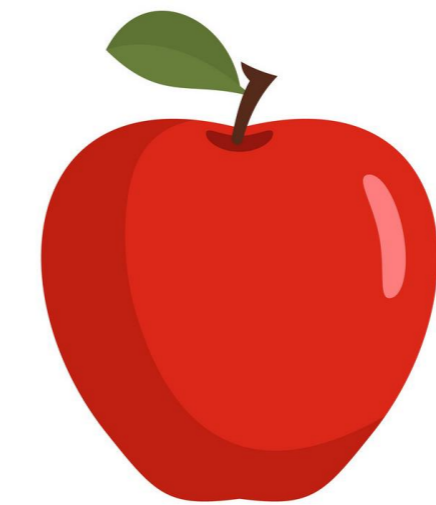


Ageing degradation

Corrective maintenance

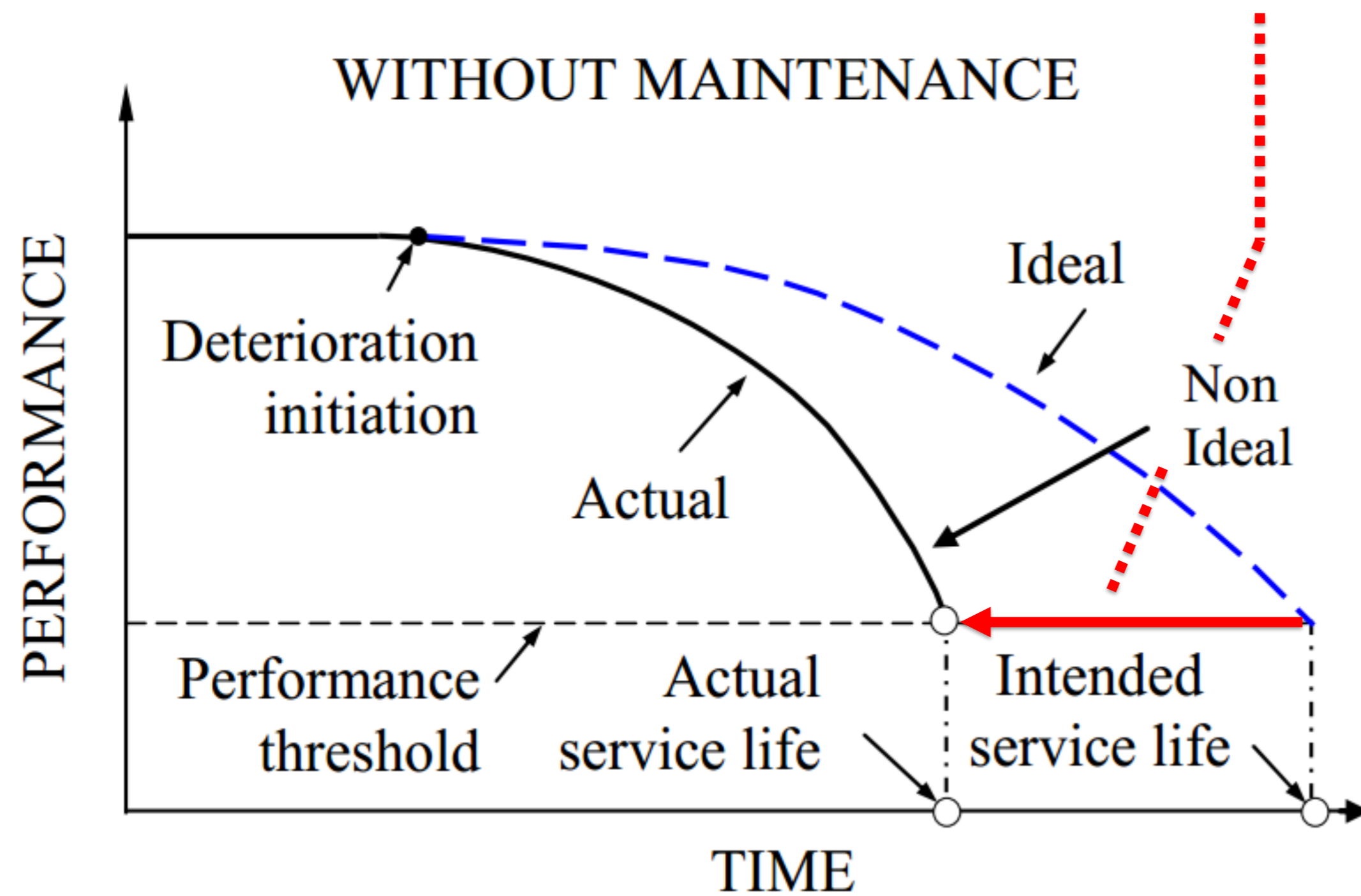


Preventive maintenance



# Motivaciones y retos del SHM

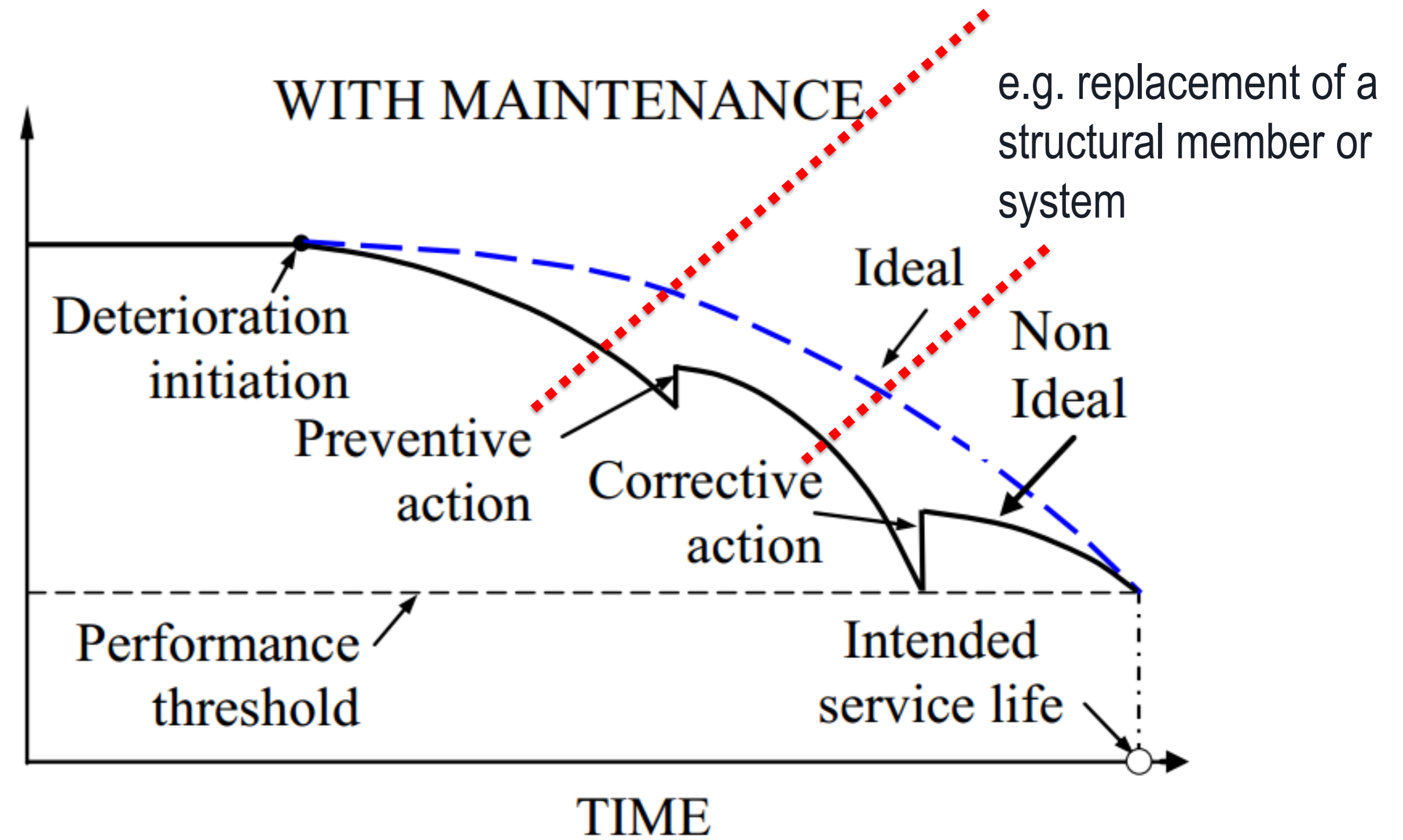
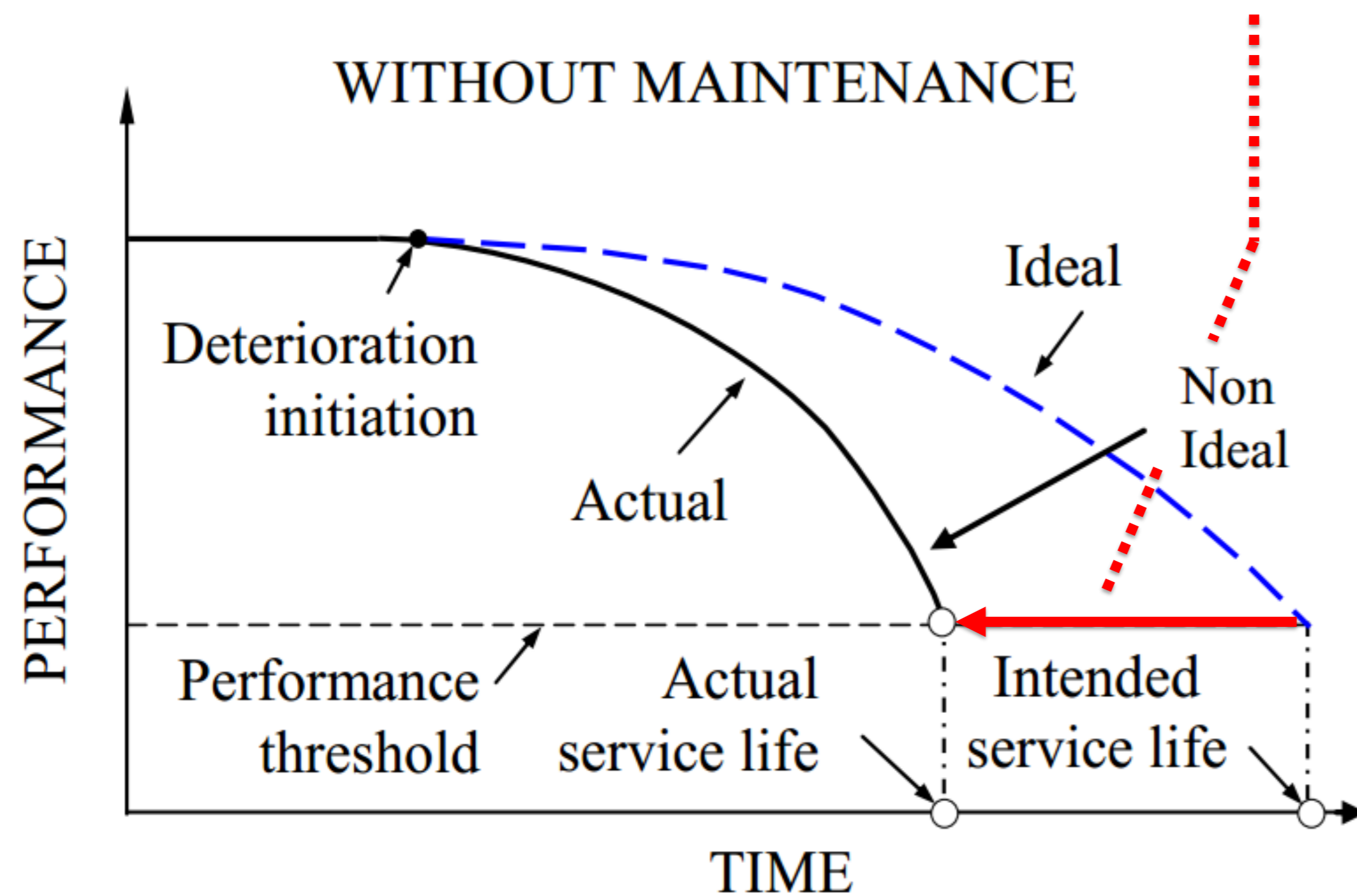
- Natural hazards
- Man-made disasters
- Accelerated aging



# Motivaciones y retos del SHM

- Natural hazards
- Man-made disasters
- Accelerated aging

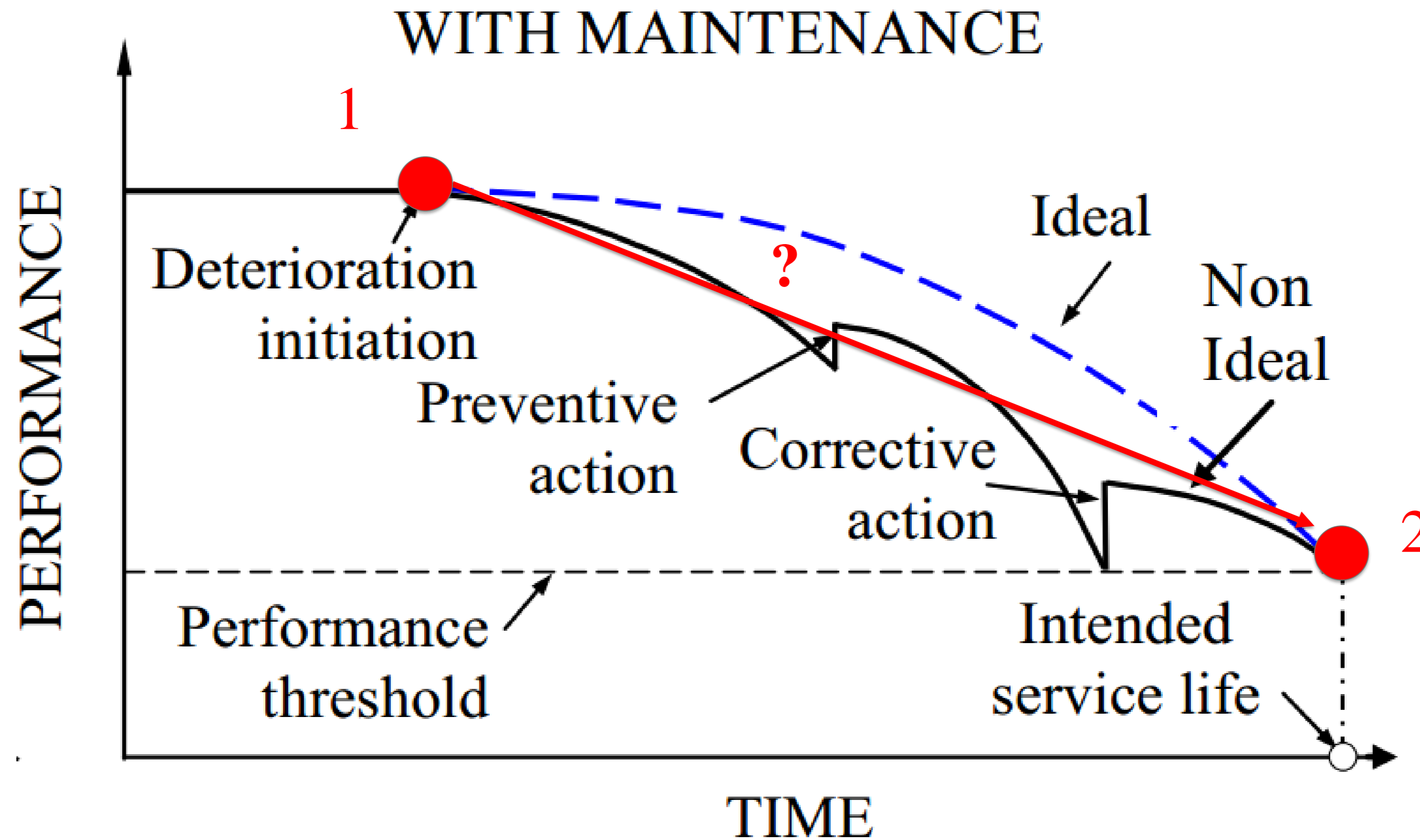
e.g. application of sealer on a bridge deck



e.g. replacement of a structural member or system

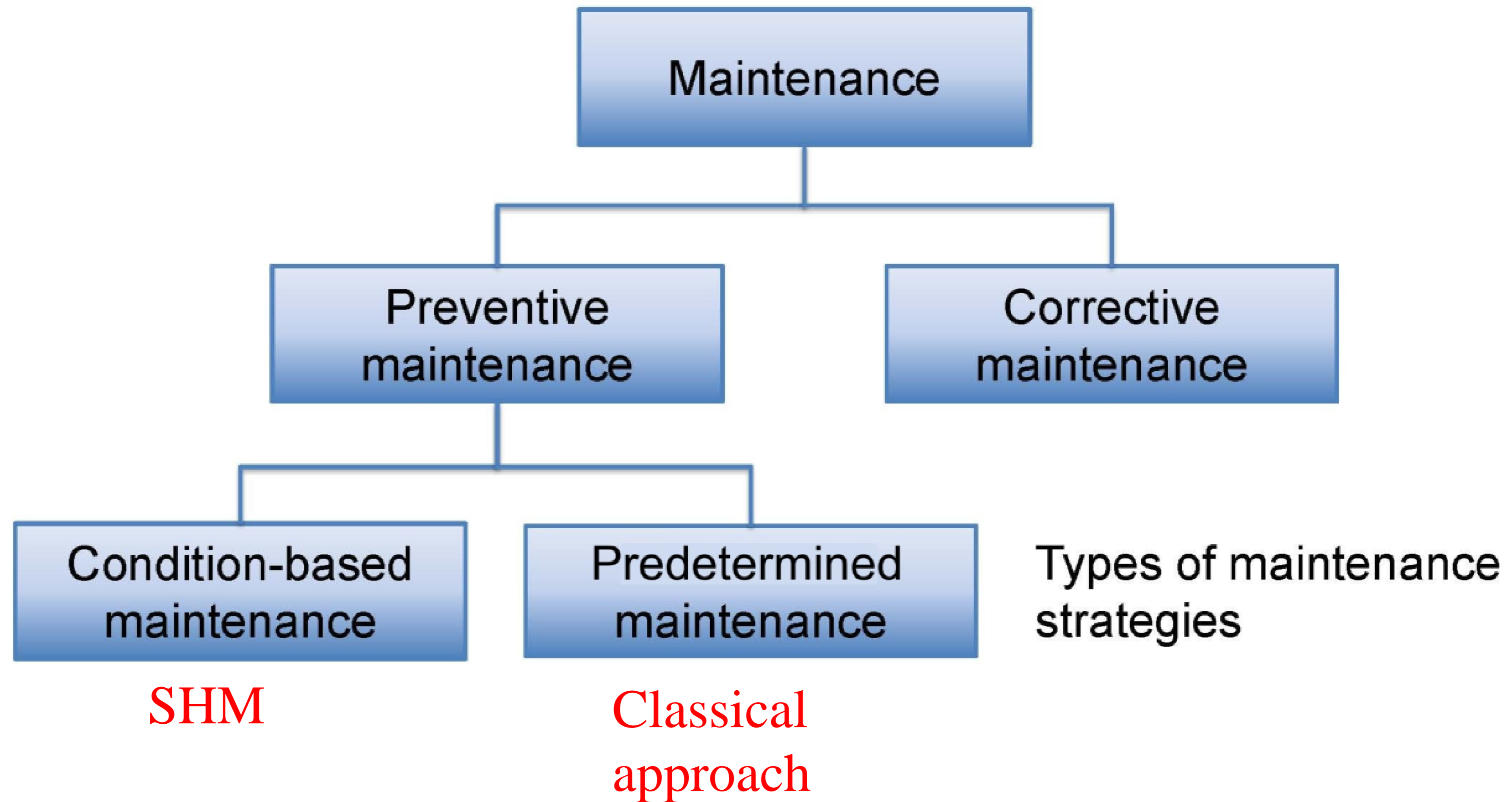


## Motivaciones y retos del SHM





## Motivaciones y retos del SHM



## Motivaciones y retos del SHM

Optimal intervals for time-based inspections?

Maintenance needs often are greater than available funds, decisions and scenarios for maintaining infrastructural systems must be based on a **life-cycle cost (LCC)** analysis.

- (a) Reliable modeling of loadings (extreme loads, deterioration..etc)
- (b) Prediction of structural safety and performance evolution.
- (c) Estimation of costs of interventions.

Optimization problem

$$C_{ET} = C_T + C_{PM} + C_{INS} + C_{REP} + C_F$$

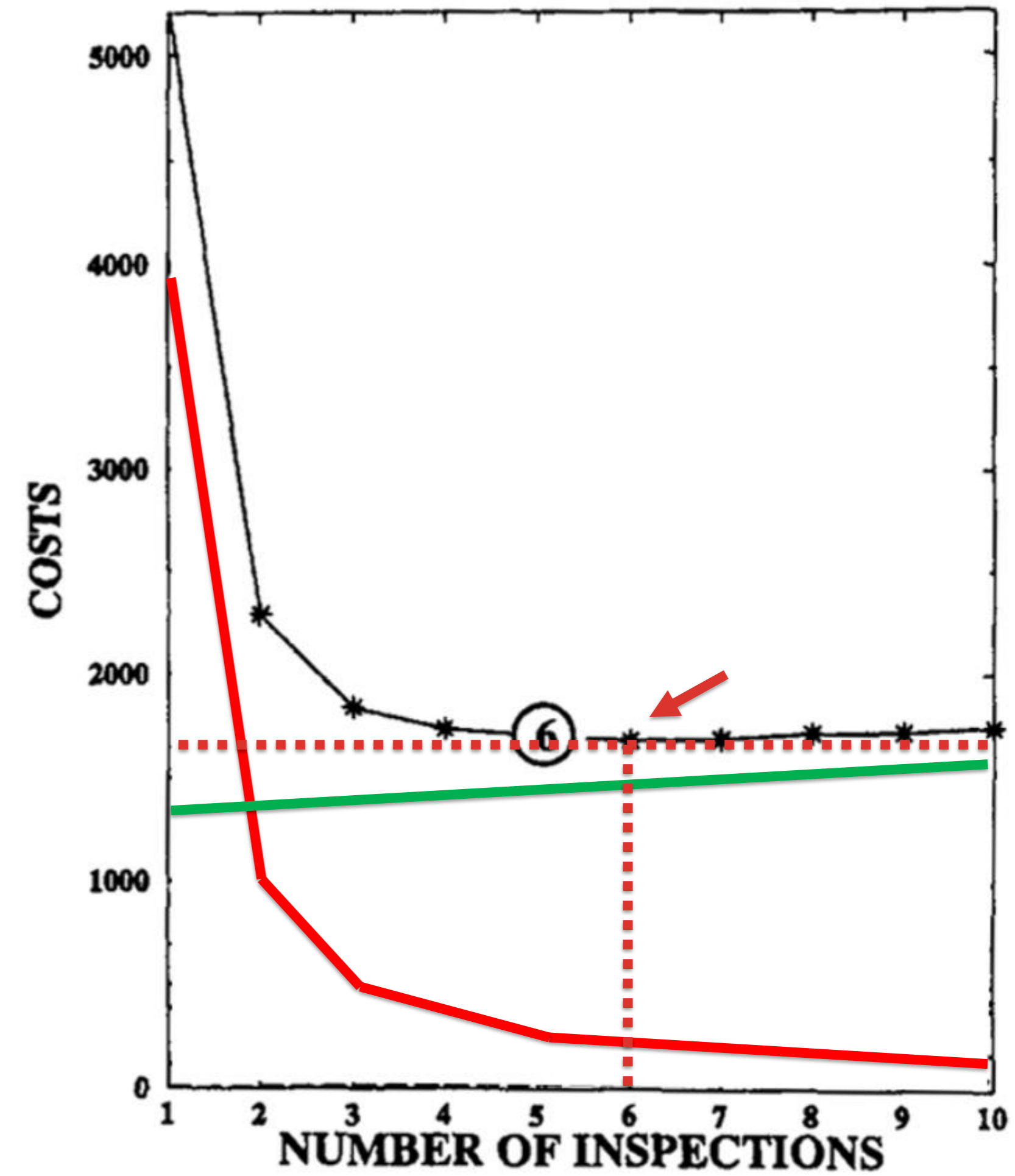
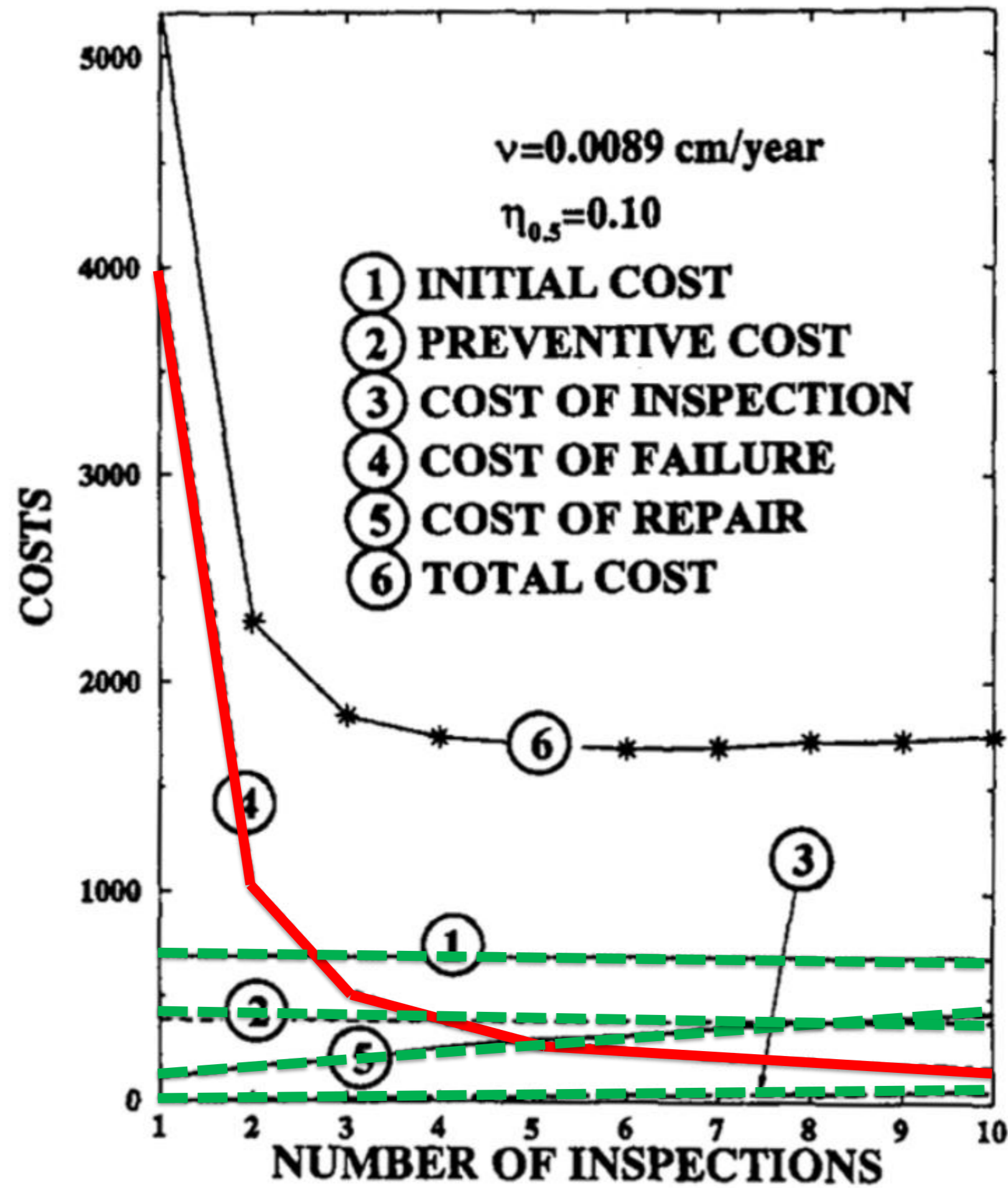
Frangopol, D. M., Lin, K. Y., & Estes, A. C. (1997). Life-cycle cost design of deteriorating structures. *Journal of structural engineering*, 123(10), 1390-1401.

Frangopol, D. M., Dong, Y., & Sabatino, S. (2017). Bridge life-cycle performance and cost: analysis, prediction, optimisation and decision-making. *Structure and Infrastructure Engineering*, 13(10), 1239-1257.

$C_{ET}$	Expected total cost
$C_T$	Initial design/construction cost
$C_{PM}$	Expected cost of routine maintenance
$C_{INS}$	Expected cost of performing inspections
$C_{REP}$	Expected cost of repairs
$C_F$	Expected cost of failure



# Motivaciones y retos del SHM

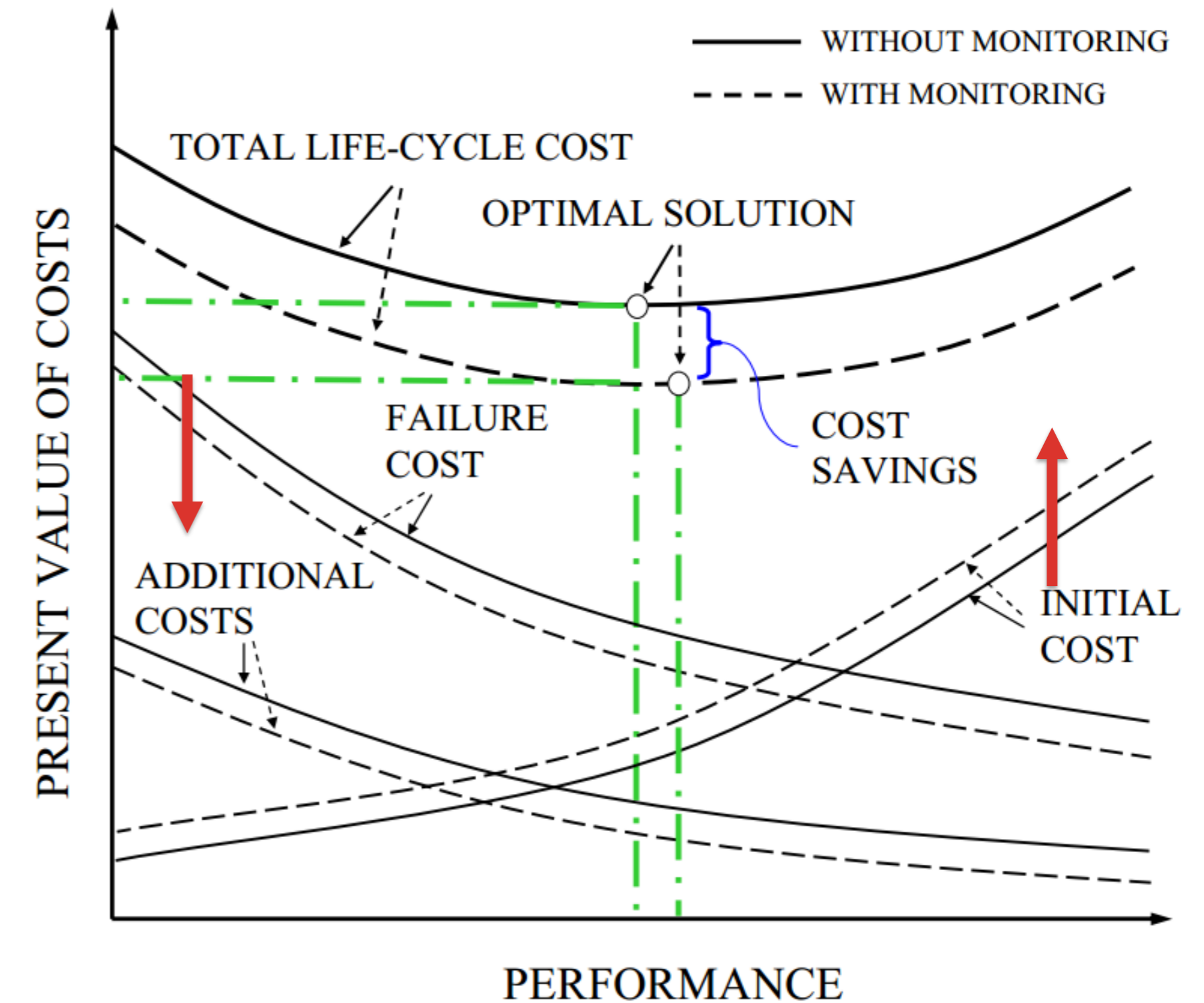
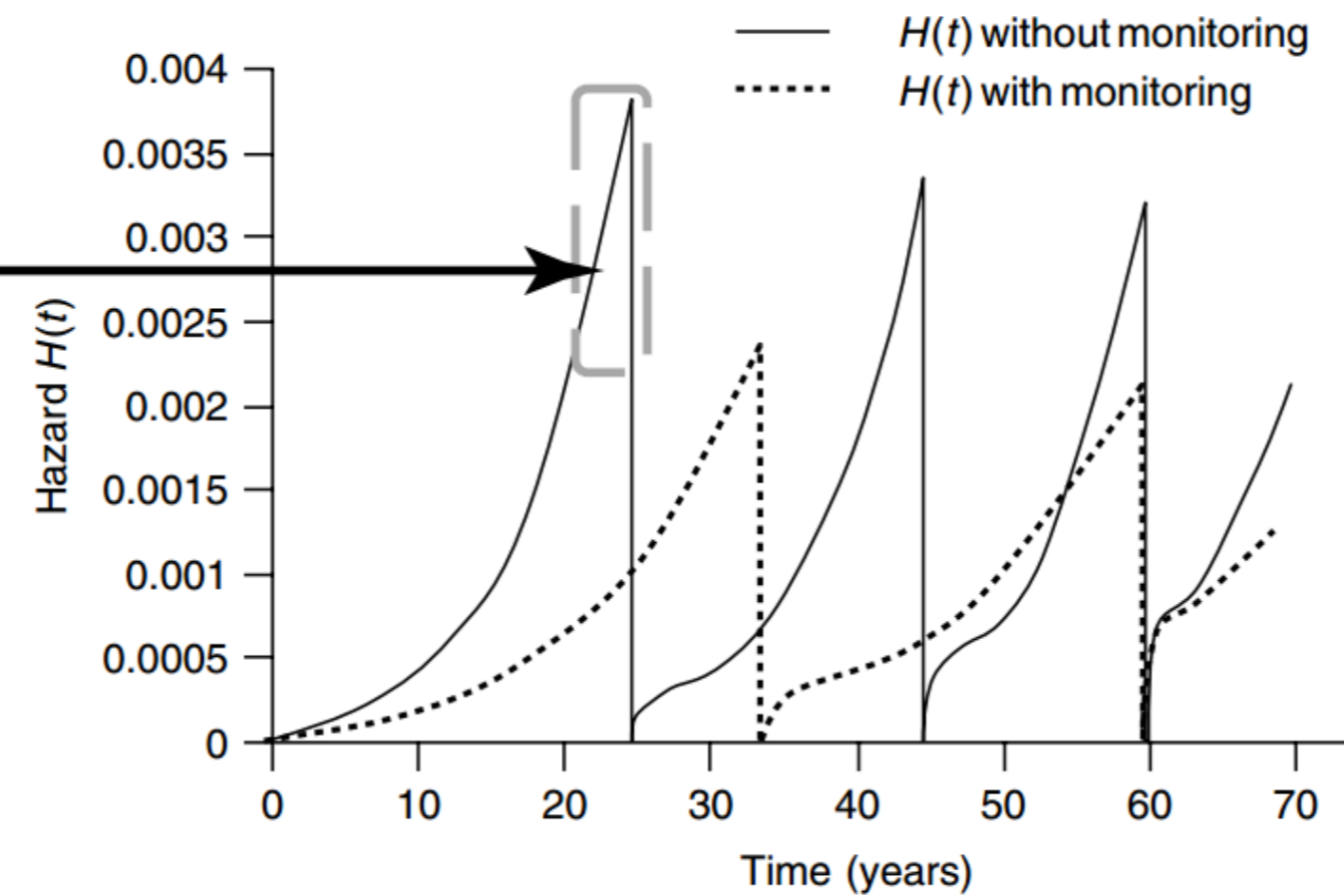
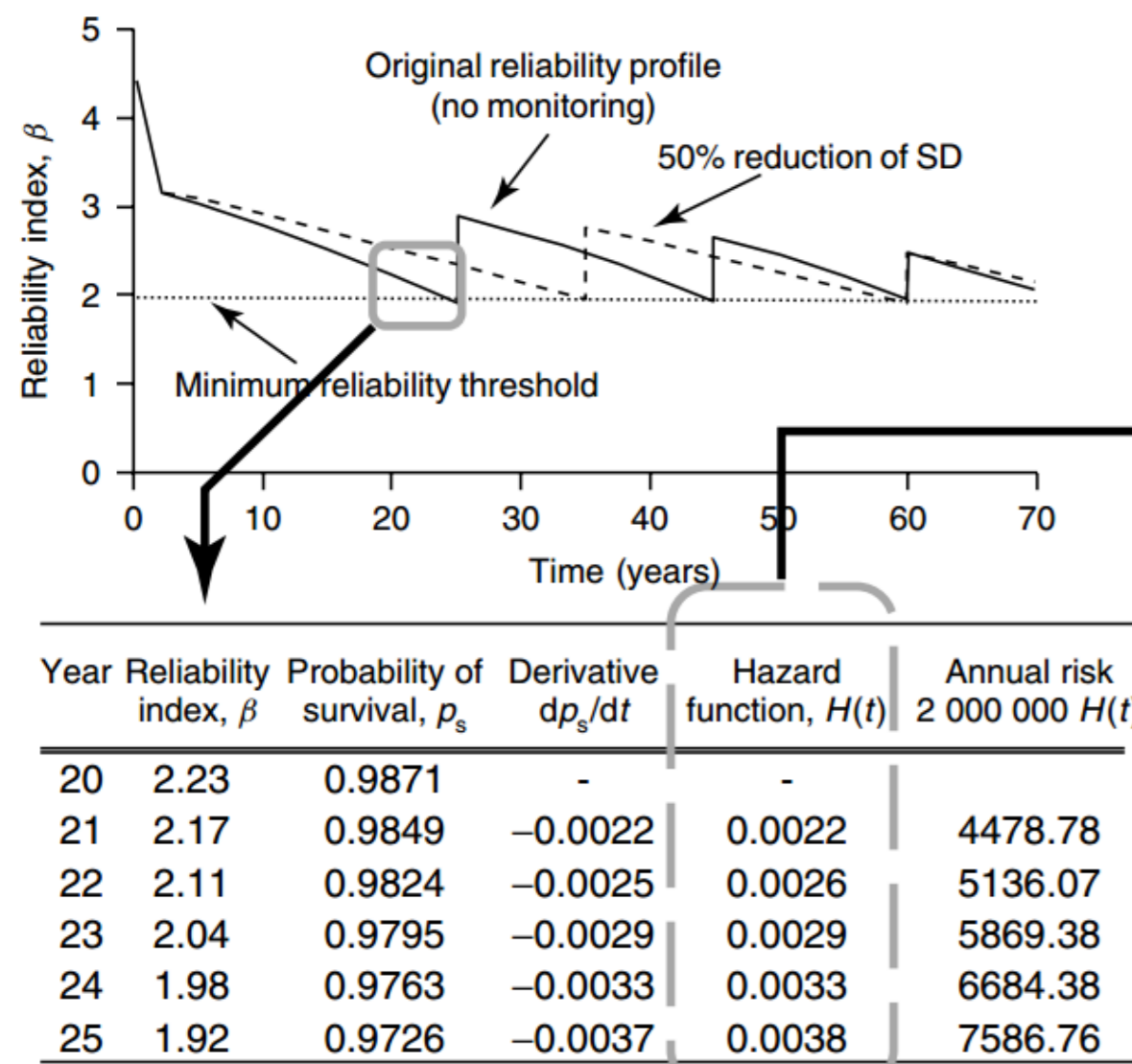
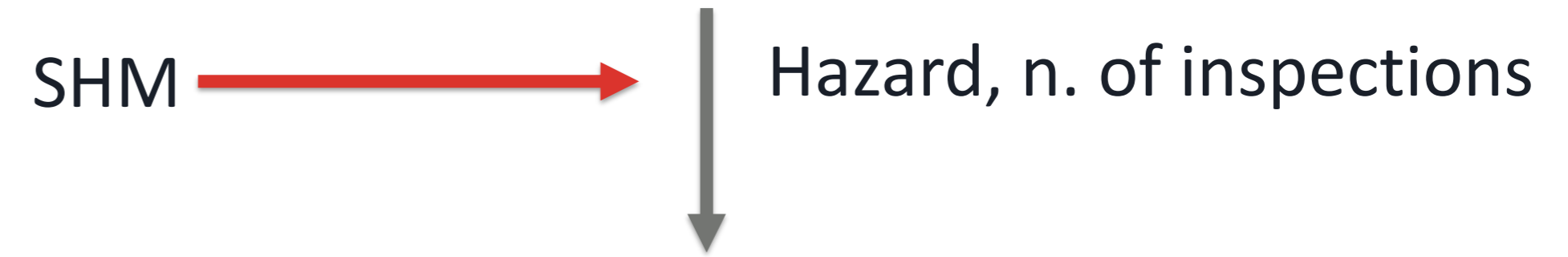


Frangopol, D. M., Lin, K. Y., & Estes, A. C. (1997). Life-cycle cost design of deteriorating structures. *Journal of structural engineering*, 123(10), 1390-1401.



# Motivaciones y retos del SHM

## Automating inspections: economic improvements for end-users



Frangopol, D. M., & Messervey, T. B. (2009). Maintenance principles for civil structures. Encyclopedia of structural health monitoring.

Faulstich, S., Hahn, B., Jung, H., Rafik, K., & und Prozessmodellierung, I. Z. (2009, January). Suitable failure statistics as a key for improving availability. In *Proceedings of the European Wind Energy Conference, EWEC*.

## Motivaciones y retos del SHM



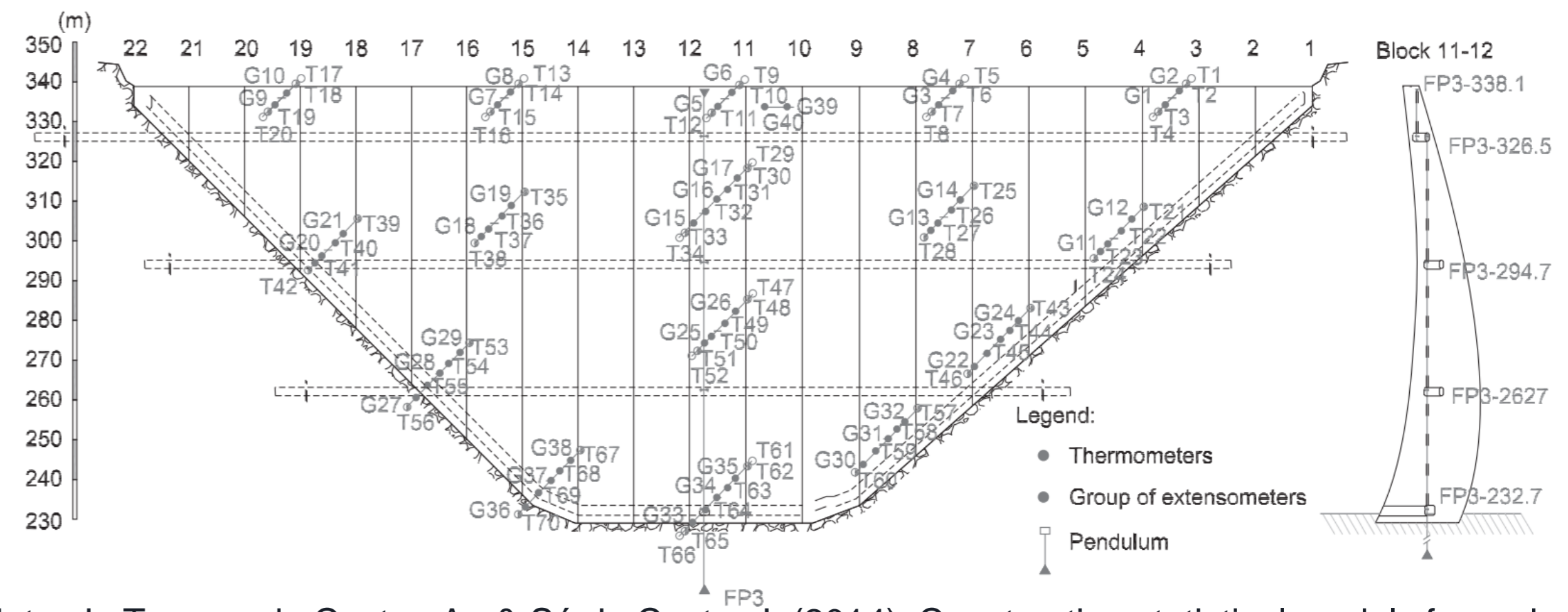
Saint Briec offshore wind farm



# Motivaciones y retos del SHM



Alto Lindoso dam, Portugal

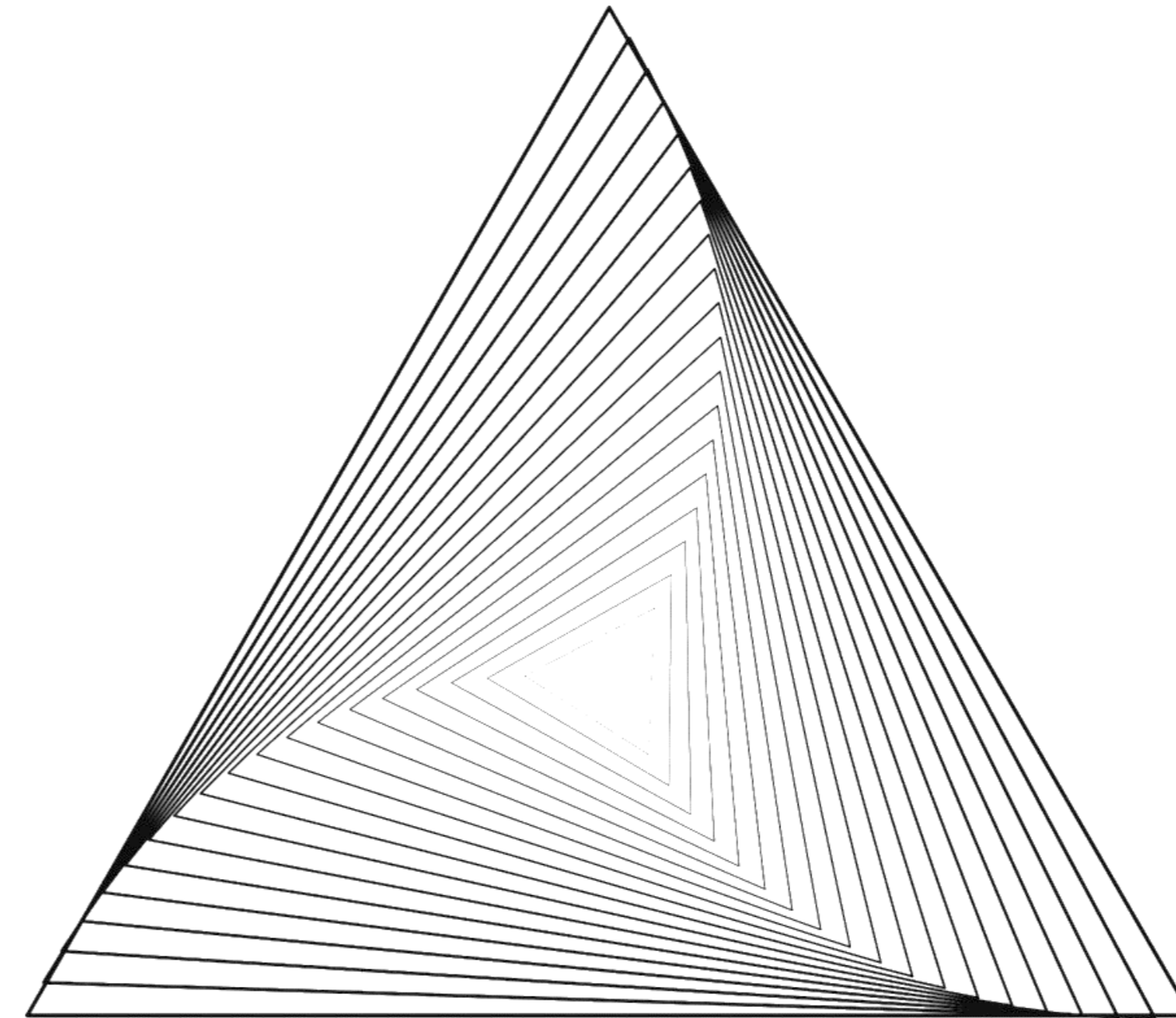


Mata, J., Tavares de Castro, A., & Sá da Costa, J. (2014). Constructing statistical models for arch dam deformation. *Structural Control and Health Monitoring*, 21(3), 423-437.



## Motivaciones y retos del SHM

- ❖ Improving safety.
- ❖ Automating inspections.
- ❖ Data for improving designs.



## Motivaciones y retos del SHM

❖ Improving safety.

❖ Automating inspections.

❖ Data for improving designs.

- Los datos de monitorización se pueden usar para confirmar o mejorar los coeficientes de seguridad de las acciones existentes, de resistencia y de las combinaciones de carga para eventos extremos usados en los códigos de diseño.
- La monitorización se puede utilizar para mejorar el diseño proporcionando al ingeniero la información estadística necesaria para emplear un diseño probabilístico basado en confiabilidad/desempeño/riesgo.



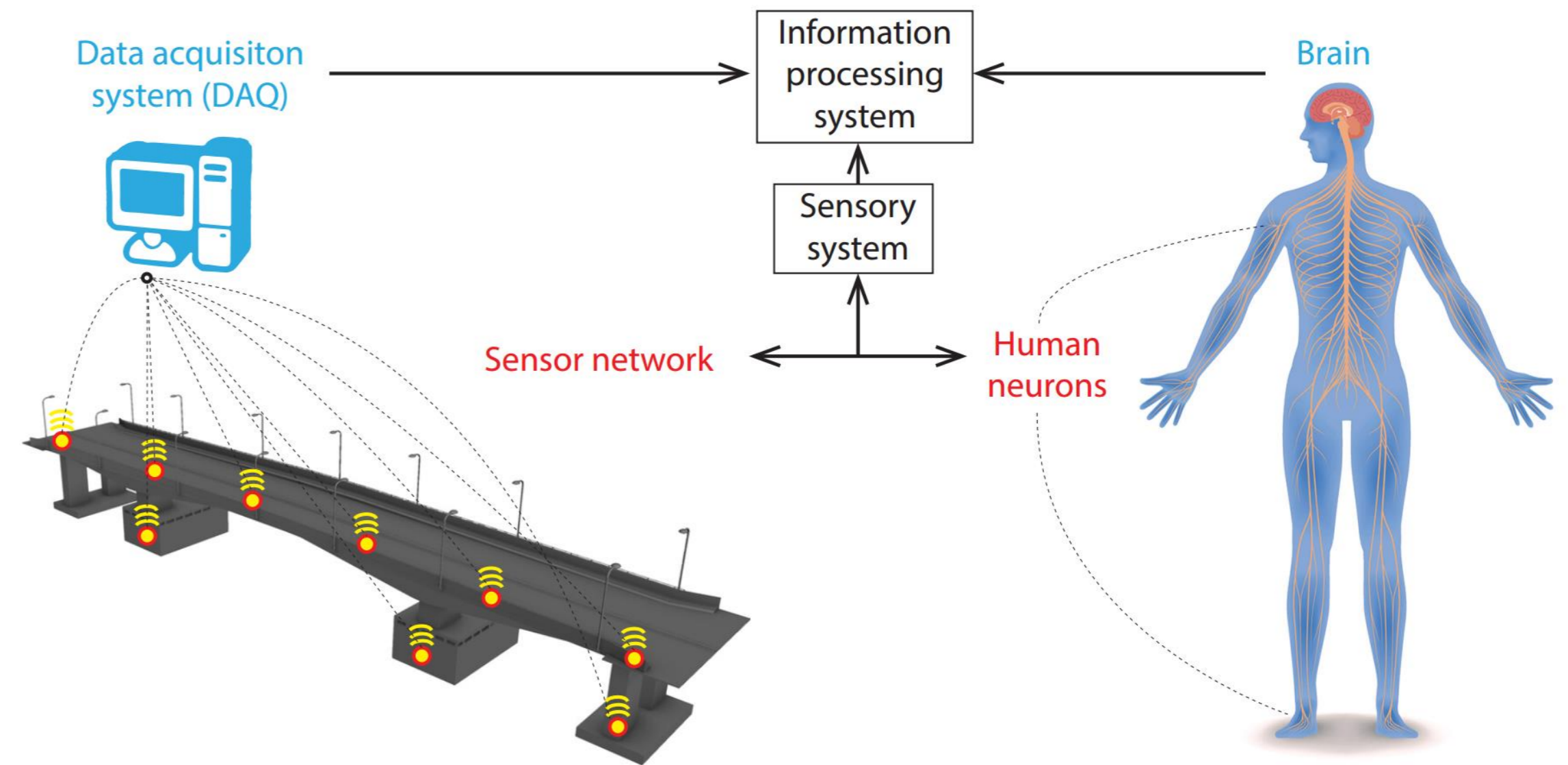
## ❖ Retos del SHM



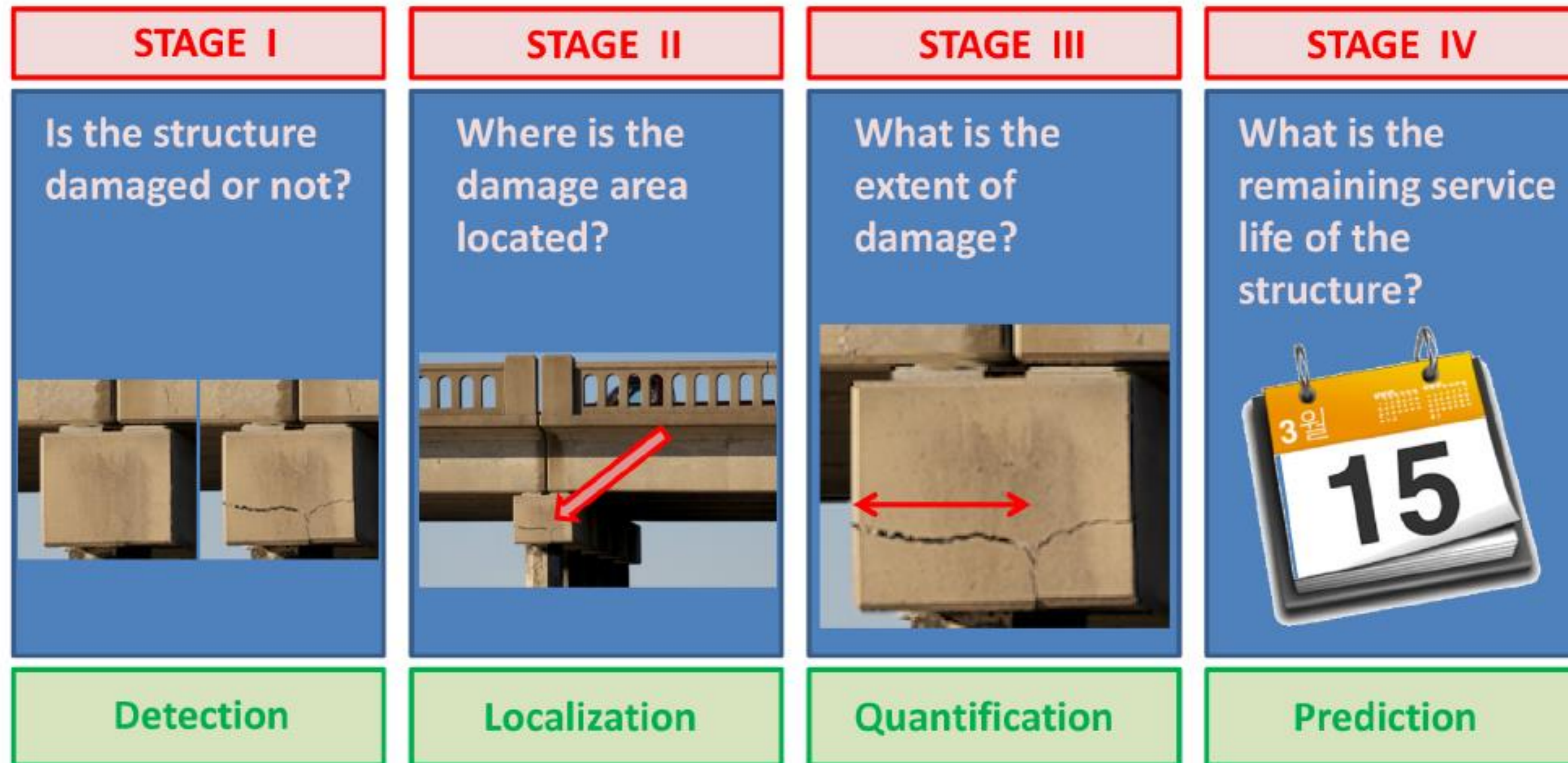
## Motivaciones y retos del SHM

Structural Health Monitoring is highly Multidisciplinary!

- Sensors
- Data acquisition/transmission
- Sensor installation/application
- Data processing
- Structural/Material modelling
- Machine Learning
- Decision making
- .....



## Motivaciones y retos del SHM



A. Rytter. Vibrational based inspection of civil engineering structures. PhD thesis, Aalborg University, 1993.

## Motivaciones y retos del SHM

Ser capaz de diseñar soluciones SHM para sistemas a gran escala.

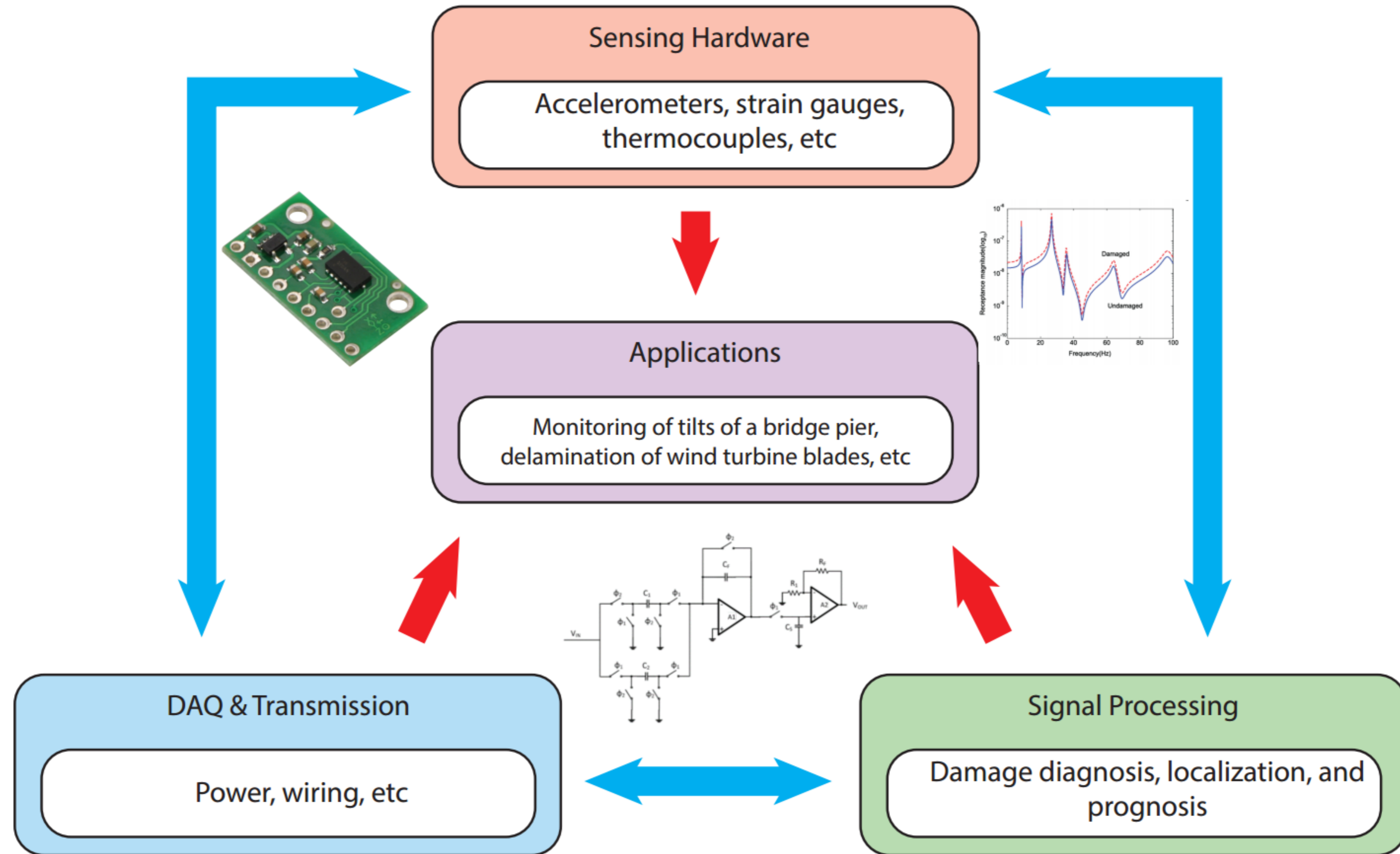
Específicamente, es necesario ampliar la comprensión de:

- Desafíos SHM para sistemas a gran escala (economía, aplicaciones, etc.).
- Transductores, adquisición de datos y técnicas de procesamiento de señales.
- Sistemas de decisión basados en mediciones.
- Aplicaciones en campo.

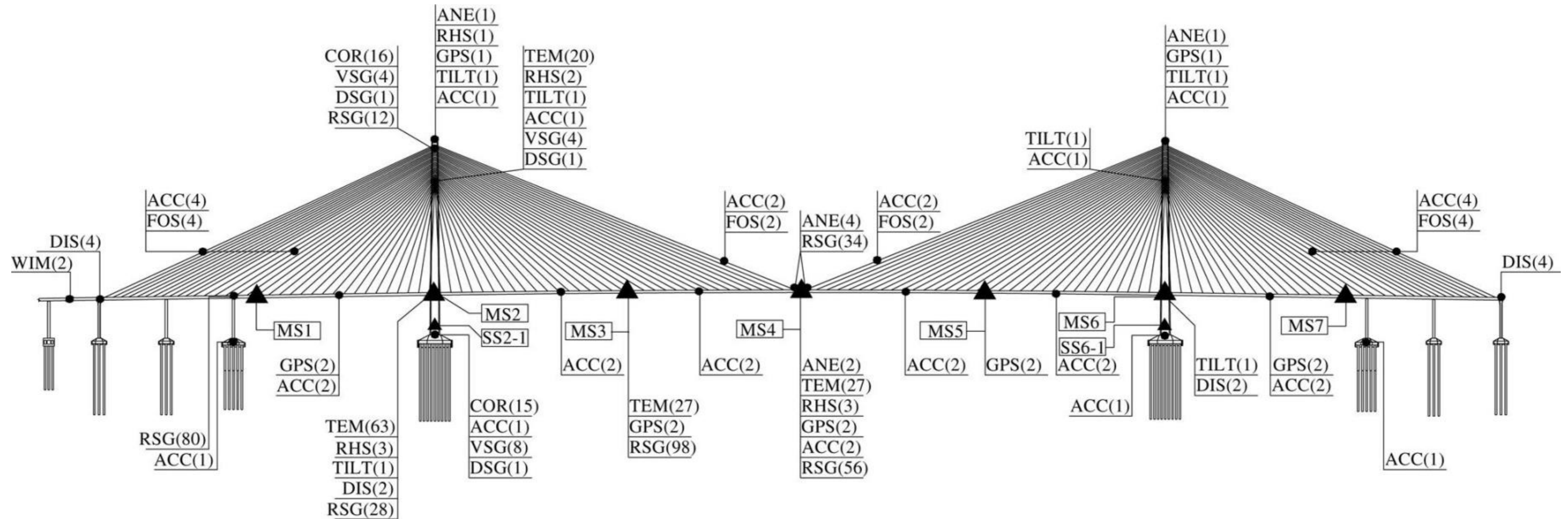


# Motivaciones y retos del SHM

## Sensor-based SHM



# Motivaciones y retos del SHM



ANE: anemometer  
 TEM: temperature sensor  
 RHS: air temperature and relative humidity sensor

WIM: weigh-in-motion system  
 COR: corrosion sensor  
 GPS: global positioning system

TILT: tiltmeter  
 DIS: displacement transducer  
 ACC: accelerometer

RSG: foiled resistance strain gauge  
 VSG: vibrating-wire strain gauge  
 DSG: dummy strain gauge

FOS: fiber optic sensor  
 MS: main station  
 SS: sub-station

Mao, J. X., Wang, H., & Li, J. (2018). Fatigue reliability assessment of a long-span cable-stayed bridge based on one-year monitoring strain data. *Journal of Bridge Engineering*, 24(1), 05018015.



### SHM Design

- ¿Qué quiero monitorizar?
- ¿Es útil la monitorización?
- ¿Cuánto retorno de la inversión obtendría?
- Identificar los estados que se deben monitorizar para una SHM exitosa

### Structural Design

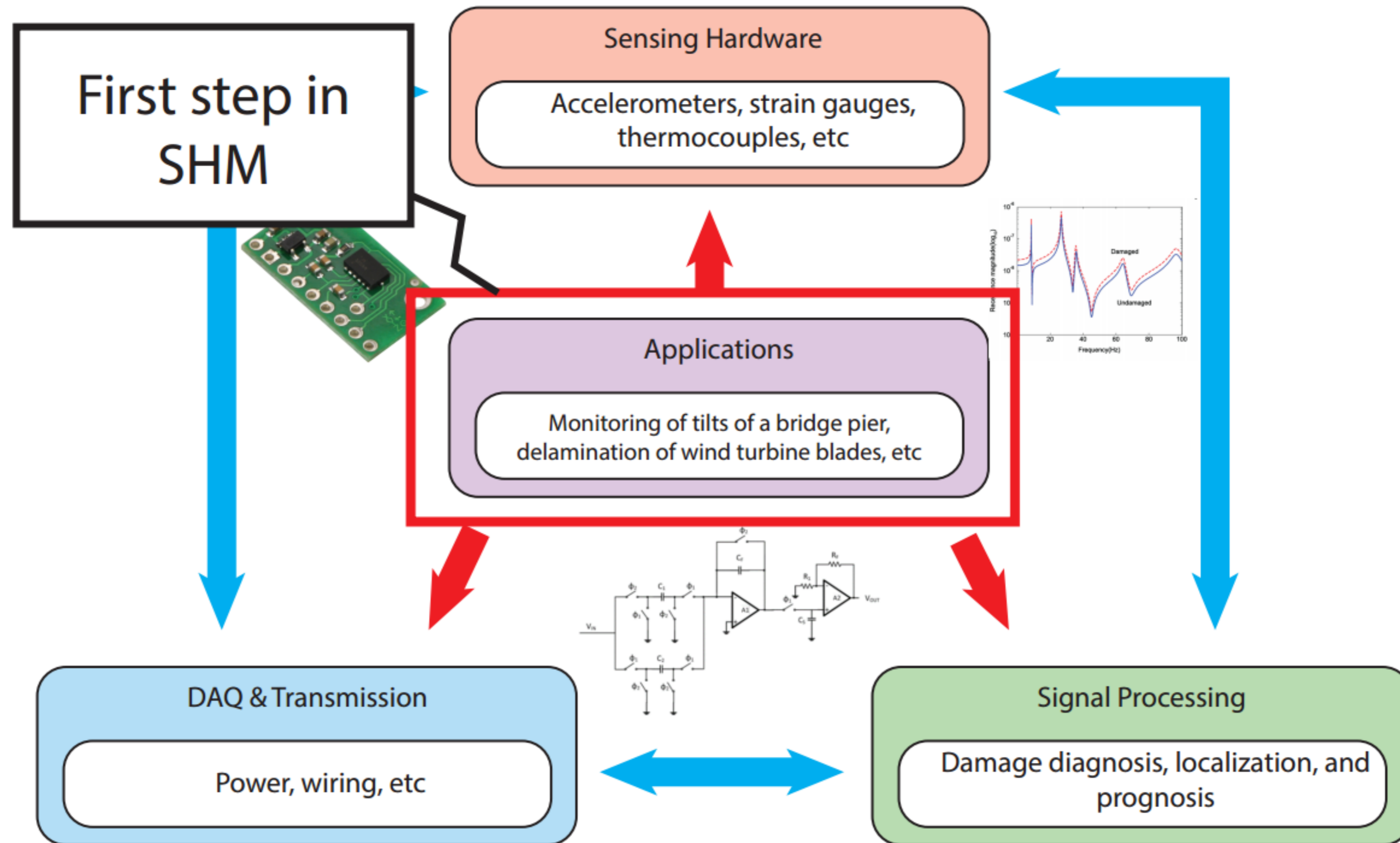
- ¿Qué quiero construir?
- ¿Es útil la estructura?
- ¿Cuánto retorno de la inversión obtendría?

- Diseño de hardware de detección
- Electrónica de diseño
- Diseñar algoritmos de procesamiento de señales
- Monitoriza la estructura

- Diseña la estructura
- Construye la estructura

# Motivaciones y retos del SHM

## Application-based SHM







Análisis modal como técnica revolucionaria  
dentro del SHM.



## Análisis Modal como técnica revolucionaria dentro del SHM

**El análisis modal es una técnica más dentro del marco general del SHM!**



# Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f$$
$$u(x, t) = q(t)\varphi(x)$$

Free vibration  
Undamped system

$$(M\ddot{q} + Kq)\varphi = 0$$

Harmonic solution  
 $q = A \sin(\omega t + \theta)$

$$(-\omega^2 M + K)\varphi = 0 \quad \text{Eigenvalue/Eigenvector problem}$$

Mode shapes/Natural modes of vibration

Natural frequencies/Resonant frequencies

El SHM basado en vibraciones, o pruebas dinámicas, se basa en la identificación de variaciones inducidas por daños en las propiedades modales de las estructuras (es decir, **frecuencias resonantes, formas modales y propiedades de amortiguamiento**).

## - Identificación global de daños.

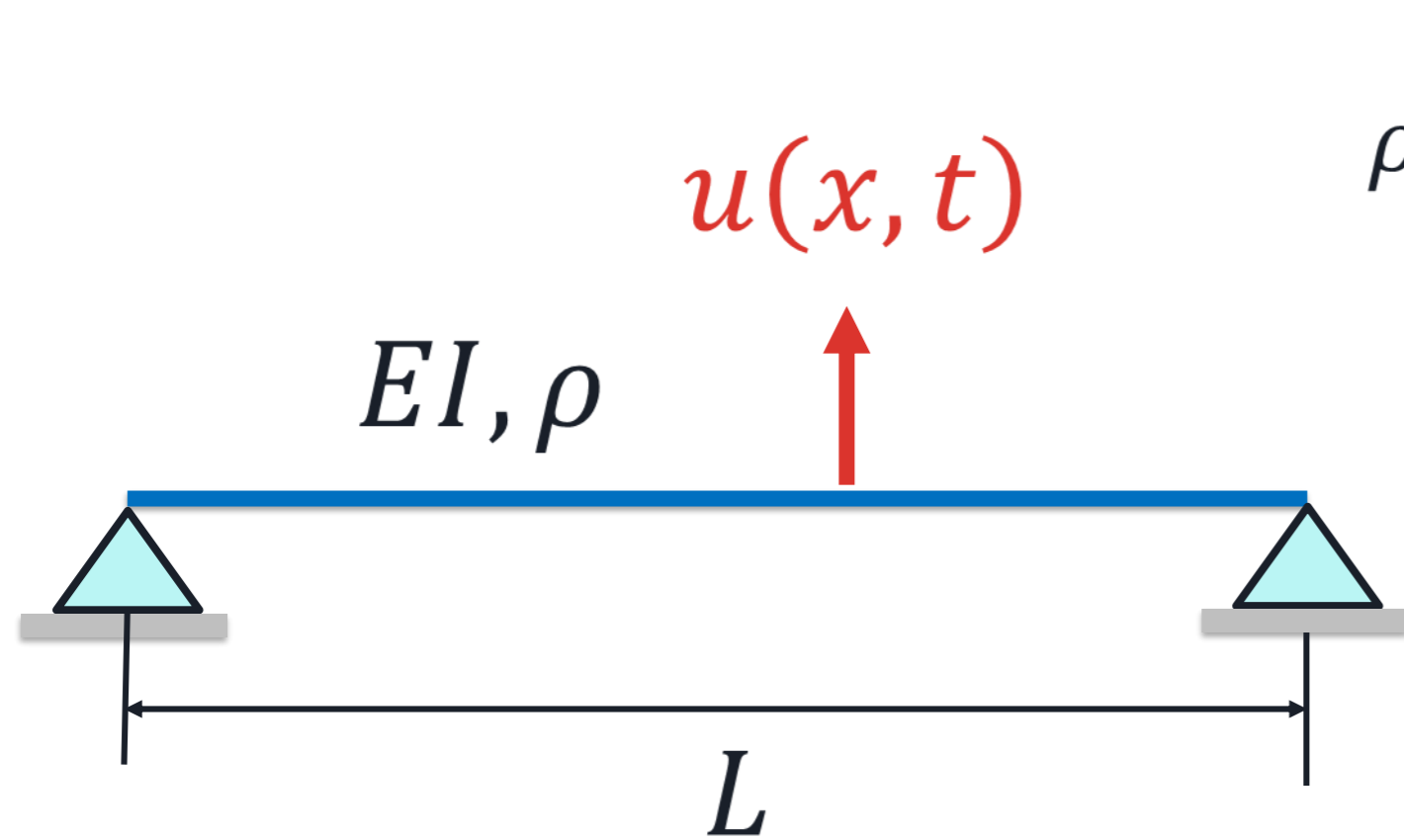
- Las patologías estructurales locales con efecto limitado sobre la rigidez general de las estructuras pueden pasar desapercibidas.
- El amortiguamiento (mecanismos de disipación de energía) es muy sensible al daño, sin embargo, su identificación depende en gran medida del nivel de excitación modal y generalmente está sujeto a altos niveles de incertidumbre.

- **La capacidad de un sistema SHM para detectar defectos localizados está directamente relacionada con su capacidad para identificar modos de vibración de alta frecuencia.**

- Hay dos tipologías principales de pruebas dinámicas:
- Utilización de excitaciones artificiales - **Análisis modal experimental (EMA)**.
- Uso de vibraciones ambientales - **Análisis modal operacional (OMA)**.



# Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM



$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0$$

Variable separation

$$u(x, t) = \varphi(x) y(t)$$

┌┐ Modal displacements  
└┘ Mode shapes

+ BCs

$$\varphi(x, n) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{Mode shapes}$$

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$

Natural angular frequency

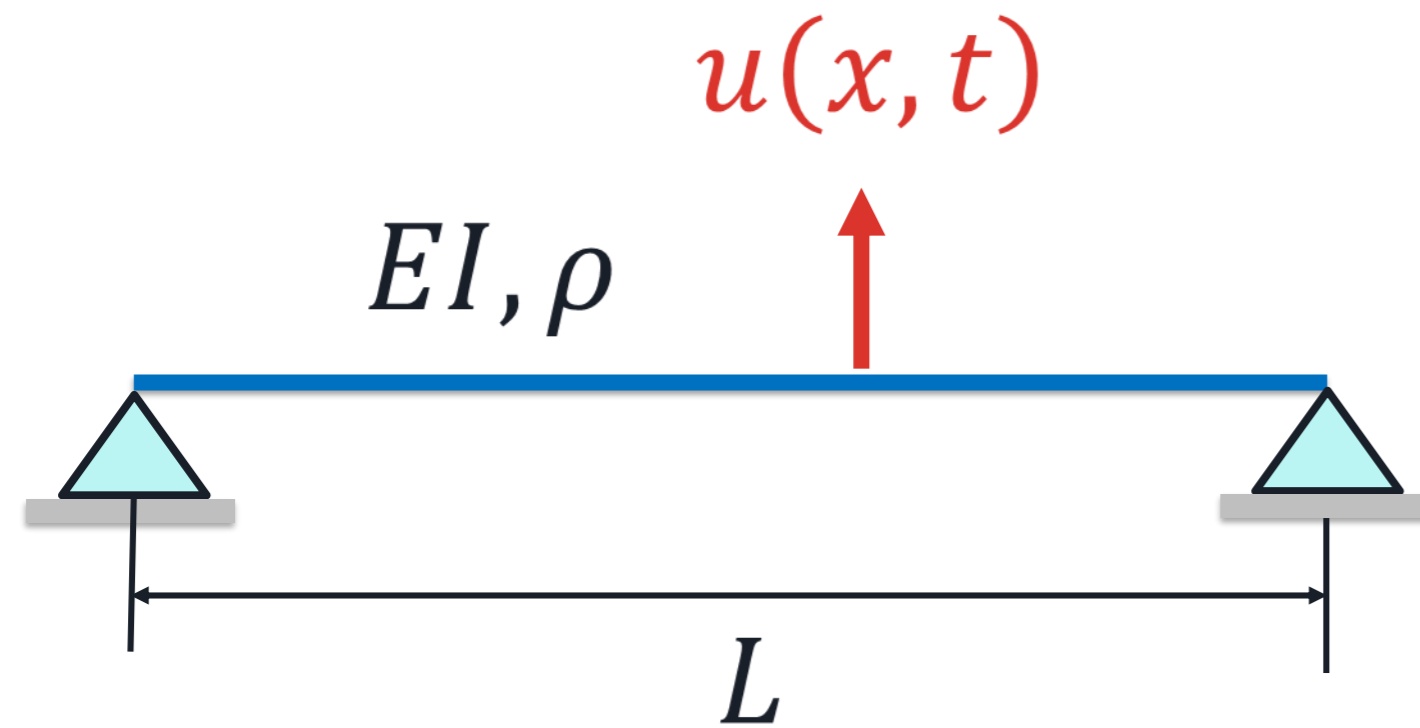
Orthogonality Property

$$\int_0^L \varphi(x) \varphi(x) dx = 0 \quad (i \neq j), 1 \quad (i = j)$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

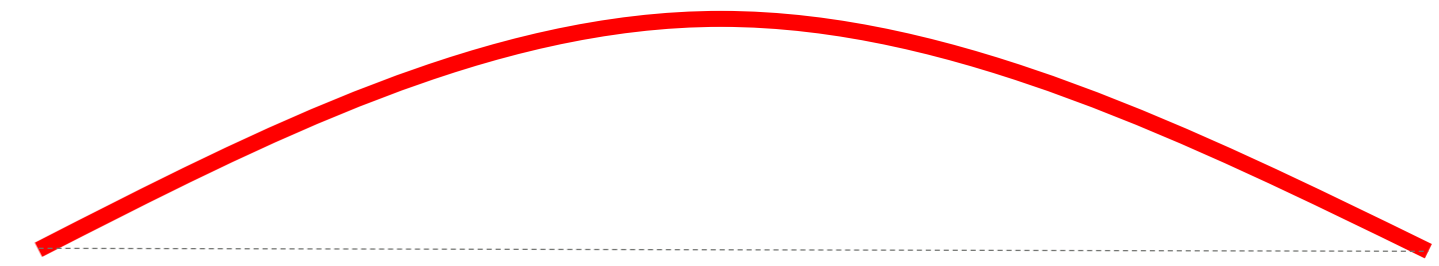
# Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM

Ejemplo:  $EI=7694081.0 \text{ kNm}^2$  ,  $L = 15 \text{ m}$  ,  $\rho = 15000 \text{ kg/m}^2$

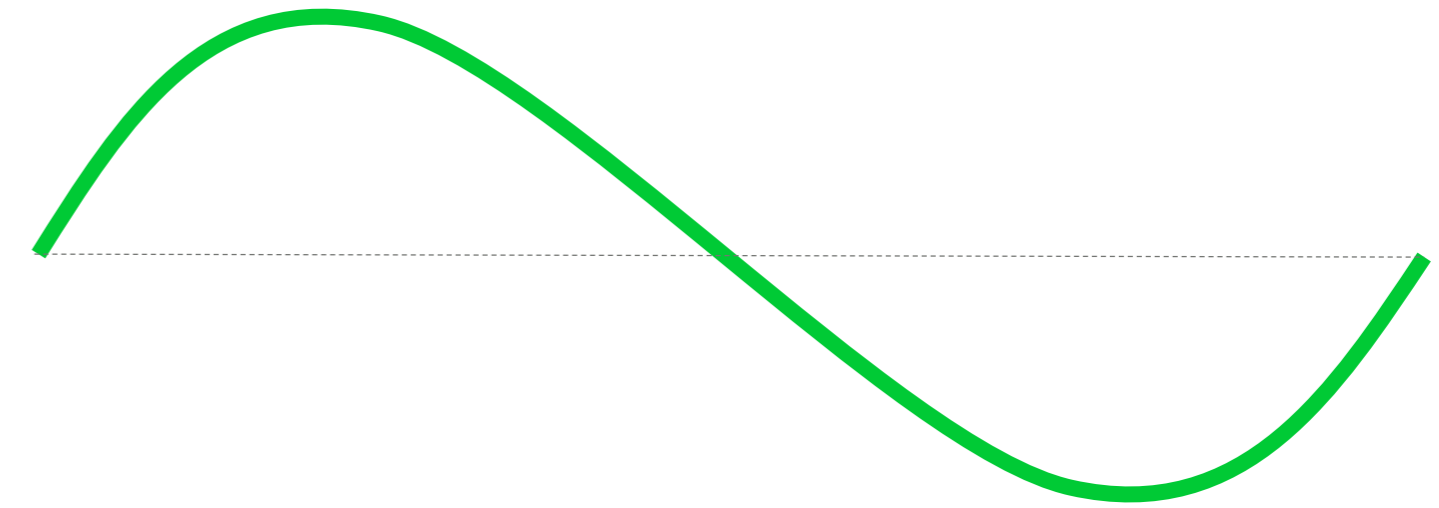


$$\varphi(x, n) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

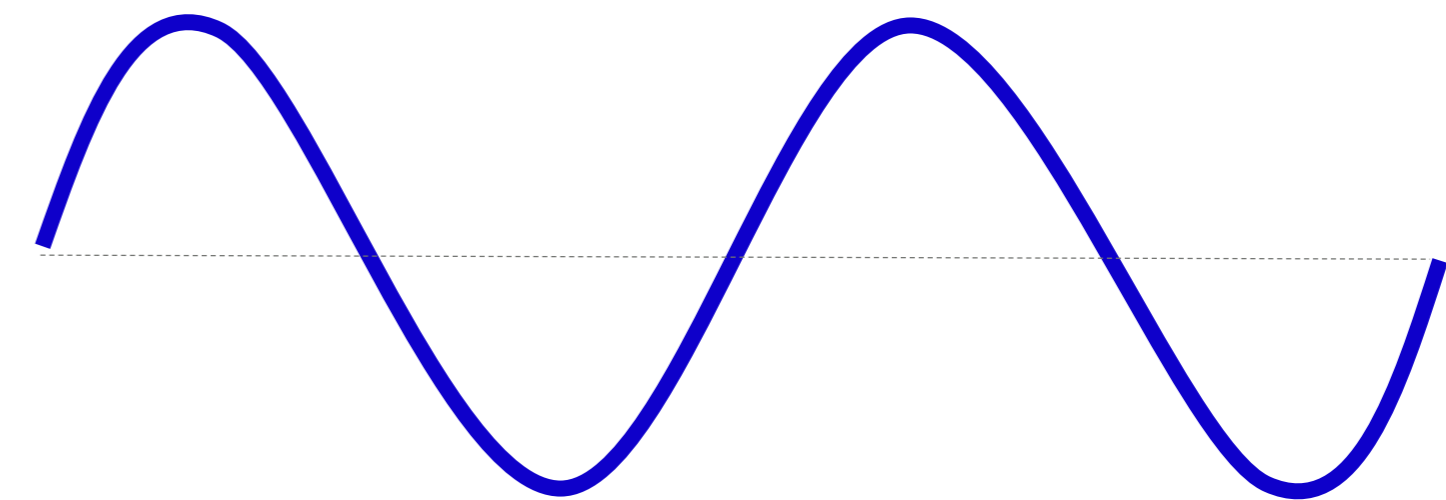
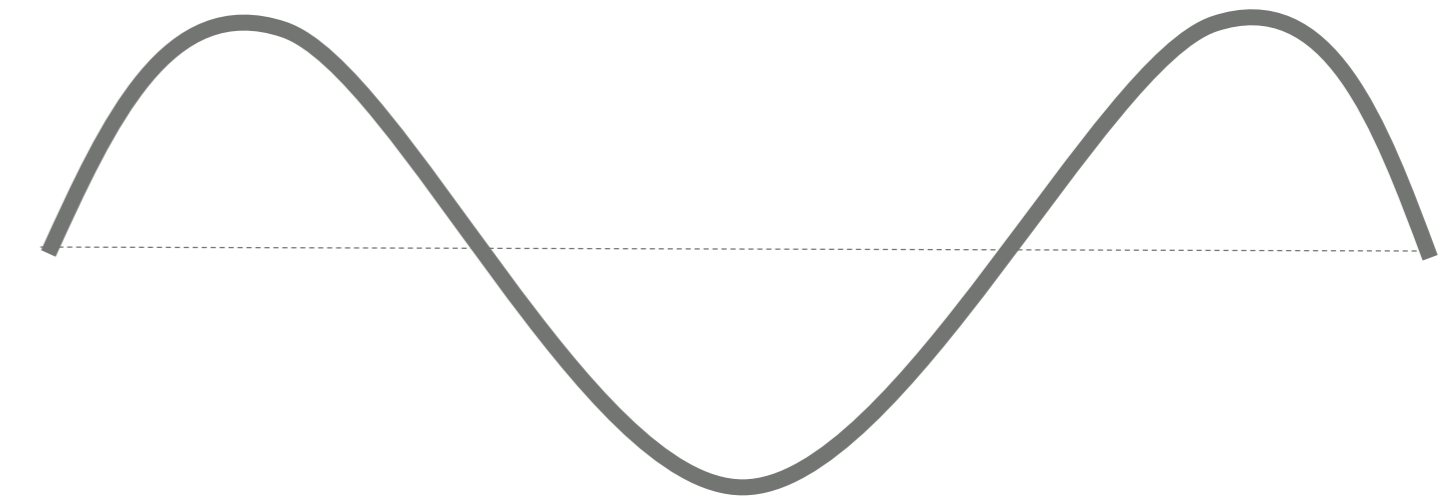
Mode 1 ->  $f=5 \text{ Hz}$



Mode 2 ->  $f=20 \text{ Hz}$

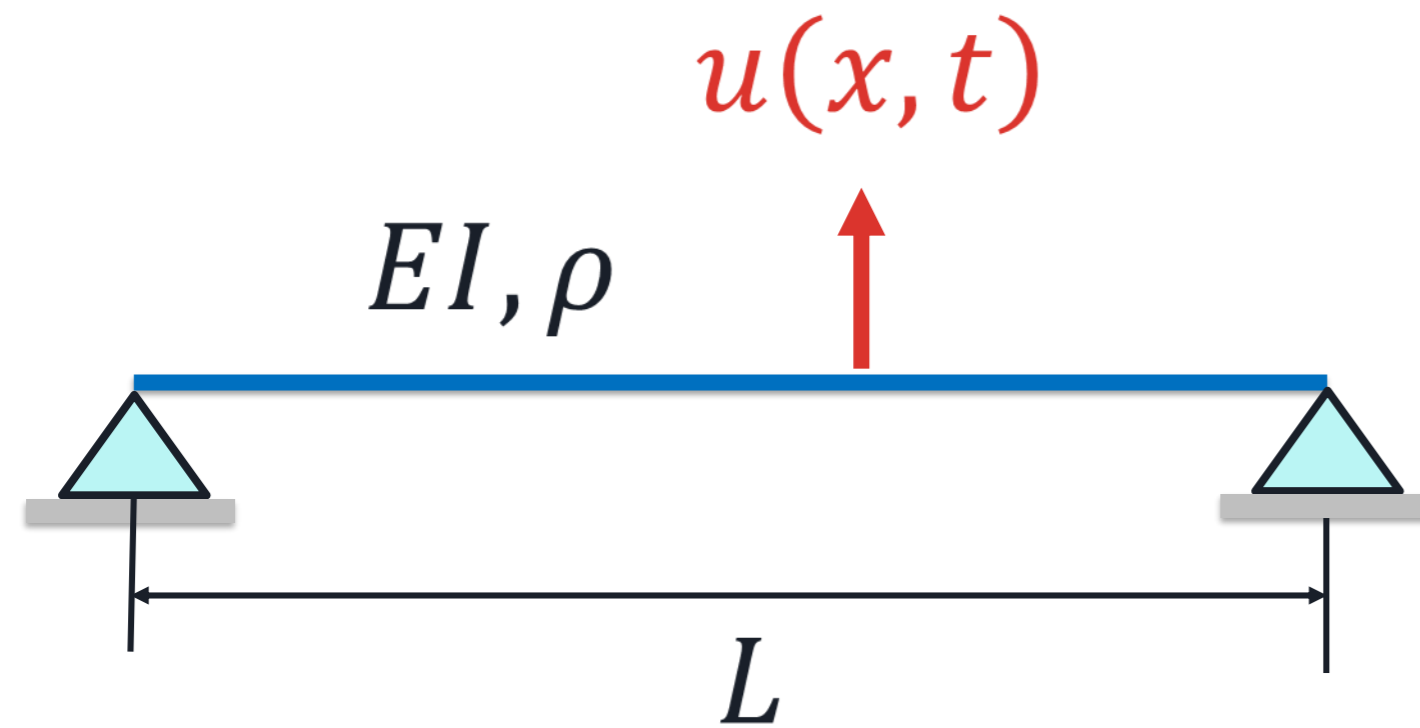


Mode 3 ->  $f=45 \text{ Hz}$



# Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM

Ejemplo:  $EI=7694081.0 \text{ kNm}^2$  ,  $L = 15 \text{ m}$  ,  $\rho = 15000 \text{ kg/m}^2$

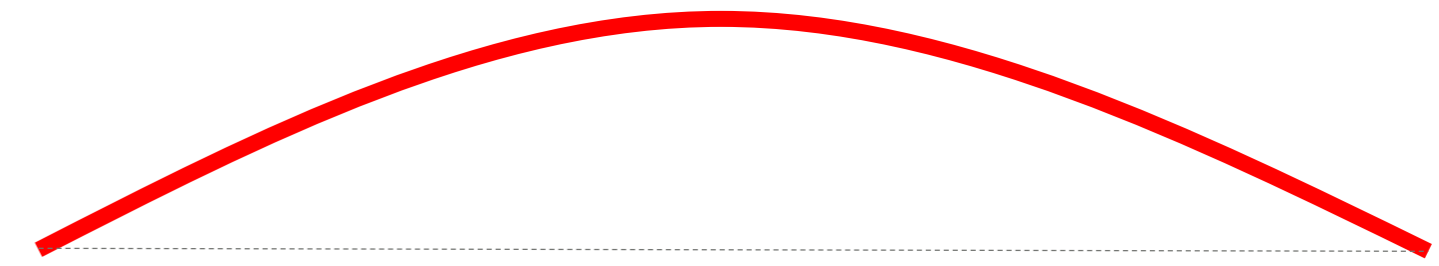


$$\varphi(x, n) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

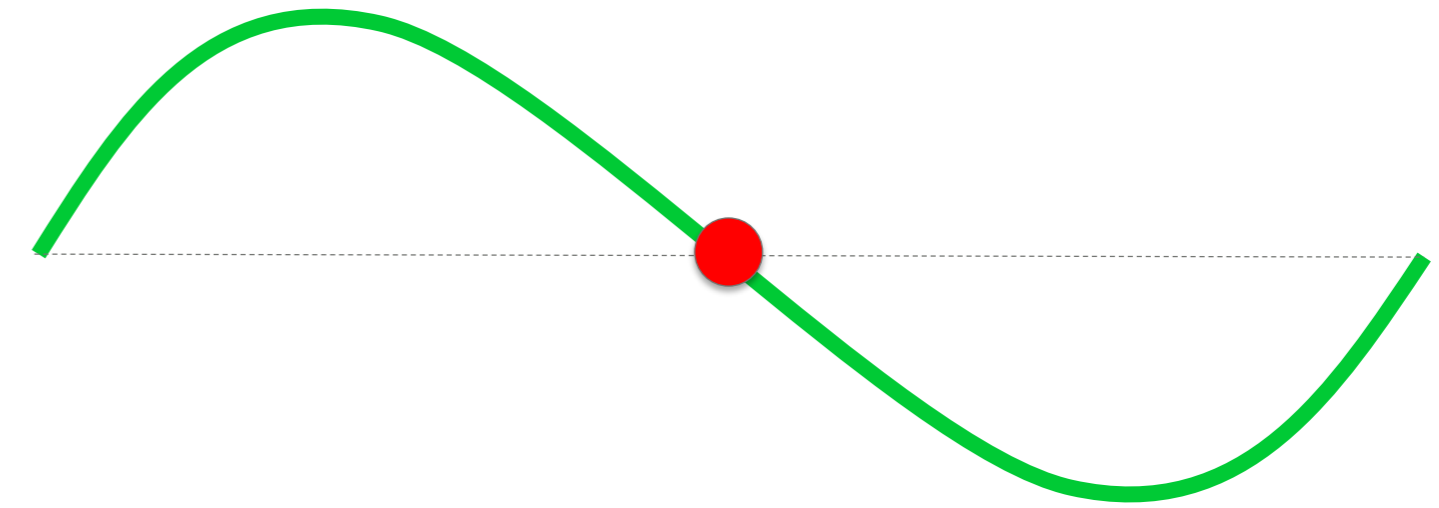
$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

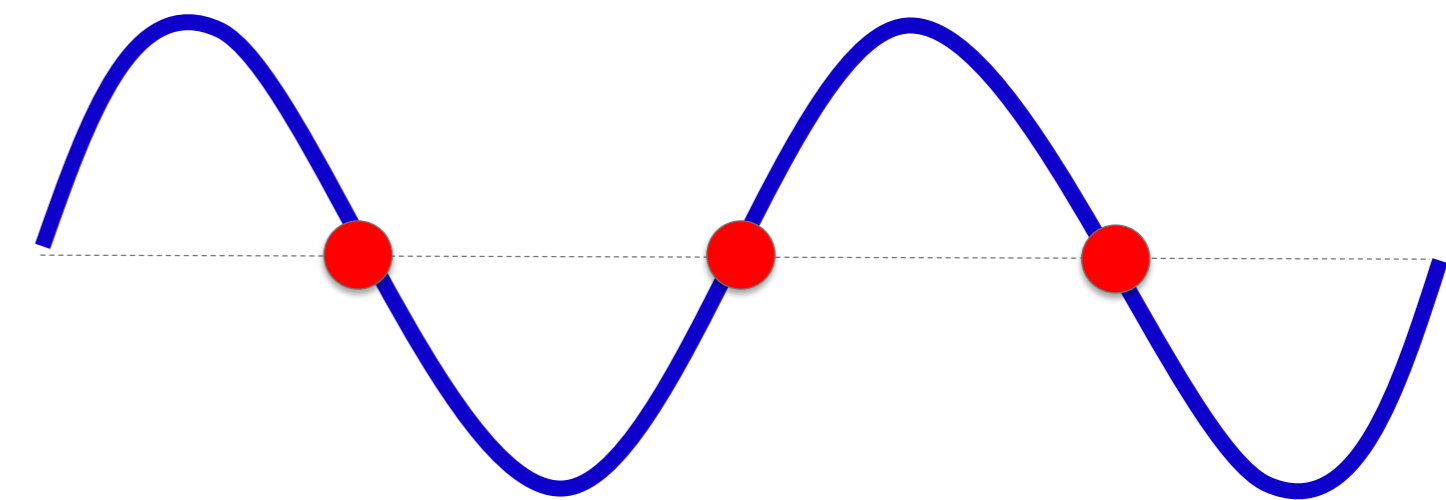
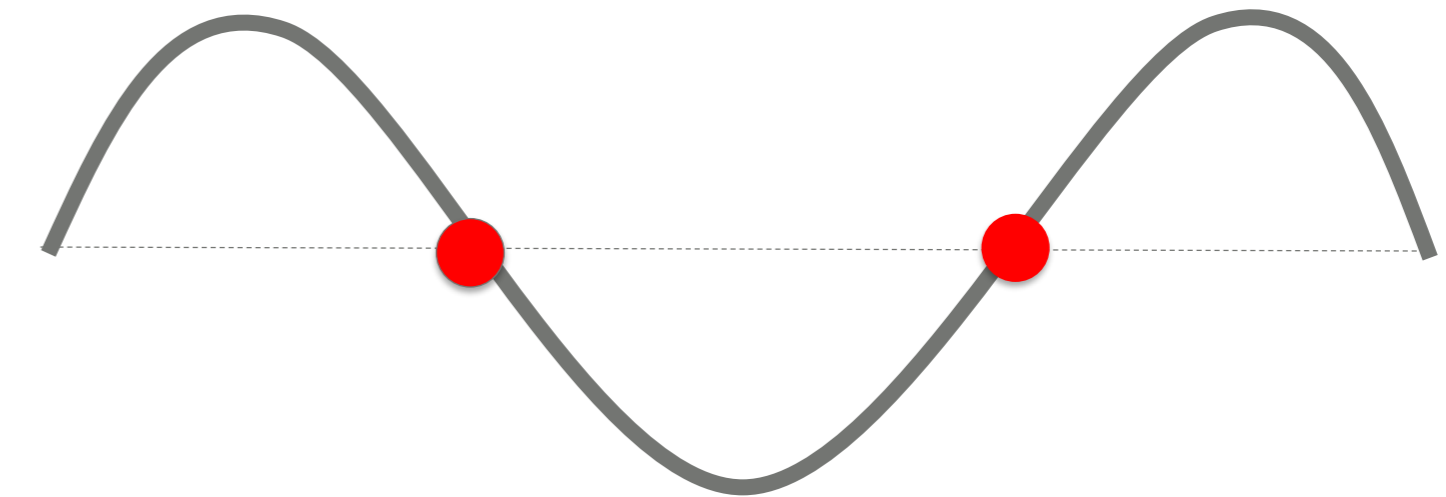
Mode 1 ->  $f=5 \text{ Hz}$



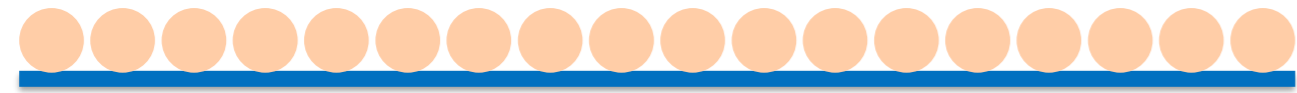
Mode 2 ->  $f=20 \text{ Hz}$



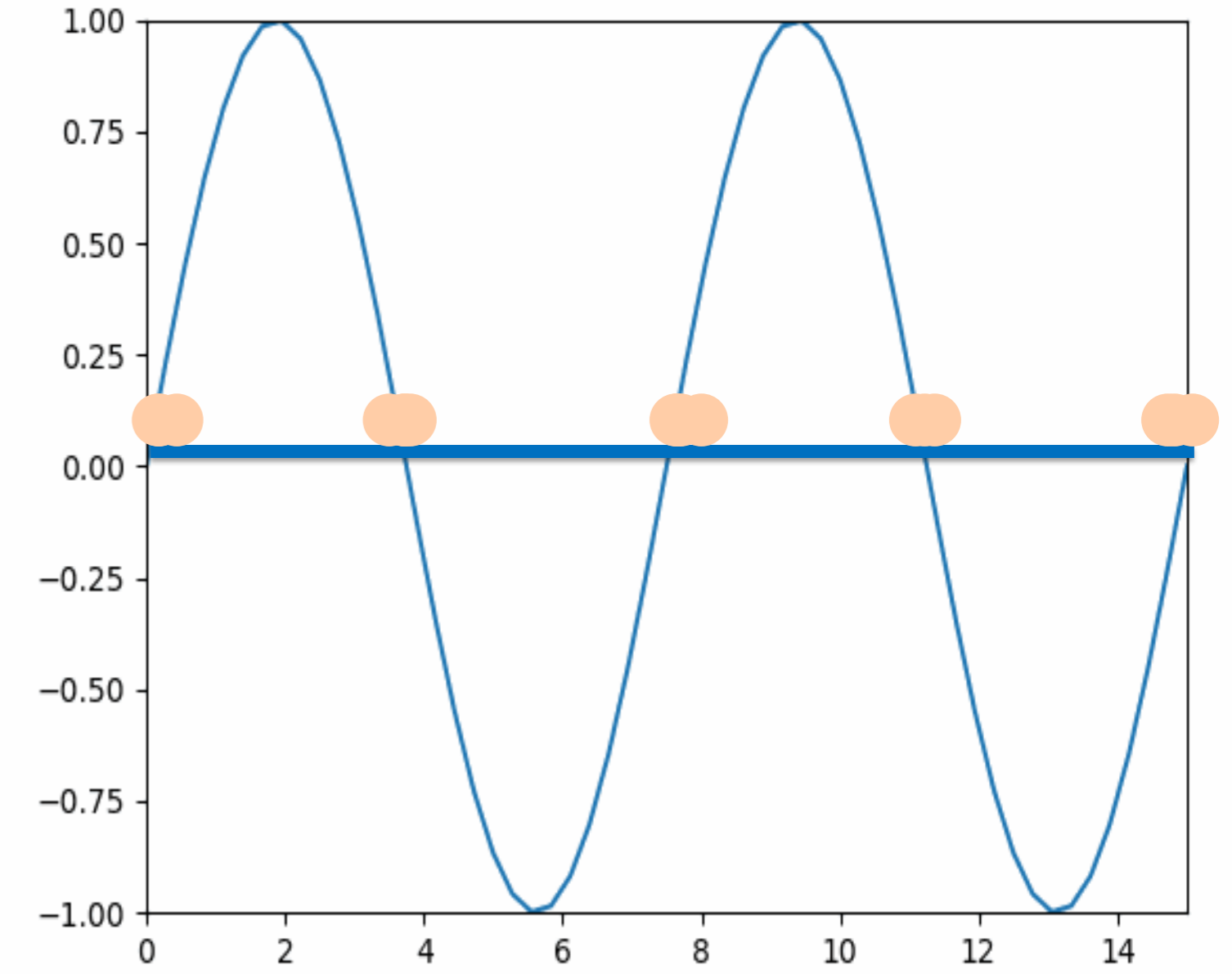
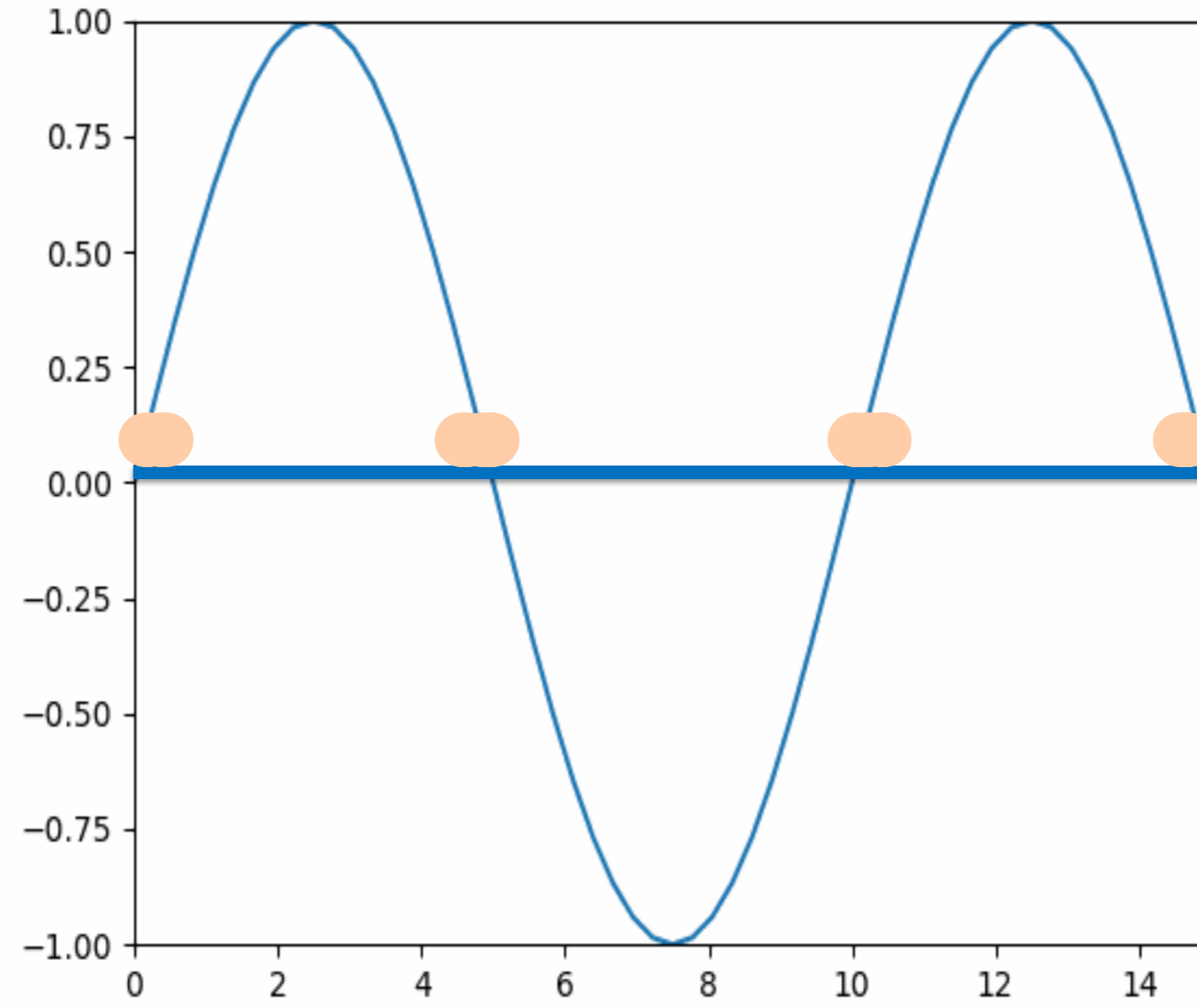
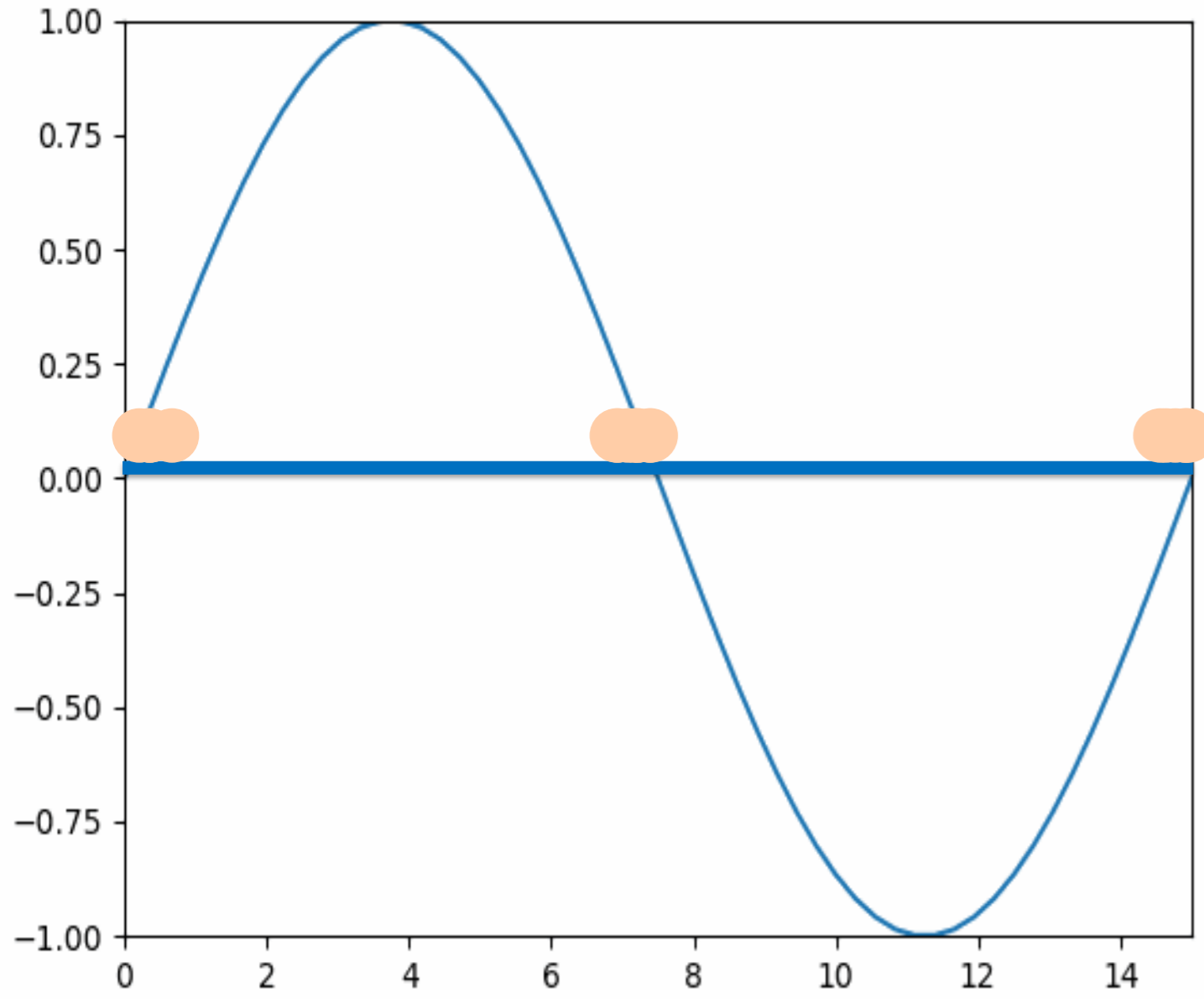
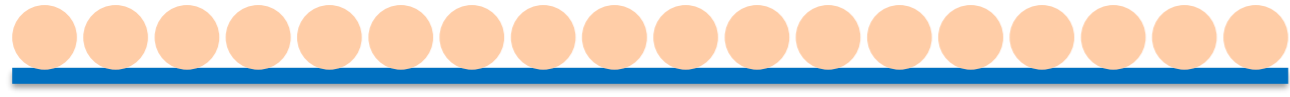
Mode 3 ->  $f=45 \text{ Hz}$



# Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM



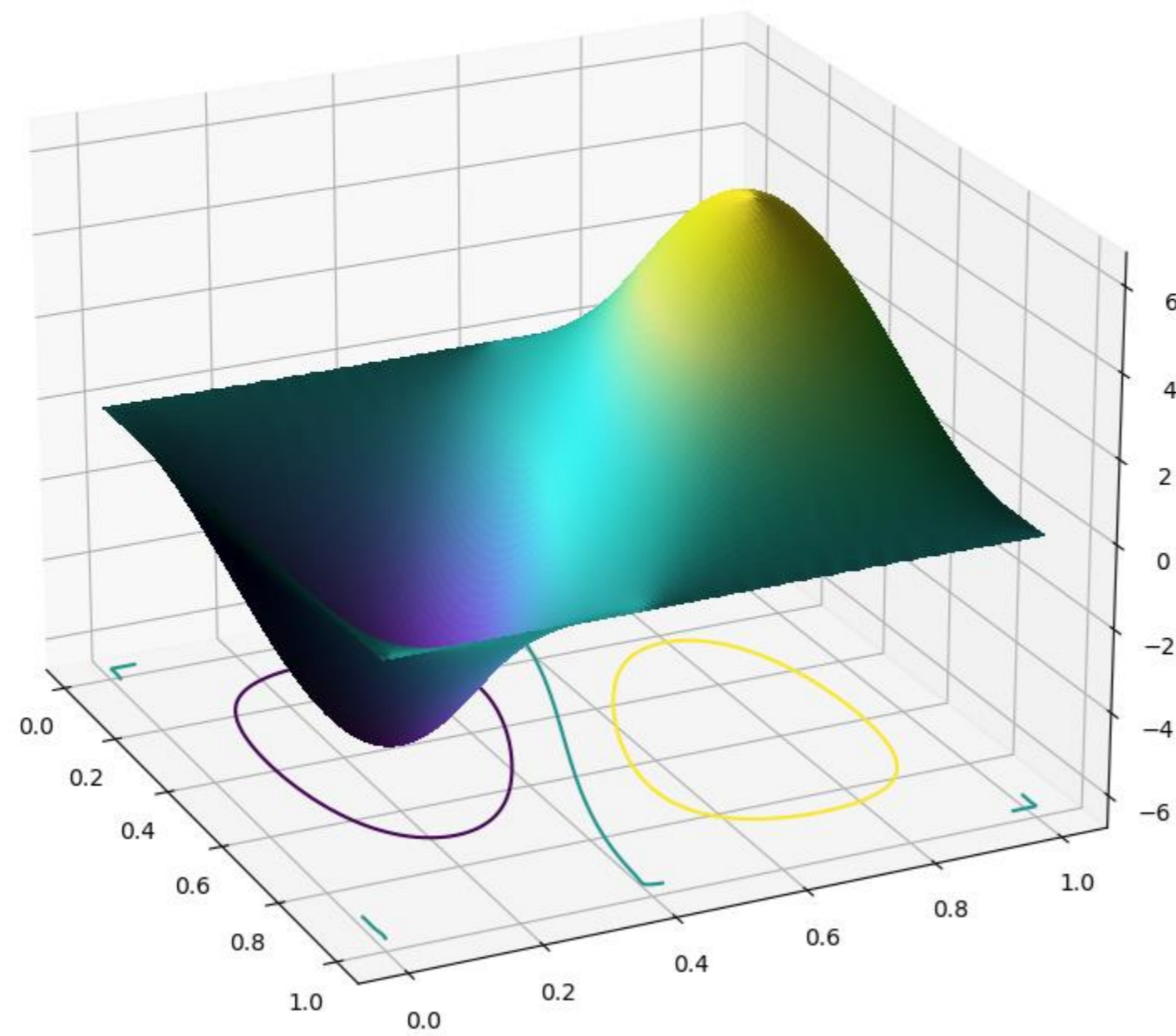
# Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM



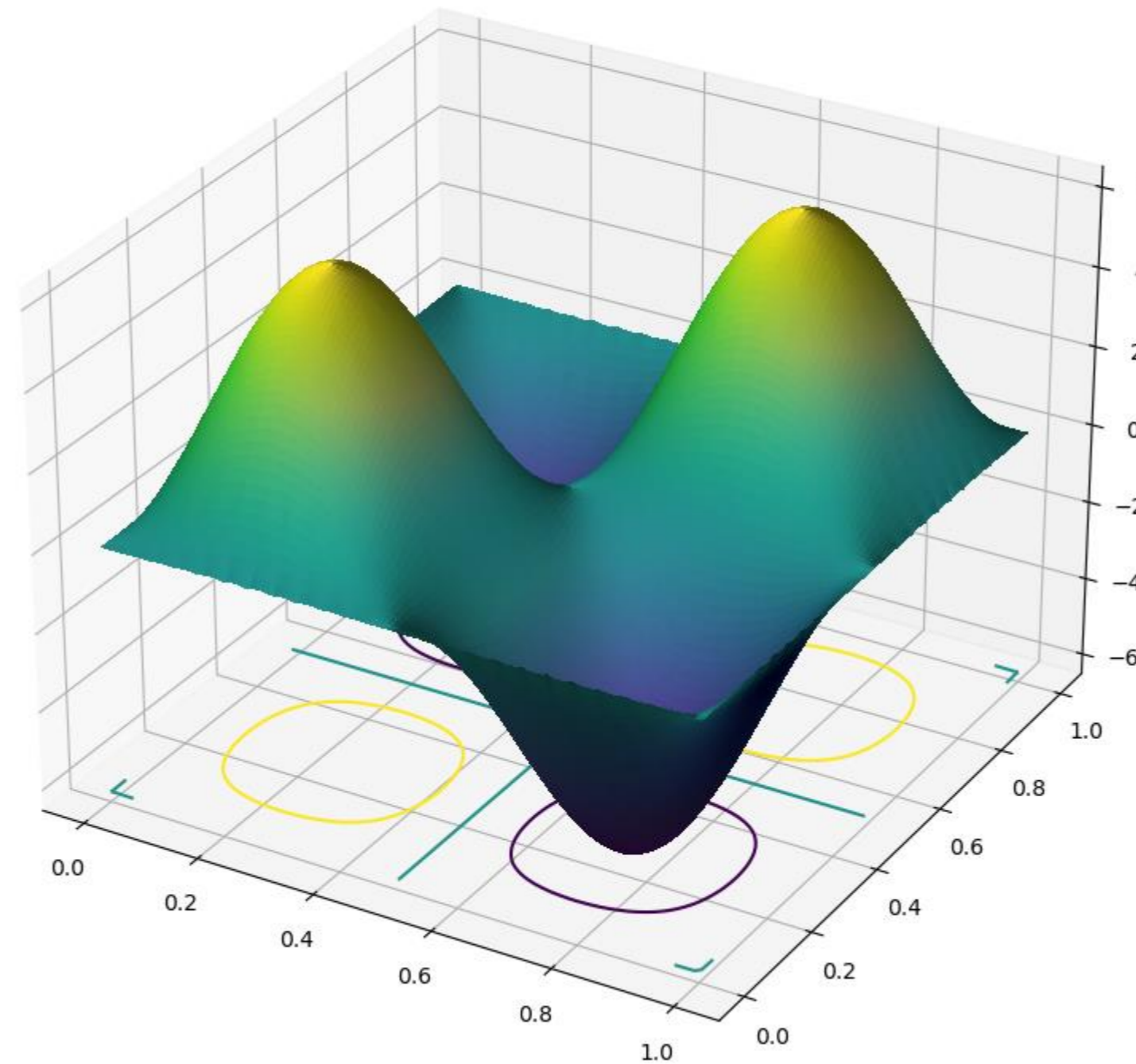


# Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM

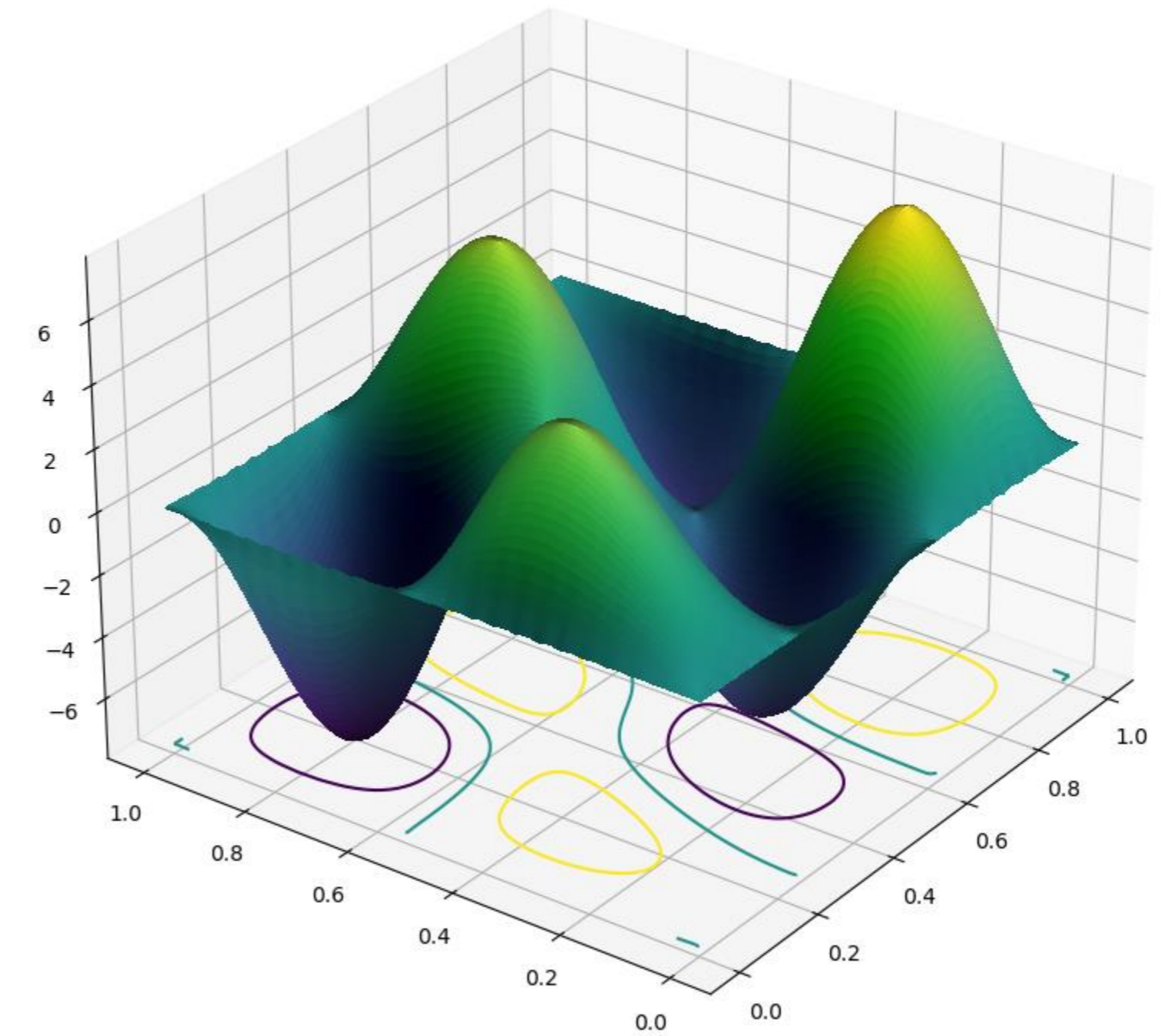
Modo 1 Frequency 23.03Hz



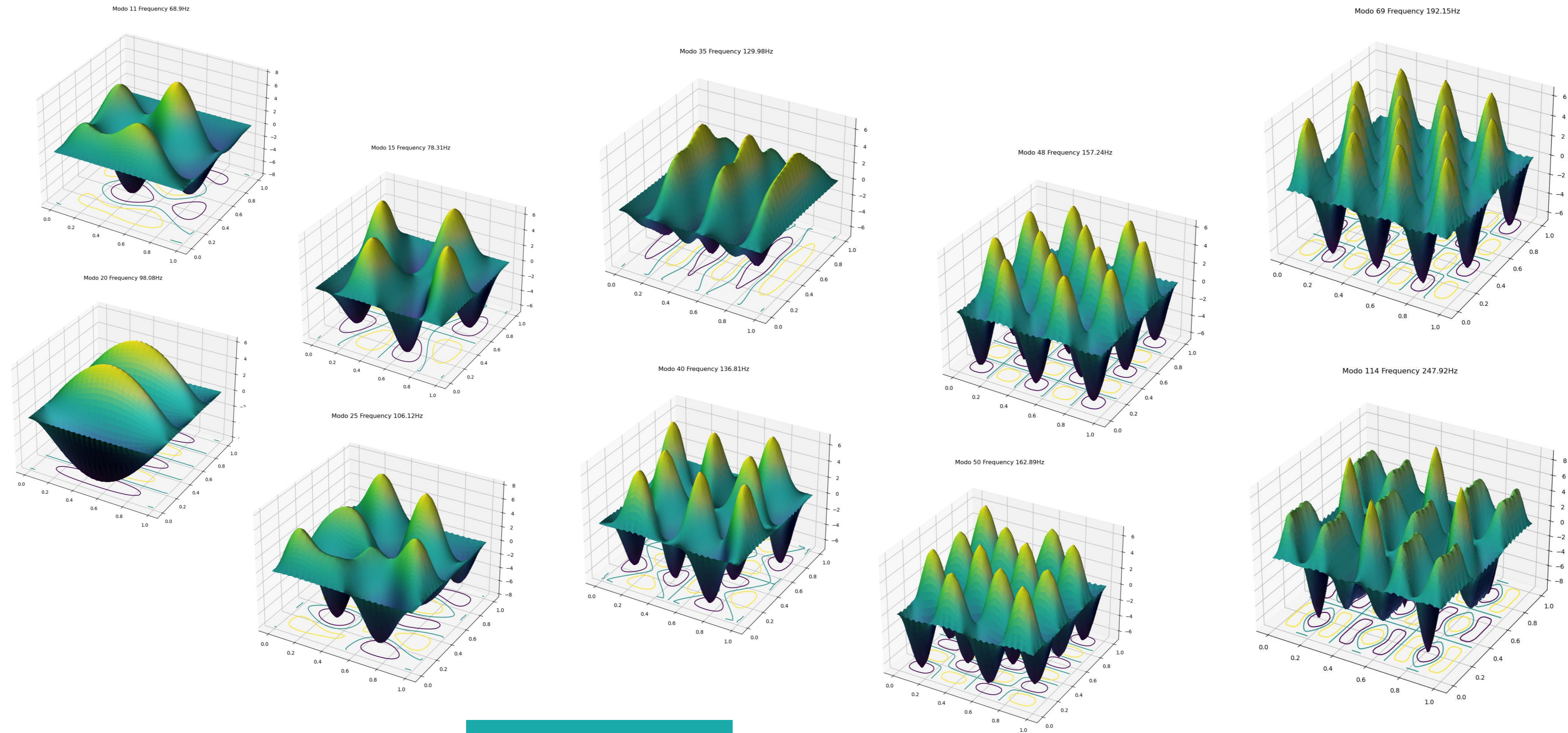
Modo 3 Frequency 35.34Hz



Modo 6 Frequency 54.28Hz



# Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM



Frecuencia



## Análisis modal como técnica revolucionaria dentro del SHM



<https://www.youtube.com/watch?v=wwJAgrUBF4w>



## Análisis Modal como técnica revolucionaria dentro del SHM

Existen dos grandes variantes dentro del análisis modal:

- **Análisis Modal Experimental (EMA).** Las excitaciones de entrada son conocidas.
- **Análisis Modal Operational (OMA).** Las excitaciones de entrada son desconocidas.



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Máster Universitario en Estructuras  
Curso 2020-2021

# Tema II: Fuentes de deterioro, patologías estructurales, y tecnologías de monitorización

Módulo: MÓDULO FUNDAMENTAL: CALIDAD Y DAÑO

Materia: **Análisis Modal y Detección de Defectos**

**Enrique García Macías**

[enriquegm@ugr.es](mailto:enriquegm@ugr.es)

**Departamento de Mecánica de Estructuras e  
Ingeniería Hidráulica**

# Desarrollo del curso

º	FECHA		HORA	PROFESOR	TEMA	
Clase 1	Lunes	1 febrero	9:30-11:30	EGM	1	Introducción: Análisis modal dentro del marco del mantenimiento de la salud estructural.
Clase 2	Lunes	8 febrero	9:30-11:30	EGM	2	Fuentes de deterioro, patologías estructurales, y tecnologías de monitorización.
Clase 3	Lunes	15 febrero	9:30-11:30	EGM	3	Taller: procesamiento de señales.
Clase 4	Lunes	22 febrero	9:30-11:30	EGM	4	Análisis modal experimental.
Clase 5	Lunes	15 marzo	9:30-11:30	EGM	5	Análisis modal operacional.
Clase 6	Lunes	12 abril	9:30-11:30	EGM	6	Análisis modal operacional automatizado. Práctica de laboratorio I.
Clase 7	Lunes	19 abril	9:30-11:30	EGM	7	Taller: Identificación del daño estructural.
Clase 8	Lunes	26 abril	9:30-11:30	RCT	8	Técnicas de identificación dinámica basadas en análisis modal operacional.
Clase 9	Lunes	26 abril	12:00-14:00	RCT	9	Práctica de laboratorio II: Test de vibración ambiental.
Clase 10	Martes	27 abril	9:30-11:30	RCT	10	Casos de estudio.
Clase 11	Martes	27 abril	12:00-14:00	RCT		Presentación de trabajos.

ENTREGA DE TRABAJOS Y EVALUACIÓN

Del 3 al 28 de mayo



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# ÍNDICE

- Patologías estructurales.
- Agentes de degradación.
- Tecnologías de monitorización.
- Sensores



# Patologías estructurales



**Síntomas: Patologías Estructurales**  
*Symptoms Structural pathologies*

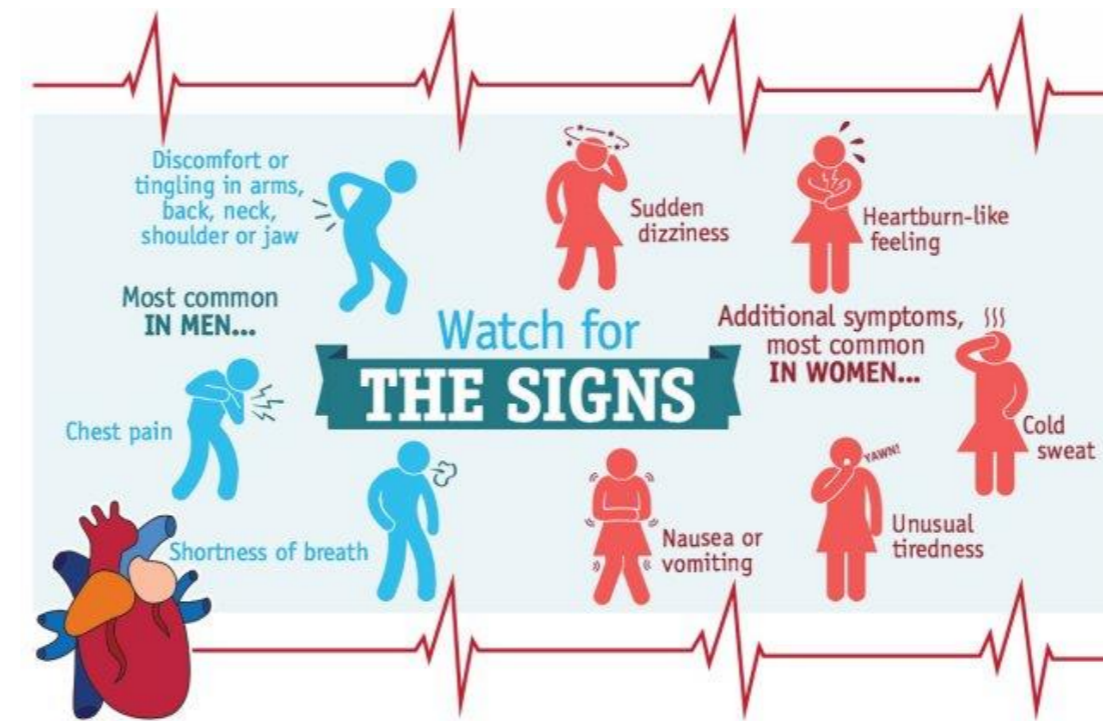


**Causas de degradación**  
*Causes of distress*

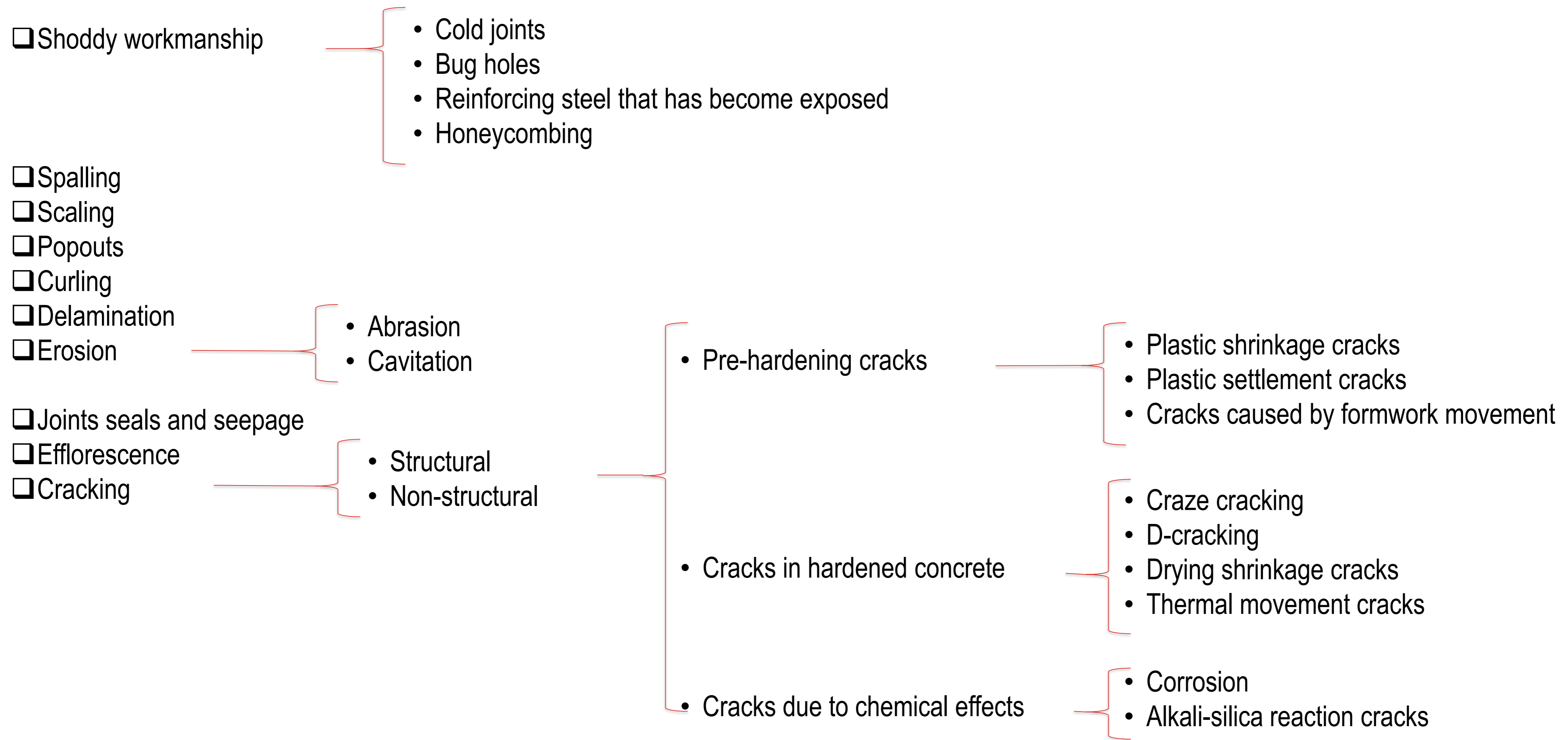




# Patologías Estructurales.



# Patologías estructurales



### SHODDY WORKMANSHIP – MANO DE OBRA DEFECTUOSA

La mano de obra de mala calidad puede provocar problemas importantes en las estructuras de hormigón. Es por tanto muy importante planificar inspecciones in situ durante la obra y puesta en servicio. Entre otros defectos, es común encontrar:

- Cold joints (juntas frías)
- Bug holes (*bolsas de aire o poros*)
- Acero estructural que ha quedado expuesto
- Honeycombing (*nido de abejas*)

### SHODDY WORKMANSHIP – MANO DE OBRA DEFECTUOSA

■ Cold joints: Una junta fría es un **plano de debilidad en el hormigón causado por una interrupción o retraso en las operaciones de hormigonado**. Ocurre cuando una tongada de hormigón ha comenzado a fraguar antes de agregar la siguiente tongada, de modo que ambas no se entremezclan correctamente. A veces, las juntas frías ocurren debido a interrupciones del trabajo por emergencia o una mala planificación de la jornada laboral, aunque también pueden ocurrir fruto de mala consolidación.

Para evitar juntas frías en muros, vigas y otros componentes estructurales es necesario colocar el hormigón en capas de unos 20 cm de espesor y entremezclar cada tongada con la anterior utilizando un vibrador. La colocación del hormigón debe comenzar en las esquinas y avanzar hacia el centro. En pendientes inclinadas, el trabajo debe realizarse cuesta arriba. En climas cálidos, puede ser necesario un aditivo retardador para reducir el tiempo de fraguado.



<https://foundation-crack-expert.com/concrete-joint-cold-joint-repair/>

### SHODDY WORKMANSHIP – MANO DE OBRA DEFECTUOSA

■ **Bug holes:** Pequeñas cavidades regulares o irregulares, que generalmente no exceden los 15 mm de diámetro, resultado del **atrapamiento de burbujas de aire en la superficie del hormigón** durante el vertido y consolidación.

Los “bug holes” suelen aparecer en el hormigonado de elementos verticales. Sin embargo, estos pueden considerarse defectos de riesgo si exceden en diámetro y profundidad los límites prescritos por los códigos de diseño. Por ejemplo, el código ACI 301-10, “Specifications for Structural Concrete” establece un límite de ~1.25 cm en superficies expuestas.

ACI 347-04, “Guide to Formwork for Concrete,”



<https://www.forconstructionpros.com/concrete/equipment-products/article/10726215/tips-to-minimize-concrete-consolidation-issues-with-forming-projects>

### SHODDY WORKMANSHIP – MANO DE OBRA DEFECTUOSA

#### ■ Acero estructural que ha quedado expuesto

Las armaduras deben estar cubiertas con hormigón cumpliendo con los recubrimientos mínimos establecidos por la normativa (EHE-08). Sin embargo, en ocasiones las barras de refuerzo puede desplazarse de su posición cuando se vierte el hormigón y, pudiendo no cumplir con las especificaciones de recubrimiento. Evidentemente, esto puede dar origen a una corrosión acelerada del elemento estructural en cuestión.



[www.buyersask.com/structural/rebar-problems-in-concrete-foundations-slabs-and-walls/](http://www.buyersask.com/structural/rebar-problems-in-concrete-foundations-slabs-and-walls/)



Chemrouk, M. (2015). The deteriorations of reinforced concrete and the option of high performances reinforced concrete. *Procedia Engineering*, 125, 713-724.

### SHODDY WORKMANSHIP – MANO DE OBRA DEFECTUOSA

■ **Honeycombing:** áreas de la superficie de hormigón que presentan una concentración del agregado grueso.

- Compactación insuficiente del hormigón.
- Gran caída libre del hormigón durante el vertido.
- Uso de agregados más gruesos o en mayor proporción que los definidos por la composición de diseño.
- Adición de más agua de la necesaria para lograr una buena trabajabilidad.
- Concentración excesiva de acero no permitiendo que el hormigón fluya a todos los rincones.



<https://foundation-crack-expert.com/concrete-repair-holes-honeycombs/>



<https://www.cforcivil.com/concrete-honeycomb-repair-using-cempatch/>

## SPALLING (desconchado)

**Disintegration** es la pérdida o desprendimiento de porciones de hormigón por cualquier medio. Los fenómenos de “disintegration” y “spalling” se diferencian por la cantidad de material que se desprende del cuerpo principal de hormigón. Cuando la pérdida es pequeña, hablamos de “disintegration”. Por el contrario, cuando la masa desprendida es considerable normalmente hablamos de “spalling”.

**Spalling** supone un fallo estructural. Ésta normalmente ocurre como resultado de la aparición de cargas excesivas o sollicitaciones concentradas repetitivas. Por otra parte, el desconchamiento del hormigón puede ser un síntoma de corrosión del hormigón, reacciones alkali silica, o aparecer como causa de fuego o fenómenos climáticos extremos.

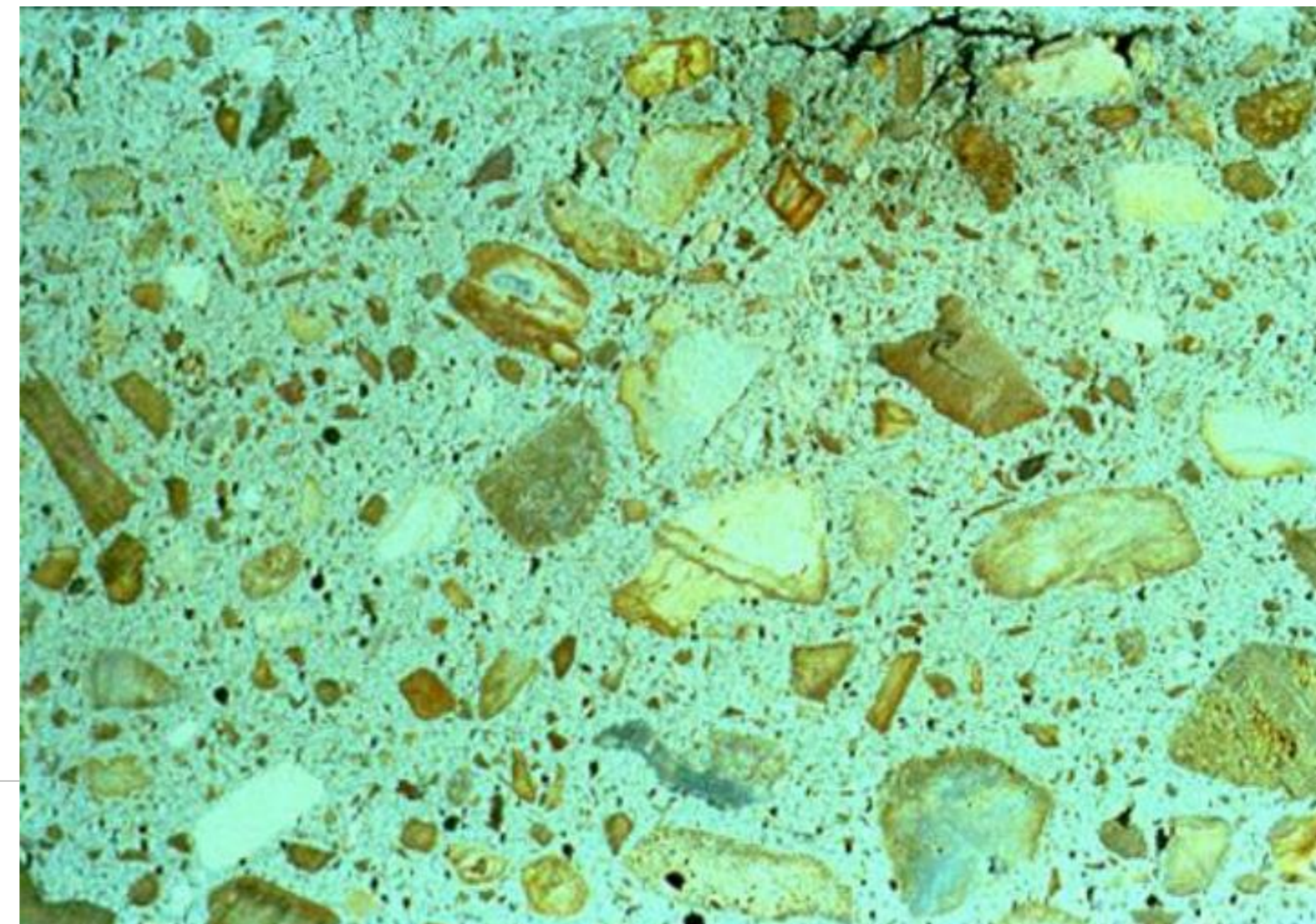




# Patologías estructurales

## SCALING (escamado)

**Scaling** se define como la descamación o desprendimiento local de una parte superficial de hormigón endurecido o mortero. Puede originarse por el uso de sales de deshielo o ciclos de congelamiento y descongelamiento. Otros factores pueden ser el uso de agregados en mal estado, operaciones de acabado en presencia de agua de exudación (bleeding o sangrado), o un curado insuficiente.



## POPOUTS (desprendimientos)

**Popouts:** define la rotura de pequeñas porciones de la superficie del hormigón como resultado de una presión interna. Normalmente presentan una geometría cónica. Dichas presiones aparecen a raíz de la expansión de agregados porosos con altas tasas de absorción. A medida que el agregado absorbe humedad o se congela en ambientes húmedos, éste se expande creando presiones internas que pueden finalmente provocar el desprendimiento de la superficie del hormigón. También puede ser resultado de la presencia de impurezas en el agregado.

La aparición de popouts se puede minimizar con las siguientes prácticas:

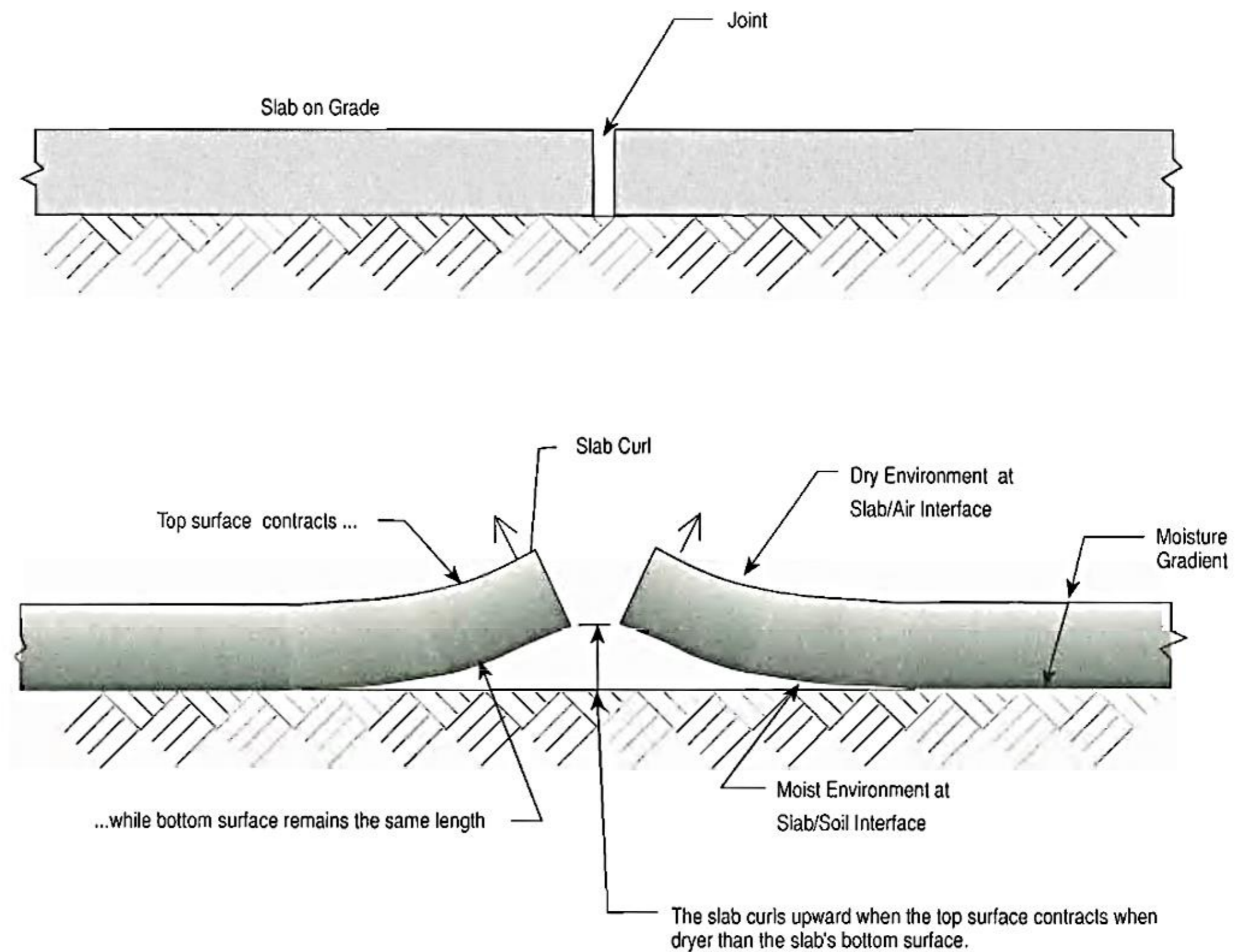
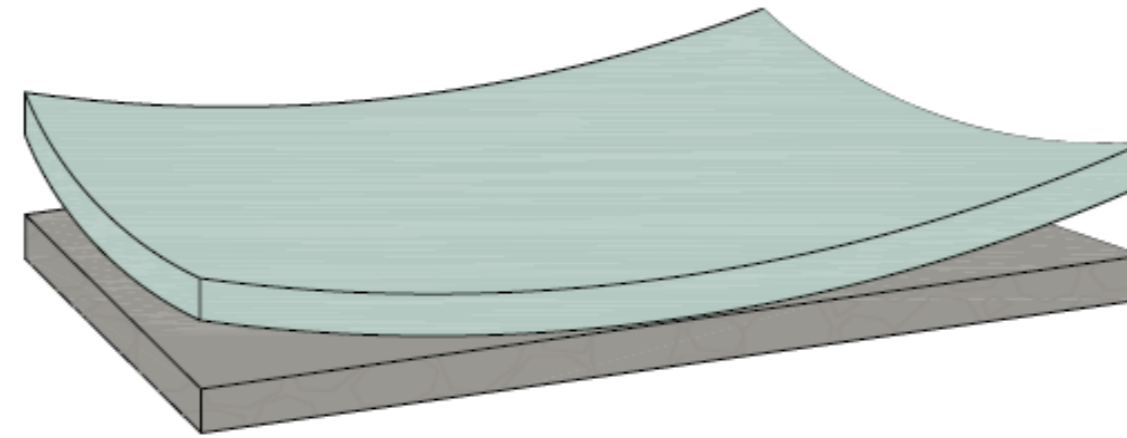
- Buenas granulometrías, con áridos de calidad y libre de impurezas.
- Incluciones adecuadas en el hormigón para asegurar un correcto drenaje.
- Evitar que el hormigón se congele antes del secado.
- Mantener limpias las superficies de hormigón quitando nieve y hielo.



# Patologías estructurales

## CURLING

**Curling** se define como la distorsión de una losa de hormigón adquiriendo cierta curvatura (hacia arriba o hacia abajo) en los bordes de la misma. Es una problemática común en losas hormigonadas in situ. El fenómeno de “curling” es causado por la existencia de condiciones de humedad y temperatura desiguales a lo largo del espesor de la losa. Asimismo, el curling se ve acrecentado a medida que aumenta la retracción por secado. Las superficies de las losas normalmente se encuentran secas en la cara superior y sometidas a mayores temperaturas, donde están expuestas al aire, mientras que la cara inferior suelen estar más húmedas y frías en contacto con el suelo. La cara seca tiende a contraerse al contrario que la cara inferior. Para acomodar estas deformaciones diferenciales, la losa tiene a curvarse hacia arriba.



### DELAMINATION (Delaminación)

**Delaminación** se define como la separación de una capa superficial de hormigón. Las delaminaciones suelen ser paralelas a la superficie y originarse cerca de la cara superior de las barras de refuerzo.

Las causas de delaminación puede ser variadas:

- Realizar tareas de acabado antes del tiempo de fraguado produce que el agua de exudación o burbujas de aire formen ampollas. Cuando la superficie se ve sometida a alguna acción mecánica, estas ampollas suelen delaminarse.
- Alta tasa de evaporación.
- Expansión de armaduras con avanzado estado de corrosión.

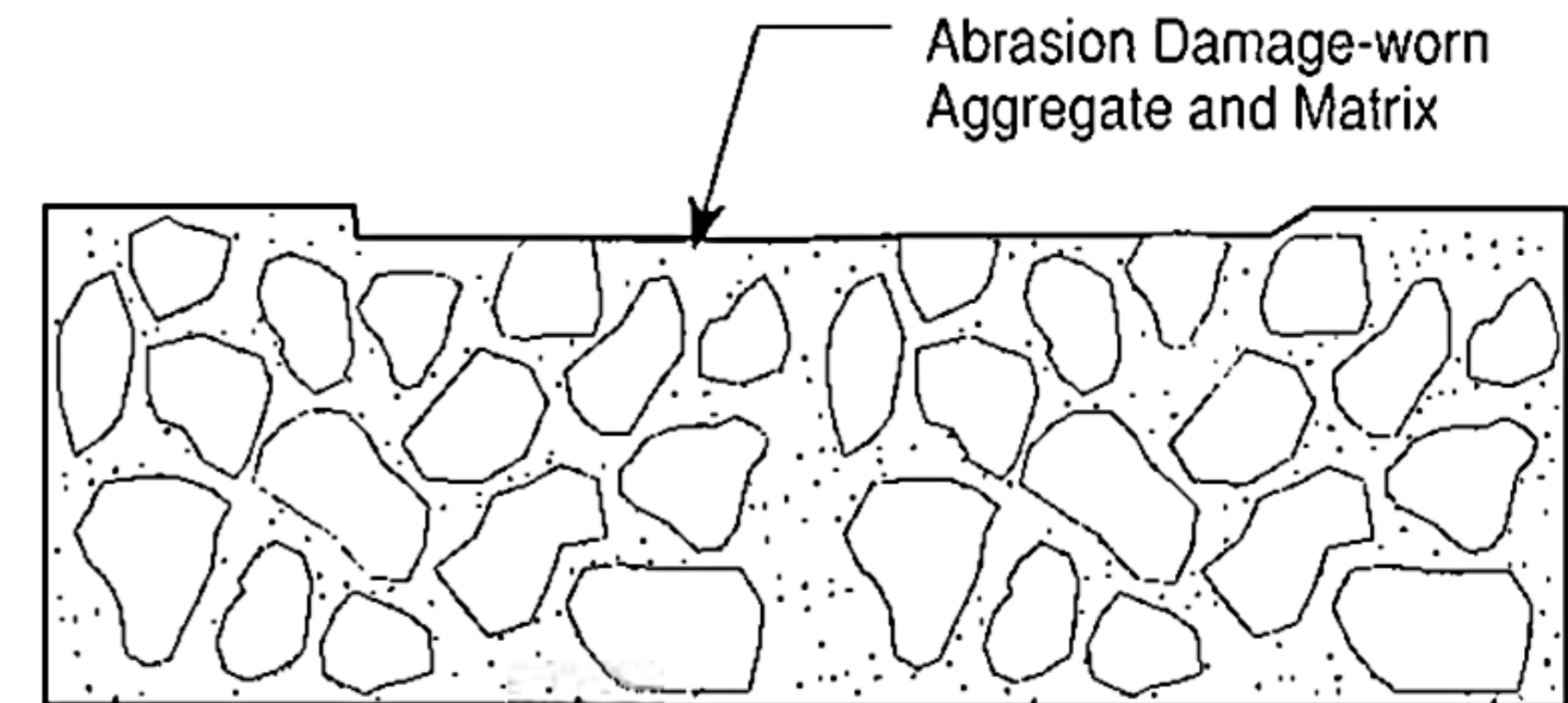


# Patologías estructurales

## EROSIÓN

Solemos diferenciar los fenómenos de erosión en dos categorías: **abrasión** y **cavitación**.

**Abrasión** se define desgaste de la superficie por frotamiento y fricción. Generalmente, la superficie se desgasta uniformemente, incluyendo tanto la matriz de cemento como los agregados. Los factores que afectan la resistencia a la abrasión incluyen: 1) Resistencia a la compresión; 2) Propiedades de los agregados; 3) métodos de acabado; 4) Uso de coberturas; 5) Curado.



# Patologías estructurales

## EROSIÓN

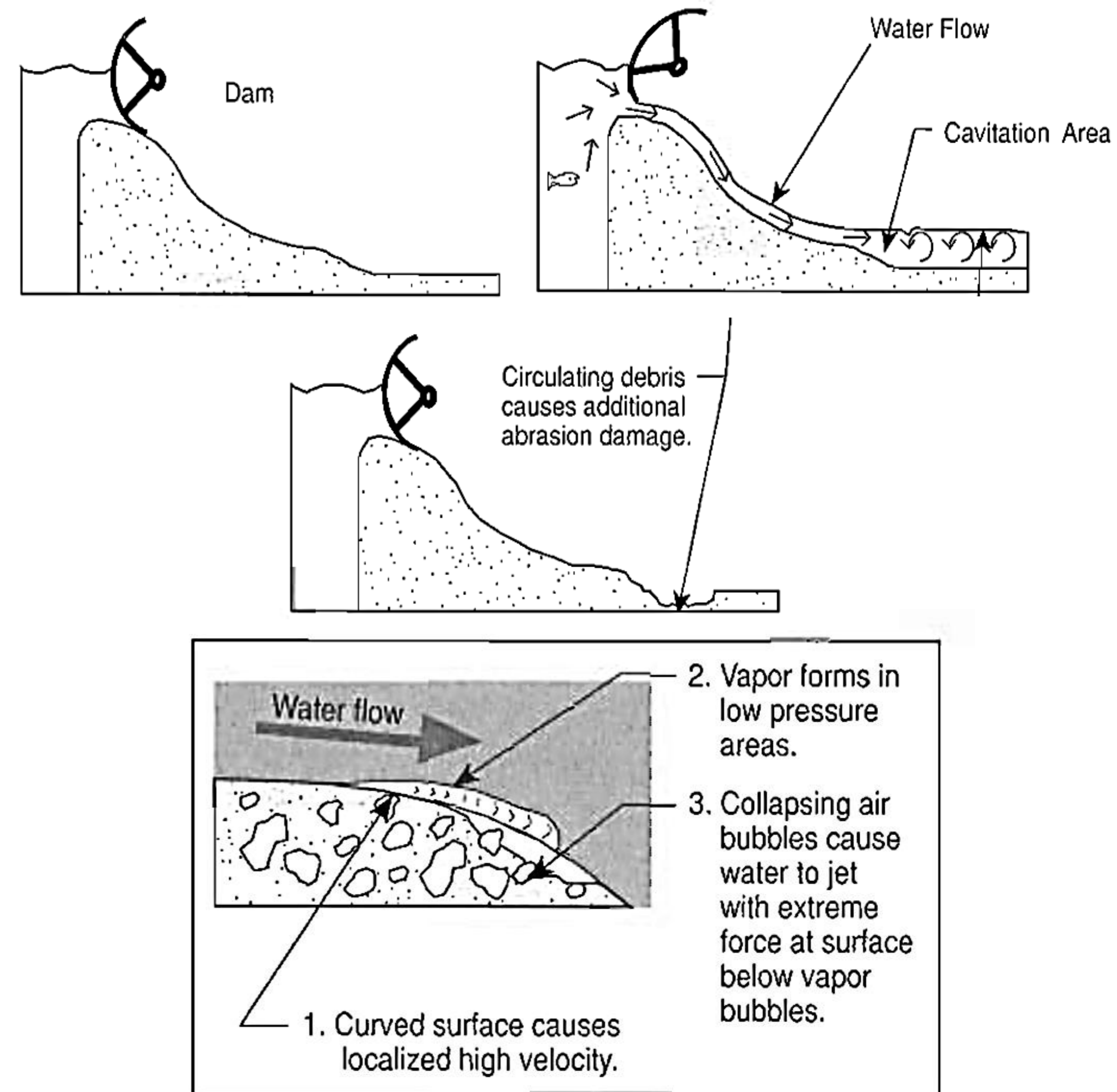
Solemos diferenciar los fenómenos de erosión en dos categorías: **abrasión** y **cavitación**.

**Abrasión** se define desgaste de la superficie por frotamiento y fricción. Generalmente, la superficie se desgasta uniformemente, incluyendo tanto la matriz de cemento como los agregados. Los factores que afectan la resistencia a la abrasión incluyen: 1) Resistencia a la compresión; 2) Propiedades de los agregados; 3) métodos de acabado; 4) Uso de coberturas; 5) Curado.

**Cavitación:** causa la erosión de las superficies de hormigón como resultado del colapso de burbujas de vapor formadas por cambios bruscos de presión dentro de un fluido a gran velocidad. Cuando las burbujas de vapor se forman en el fluido, éstas viajan con él corriente abajo. Cuando el fluido entra en una región de altas presiones, las burbujas colapsan (implosionan) liberando una gran energía que puede formar cavidades en el hormigón. Estas cavidades se forman cerca de curvas, salientes, y cambios de pendiente. El daño debido a la cavitación se materializa en la erosión de la matriz de cemento, dejando los agregados intactos y liberando grandes cantidades de hormigón.

Los fenómenos de cavitación se pueden evitar produciendo superficies y perfiles suaves sin protuberancias que se opongan al flujo.

Concrete Repair and Maintenance” by Peter H. Emmons, R.S. Means Company, Kingston, MA, USA



# Patologías estructurales

<https://www.youtube.com/watch?v=m8xZzmtM8iw>



Glen Canyon Dam



0.91 m-thick concrete tunnel spillway  
Cavitation damage during the 1983-84 flooding



## Patologías estructurales

### JOINT SEALS AND SEEPAGE (Sellos de juntas y filtraciones)

El **sellado de juntas** está destinado a repeler la entrada de agua. Si el sello de una junta falla permitiendo la entrada de agua en la junta de hormigón, esto puede provocar la aparición de problemas de pandeo, agrietamiento, erosión, etc. Otro propósito del sellado de juntas es el de evitar la entrada de debris que pueda expandirse en la junta, provocando agrietamiento y roturas. **Las filtraciones** consisten en el movimiento de agua u otros fluidos a través de los poros o juntas del hormigón.





### EFFLORESCENCE (Eflorescencias)

El término eflorescencia refiere a depósitos cristalinos en superficies de mampostería, estuco, u hormigón. Suelen ser de apariencia blanquecina.

- La eflorescencia es causada por la migración de agua a través de la estructura que trae sales solubles a la superficie.
- La eflorescencia requiere el movimiento de la humedad.



# Patologías estructurales

## CRACKING (Agrietamiento)

¡El agrietamiento es omnipresente en el hormigón!

En la mayoría de los casos, las grietas no suponen un riesgo para la seguridad estructural, aunque en algunos casos pueden causar un deterioro acelerado que termine comprometiendo la capacidad portante de la estructura

Structural (load induced)

Non-structural

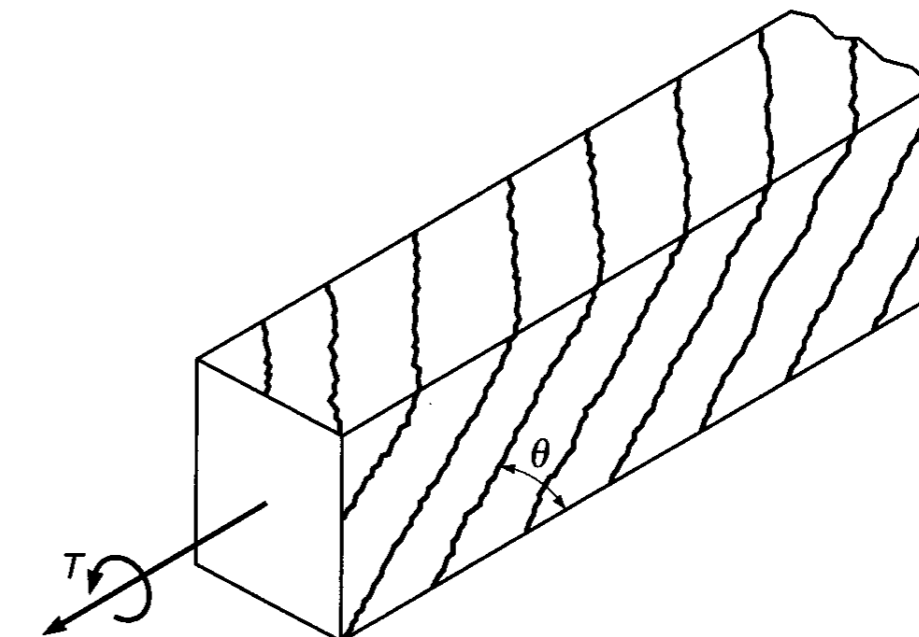
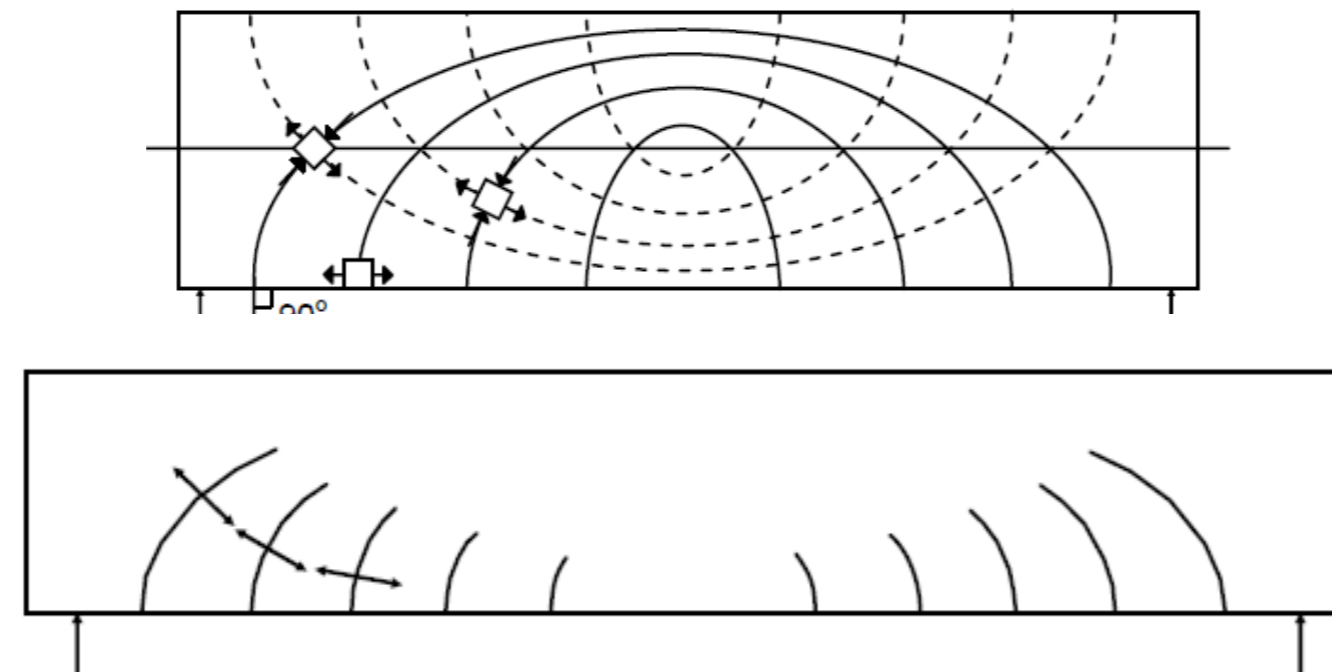
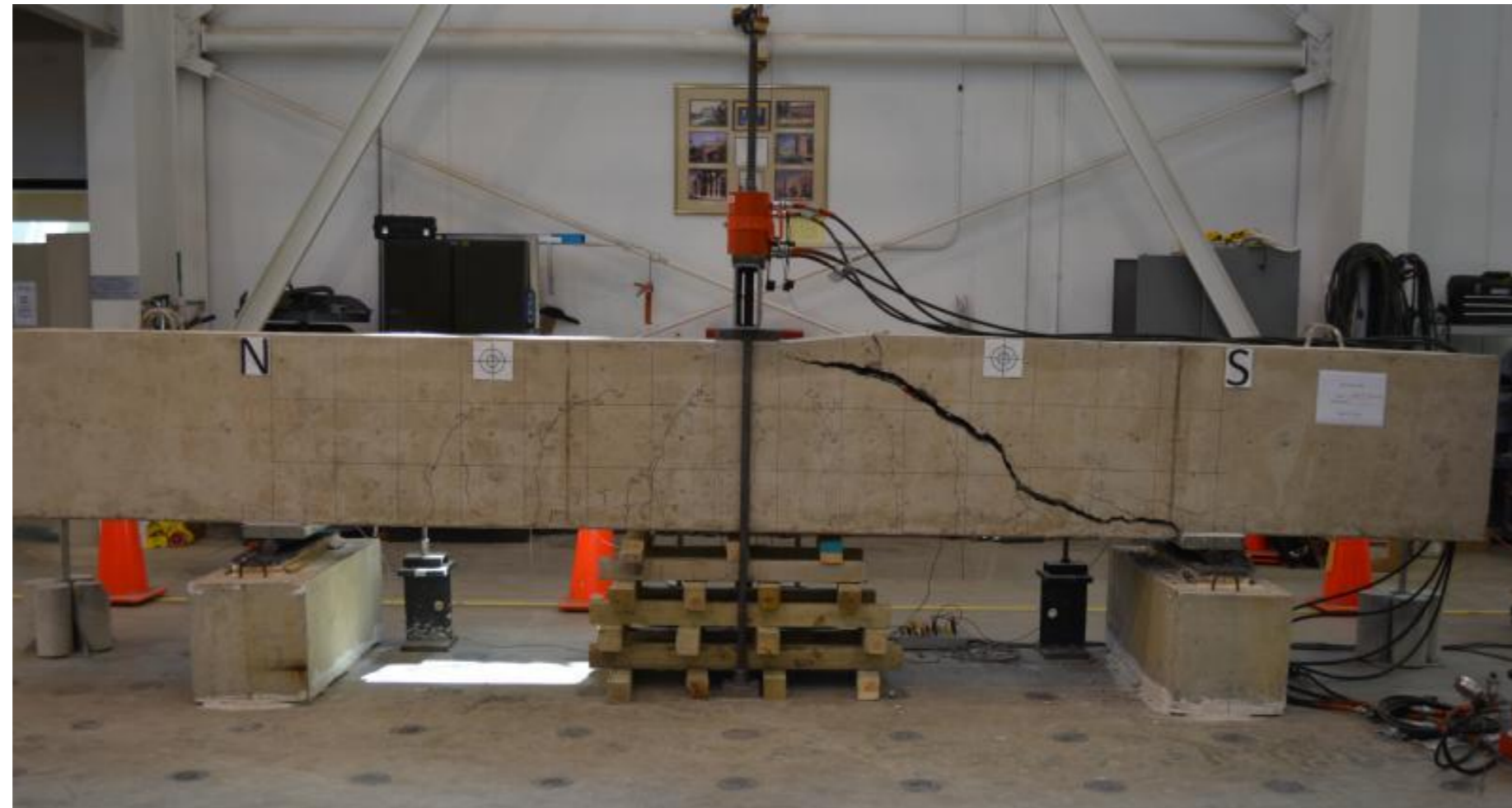


# Patologías estructurales

## Structural cracks

El propósito del refuerzo de acero no es prevenir completamente el agrietamiento del hormigón. La capacidad de deformación por tracción del hormigón es pequeña en comparación con las deformaciones de trabajo habituales del acero, por lo que el agrietamiento suele ser inevitable.

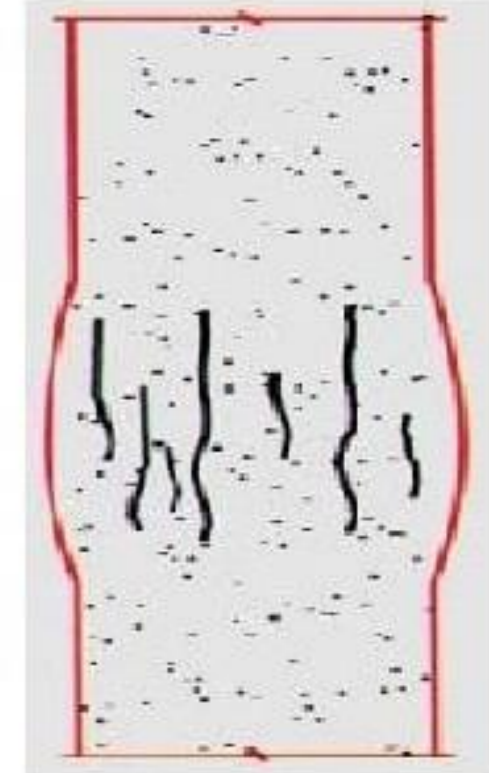
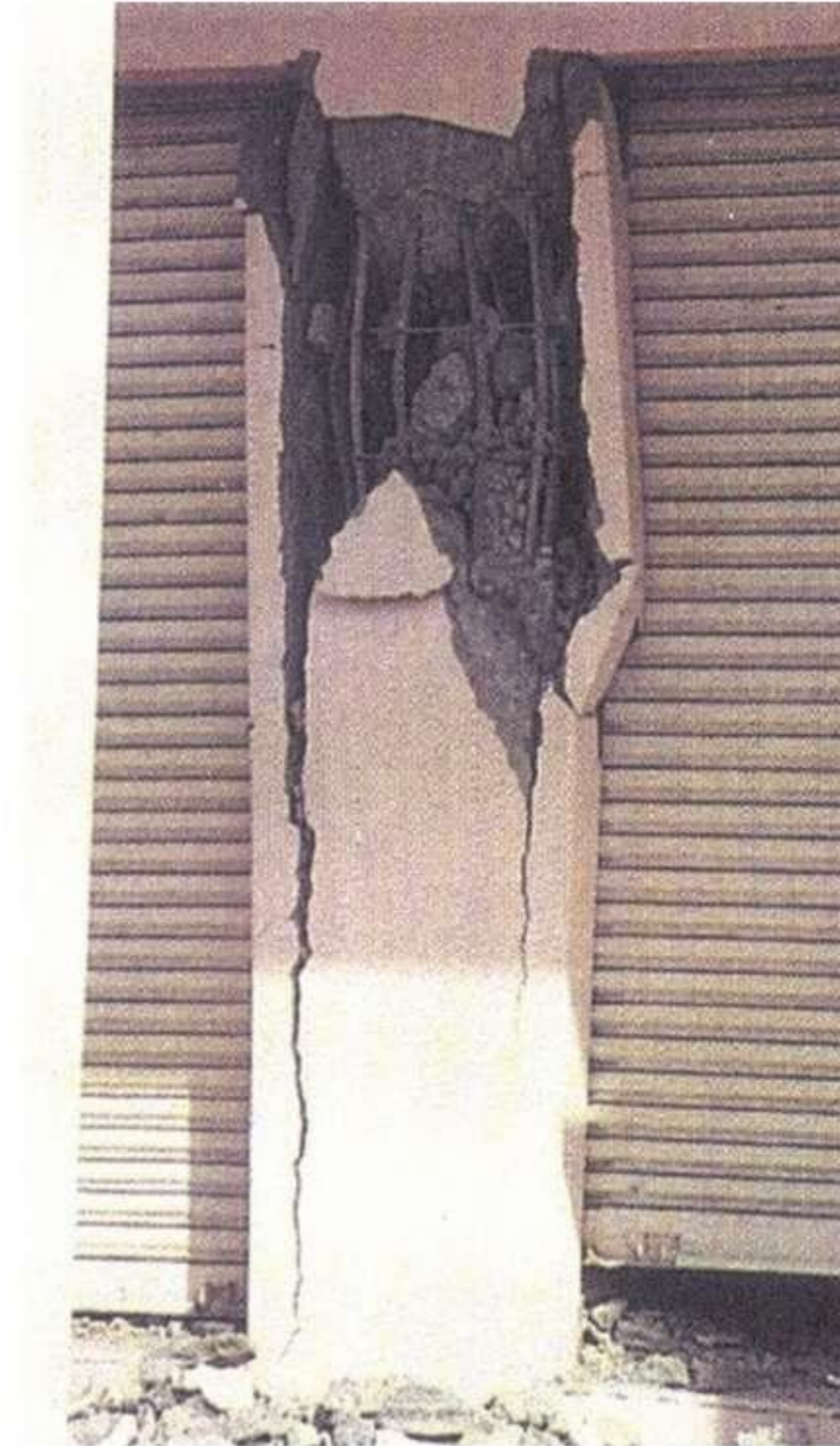
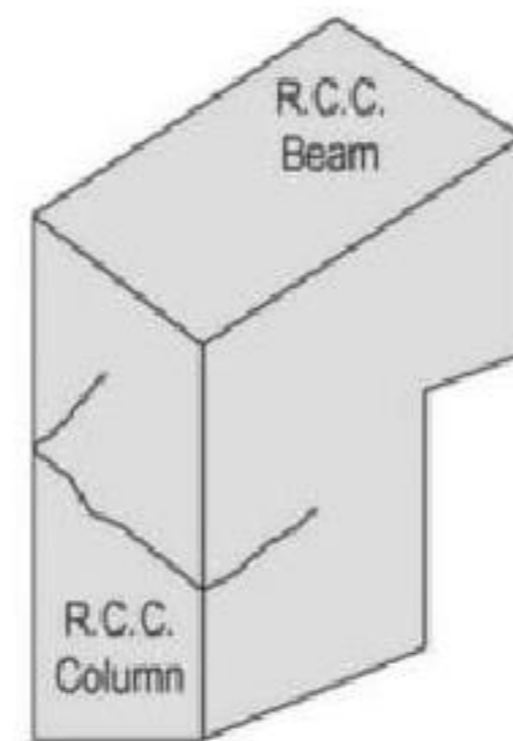
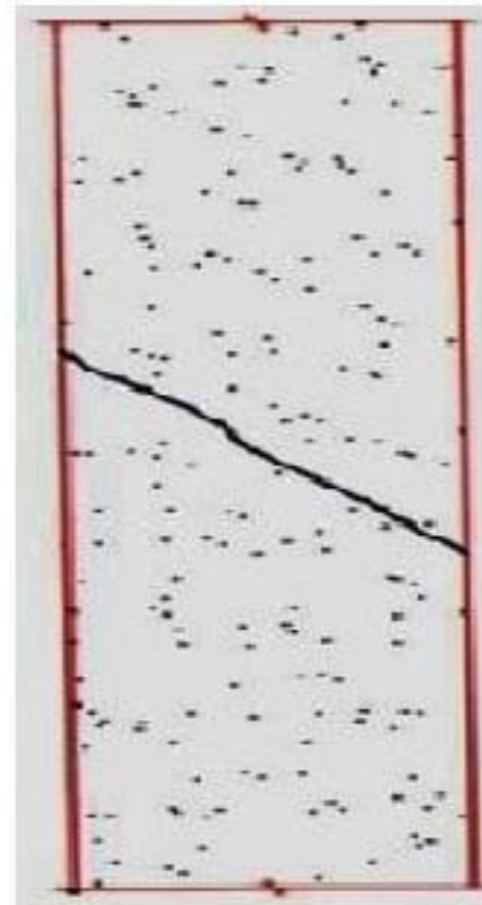
- Flexural cracking
- Shear cracking
- Torsion cracking



# Patologías estructurales

## Structural cracks

- Diagonal cracks
- Horizontal cracks
- Splitting cracks



# Patologías estructurales

## EN 1992-1-1:2004

(1) Cracking shall be limited to an extent that will not **impair the proper functioning or durability of the structure or cause its appearance to be unacceptable.**

(2) Cracking is normal in reinforced concrete structures subject to bending, shear, torsion or tension resulting from either direct loading or restraint or imposed deformations.

- Crack width
- Crack spacing

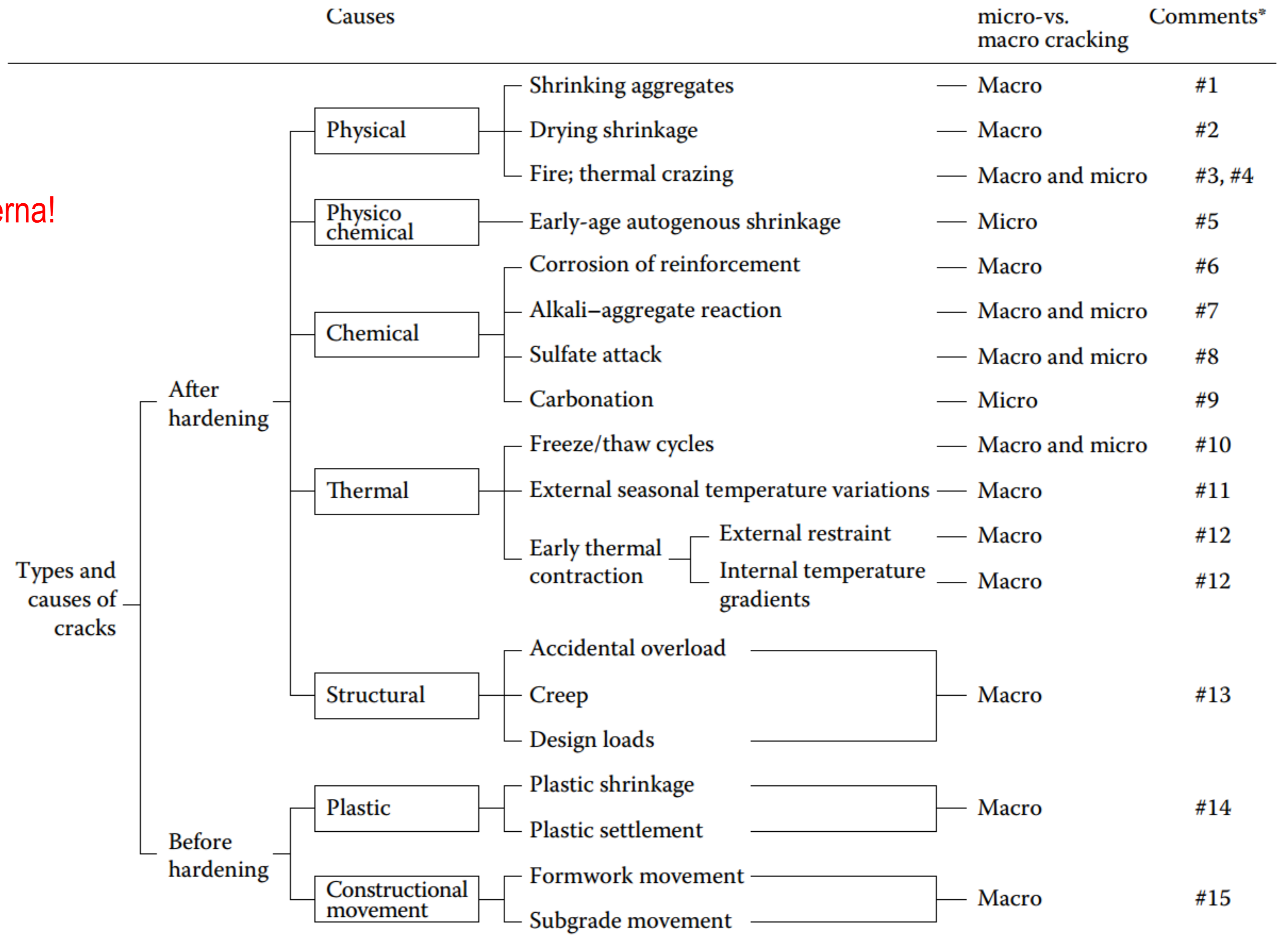
Table 7.1N Recommended values of  $w_{max}$  (mm)

Exposure Class	Reinforced members and prestressed members with unbonded tendons	Prestressed members with bonded tendons
	Quasi-permanent load combination	Frequent load combination
X0, XC1	0,4 <sup>1</sup>	0,2
XC2, XC3, XC4	0,3	0,2 <sup>2</sup>
XD1, XD2, XS1, XS2, XS3		Decompression
<p><b>Note 1:</b> For X0, XC1 exposure classes, crack width has no influence on durability and this limit is set to guarantee acceptable appearance. In the absence of appearance conditions this limit may be relaxed.</p> <p><b>Note 2:</b> For these exposure classes, in addition, decompression should be checked under the quasi-permanent combination of loads.</p>		

# Patologías estructurales

## Non-structural cracks

¡No son causados por ninguna carga externa!



Alexander, M., Bentur, A., & Mindess, S. (2017). *Durability of Concrete: Design and Construction*. CRC Press.

Concrete Society. (1992). *Non-structural cracks in concrete*. Wexham, Slough: Concrete Society.

## Non-structural cracks

- Pre-hardening (plastic) cracks
  - Plastic shrinkage cracks
  - Plastic settlement cracks
  - Cracks caused by formwork movement
- Cracks in hardened concrete
  - Craze cracking
  - D-cracks
  - Drying shrinkage cracks
  - Thermal movement cracks
- Cracks due to Chemical Effects
  - Corrosion of steel reinforcement
  - Alkali-Silica reaction cracks

## Patologías estructurales

### **Pre-hardening (Plastic) Cracks (Grietas en el hormigón no endurecido)**

Estas grietas aparecen a las pocas horas (10 min a ~ 6 horas) del hormigonado y la compactación, pero antes de que el hormigón haya endurecido por completo. Suelen ocurrir como resultado de condiciones de ejecución y prácticas de construcción inadecuadas, y generalmente se pueden evitar con la adopción de buenos procedimientos de ejecución.



## Patologías estructurales

### Plastic shrinkage cracks (Grietas de retracción plástica)

Causado por un secado rápido de la superficie del hormigón, dentro de las primeras seis horas (incluso en minutos) después del hormigonado, como resultado de **grandes pérdidas de humedad de la superficie**. Vientos fuertes, altas temperaturas del aire o del hormigón y bajas humedades, solos o en combinación, pueden causar grietas porque promueven la evaporación del agua por encima de la tasa de exudación (sangrado). Las grietas de contracción plástica pueden formar grandes patrones de fisuración o pueden aparecer como grietas diagonales o paralelas a varias profundidades. Son comunes en elementos de grandes superficies como forjados de edificios, losas de pavimentación, recubrimientos de canales y túneles, y en cualquier elemento constructivo que presente una gran relación superficie/volumen.

- Grietas diagonales de aproximadamente 300 mm a 1 cm, más comunes en losas no reforzadas y ligeramente reforzadas.
- Un patrón de mapa de grietas muy grande, generalmente cuando las losas no están reforzadas.
- Un patrón que corresponde a una restricción o una condición de contorno, como el acero de refuerzo cerca de la superficie superior o un cambio de profundidad.

Cualquier grieta de secado que aparezca antes o durante las operaciones de acabado debe cerrarse inmediatamente con una espátula o llana de madera o acero, y el curado debe comenzar inmediatamente después de la finalización de las operaciones de acabado final.

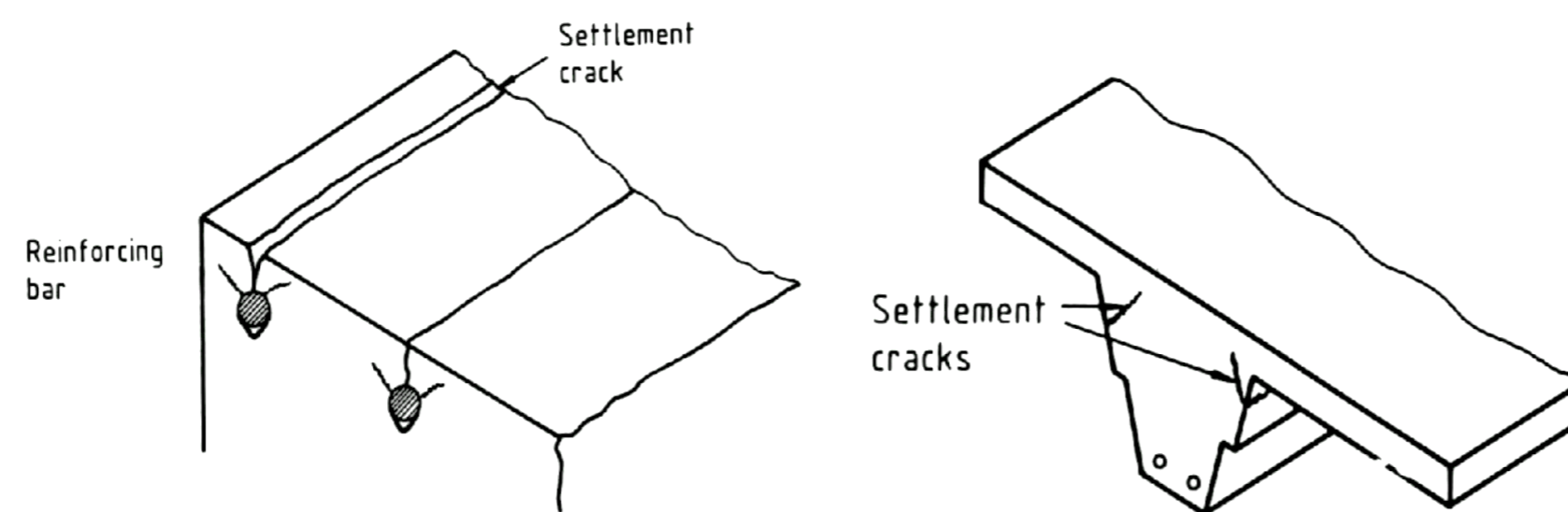


## Patologías estructurales

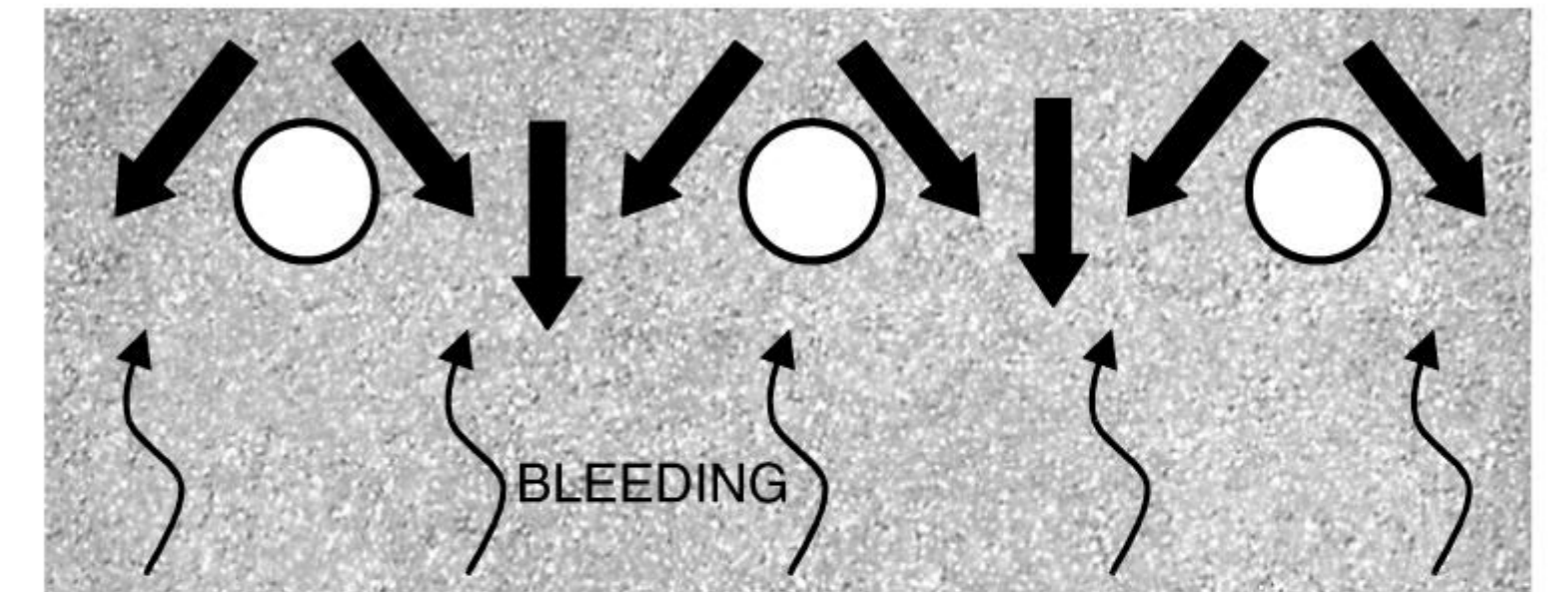
### Plastic settlement cracks (Fisuración por asentamiento plástico)

Causada por el asentamiento plástico del hormigón por su propio peso, especialmente cuando hay un sangrado excesivo y el asentamiento está impedido por una restricción local. Las grietas ocurren en la masa de endurecimiento sobre restricciones como el refuerzo de acero, secciones profundas y escalones en el encofrado. Estas grietas tienden a formarse longitudinalmente sobre el refuerzo de acero y pueden ser una causa de corrosión grave.

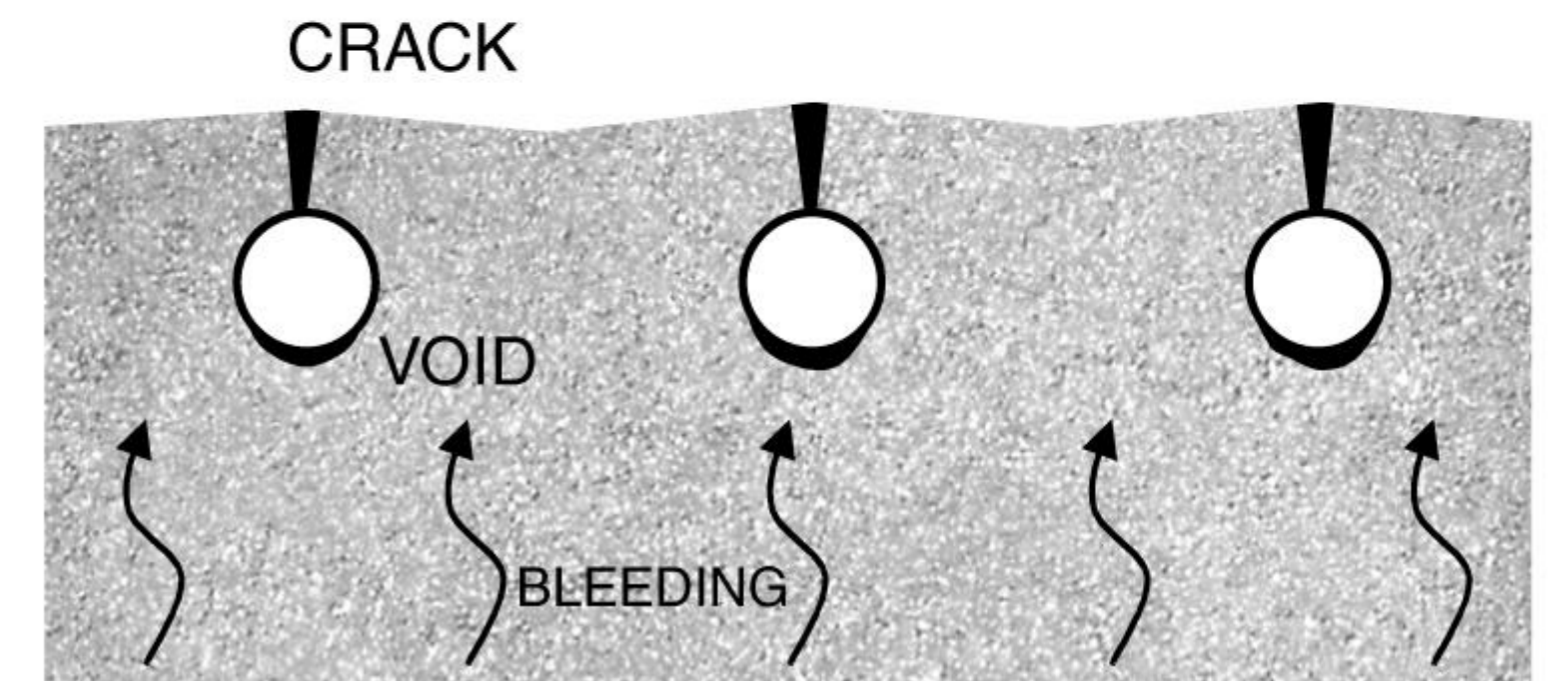
Las grietas de asentamiento plástico se pueden prevenir asegurándose de que el hormigón esté bien graduado, con el contenido de agua adecuado que permita una buena compactación, y que el encofrado sea rígido y no esté sujeto a movimiento.



(a) Initiation



(b) After a few hours



### Cracks in hardened concrete (Grietas en el hormigón endurecido)

El agrietamiento en el hormigón endurecido se puede atribuir a la **contracción por secado** (pérdida por humedad) (*drying shrinkage*), **contracción térmica temprana** (movimiento) (*early thermal contraction*) y a **efectos estructurales y químicos**.

- Craze cracking
- D-cracking
- Drying shrinkage cracks
- Thermal movement cracks

## Patologías estructurales

### Craze cracking (Pattern Map cracking)

Craze cracking describe las **grietas muy finas y de patrón irregular** que aparecen en la superficie del hormigón después de haber estado expuesto a la atmósfera durante algún tiempo. Suele ocurrir en la superficie de losas de hormigón allanadas o enlucidas. Se origina cuando la superficie del hormigón se expande y contrae durante **ciclos alternos de humectación/secado**, o cuando se **carbonata y contrae durante una exposición prolongada al aire**. Las grietas son bastante superficiales y afectan la apariencia más que la integridad estructural o durabilidad.

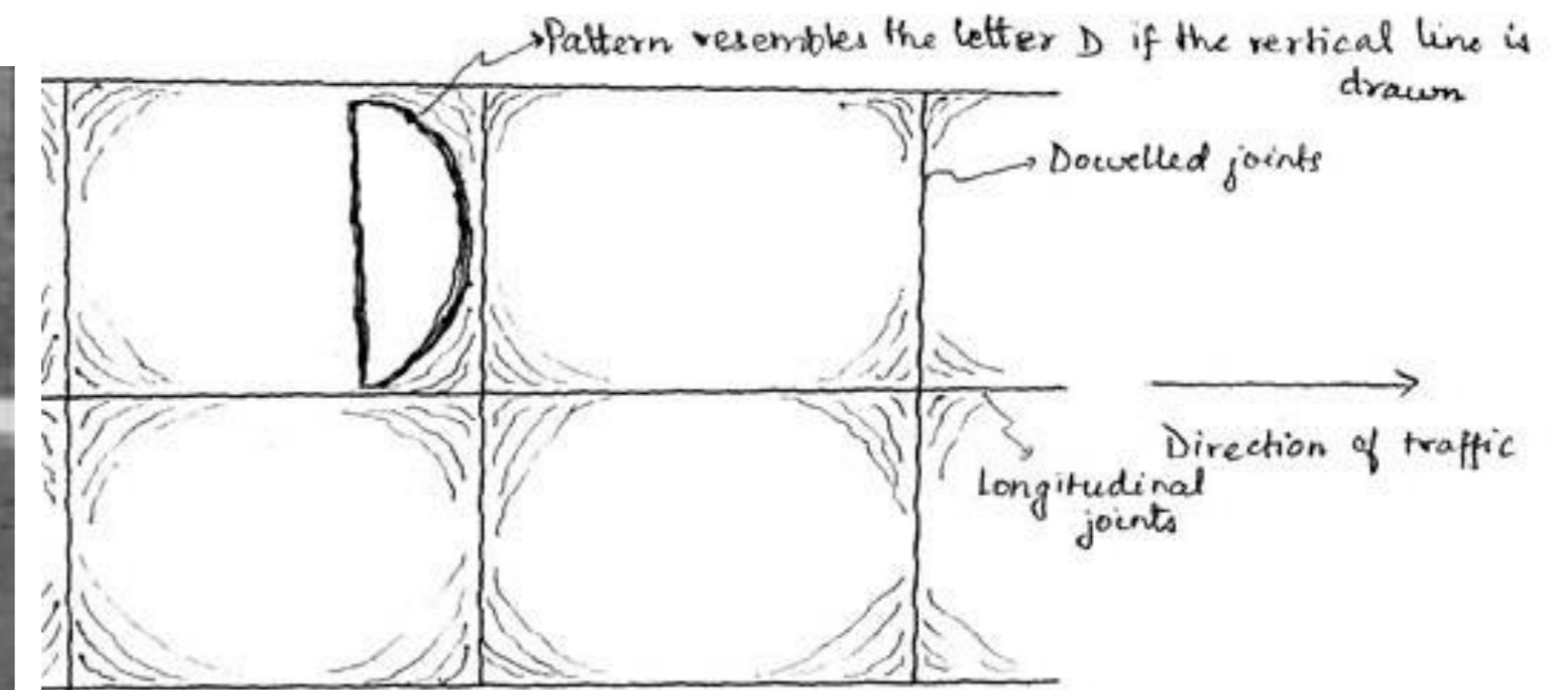
Son causadas principalmente por el uso de mezclas de hormigón húmedas, el trabajo del agua de exudación en la superficie durante el acabado y un curado inadecuado.

El agrietamiento se puede prevenir asegurándose de que el acabado final de las superficies de hormigón solo se lleve a cabo después de que se haya eliminado toda el agua de sangrado, no utilizando en exceso las paletas eléctricas, no utilizando secadores como arena seca, cemento o polvo de piedra para absorber el agua libre, y en general adoptando buenas prácticas de curado.



## D-cracks

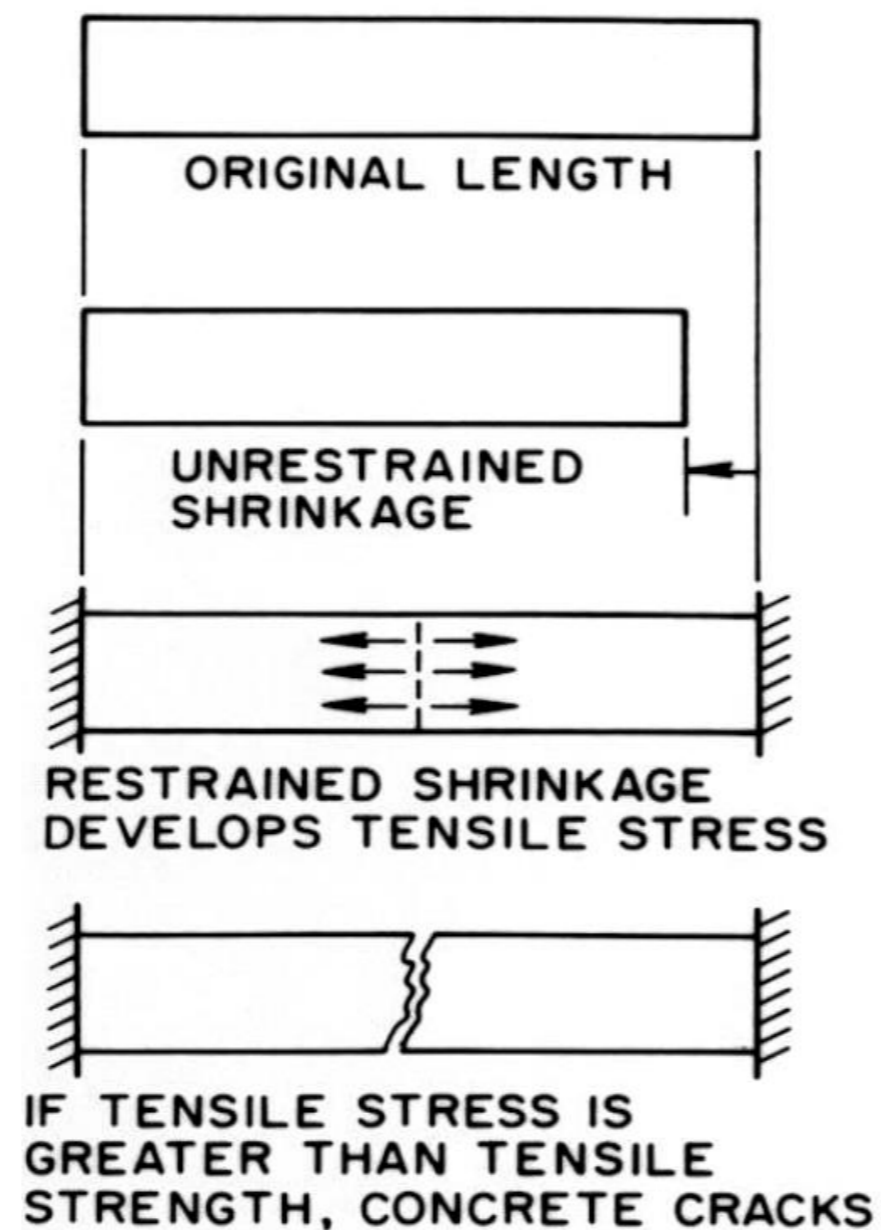
Serie de grietas en forma de media luna visibles en la superficie y concentradas en las juntas y bordes de los pavimentos donde el hormigón está más expuesto. El agrietamiento en D ocurre como resultado de ciclos de congelación y descongelación de agregados saturados de agua, que agrietan las partículas de agregados y avanzan a través de la losa. Junto con la acumulación natural de agua debajo de los pavimentos en las capas base y subbase, los agregados pueden eventualmente saturarse. Luego, con los ciclos de congelación y descongelación, el agrietamiento del hormigón comienza en el agregado saturado en la parte inferior de la losa y avanza hacia arriba hasta la superficie.



### Drying shrinkage cracks Fisuras de retracción por secado

Ocurre cuando el hormigón reduce su volumen como resultado de las pérdidas de humedad a la atmósfera en su estado endurecido. Si el hormigón puede moverse libremente y experimentar acortamiento sin que se acumulen tensiones de contracción, no se producirán grietas. Sin embargo, si el elemento se encuentra restringido y las tensiones superan la resistencia a la tracción del hormigón, se producirán grietas. Una proporción significativa de la retracción ocurre dentro de las primeras semanas o incluso meses tras el hormigonado, y el ambiente de secado tiene un efecto importante.

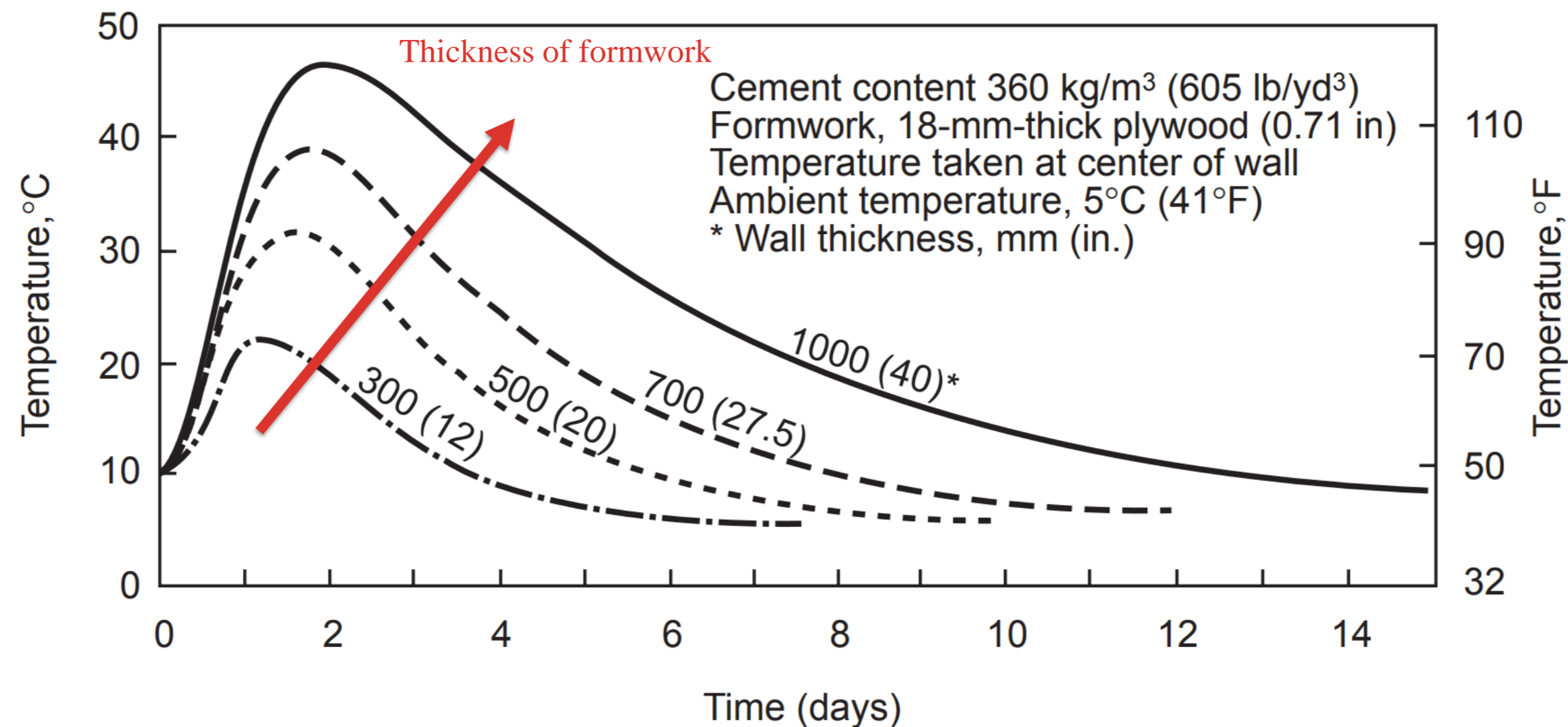
La contracción por secado se puede reducir aumentando la cantidad de agregado grueso y, lo que es más importante, reduciendo el contenido total de agua. Otros factores también influyen en la fisuración como las restricciones, la geometría y las prácticas de construcción. Una adecuada disposición de las armaduras puede distribuir de manera más uniforme las tensiones de contracción y así limitar el ancho de las grietas.



# Patologías estructurales

## Thermal movement cracks

La deformación inducida por efectos térmicos ocurre cuando la temperatura del hormigón cambia, ya sea debido a cambios ambientales o al calor durante el fraguado. A medida que el hormigón se calienta, éste se expande y luego se contrae al enfriarse de nuevo a temperatura ambiente. Si un elemento de hormigón es lo suficientemente grande (aprox. > 1,5 m) y está aislado por materiales adyacentes, incluido el encofrado, es probable que la tasa de calentamiento en las primeras 24 horas supere la tasa de pérdida de calor a la atmósfera. Después de unos días, el calentamiento cae por debajo de las pérdidas de calor y el hormigón se enfría provocando la contracción del elemento. En este proceso, no aparecerán grietas si las expansiones/contracciones térmicas no están restringidas. En la práctica, sin embargo, los elementos estructurales suelen estar restringidos por lo que es posible la aparición de grietas.

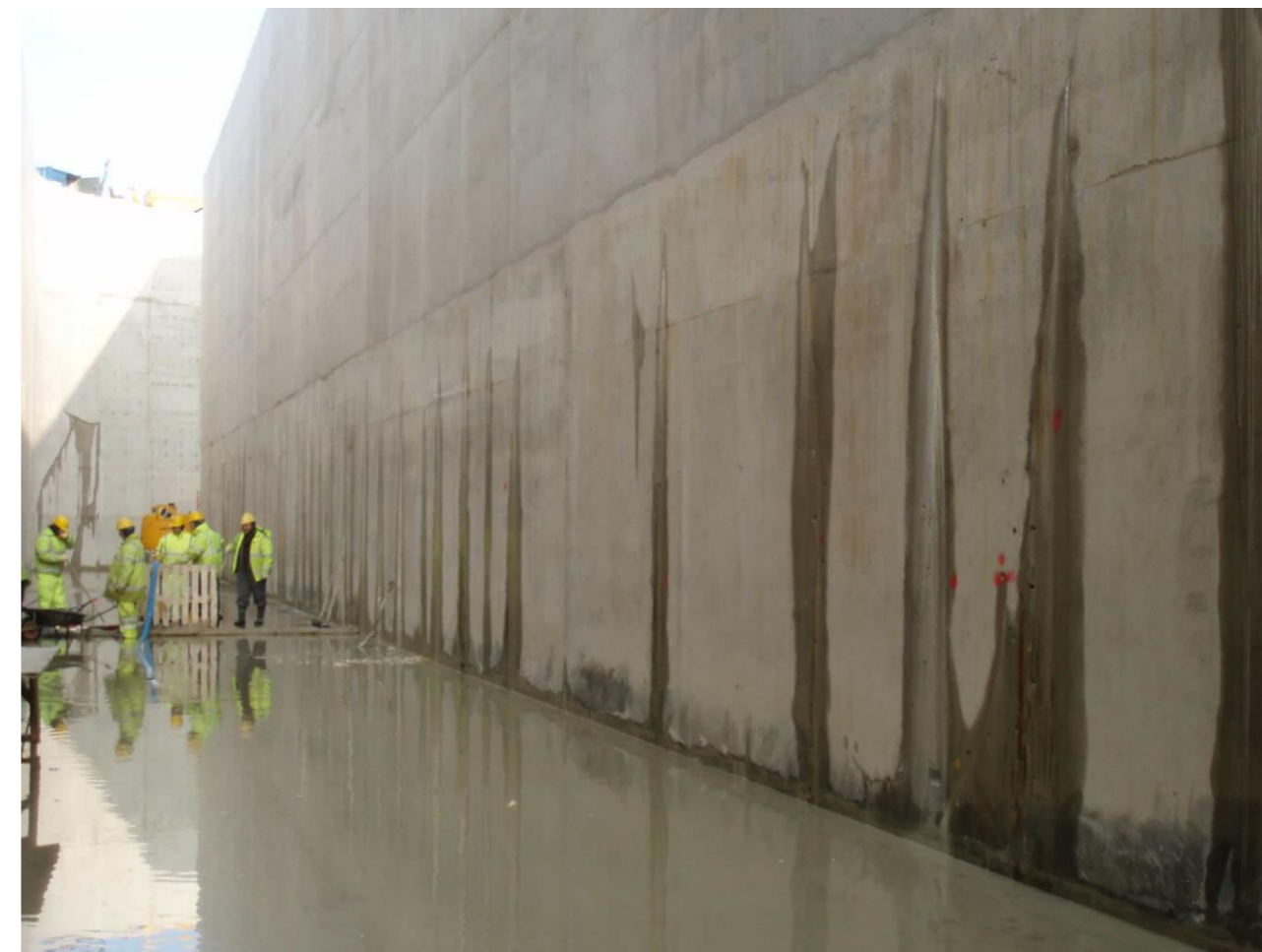
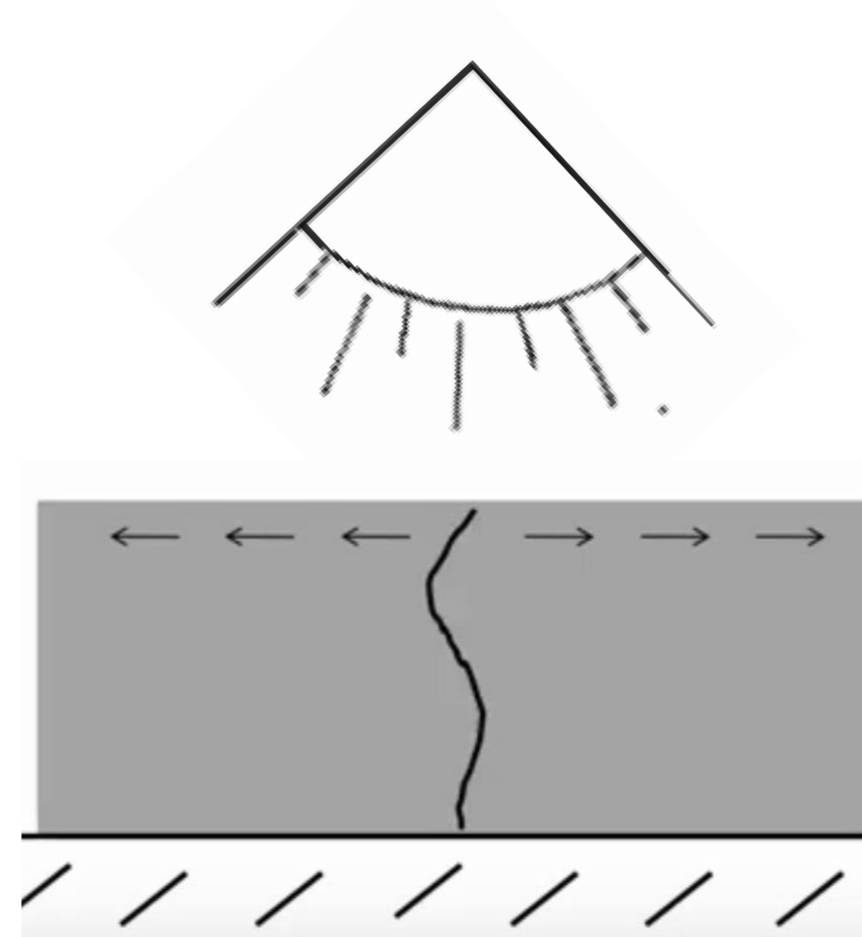


# Patologías estructurales

External restraint

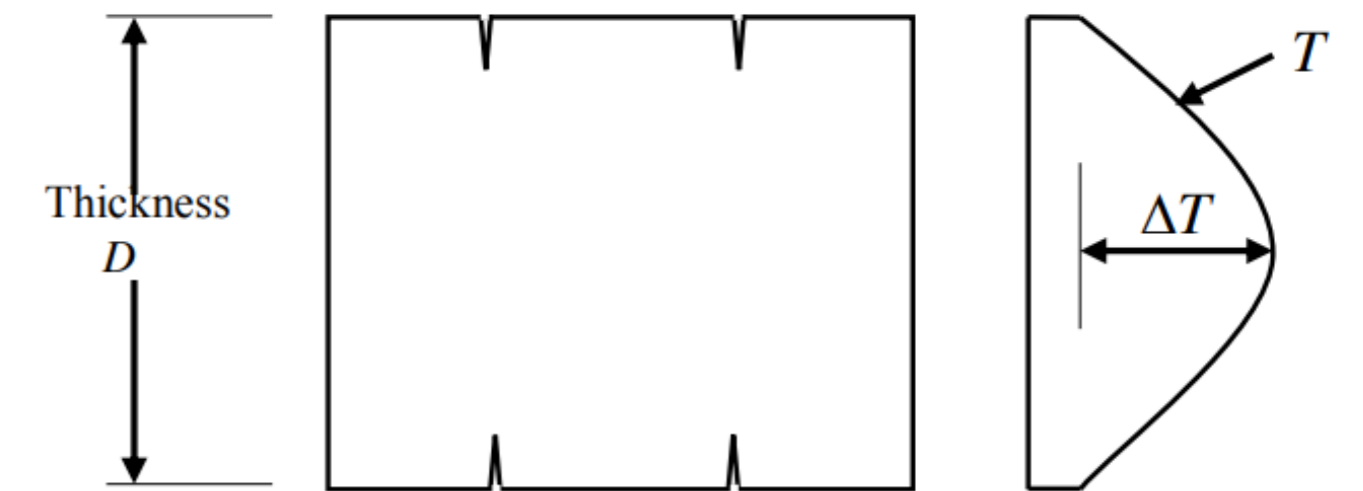


External edge restraint

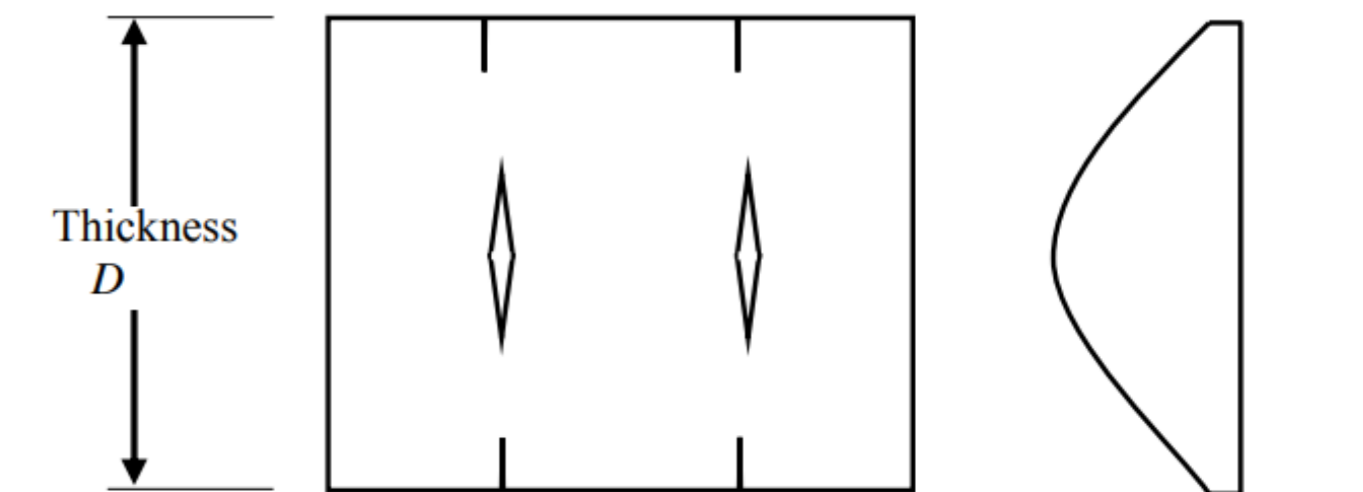


Internal restraint

Heating



Cooling



Concrete element and possible interior cracks

Temperature drop  $\Delta T$  during cooling





# Patologías estructurales

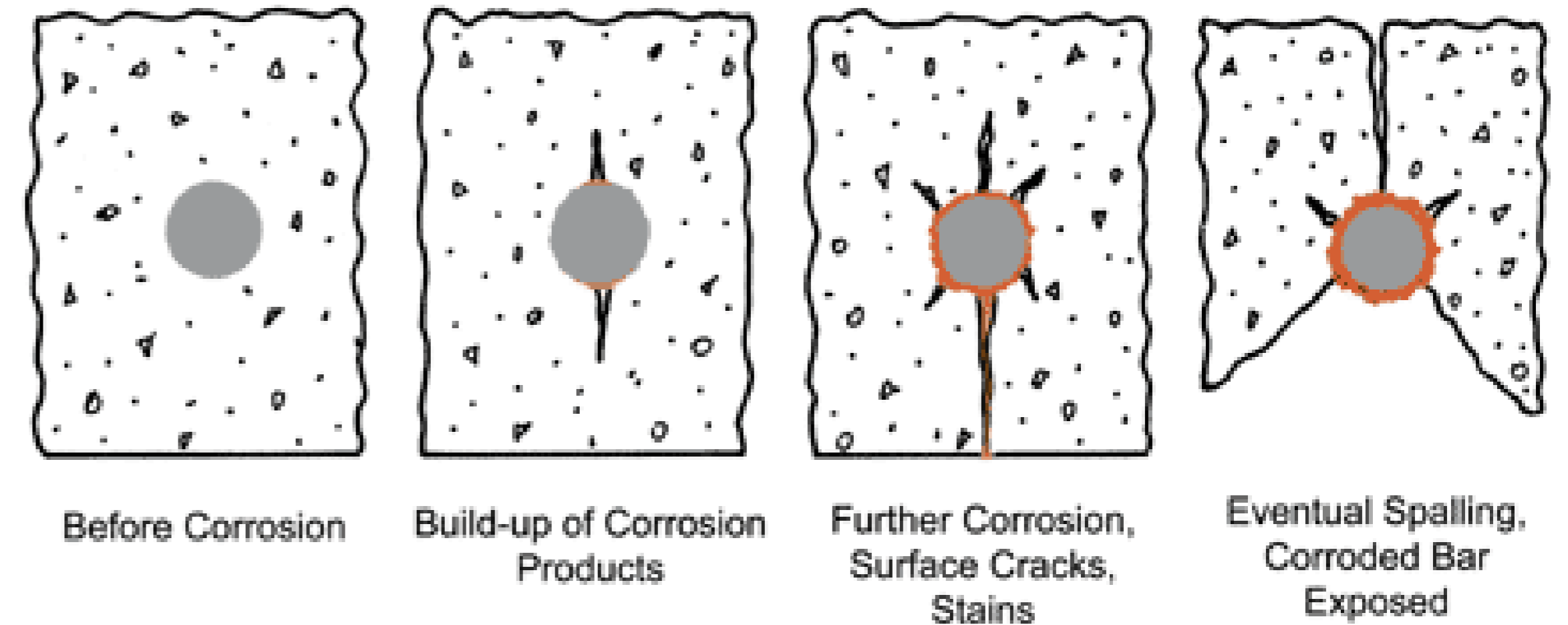
## Grietas debidas a efectos químicos

- Grietas por corrosión
- Grietas por reacciones álcali-sílice (Alkali-silica reactions)

### Corrosion of steel reinforcement

Cuando el acero se embebe en el hormigón, normalmente no se corroe porque el entorno alcalino del hormigón forma una capa pasiva protectora en la superficie del acero (pasivación). Sin embargo, si el recubrimiento es insuficiente o el hormigón es permeable, éste puede **carbonatarse** eliminando así la capa pasiva del acero. Esta capa también puede descomponerse en **presencia de cantidades excesivas de iones cloruro**.

Cuando la capa pasiva se rompe, el acero puede oxidarse o corroerse y, al tratarse de un proceso expansivo, puede provocar que el hormigón se fisure y se astille. El agrietamiento y el desconchado son particularmente notables en las esquinas de vigas y columnas sobre los redondos principales, aunque a menudo también se puede ver el patrón de cercos de cortante y estribos. Tales grietas generalmente mostrarán signos de manchas de óxido.



## Patologías estructurales

### Alkali-silica reaction cracks

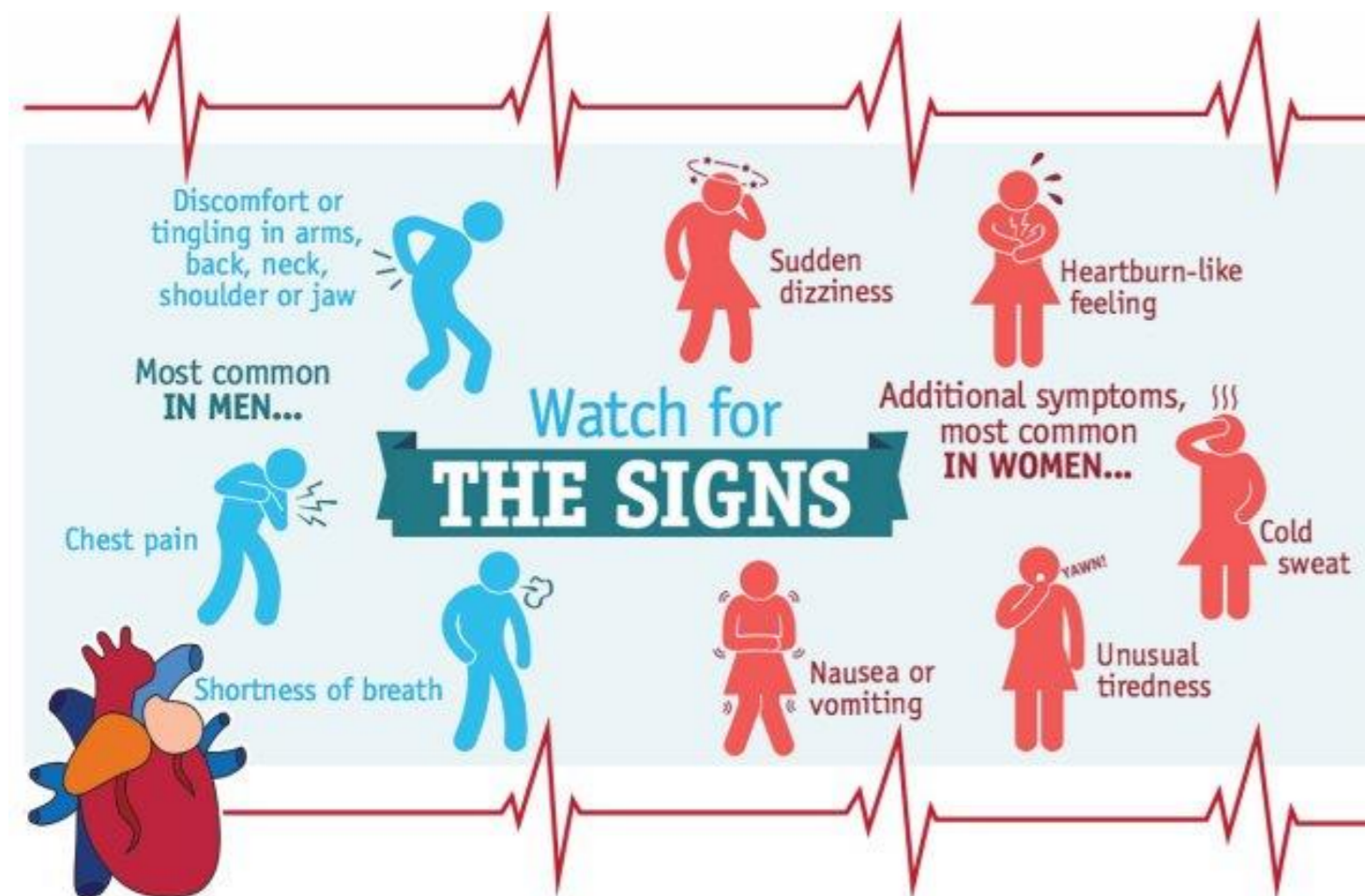
Las reacciones álcali-sílice (ASR) causan graves fisuraciones de tipo craze cracking o fisuración direccional (miembros pretensados), que pueden dar como resultado problemas estructurales críticos o incluso forzar la demolición de la estructura. Hormigones con alto contenido en álcali y en contacto con agua subterránea, lluvia o condensación intensa son particularmente vulnerables. Las exudaciones de gel a través de las grietas del hormigón tienen un **color amarillo característico** y un **pH elevado**. Otros signos visibles de daño pueden ser el la aparición de **popouts** y **decoloración**.

- Algunos agregados pueden presentar un riesgo elevado a reacciones ASR. Esto puede ser particularmente peligroso en grandes proyectos de infraestructuras como presas, carreteras o pistas de aeropuertos, que requieren enormes cantidades de áridos.
- La reacción da como resultado un aumento del volumen del hormigón, provocando grietas y popouts.
- La fisuración generalmente aparece en áreas con un suministro frecuente de humedad, como cerca de la línea de flotación en pilares, cerca del suelo detrás de muros de contención, cerca de juntas y bordes libres en pavimentos.



# Patologías estructurales

## SUMMARY

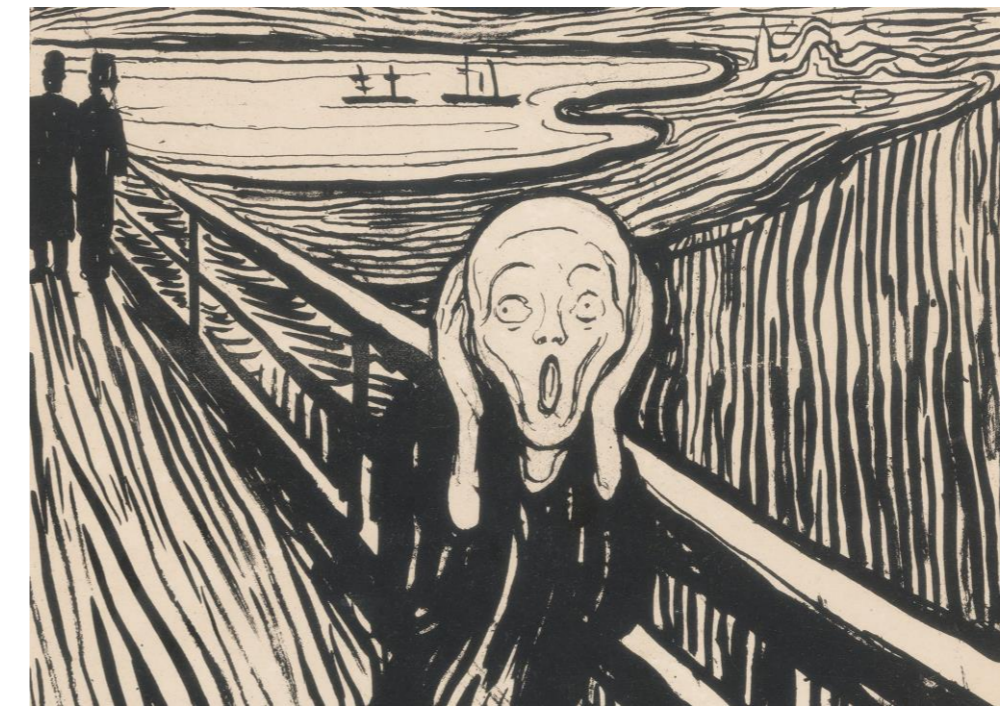


- Shoddy workmanship
  - Cold joints
  - Bug holes
  - Reinforcing steel that has become exposed
  - Honeycombing
- Spalling
- Scaling
- Popouts
- Curling
- Delamination
- Erosion
  - Abrasion
  - Cavitation
- Joint seals and seepage
- Efflorescence
- Dusting

- Cracking
  - Structural
  - Non-Structural
    - ❖ Pre-hardening (plastic) cracks
      - Plastic shrinkage cracks
      - Plastic settlement cracks
      - Cracks caused by formwork movement
    - ❖ Cracks in hardened concrete
      - Craze cracking
      - D-cracks
      - Drying shrinkage cracks
      - Thermal movement cracks
    - ❖ Cracks due to Chemical Effects
      - Corrosion of steel reinforcement
      - Alkali-Silica reaction cracks



# Agentes de degradación



## Agentes de degradación



Woodson, R. D. (2009). *Concrete structures: protection, repair and rehabilitation*. Butterworth-Heinemann.

- ❑ Accidental Loads
- ❑ Chemical reactions
  - Alkali-carbonate reaction
  - Alkali-silica reaction
  - Sulfate attack
    - Chemical attack
    - Physical attack
- ❑ Corrosion
  - Carbonation
  - Chlorides attack
- ❑ Freezing and thawing
- ❑ Shrinkage
- ❑ Temperature changes

## Agentes de degradación

# CARGAS ACCIDENTALES

Eventos excepcionales como terremotos, impactos, eventos climáticos extremos (inundaciones, tormentas, tornados, etc.). Los daños causados por tales eventos son generalmente de corta duración, escasos y espaciados entre ocurrencias. Desafortunadamente, este tipo de eventos son difícilmente predecibles.

Lorry crash into a footbridge on the M20 motorway (Kent, 2016)



<https://www.itv.com/news/meridian/update/2016-08-29/m20-re-opens-with-50mph-speed-limit-following-bridge-collapse/>

<https://www.youtube.com/watch?v=U2FkgyvQPM>

Sunshine Skyway Bridge (Tampa, 1980)



<https://www.tampabay.com/photos/2018/05/09/the-sunshine-skyway-bridge-plunged-into-tampa-bay-38-years-ago/>

# Agentes de degradación

2017. Pleasant Valley Road bridge over Interstate-96 (Livingston County, Michigan)



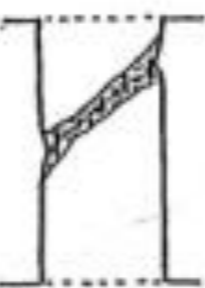


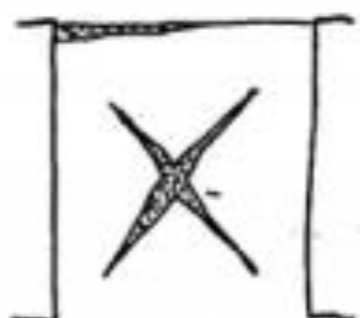


<https://www.youtube.com/watch?v=F7hB29yyd3s>





# Agentes de degradación

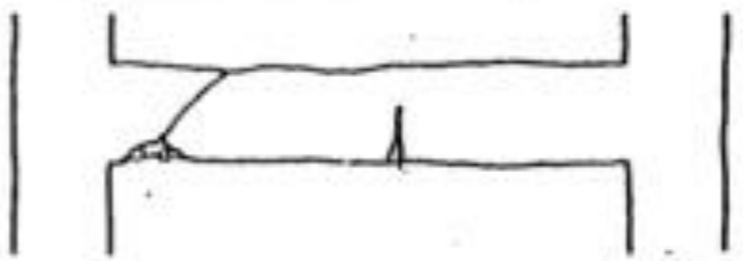
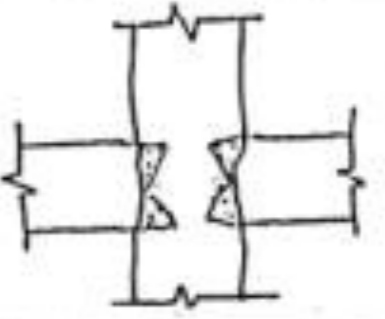
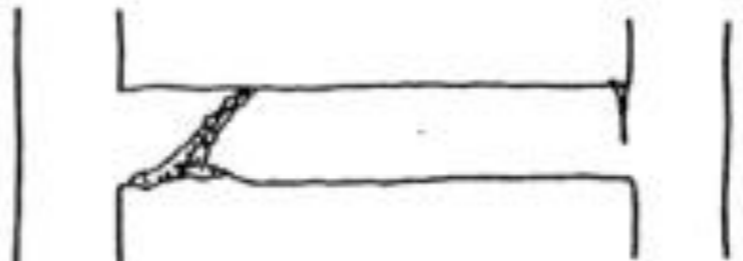
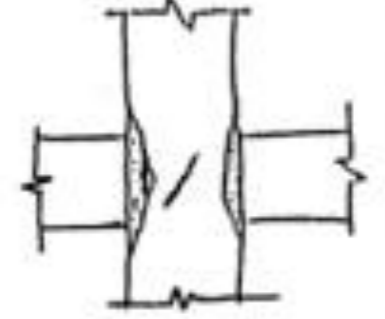
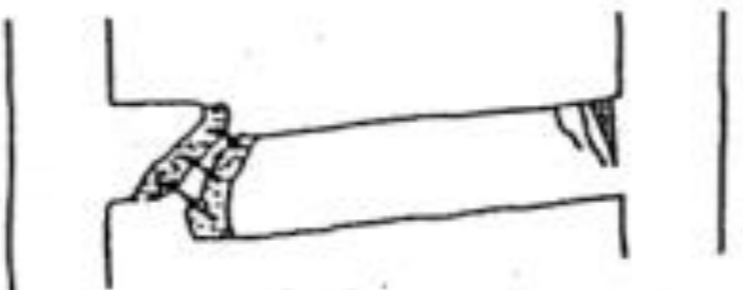
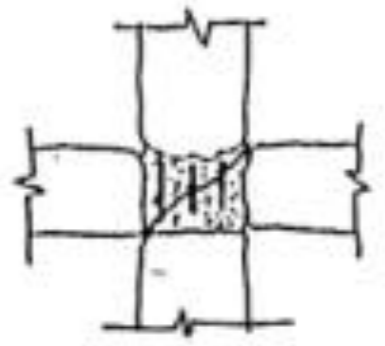
Damage Severity	R-C COLUMNS	R-C SHEAR WALLS
<b>1 None</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fine cracks in mortar</li> <li>Light spalling of concrete</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No visible cracks</li> </ul>
<b>2 Slight</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>d_{horiz} \leq 2.0</math> mm</li> <li><math>d_{diag} \leq 0.5</math> mm</li> <li>Spalling of concrete</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>d_{horiz} &lt; 1.0</math> mm</li> <li><math>d_{diag} &lt; 0.5</math> mm</li> </ul> 
<b>3 Moderate- Heavy</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>d_{horiz} \leq 5.0</math> mm</li> <li><math>d_{diag} \leq 2.0</math> mm</li> <li>Partial disintegration of concrete</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>d_{horiz} \leq 3.0</math> mm</li> <li><math>d_{diag} \leq 1.0</math> mm</li> <li>Spalling of concrete</li> </ul> 
<b>4 Severe- Total</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>5.0</math> mm <math>&lt;</math> <math>d_{horiz}</math></li> <li><math>2.0</math> mm <math>&lt;</math> <math>d_{diag}</math></li> <li>Extensive disintegration of concrete</li> <li>Buckling of longitudinal reinforc.</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>3.0</math> mm <math>&lt;</math> <math>d_{horiz}</math></li> <li><math>1.0</math> mm <math>&lt;</math> <math>d_{diag}</math></li> <li>Disintegration of concrete</li> </ul> 

Notation:  $d_{diag}$  : diagonal cracks (inclined to the axis of the element)  
 $d_{vert}$ ,  $d_{horiz}$  : vertical and horizontal cracks (to the axis of the element), respectively

**Exhibit 2.5a:** Damage Severity in Reinforced Concrete structural elements (R-C columns and R-C walls)



# Agentes de degradación

Damage Severity	R-C BEAMS	R-C JOINTS
1 None	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fine cracks in mortar</li> </ul>	
2 Slight	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>d_{vert} \leq 2.0</math> mm</li> <li><math>d_{diag} \leq 0.5</math> mm</li> <li>Spalling of concrete</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Spalling of concrete at the corners</li> </ul> 
3 Moderate-Heavy	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>d_{vert} \leq \sim 4.0</math> mm</li> <li><math>d_{diag} \leq \sim 2.0</math> mm</li> <li>Extensive spalling and crushing of concrete</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Spalling of concrete</li> <li>Inclined cracks <math>d \leq \sim 2.0</math> mm</li> </ul> 
4 Severe-Total	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>4.0</math> mm <math>&lt;</math> <math>d_{vert}</math></li> <li><math>2.0</math> mm <math>&lt;</math> <math>d_{diag}</math></li> <li>Buckling of reinforcement</li> </ul> 	<ul style="list-style-type: none"> <li>Diagonal cracks <math>2.0</math> mm <math>&lt;</math> <math>d_{diag}</math></li> <li>Disintegration of concrete</li> </ul> 

Notation:  $d_{diag}$  : diagonal cracks (inclined to the axis of the element)  
 $d_{vert}$ ,  $d_{horiz}$  : vertical and horizontal cracks (to the axis of the element), respectively

**Exhibit 2.5b:** Damage Severity in Reinforced Concrete structural elements (R-C beams and R-C joints)

## Agentes de degradación



Damage severity 2



Damage severity 3



Damage severity 4



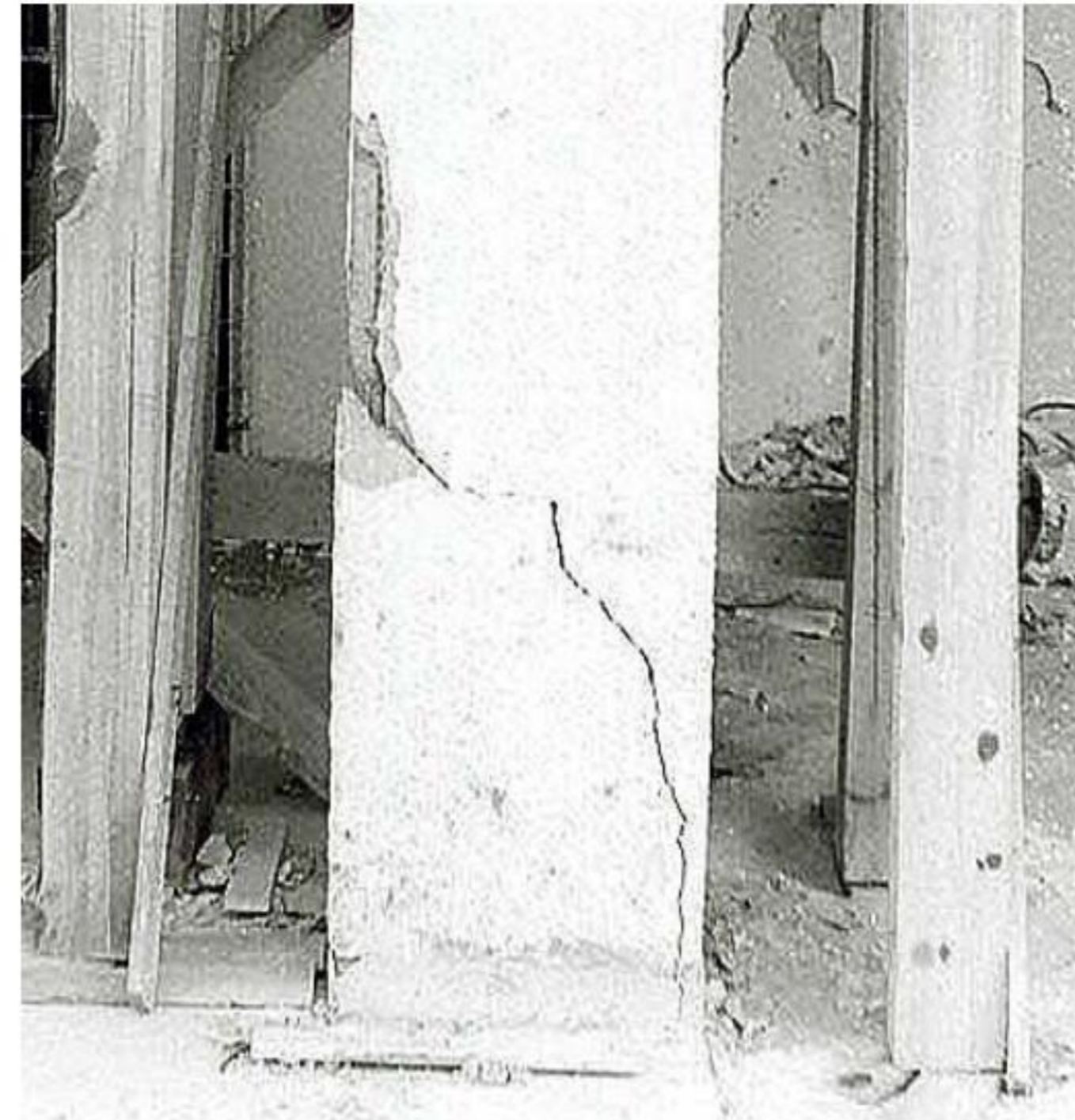
# Agentes de degradación



Damage severity 1



Damage severity 2



Damage severity 3



Damage severity 4



## Agentes de degradación



Damage severity 2-3



Damage severity 4



# Agentes de degradación

X-cracking



Vertical cracking



Overturning of a façade

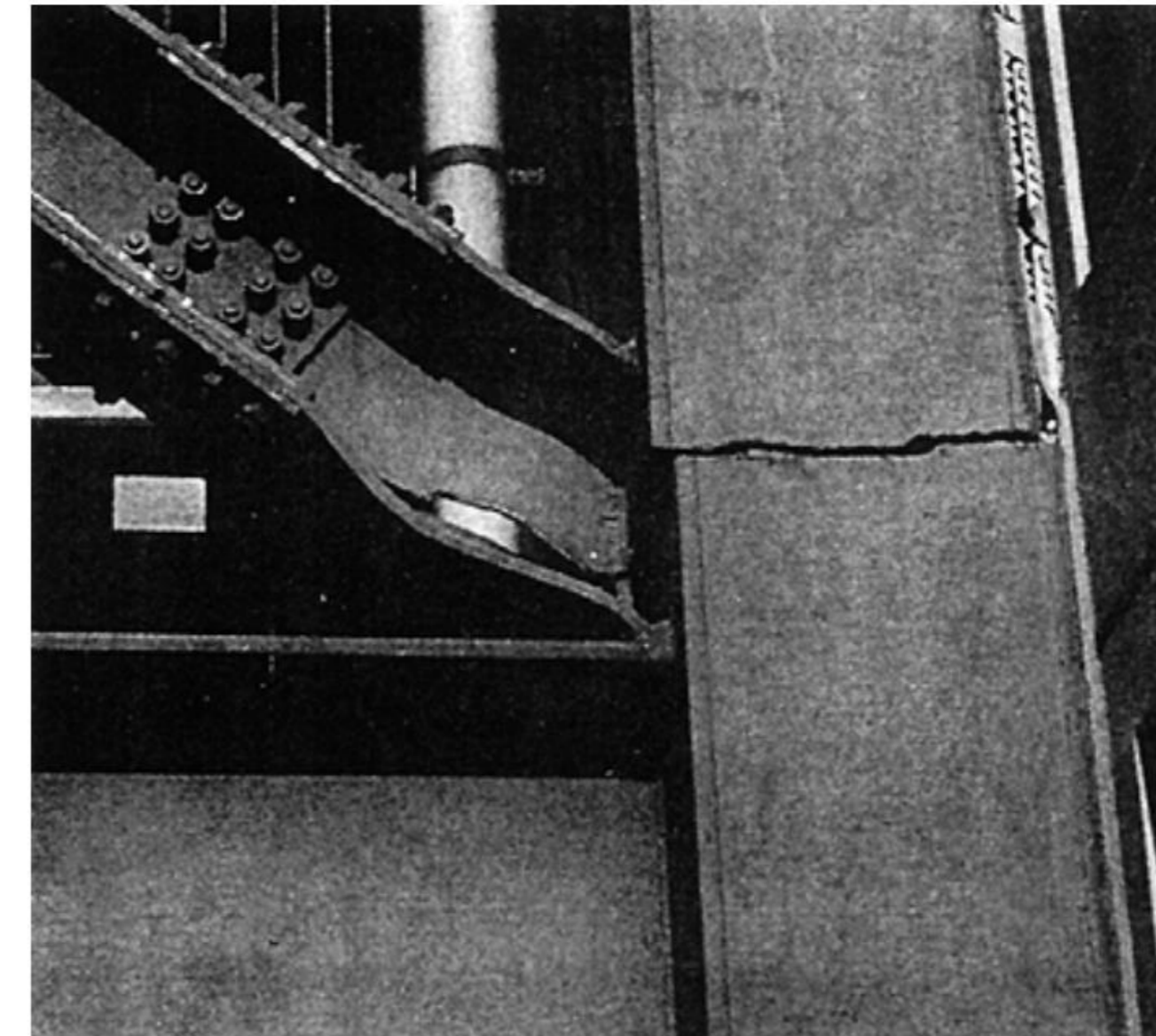


# Agentes de degradación

Pandeo



Fractura



Fallo de soldaduras



## CHEMICAL REACTIONS

### □ Chemical reactions

- Alkali-silica reaction (ASR) (*reacciones álcali-sílice*)
- Alkali-carbonate reaction (ACR) (*reacciones álcali-carbonato*)
- Sulfate attack (*Ataque de sulfatos*)

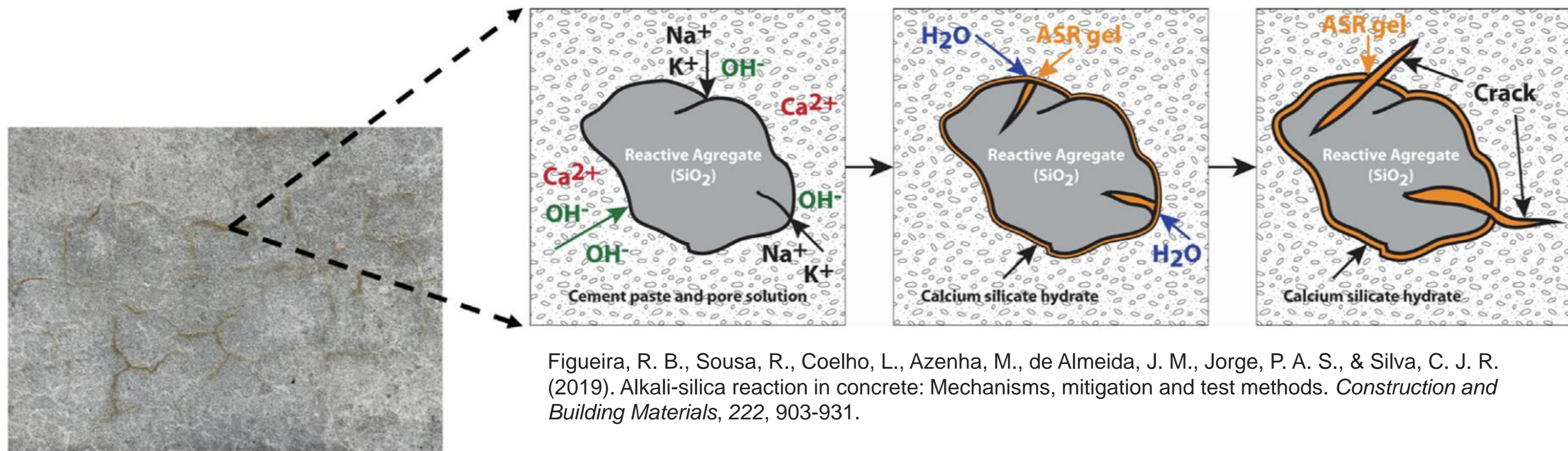


## Agentes de degradación

# Alkali-aggregate reaction: Alkali-silica reaction (ASR) and Alkali-carbonate reaction (ACR)

En la mayoría de los hormigones los áridos suelen ser más o menos químicamente inertes. Sin embargo, algunos agregados reaccionan con los hidróxidos alcalinos en el hormigón, causando expansión y fisuración. Estas reacciones pueden pasar desapercibidas durante un período de tiempo (10 a 20 años) antes de que se desarrolle un daño severo. Se pueden presentar en dos formas: **reacción álcali-sílice (ASR)** y **reacción álcali-carbonato (ACR)**.

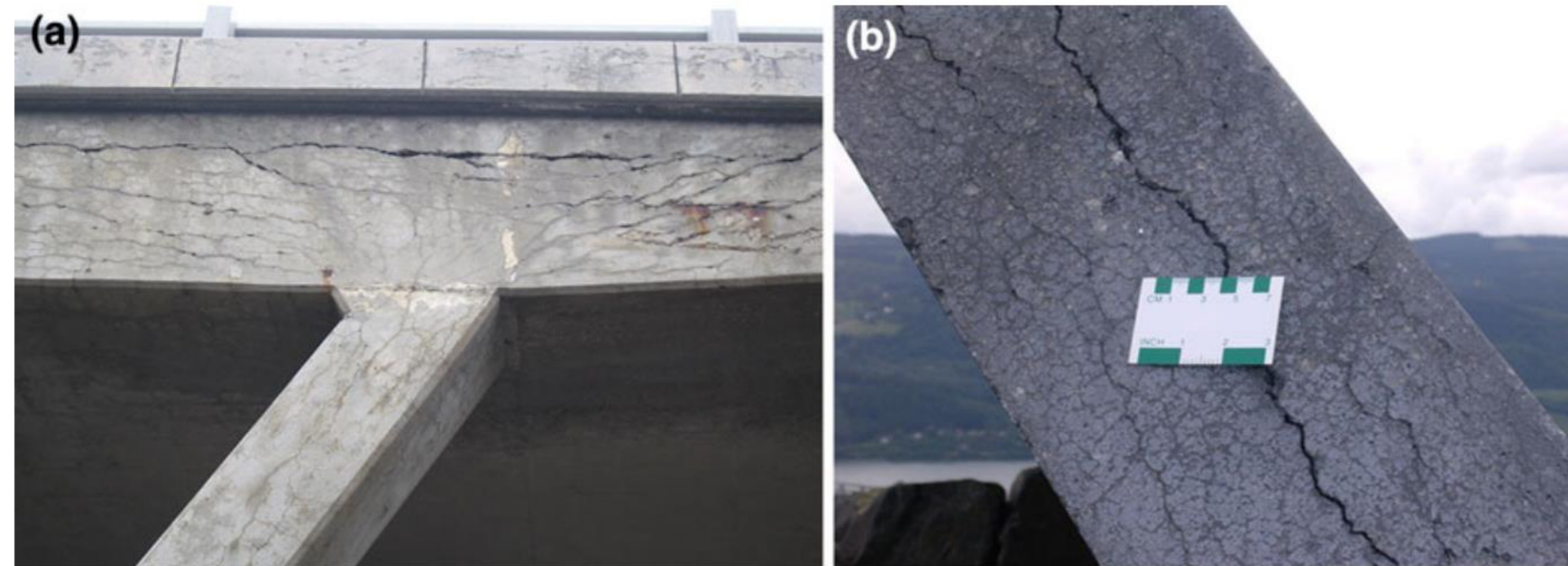
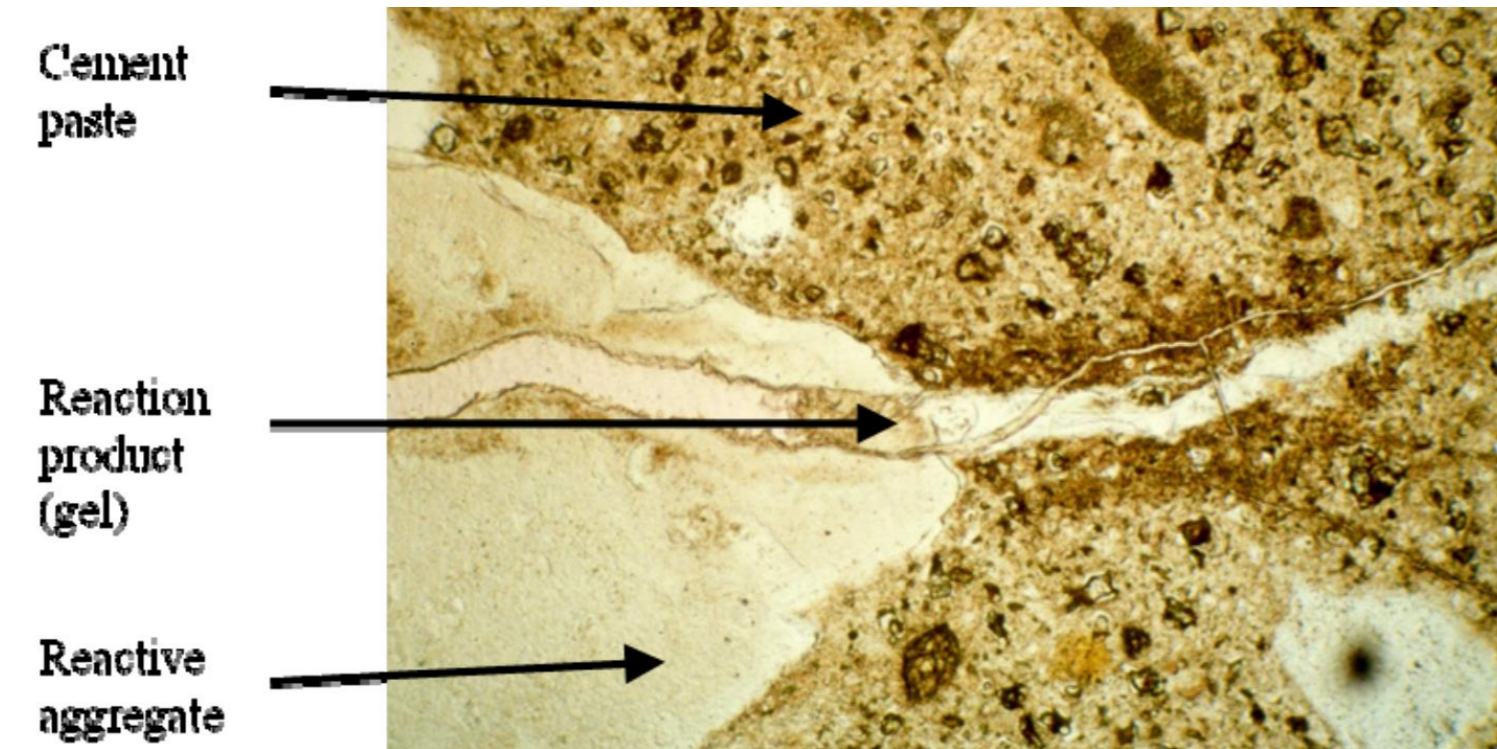
La reacción **álcali-sílice (ASR)**, más grave y común que la ACR, se desarrolla por agregados que contienen minerales de sílice reactivos. La ASR es causada por una reacción entre los iones de hidróxido ( $K^+$ ,  $Na^+$  y  $OH^-$ ) en la solución de poros de cemento alcalino en el hormigón y formas reactivas de minerales de sílice presentes en los agregados gruesos o finos (por ejemplo, chert, cuarcita, ópalo, cuarzo). Esta reacción inicialmente forma un gel de sílice-álcali higroscópico que se dentro de la partícula del agregado reactivo, terminando por inducir y propagar grietas.



Figueira, R. B., Sousa, R., Coelho, L., Azenha, M., de Almeida, J. M., Jorge, P. A. S., & Silva, C. J. R. (2019). Alkali-silica reaction in concrete: Mechanisms, mitigation and test methods. *Construction and Building Materials*, 222, 903-931.

# Agentes de degradación

## - Map cracking



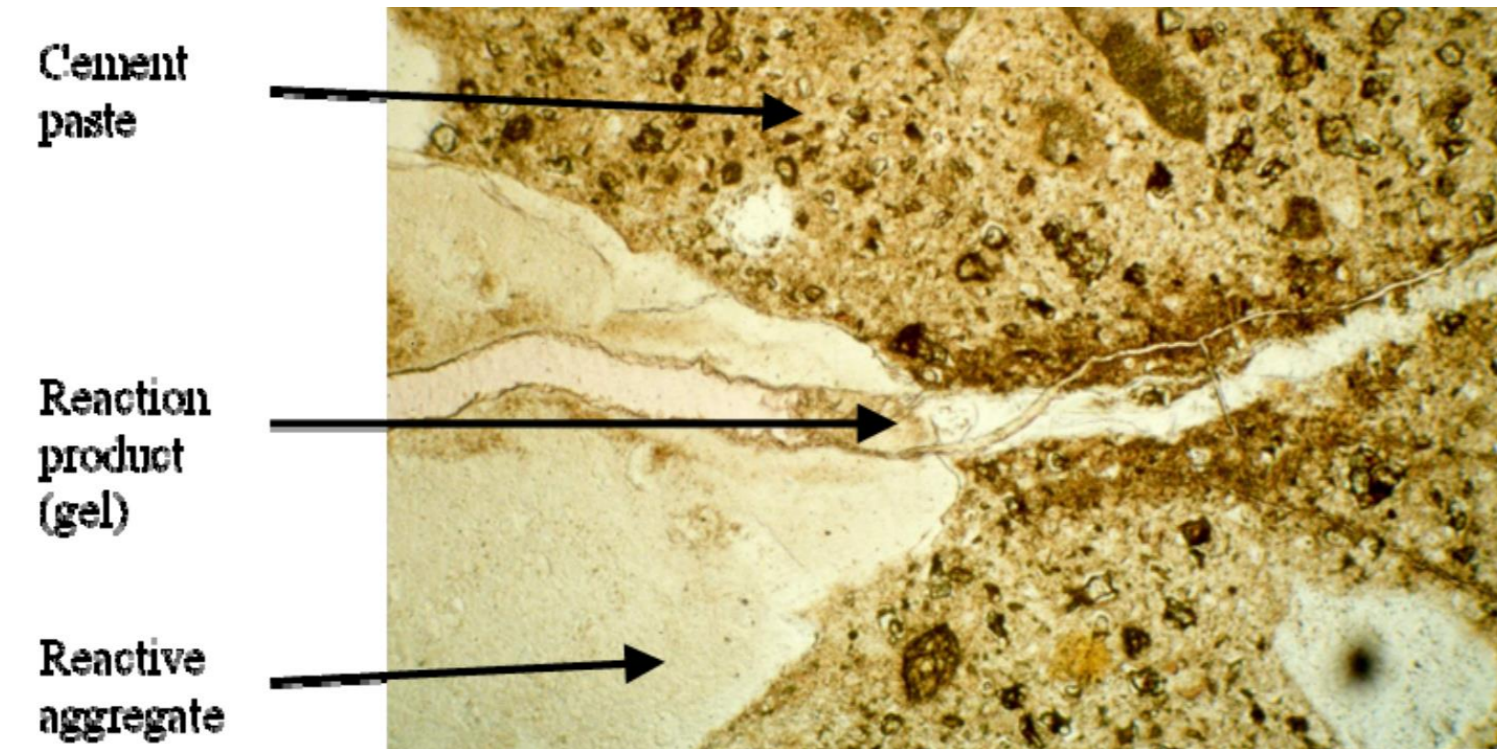
Pattern of the cracks related to ASR. In both structures (a, b), the major cracks reflect the underlying steel reinforcement. Cracks tend to develop longitudinally parallel to the direction of dominant restraint



ASR-induced map-cracking on a dam in Norway.

## Agentes de degradación

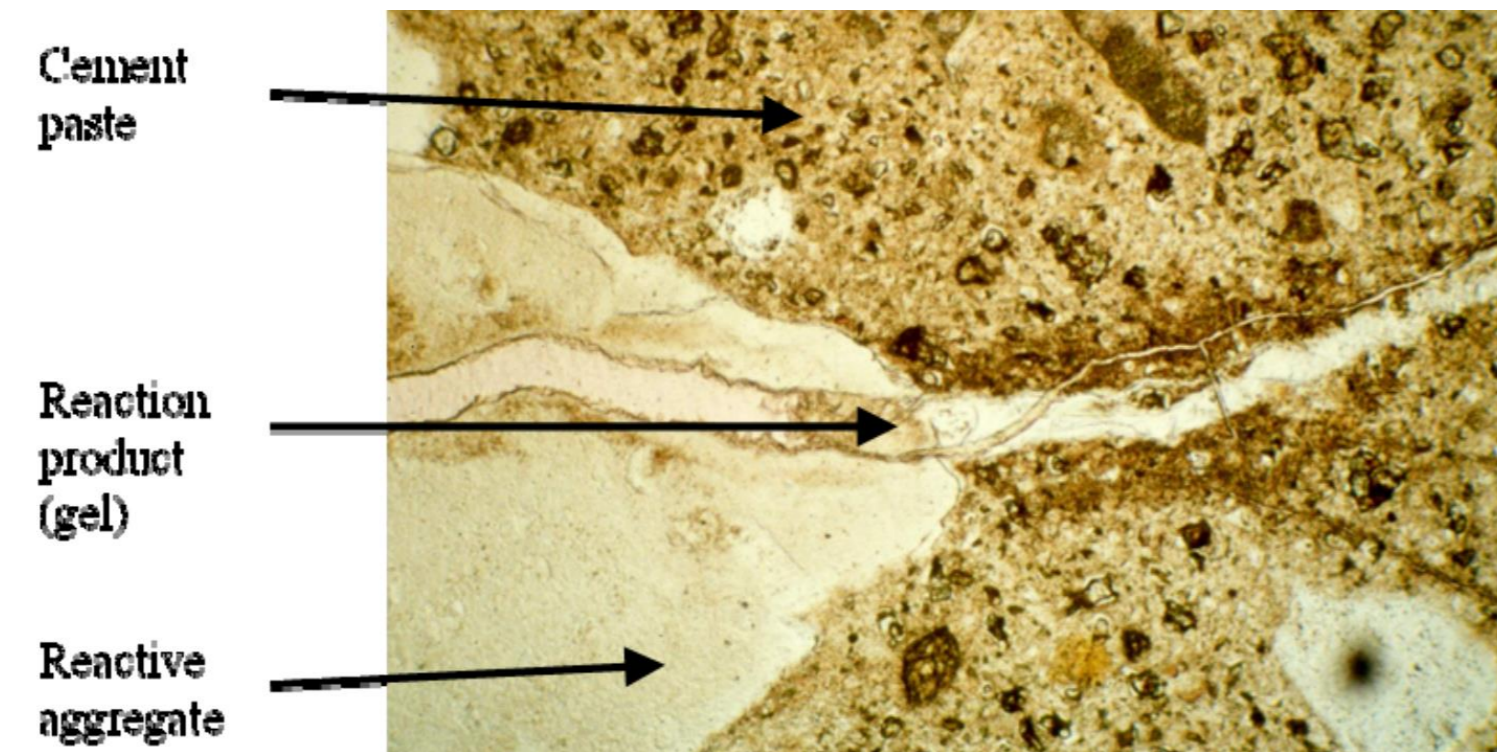
- Map cracking
- **Movements and displacements**



Misalignment in the crest of two different concrete dams

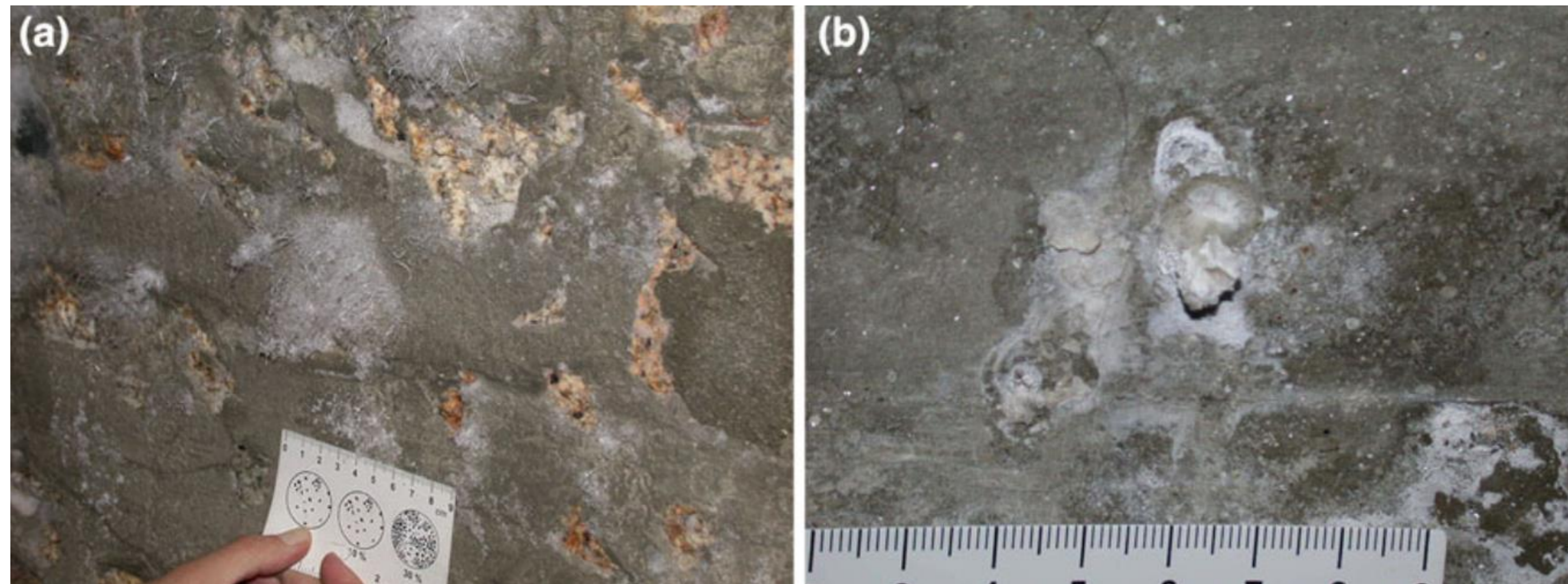
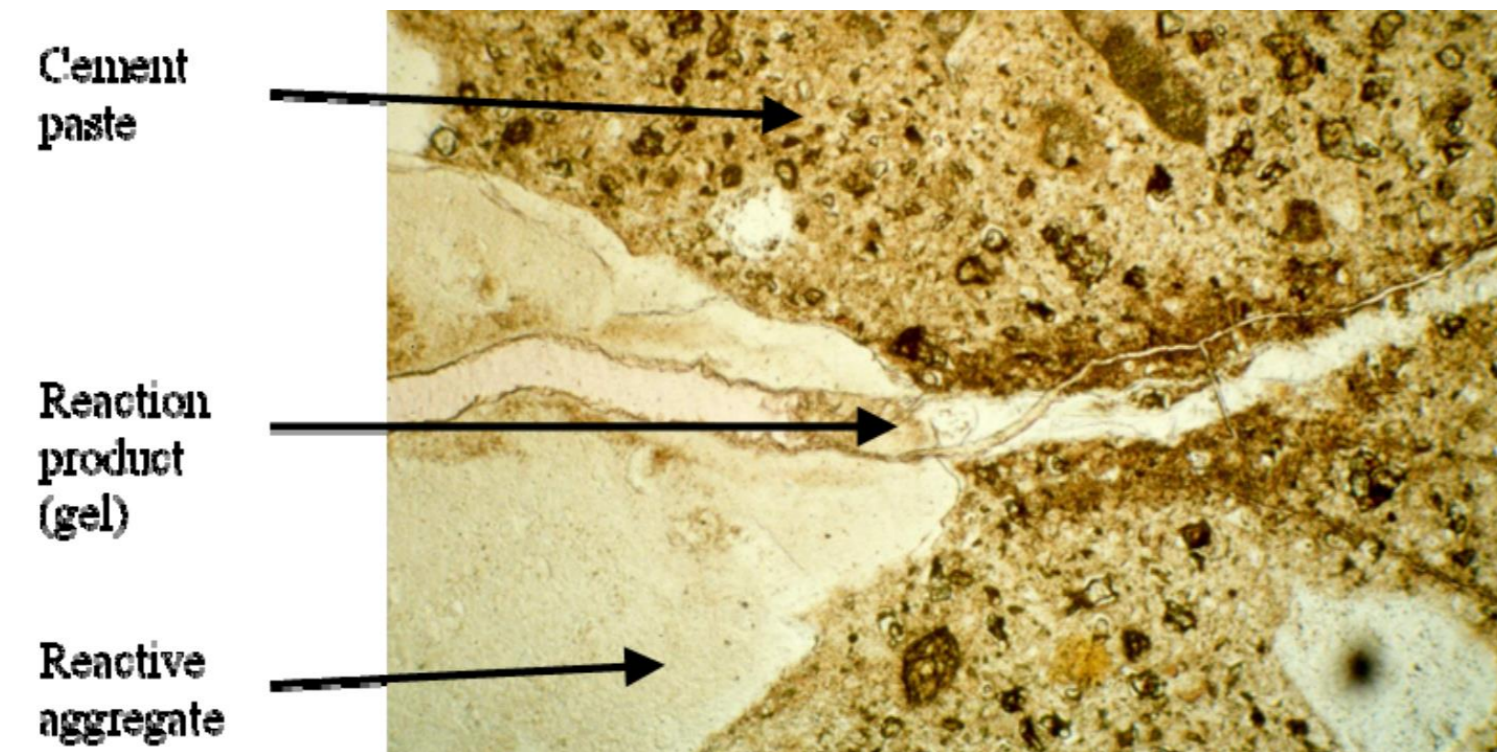
## Agentes de degradación

- Map cracking
- Movements and displacements
- **Discoloration and Dark Patches.**



## Agentes de degradación

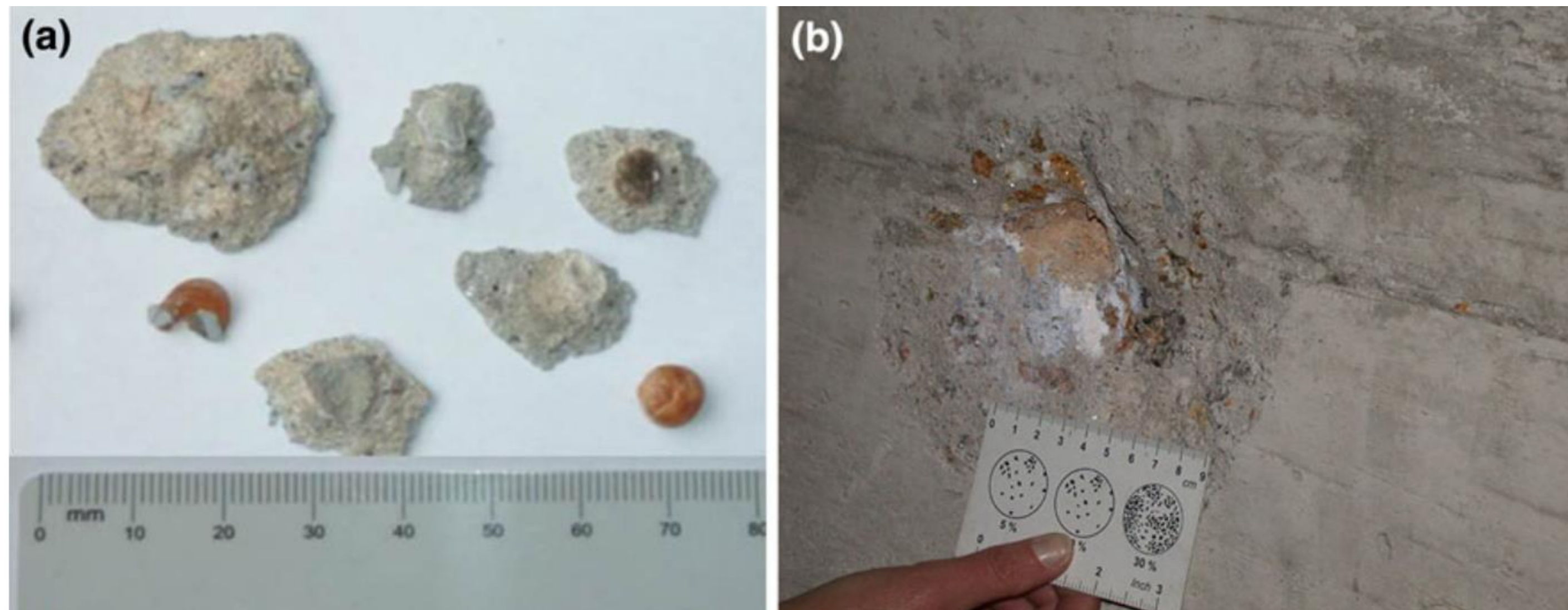
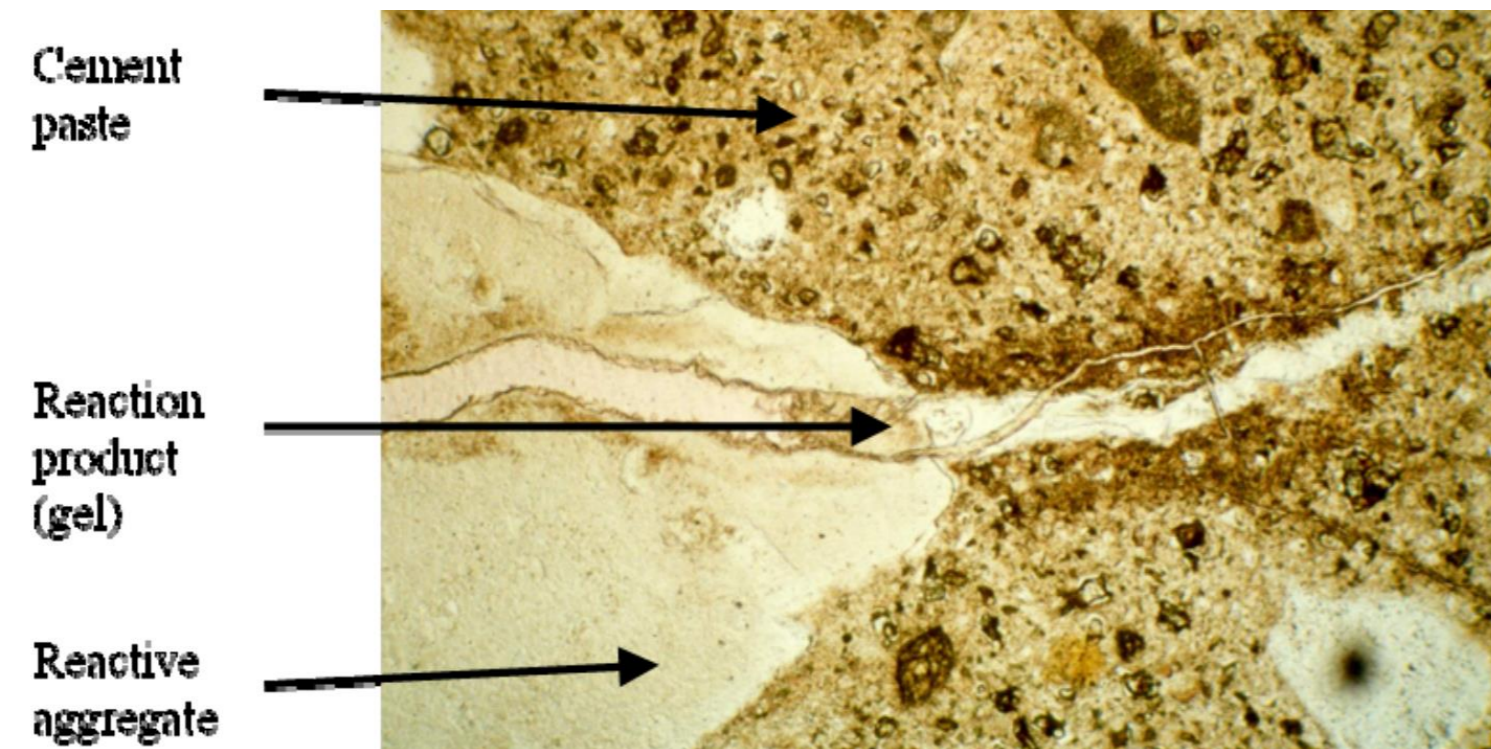
- Map cracking
- Movements and displacements
- Discoloration and Dark Patches
- **Efflorescence and Exudations.**



Interior wall in two different dams. (a) Needle crystals of trona forming efflorescence (white fluffy patches); (b) exudation of carbonated alkali-silica gel (white droplet)

## Agentes de degradación

- Map cracking
- Movements and displacements
- Discoloration and Dark Patches
- Efflorescence and Exudations
- **Pop-outs.**



Examples of pop-outs: (a) conical fragments from a pavement; (b) depression left on the wall of a concrete dam after the detachment of a pop-out.

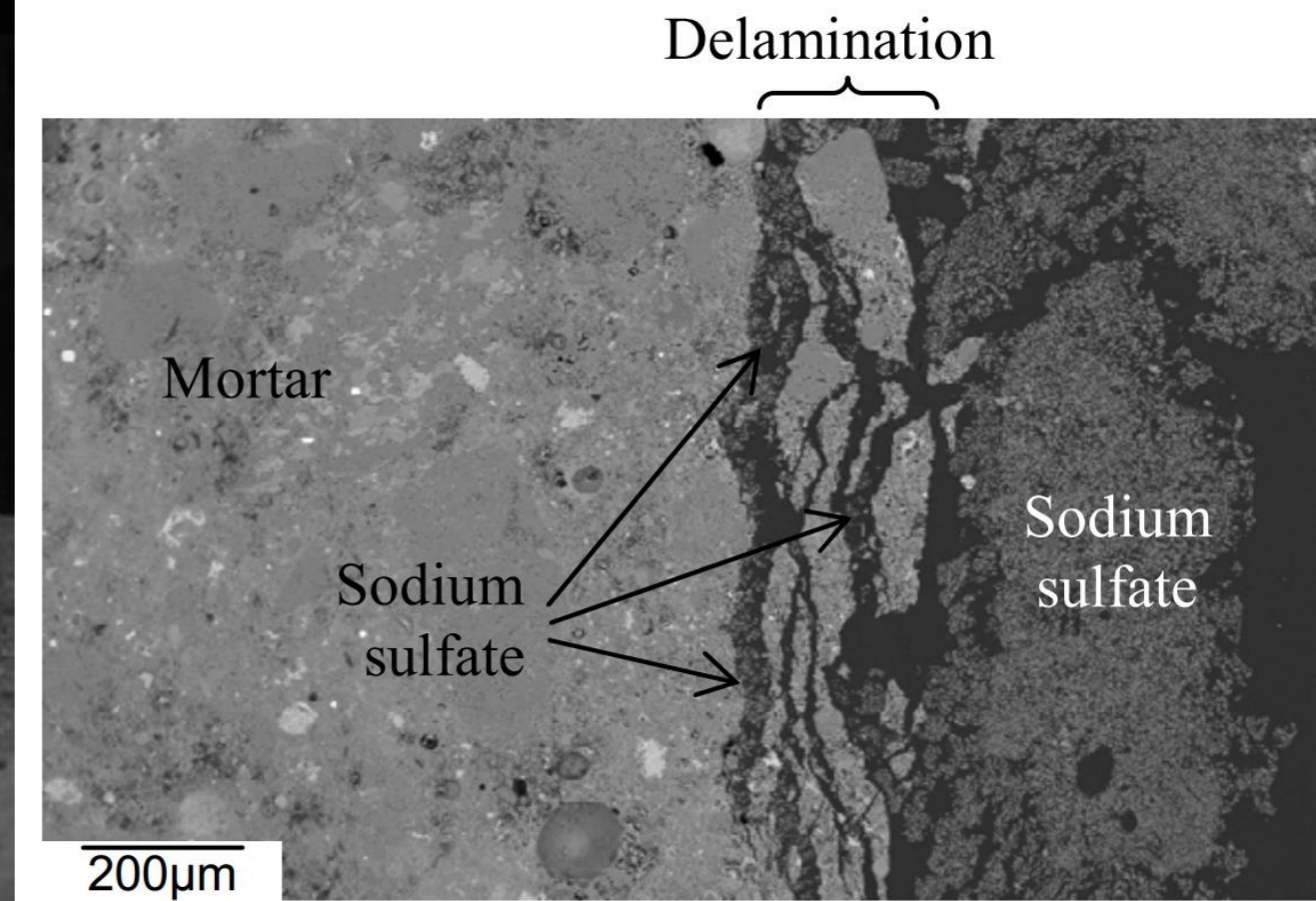
# Agentes de degradación

## Sulfate attack

Tipos de deterioro:

- **Ataque químico:** cuando las sales de sulfato destruyen el cemento pasado o crean nuevos compuestos que son expansivos y dañan el hormigón.
- **Ataque físico (sal):** cuando las sales se precipitan en la superficie del hormigón y provocan incrustaciones.

La presencia de sulfatos solubles (principalmente los de sodio, calcio y magnesio) es común en áreas de operaciones mineras, industrias químicas y papeleras. Los suelos o aguas que contienen estos sulfatos a menudo se denominan suelos o aguas "alcalinos".

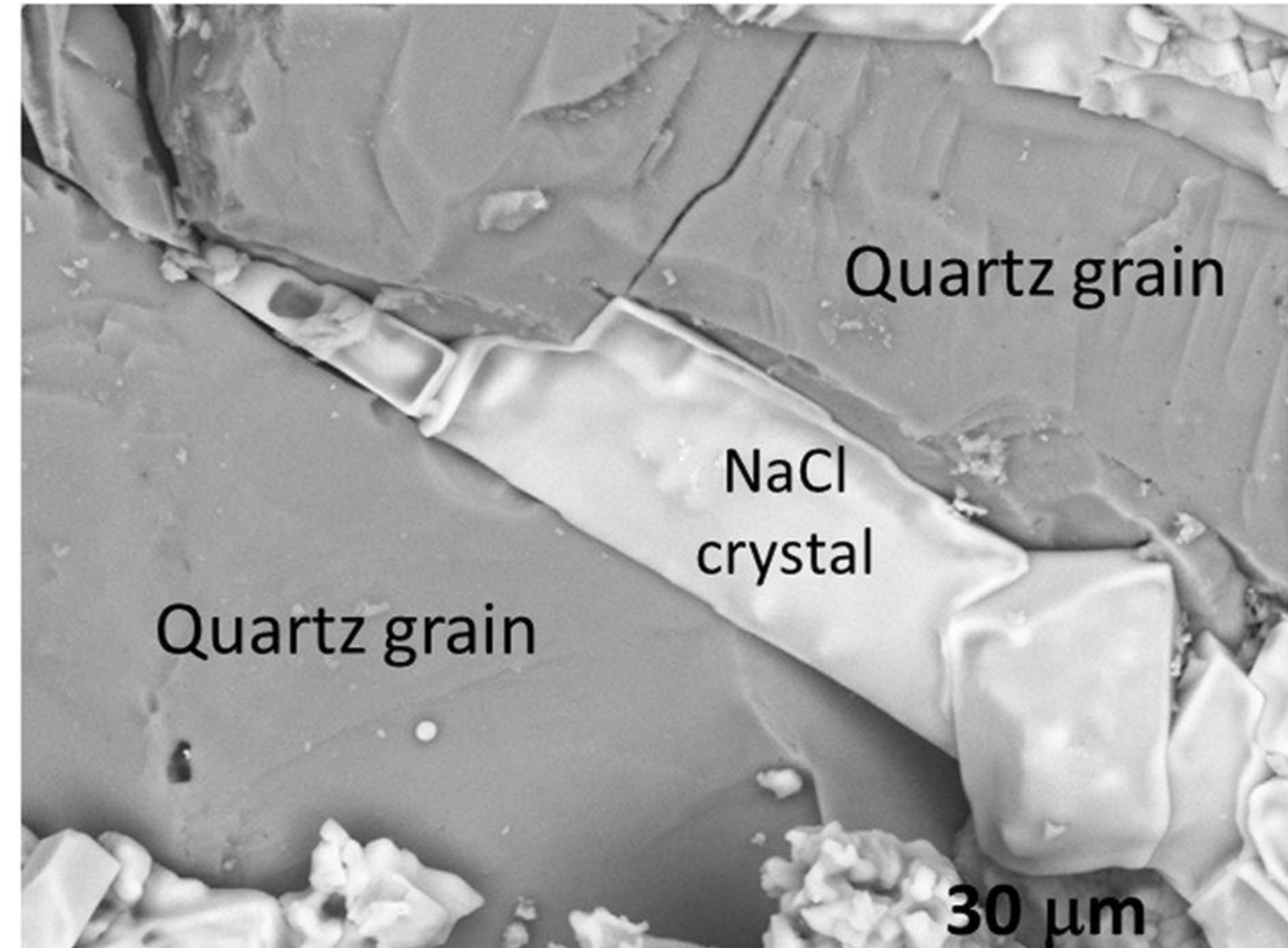


Yoshida, N., Matsunami, Y., Nagayama, M., & Sakai, E. (2010). Salt weathering in residential concrete foundations exposed to sulfate-bearing ground. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 8(2), 121-134.

Yoshida, N., Matsunami, Y., Nagayama, M., & Sakai, E. (2010). Salt weathering in residential concrete foundations exposed to sulfate-bearing ground. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 8(2), 121-134.



# Agentes de degradación



Sierra-Fernandez, A., Gomez-Villalba, L. S., Rabanal, M. E., & Fort, R. (2017). New nanomaterials for applications in conservation and restoration of stony materials: A review. *Materiales de Construcción*, 67(325), 107.

Desarnaud, J., Bonn, D., & Shahidzadeh, N. (2016). The pressure induced by salt crystallization in confinement. *Scientific reports*, 6, 30856.

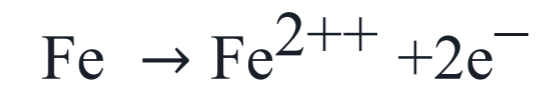




## Agentes de degradación

# Corrosión

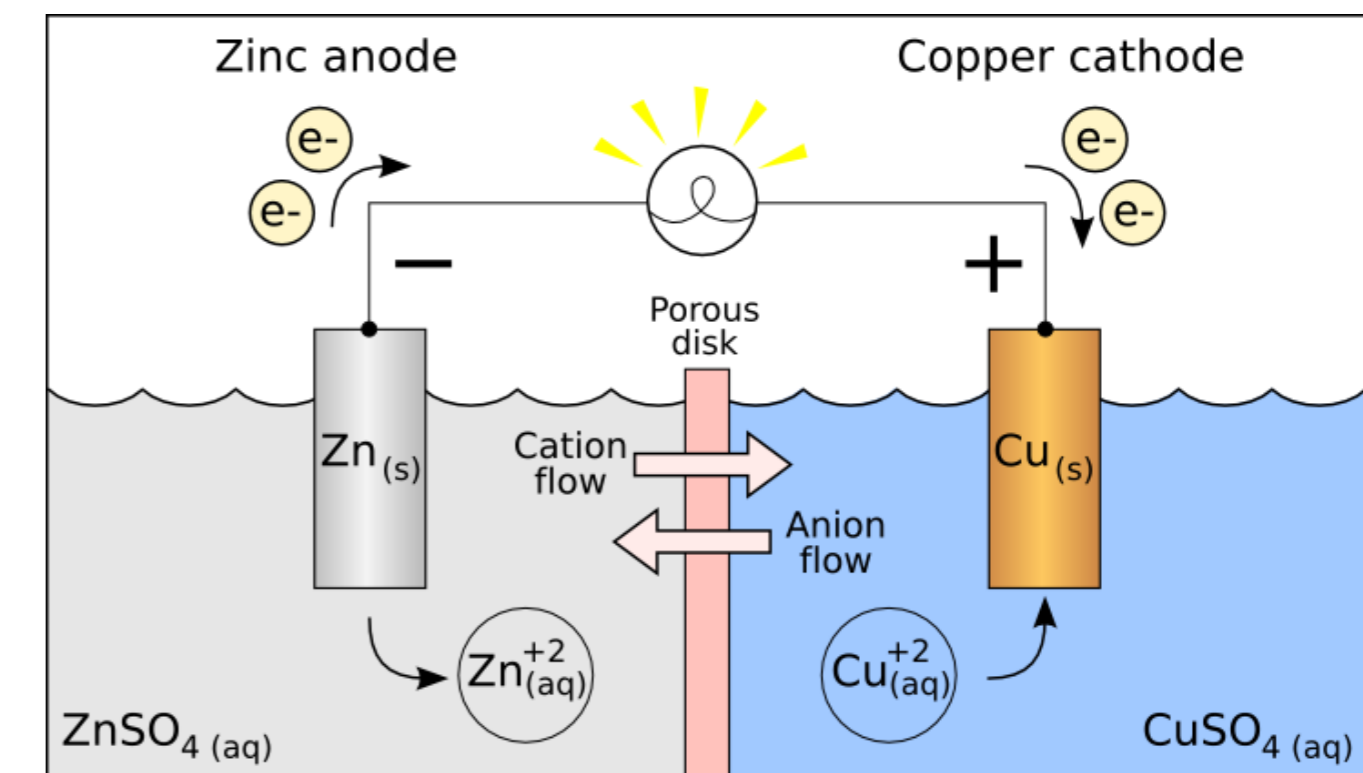
La corrosión es el proceso por el cual los metales pasan de su estado metálico en valencia “cero” a un estado oxidado liberando electrones:



Los electrones se transfieren a otras sustancias (oxígeno, carbonato, sulfato, etc) con el fin de convertirse en una sustancia neutra. Típicamente, estos mecanismos se produce a través de una solución acuosa (a temperaturas normales). La corrosión en presencia de agua líquida se produce por un **mecanismo electroquímico**. Las reacciones químicas y procesos redox ocurren simultáneamente. Por lo tanto, las zonas metálicas con diferente potencial eléctrico debido a que el metal que está en contacto con un electrolito heterogénea (en concentración) o debido a heterogeneidades en el propio metal son la fuerza motriz de las reacciones químicas involucradas en el intercambio de electrones. El proceso se produce como en una batería, donde la oxidación del metal tiene lugar en la zona anódica y una reducción tiene lugar en la zona catódica. Para el caso de electrolitos neutros y alcalinos, la reacción catódica más común es:



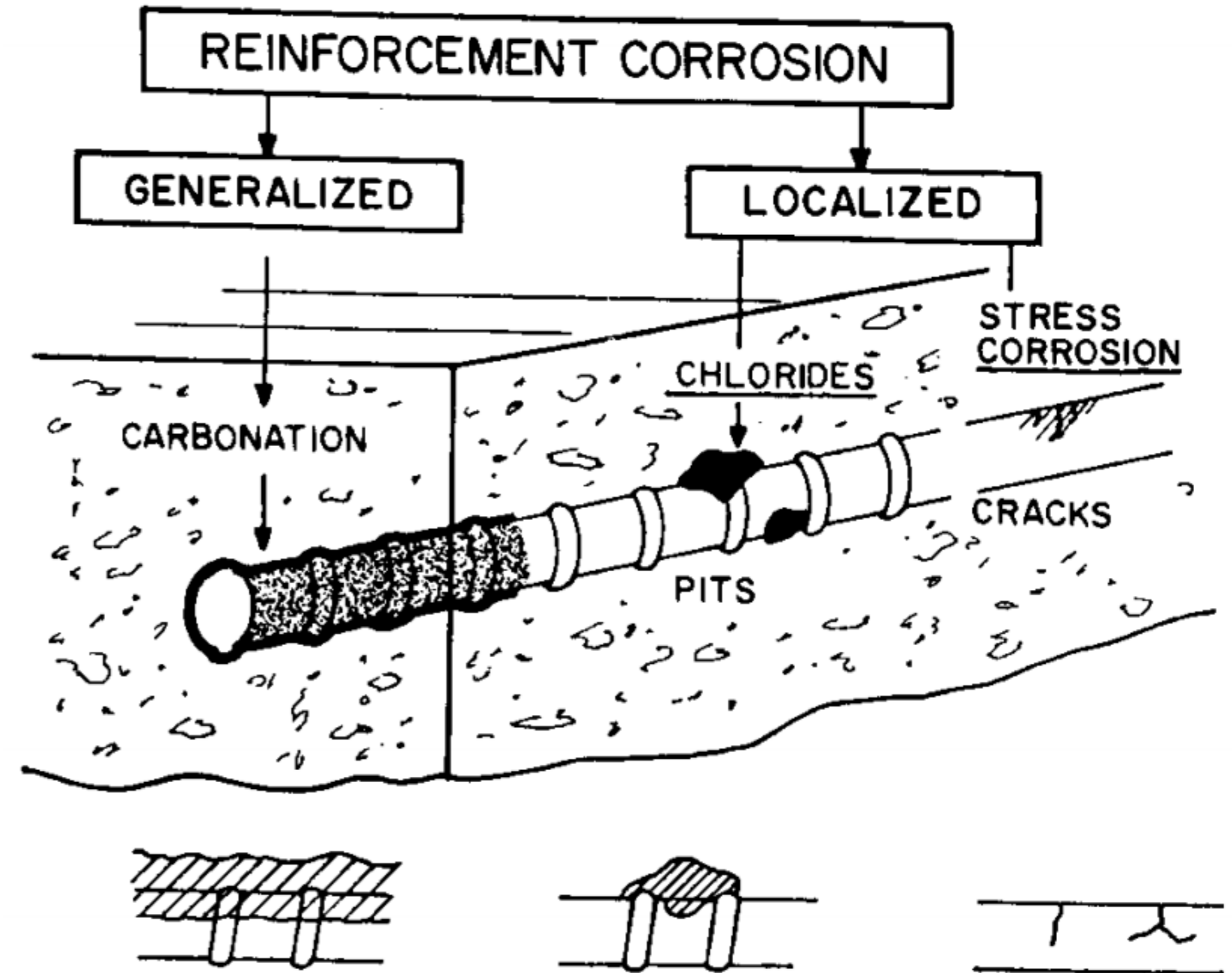
Por lo tanto, los electrones liberados en el ánodo circular a través del metal a las zonas catódicas en donde se consumen inducir la reducción de una sustancia (por ejemplo, oxígeno en la segunda reacción). El producto de corrosión final sería  $\text{Fe}(\text{OH})_2$ ,  $\text{Fe}(\text{OH})_3$  or algunos oxihidróxidos derivados de ellos.



## Agentes de degradación

Las dos causas principales de la corrosión son la **carbonatación** y la presencia de **cloruros**.

La **carbonatación** generalmente induce una corrosión generalizada mientras que los **cloruros** inducen "pitting corrosion" o una corrosión localizada y acelerada. Un estado avanzado de corrosión se puede reconocer por la presencia de óxido en las barras de refuerzo así como la aparición de grietas paralelas a éstas.



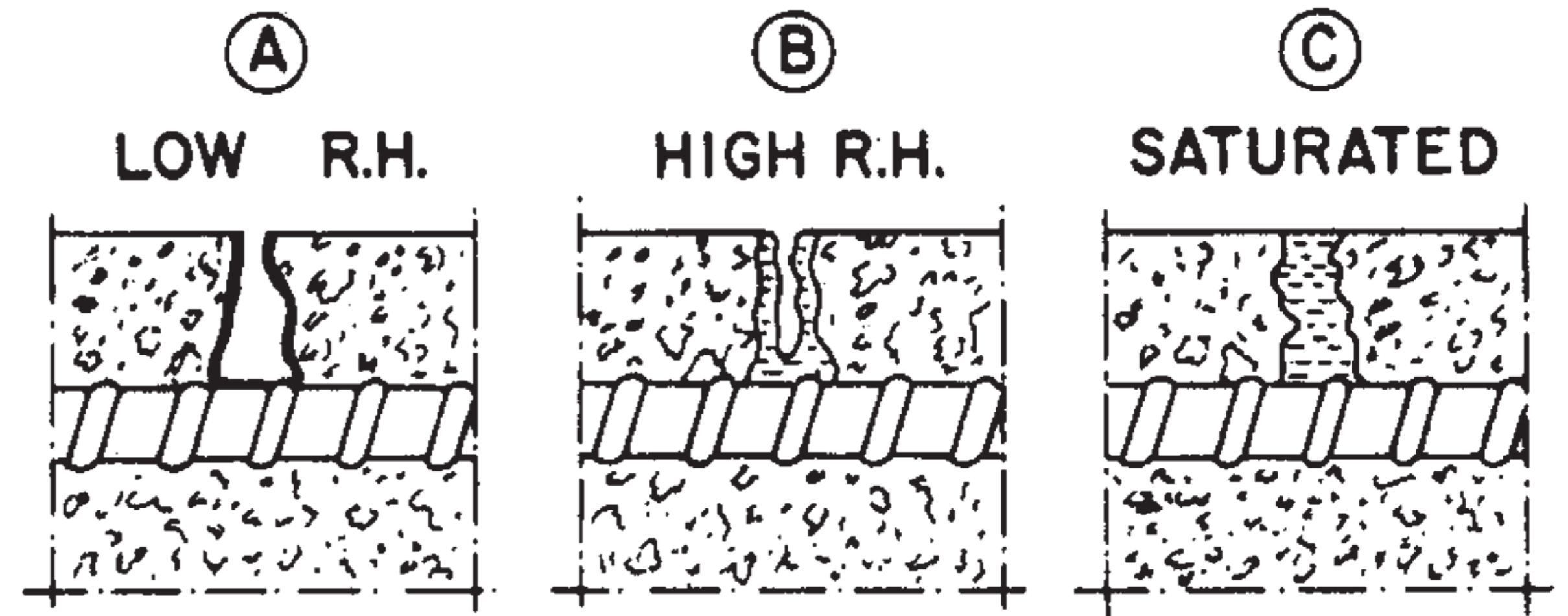
## Agentes de degradación

### Carbonation

El carbono conduce a una disminución del valor de pH de la solución de poros de  $\text{pH} > 13$  a  $\text{pH} < 8$ . Con este valor de pH, la capa pasiva de acero desaparece y comienza una corrosión general y uniforme. El  $\text{CO}_2$ , al ser un gas, penetra a través de la red de poros del hormigón. Si los poros están llenos de agua, el gas se disuelve en el agua líquida y la penetración es muy lenta. Si los poros no están saturados de agua (RH 50-70%), entonces el  $\text{CO}_2$  puede penetrar fácilmente por difusión y alcanzar las partes internas de la cubierta de hormigón.

Para reducir la carbonatación, es importante:

- Usar bajas relaciones w/c
- Buena compactación
- Buen curado



Simplified representation of the degree of saturation of concrete pores (RH, relative humidity). (A)  $\text{CO}_2$  can easily penetrate, but the lack of moisture avoids carbonation. (B) Optimum moisture content for carbonation. (c)  $\text{CO}_2$  penetrates very slowly when dissolving in water.



## Agentes de degradación

### Chlorides attack

Los iones de cloruro ( $\text{Cl}^-$ ) destruyen la capa pasiva protectora de la superficie de las barras de refuerzo, aumentando su susceptibilidad a la corrosión. Los cloruros pueden aparecer en el propio hormigón durante su puesta en obra debido a:

- Uso de agua marina en la mezcla.
- Procedente de los agregados del hormigón.

Los cloruros pueden también entrar en el hormigón desde el ambiente externo debido a:

- Exposición a ambientes marinos.
- Empleo de sales para derretir el hielo.
- Suelos.

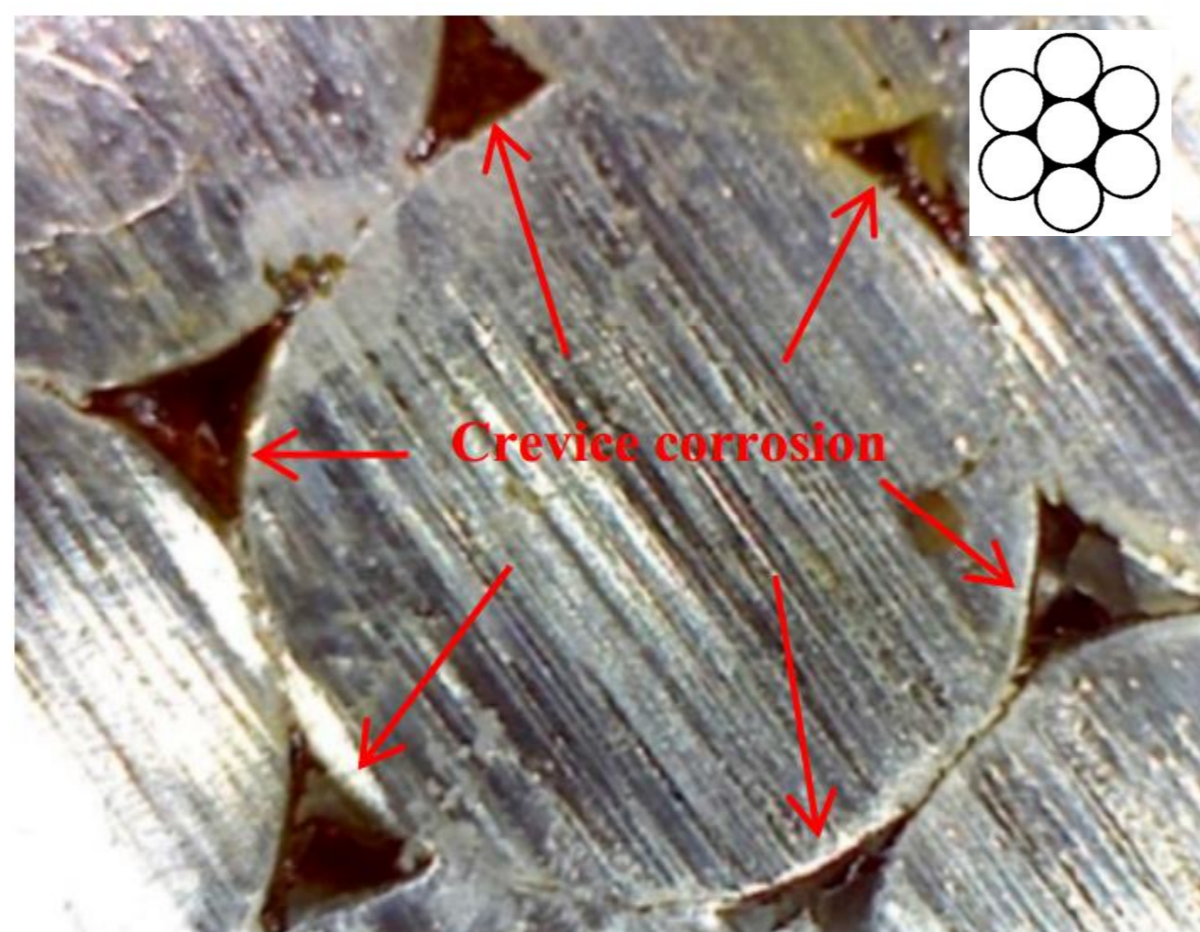
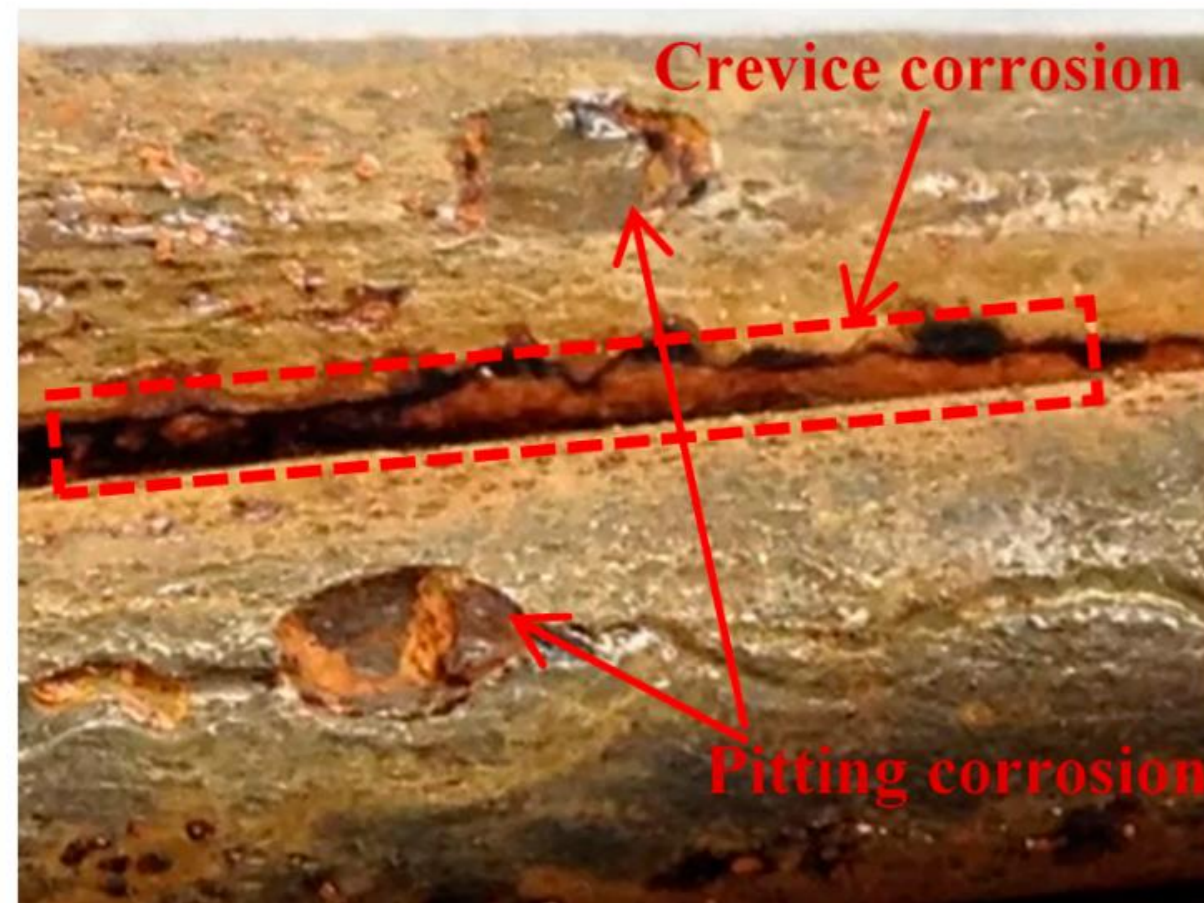


# Agentes de degradación

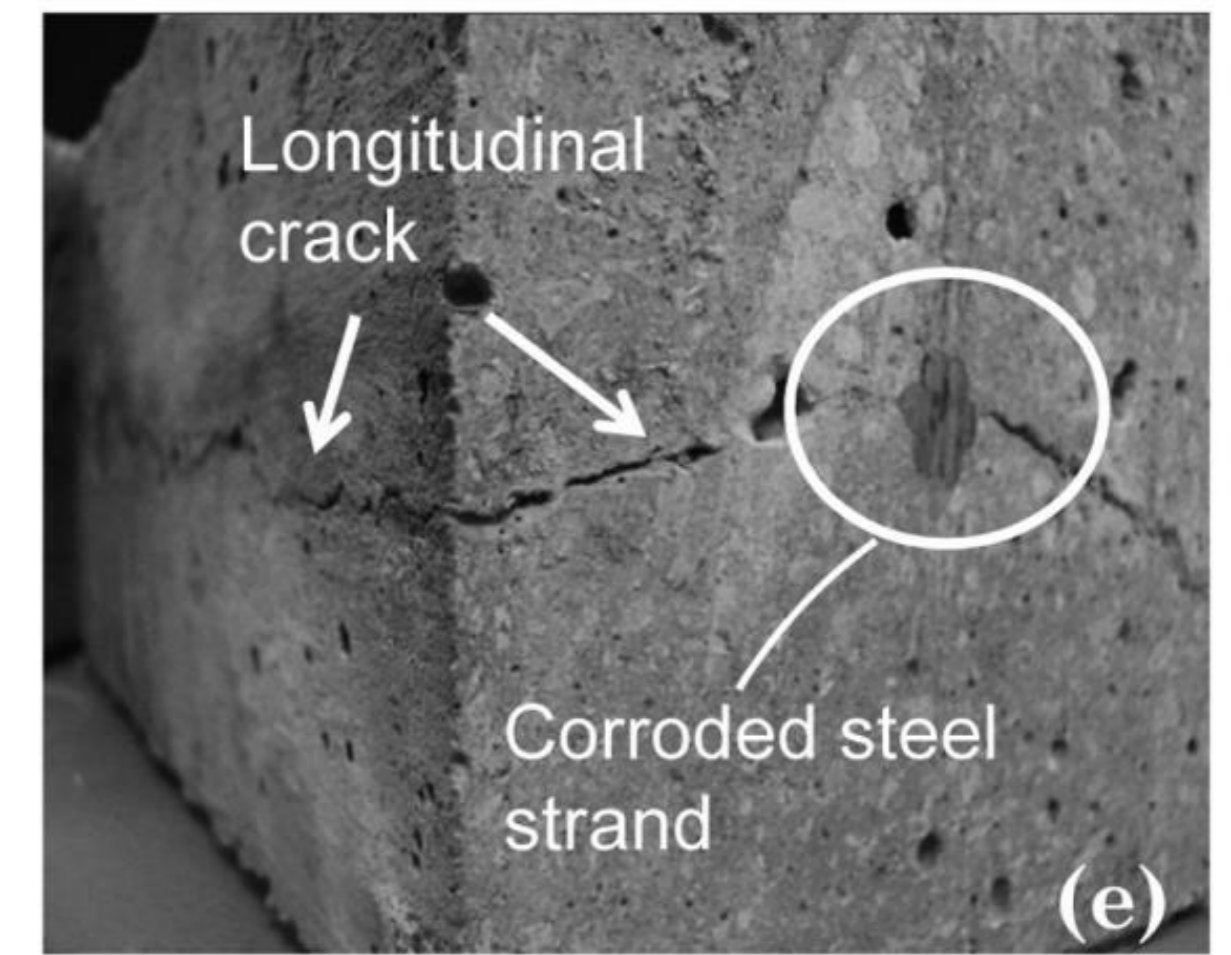
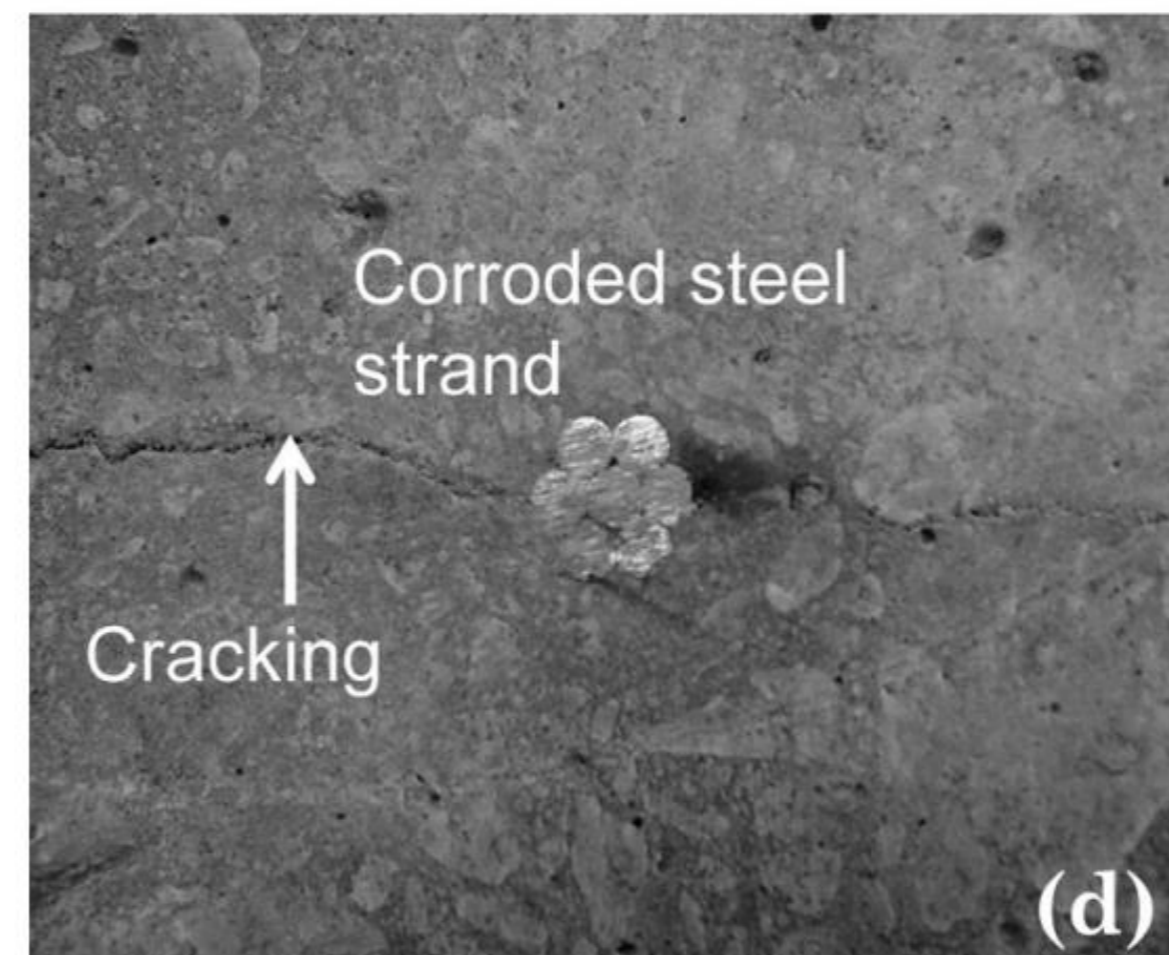
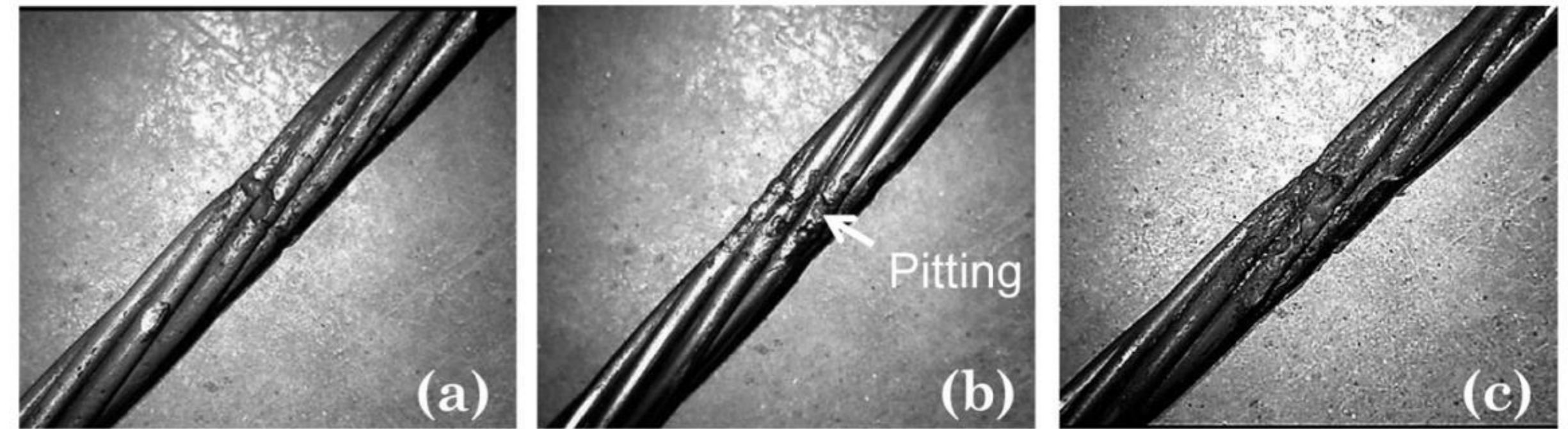
## Strand corrosion

La localización de rotura de tendones de refuerzo puede resultar difícil si éstos no salen de la estructura. El agrietamiento longitudinal puede ser una indicación de fallo en los tendones.

Wang, L., Dai, L., Zhang, X., & Zhang, J. (2017). Concrete cracking prediction including the filling proportion of strand corrosion products. *Materials*, 10(1), 6.



Mangual, J., ElBatanouny, M. K., Ziehl, P., & Matta, F. (2013). Acoustic-Emission-Based Characterization of Corrosion Damage in Cracked Concrete with Prestressing Strand. *ACI Materials Journal*, 110(1).



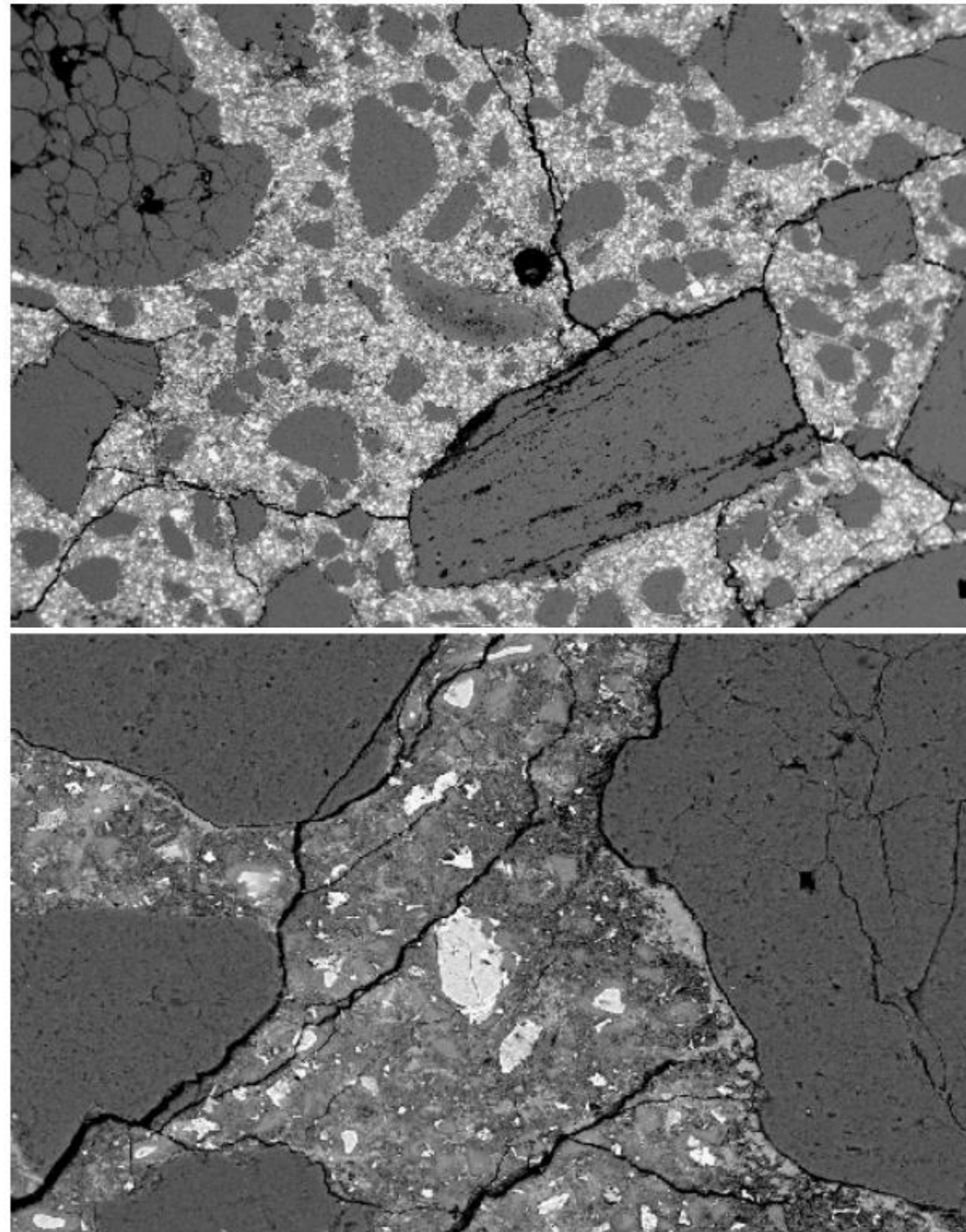
## Agentes de degradación

# Freezing and thawing

La desintegración o deterioro por ciclos repetidos de congelación-deshielo se produce cuando se dan las siguientes condiciones:

- Ciclos de temperatura de congelación y descongelación dentro del hormigón.
- Hormigón poroso que absorbe agua.

El deterioro por congelación-descongelación generalmente ocurre en superficies horizontales que están expuestas al agua, o en superficies verticales que están en la línea de flotación en porciones sumergidas de estructuras. El agua helada contenida en la estructura de los poros se expande a medida que se convierte en hielo. La expansión provoca fuerzas de tensión localizadas que fracturan la matriz de hormigón circundante.



## Agentes de degradación

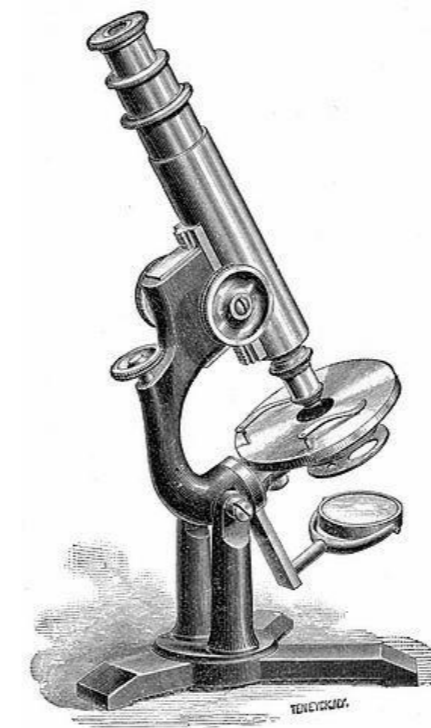
Causes	Symptoms							
	Construction Faults	Cracking	Disintegration	Distortion/Movement	Erosion	Joint Failures	Seepage	Spalling
Accidental Loadings		X						X
Chemical Reactions		X	X				X	
Construction Errors	X	X				X	X	X
Corrosion		X				X	X	X
Design Errors		X						X
Erosion			X		X			
Freezing and Thawing		X	X					X
Settlement and Movement		X		X		X		X
Shrinkage	X	X		X				
Temperature Changes		X				X		X

*Courtesy of United States Army Corps of Engineers*



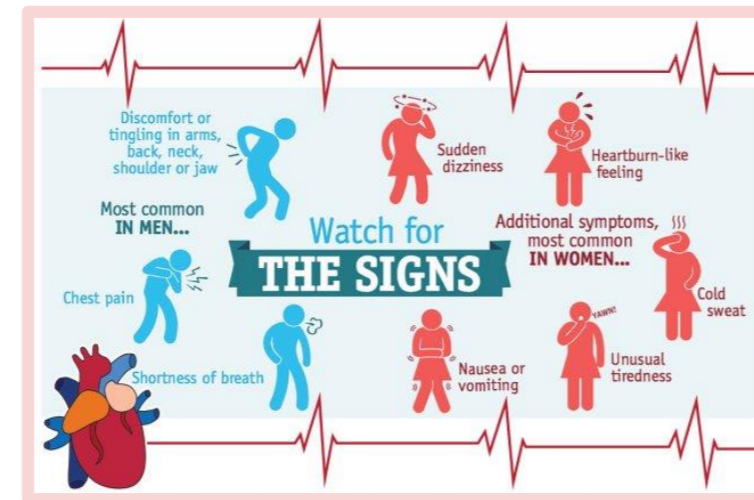


# Tecnologías de monitorización.





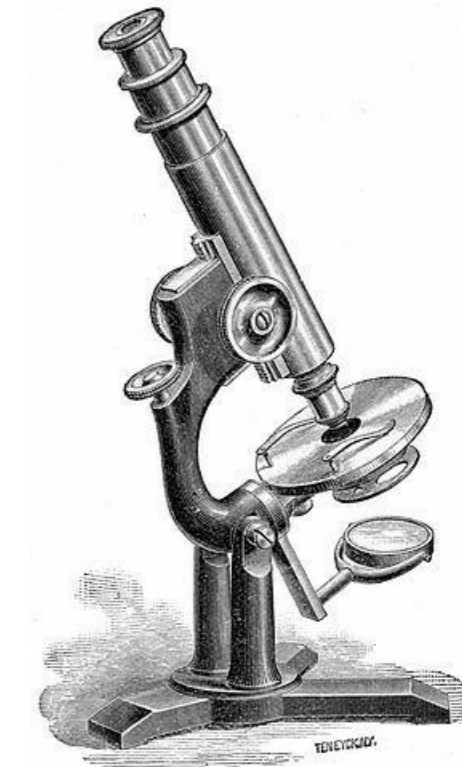
# Tecnologías de monitorización



?



Testing and inspection techniques



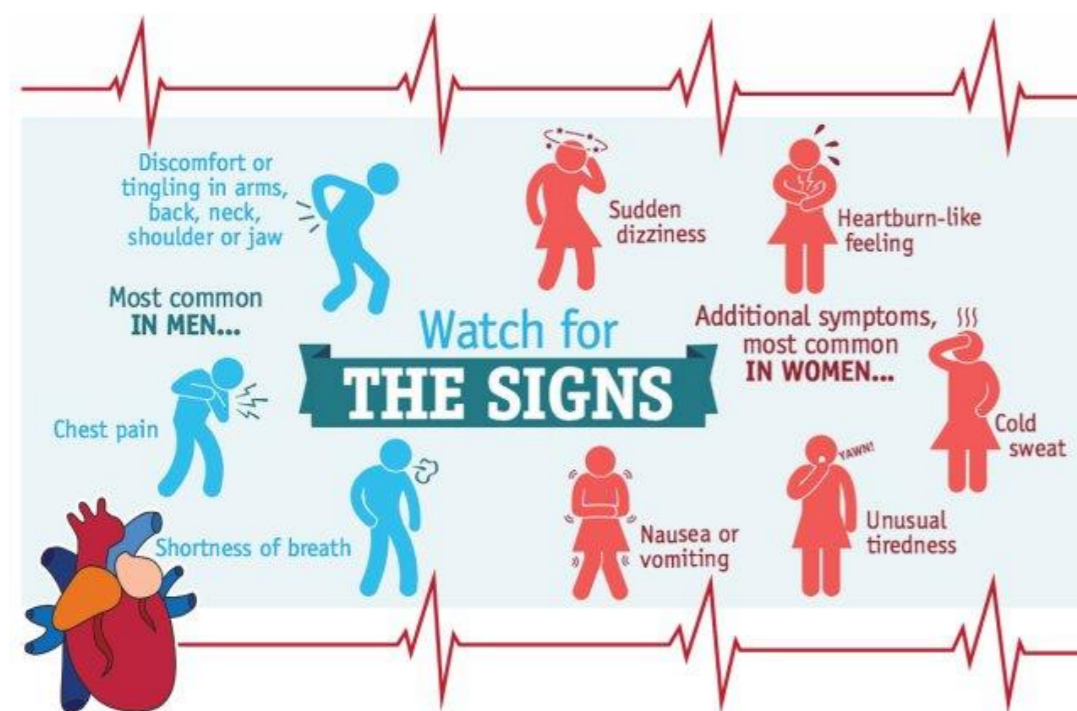
# Tecnologías de monitorización

Clasificación de técnicas de ensayo e inspección en estructuras de hormigón:

1. Integridad estructural.
2. Calidad y composición del hormigón.
3. Capacidad de servicio y condición del acero de pretensado o de refuerzo.

1. In situ.
2. Análisis de laboratorio.

1. Destructivo.
2. No-Destructivo.



### IN-SITU SAMPLING AND TESTING

- ❖ Visual surveys
- ❖ Tapping surveys
- ❖ Covermeter surveys
- ❖ Thermography
- ❖ Acoustic emission
- ❖ Dynamic testing
- ❖ Ground Penetrating Radar
- ❖ Flat jacks
- ❖ Digital Image Correlation
- ❖ Interferometric radar
- ❖ Load testing



# Visual surveys

Bridge inspector's handbook. Transport Research Laboratory (UK).

Handbook page (2)	ROAD APPROACHES AND DECK	Problem		How bad ?			How much ?		Note or sketch reference
		No	Yes	Not very bad	Bad	Vary serious	Not much	Some	
	POSSIBLE PROBLEM								

15 ROAD SURFACE NEAR BRIDGE										
Bumpy road surface ?	<input checked="" type="checkbox"/>									
All checked									Yes <input checked="" type="checkbox"/>	No <input type="checkbox"/>

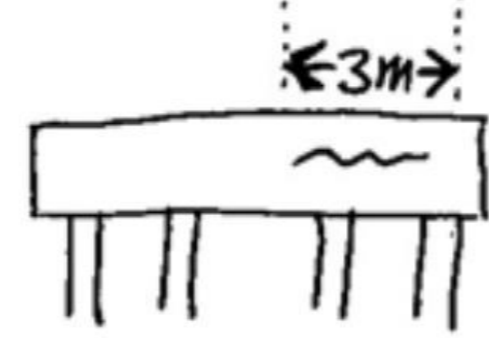
16 DRAINAGE										
Badly built road drainage near bridge ?	<input checked="" type="checkbox"/>									
Blocked or damaged road drains ?	<input checked="" type="checkbox"/>									
Water on the deck ?	<input checked="" type="checkbox"/>									
Blocked or damaged deck drains ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>				<input checked="" type="checkbox"/>				2 drains unblocked while inspecting
All checked									Yes <input checked="" type="checkbox"/>	No <input type="checkbox"/>

19 BITUMEN SURFACE BRIDGE SURFACE AND FOOTPATHS										
Surface breaking up or lifting off ?										
Cracking above joints ?										

20 CONCRETE SURFACE										
Cracking ?	<input checked="" type="checkbox"/>									
Spalling ?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>			<input checked="" type="checkbox"/>				at edges of deck.
Reinforcement exposed ?	<input checked="" type="checkbox"/>									
Poor concrete ?	<input checked="" type="checkbox"/>									
Wear of surface due to small stones ?	<input checked="" type="checkbox"/>									

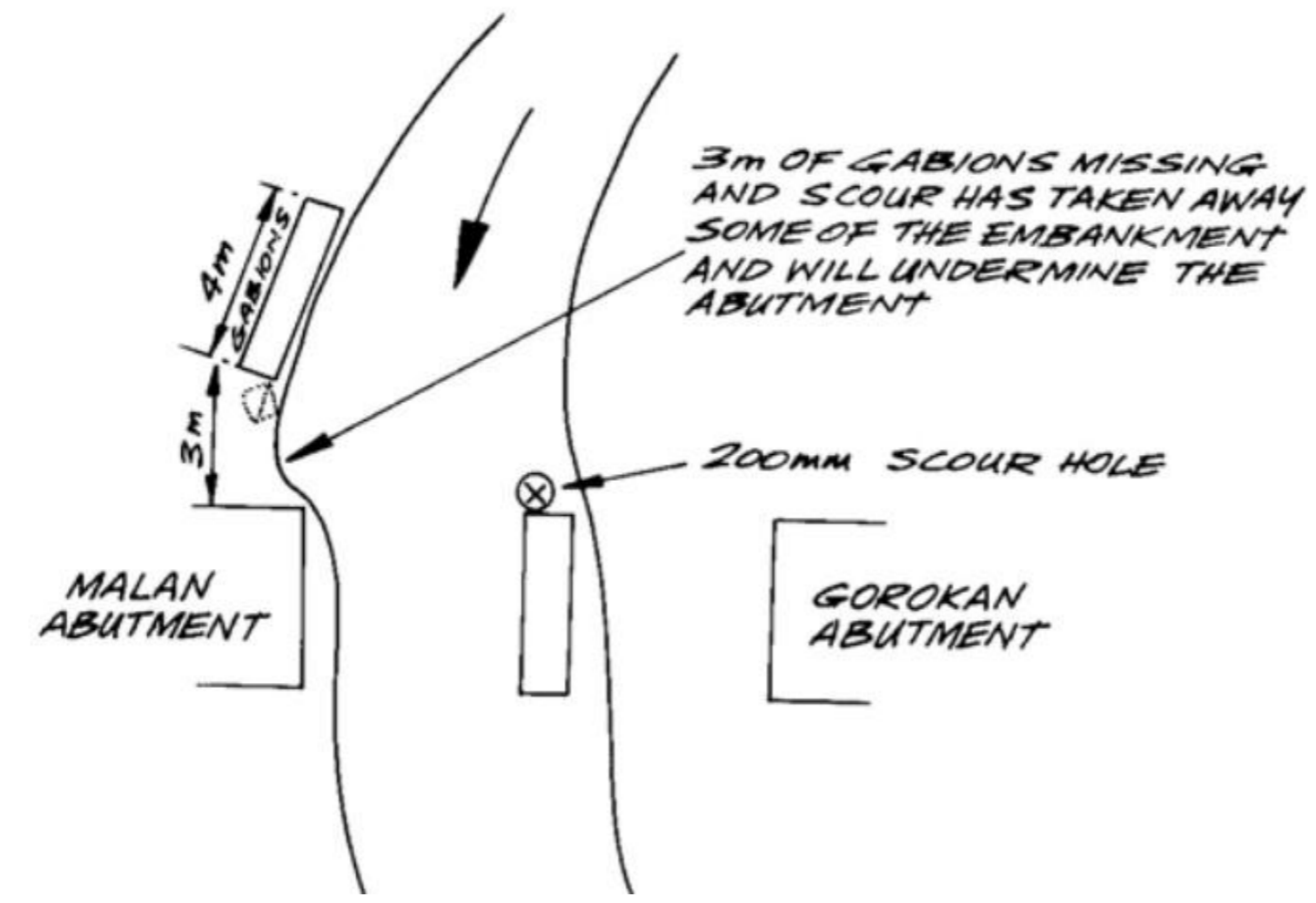
22 STEEL SURFACE										
Fixings loose or damaged ?										
Bends in panels ?										
Corrosion ?										
All checked									Yes <input checked="" type="checkbox"/>	No <input type="checkbox"/>

Split timbers ?										
Loose or corroded bolts or pins ?										
63 MASONRY JACK ARCH DECKS										
Change of shape of arch ?										
Cracking or spalling ?										
Poor pointing ?										
All checked									Yes <input checked="" type="checkbox"/>	No <input type="checkbox"/>

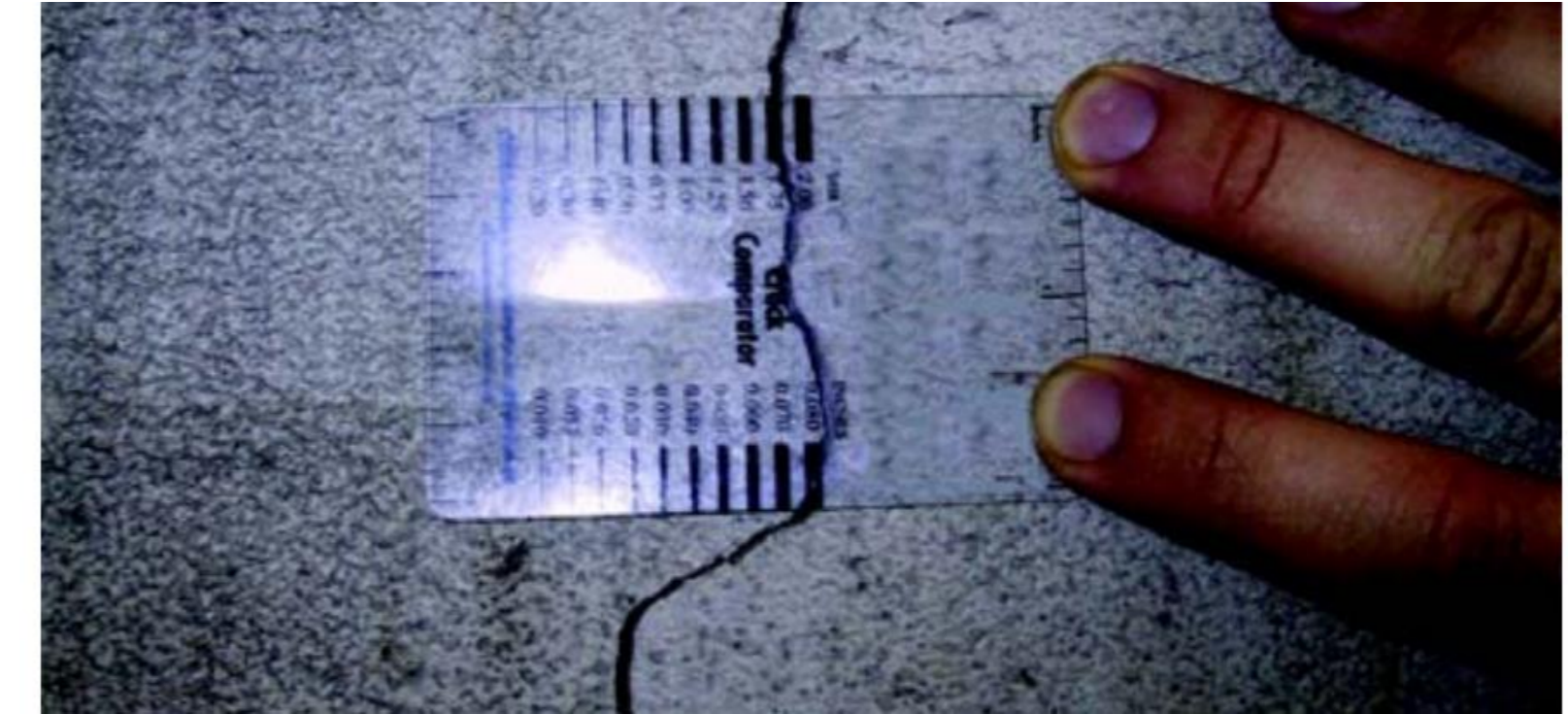


**Note 2** Crack in cross beam (0.5mm wide) looking from Gorokan abutment.

**NOTE 1**



Guide for making a condition survey of concrete in service. American Concrete Institute



# Tapping surveys



[https://www.youtube.com/watch?v=\\_n2z](https://www.youtube.com/watch?v=_n2z)

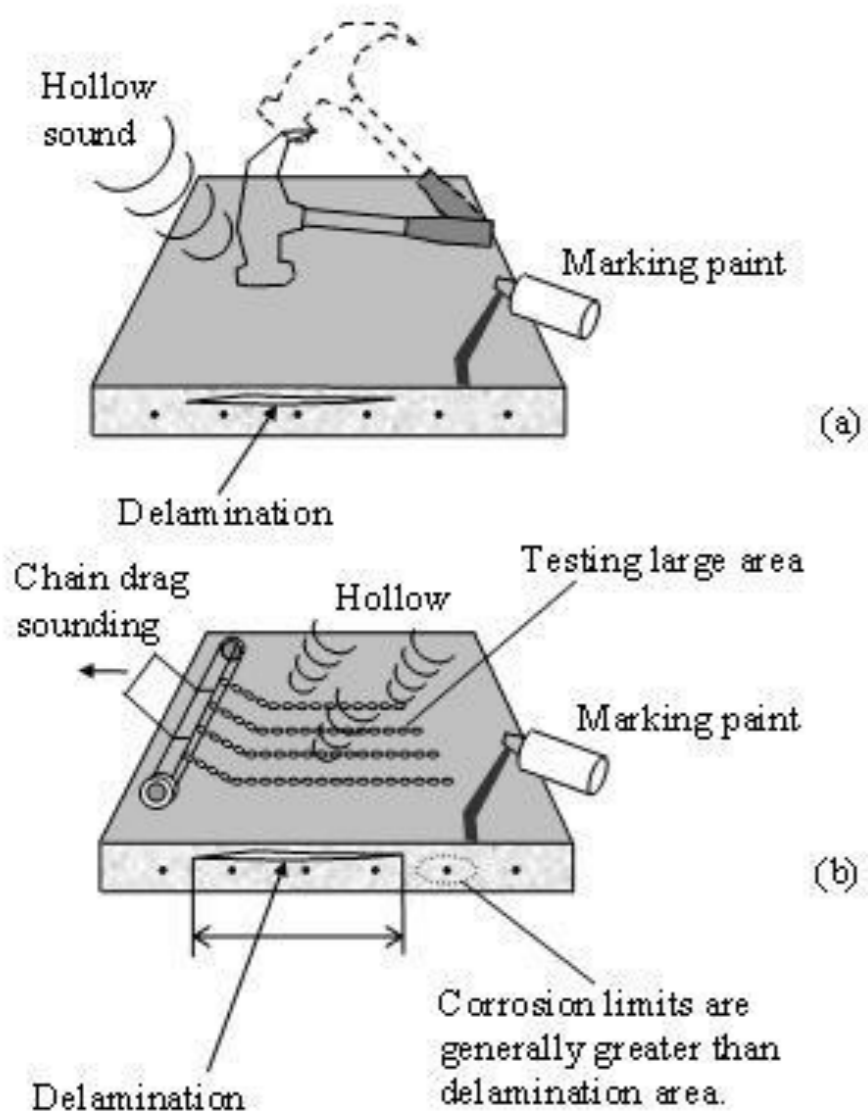
Chain drag



Sounding rod



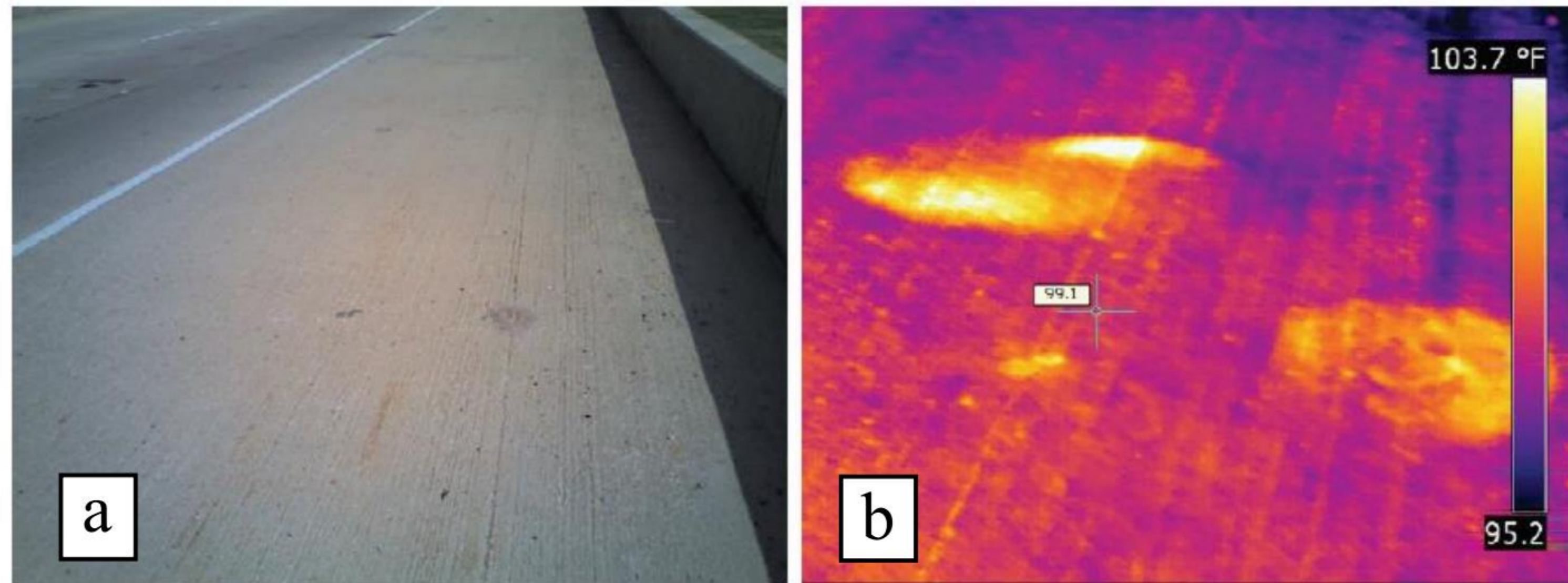
Sounding hammer



# Covermeter surveys

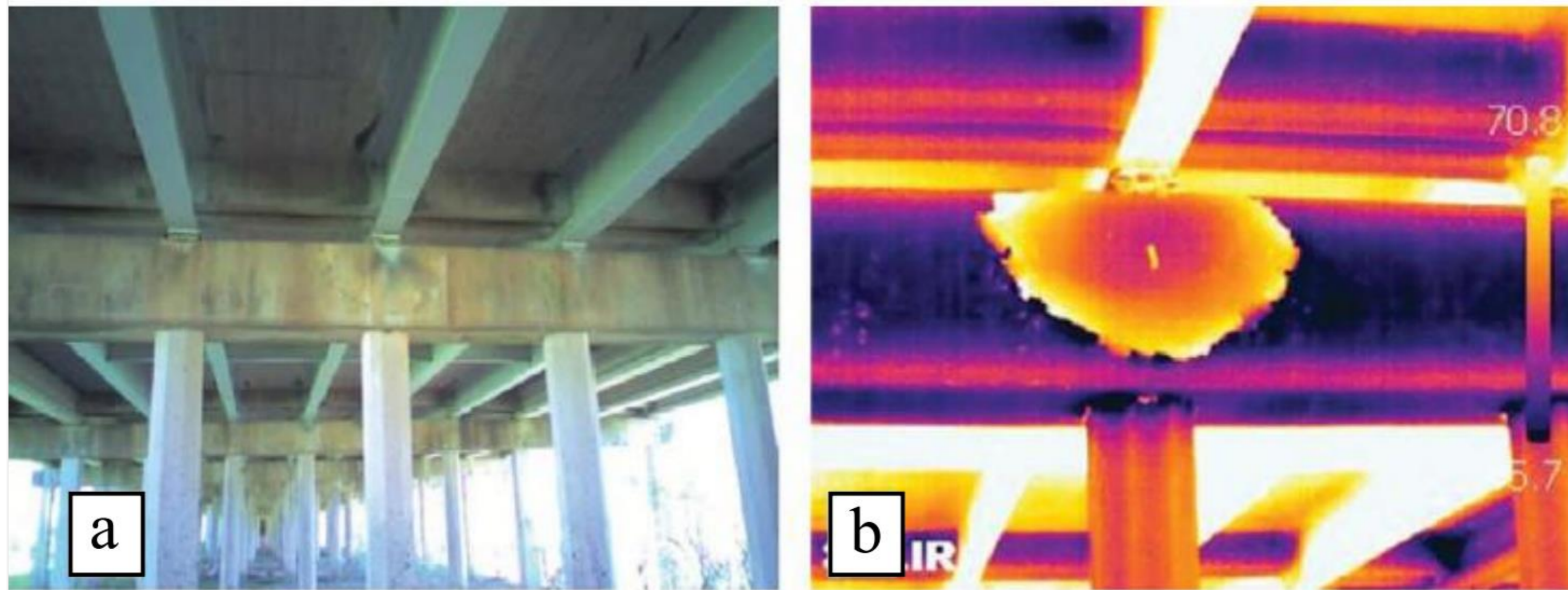


# Thermography



Detection of delaminations: a) Digital photography and b) Thermogram

Washer, G., Fenwick, R., Bolleni, N. (2009), “Development of Hand-held Thermographic Inspection Technologies” (Jefferson City, United States: MODOT), p. 120



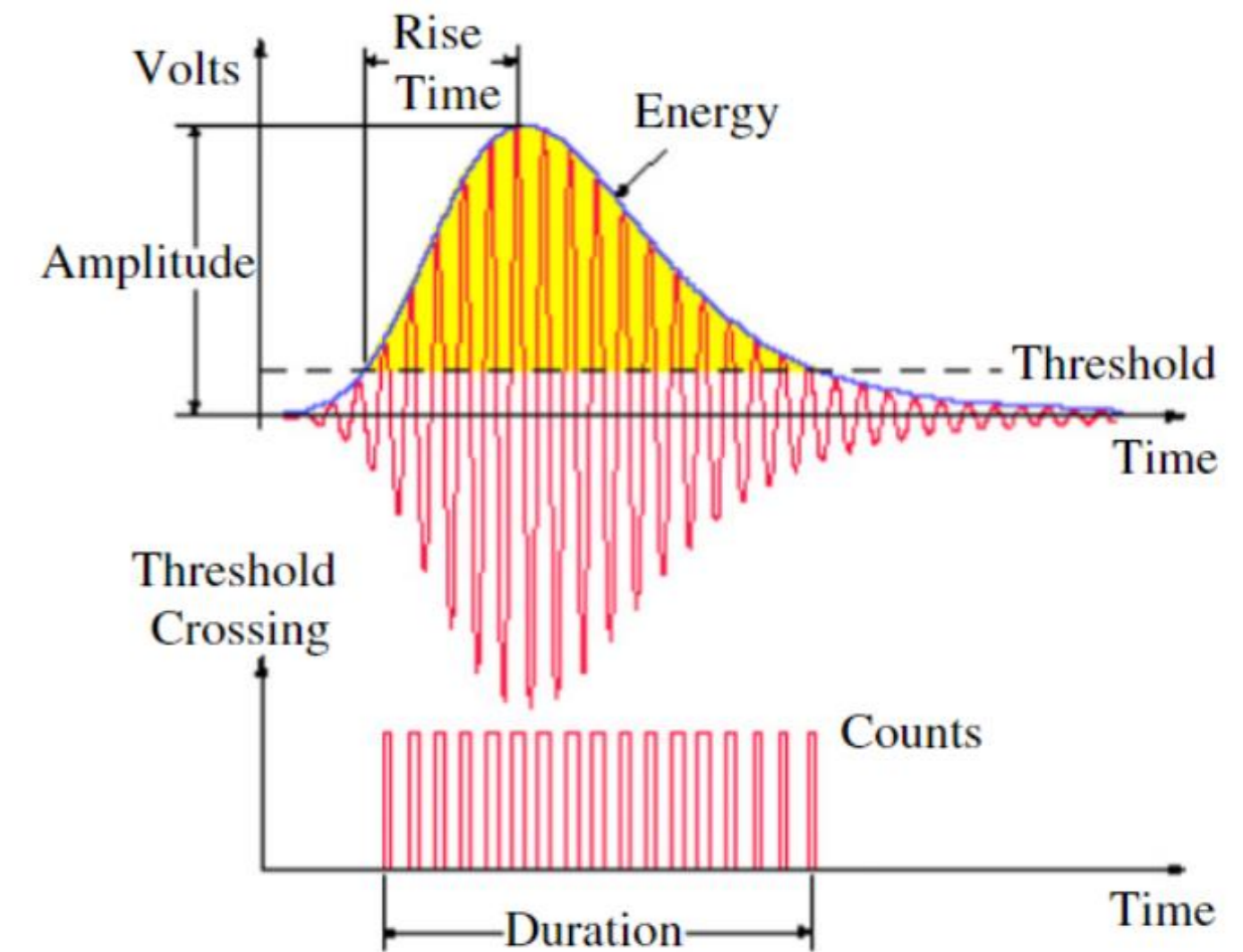
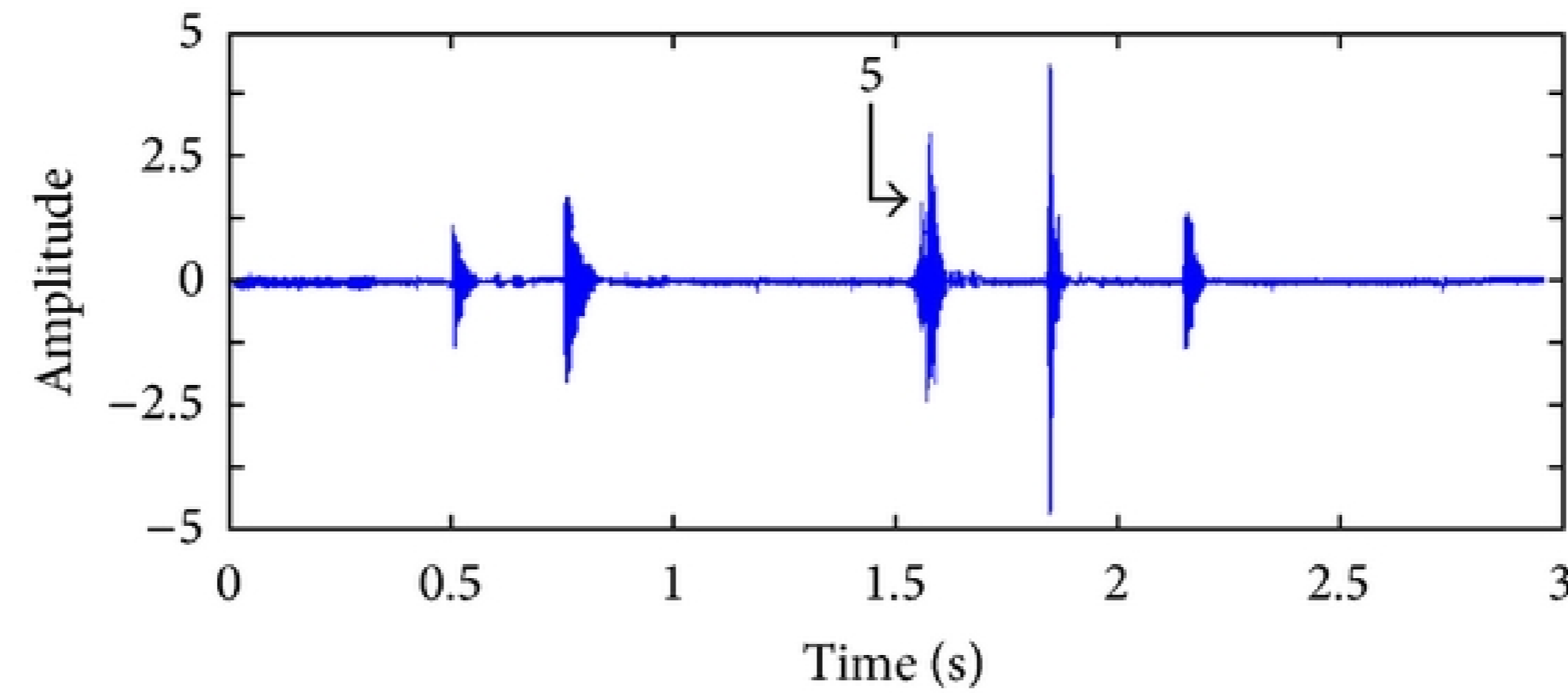
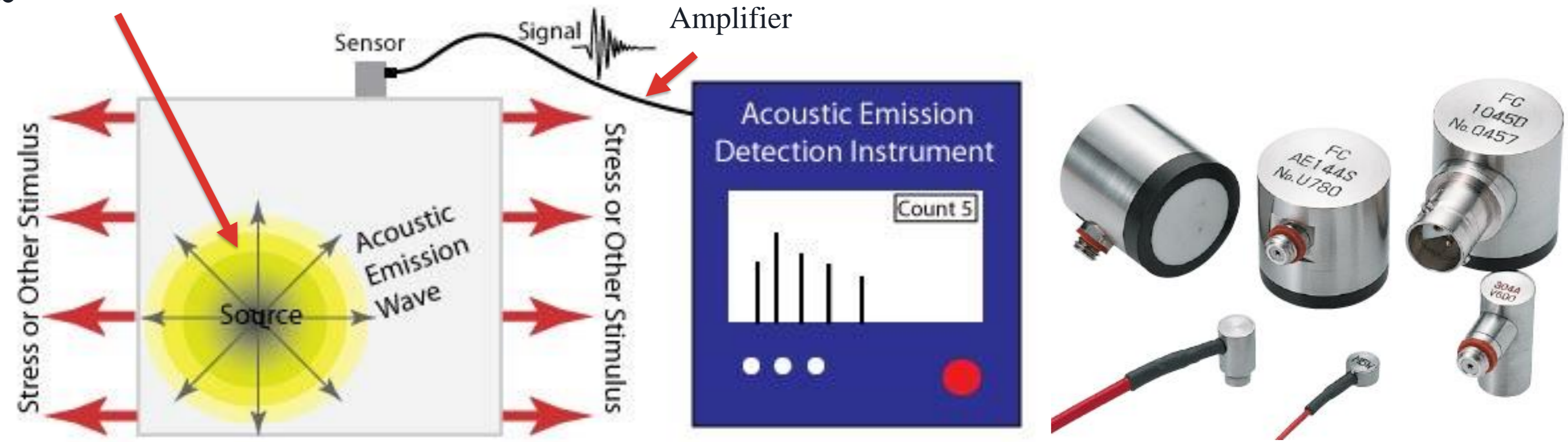
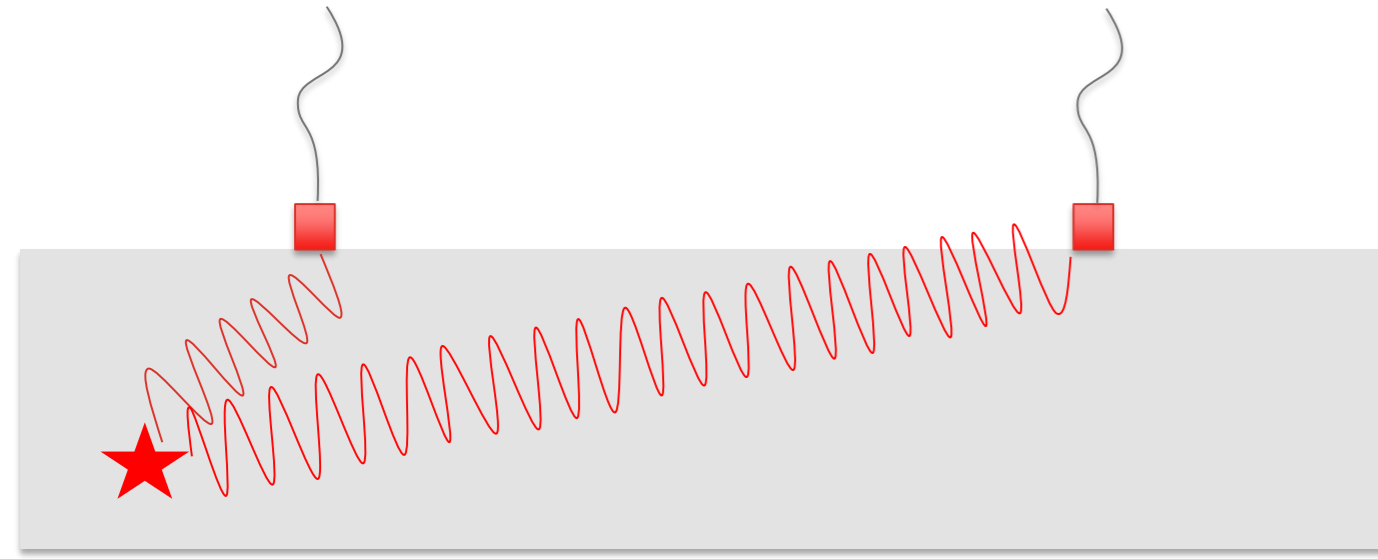
Application in bridge infrastructure: a) Digital photography and b) Thermogram

Washer, G. (2012), “Advances in the use of thermographic imaging for the condition assessment of bridges. Bridge Structures”, V.8, No. 2, pp. 81-90



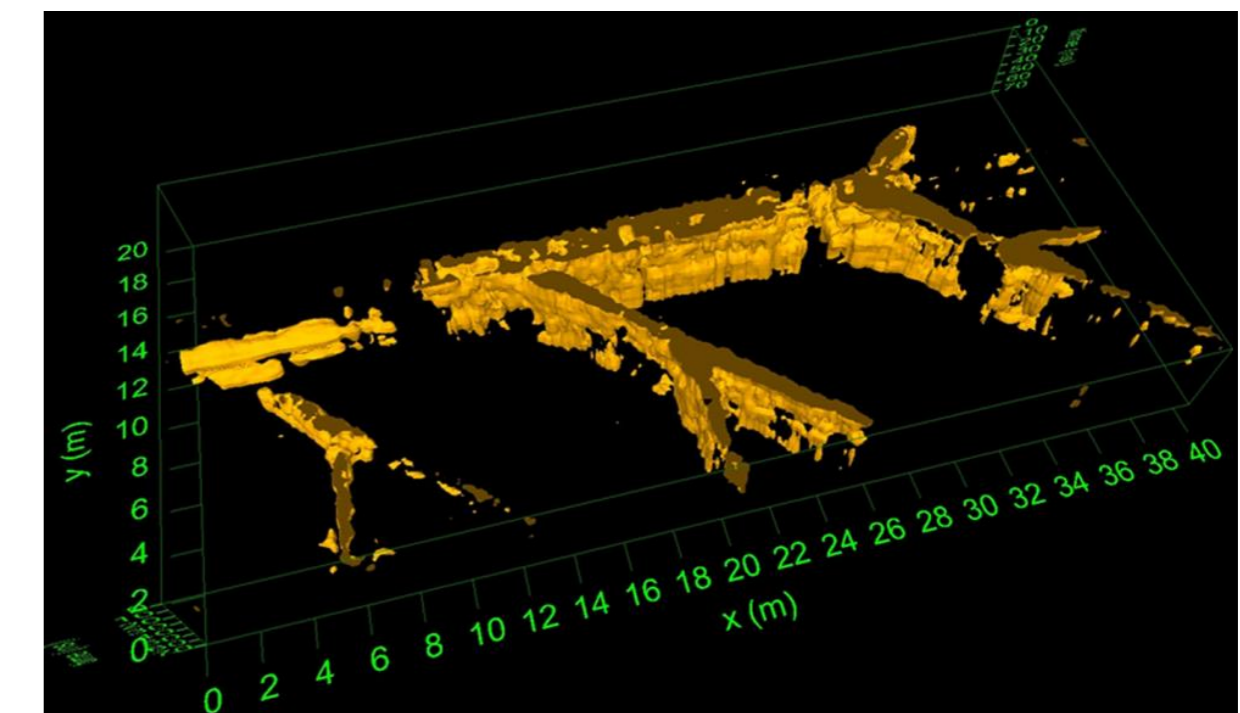
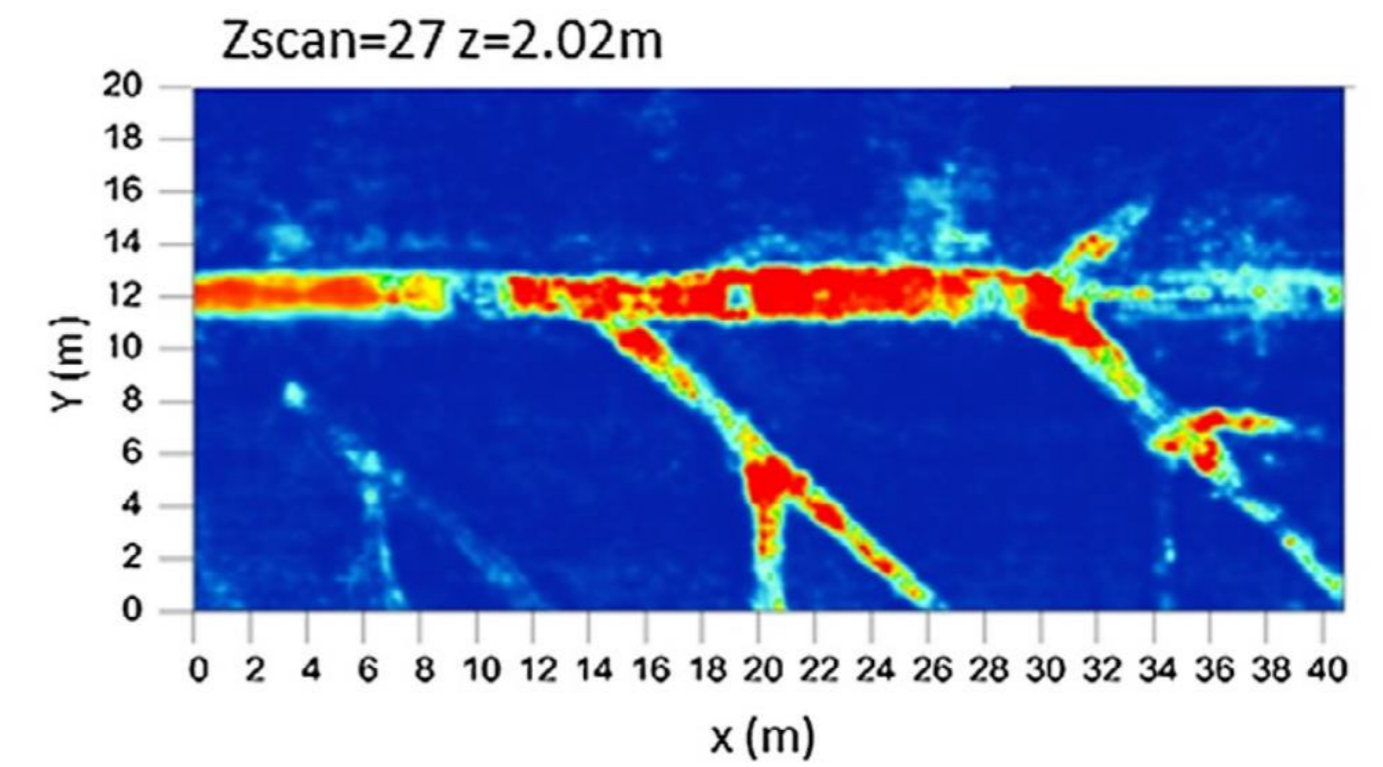
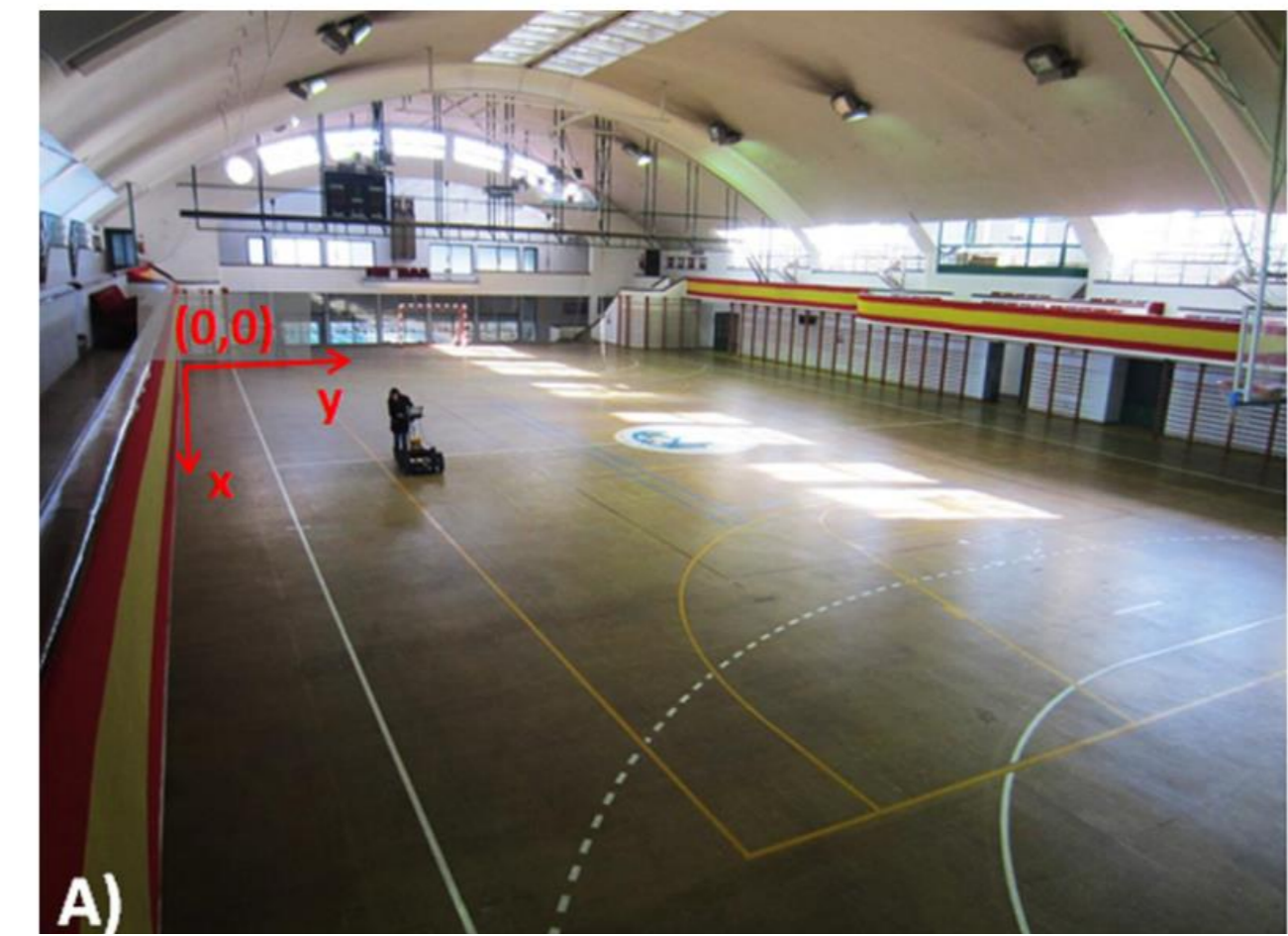
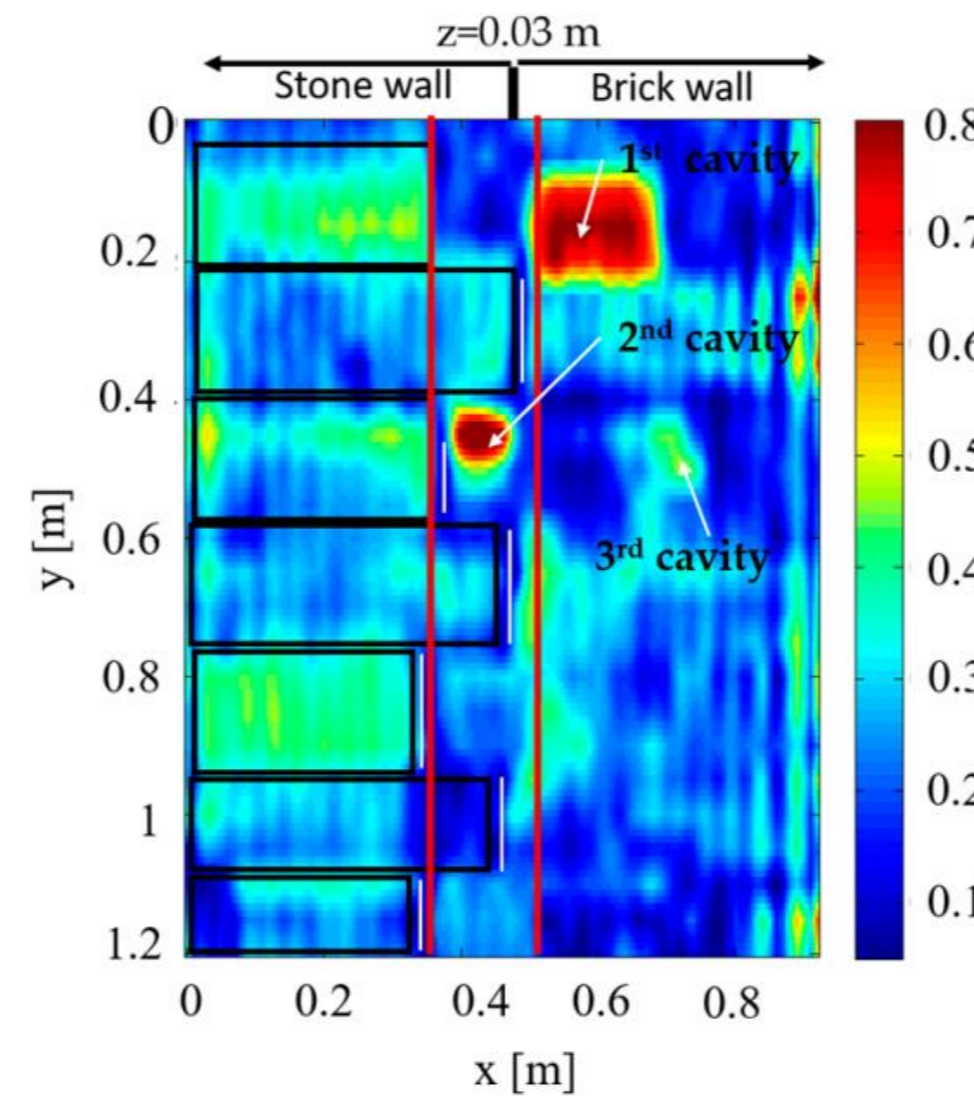
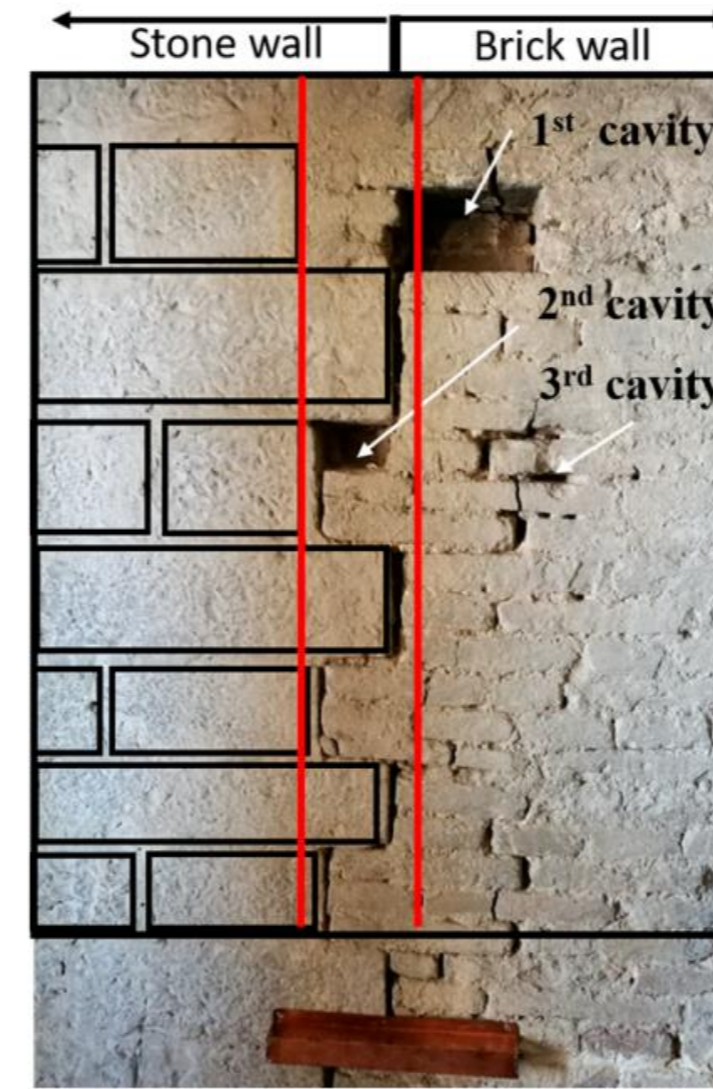
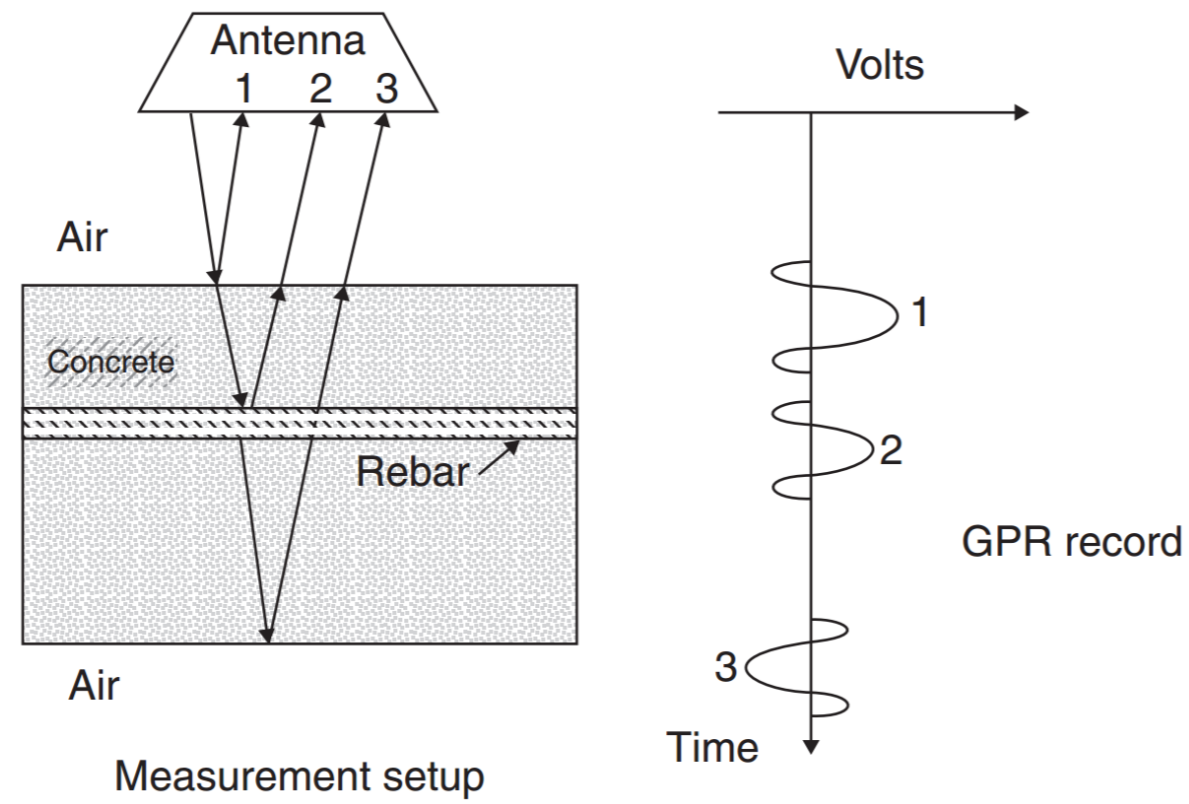
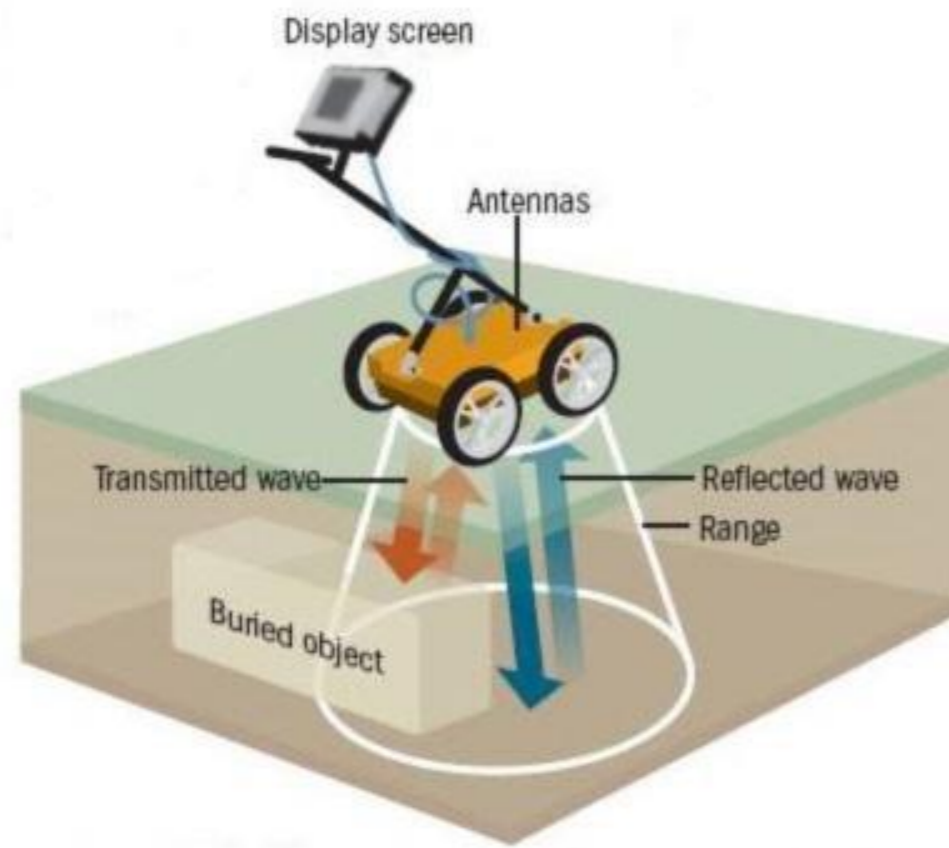
# Acoustic Emission

- Cracks growing
- Fibers breaking
- ...etc

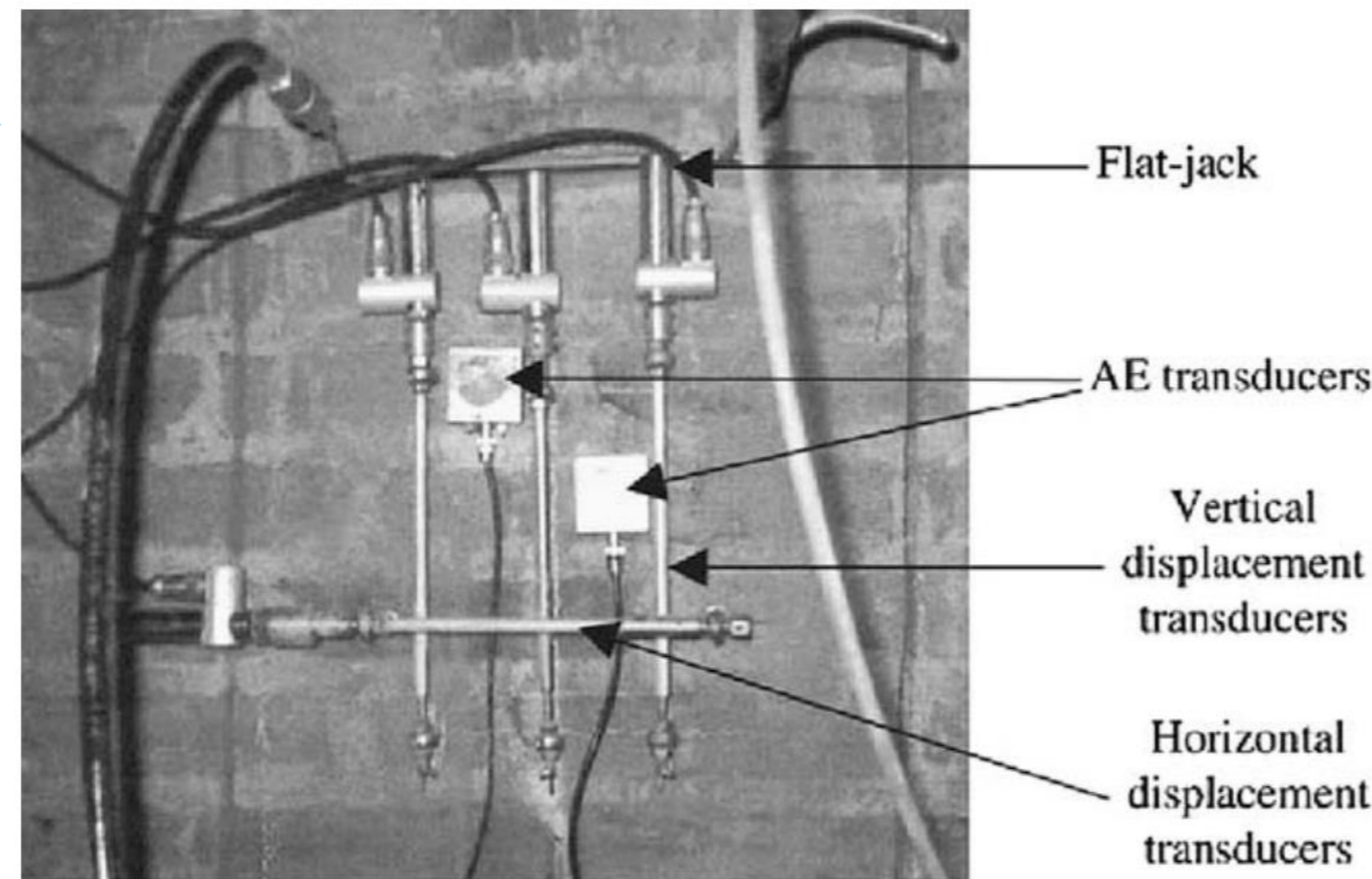
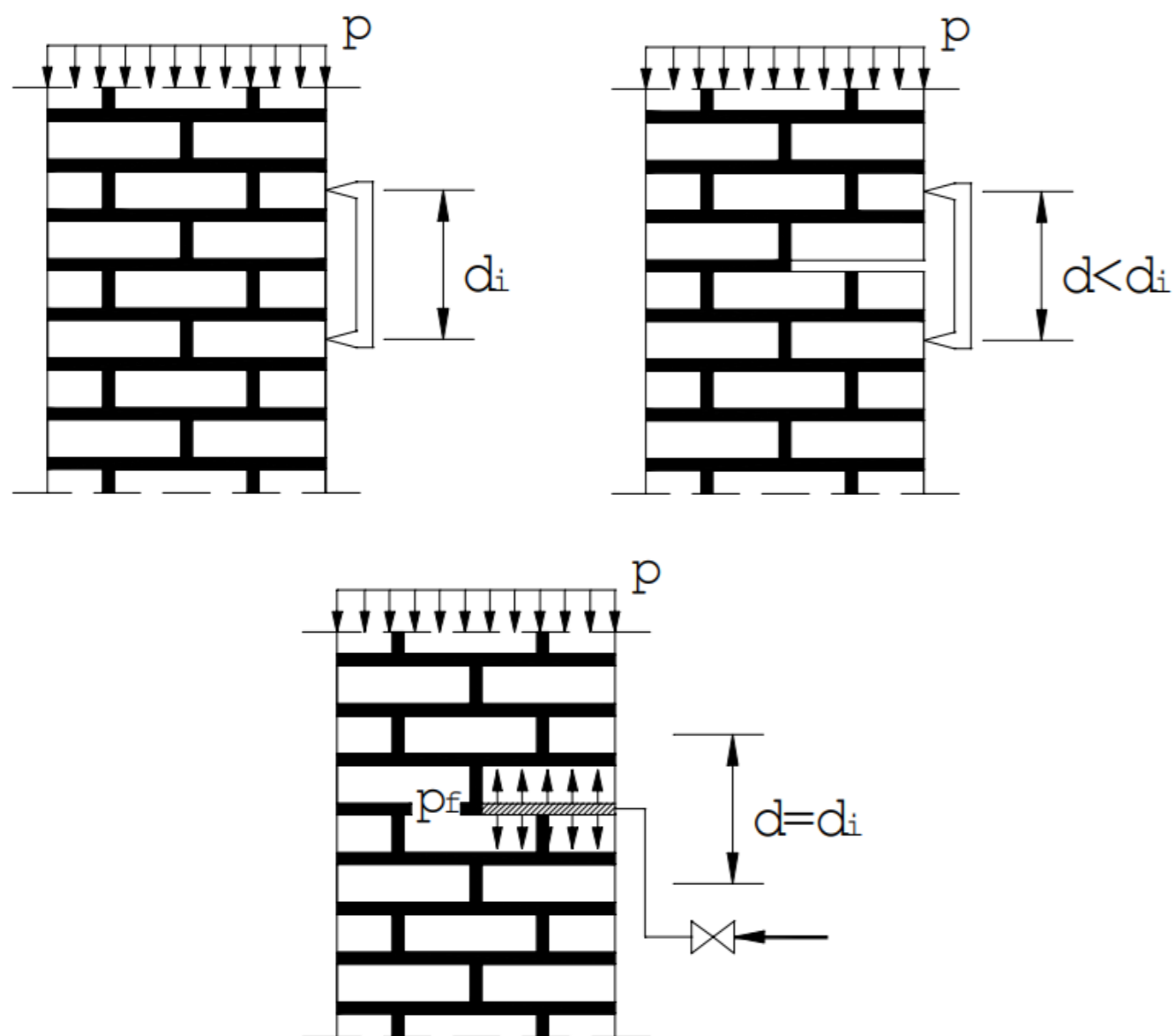
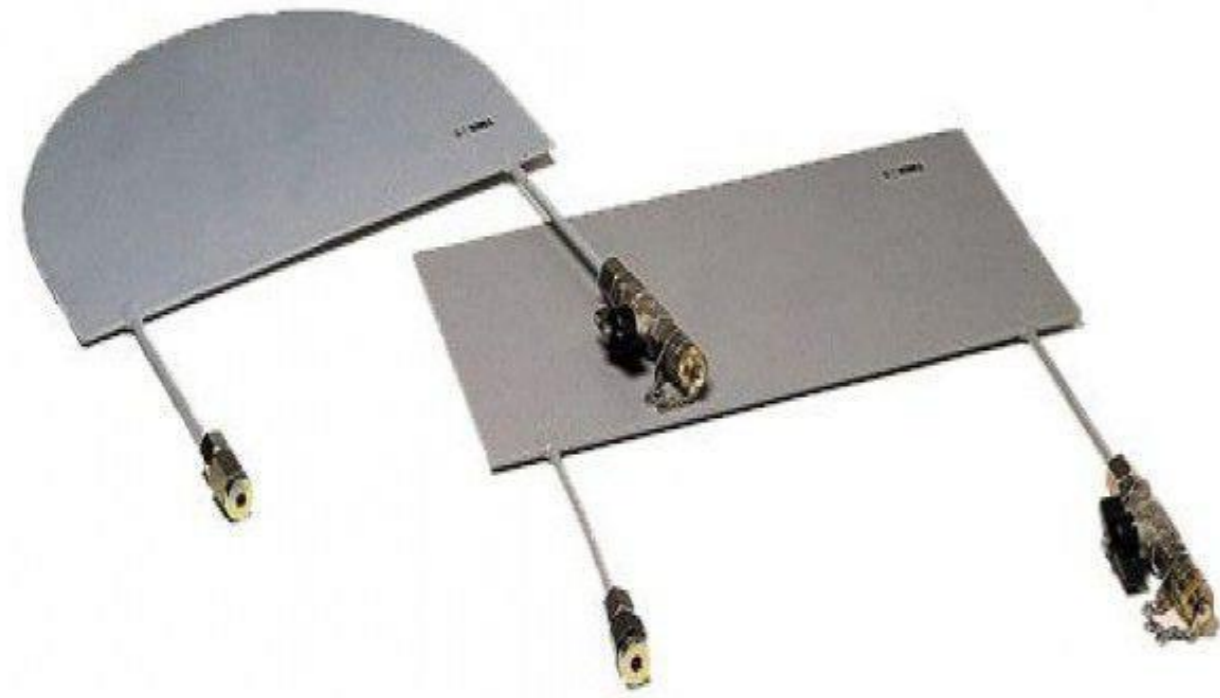




# Ground Penetrating Radar (GPR)



# Flat jacks



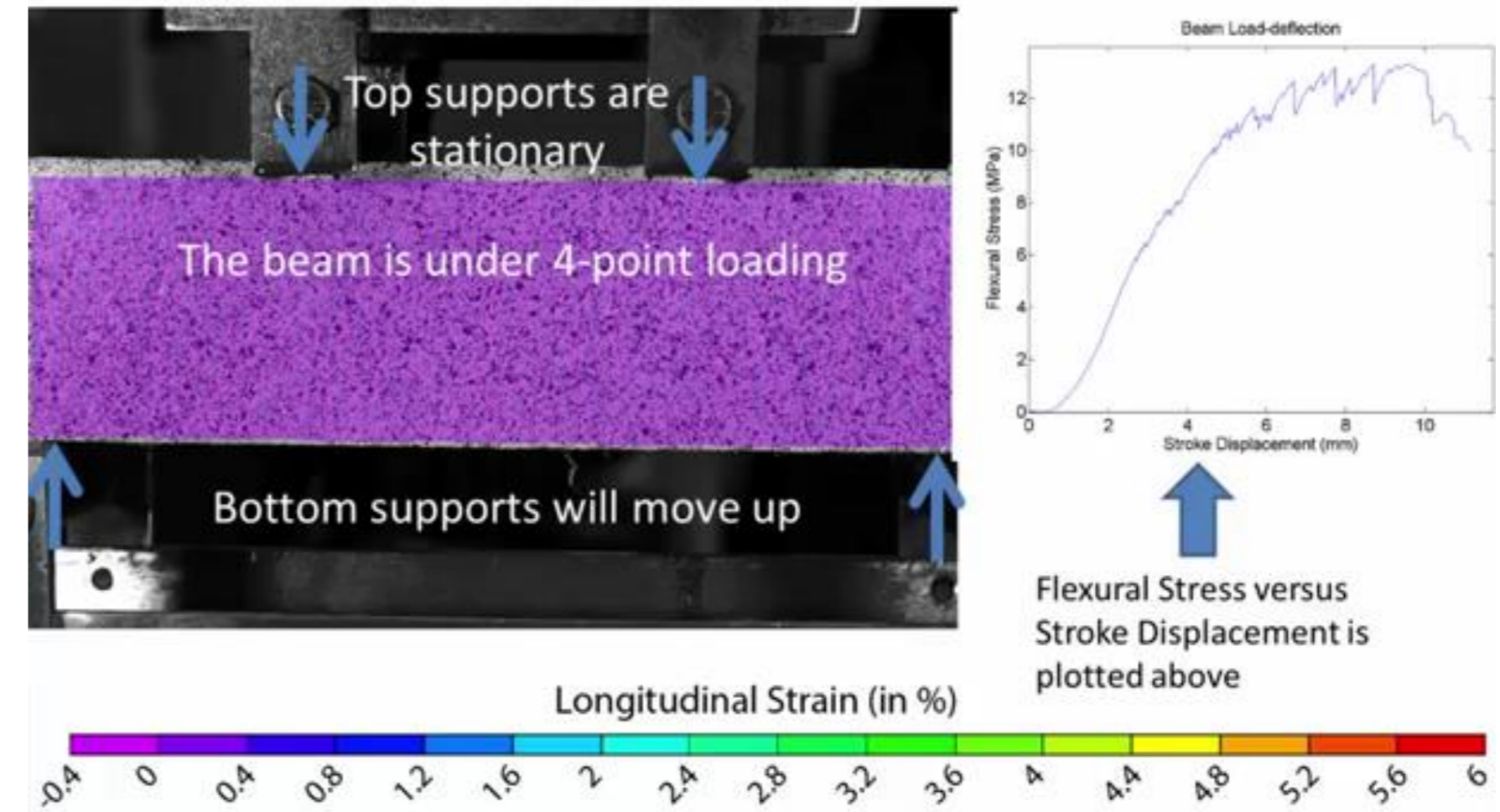
Carpinteri, A., Invernizzi, S., & Lacidogna, G. (2009). Historical brick-masonry subjected to double flat-jack test: Acoustic emissions and scale effects on cracking density. *Construction and Building Materials*, 23(8), 2813-2820.



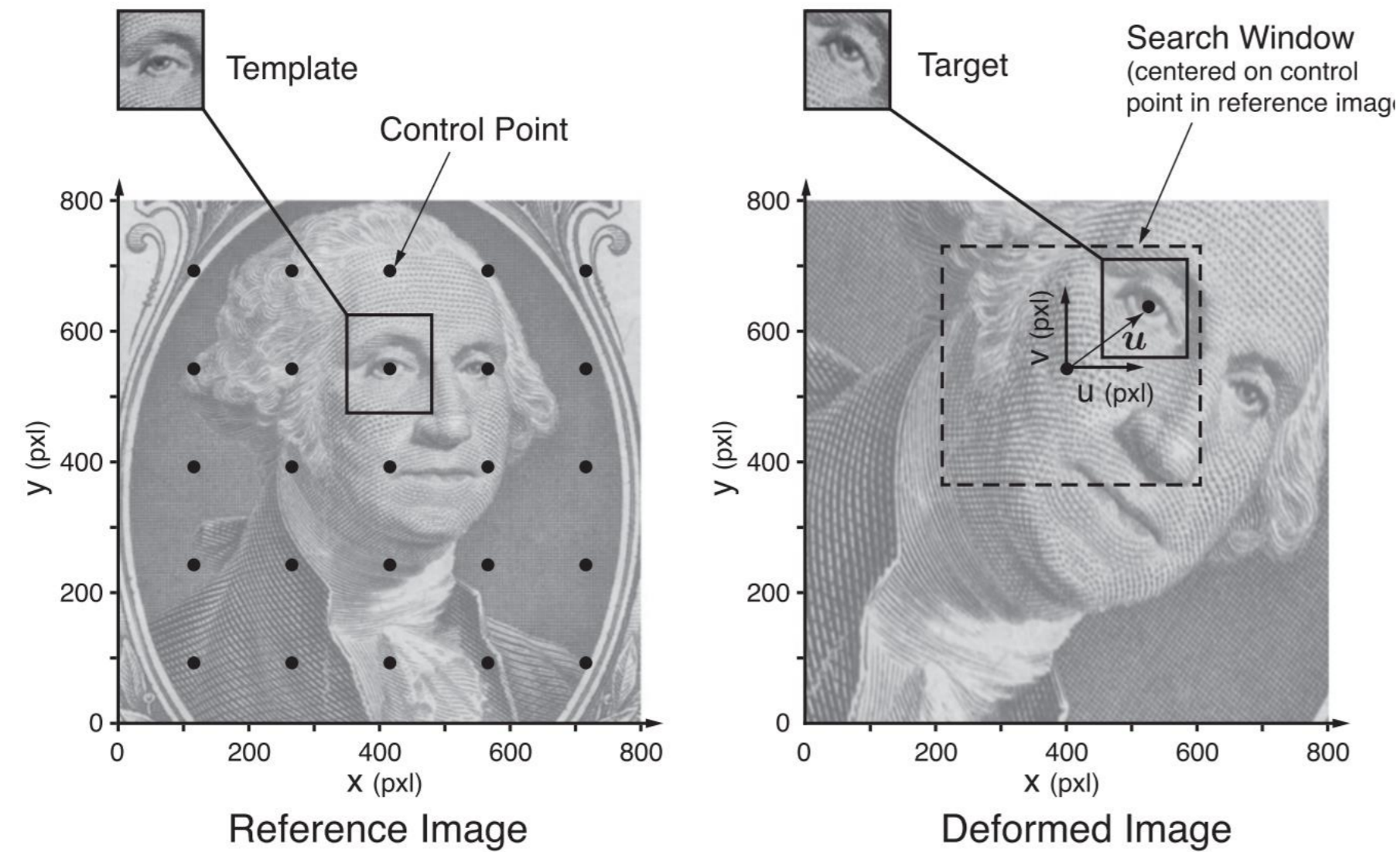
Bartoli, G., Betti, M., & Giordano, S. (2013). In situ static and dynamic investigations on the "Torre Grossa" masonry tower. *Engineering Structures*, 52, 718-733.



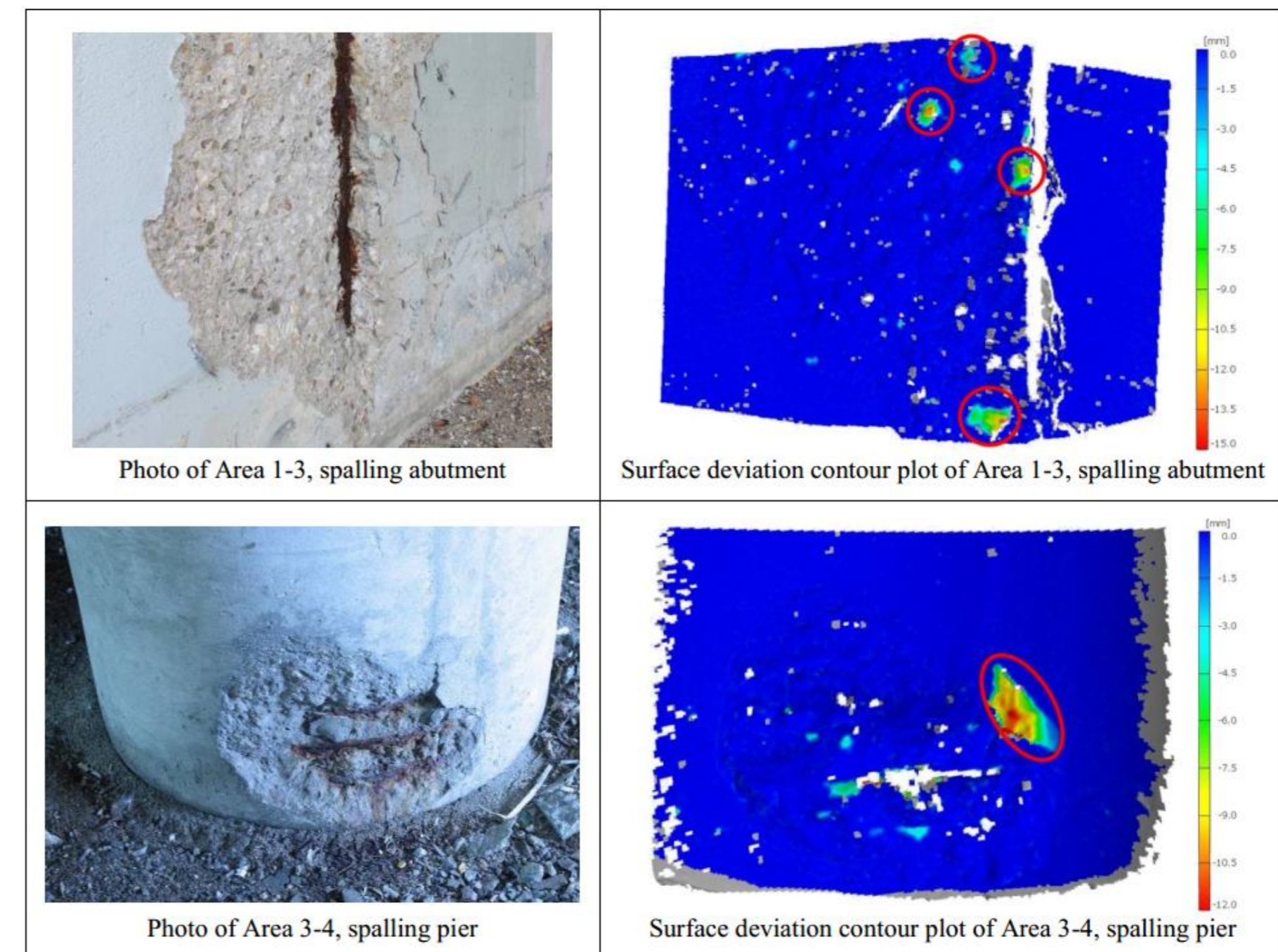
# Digital Image Correlation



<https://www.youtube.com/watch?v=yxOdLwP3TU>



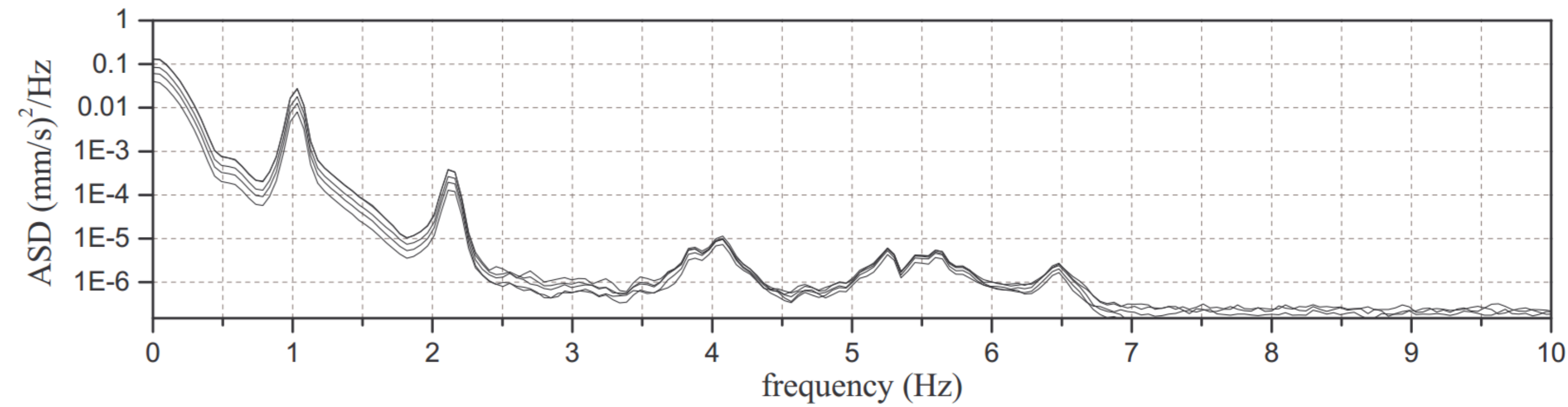
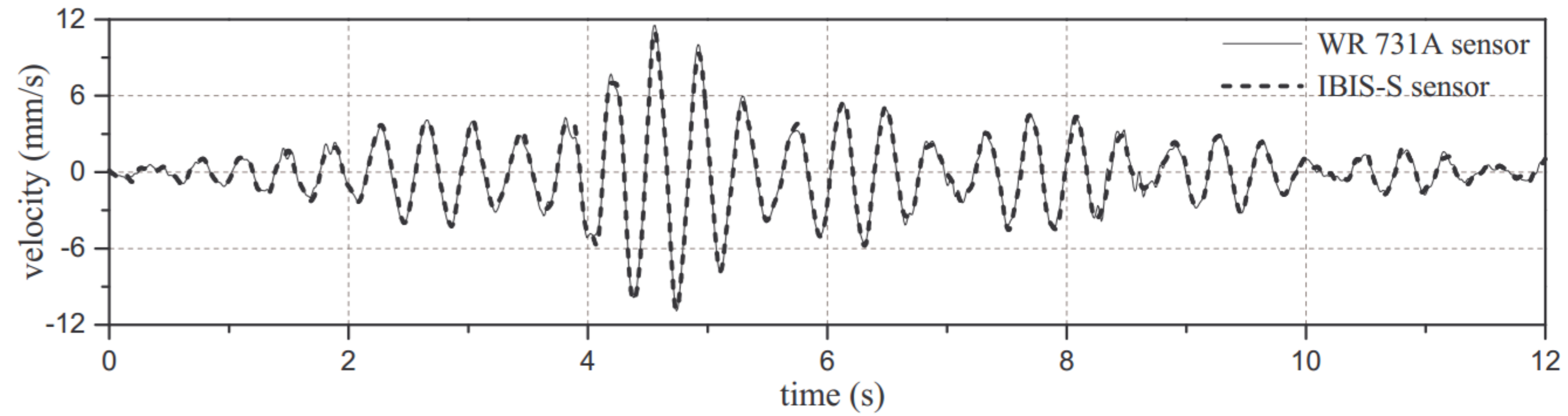
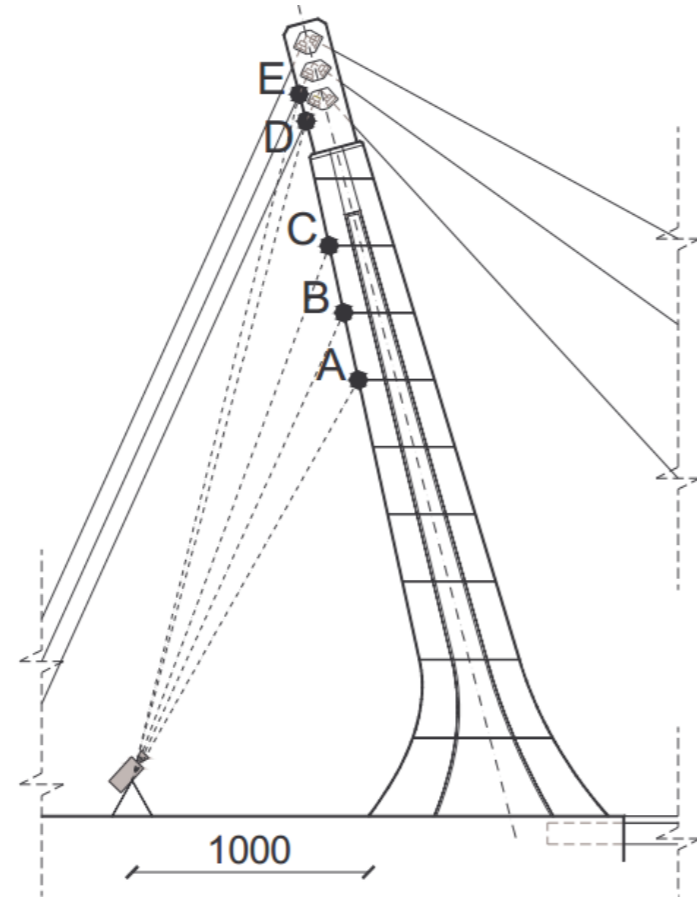
Turner, D. Z. (2015). Peridynamics-based digital image correlation algorithm suitable for cracks and other discontinuities. *Journal of Engineering Mechanics*, 141(2), 04014115.



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Nonis, C., Niezrecki, C., Yu, T. Y., Ahmed, S., Su, C. F., & Schmidt, T. (2013, April). Structural health monitoring of bridges using digital image correlation. In *Health Monitoring of Structural and Biological Systems 2013* (Vol. 8695, p. 869507). International Society for Optics and Photonics.

# Interferometric radar (microwave interferometer)



# Load testing

1. certified steel/cast-iron weights (trucks)



# Load testing

2. Water

3. bagged sand 4. kentledge

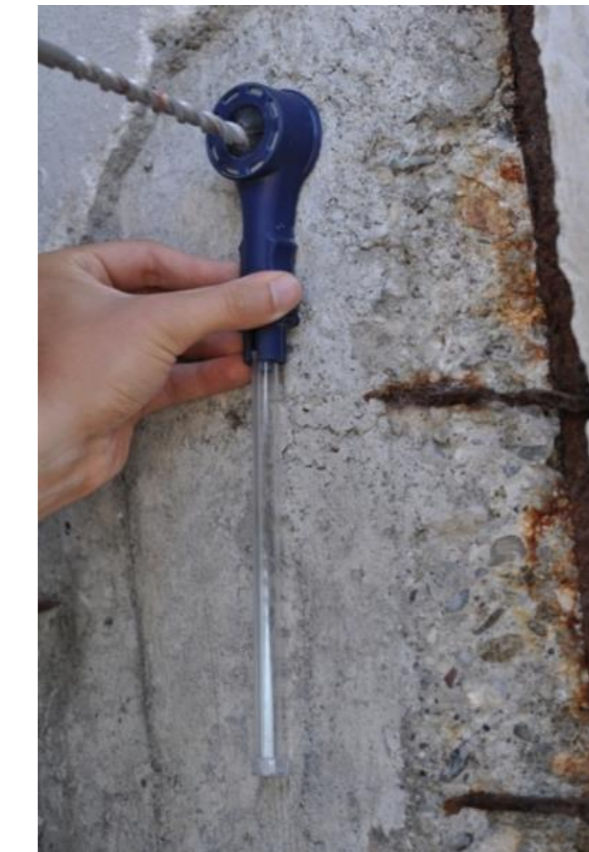
5. hydraulic jacks



# Tecnologías de monitorización

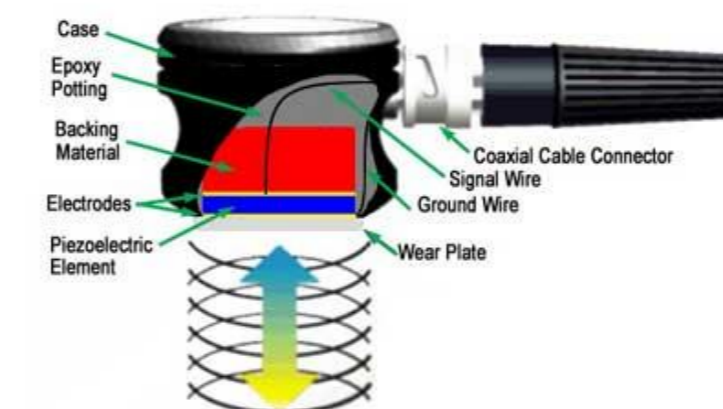
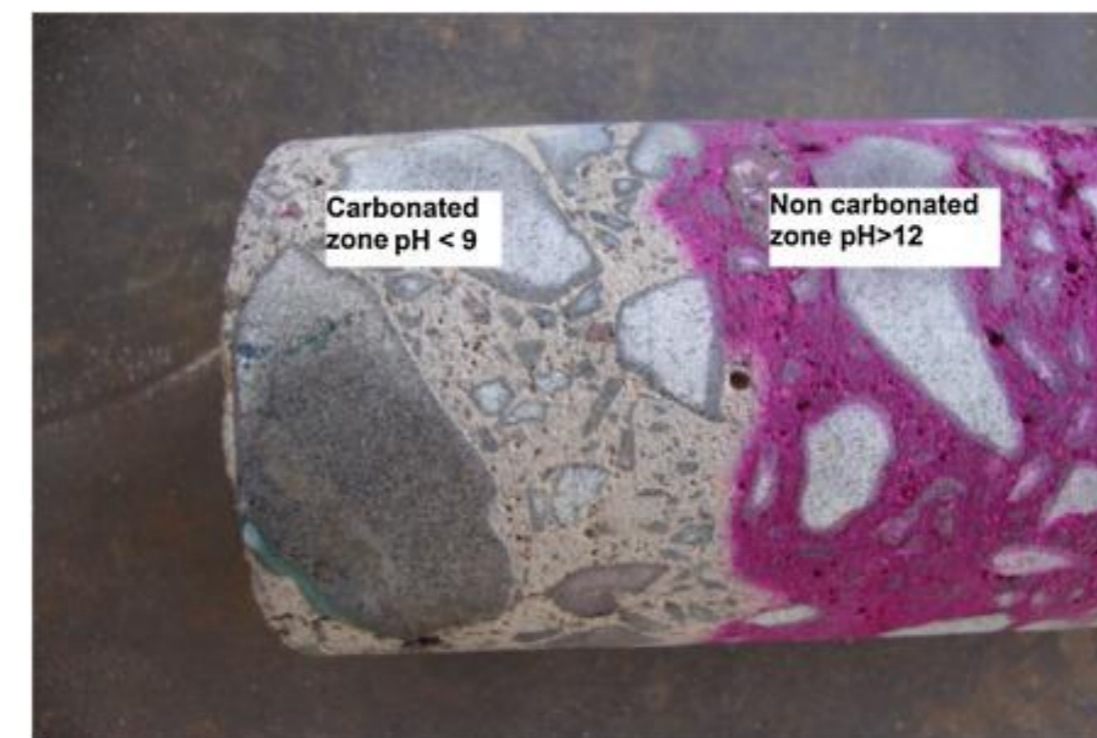
## DETERMINACIÓN DE LA CALIDAD DEL HORMIGÓN

- ❖ Core sampling
- ❖ Powder-drilled samples
- ❖ Non-destructive testing assessment of in situ strength
- ❖ Ultrasonic pulse velocity testing
- ❖ In situ permeability tests

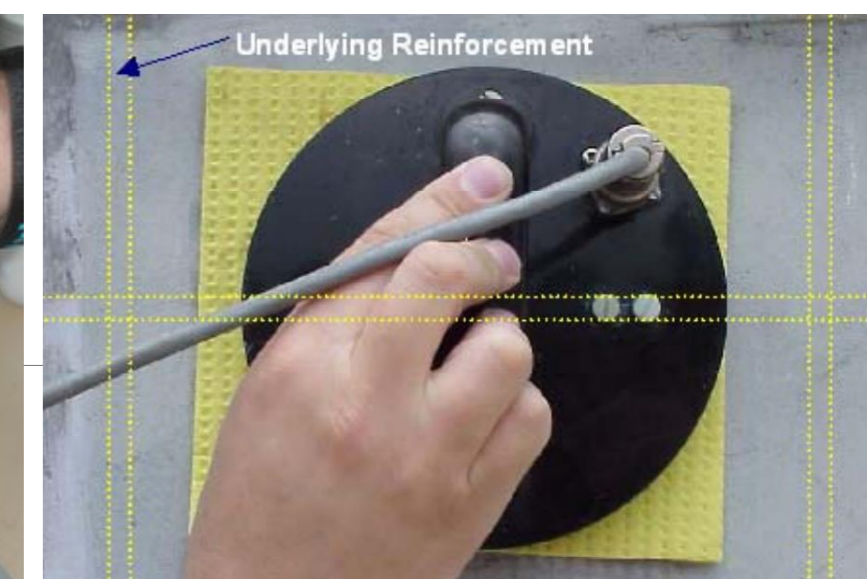


## CONDICIÓN DE SERVICIO DE LAS ARMADURAS

- ❖ Half-cell potential mapping
- ❖ Resistivity testing of concrete
- ❖ Direct measurements of corrosion rate



## TESTS DE LABORATORIO Y ANÁLISIS DE MUESTRAS



# Análisis modal como técnica in-situ, automatizable, no destructiva, y no invasiva

La monitorización basada en vibraciones, o pruebas dinámicas, se basa en la identificación de variaciones inducidas por daños en las propiedades modales de las estructuras (es decir, **frecuencias resonantes, formas modales y propiedades de amortiguación**).

Hay dos tipologías principales de pruebas dinámicas:

- Excitaciones artificiales - **Análisis modal experimental (EMA)**.
- Vibraciones ambientales - **Análisis modal operacional (OMA)**.

## Observaciones

- **Los sensores** (acelerómetros o sensores de velocidad/desplazamiento) **no se pueden ubicar en los nodos de los modos**.
- **La capacidad del sistema para detectar daños depende de su capacidad para identificar modos de alta frecuencia.**



# Análisis modal como técnica in-situ, automatizable, no destructiva, y no invasiva

La monitorización basada en vibraciones, o pruebas dinámicas, se basa en la identificación de variaciones inducidas por daños en las propiedades modales de las estructuras (es decir, **frecuencias resonantes, formas modales y propiedades de amortiguación**).

Hay dos tipologías principales de pruebas dinámicas:

- Excitaciones artificiales - **Análisis modal experimental (EMA)**.
- Vibraciones ambientales - **Análisis modal operacional (OMA)**.

## Observaciones

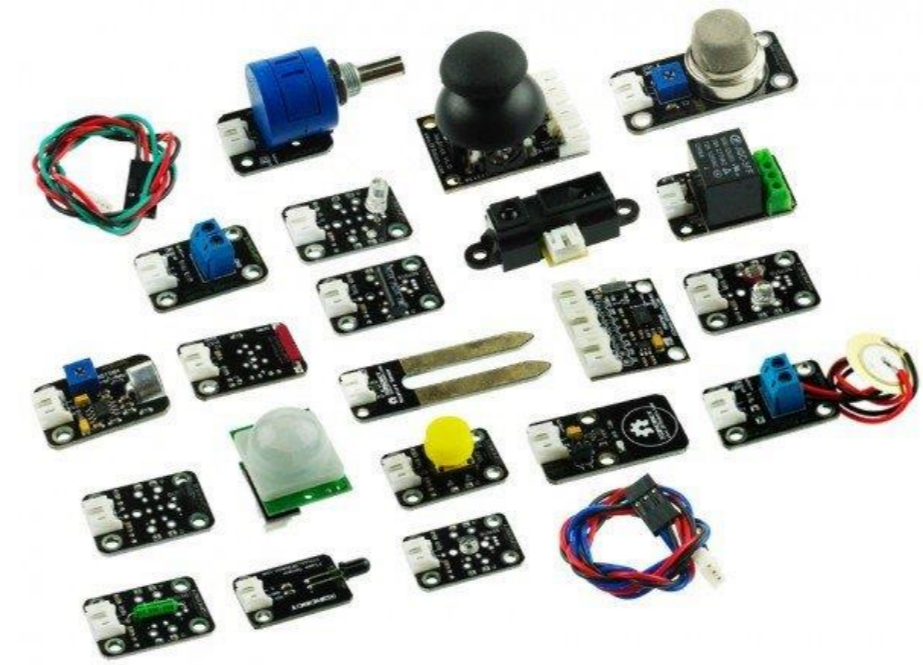
- **Los sensores** (acelerómetros o sensores de velocidad/desplazamiento) **no se pueden ubicar en los nodos de los modos**.
- **La capacidad del sistema para detectar daños depende de su capacidad para identificar modos de alta frecuencia.**

## Ventajas/desventajas

- **Identificación global de daños.**
- **Las patologías estructurales locales con efecto limitado sobre la rigidez general de las estructuras pueden pasar desapercibidas.**
- **El amortiguamiento (mecanismos de disipación de energía) es muy sensible al daño, sin embargo, su identificación depende en gran medida del nivel de excitación modal y generalmente está sujeto a altos niveles de incertidumbre.**
- **No destructivo.**
- **No es necesario acceder a lugares difíciles.**
- **OMA - Las condiciones normales de funcionamiento de la estructura permanecen inalteradas - Mínima intrusión.**
- **OMA – “Fácilmente” aplicable a la monitorización continua y de largo plazo de estructuras.**



# Sensores



### Key Definitions

- ❖ Transducers, sensors, and actuators
- ❖ Analog-to-digital converter
- ❖ Primary vs secondary state sensing
- ❖ Sampling rate
- ❖ Error and signal-to-noise ratio
- ❖ Range, resolution, sensitivity, and gauge factor
- ❖ Precision and accuracy



### Key Definitions

- **Transducers, sensors, and actuators (Transductores, sensores y actuadores)**
  - Un transductor es un dispositivo que convierte una señal con cierta forma física en otra señal de distinta naturaleza.
  - Los dispositivos que ofrecen un output eléctrico son llamados sensores (transductor + electrónica).
  - Los transductores de salida (output-transducer) transforman señales eléctricas en un cierto output (señalización, movimiento).
  - Un actuador es la combinación de un output-transducer más la electrónica necesaria.

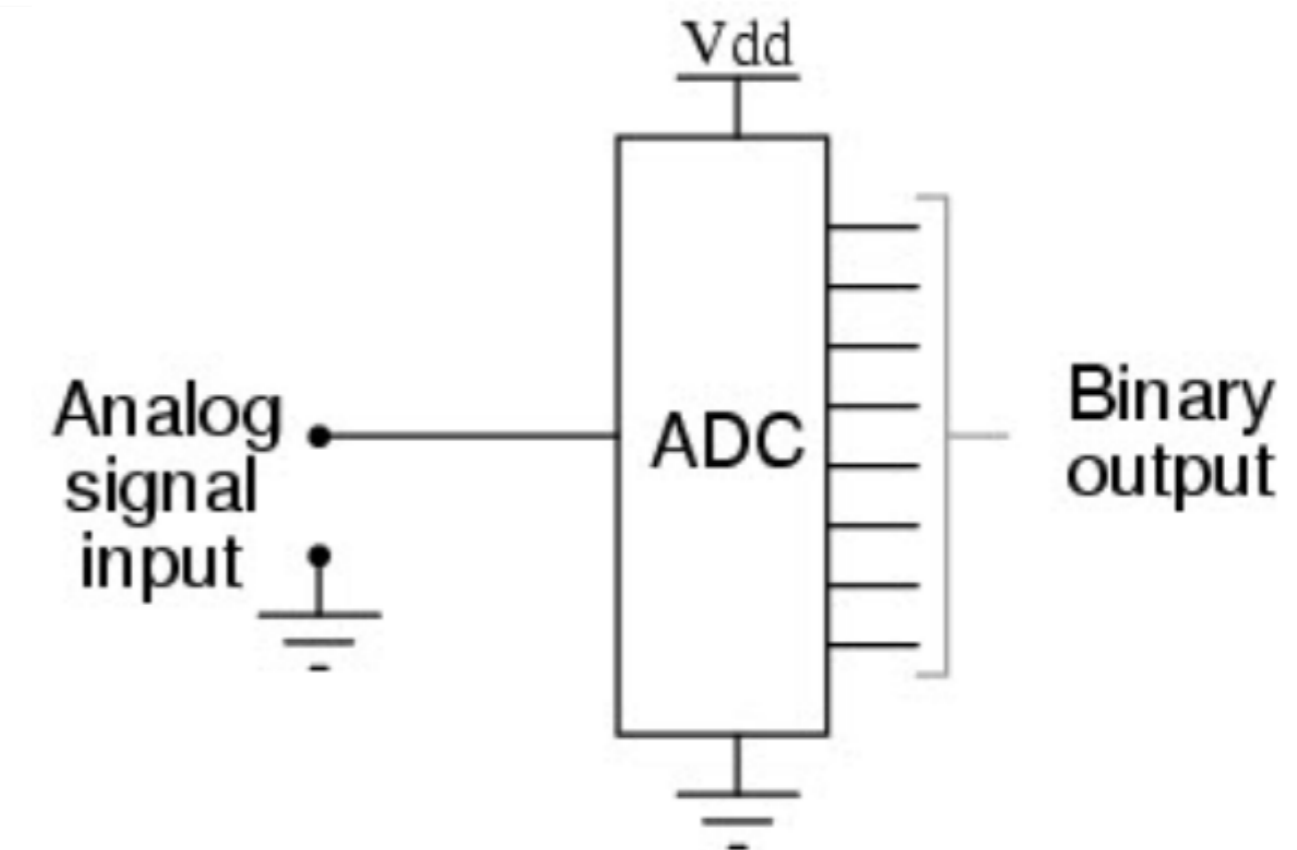


### Key Definitions

- **Analog-to-digital converter (ADC)**  
(Convertidor analógico-digital)

Casi todas las magnitudes físicas medibles están en forma analógica (por ejemplo, temperatura, sonido, presión, luz, etc.). Dichas señales no pueden ser procesadas por computadoras y procesadores digitales. Por lo tanto, el sistema necesita un dispositivo intermedio para convertir los datos analógicos en datos digitales, es decir, un convertidor de analógico a digital. **Los convertidores de analógico a digital (ADC) son circuitos integrados electrónicos que convierten señales analógicas (voltajes) en digitales o binarias que constan de 0s y 1s.**

En los ADC, dos factores determinan la precisión de la señal digitalizada: **nivel de cuantificación (quantization level)** o tasa de bits (bits rate) y **tasa de muestreo (sampling rate)**.



## Definiciones clave

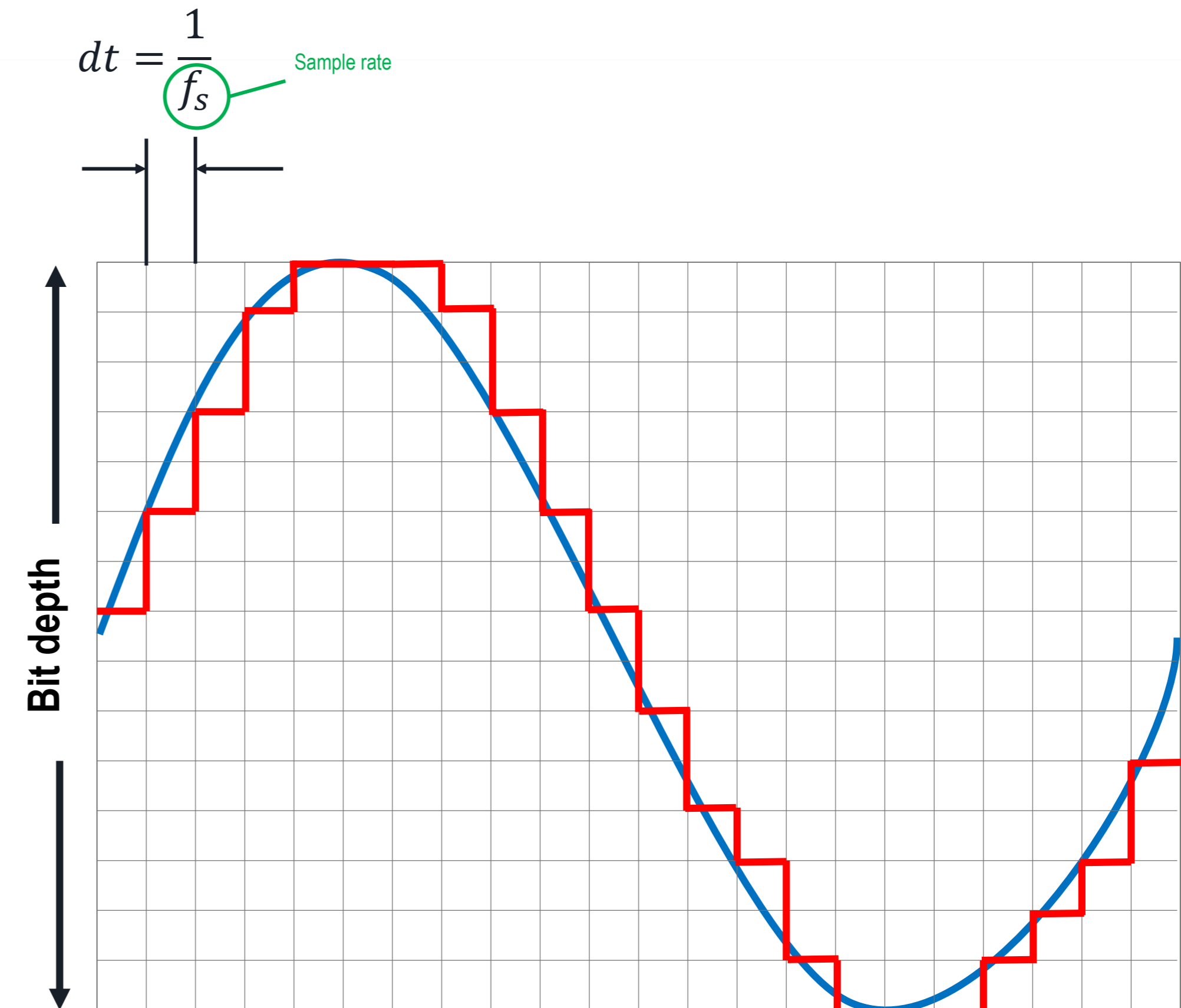
### Key Definitions

Nyquist frequency:  $f_{nyquist} = \frac{f_s}{2}$

Quantization level:  $N_q = 2^n$  ( $n$  – no bits)

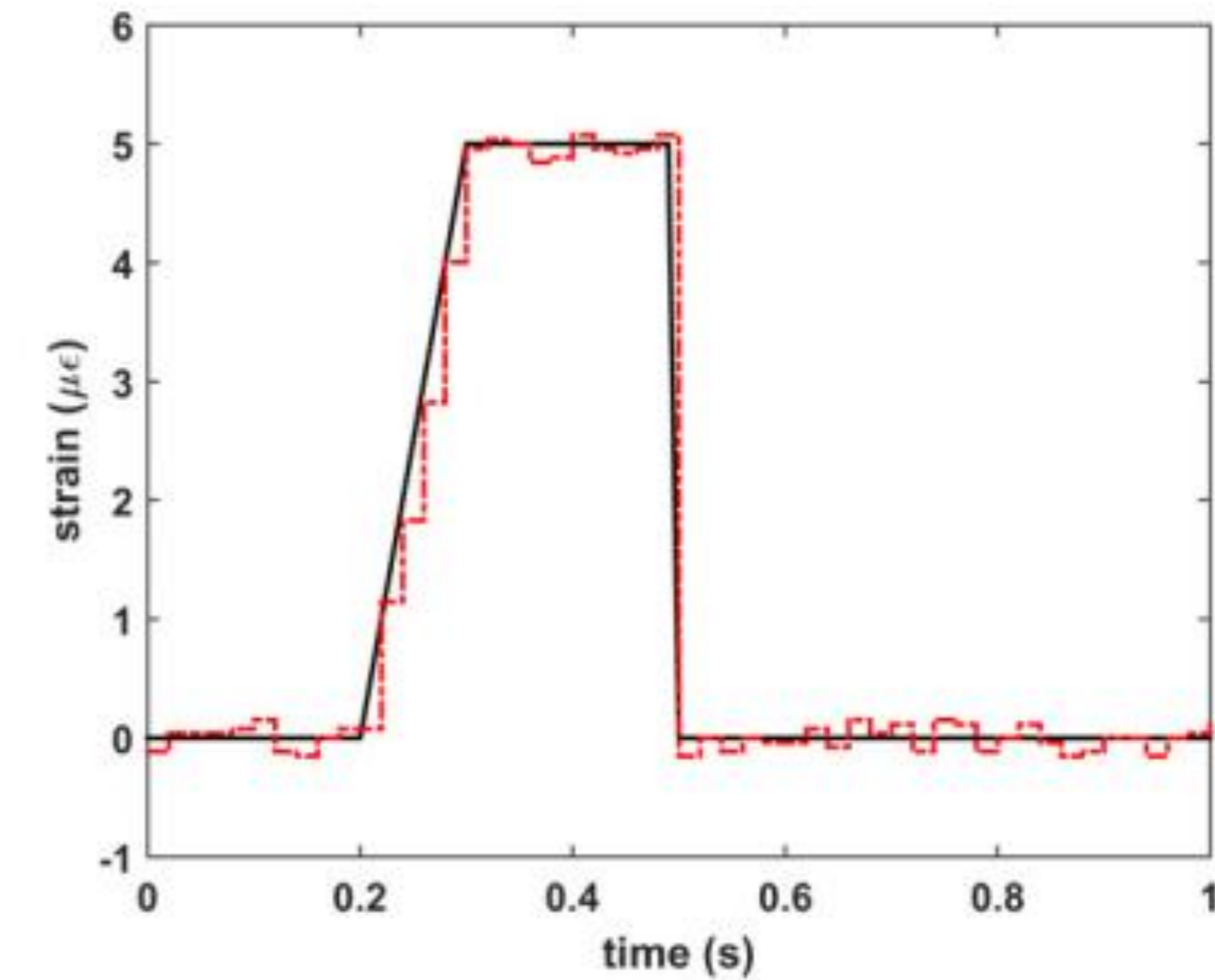
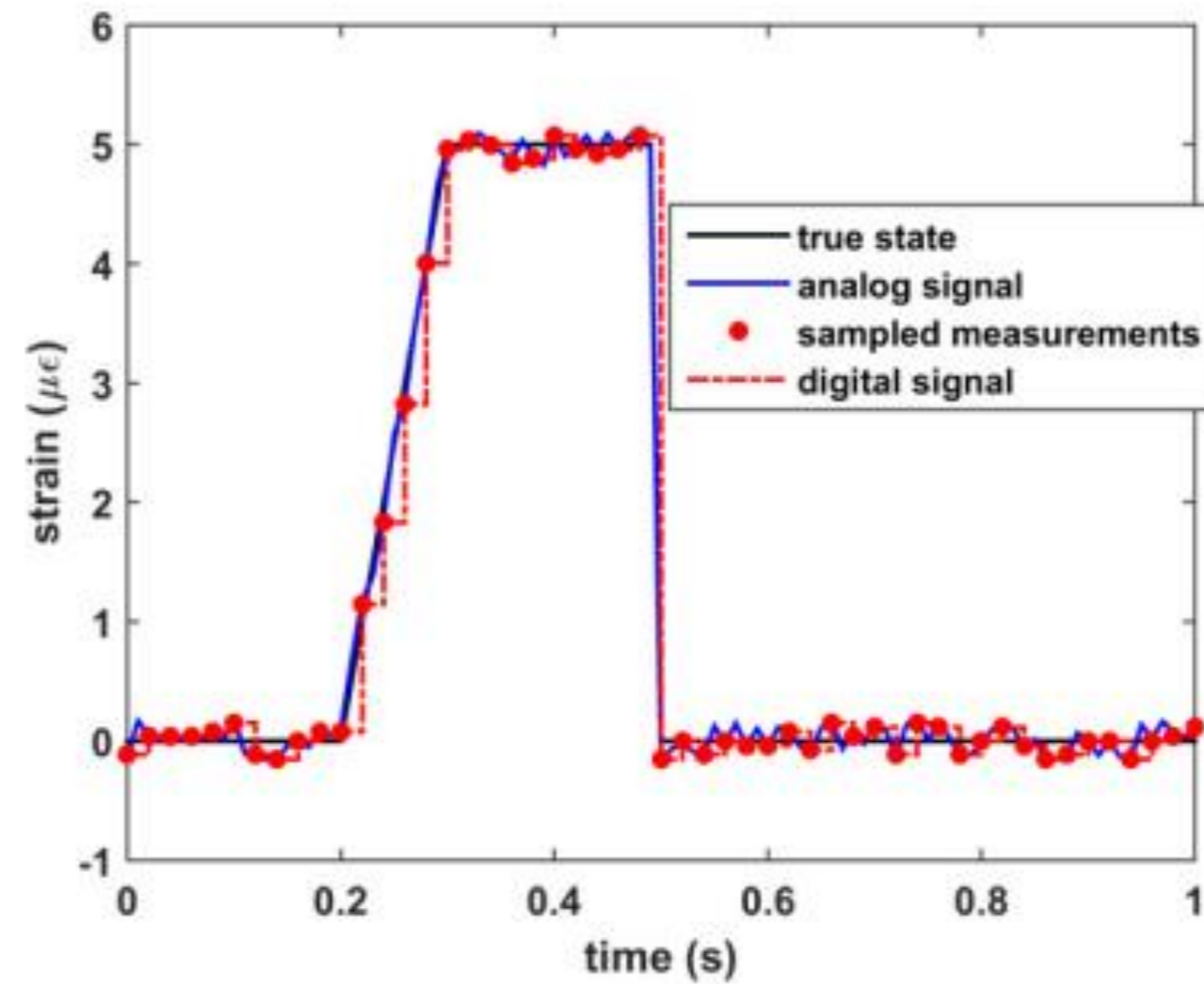
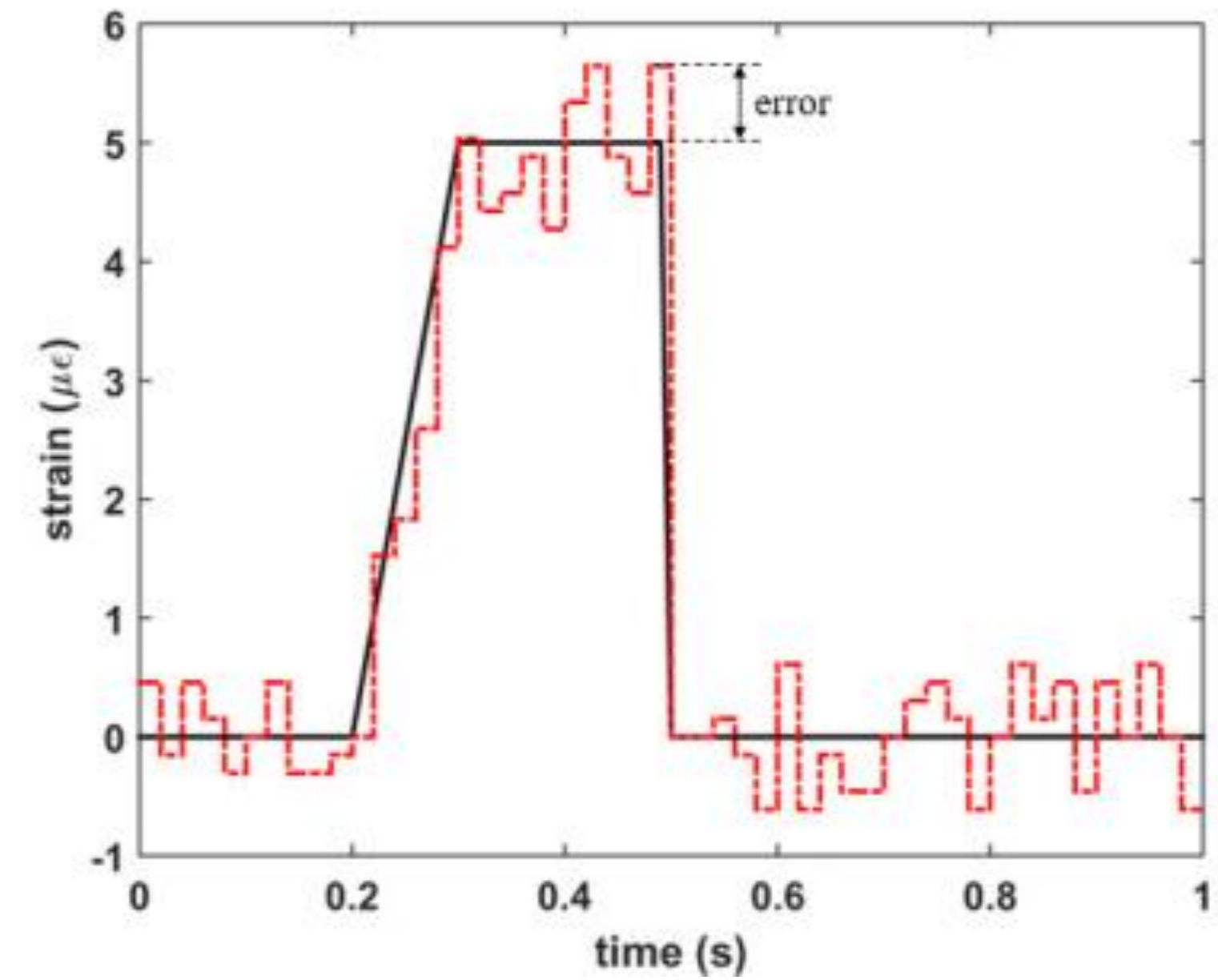
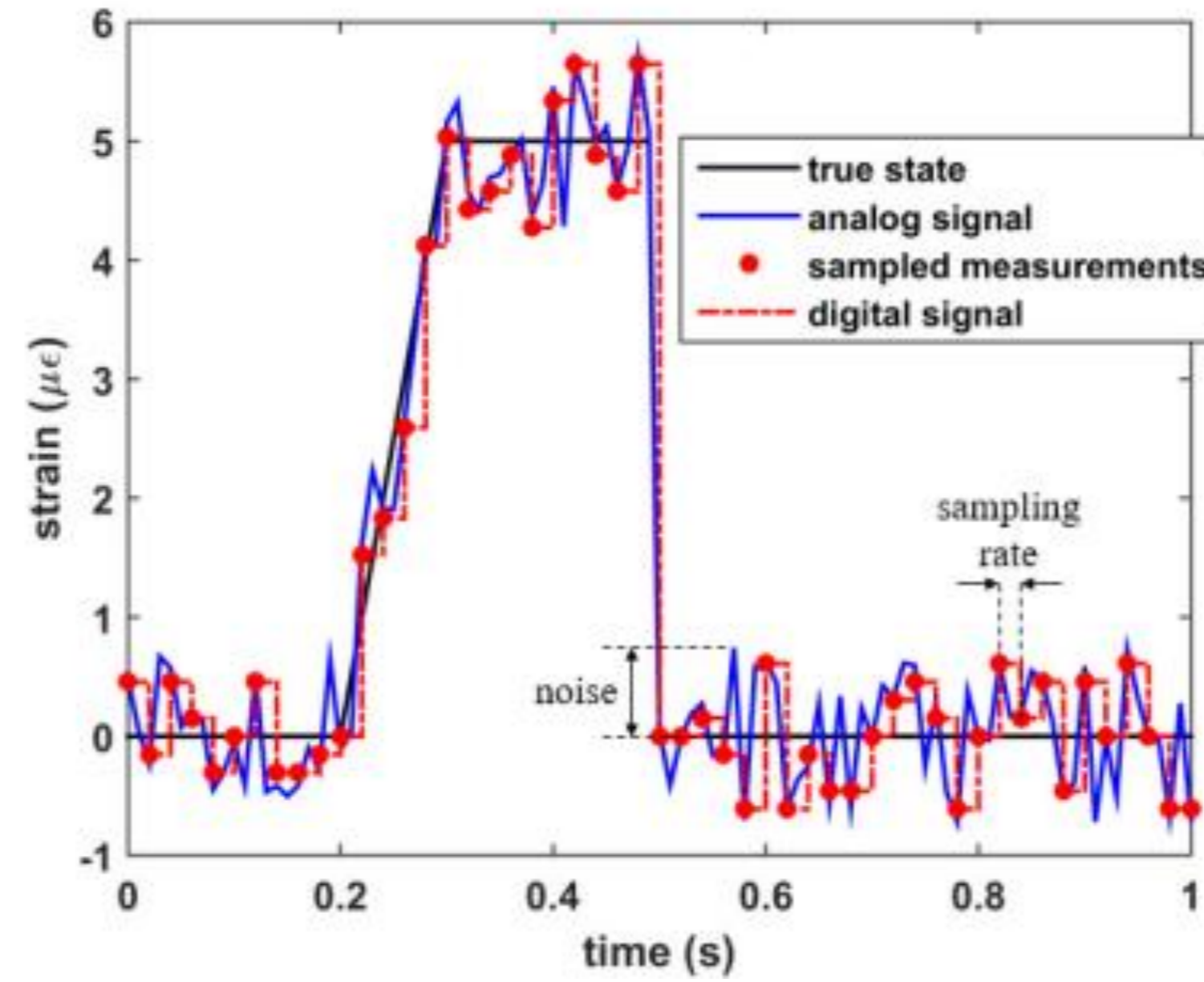
Resolution:  $R = \frac{V_{ref}}{N_q - 1}$

Average quantization error:  $\pm \frac{R}{2}$



The ADC converts the input signal into a series of digital values by approximating the signal with a fixed precision

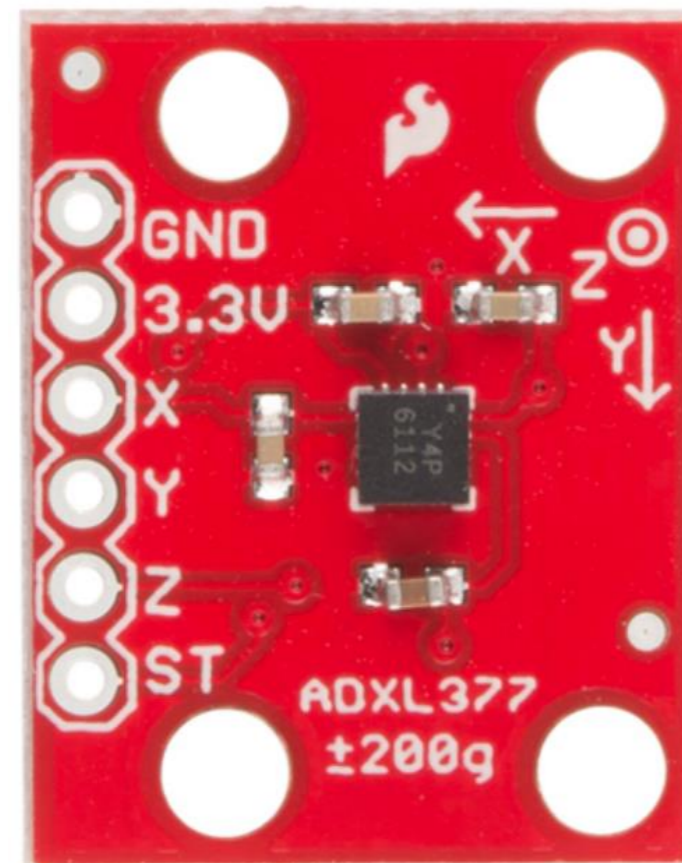
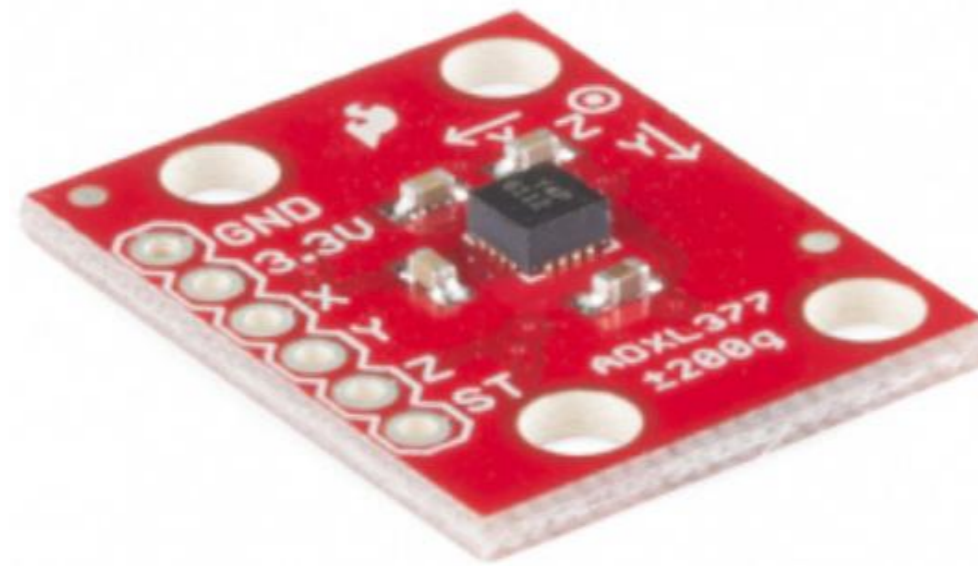
# Definiciones clave



# Definiciones clave

## Ejemplo

ADXL337 ( $\pm 3\text{ g}$ )



Datasheet:

<https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL337.pdf>

Pin Label	Pin Function	Input/Output	Notes
3.3V	Power Supply	Input	Can be between 1.8 - 3.6V.
X	X axis acceleration	Output	Analog output whose voltage correlates to acceleration measured on the X axis
Y	Y axis acceleration	Output	Analog output whose voltage correlates to acceleration measured on the Y axis
Z	Z axis acceleration	Output	Analog output whose voltage correlates to acceleration measured on the Z axis
ST	Self Test	Input	Used to verify sensor functionality
GND	Ground	Input	0V, common voltage to share with microcontroller circuit

**0.33 mV/g (seismic accelerometers ~10 V/g)**

<https://www.amazon.es/Sparkfun-ADXL337-Breakout/dp/B00MIDFW82>

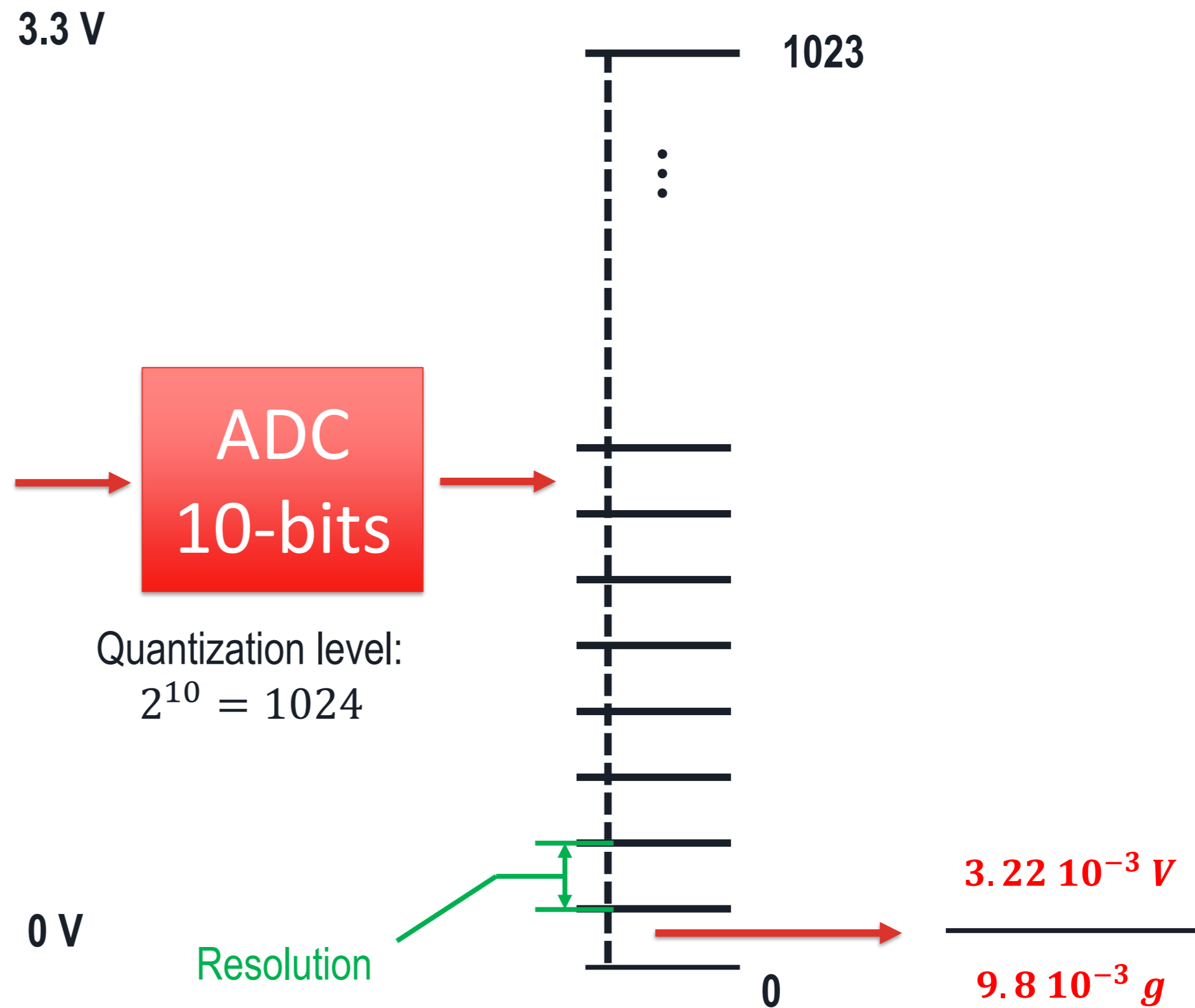
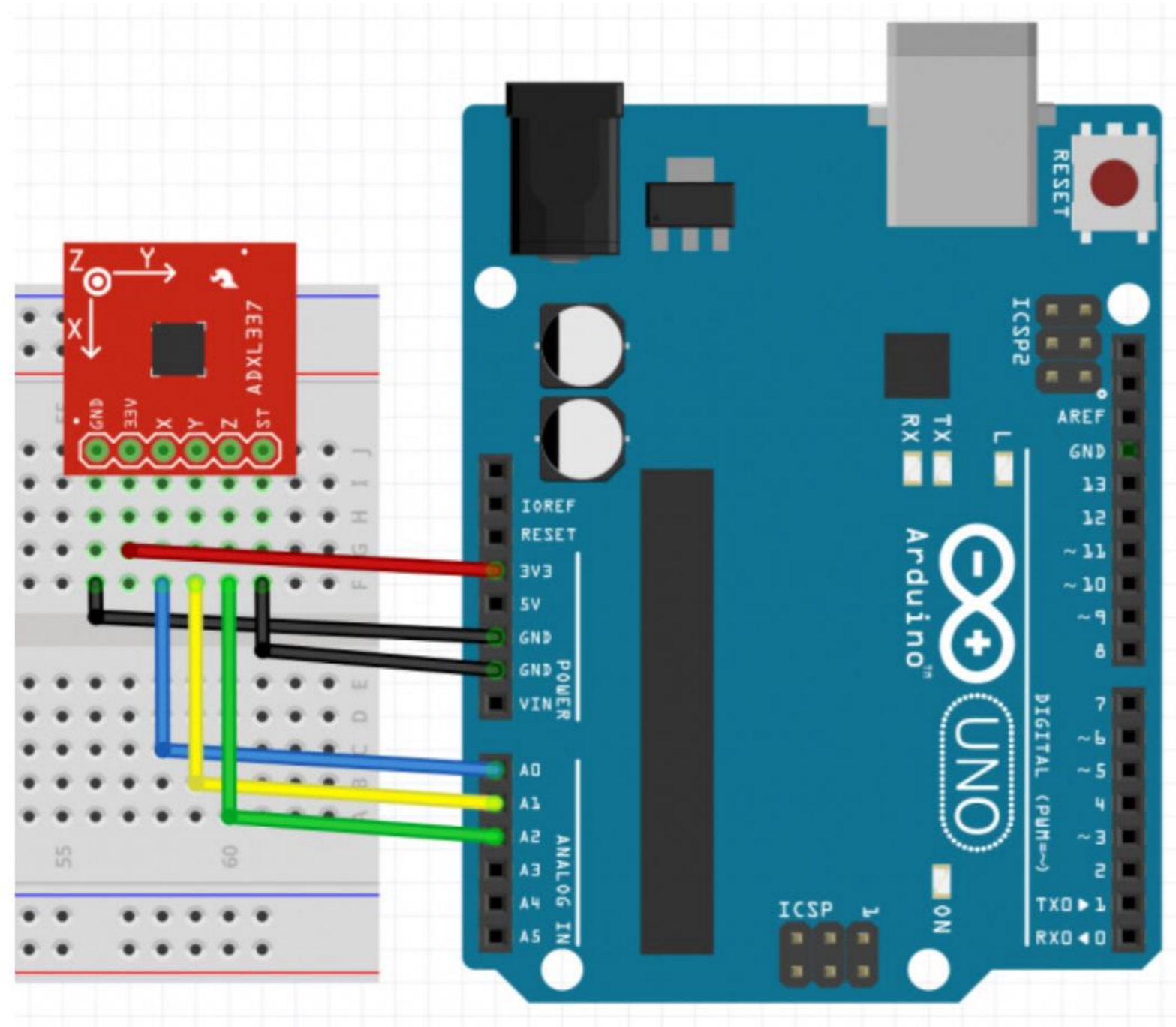


# Definiciones clave

Sensitivity  
 300 mV/g (3 V)  
 330 mV/g (3,3 V)

$$s_g = \pm 1 \cdot \frac{R}{sens_{sensor}} = \pm 9.8 \cdot 10^{-3} g$$

## Ejemplo

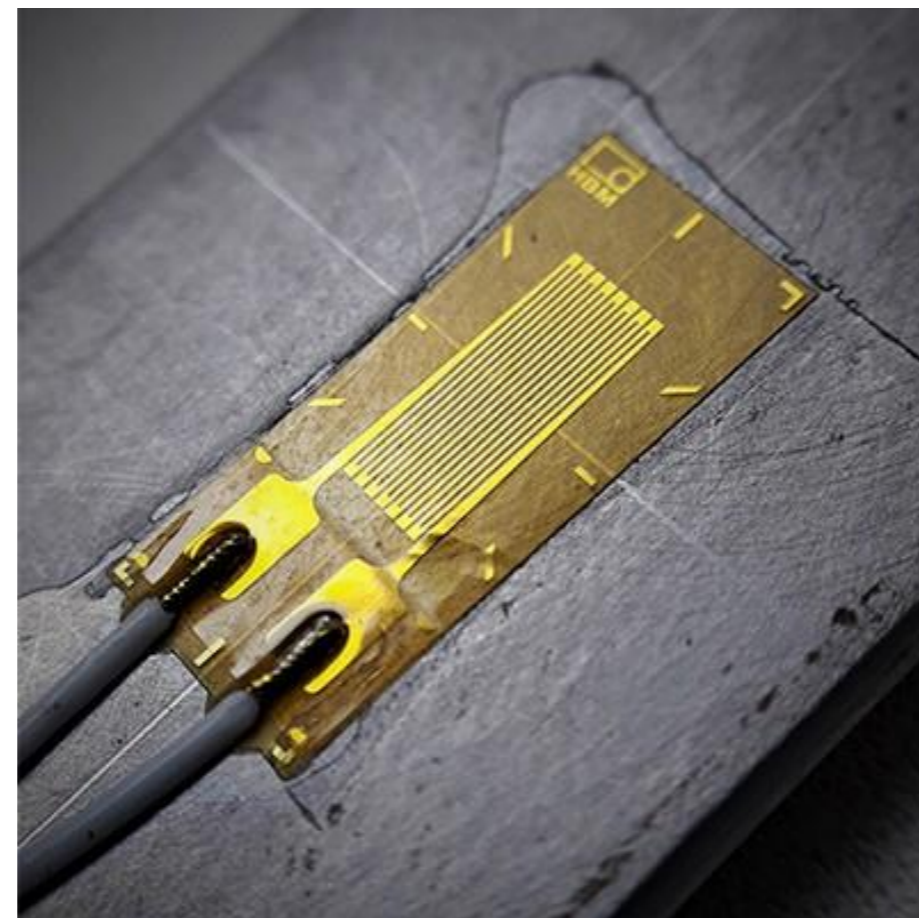


$$R = \frac{V_{ref}}{N_q - 1} = \frac{3.3}{1024 - 1} V = 3.22 \cdot 10^{-3} V$$

## Key Definitions

### Transductores primarios y secundarios

- Transductor primario: la conversión se realiza en un solo paso (e.g. galga extensiométrica)
- Transductor secundario: la conversión requiere más de un paso (e.g. célula de presión)



## Key Definitions

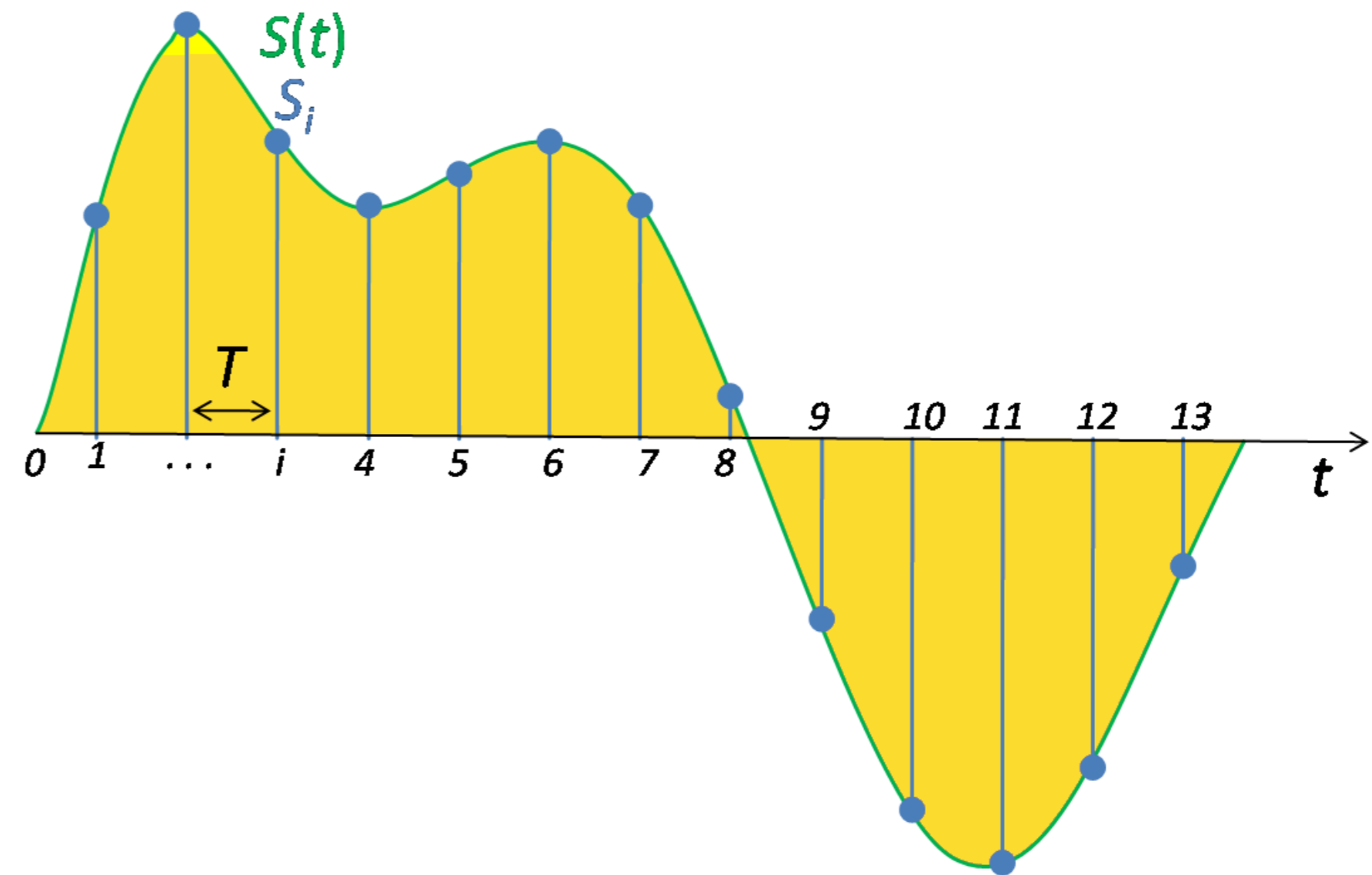
### Frecuencia de muestreo (Sampling rate)

- Muestreo refiere a la reducción de un señal continua en el tiempo a una señal discreta.
- Frecuencia de muestreo: Número de muestras por segundo.

$$dt = \frac{1}{f_s} \quad f_s [Hz] = \frac{\omega \text{ (rad/s)}}{2\pi}$$

### Nyquist sampling theorem

Dada una frecuencia de muestreo  $f_s$ , solo podremos extraer información del rango de frecuencias desde 0 hasta  $f_{nyquist} = \frac{f_s}{2}$



## Key Definitions

- Error and signal-to-noise ratio

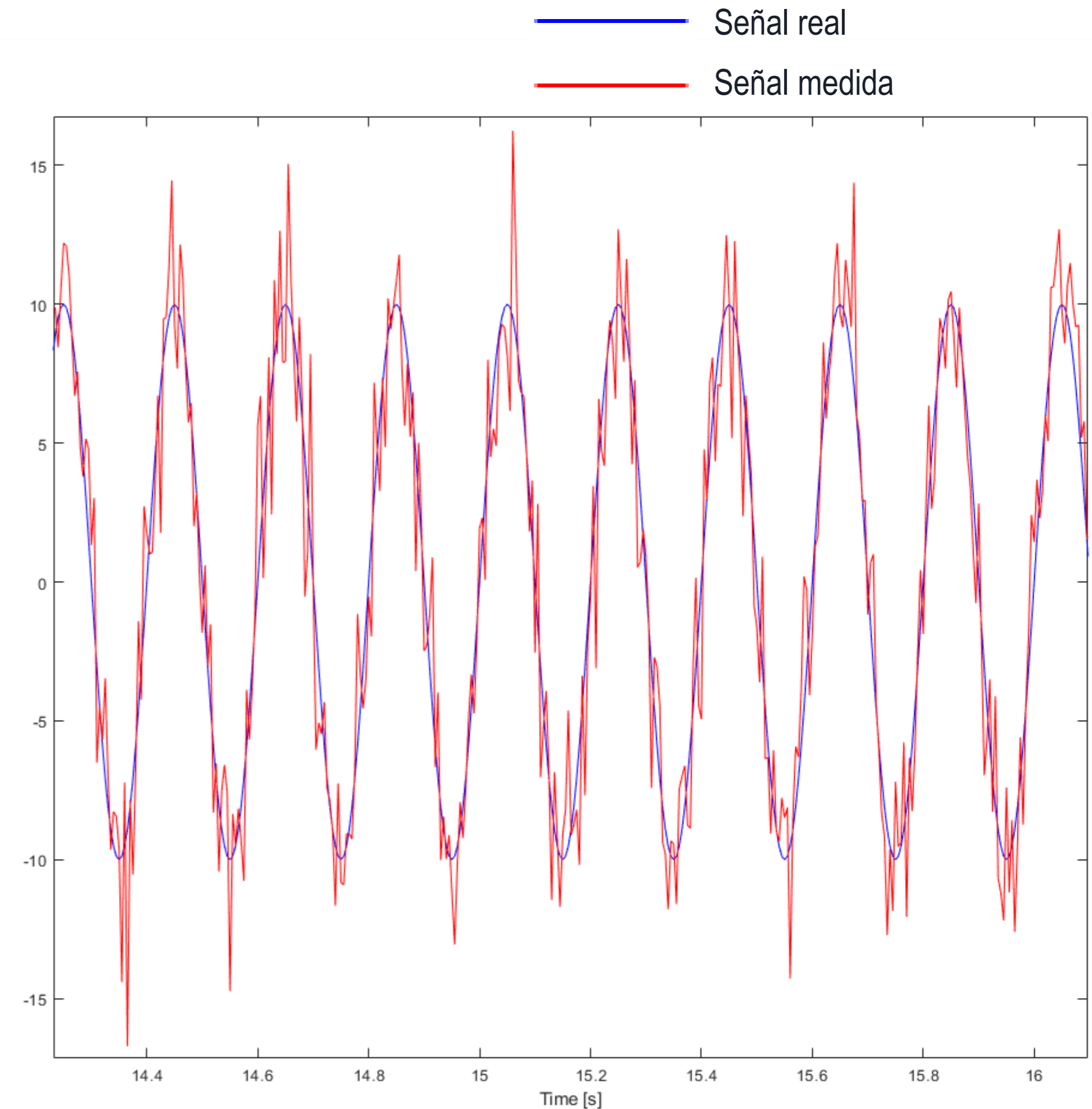
El **error** es la diferencia entre el estado medido y el valor real o verdadero. La **relación señal-ruido (signal-to-noise ratio SNR)** refiere al nivel de ruido presente en las mediciones. Puede definirse como la relación entre la potencia media de una señal y la potencia del ruido de fondo:

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}}$$

o alternativamente como:

$$SNR = \frac{rms(signal)}{rms(noise)}$$

*rms – root mean square*



### Key Definitions

- Error and signal-to-noise ratio

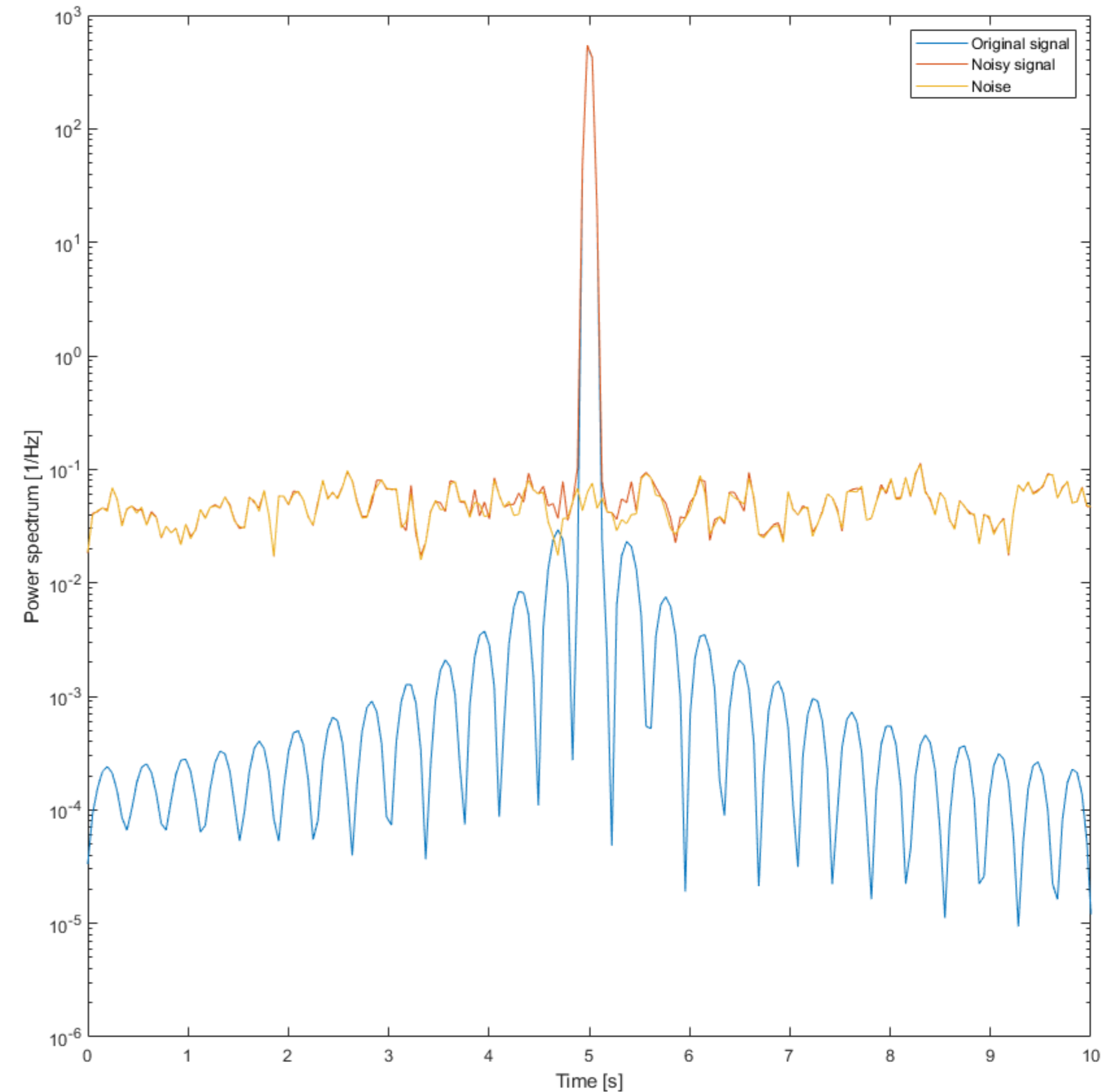
El error es la diferencia entre el estado medido y el valor real o verdadero. La relación señal-ruido (**signal-to-noise ratio SNR**) es el nivel de ruido presente en las mediciones. Puede definirse como la relación entre la potencia media de una señal y la potencia del ruido de fondo:

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}}$$

o alternativamente como:

$$SNR = \frac{rms(signal)}{rms(noise)}$$

*rms* – root mean square



## Definiciones clave

### Key Definitions

- Range, resolution, sensitivity, and gauge factor

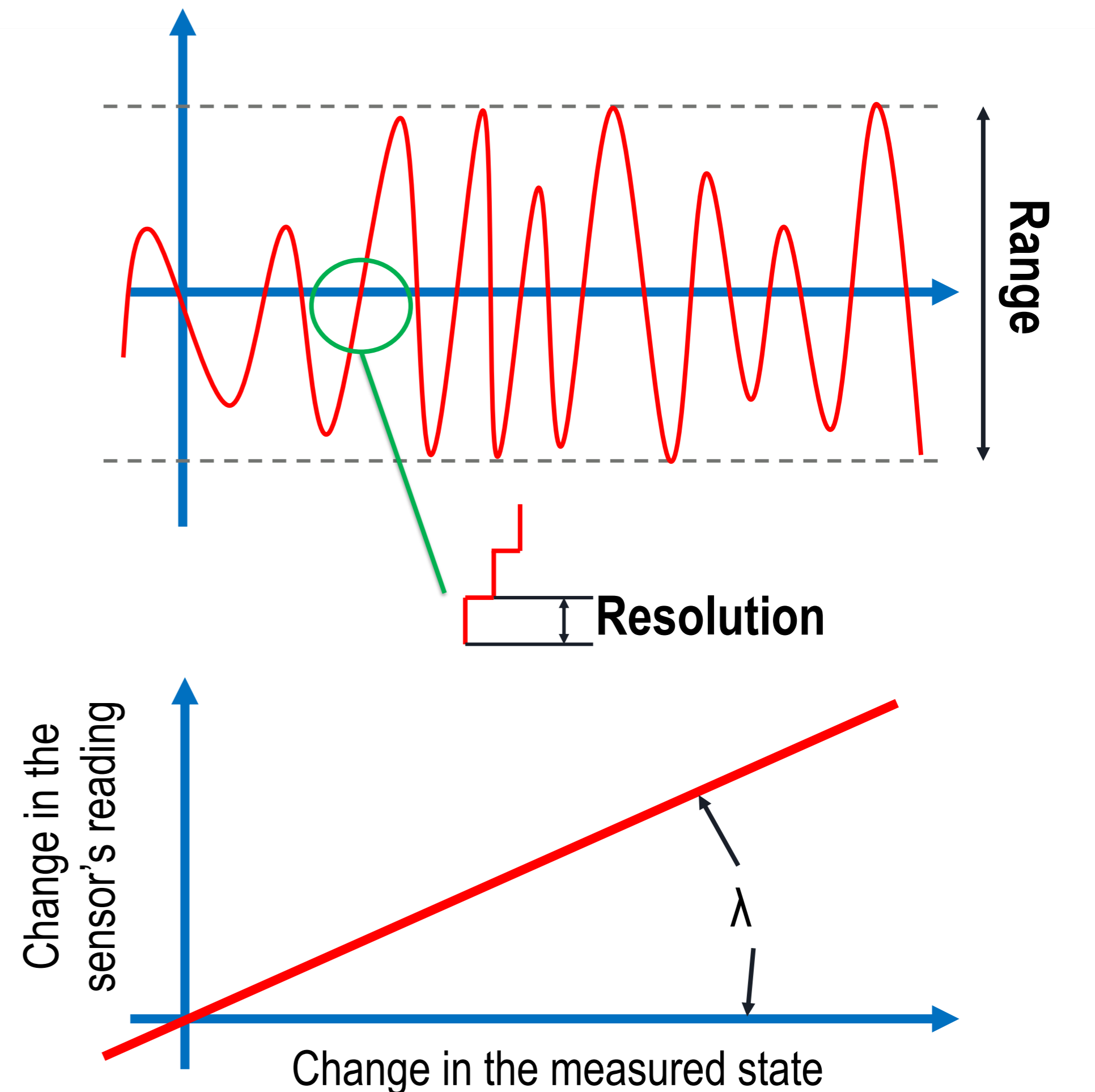
**Rango (range):** conjunto de valores que puede medir un sensor, a menudo expresados en forma de intervalo.

**Resolución (Resolution):** cambio de estado más pequeño medible por un sensor.

**Sensibilidad (Sensitivity):** el cambio de estado más pequeño que se puede detectar a partir de la lectura de un sensor.

**Factor de galga (Gauge factor):** a menudo notado como  $\lambda$  or GF, relación entre el cambio en la lectura del sensor y el cambio en el estado medido.

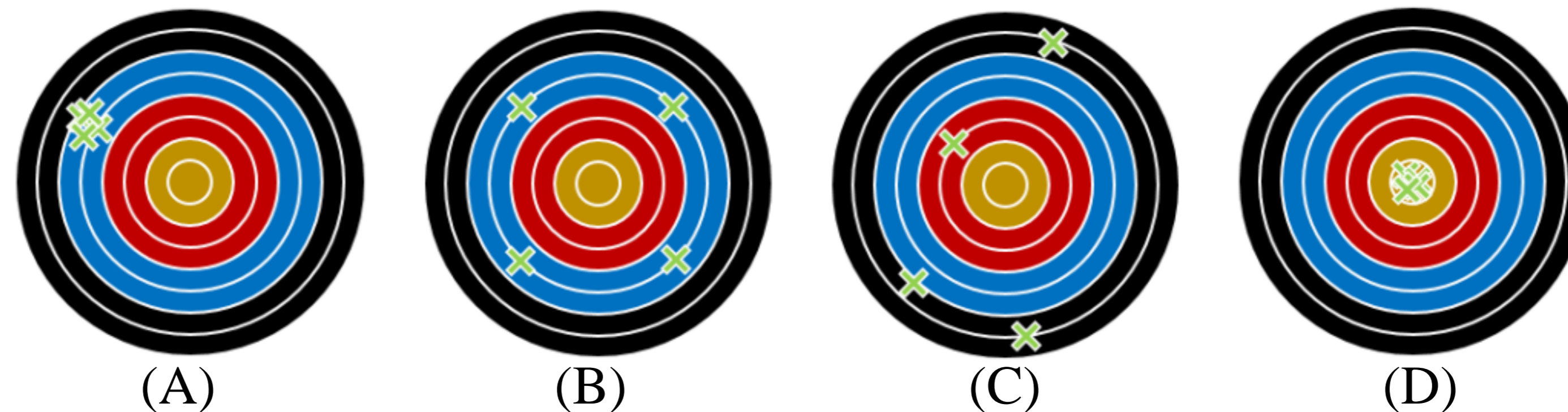
El factor de galga es una propiedad del propio sensor y, a menudo, depende de las propiedades del material y/o la configuración mecánica. El rango, la resolución y la sensibilidad son propiedades que dependen del sistema de adquisición de datos. La resolución es una función de los bits del convertidor analógico-digital (ADC). La sensibilidad se puede tomar como la resolución del sensor multiplicada por el nivel de ruido.



### Key Definitions

- Precision and accuracy

La **precisión** (*Precision*) es lo cerca que están las mediciones consecutivas entre sí. La **exactitud** (*accuracy*) es qué tan cerca están las mediciones del valor real o verdadero. La precisión y la exactitud son dos conceptos independientes, como se muestra en la siguiente figura. La figura (A) ilustra un lanzamiento preciso de baja exactitud pero alta precisión, donde todos los dardos aterrizaron cerca pero lejos del centro. La Fig. (B) ilustra un lanzamiento preciso de baja precisión, donde los dardos cayeron cerca del centro, pero no cerca entre sí. En la figura (C) no se logra ni alta precisión ni alta exactitud, mientras que la figura (D) ilustra un lanzamiento muy preciso y exacto. En las mediciones, se puede calibrar un sensor preciso pero no exacto para lograr precisión, mientras que un conjunto de mediciones exactas pero no precisas se puede promediar para lograr precisión.



## Sensores

### Lista de sensores disponibles en SHM

sensor	measured state
accelerometer	acceleration
anemometer	wind speed
barometer	atmospheric pressure
elasto-magnetic	force
fiber optics	light transmission
global positioning system (GPS)	location
hygrometer	humidity
LiDAR	distance
linear variable differential transformer (LVDT)	displacement
microphone	sound waves
photosensor	light
pluviometer	precipitation amount
radar	distance/speed
seismometer	ground acceleration
strain gauge	strain
thermocouple	temperature
tiltmeter	angle
total station	distance
vibrating wire	force
video camera	image
weigh-in-motion	vehicle weight





## Algunos sensores clave

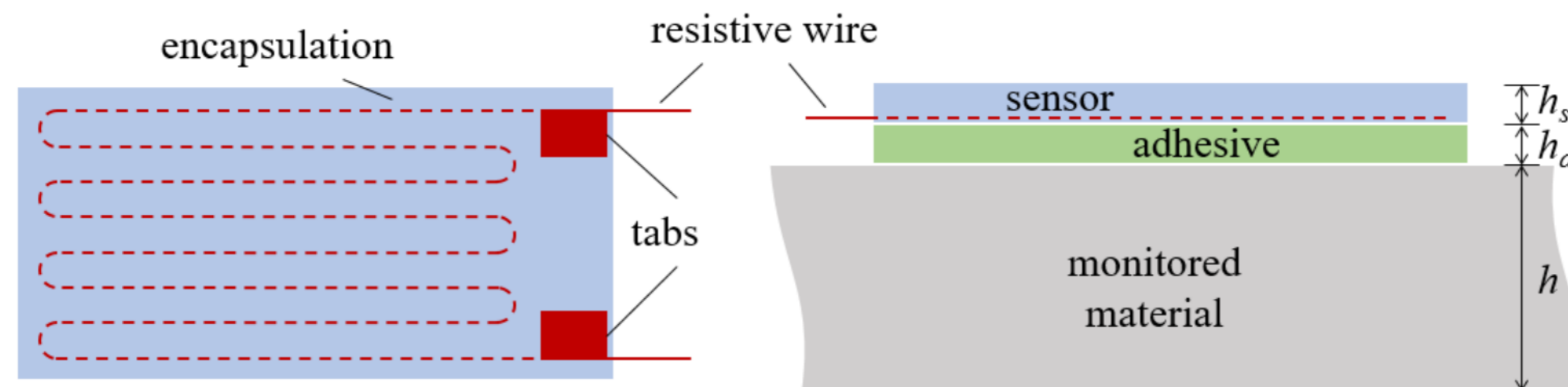
- Galgas extensiométricas (Resistive strain gauges)
- Células de presión (Load cells)
- Acelerómetros (Accelerometers)
- Inclínómetros (Tiltmeters/inclinometers)
- Extensómetros (LVDTs)
- Sensores de corrosión (Corrosion sensors)
- Fibra óptica (Fiber optics)



## Algunos sensores clave

# Galgas extensiométricas

Las galgas extensométricas resistivas se encuentran entre los sensores más utilizados en SHM. Por lo general, son de pequeño tamaño y se pueden configurar de varias formas para medir la **deformación** lineal o el corte/par a lo largo de diferentes ejes. Una configuración común de galgas son las galgas extensométricas resistivas lineales. La variación en la resistencia eléctrica cuando la galga se ve sometida a una acción mecánica puede relacionarse con la deformación en la estructura a través de un factor de galga. El alambre resistivo se encapsula en un sustrato que se adhiere a una superficie monitorizada usando un adhesivo.



# Algunos sensores clave

## Células de presión

Las células de carga son sensores que convierten diferentes tipos de cargas (tensión, compresión, flexión, cizallamiento, etc.) en una señal eléctrica.

- Hydraulic load cells
- Pneumatic load cells
- Piezoelectric load cells
- Capacitive Load cells
- Vibration wire Load cells
- Strain-Gauge load cells



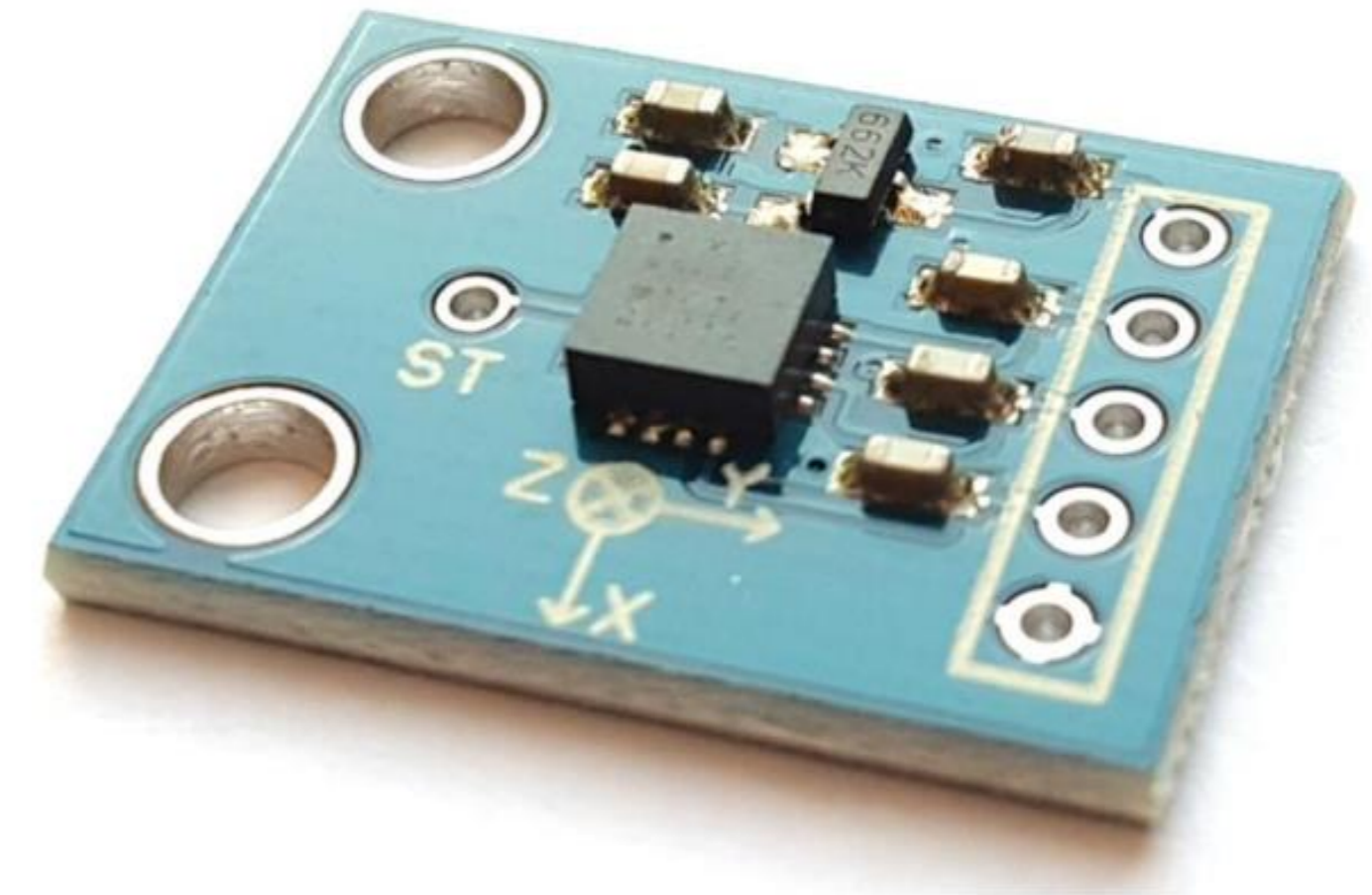
## Algunos sensores clave

### Acelerómetros

Un acelerómetro es un dispositivo electromecánico que se utiliza para medir las fuerzas de aceleración. Dichas fuerzas pueden ser estáticas, como la fuerza continua de la gravedad, o dinámicas para detectar movimientos o vibraciones.

#### Tipos de acelerómetros

- Force-balance
- Capacitive
- Piezoelectric
- MEMS



## Algunos sensores clave

### Acelerómetros de fuerza balanceada

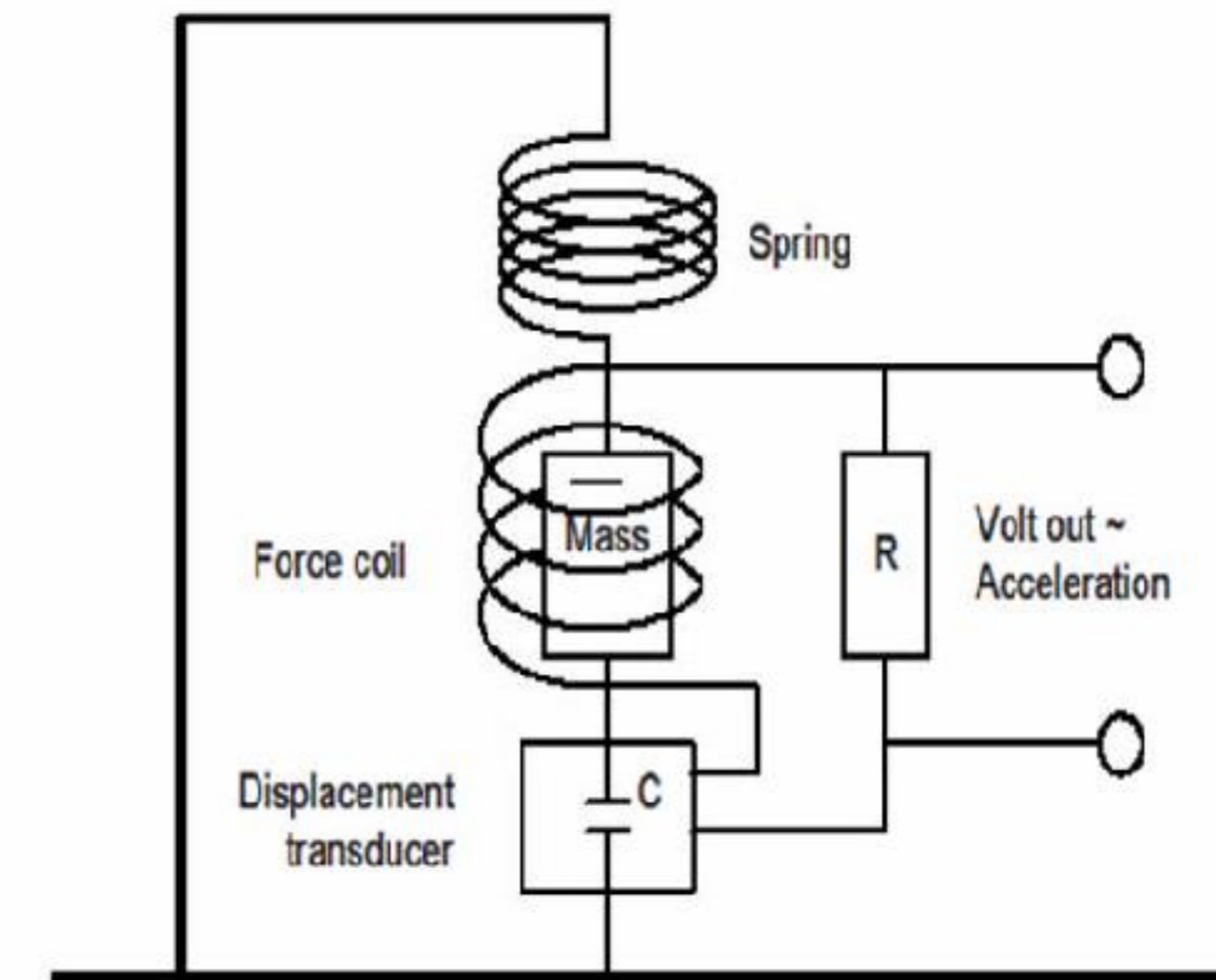
Un acelerómetro de fuerza balanceada utiliza un sistema de control de retroalimentación activa para controlar la posición de una masa de prueba. Cuando se acelera la carcasa del sensor, la masa de prueba dentro del sensor intenta permanecer estacionaria con respecto al marco. Esto hace que la masa de prueba se aleje de su posición nominal. Este movimiento relativo se detecta mediante un sensor de desplazamiento (a menudo capacitivo), que produce una señal en el sistema de control. Esto hace que la corriente fluya a través del elemento generador de fuerza que equilibra la fuerza debida a la aceleración. Finalmente, la corriente a la fuerza aplicada está relacionada con la aceleración de la masa de prueba.

#### Ventajas

- Muy utilizado para monitorizar estructuras civiles debido a su alta sensibilidad y buena resolución a bajas frecuencias.
- Relativamente insensible a los efectos térmicos y bajas no linealidades.

#### Desventajas

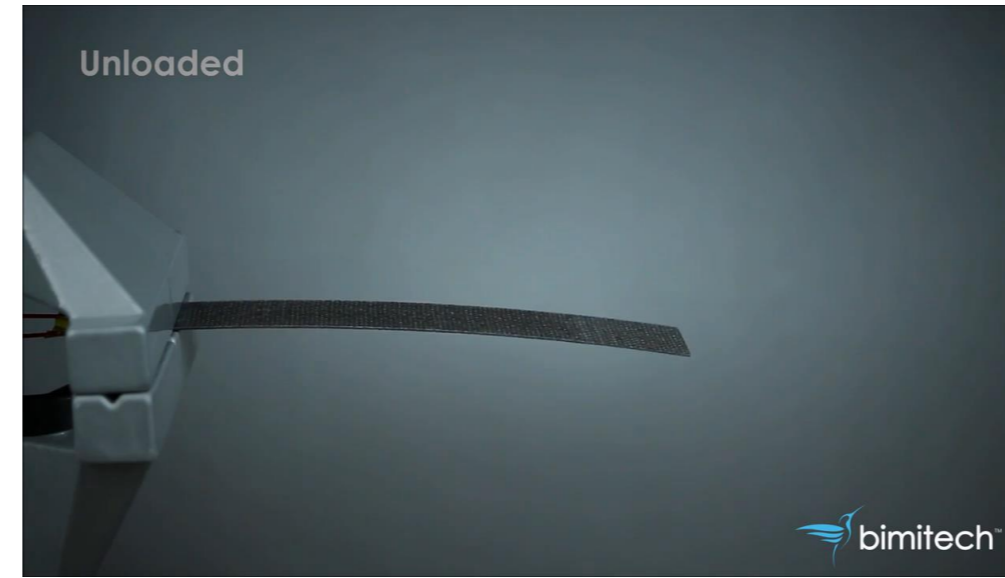
- Su mayor inconveniente es el mecanismo de control, que encarece el sensor y limita el ancho de banda del sensor a frecuencias relativamente bajas.



## Algunos sensores clave

# Acelerómetros piezoeléctricos

<https://www.youtube.com/watch?v=TB9kzPEDNs>



Un acelerómetro piezoeléctrico es aquel que emplea el efecto piezoeléctrico de ciertos materiales para medir la aceleración en la estructura. Estos acelerómetros se utilizan con frecuencia en la monitorización de estructuras de ingeniería civil y del patrimonio cultural.

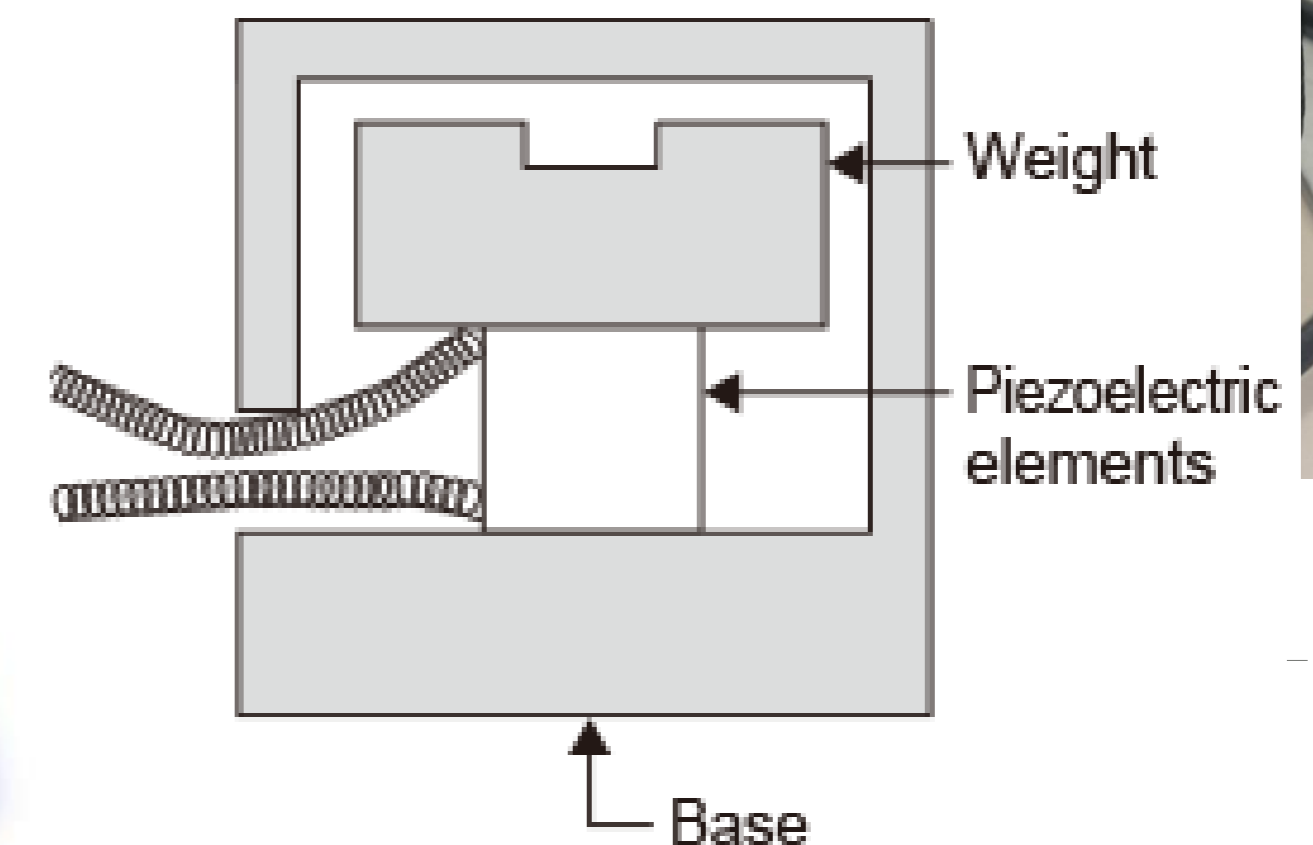
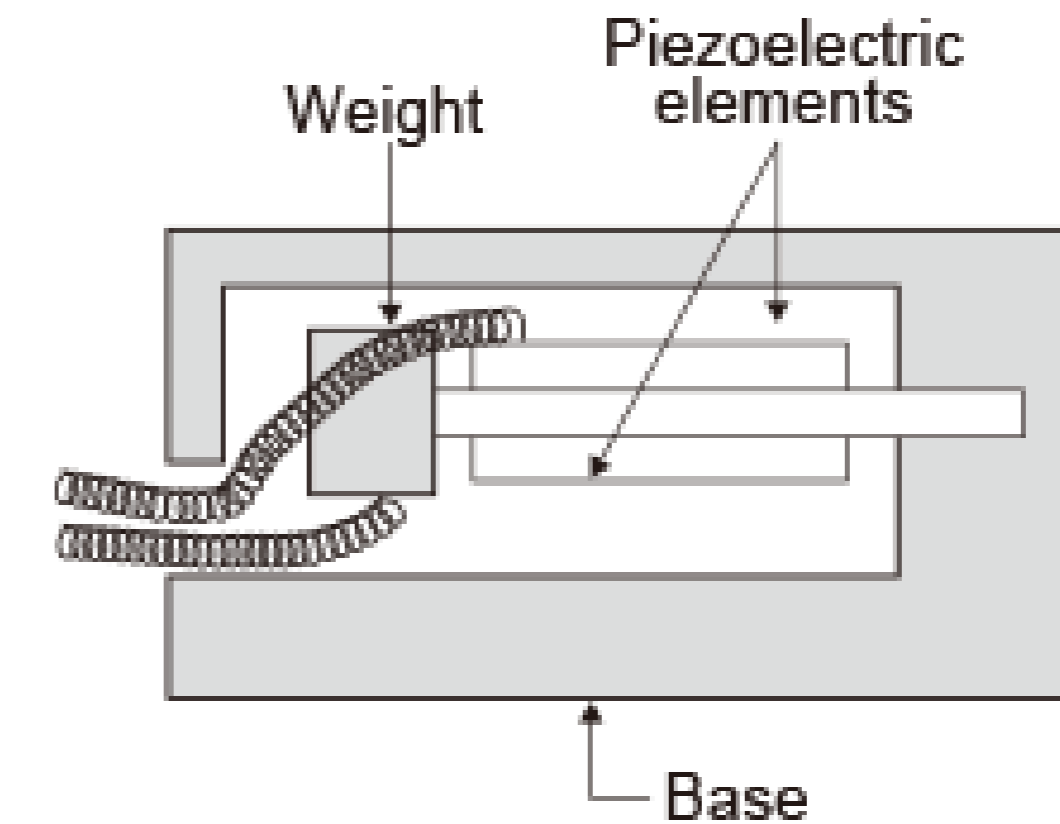
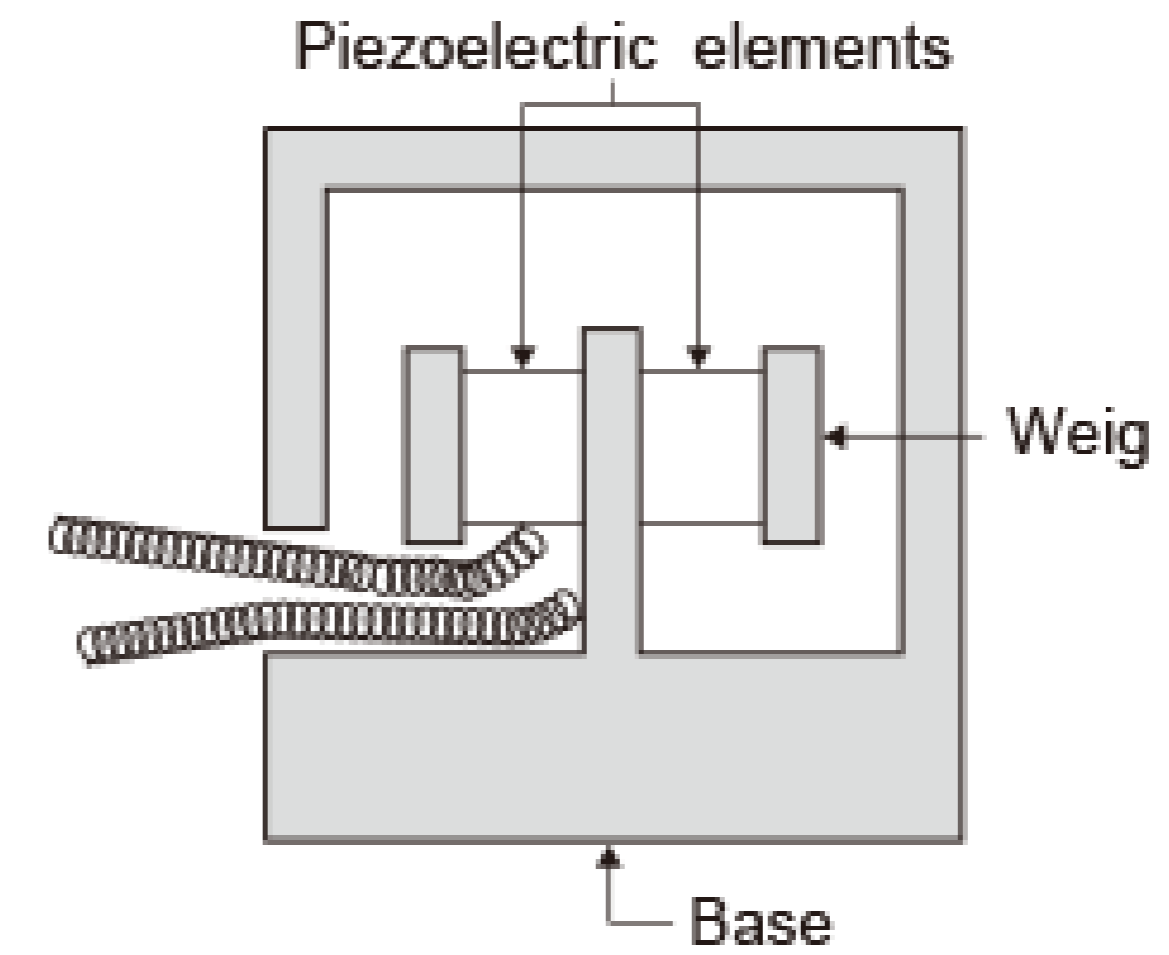
Los acelerómetros piezoeléctricos suelen utilizar una de tres configuraciones diferentes: el modo de corte, el modo de flexión o de compresión.

### Ventajas

- Amplio rango de frecuencia, se pueden medir altas frecuencias.
- Alta sensibilidad.
- Excelente linealidad en su rango dinámico.
- Los acelerómetros piezoeléctricos son pequeños y de construcción robusta.

### Desventajas

- Estos acelerómetros no pueden medir aceleraciones estáticas.
- Rango de temperatura limitado.
- No trabajan bien para rangos de frecuencias muy bajos.



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

## Algunos sensores clave

### Acelerómetros capacitivos

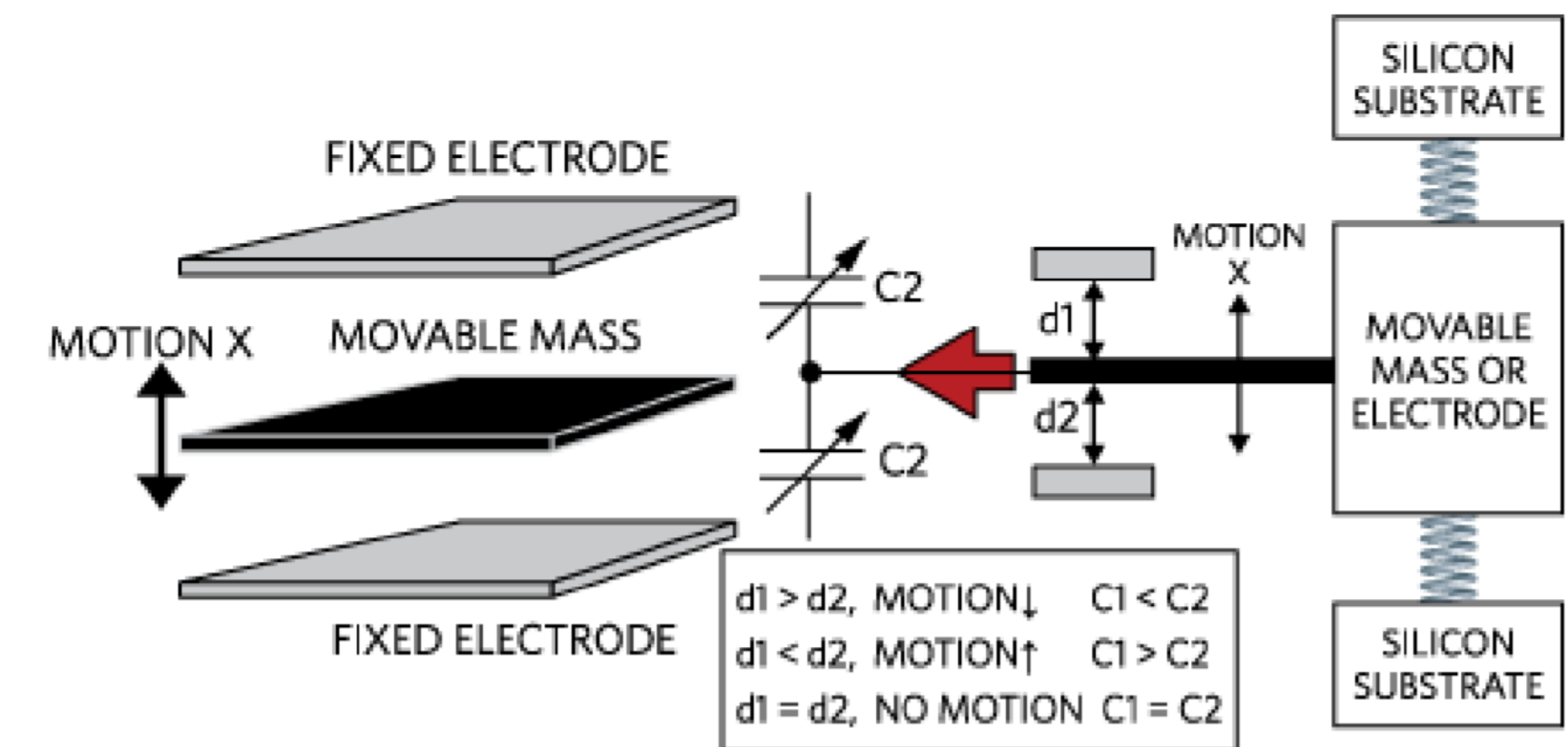
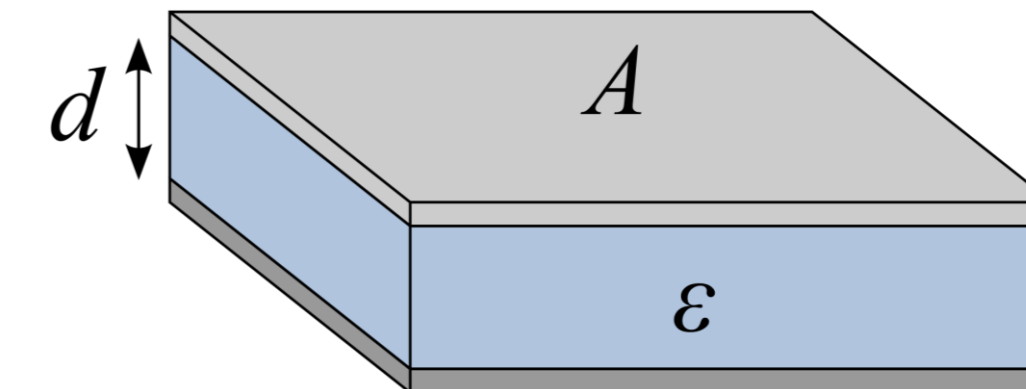
Un acelerómetro capacitivo utiliza el desplazamiento de una masa de prueba con respecto a la carcasa del acelerómetro para determinar la aceleración que está experimentando el sensor. Los movimientos de una masa de prueba suspendida entre dos placas modifican la capacitancia del sensor pudiendo medir así la aceleración del sistema.

#### Ventajas

Los acelerómetros capacitivos son ventajosos para la monitorización de grandes estructuras porque pueden adquirir mediciones en un amplio rango de frecuencias, incluida la aceleración estática.

#### Desventajas

Susceptibles a las variaciones de temperatura y humedad y son relativamente frágiles.

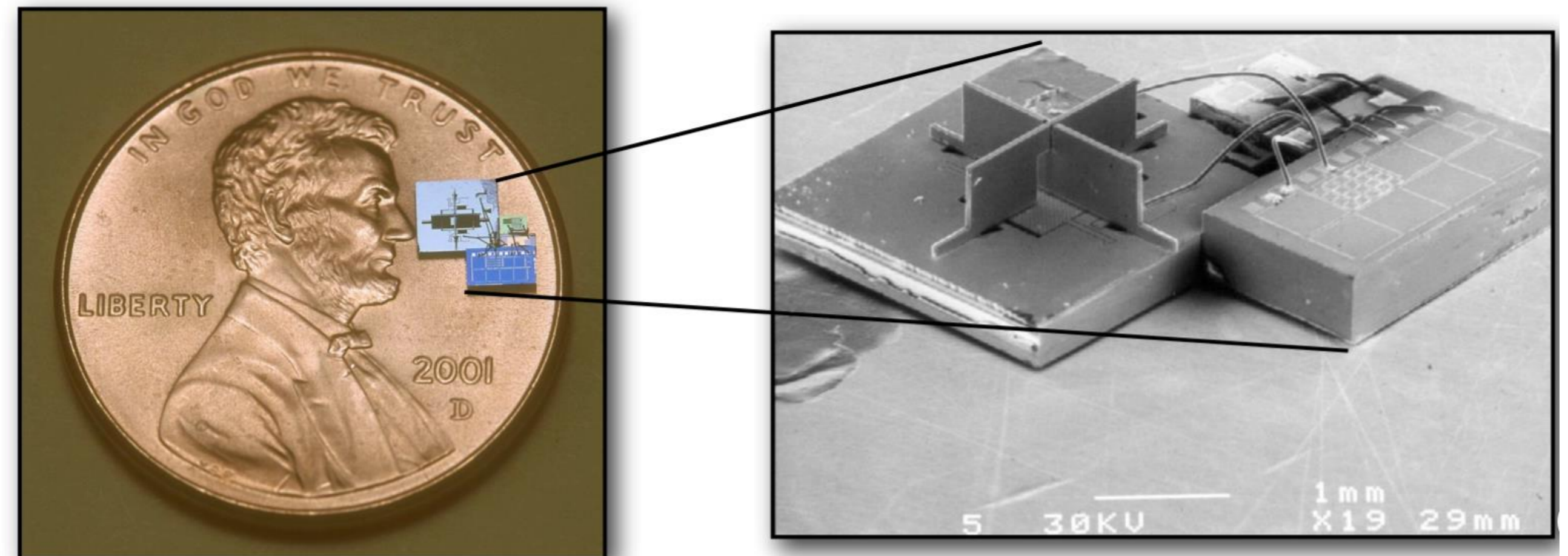
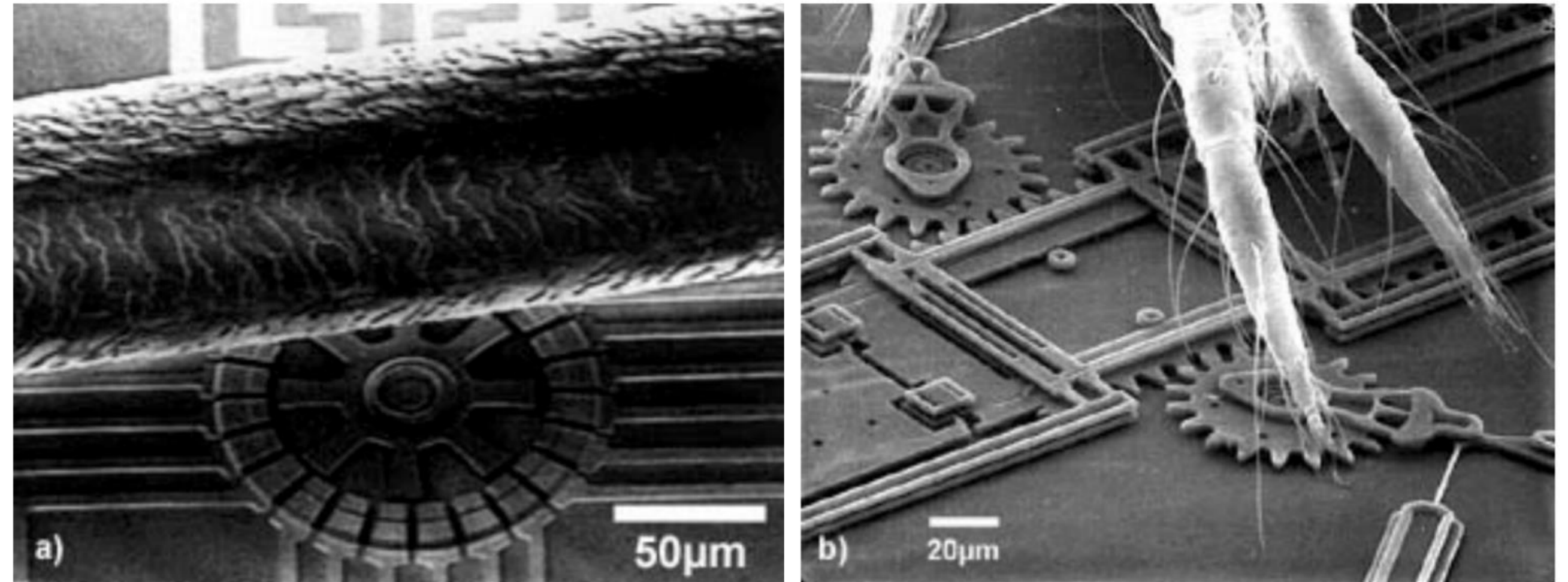


## Algunos sensores clave

### **MEMS** (micro electromechanical systems)

Los sistemas microelectromecánicos (MEMS) son una tecnología de proceso utilizada para crear pequeños dispositivos o sistemas integrados que combinan componentes mecánicos y eléctricos. Se fabrican utilizando técnicas de procesamiento por lotes de circuitos integrados (IC) y pueden variar en tamaño desde unos pocos micrómetros hasta milímetros.

En la forma más general, los MEMS consisten en microestructuras mecánicas, microsensores, microactuadores y microelectrónica, todos integrados en el mismo chip de silicio.





## Algunos sensores clave

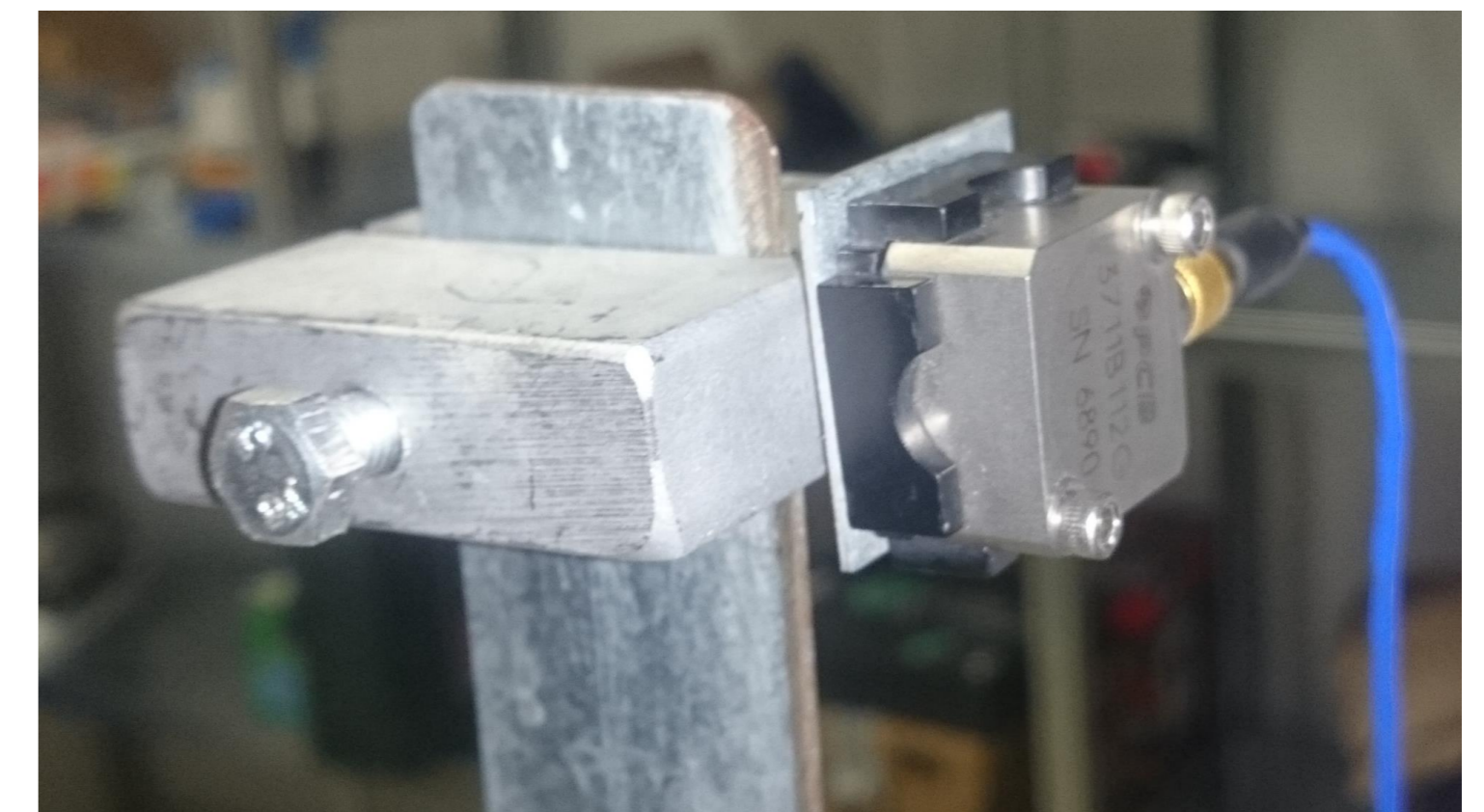
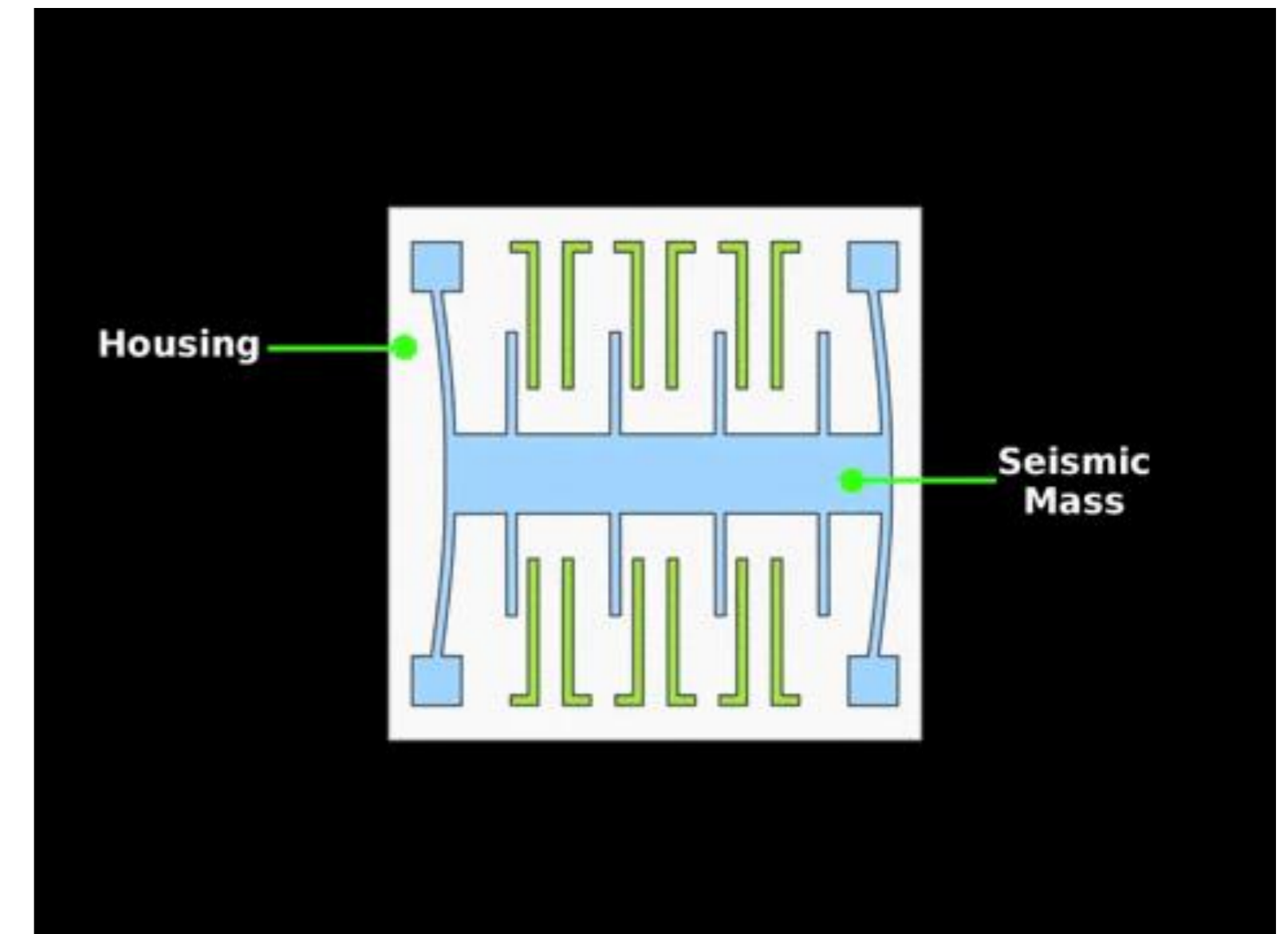
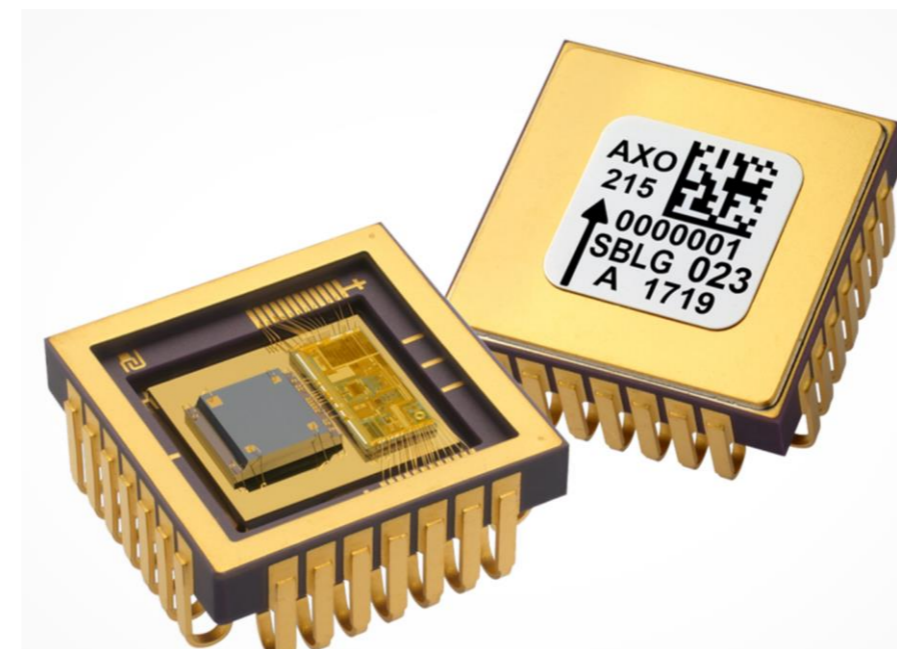
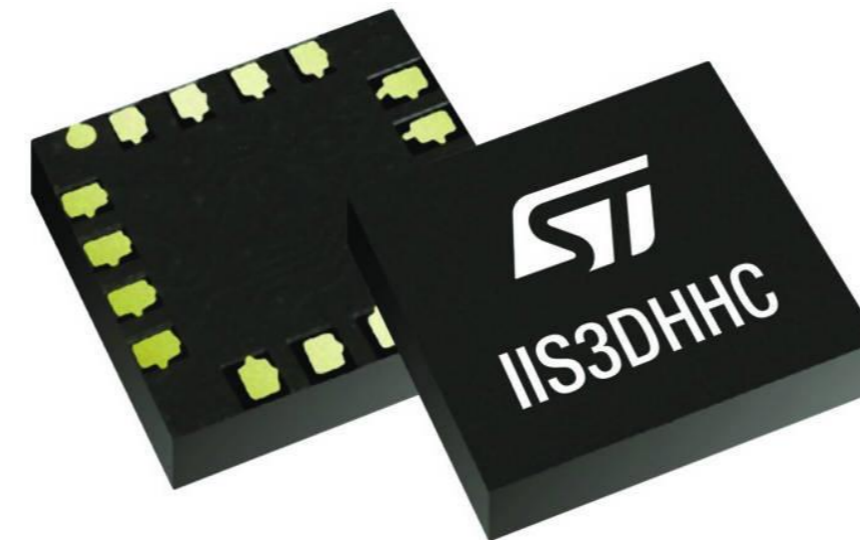
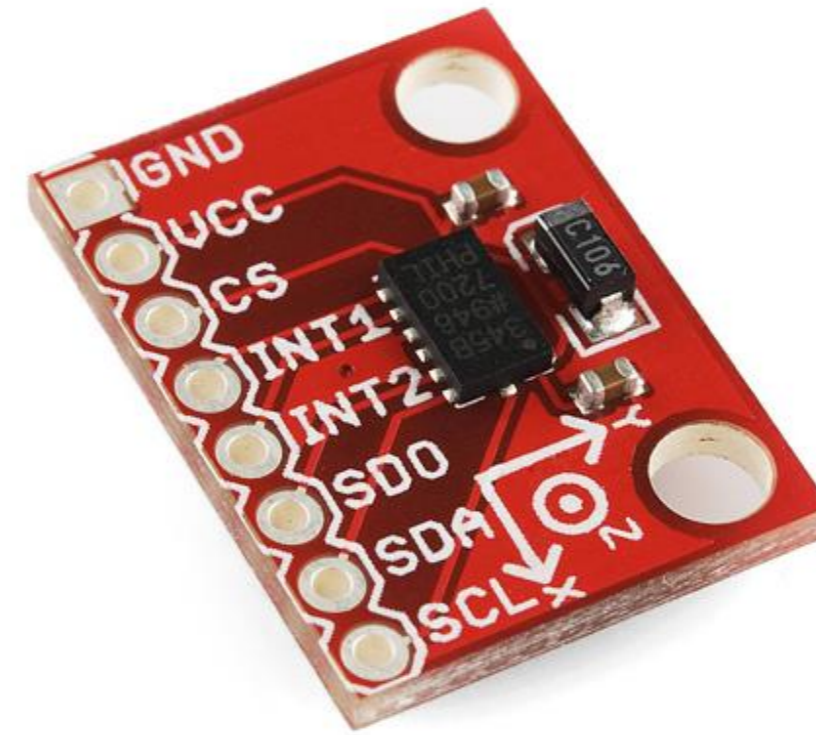
Existe una gran variedad de sensores (acelerómetros, sensores de presión ... etc) y actuadores MEMS.

### Ventajas

- Gran flexibilidad en el diseño.
- Puede medir aceleraciones estáticas.
- Pequeños y económicos.

### Desventajas

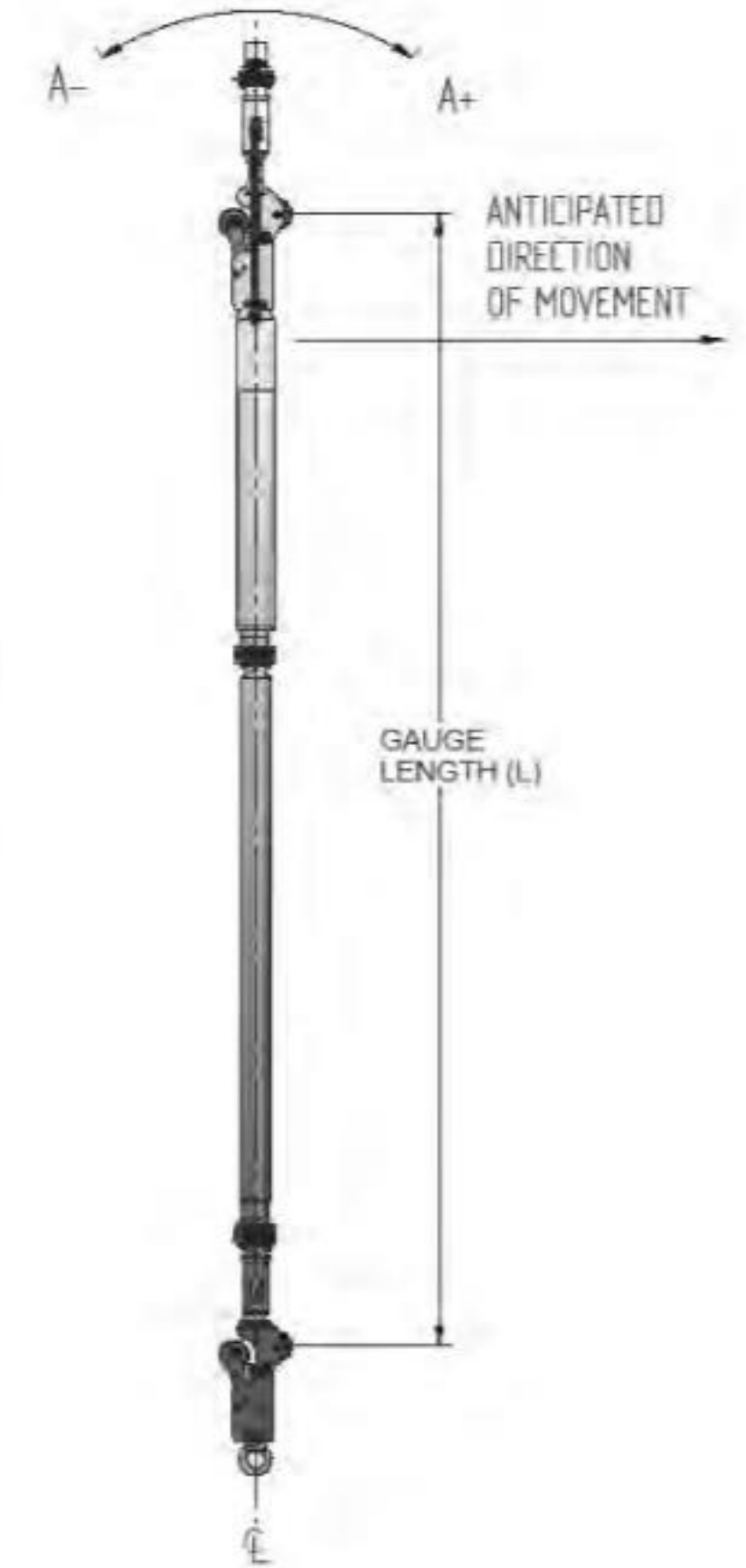
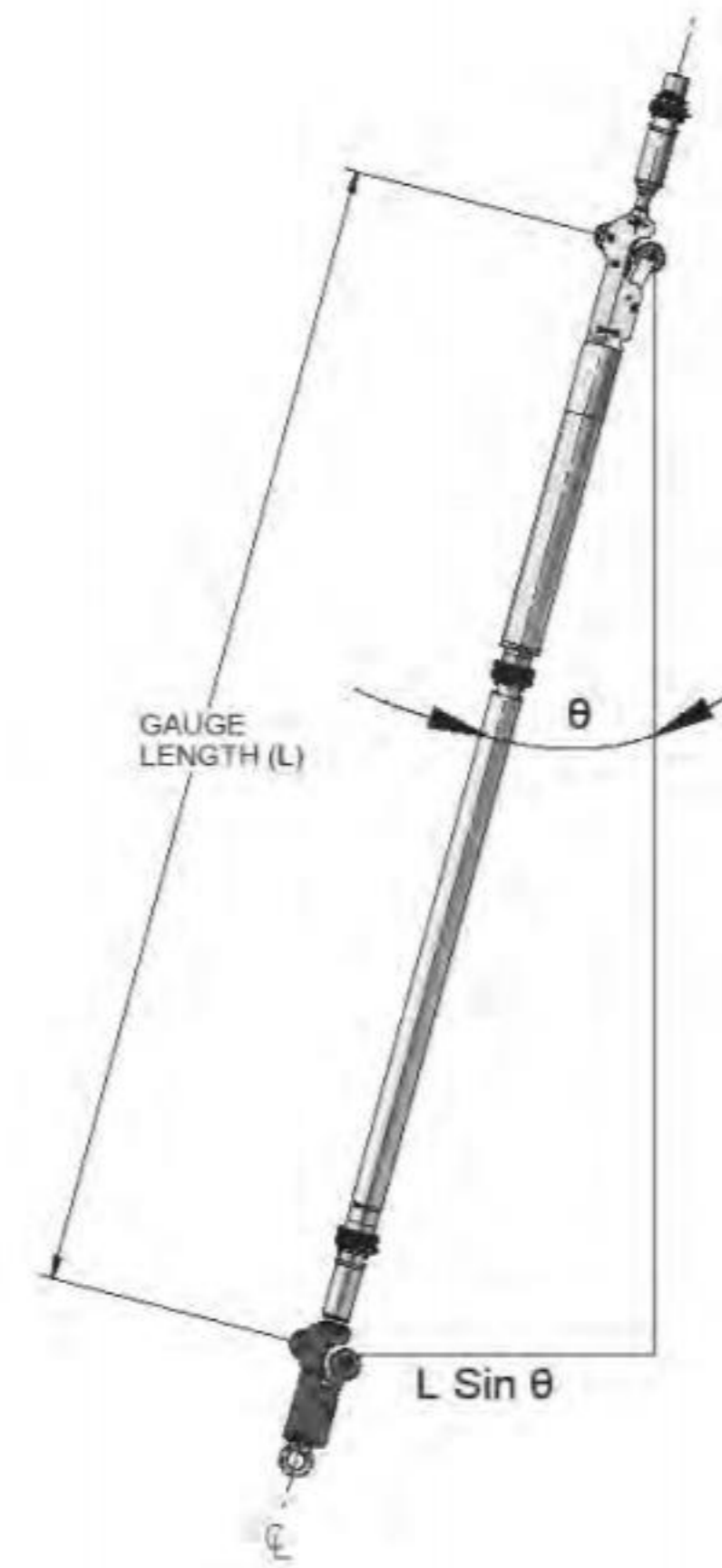
- Baja sensibilidad.
- Pequeño rango dinámico.



## Algunos sensores clave

### Inclinómetros

Un inclinómetro es un instrumento que se utiliza para medir ángulos de pendiente (o inclinación), elevación o depresión de un objeto con respecto a la dirección de la gravedad.

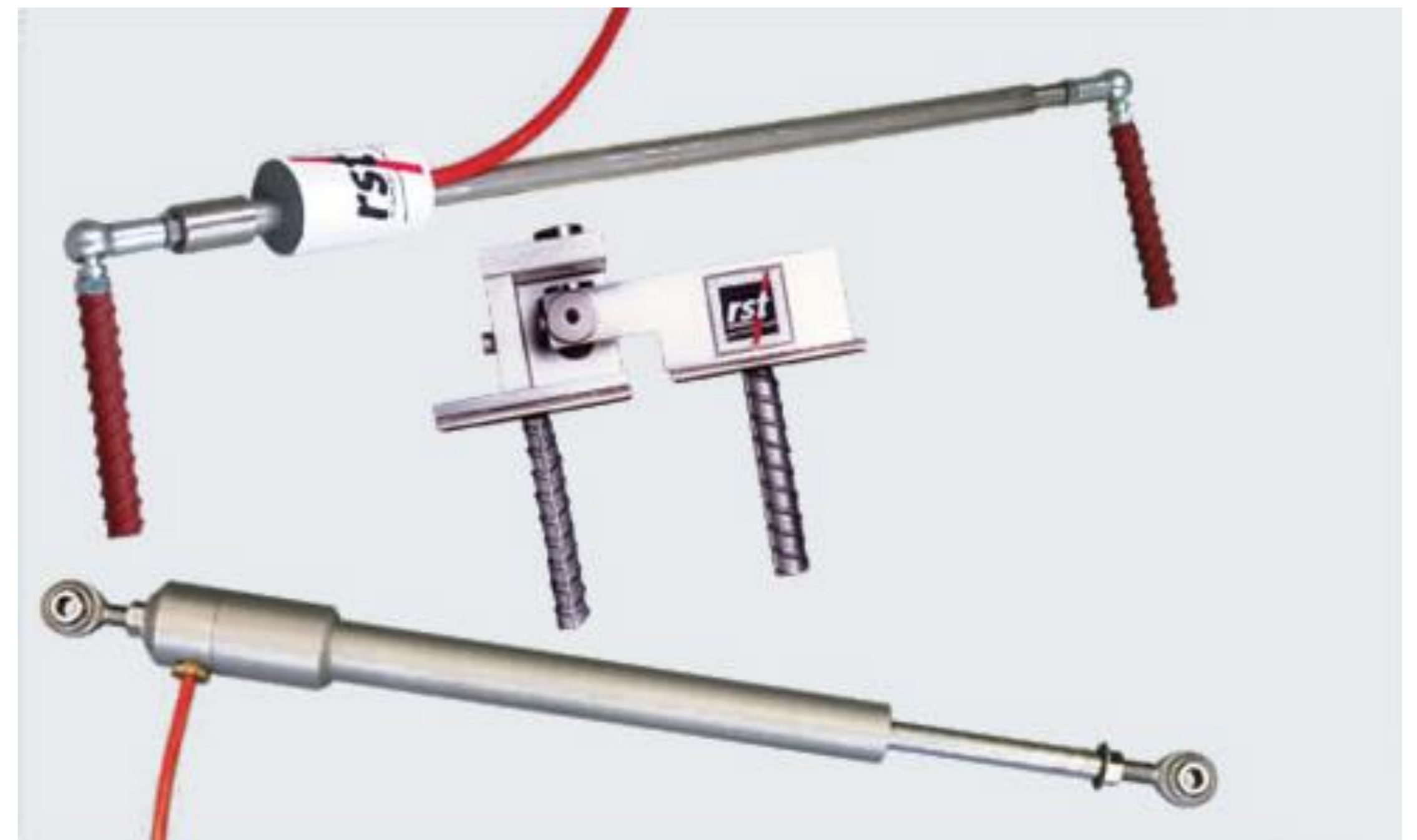


## Algunos sensores clave

### LVDTs

Los LVDT (linear variable differential transformers) son sensores electromecánicos que se utilizan para el desplazamiento entre dos puntos en una señal eléctrica. Consisten en un cilindro metálico hueco en el que un eje de menor diámetro se mueve libremente hacia adelante y hacia atrás a lo largo del eje largo del cilindro. El movimiento relativo entre los extremos del LVDT se traduce en un desplazamiento del núcleo dentro del cilindro, el cual se convierte en una señal eléctrica medible.

*Puede utilizarse para mediciones estáticas y dinámicas.*

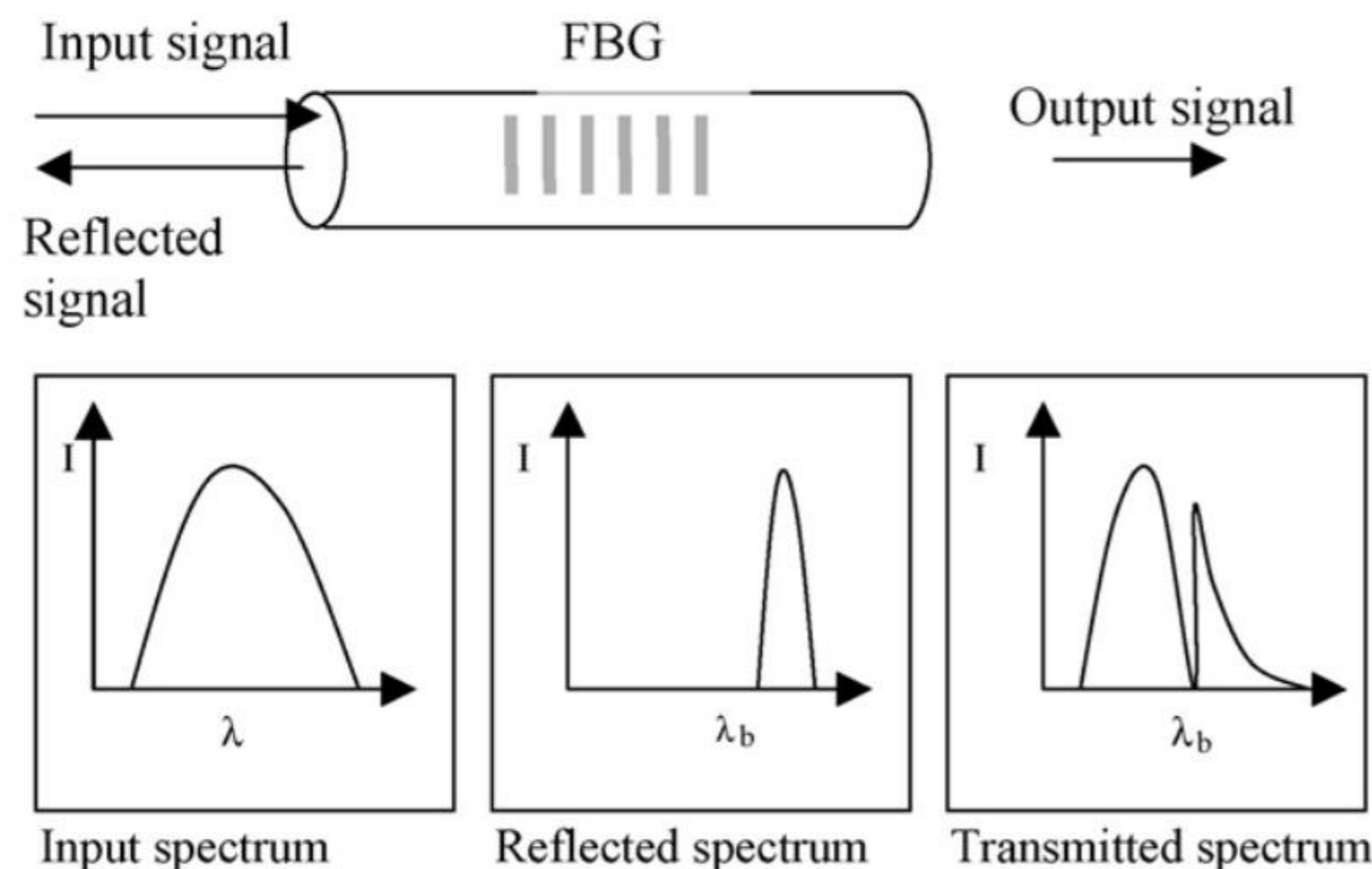


## Algunos sensores clave

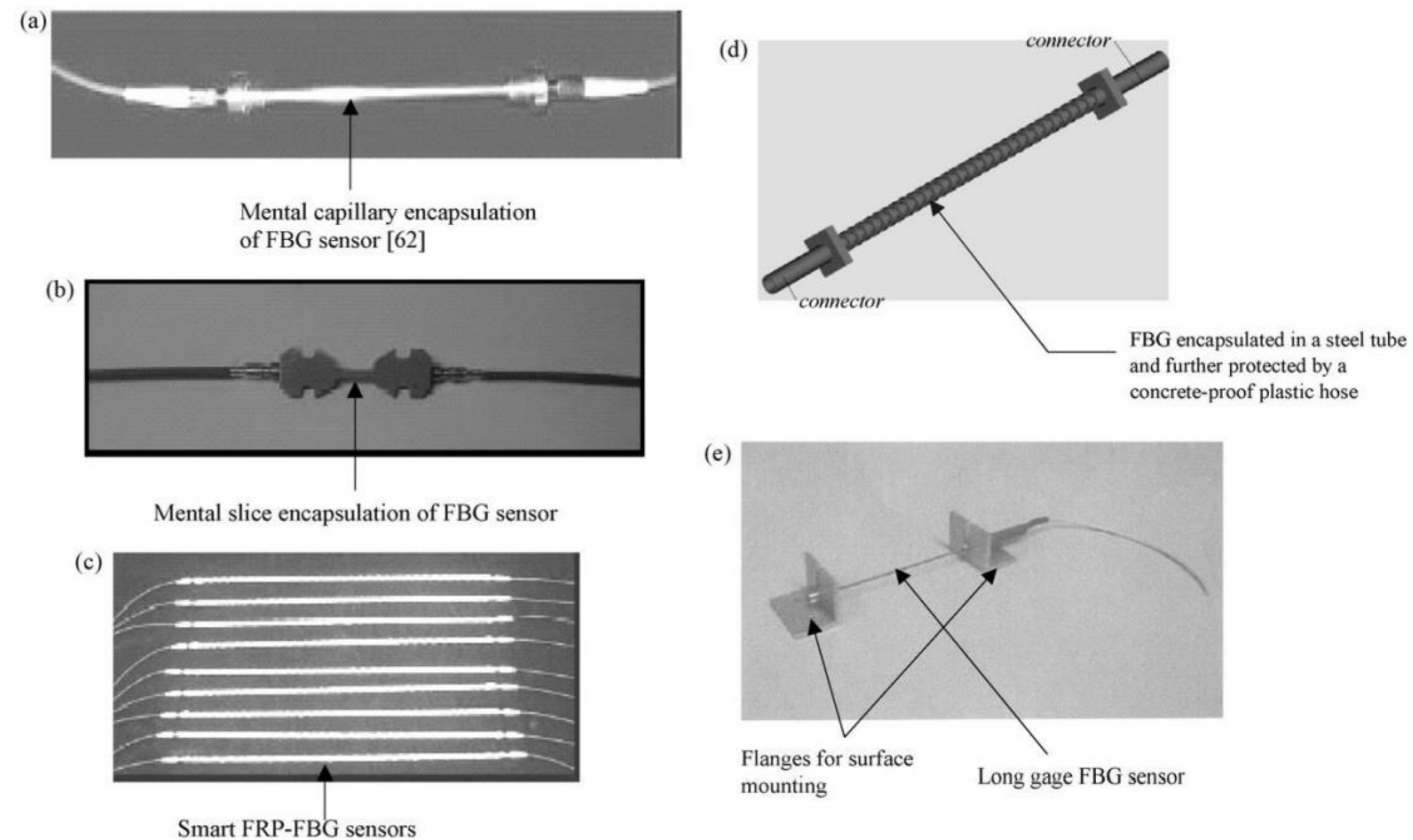
# Fiber Optics – Fiber Bragg grating (FBG) sensors

Los FBG se obtienen creando variaciones periódicas en el índice de refracción del núcleo de una fibra óptica. Cuando se hace que la luz pase a través de la rejilla, parte del espectro de la onda de entrada se verá reflejada con una longitud de onda particular, llamada longitud de onda de Bragg. La longitud de onda de Bragg se expresa como  $\lambda_{h1} = 2n\Lambda_1$  ( $\lambda_{h1}$  - longitud de onda de Bragg;  $n$  - es el índice de refracción efectivo;  $\Lambda_1$  - período de la rejilla).

El índice de refracción depende del estado de deformación de la fibra y la temperatura, por lo que estos sensores actúan simultáneamente como sensores de temperatura y deformación.



Los FBG desnudos son muy frágiles y requieren un encapsulado adecuado antes de ser puestos en servicio.

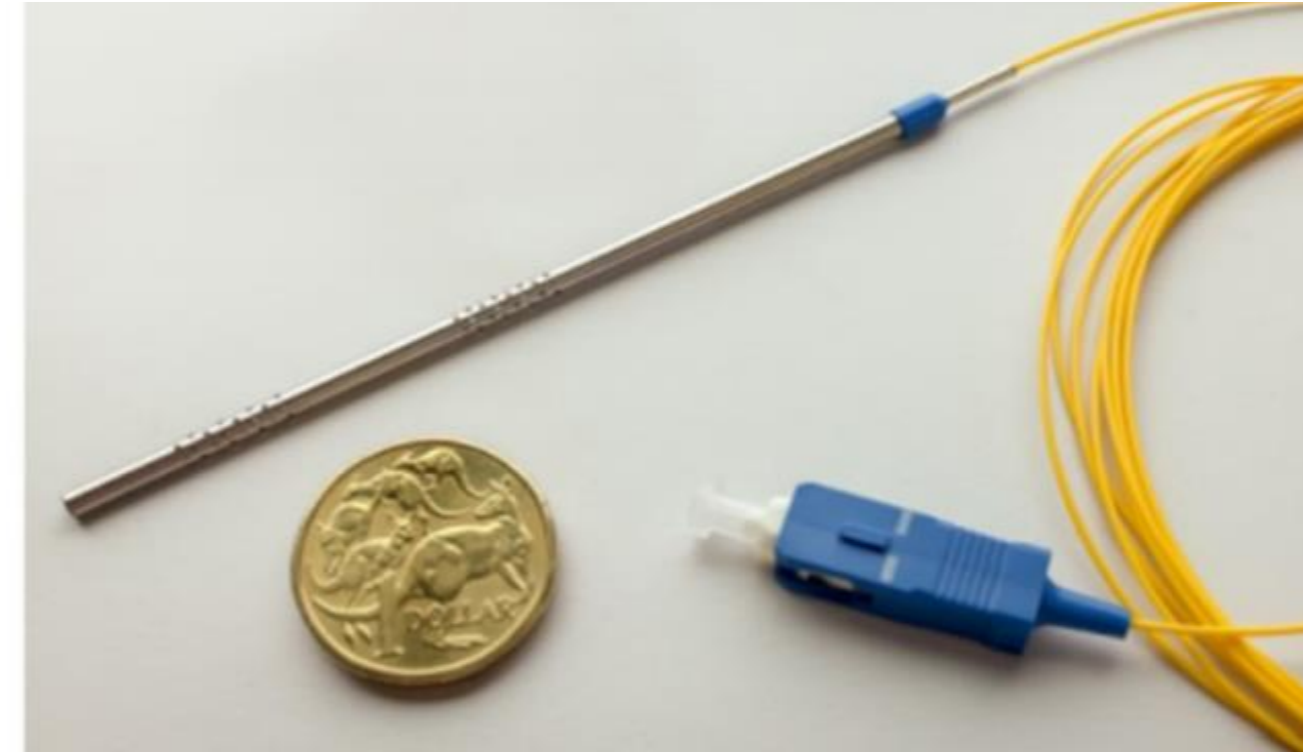


# Algunos sensores clave

## Corrosion sensors

Temperature: Embeddable temperature sensors

Humidity sensors



pH:

Embedded electrochemical sensors: corrosion state data (corrosion potential, concrete resistivity, and rebar corrosion rate) on a long-term cycle (2 to 5 years)



## Algunos sensores clave

### Power Supply



Jang, S., Jo, H., Cho, S., Mechitov, K., Rice, J. A., Sim, S. H., ... & Agha, G. (2010). Structural health monitoring of a cable-stayed bridge using smart sensor technology: deployment and evaluation. *Smart Structures and Systems*, 6(5-6), 439-459.



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Máster Universitario en Estructuras  
Curso 2020-2021

# Taller: Procesamiento de señales

Módulo: MÓDULO FUNDAMENTAL: CALIDAD Y DAÑO  
Materia: **Análisis Modal y Detección de Defectos**

**Enrique García Macías**

[enriquegm@ugr.es](mailto:enriquegm@ugr.es)

**Departamento de Mecánica de Estructuras e  
Ingeniería Hidráulica**

# Desarrollo del curso

	FECHA		HORA	PROFESOR	TEMA	
Clase 1	Lunes	1 febrero	9:30-11:30	EGM	1	Introducción: Análisis modal dentro del marco del mantenimiento de la salud estructural.
Clase 2	Lunes	8 febrero	9:30-11:30	EGM	2	Fuentes de deterioro, patologías estructurales, y tecnologías de monitorización.
Clase 3	Lunes	15 febrero	9:30-11:30	EGM	3	Taller: procesamiento de señales.
Clase 4	Lunes	22 febrero	9:30-11:30	EGM	4	Análisis modal experimental.
Clase 5	Lunes	15 marzo	9:30-11:30	EGM	5	Análisis modal operacional.
Clase 6	Lunes	12 abril	9:30-11:30	EGM	6	Análisis modal operacional automatizado. Práctica de laboratorio I.
Clase 7	Lunes	19 abril	9:30-11:30	EGM	7	Taller: Identificación del daño estructural.
Clase 8	Lunes	26 abril	9:30-11:30	RCT	8	Técnicas de identificación dinámica basadas en análisis modal operacional.
Clase 9	Lunes	26 abril	12:00-14:00	RCT	9	Práctica de laboratorio II: Test de vibración ambiental.
Clase 10	Martes	27 abril	9:30-11:30	RCT	10	Casos de estudio.
Clase 11	Martes	27 abril	12:00-14:00	RCT		Presentación de trabajos.

ENTREGA DE TRABAJOS Y EVALUACIÓN

Del 3 al 28 de mayo



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

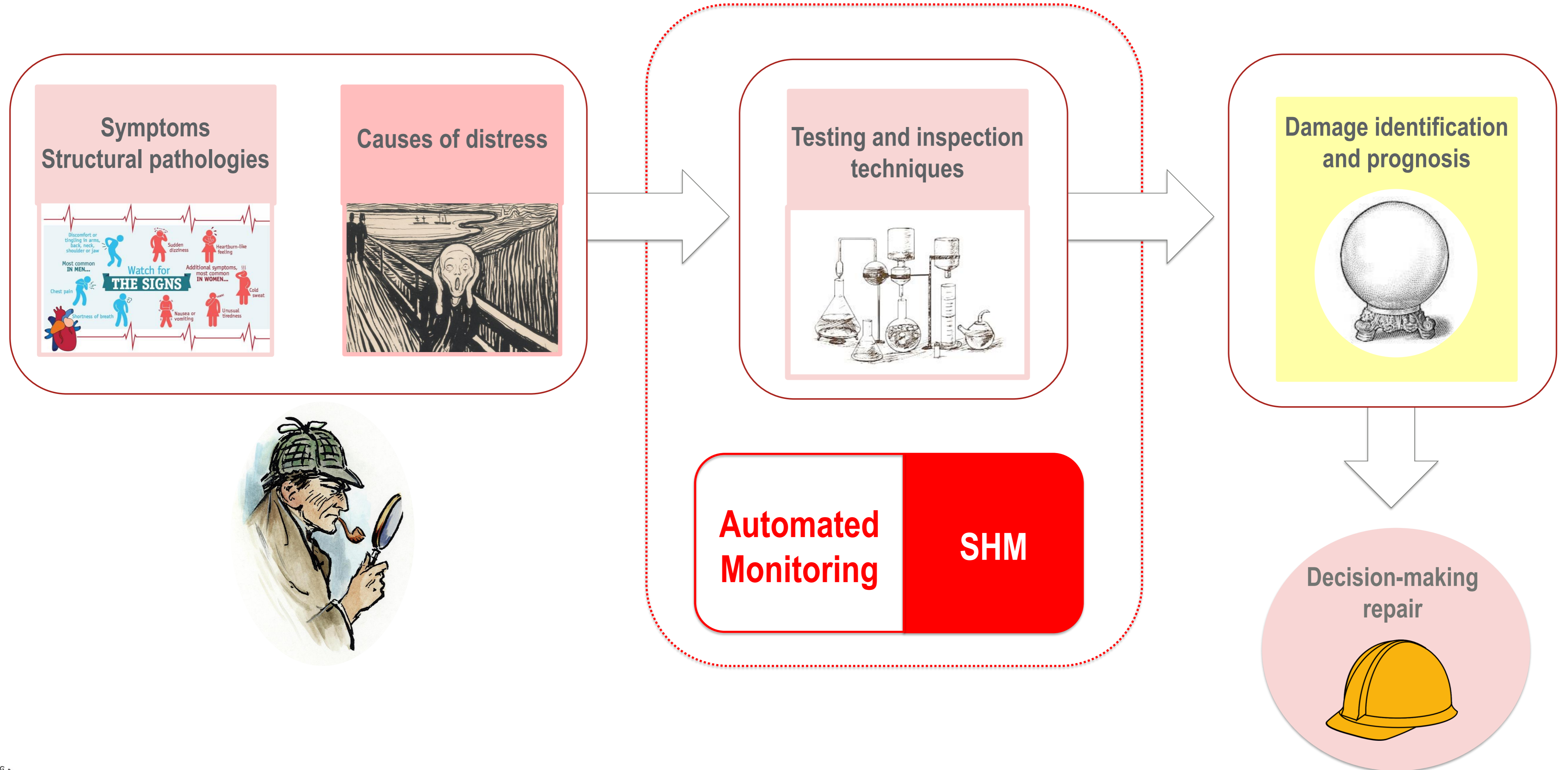




# Introducción.



# Introducción

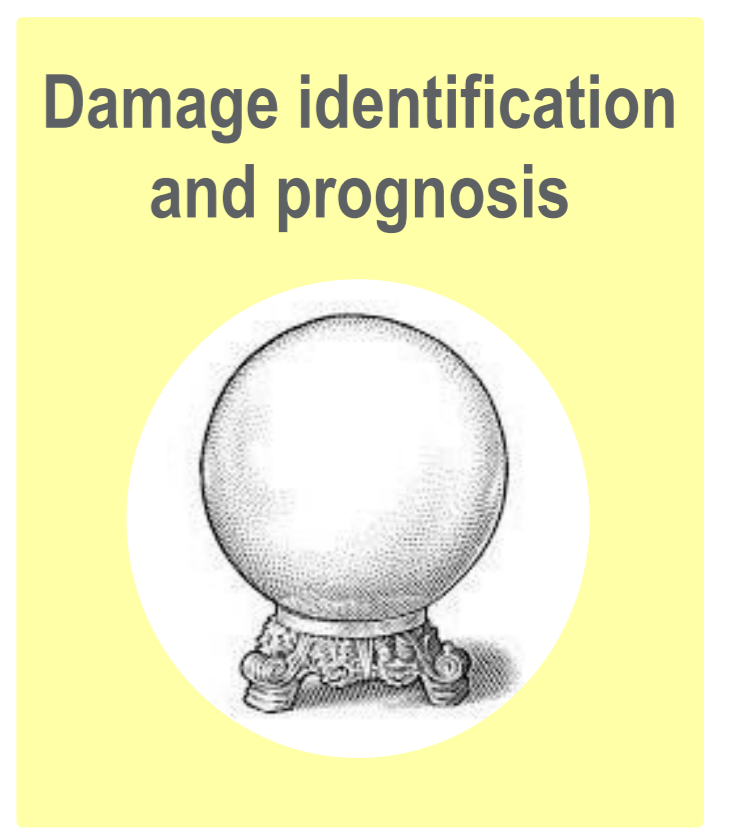
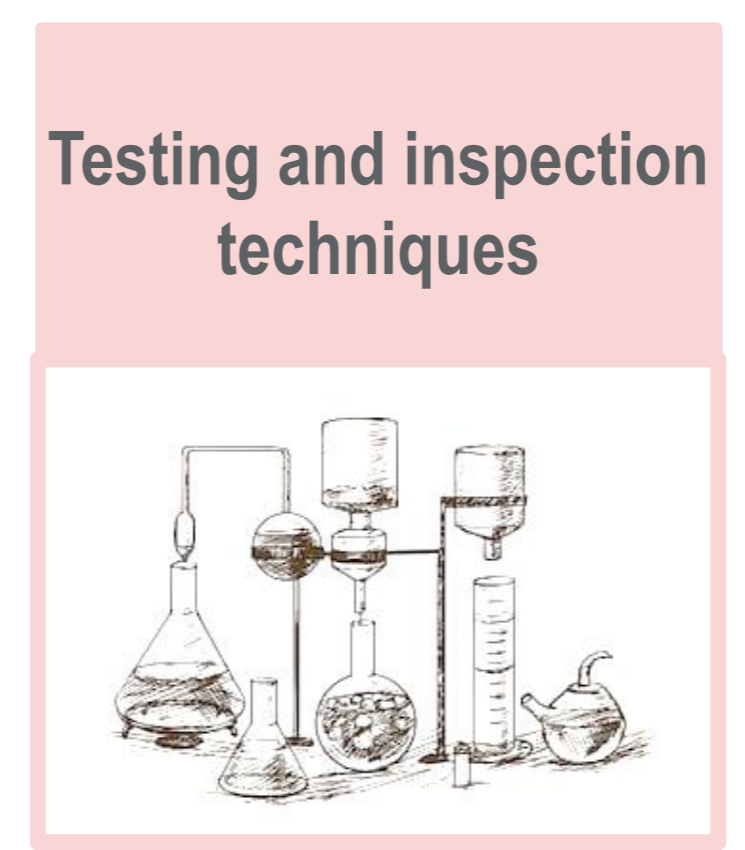
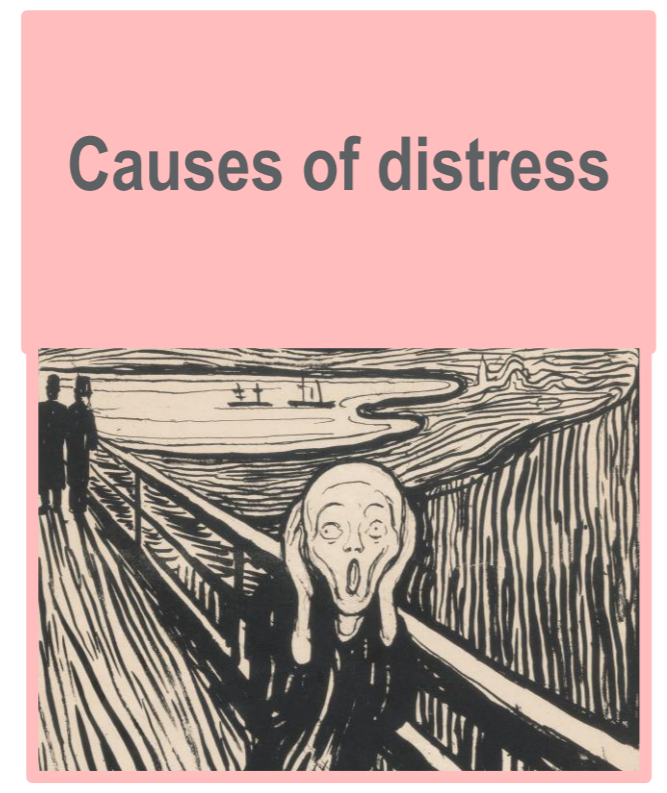


**Symptoms  
Structural pathologies**

Discomfort or tingling in arms, back, neck, shoulder or jaw  
Sudden dizziness  
Heartburn-like feeling  
Chest pain  
Shortness of breath  
Nausea or vomiting  
Unusual tiredness  
Cold sweat

Most common IN MEN...  
Additional symptoms, ||| most common IN WOMEN...

**Watch for THE SIGNS**

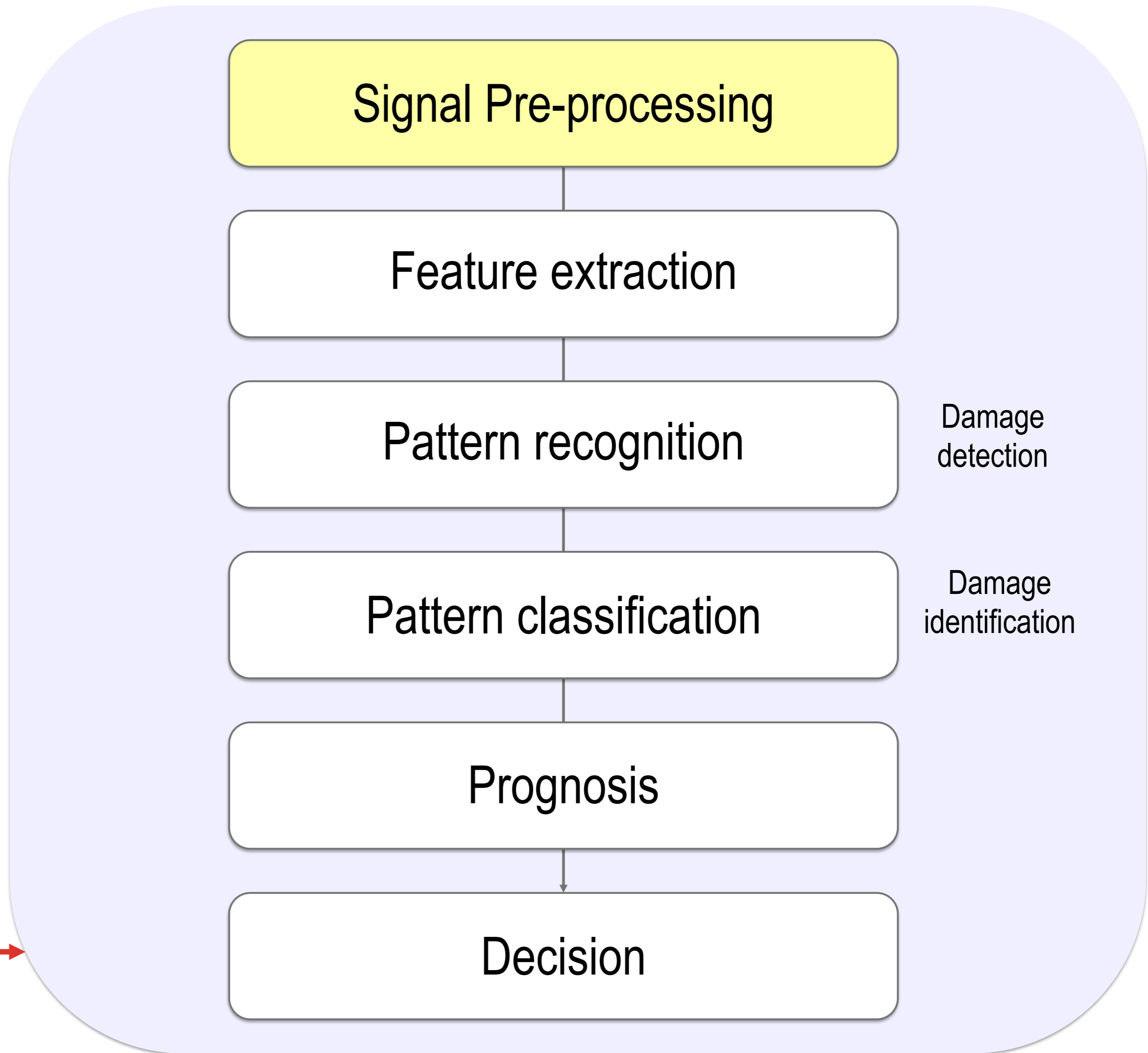
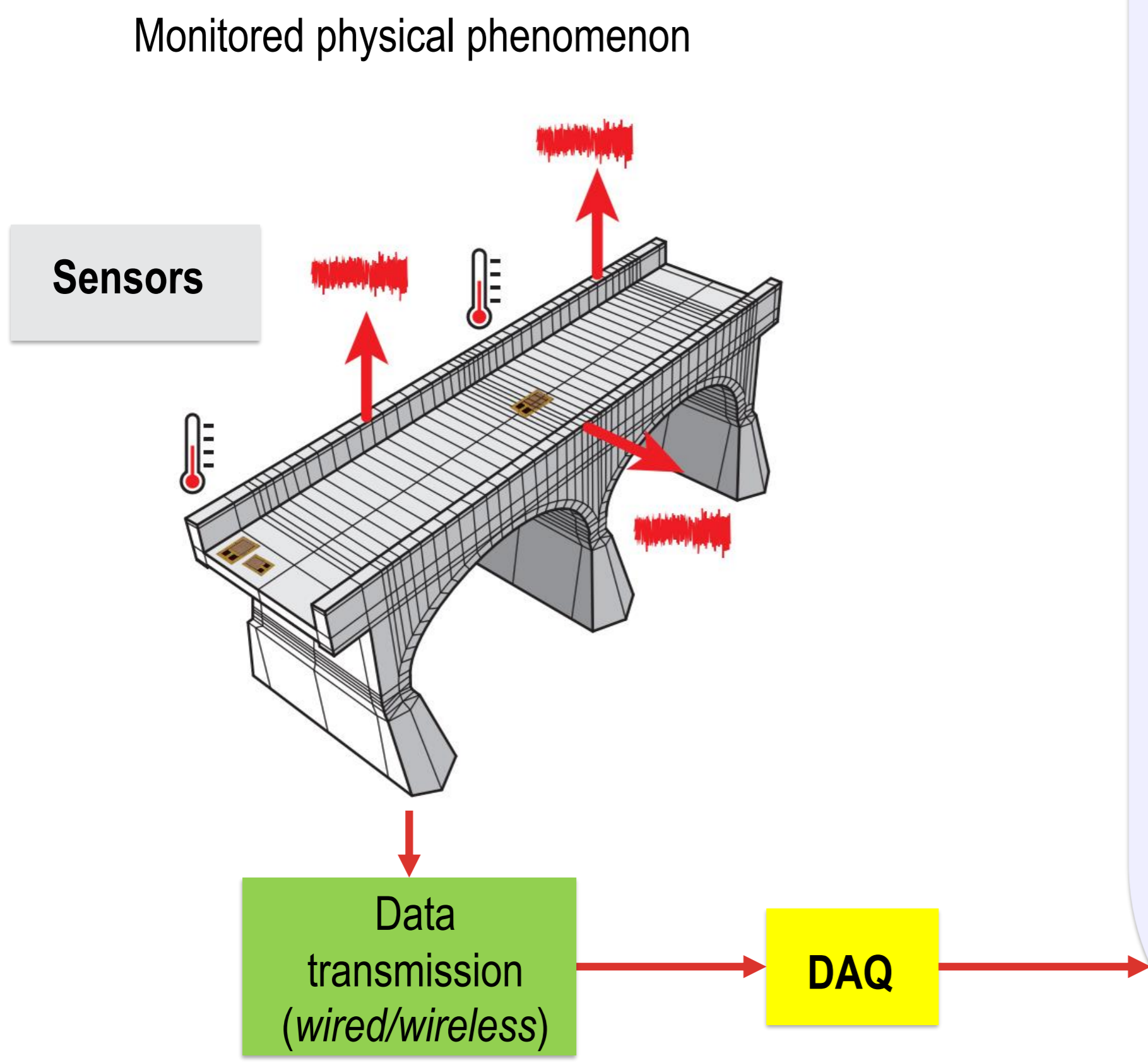


**Automated Monitoring**

**SHM**

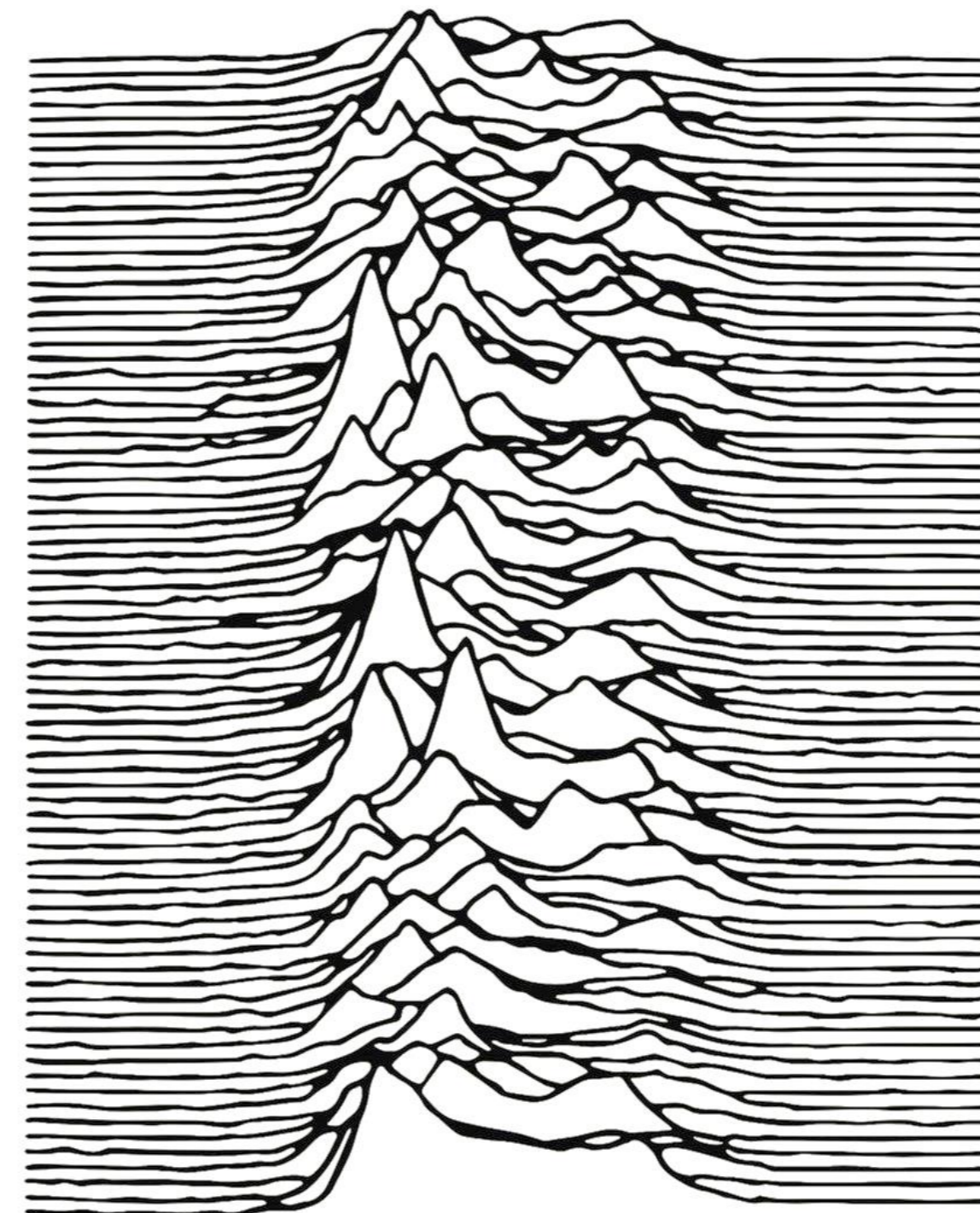


# Introducción



## Outline

- ❖ Signals
- ❖ Reminder – Fourier Transform
- ❖ Aliasing
- ❖ Frequency leakage
- ❖ Cross-correlation
- ❖ Random signals
- ❖ Filtering
- ❖ Missing data
- ❖ Power-spectral density
- ❖ Time-frequency domain





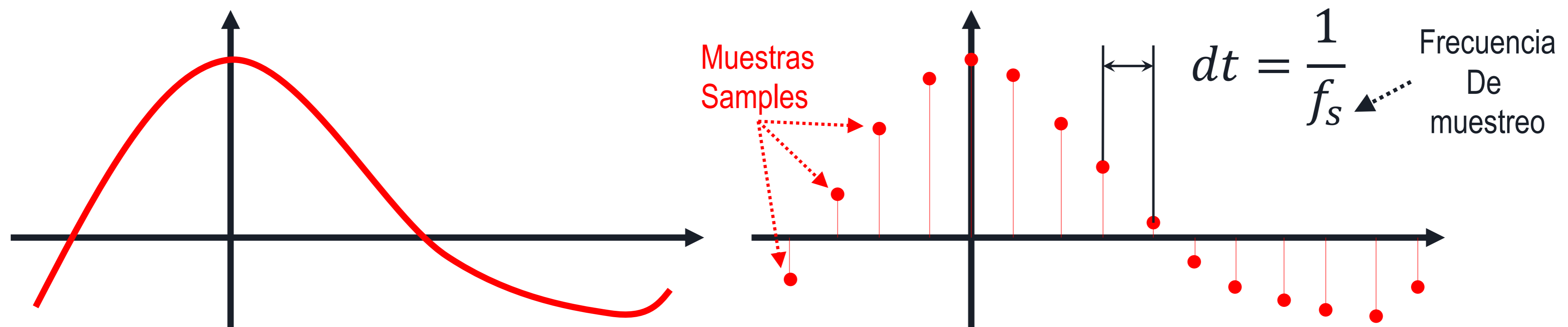
# Señales.



# Señales

## Algunas definiciones básicas

- ❑ Una **señal** es una función que contiene información acerca del comportamiento de un sistema o los atributos de algún fenómeno.
- ❑ **El procesamiento de señales** es la actividad que opera sobre una señal de entrada para producir una señal de salida.
- ❑ Las señales se pueden clasificar en dos grupos: **señales continuas en el tiempo** y **señales discretas en el tiempo**.





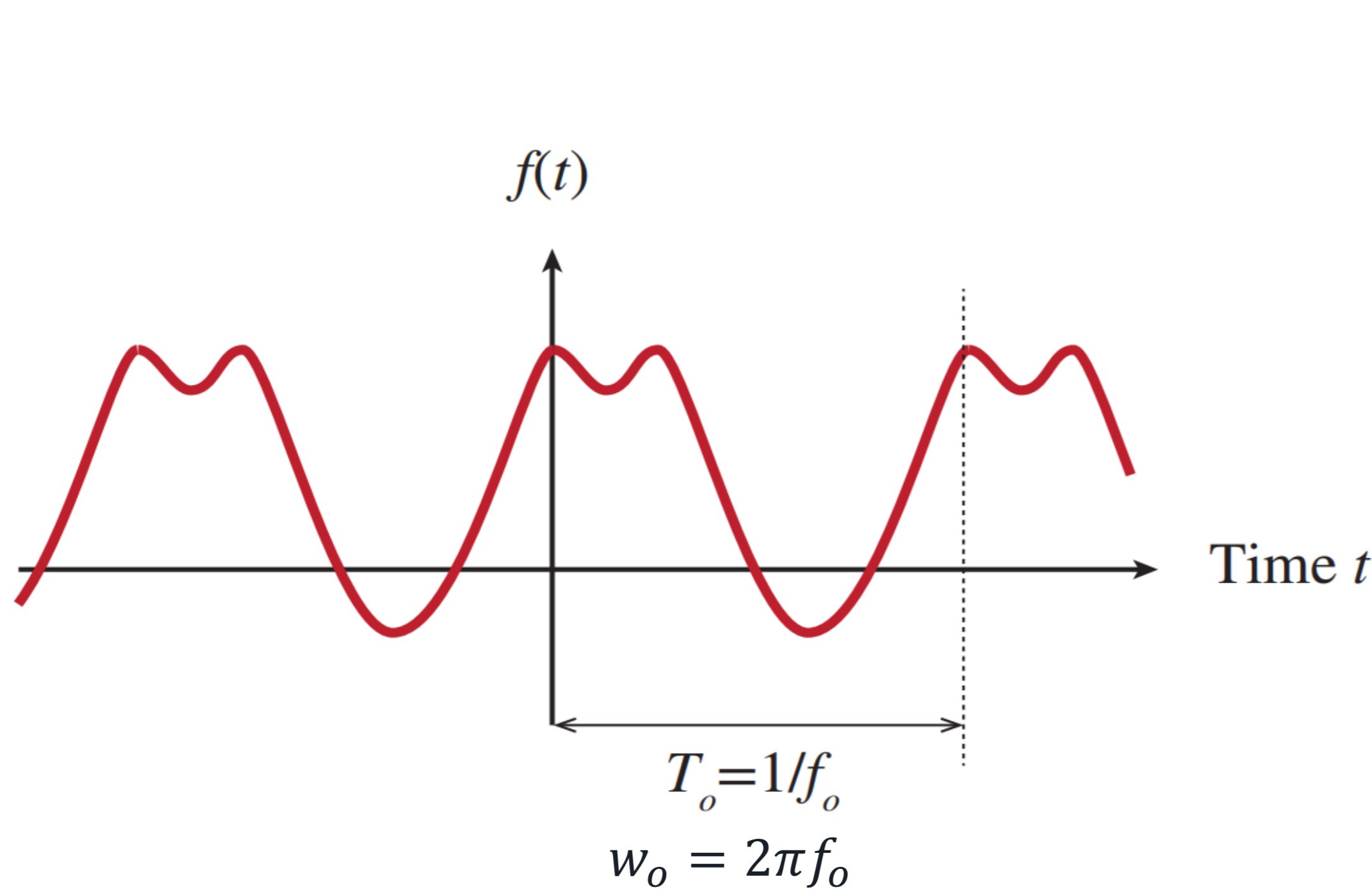
Reminder – Fourier Transform.



# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

## Fourier Transform - Fundamentals

Una señal periódica  $x(t)$  con período  $T_o$  es aquella que se repite cada  $T_o$  segundos. La serie de Fourier (Fourier series FS) es una descomposición de una señal periódica en una combinación lineal de funciones seno y coseno. Las frecuencias de estas funciones son múltiplos de la frecuencia fundamental de la señal  $f_o = 1/T_o$ .



$$\omega_n = 2\pi n f_o$$
$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) dt$$

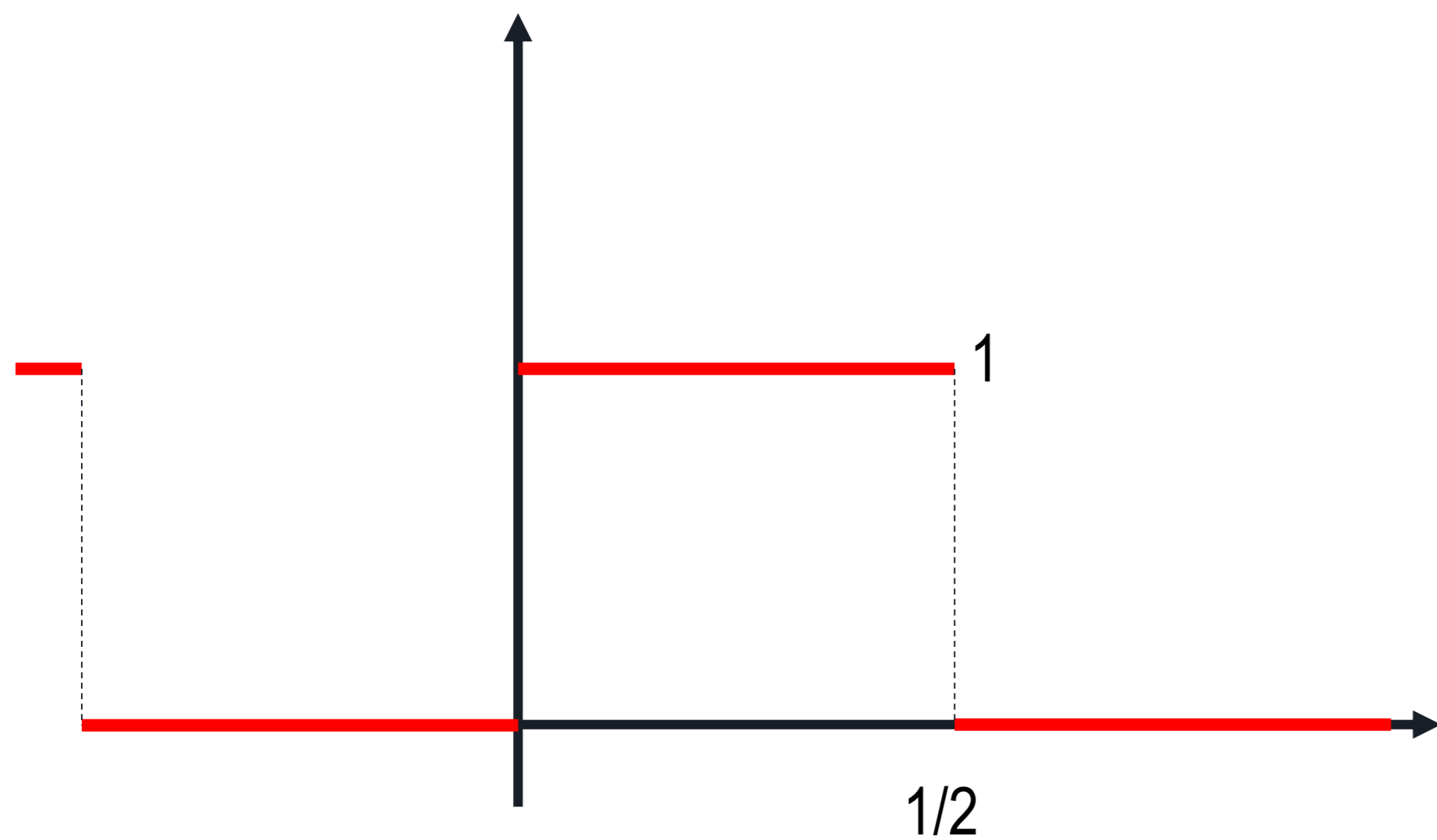
$$a_n = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \cos(nw_o t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \sin(nw_o t) dt$$



# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

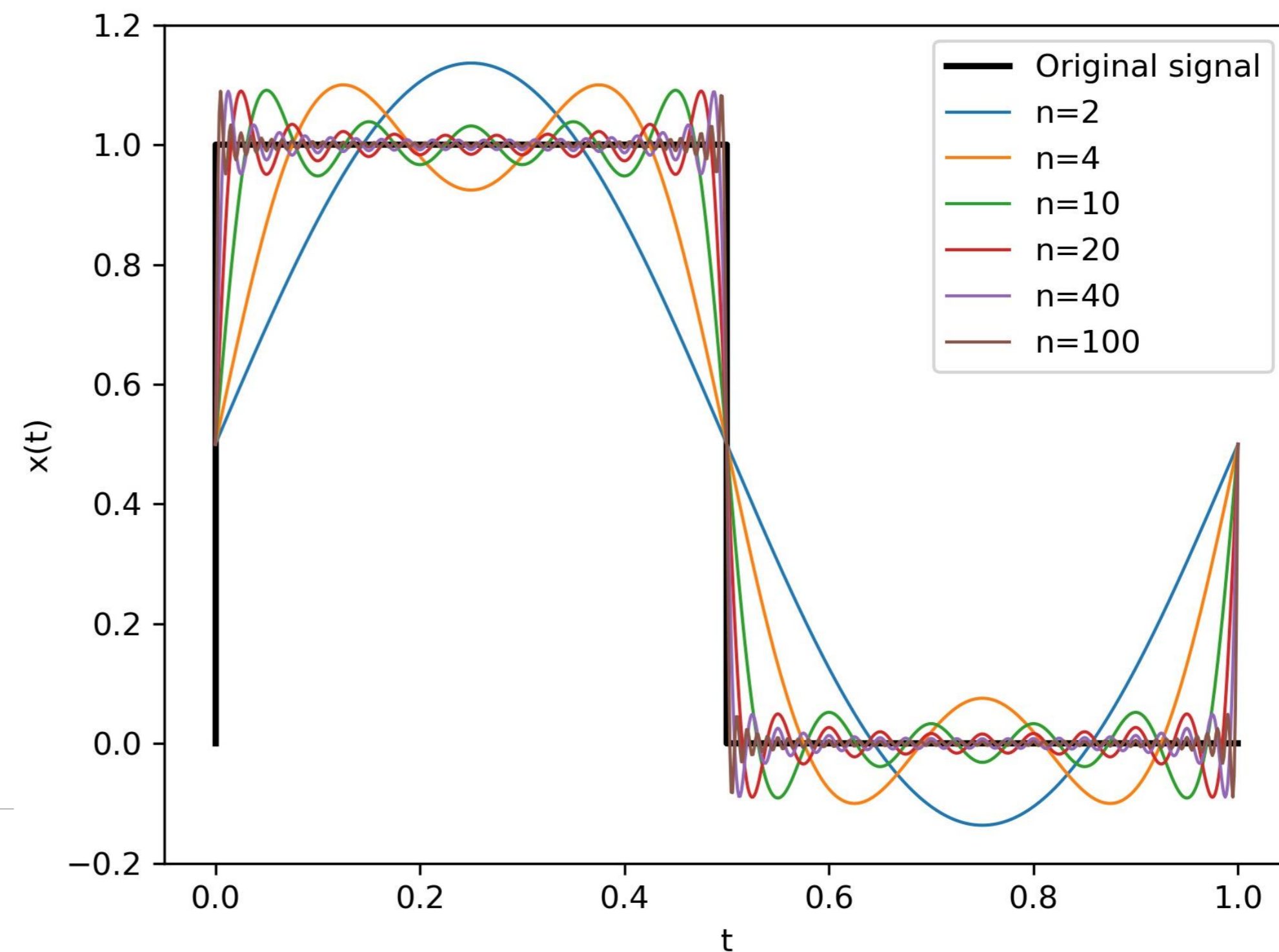
Ejemplo 1: señal de onda cuadrada



$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt = 1/2$$

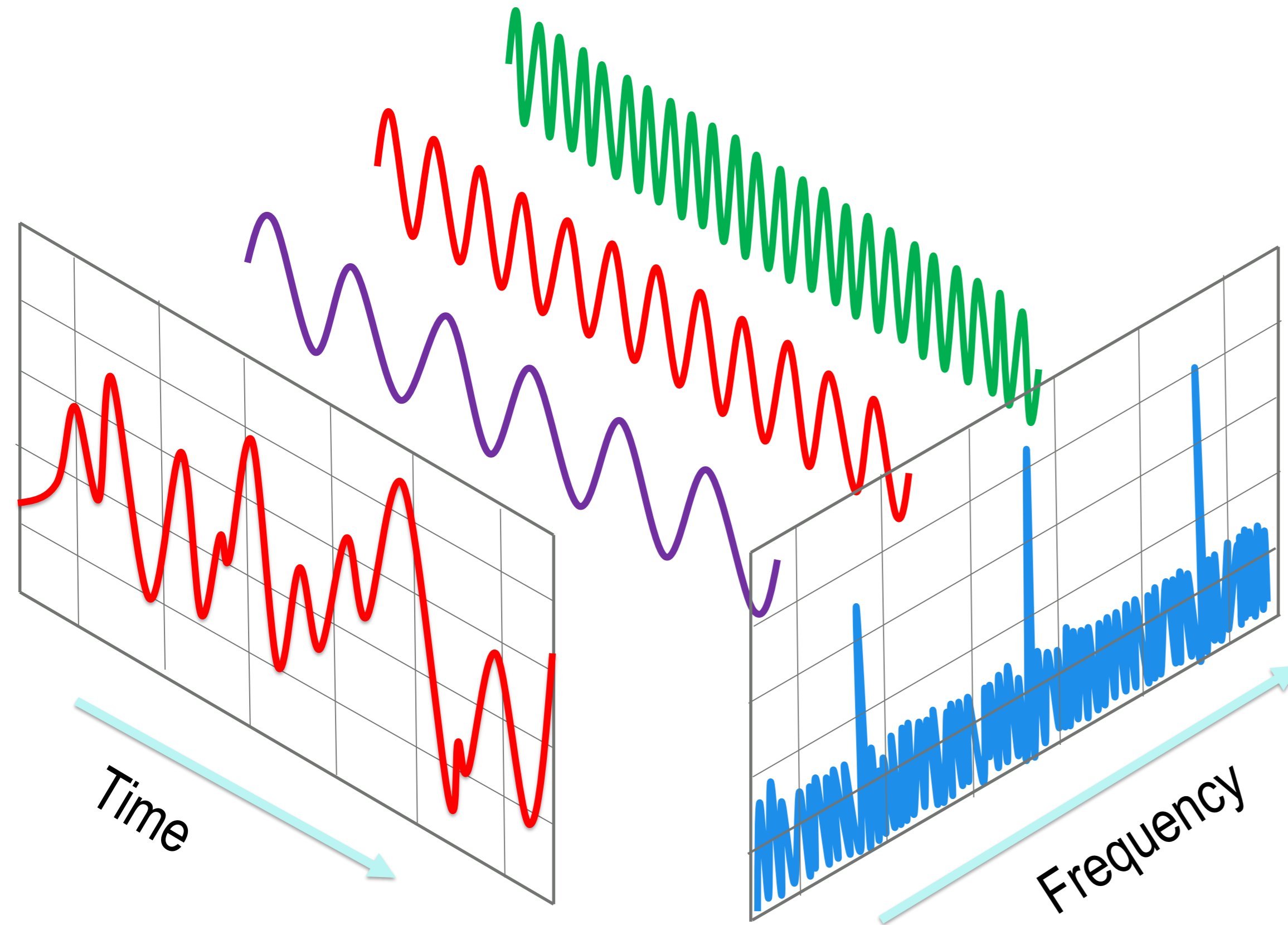
$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$



# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Series de Fourier complejas – Empleando la formula de Euler  $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

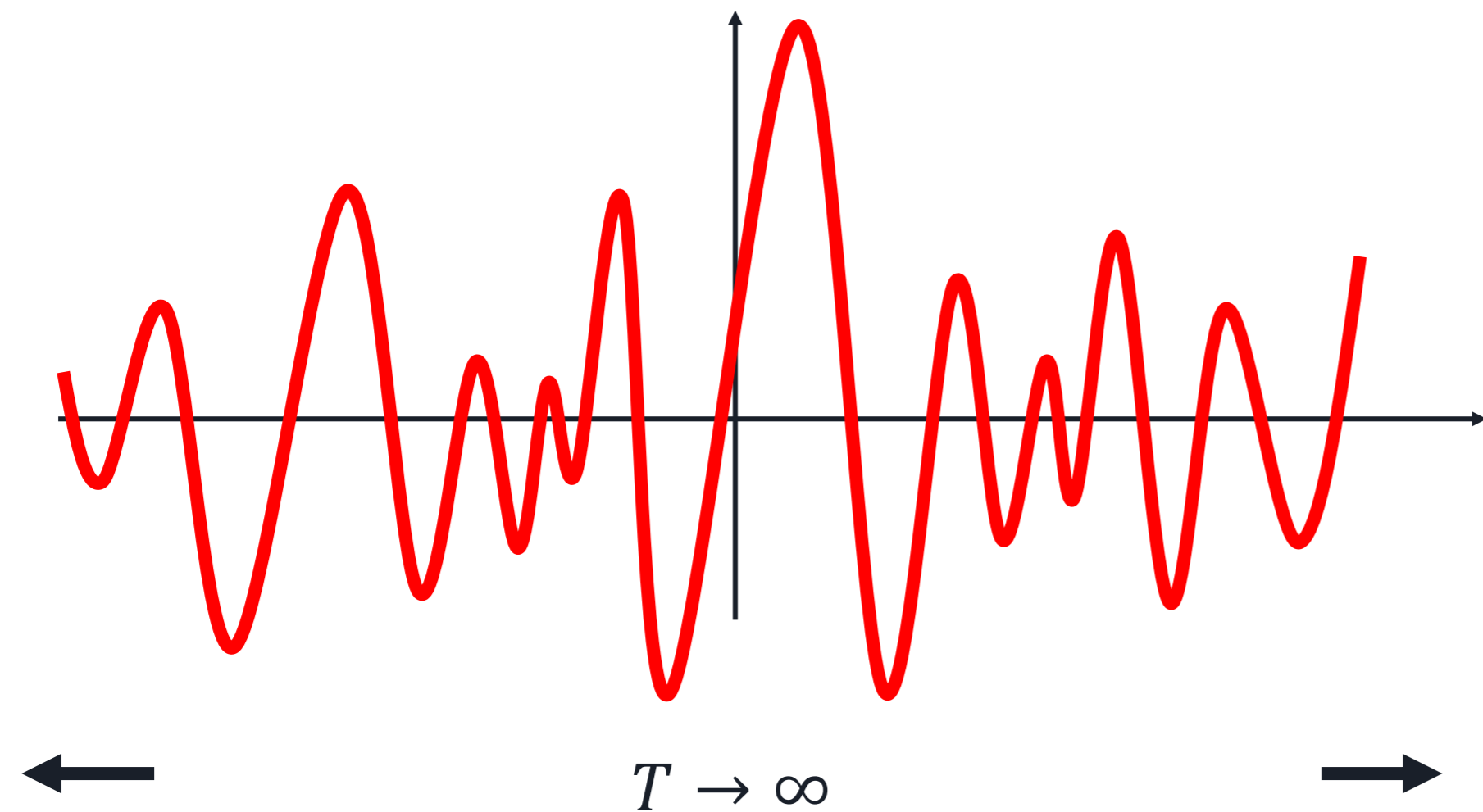


$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{in\omega_0 t}$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Extensión para señales no periódicas



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i2\pi n f_0 t}$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

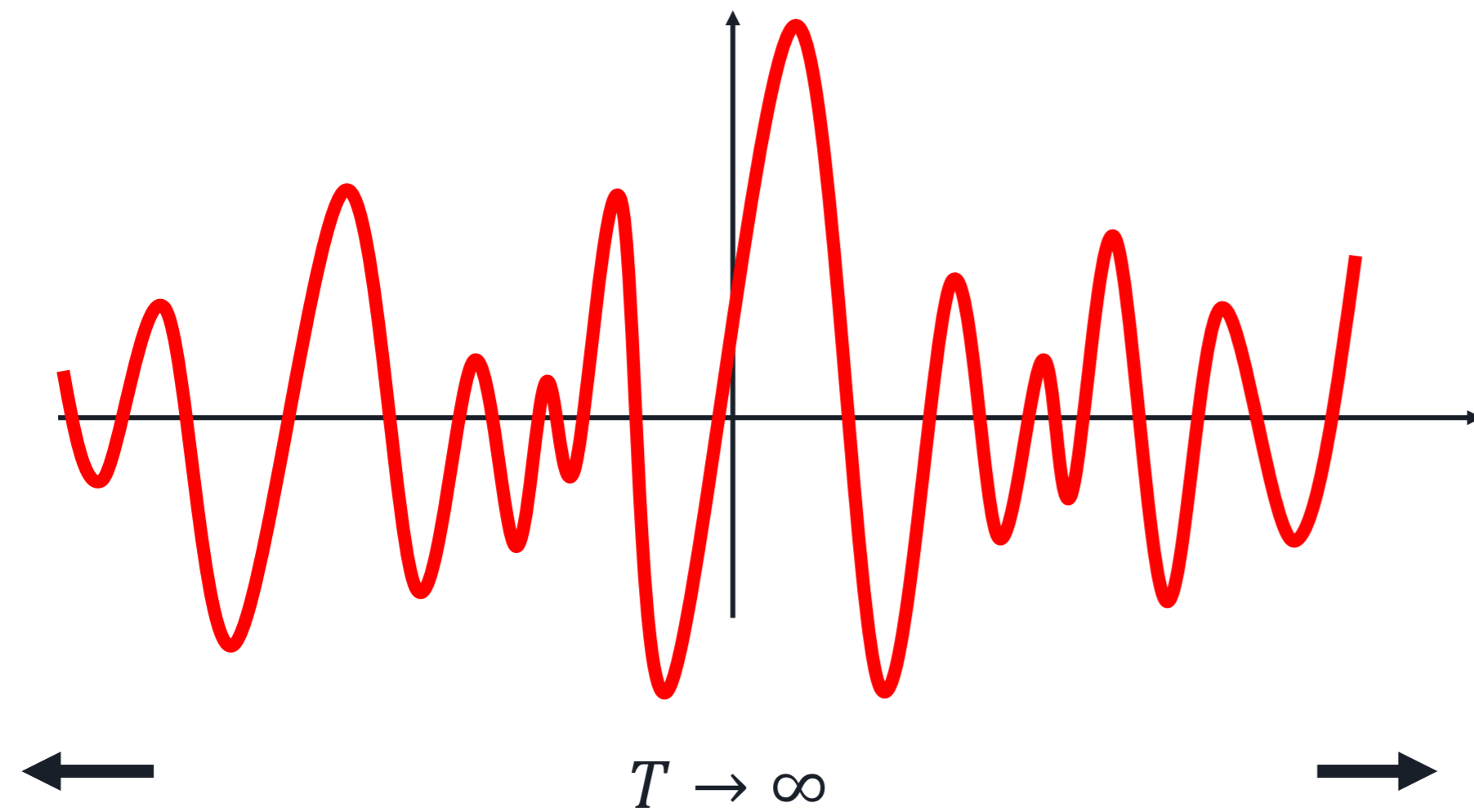
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\xi) e^{i2\pi n f_0 (t-\xi)} d\xi$$

$T \rightarrow \infty \quad \frac{1}{T} \rightarrow df$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{i2\pi f(t-\tau)} d\tau df$$

# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Extensión para señales no periódicas



**Fourier Transform:**

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

**Inverse FT:**

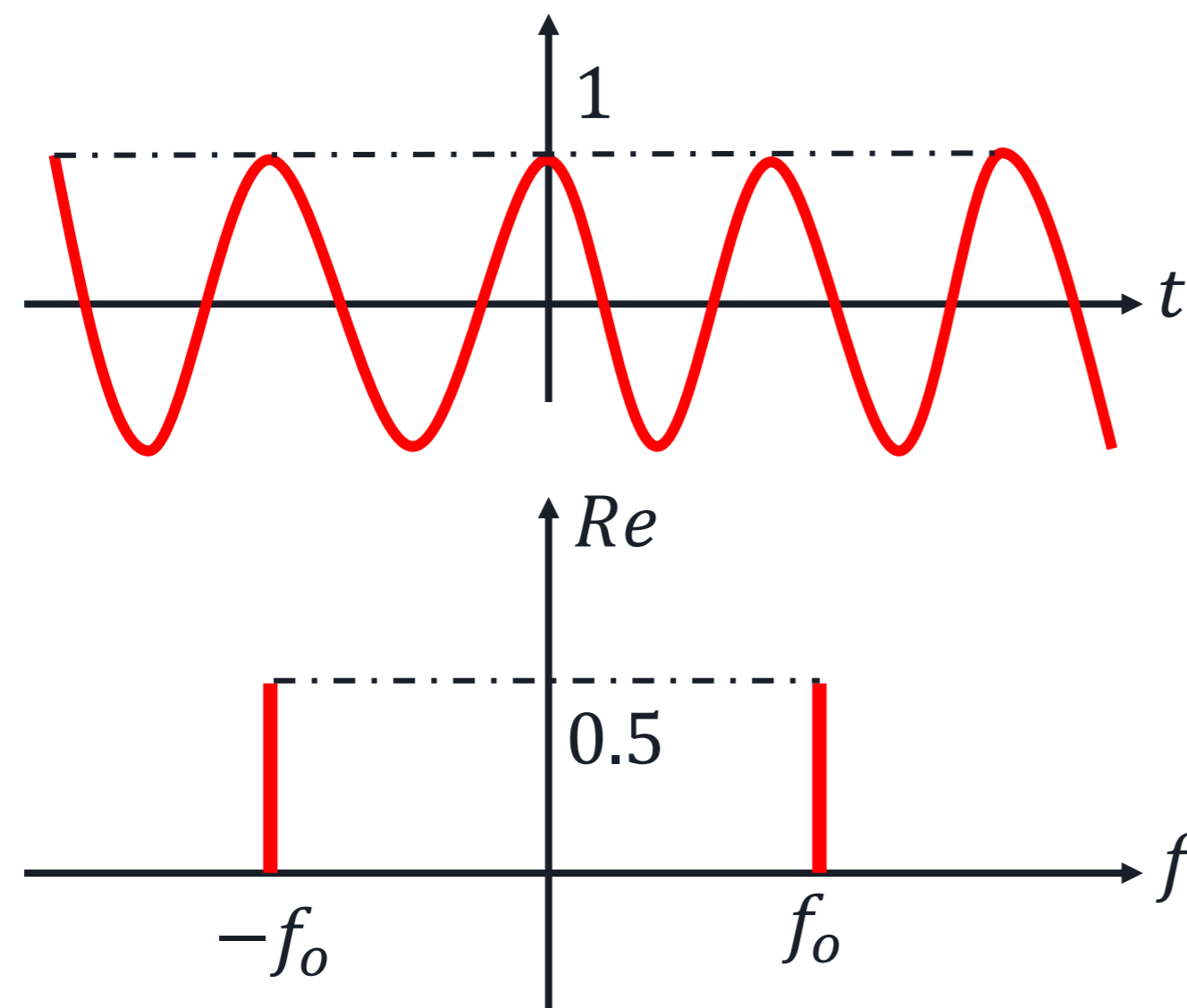
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f)e^{i2\pi ft} df$$

# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Algunos casos comunes:

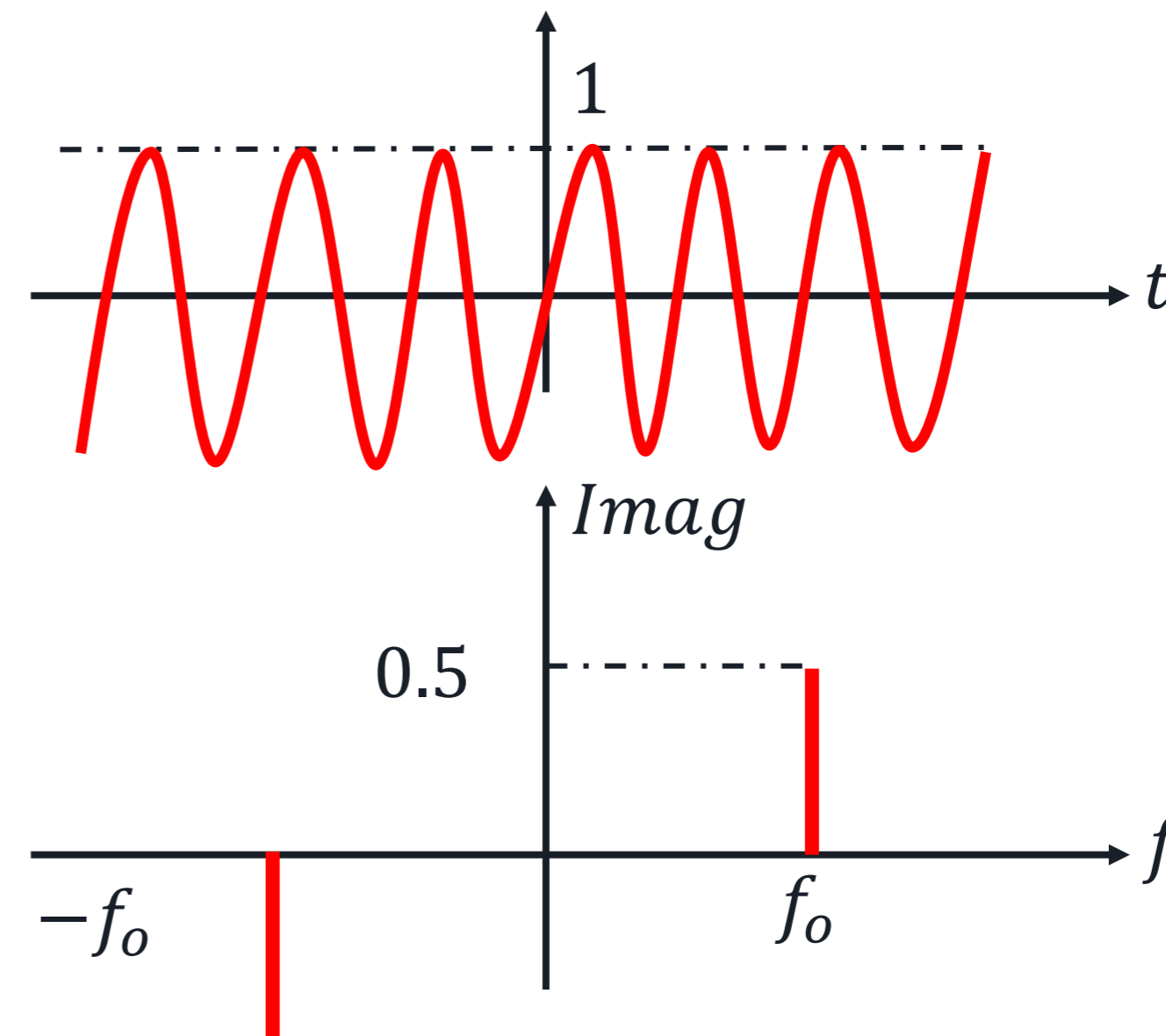
- Función coseno:

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{1}{2} [-\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



- Función seno:

$$\mathcal{F}(\sin(2\pi f_0 t)) = \frac{i}{2} [-\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



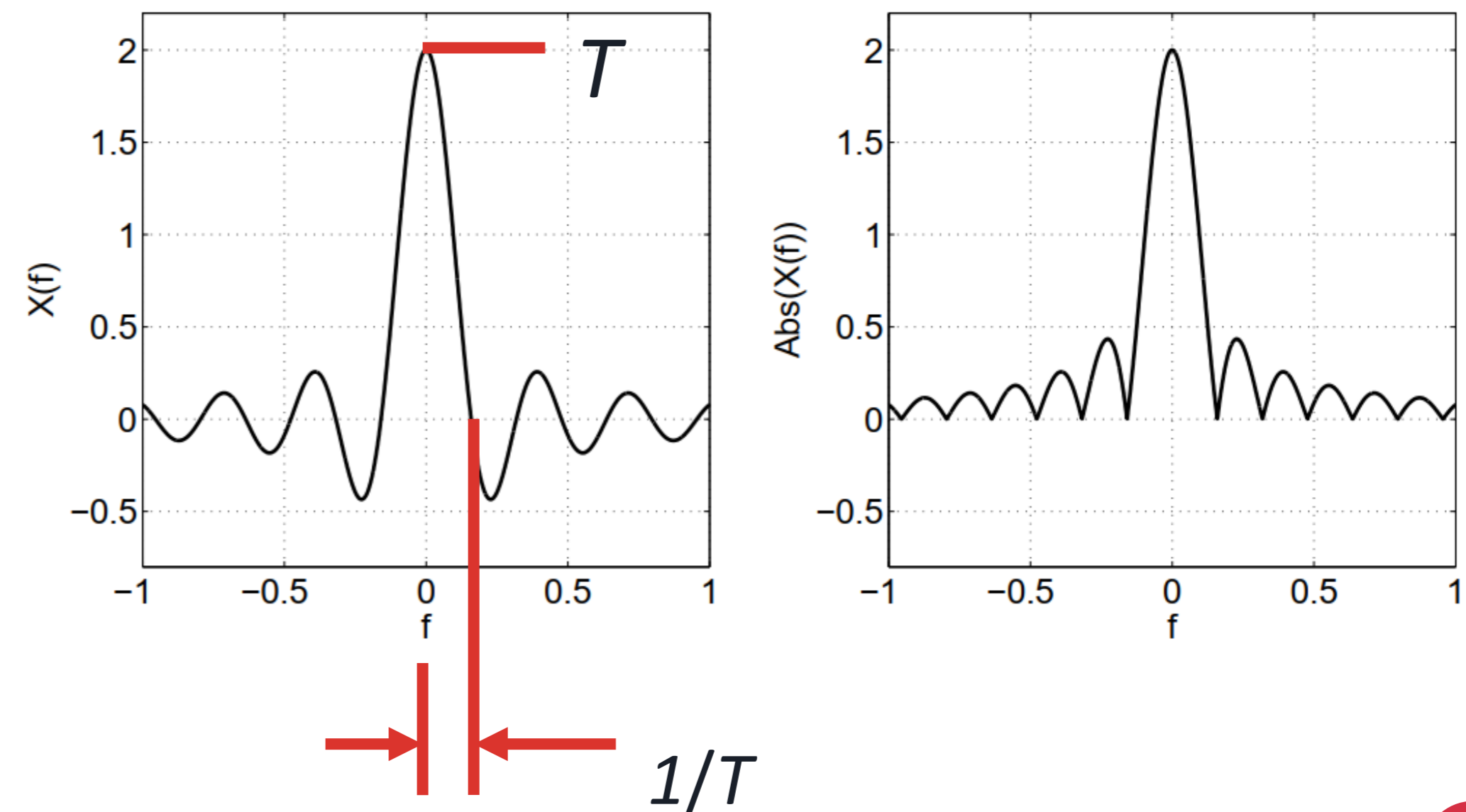
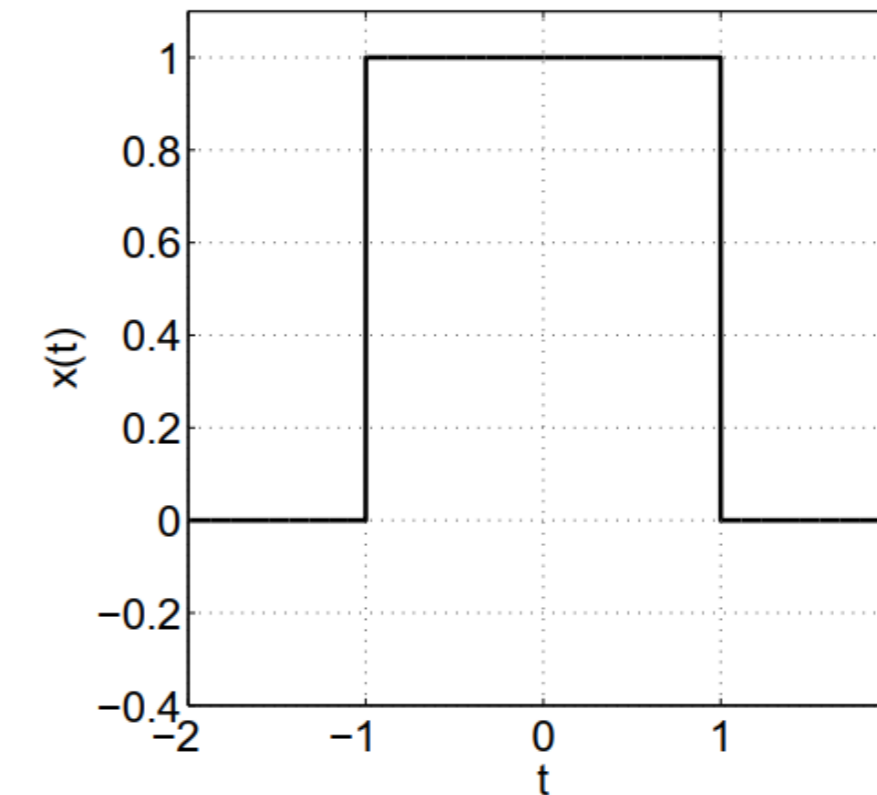
# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Algunos casos comunes:

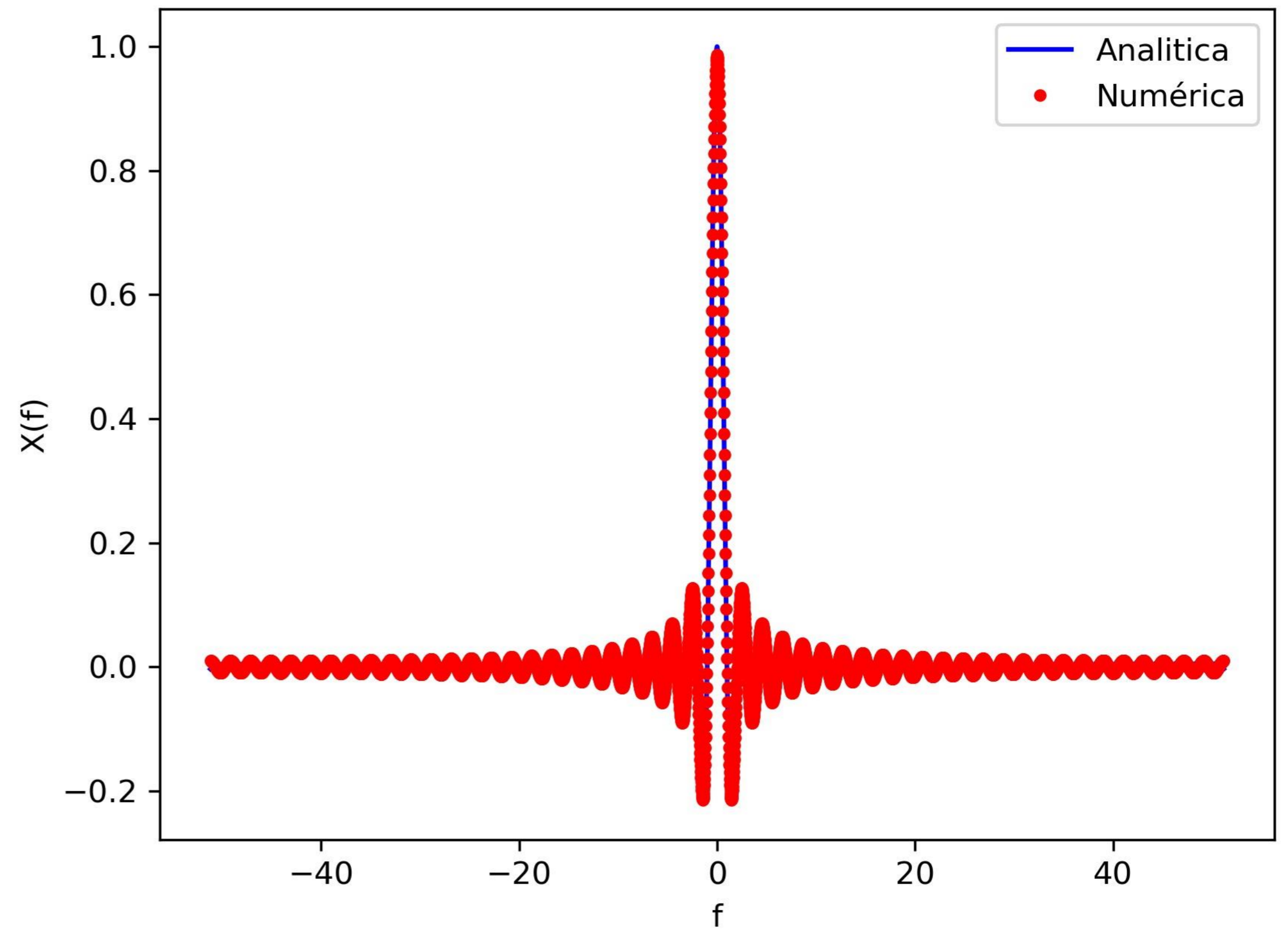
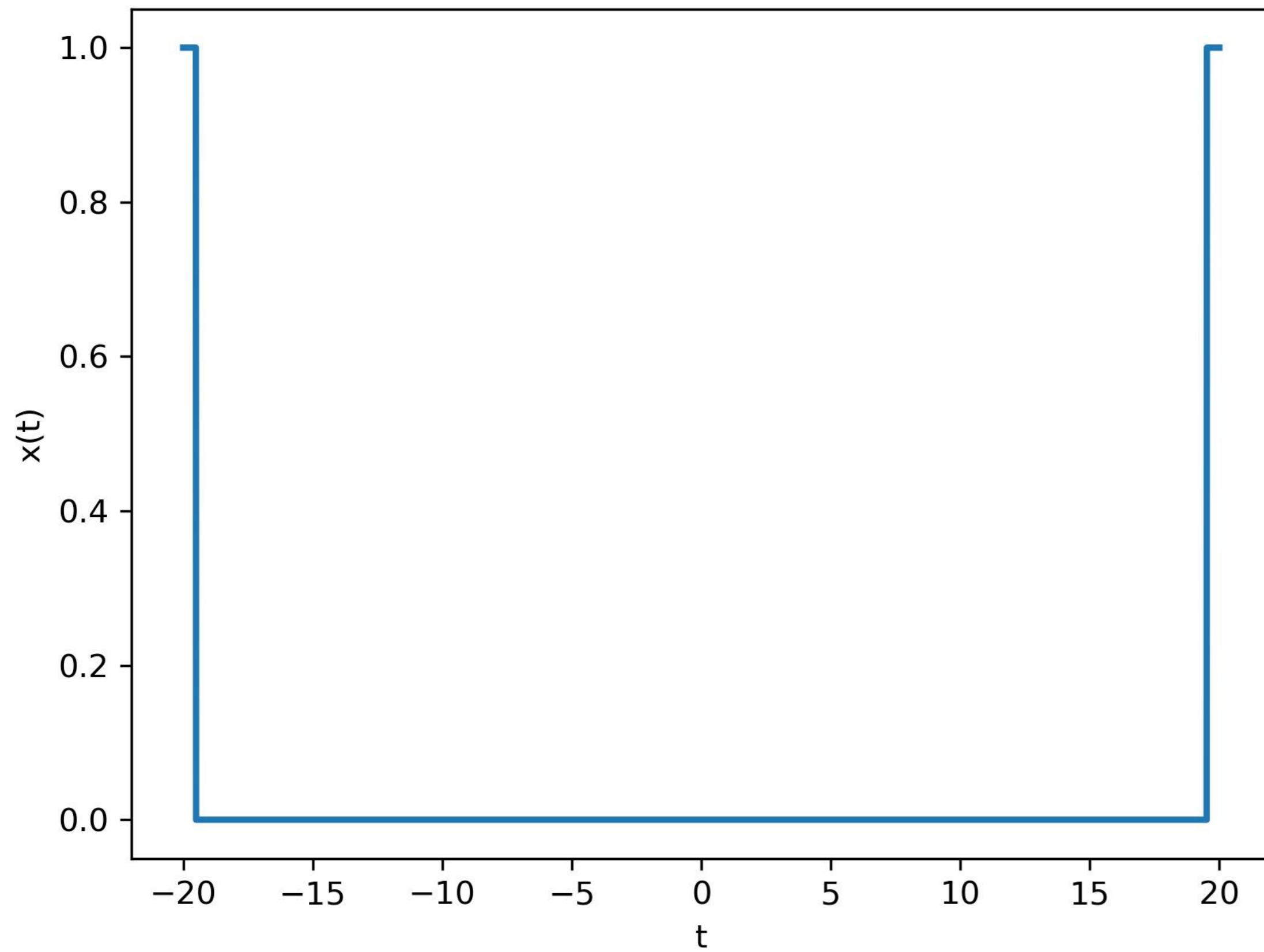
- Box function:

$$b_T(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_T(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi ft} dt = \frac{e^{-i2\pi fT} - e^{i2\pi fT}}{i2\pi f} = \\ &= T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \operatorname{sinc}(\pi fT) \end{aligned}$$



# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier



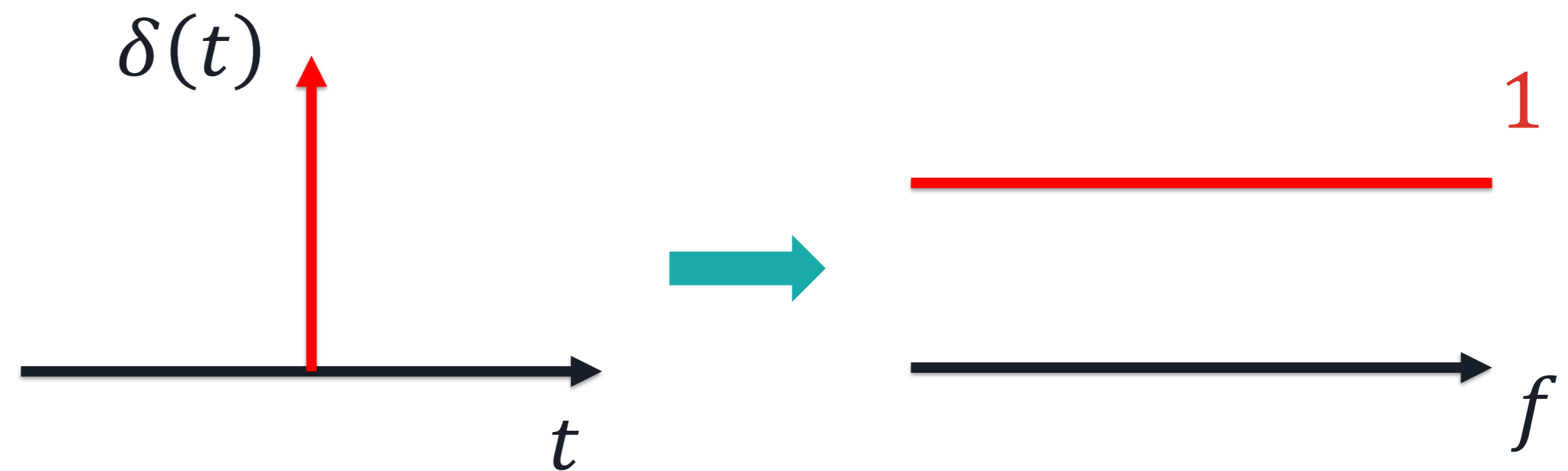
# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Algunos casos comunes:

- Función delta de Dirac:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

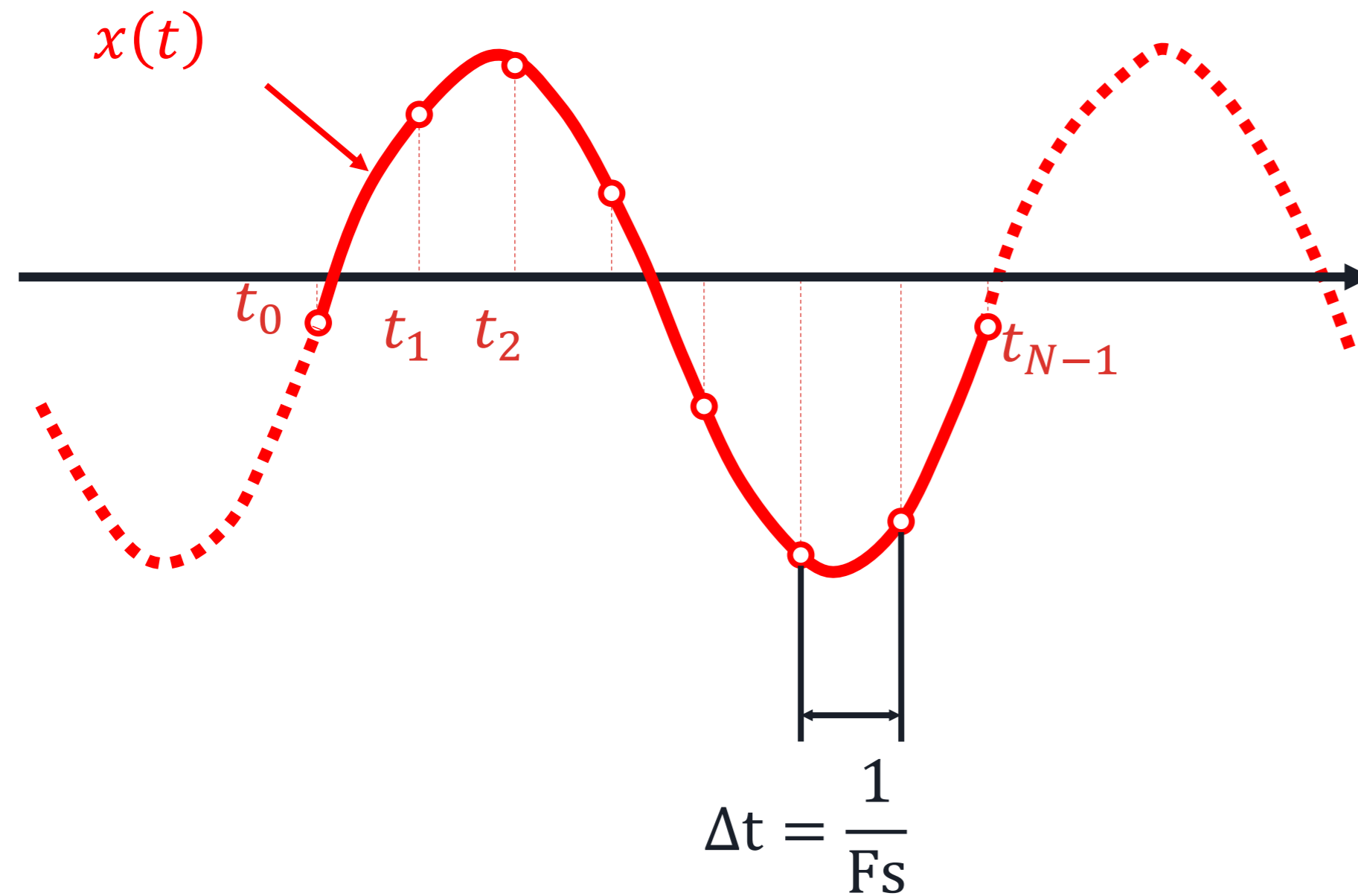
$$\hat{\delta}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i2\pi ft} dt = 1$$





# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Transformada de Fourier discreta:



Discrete Fourier Transform (DFT)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = f(t_0)e^{-i\omega t_0} + \dots + f(t_{N-1})e^{-i\omega t_{N-1}}$$

$$F(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k)e^{-i\omega(t_k)} = \sum_{k=0}^{N-1} x(t_0 + k\Delta t)e^{-i\omega(t_0 + k\Delta t)}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{i2\pi}{N}kn} \quad x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{i2\pi}{N}kn} \quad n = 0, \dots, N - 1$$

Fast Fourier Transform (FFT)

El algoritmo FFT se emplea para obtener la DFT mediante la factorización de la matriz DFT en el producto de factores de pequeñas dimensiones (sparse factors).

Coste computacional:  $O(N^2) \rightarrow O(N \log N)$

Para mayor información:

Cetin, A. E. (2012). Lecture notes on discrete-time signal processing.

<http://kilyos.ee.bilkent.edu.tr/~ee424/Lecture%20Slides/Lecture%20Notes/Chapter1.pdf>

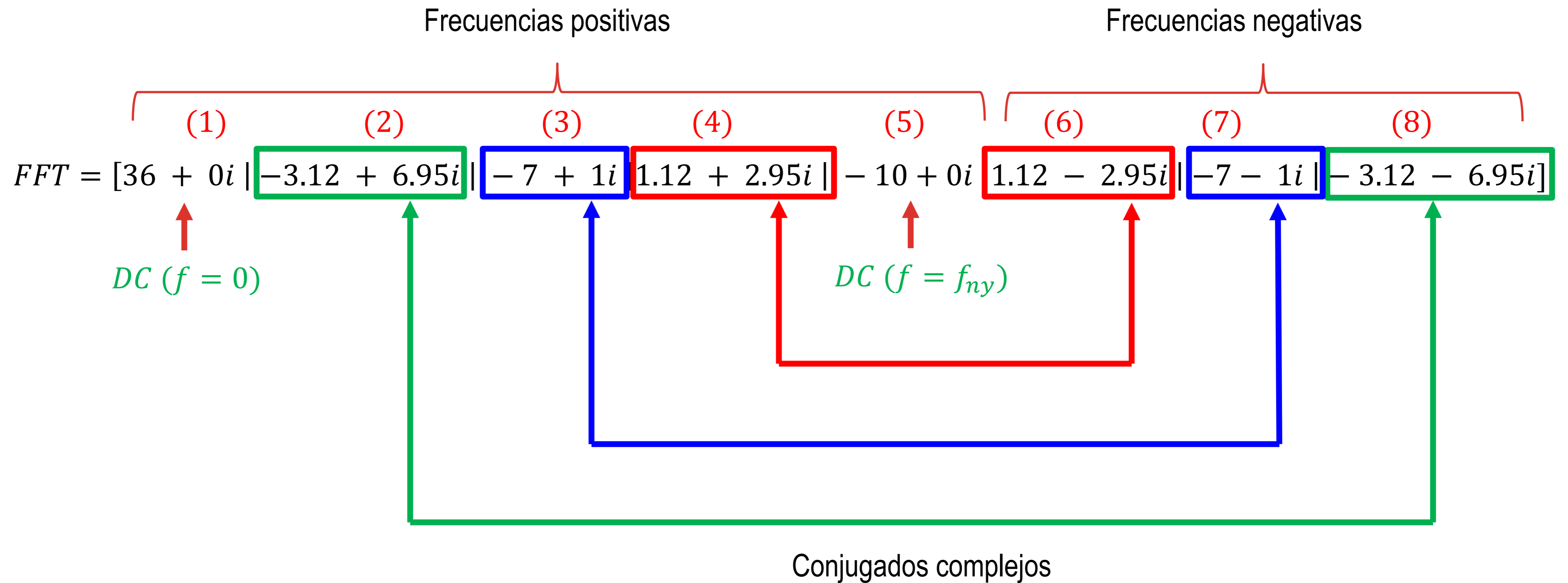


# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Algoritmo FFT

$$x = [1|3|4|5|2|8|6|7]$$

$$FFT = fft(x);$$



# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

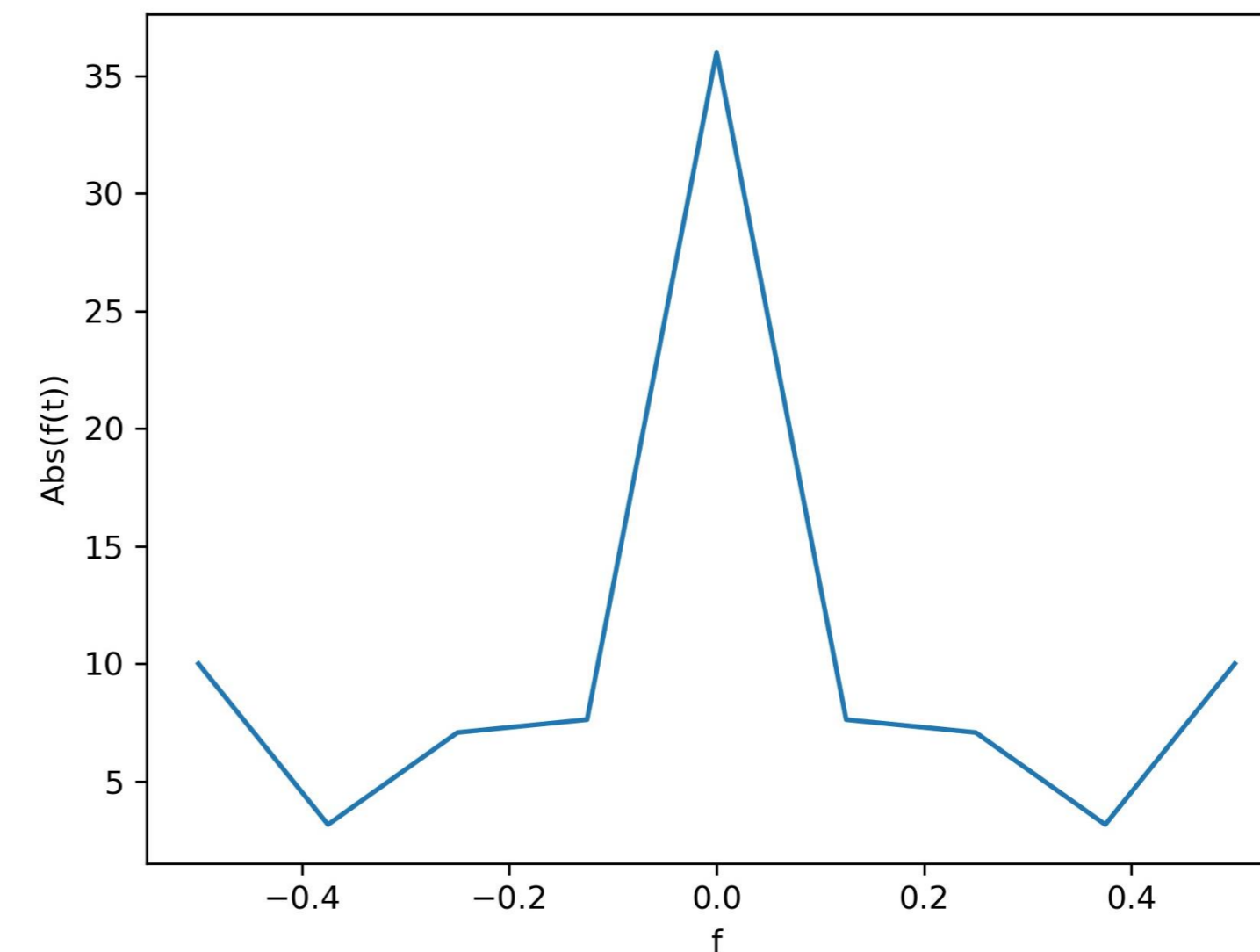
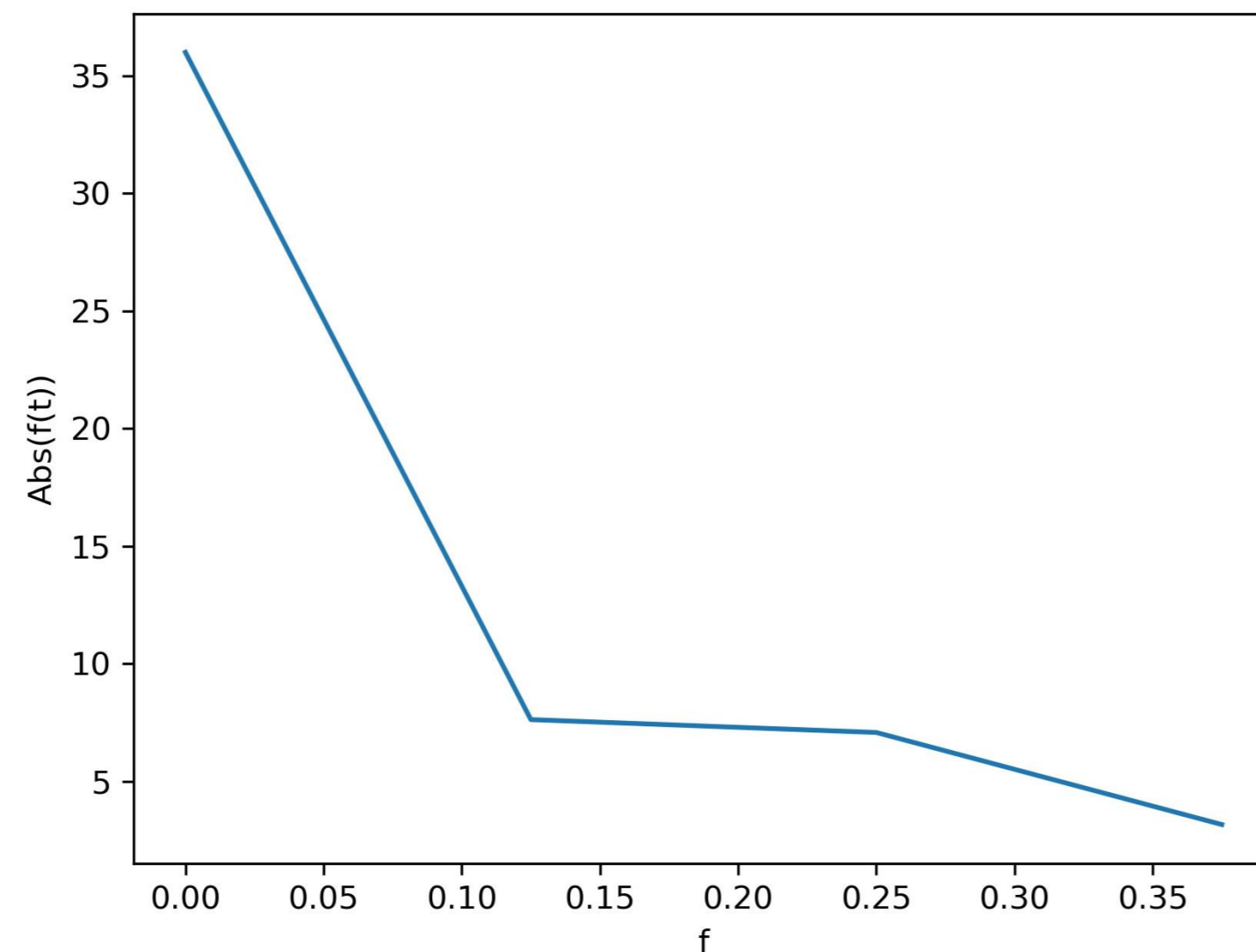
FFT en Python

Espectro de una hoja

```
x = np.array([1,3,4,5,2,8,6,7])  
N = len(x)  
Nmed = int(N/2)  
FFTr = fft(x)  
Mod = np.abs(FFTr)  
Po = Mod[0:Nmed]  
f = np.arange(0,Nmed)*(Fs/N)
```

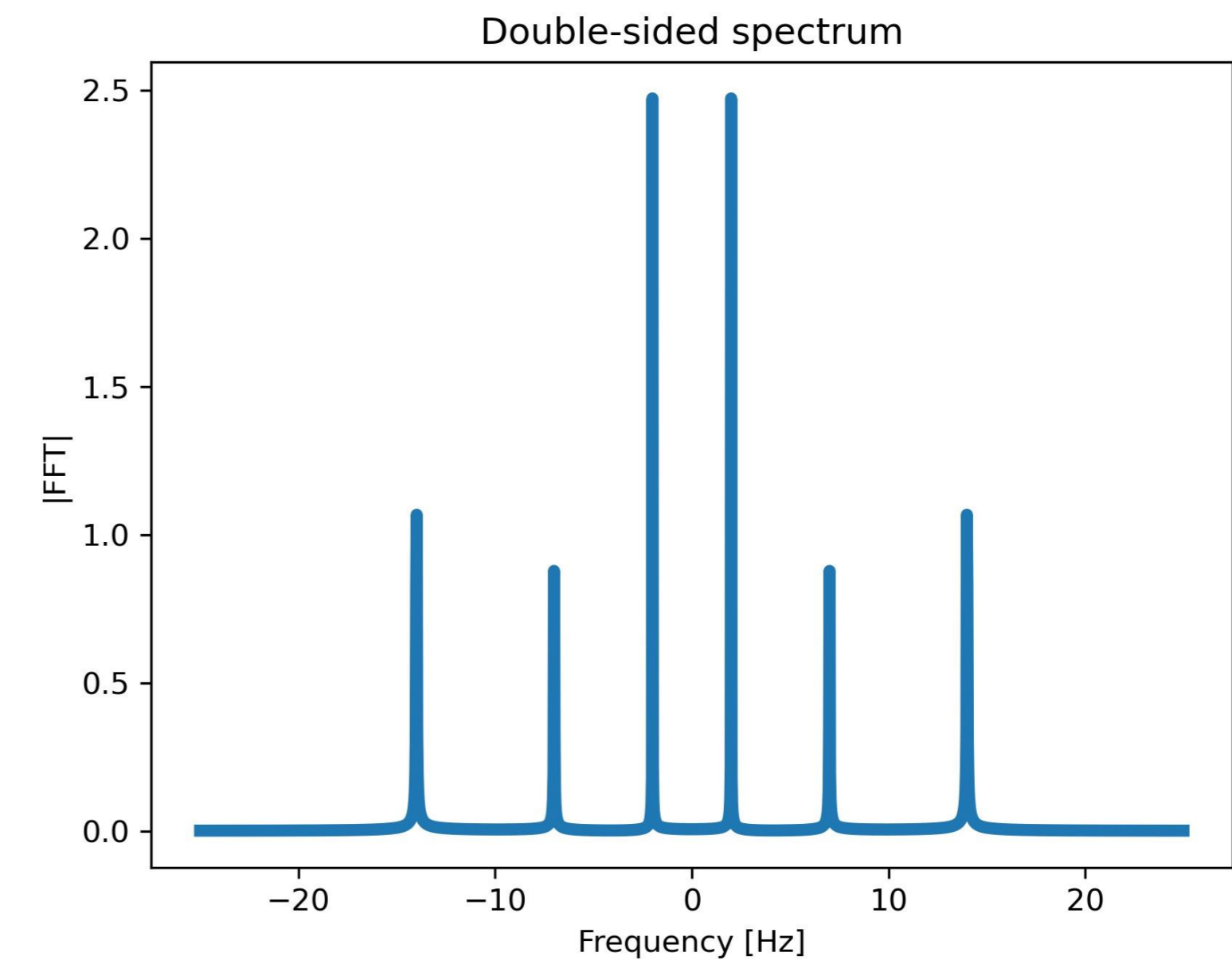
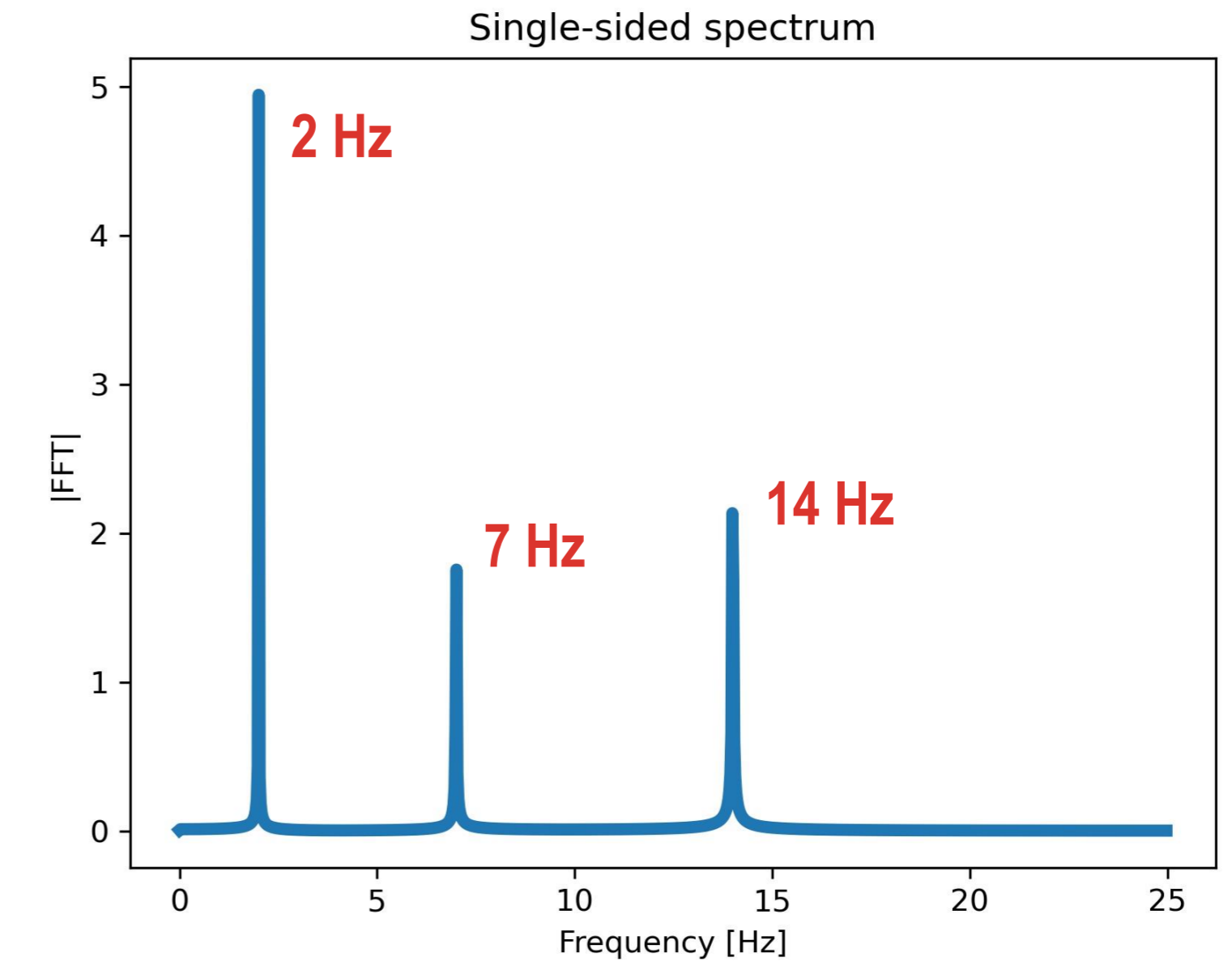
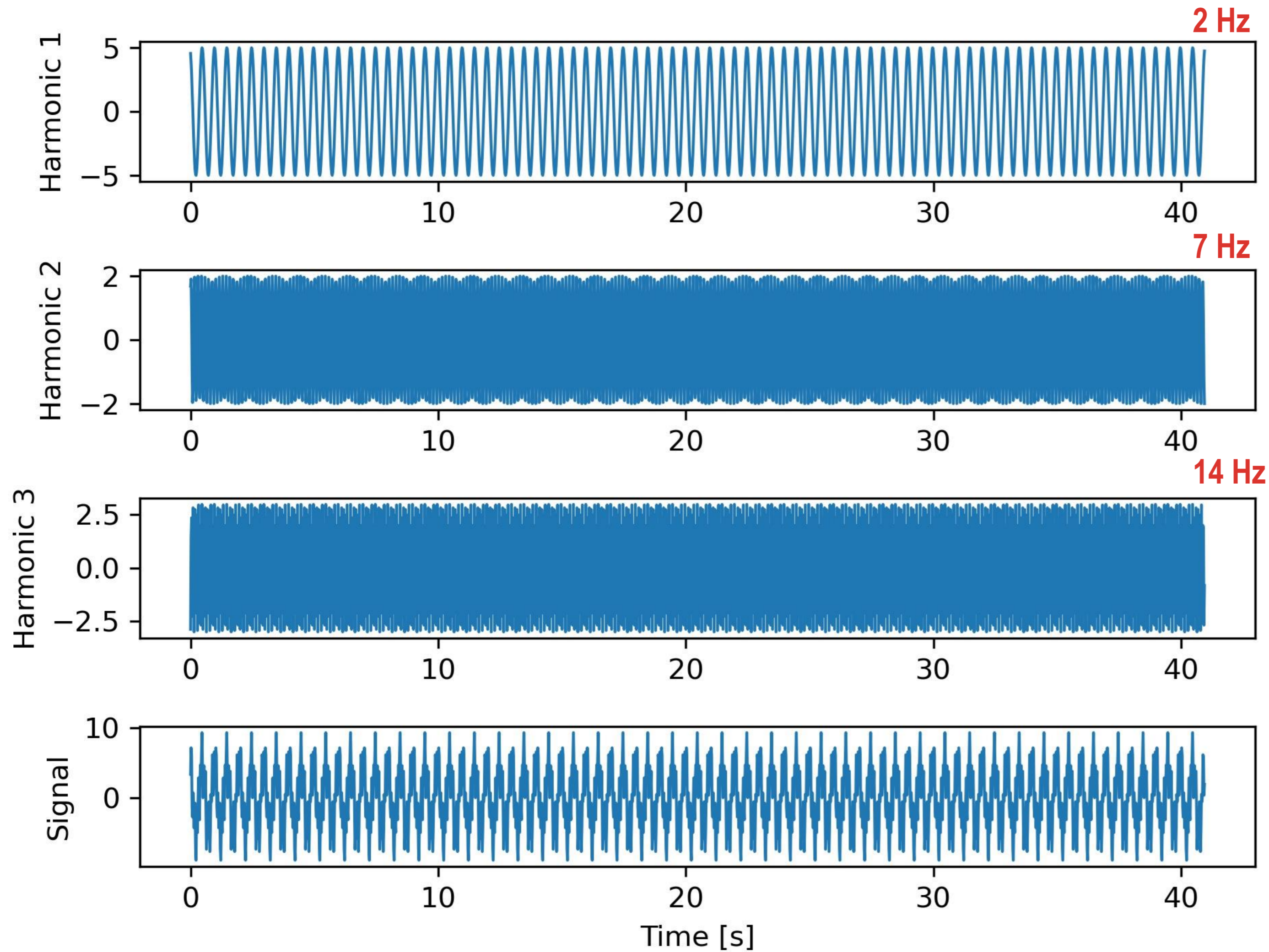
Espectro de doble hoja

```
f = np.arange(-Nmed,Nmed+1)*(Fs/N)  
Pt = np.concatenate((Mod[Nmed:],Mod[0:Nmed+1]))
```



# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

Ejemplo señales armónicas



# Señales – Recordatorio: Transformada de Fourier

## Teorema de Parseval

Si  $x[n]$  y  $v[n]$  son señales de valores reales:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]v[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{X(\Omega)}V(\Omega)d\Omega$$

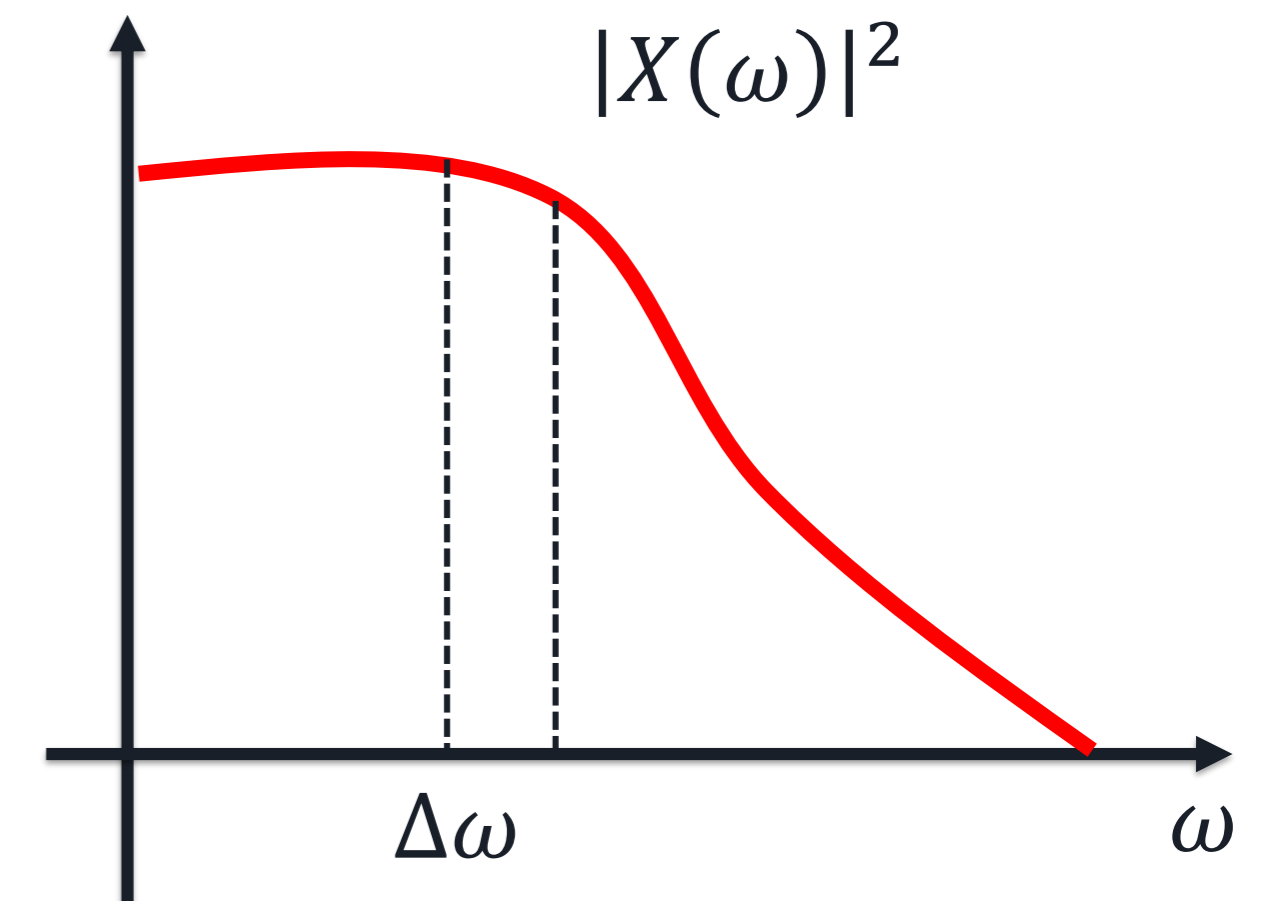
La energía de la señal se puede obtener como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

la cual puede también determinarse en el dominio de la frecuencia como:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad \text{y para una señal discreta}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} (x_n)^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$



Energy Spectral Density



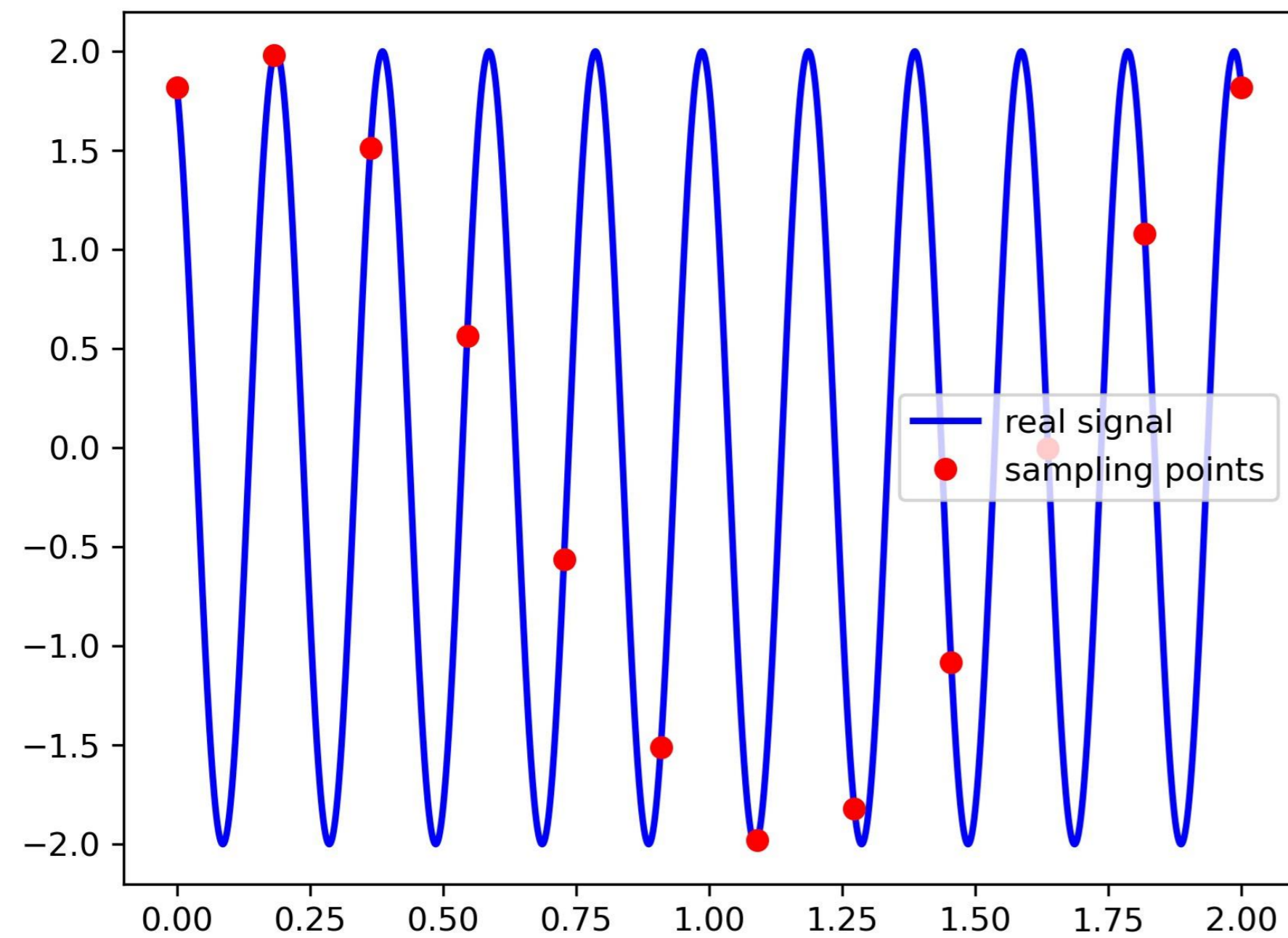


Aliasing.

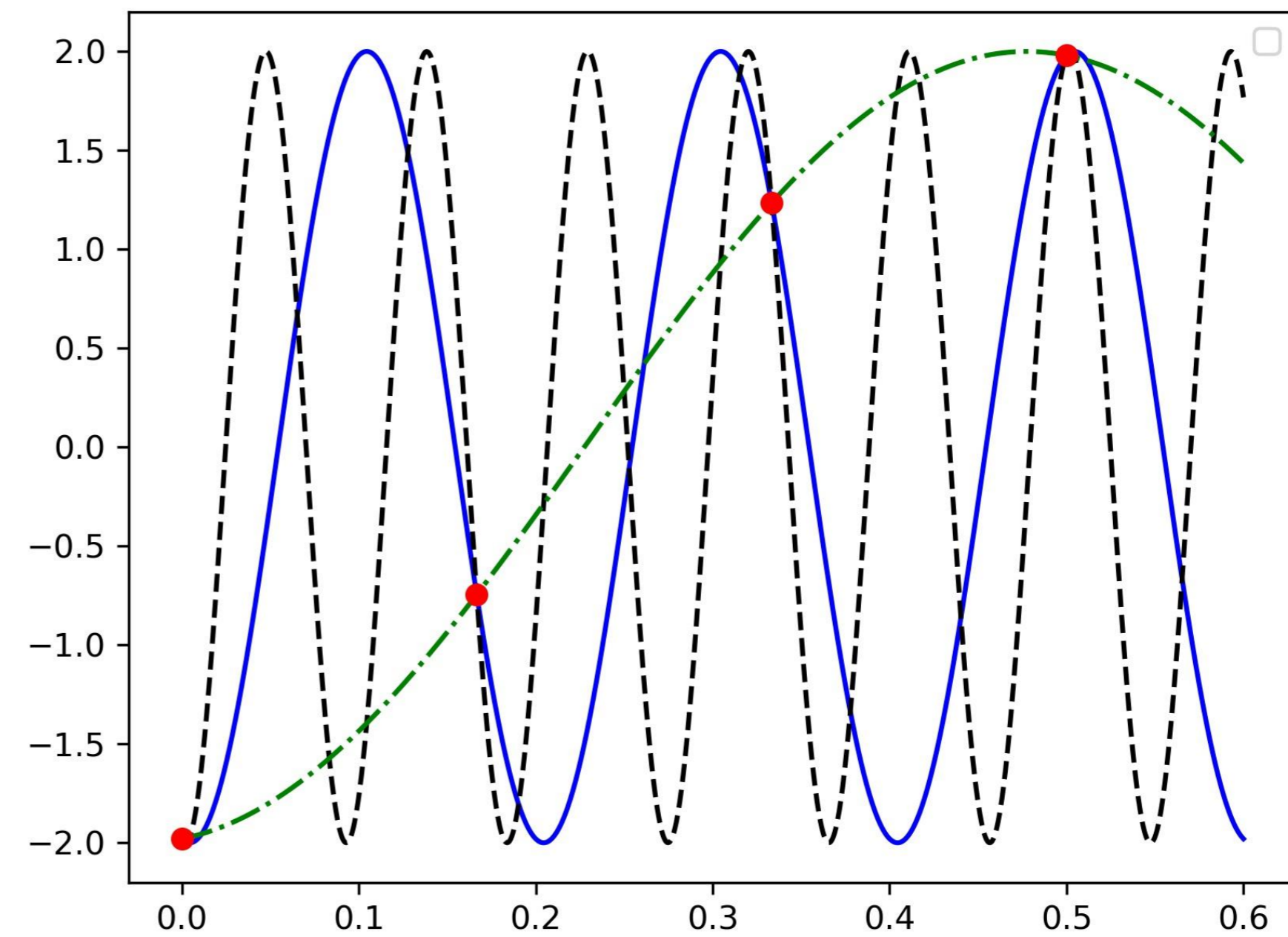


# Aliasing

El **aliasing** es un efecto que hace que diferentes señales se vuelvan indistinguibles cuando se muestrean.



[F Aliasing spline.py](#)

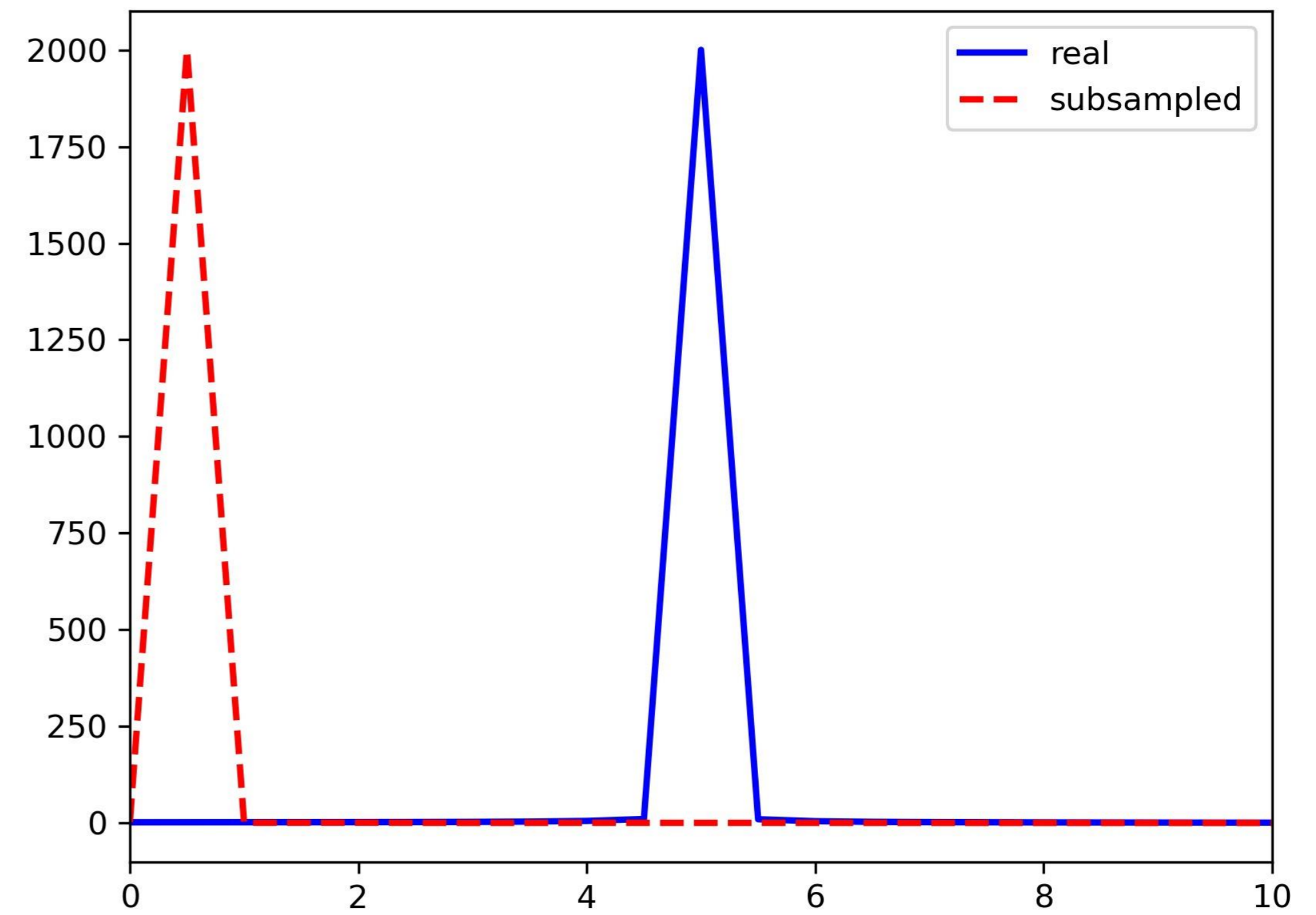
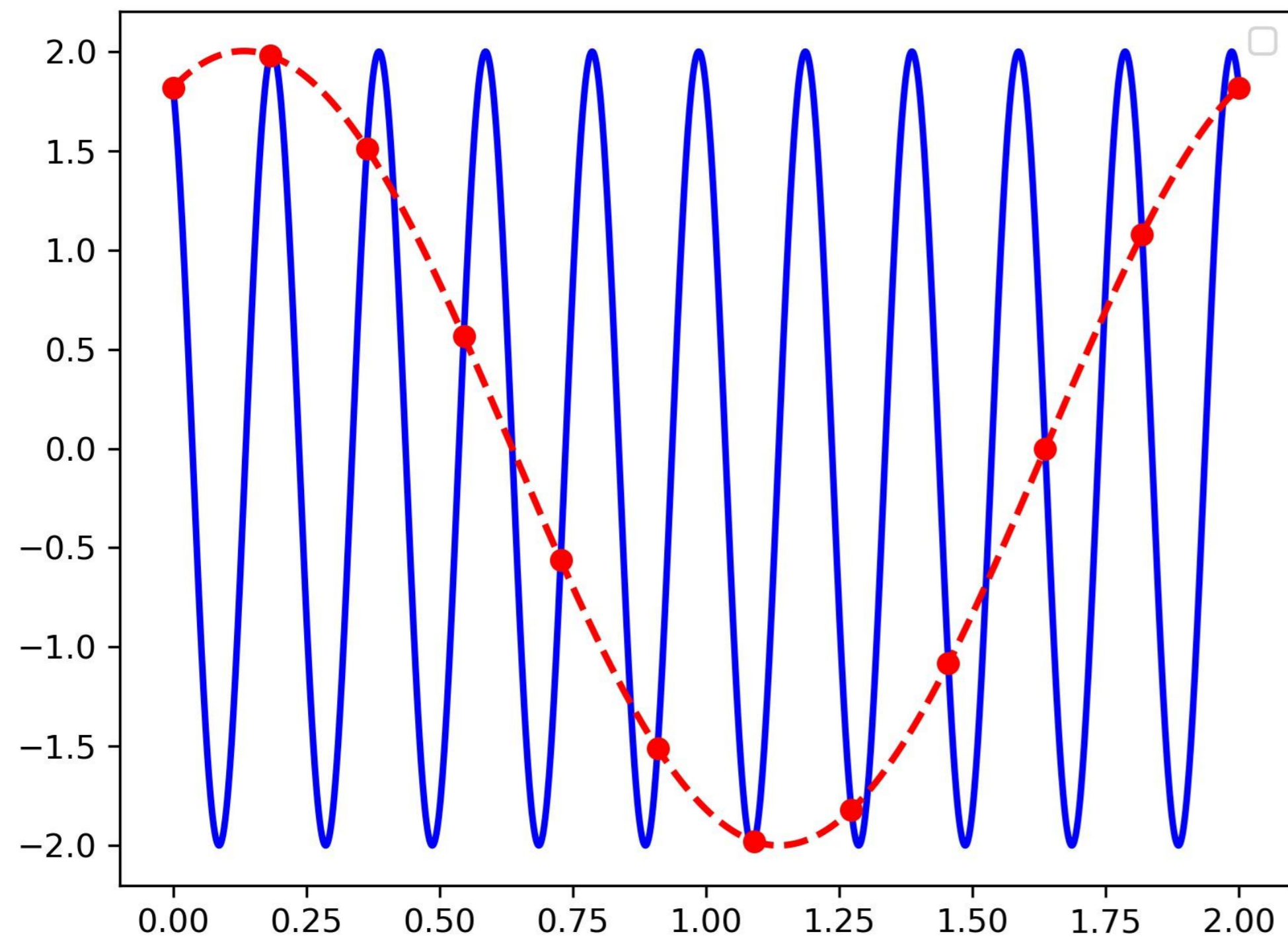


[E Aliasing.py](#)

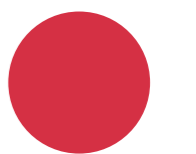


# Aliasing

El **aliasing** es un efecto que hace que diferentes señales se vuelvan indistinguibles cuando se muestrean.

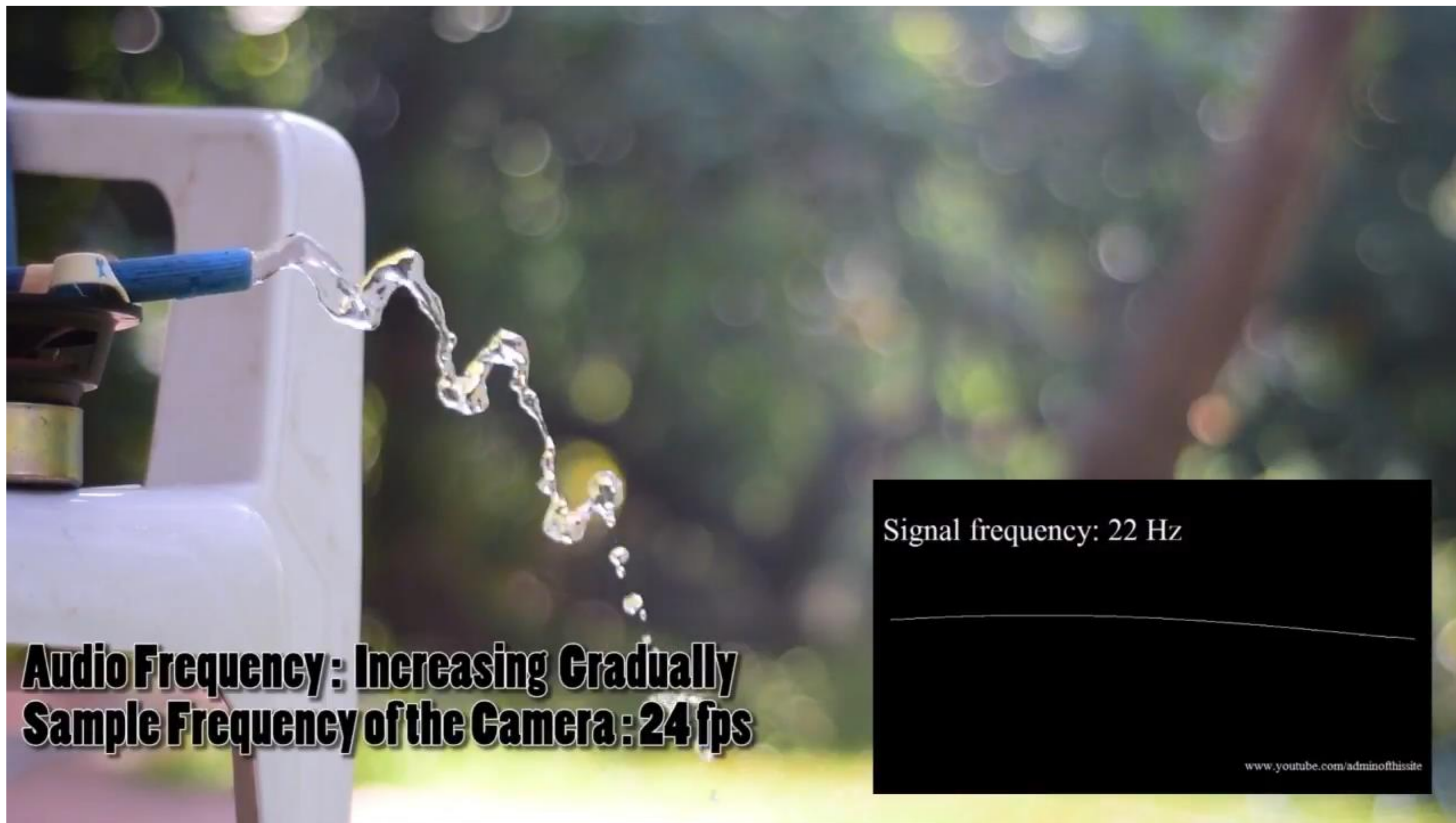


[F\\_Aliasing\\_spline.py](#)





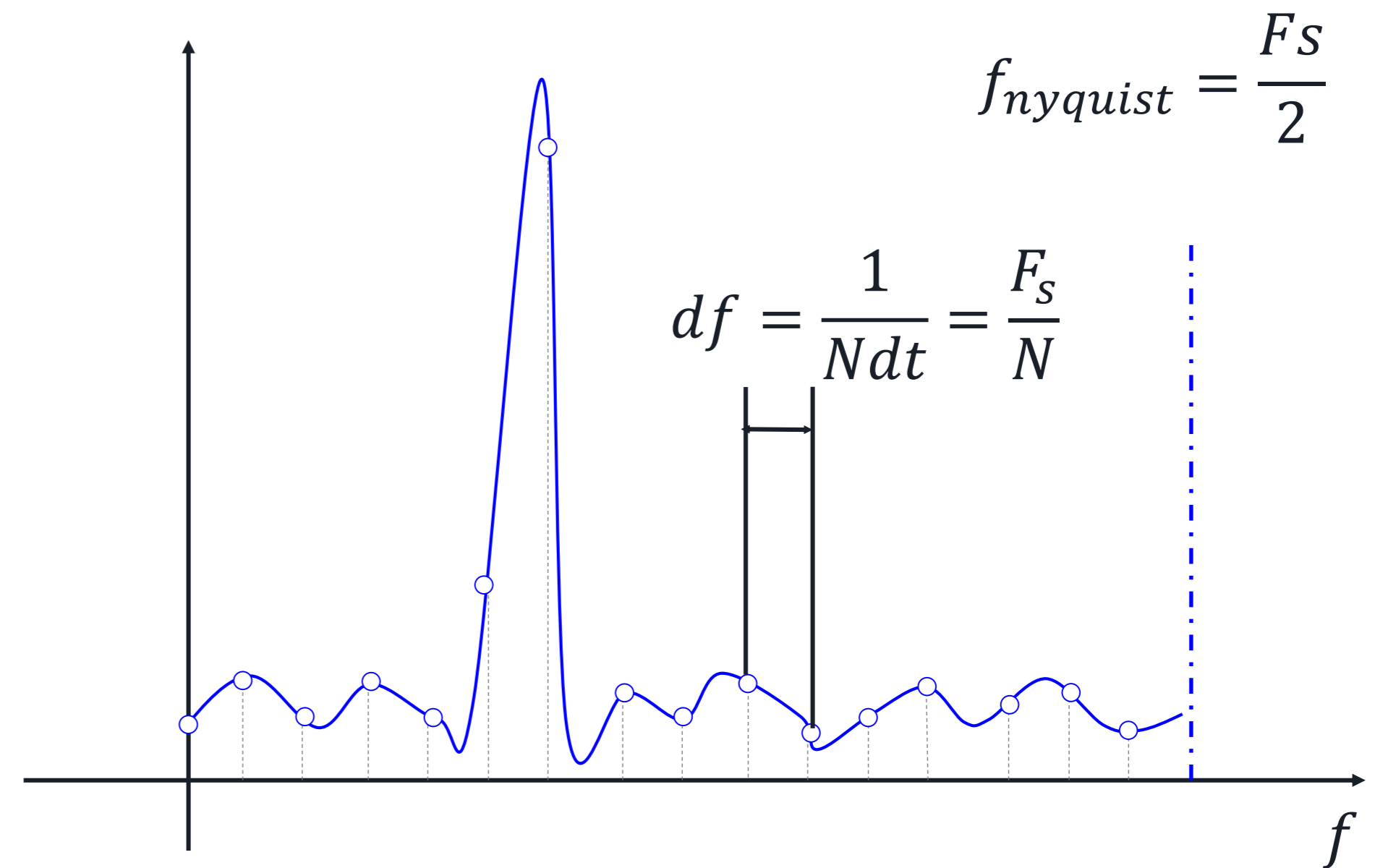
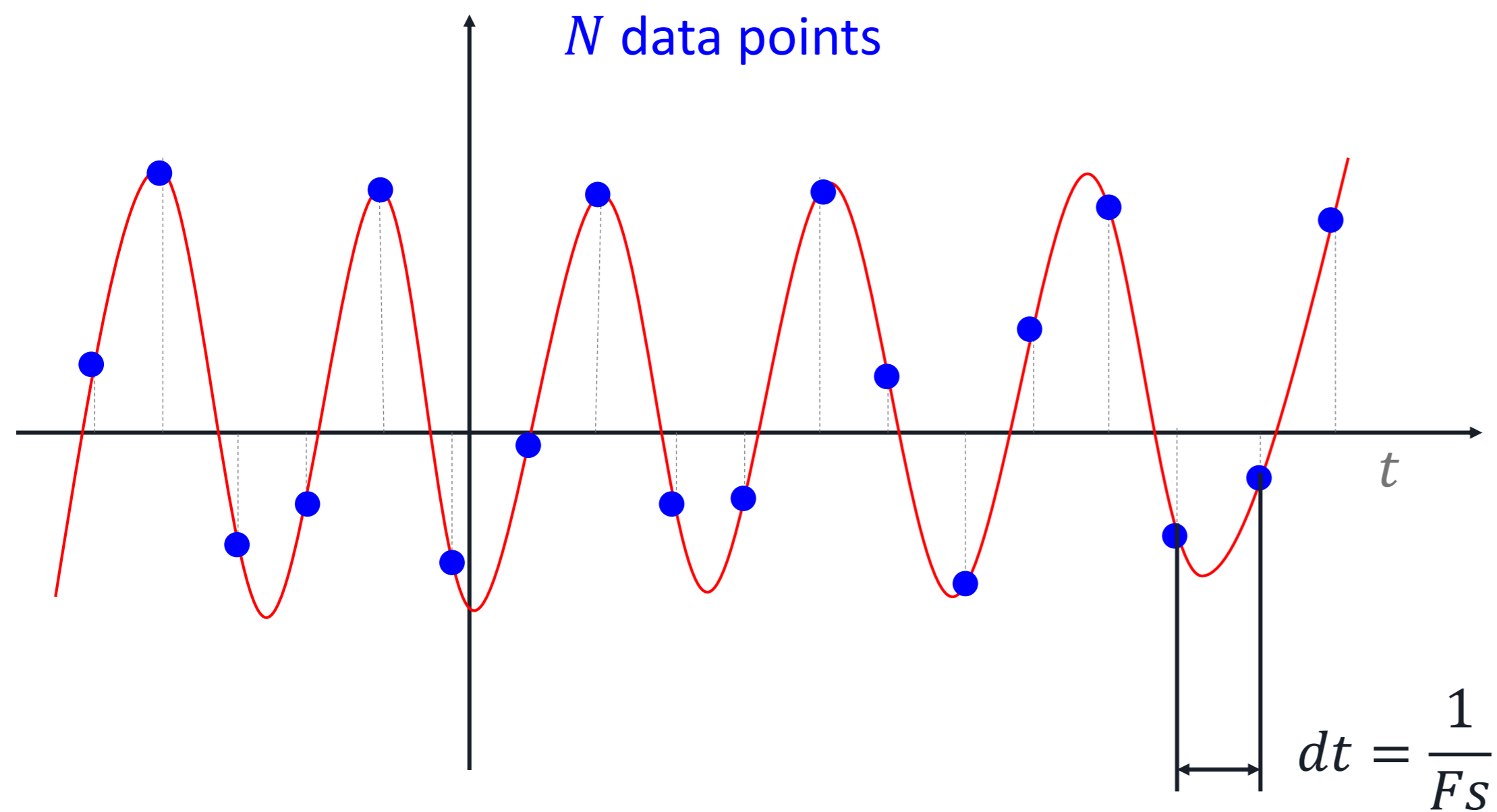
# Aliasing



# Aliasing

## Teorema del muestreo

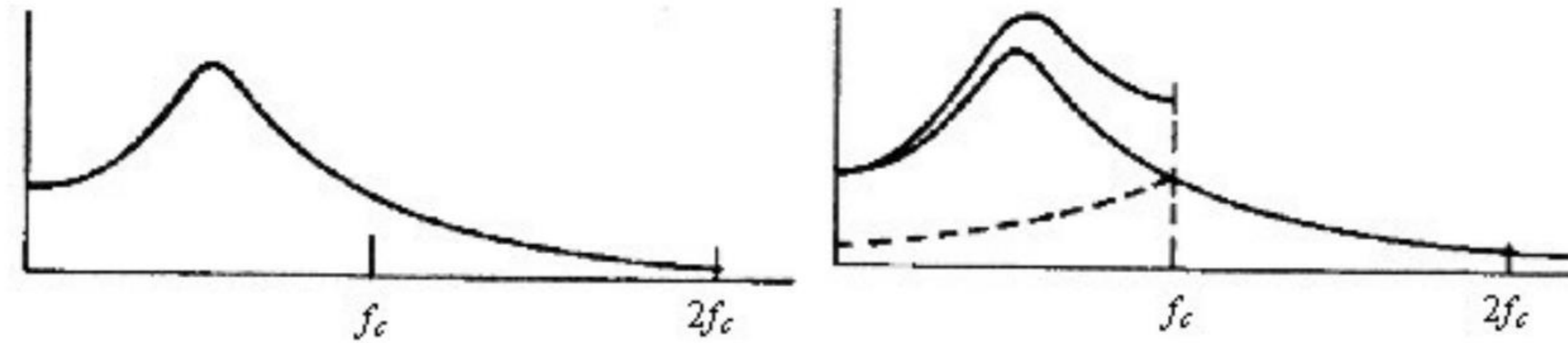
El teorema de muestreo establece que una señal se puede reproducir exactamente si se muestrea a una frecuencia  $F_s$ , donde  $F_s$  es mayor que el doble de la frecuencia máxima en la señal: **la frecuencia de Nyquist**.



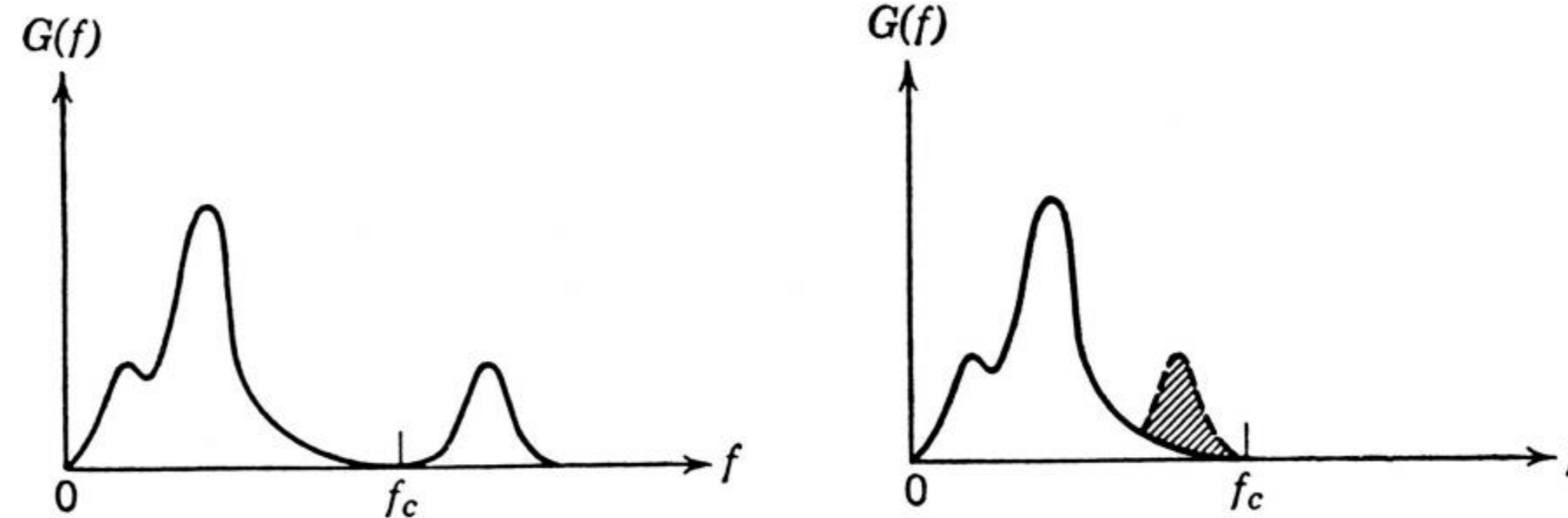
# Aliasing

## Teorema del muestreo

El teorema de muestreo establece que una señal se puede reproducir exactamente si se muestrea a una frecuencia  $F_s$ , donde  $F_s$  es mayor que el doble de la frecuencia máxima en la señal: **la frecuencia de Nyquist**.



Distorsión producida por el *aliasing* en una señal con frecuencias superiores a la de Nyquist.



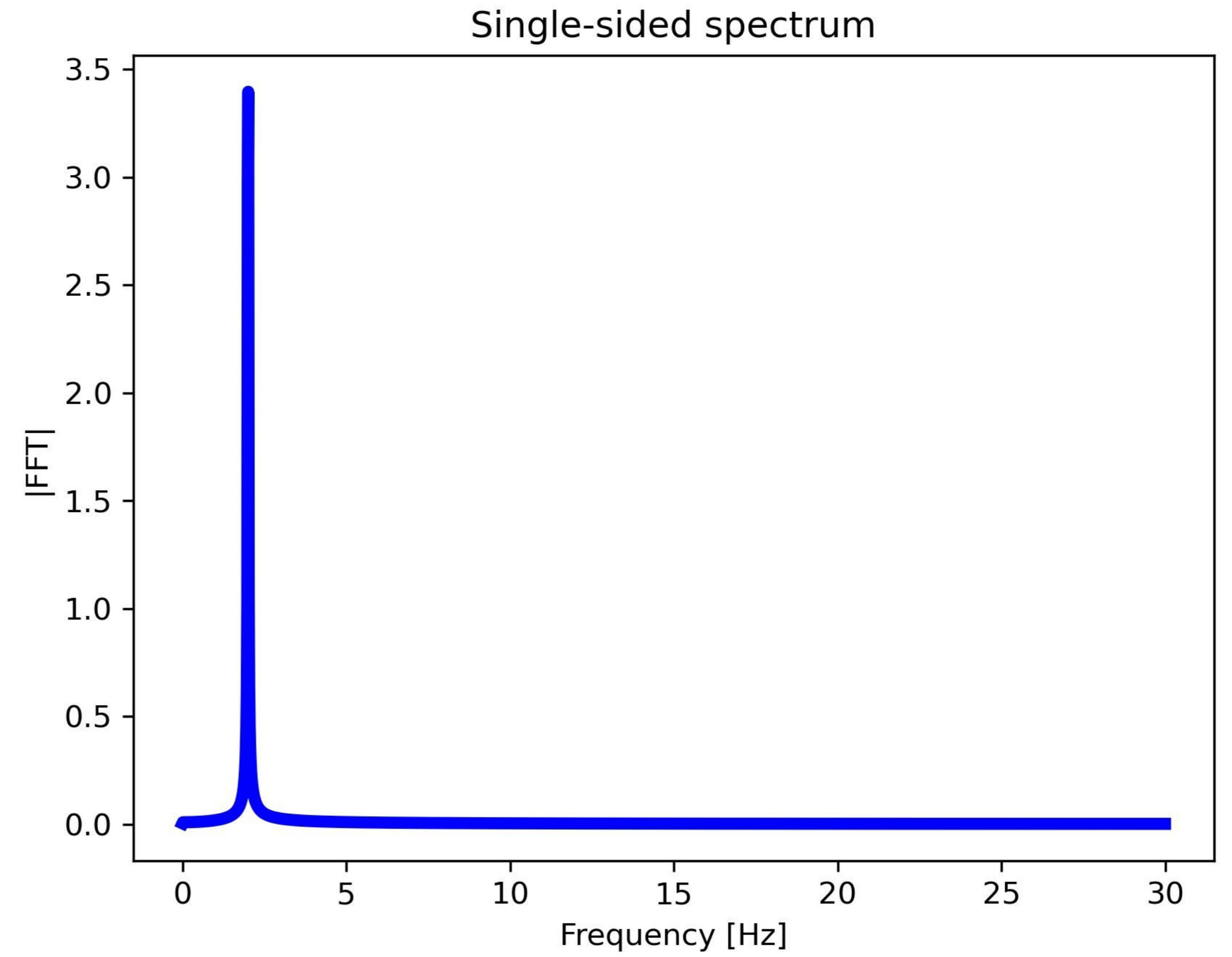
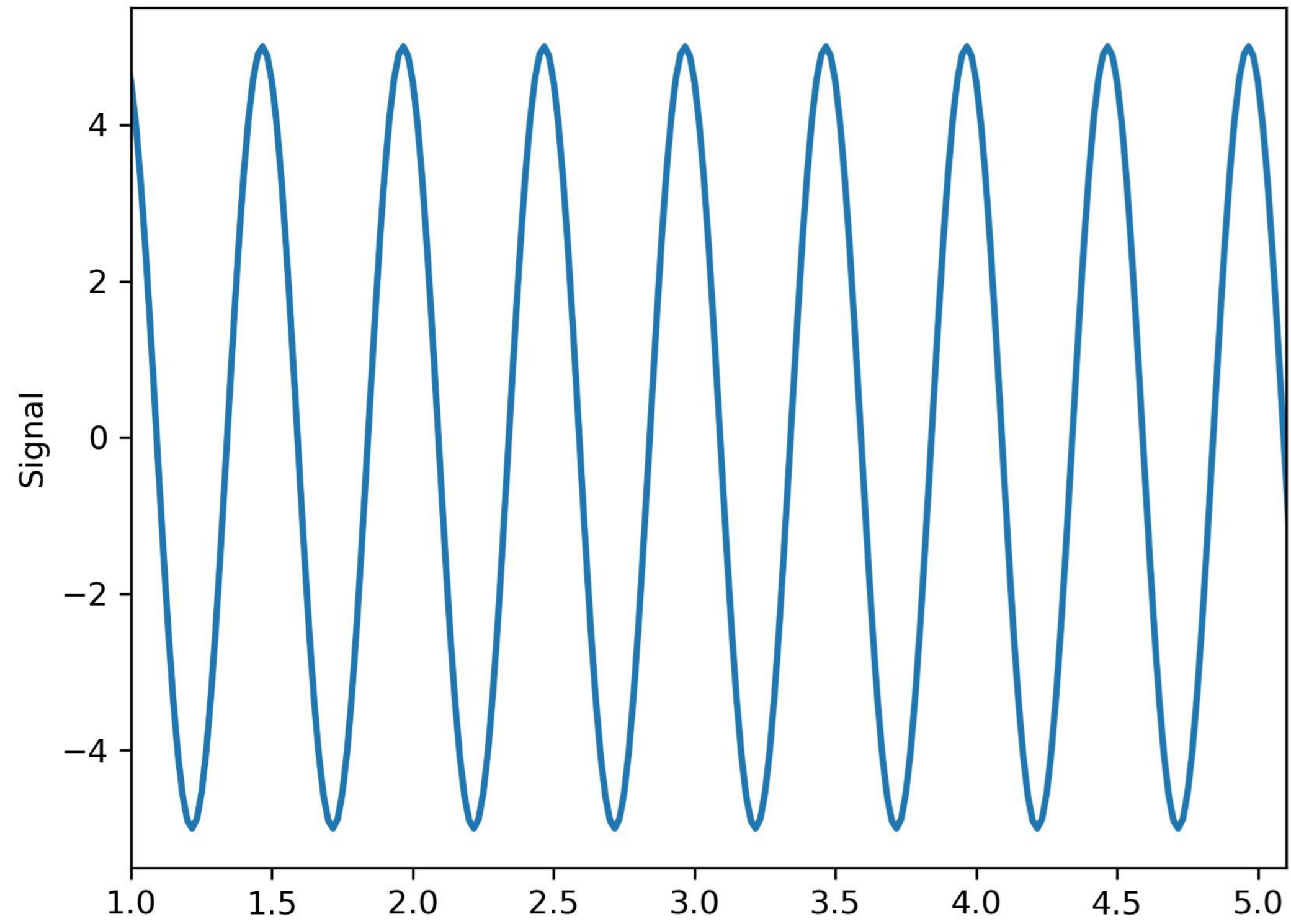
Comparación entre un autoespectro real y el mismo con *aliasing*.



# Frequency Leakage.



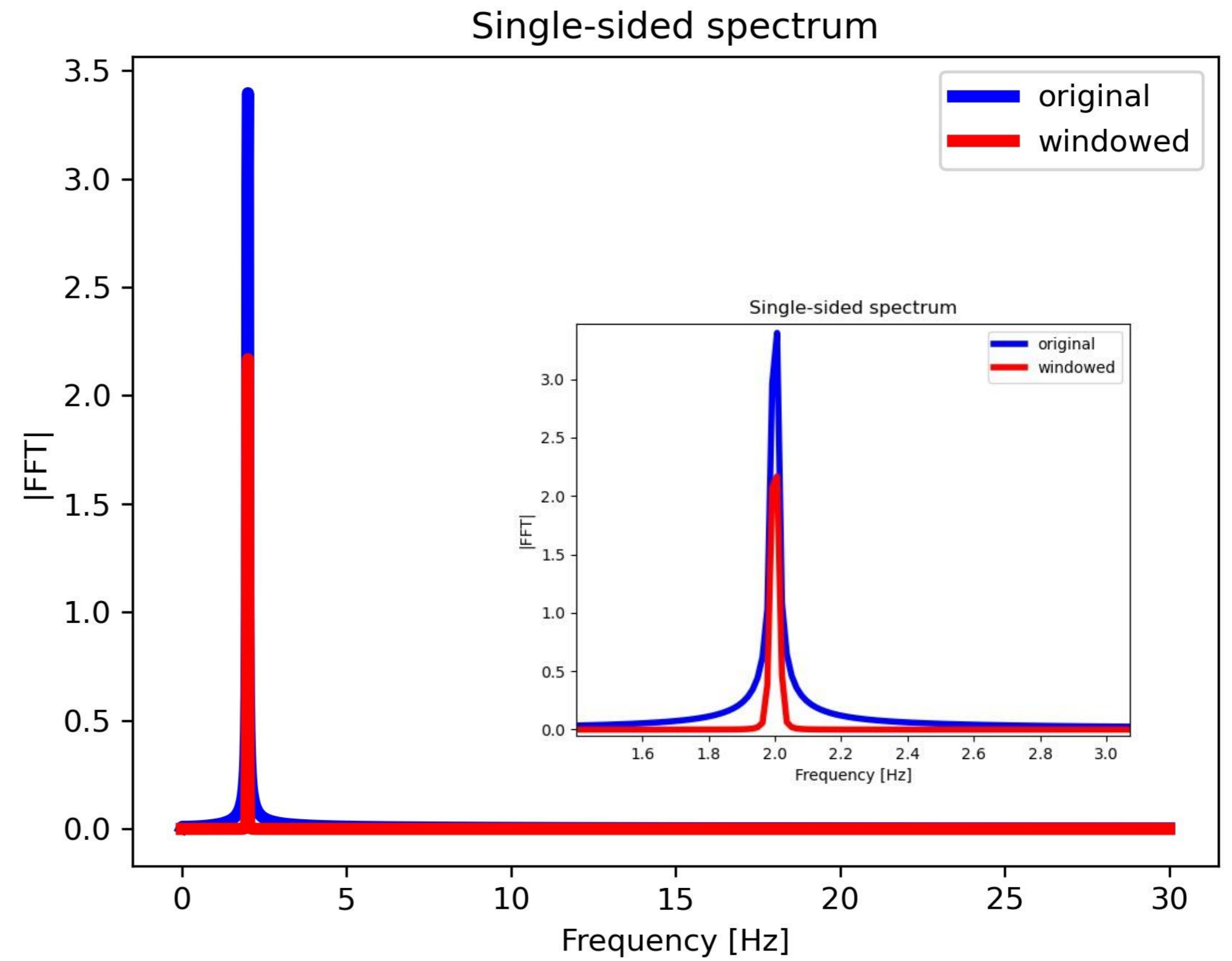
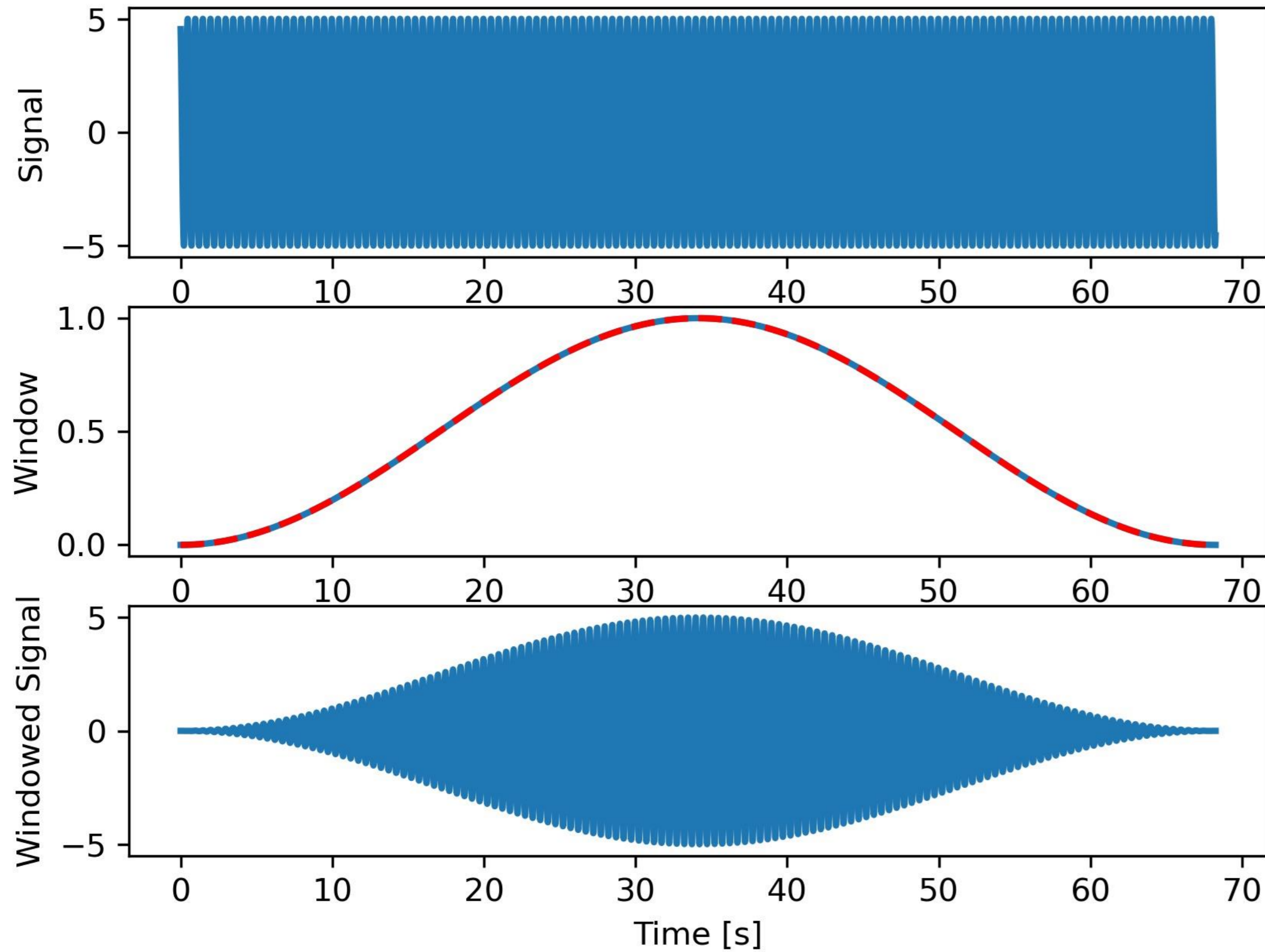
# Frequency Leakage



# Frequency Leakage

Hann (Hanning) function

$$Hann[n] = \sin^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)$$





# Cross-correlation.



# Cross-correlation

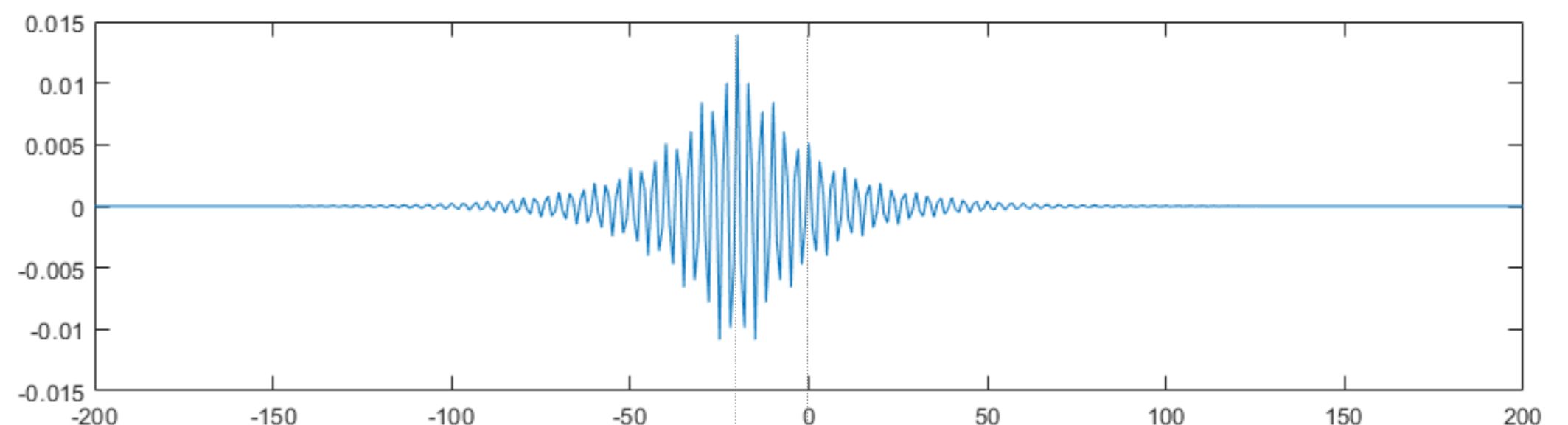
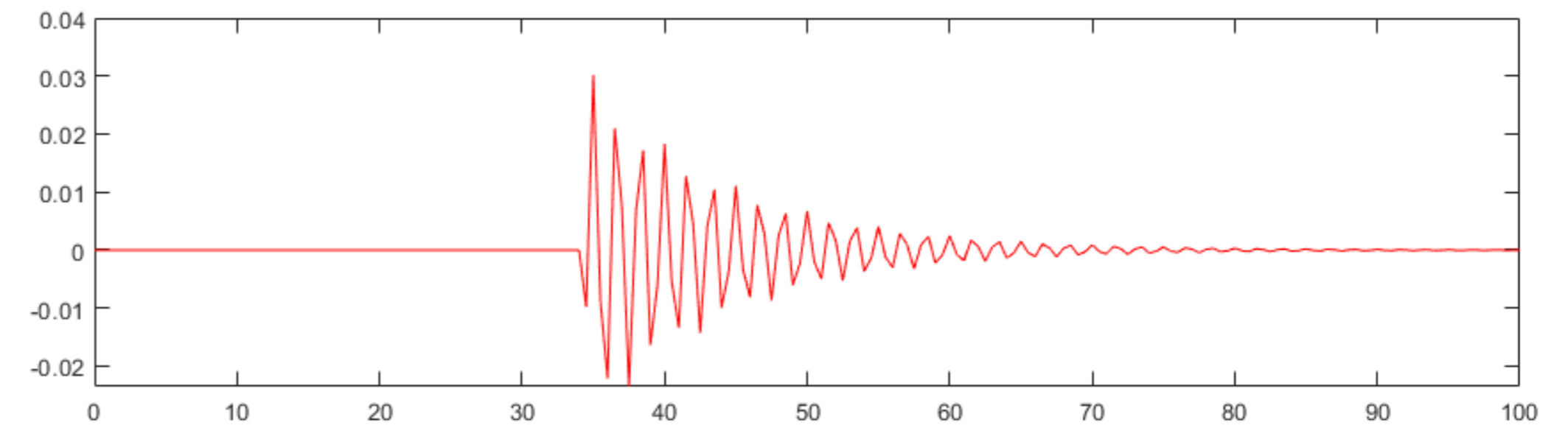
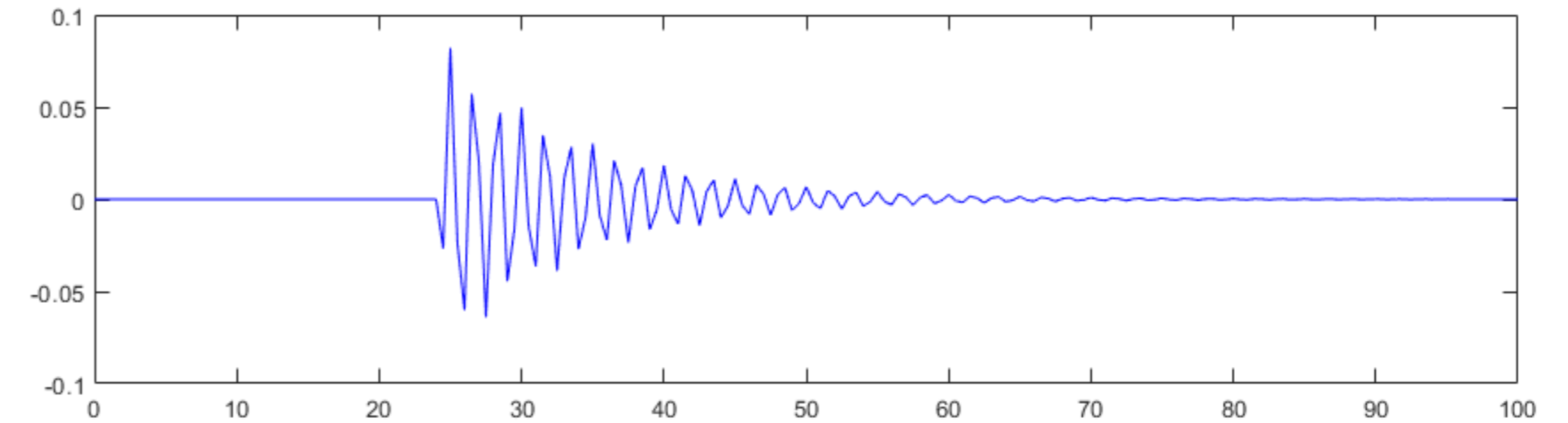
Medida de similitud de dos series en función del desplazamiento de una con respecto a la otra.

$$r_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}g(t + \tau)dt$$

Forma discrete:

$$r_{fg}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{f(m)}g(m + n)$$

$f = g$  Auto-correlation



Time delay





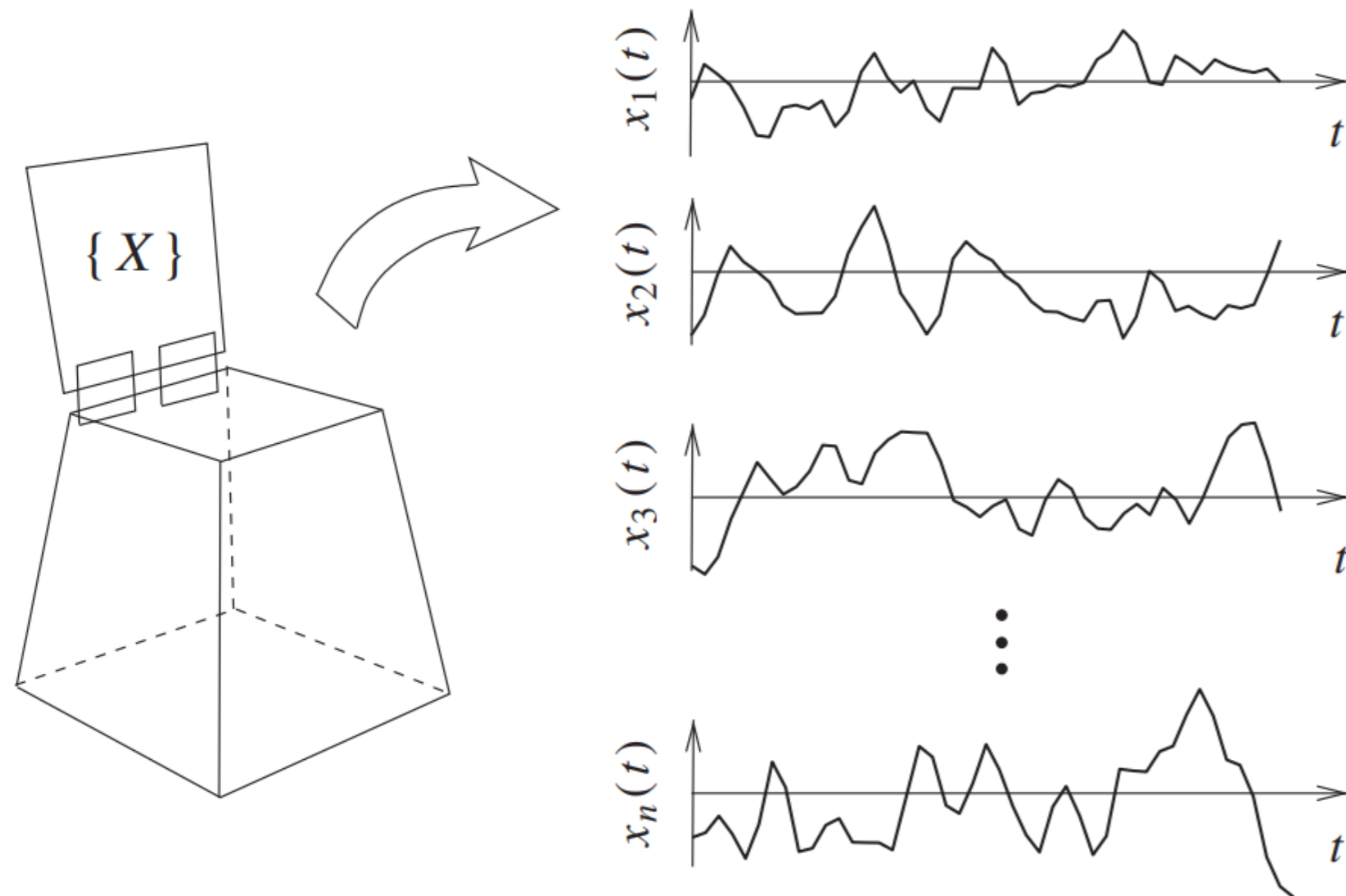


# Random Signals



## Random signals

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, tenemos que tratar con señales que no pueden describirse en función del tiempo, ya que sus formas de onda siguen un patrón aleatorio. Tomemos, por ejemplo, el ruido eléctrico inherente a cualquier sensor. A pesar de la falta de un conocimiento exacto de los valores de la señal, es posible analizar y extraer información de la señal empleando las herramientas matemáticas disponibles para tratar con señales aleatorias.



### Definición (variable aleatoria discreta)

Una serie aleatoria discreta  $X = \{a_0, \dots, a_n, \dots\}$  se caracteriza por una función de distribución de probabilidad (probability density function pdf) como:

$$p_X(n) = \Pr(X = a_n)$$

La probabilidad de que  $X$  pertenezca al intervalo  $[a, b]$  viene dada por:

$$\Pr(X \in ]a, b]) = \sum_{n \geq 0, a_n \in ]a, b]} p_X(n)$$

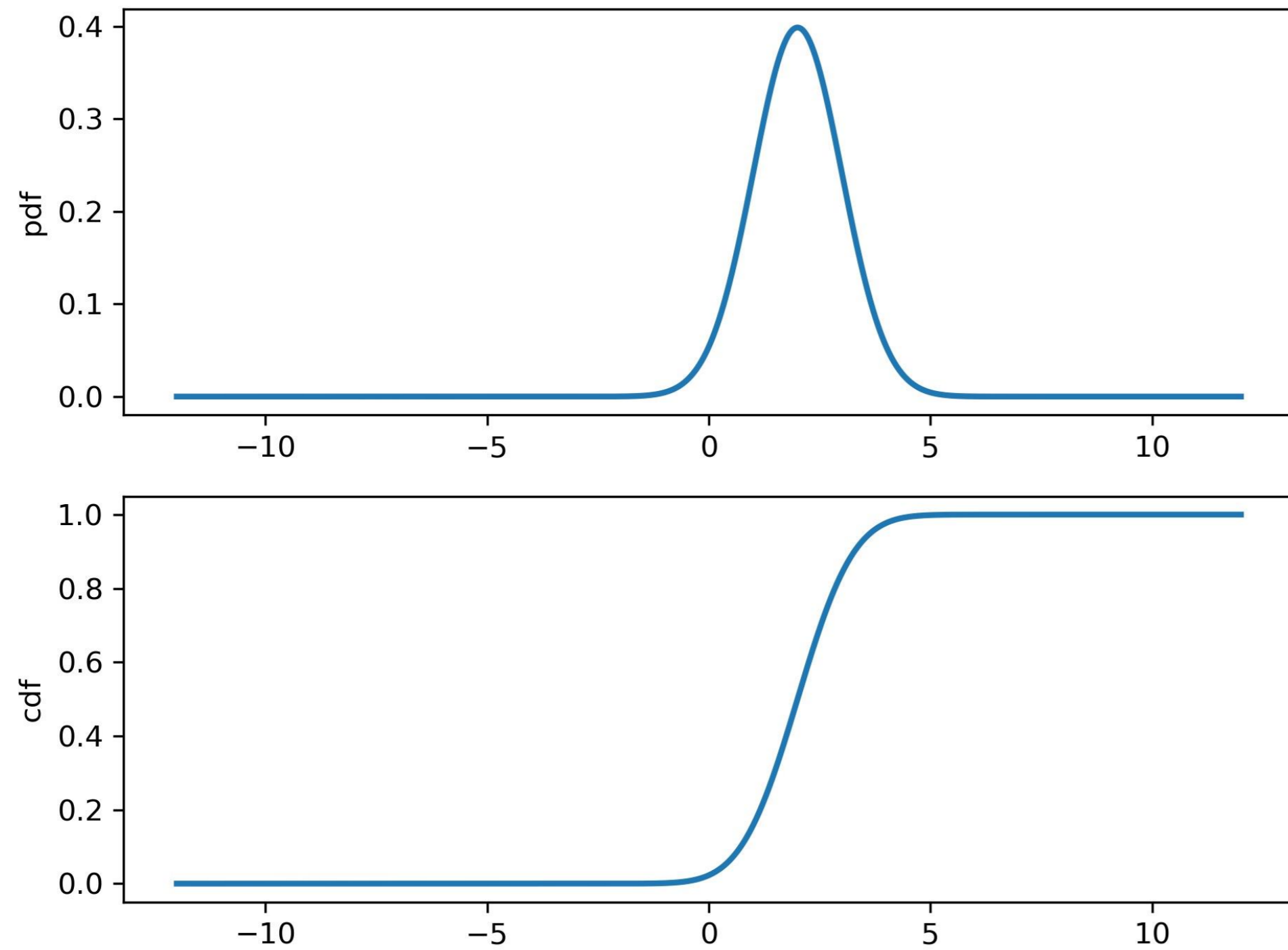
Esto conduce a la definición de la función de distribución acumulativa (cumulative distribution function cdf)

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \sum_{n \geq 0, a_n \leq x} p_X(n)$$

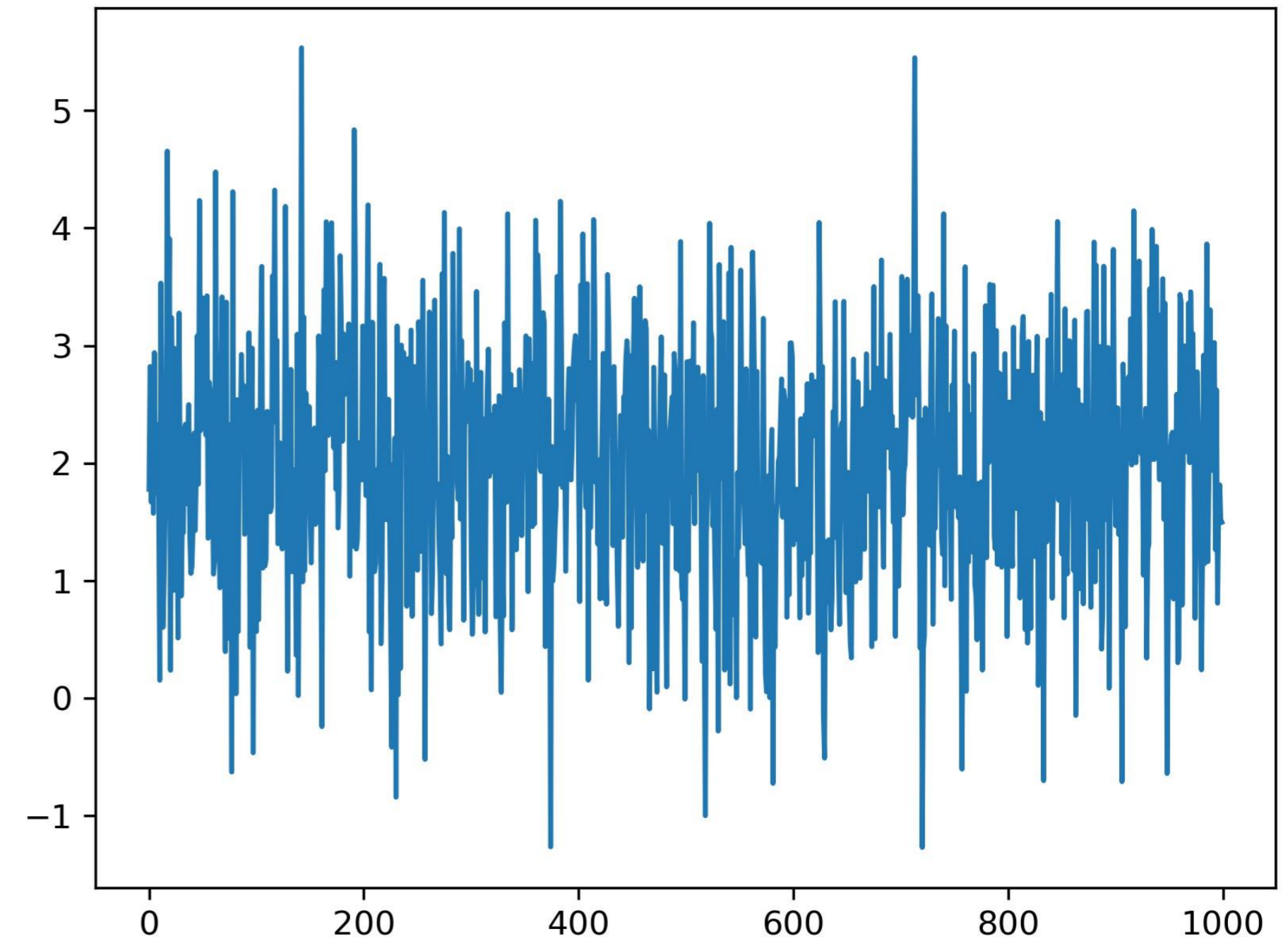
# Random signals

Eg. Gaussian signal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Sampling



# Random signals

## Eg. Gaussian signal

### Statistical moments

Mean	$\mu = E(X)$
Variance	$\sigma^2 = E(X - \mu)^2$
Skewness	$S = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3}$
Kurtosis	$k = \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4}$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

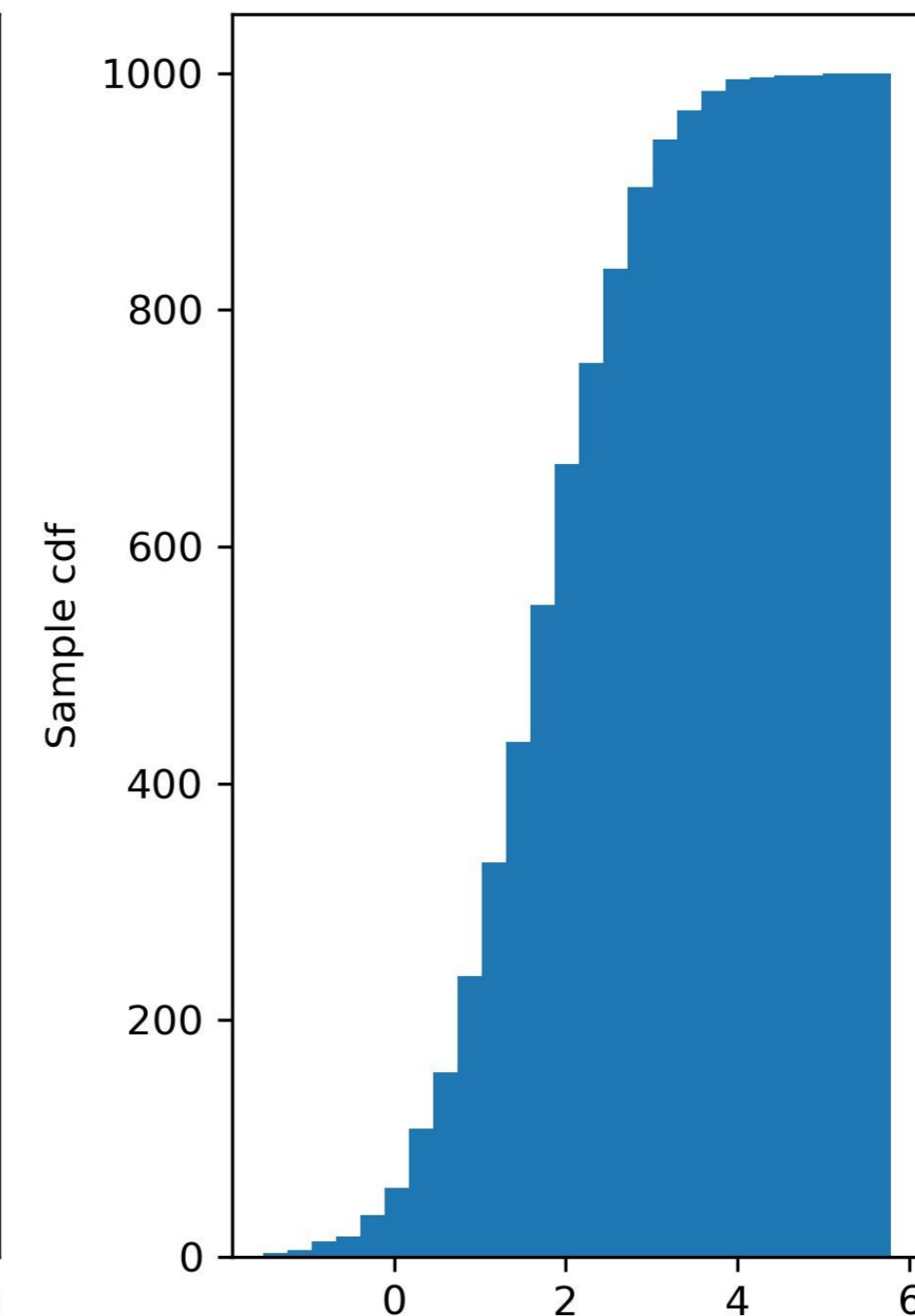
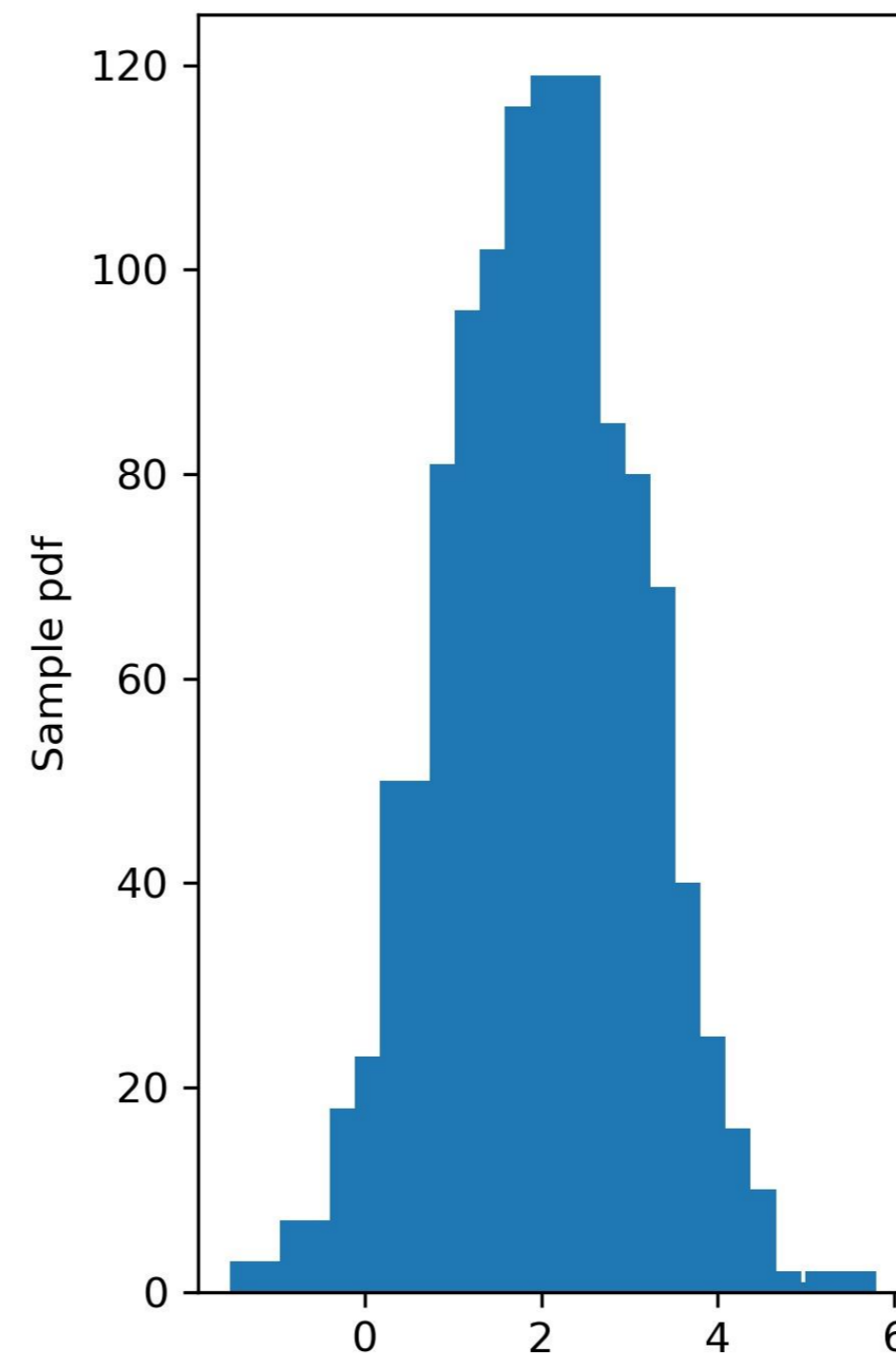
$$\left. \begin{array}{l} \mu \\ \sigma^2 \\ S = \frac{E(X - \mu)^3}{\sigma^3} = 0 \\ k = \frac{E(X - \mu)^4}{\sigma^4} = 3 \end{array} \right\}$$

```
# Mean value
mean_X = (1/N)*np.sum(X)
np.mean(X)

# Variance
var = (1/(N-1))*np.sum((X-mean_X)**2);
stdvar = np.sqrt(var)
np.std(X, ddof=1)

# Skewness
skewnessval = (1/(N))*np.sum((X-mean_X)**3)/(np.sqrt((1/(N))*np.sum((X-mean_X)**2)))**3
stats.skew(X)

# Kurtosis
Kurtosis = (1/(N))*np.sum((X-mean_X)**4)/(np.sqrt((1/(N))*np.sum((X-mean_X)**2)))**4
stats.kurtosis(X, fisher = False)
```

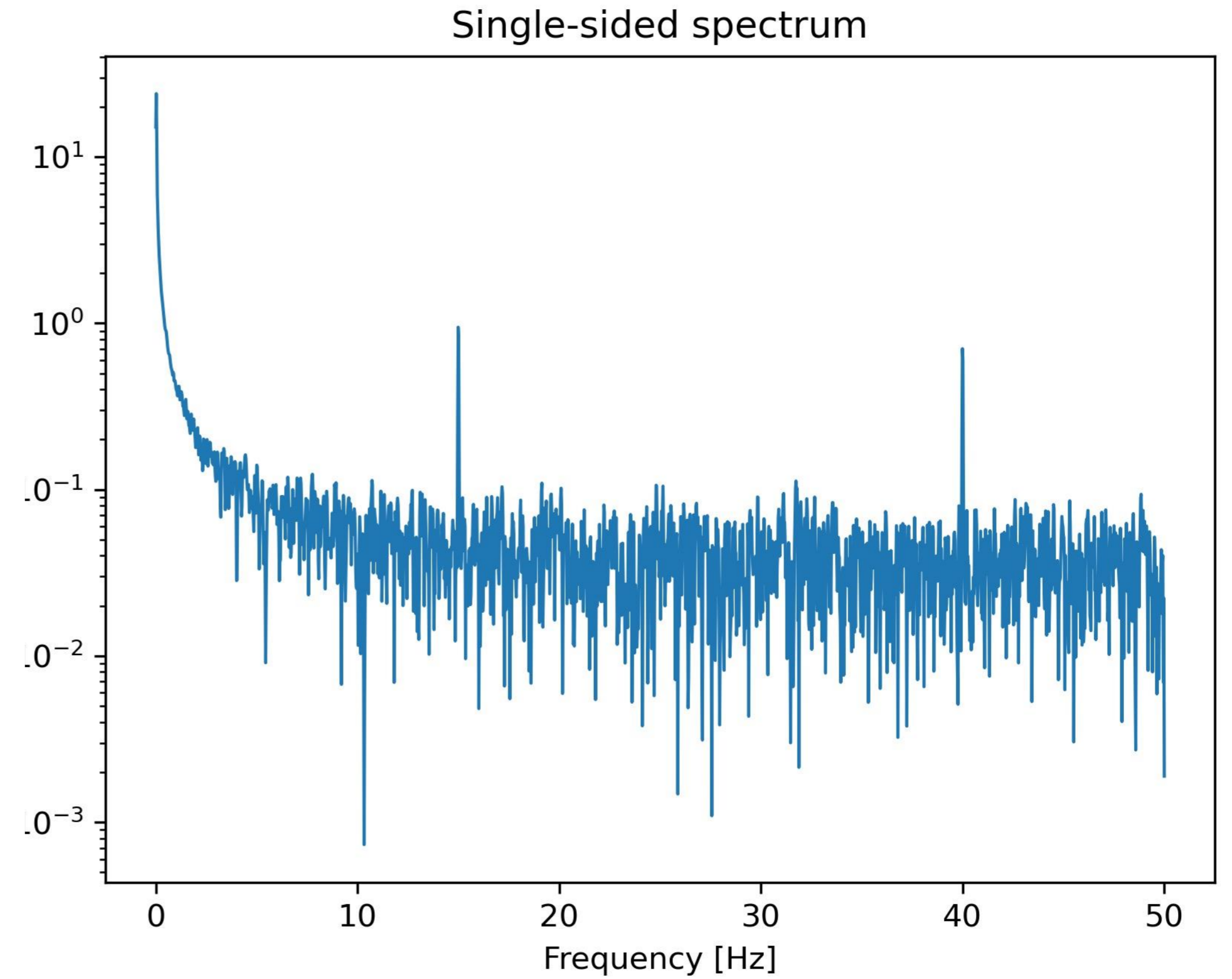
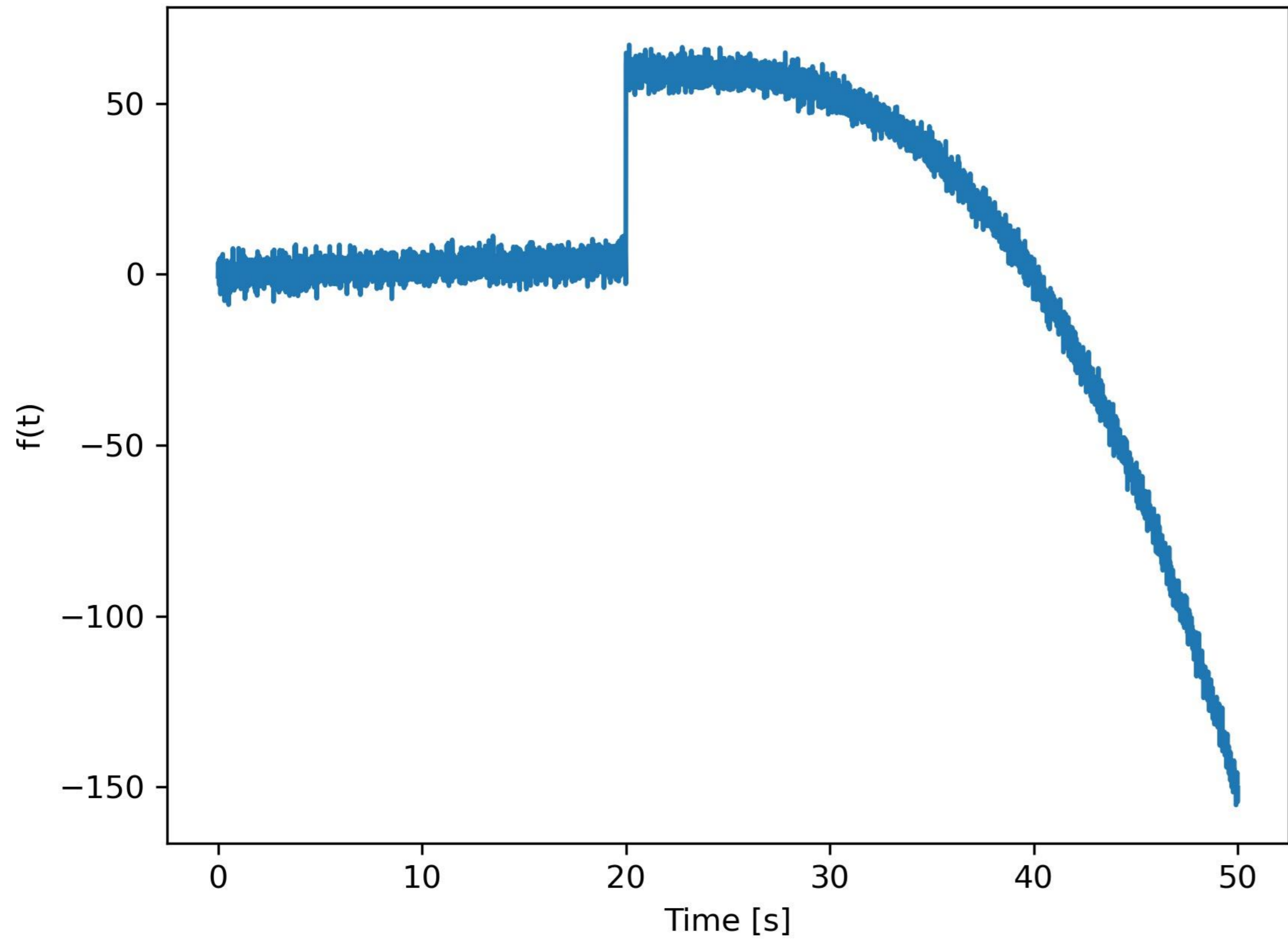




# Filtering

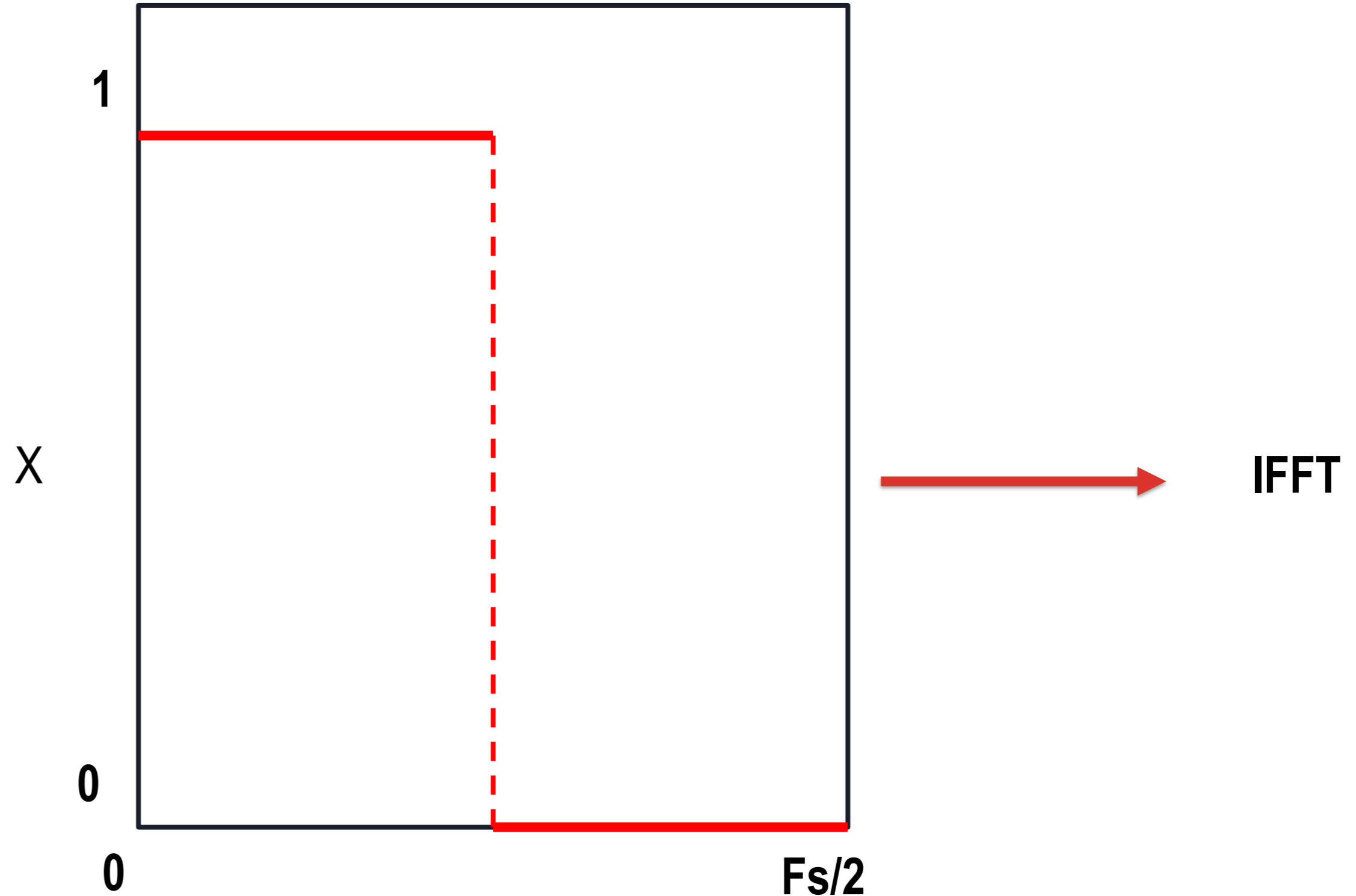
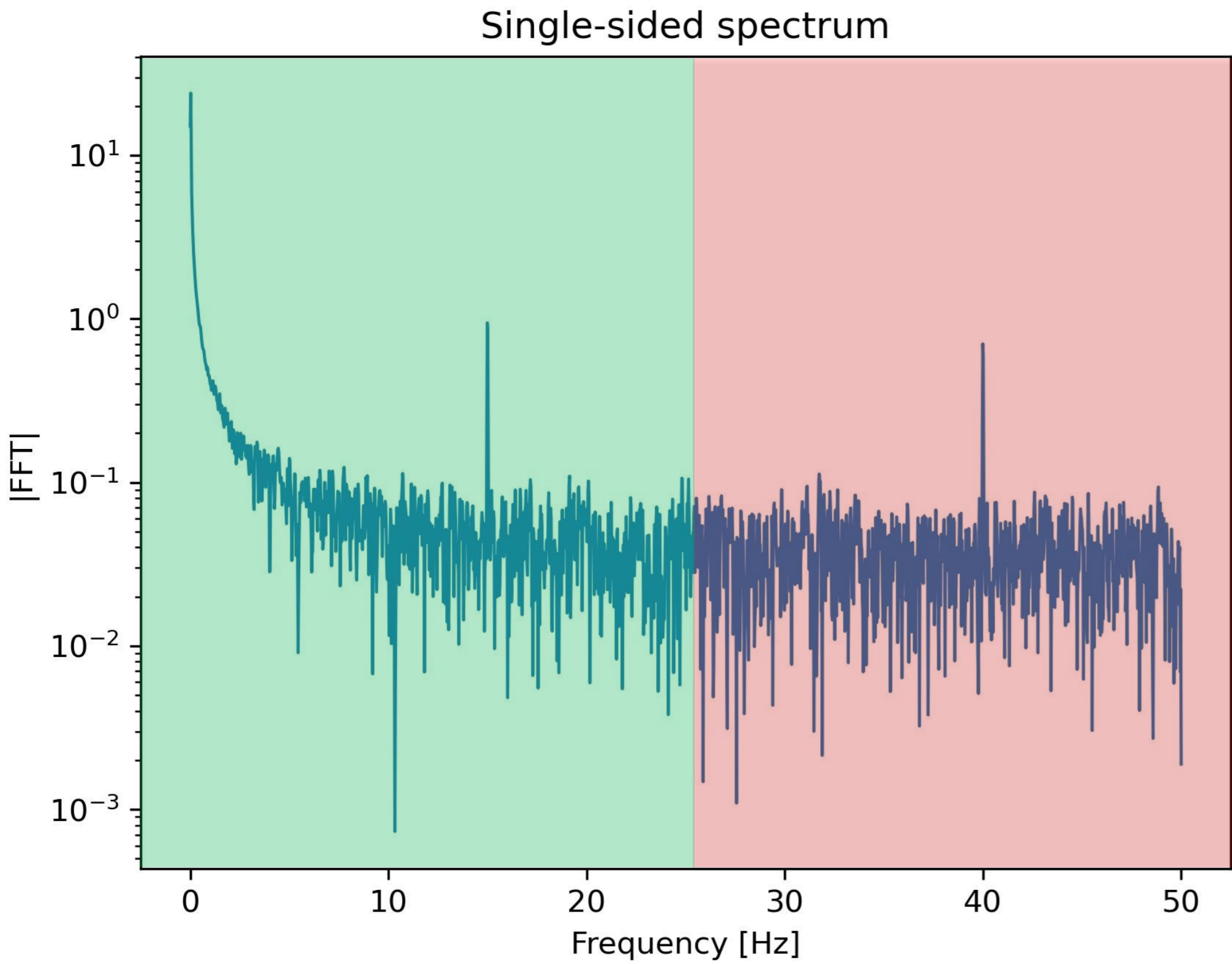


# Filtering



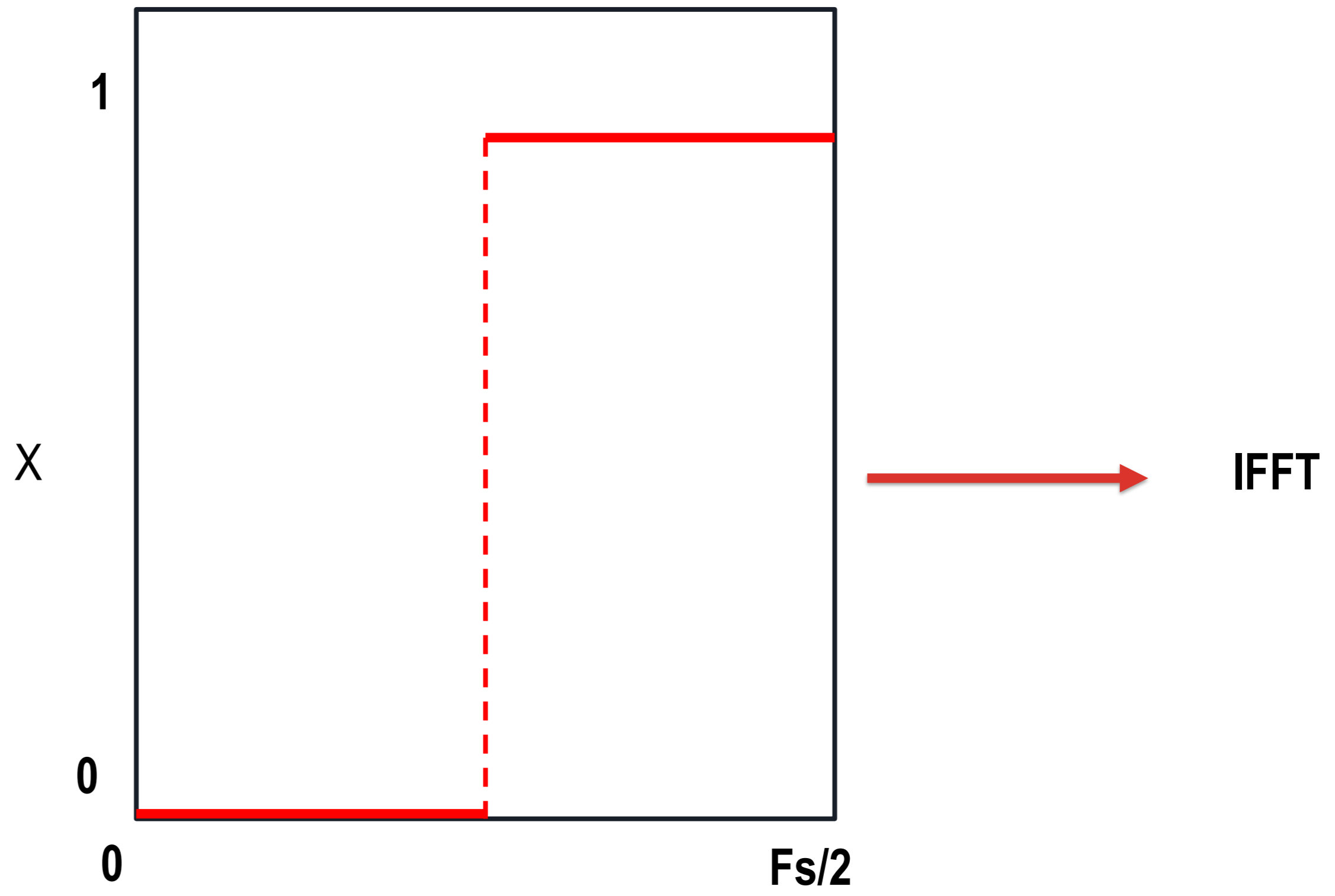
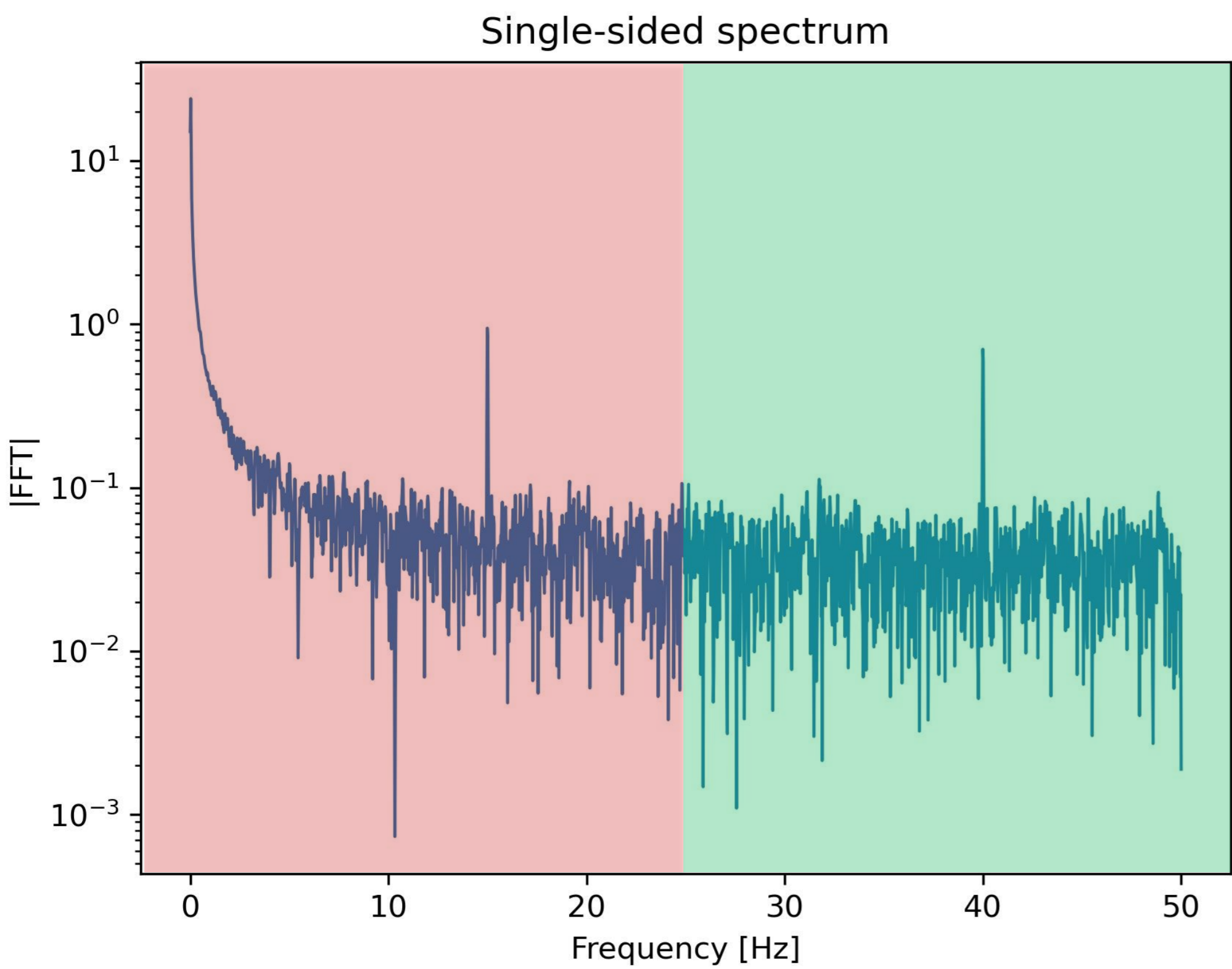
# Filtering

Low-pass filter



# Filtering

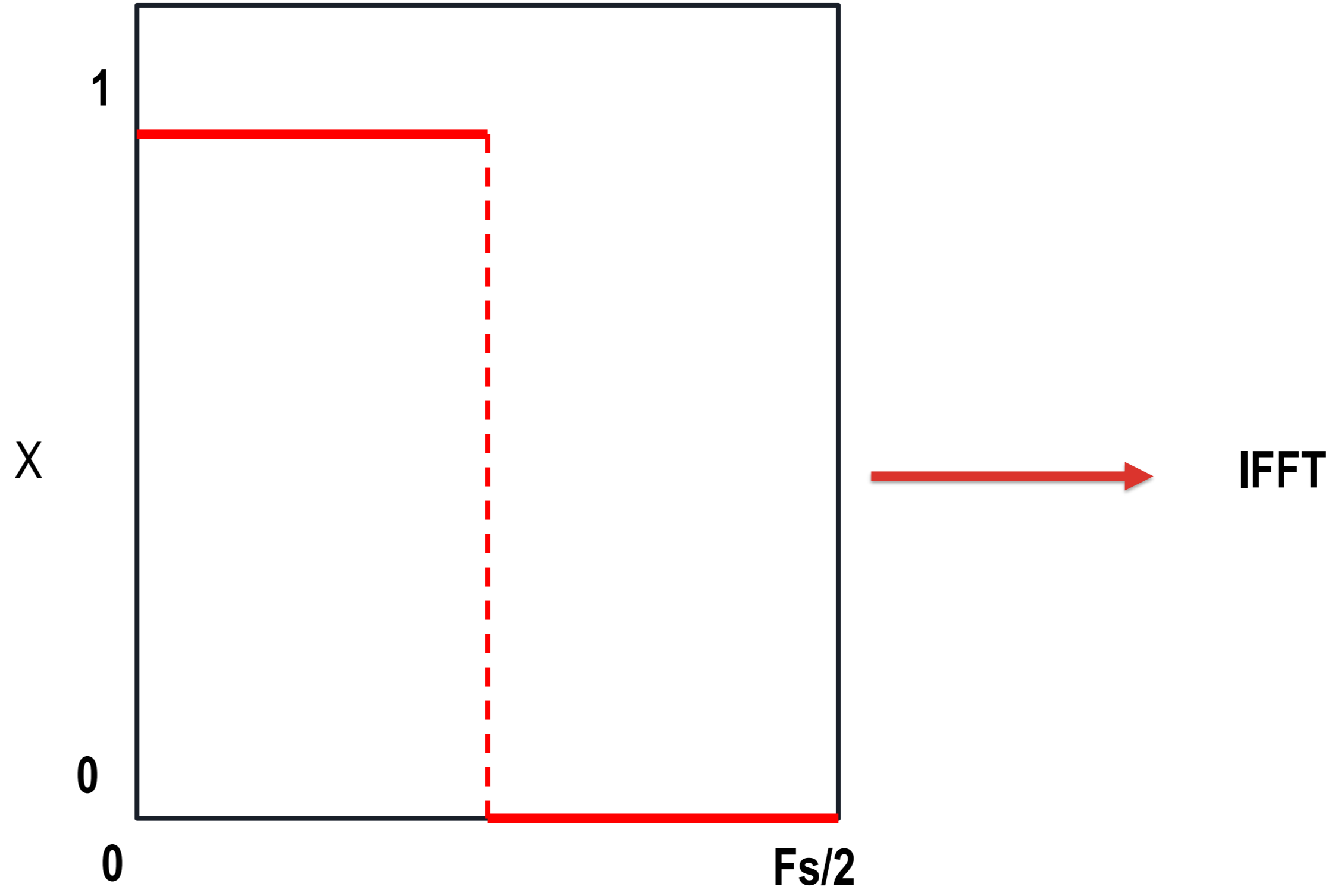
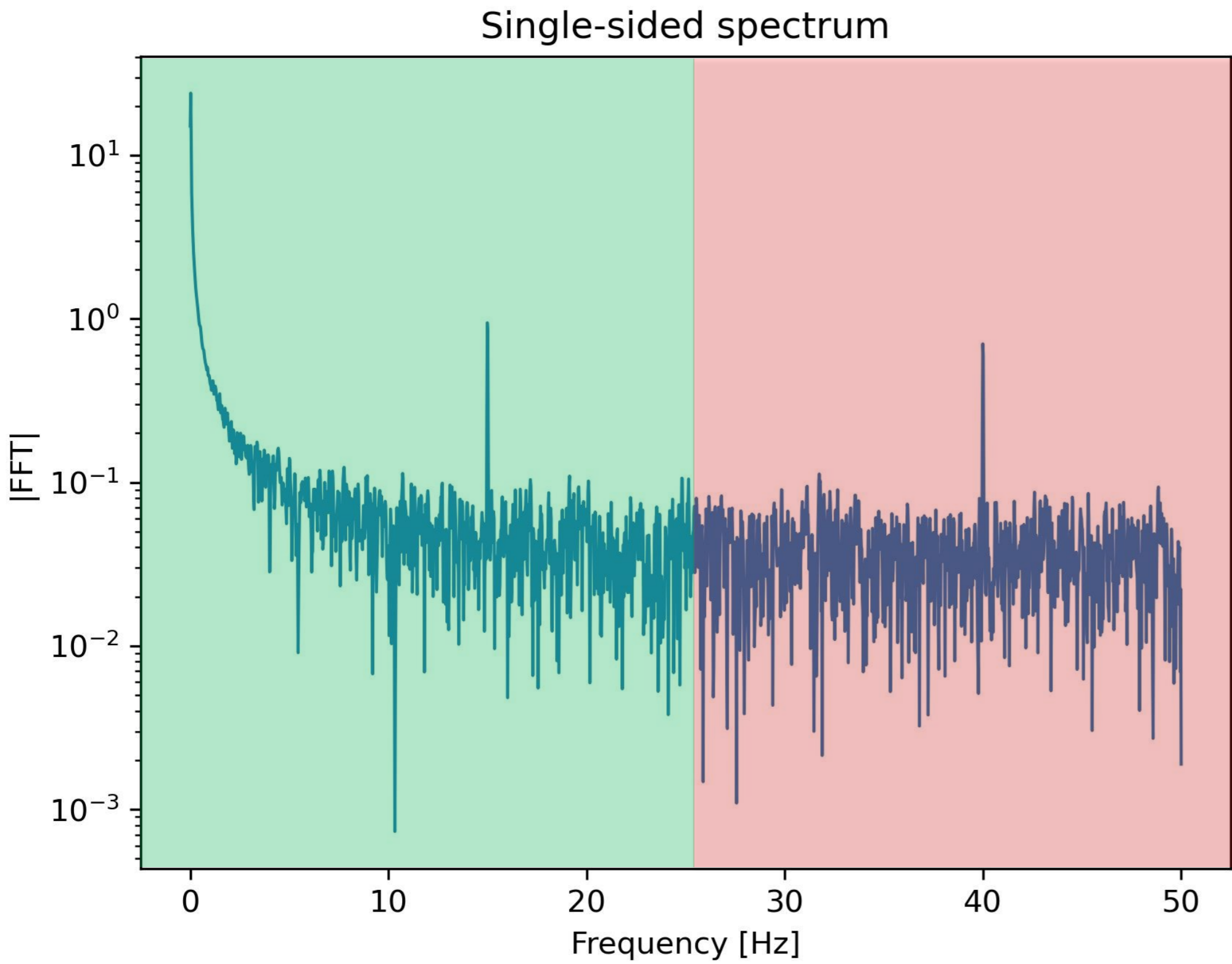
High-pass filter



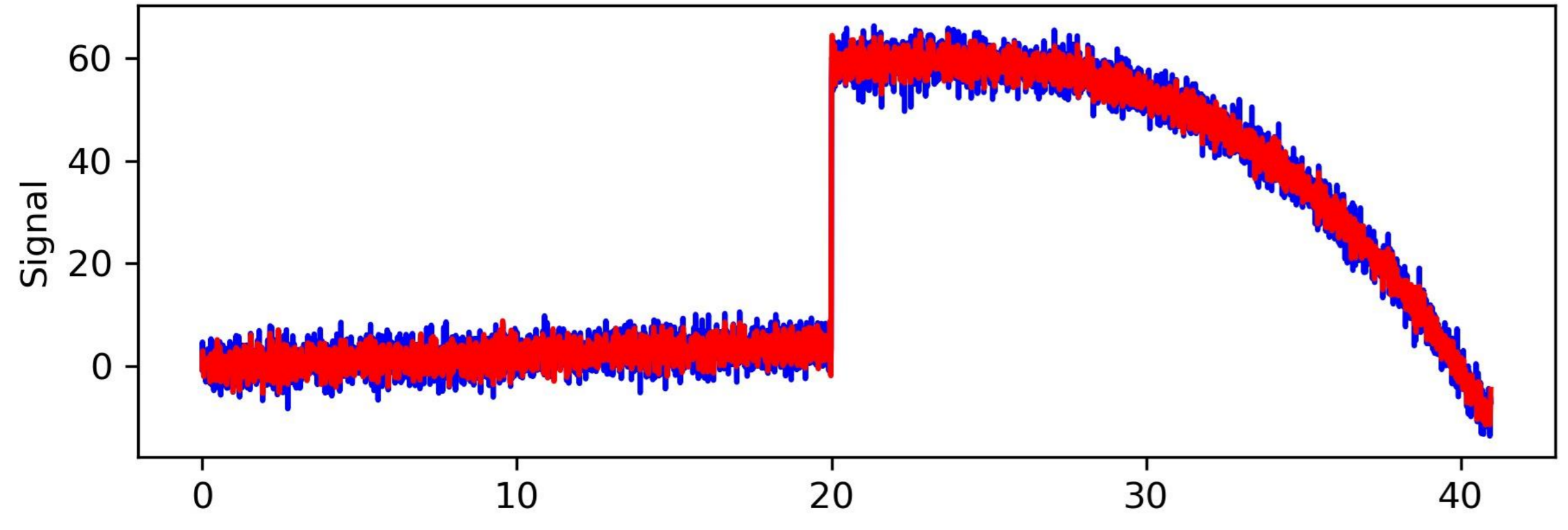


# Filtering

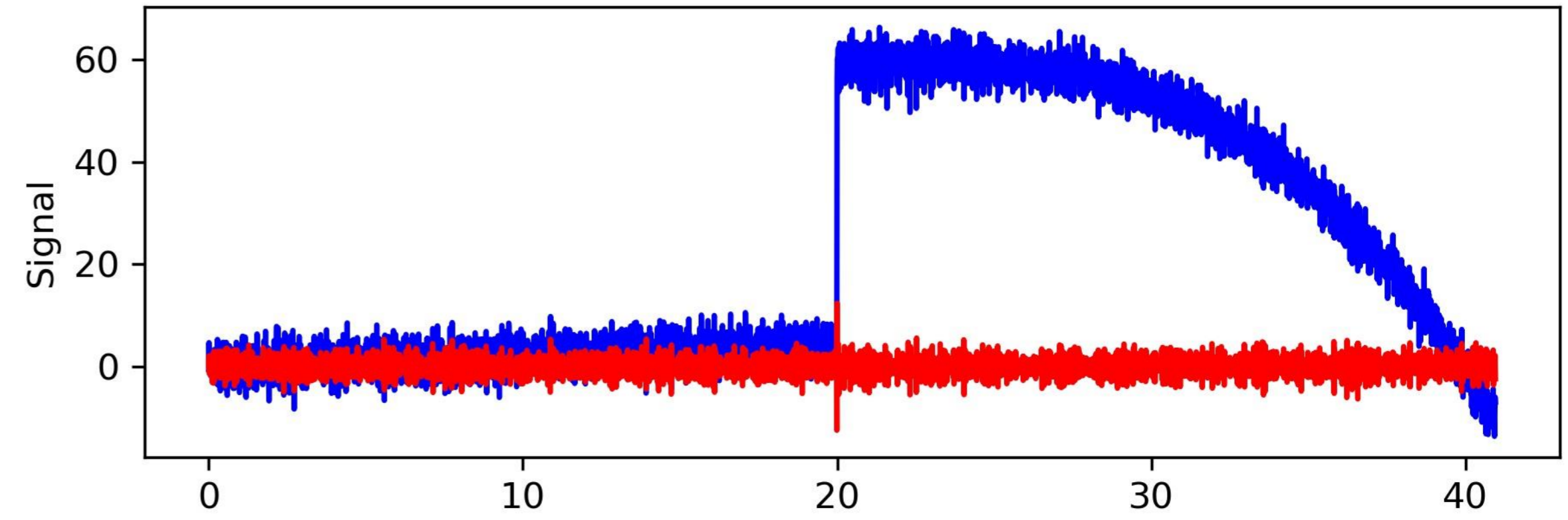
## Band-pass filter



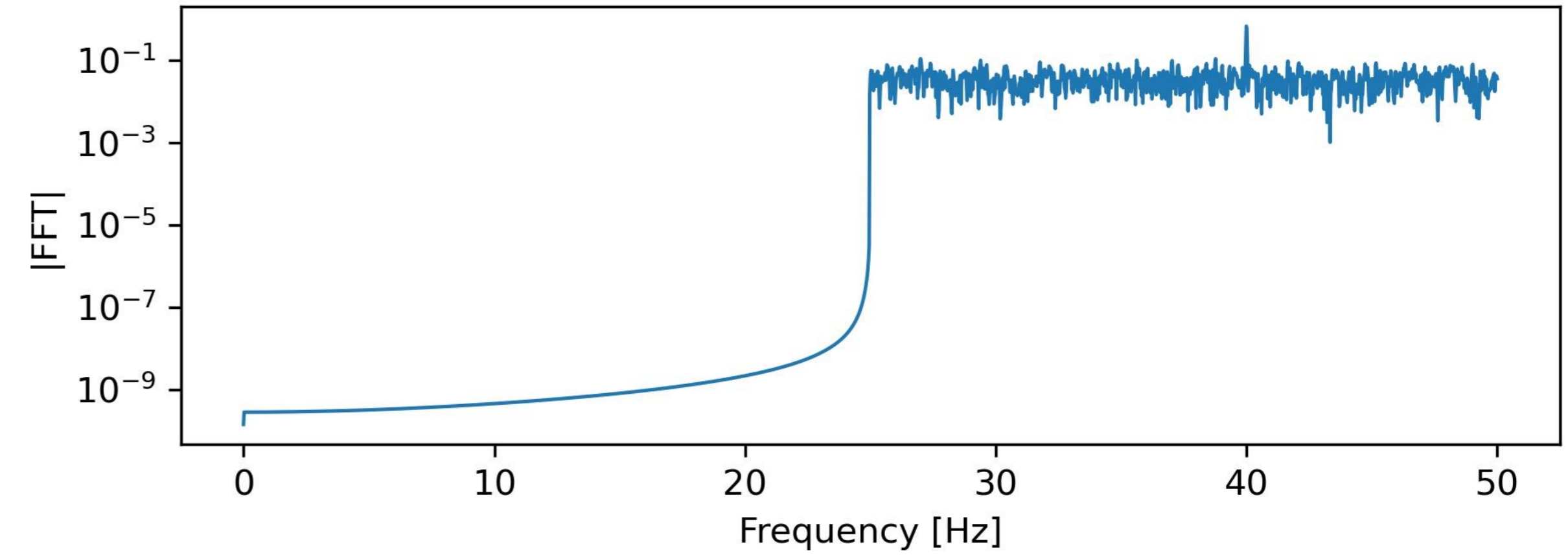
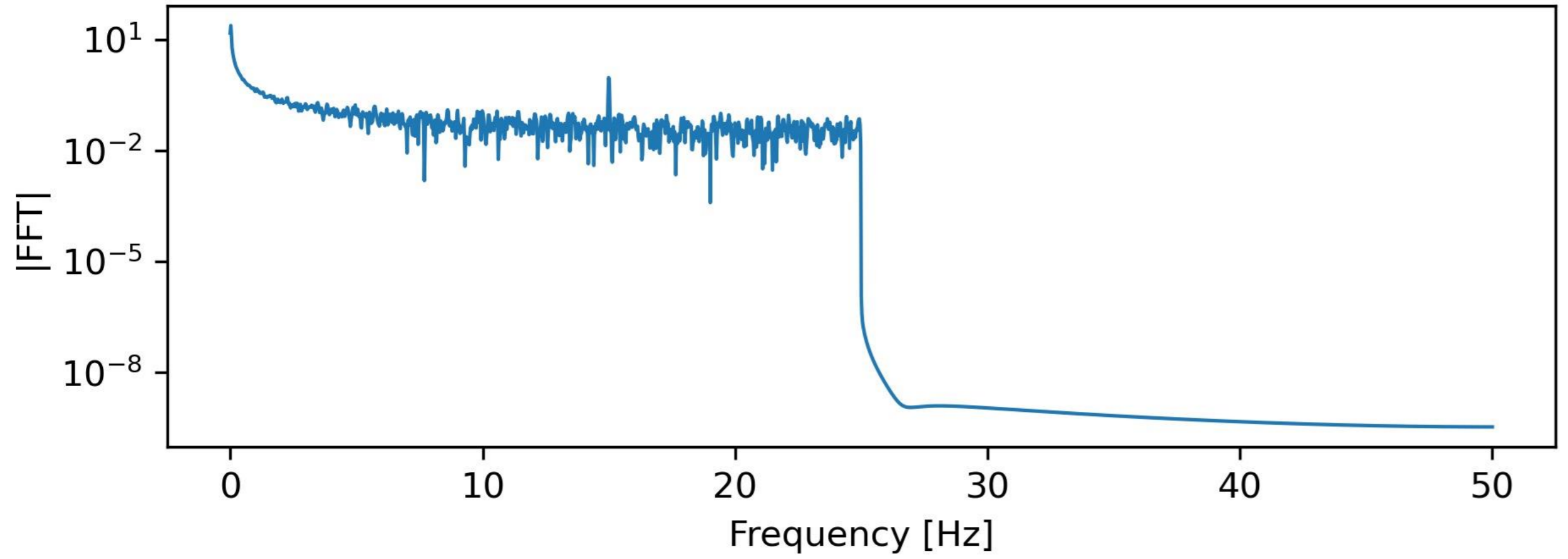
# Filtering



Low-pass filter



High-pass filter

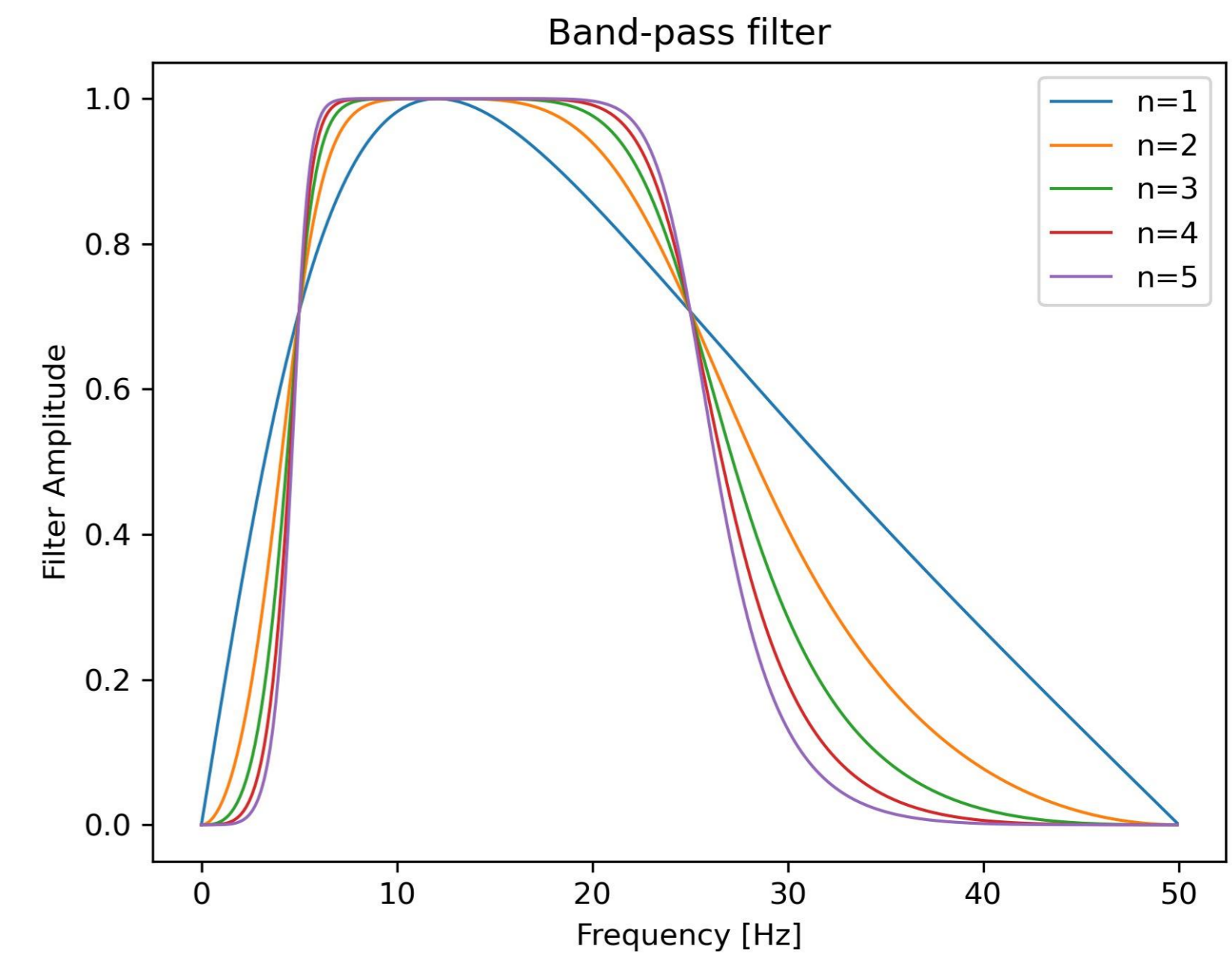
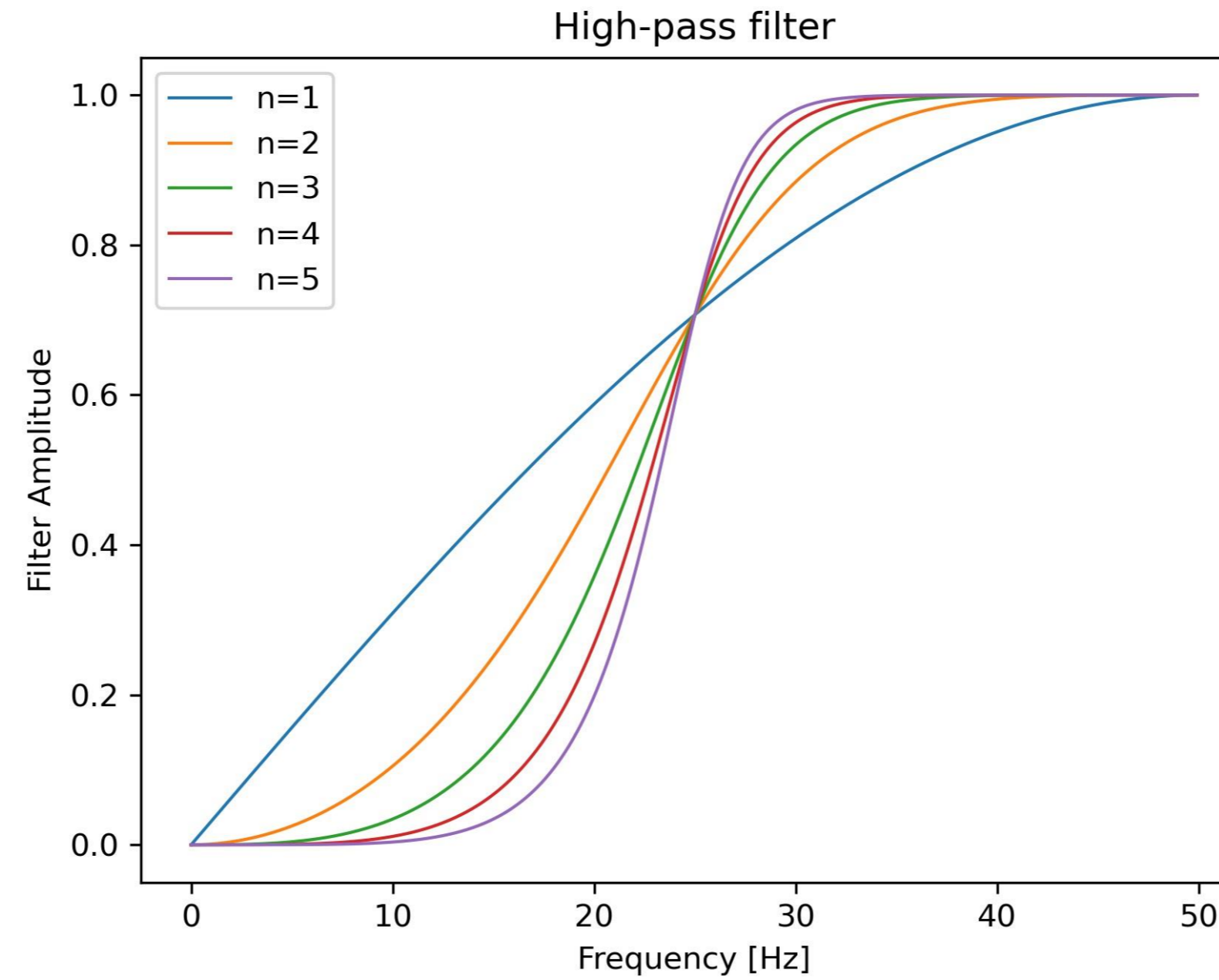
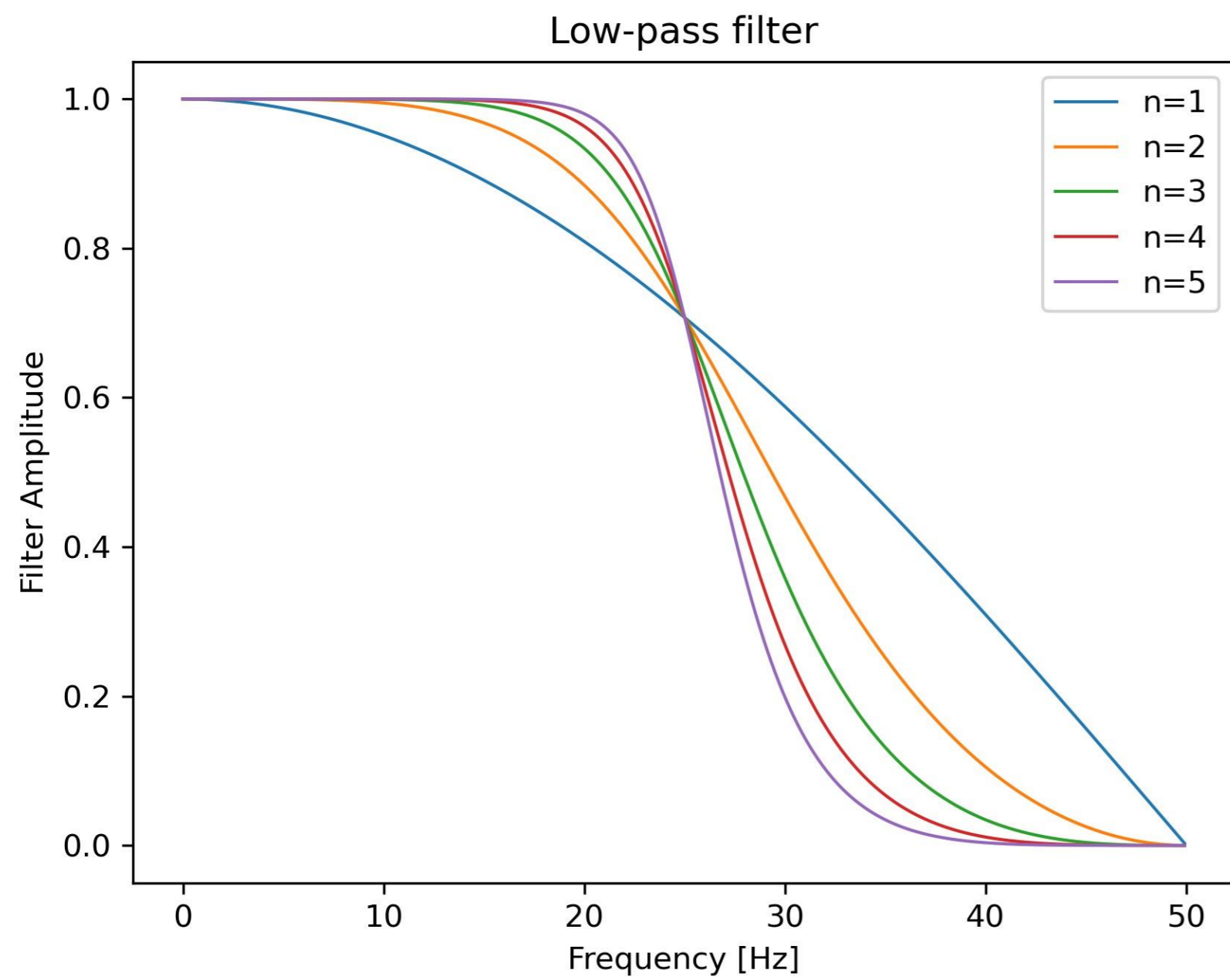


# Filtering Butterworth

```
b, a = signal.butter(ij, fc/(Fs/2), 'low')  
w, histbutter = signal.freqz(b, a)
```

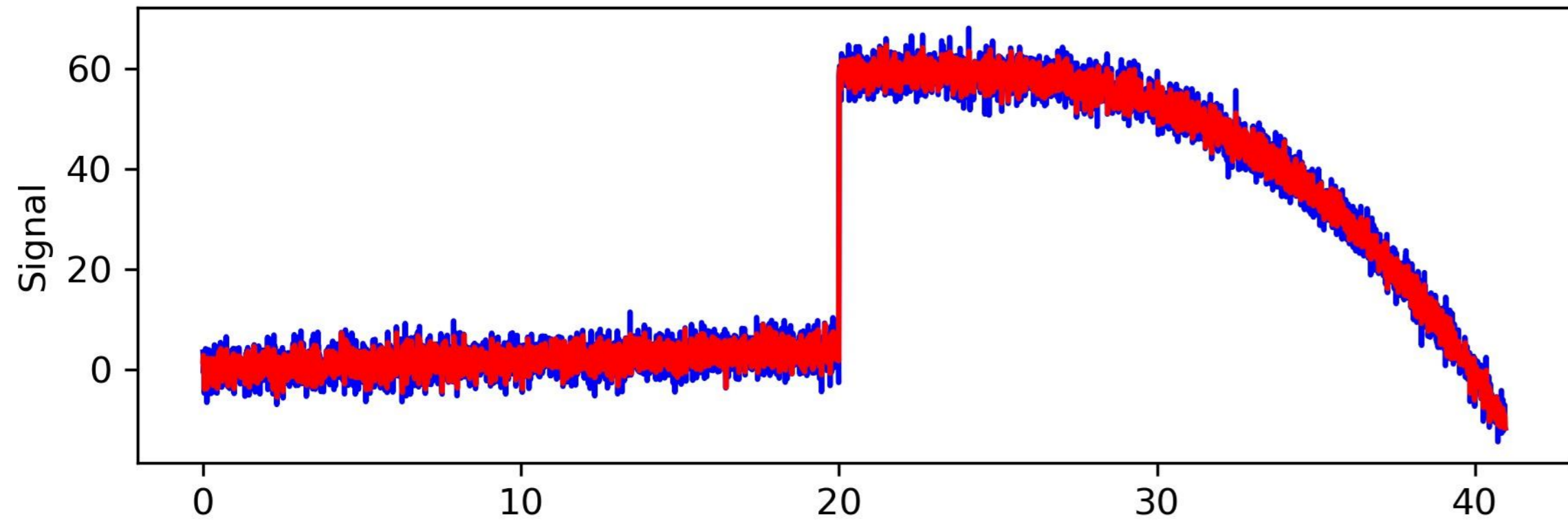
```
[b, a] = signal.butter(ij, fc/(Fs/2), 'high')  
w, histbutter = signal.freqz(b, a)
```

```
b, a] = signal.butter(ij, np.array([fc1, fc2]) / (Fs/2), 'bandpass')  
w, histbutter = signal.freqz(b, a)
```

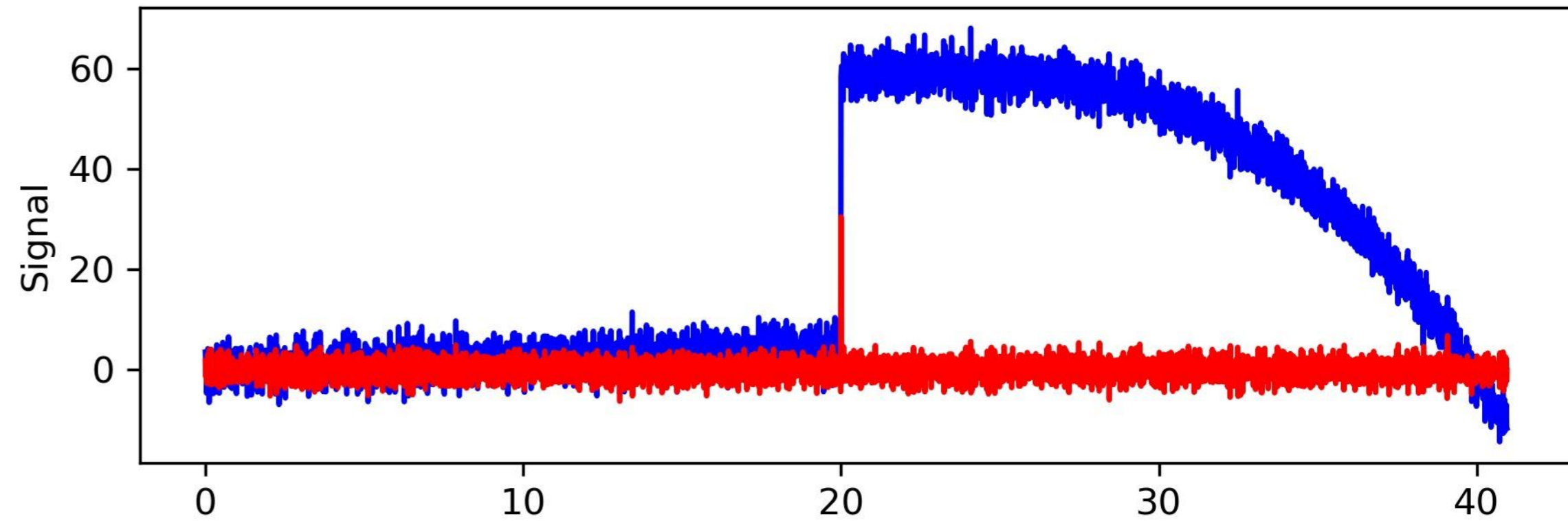


# Filtering

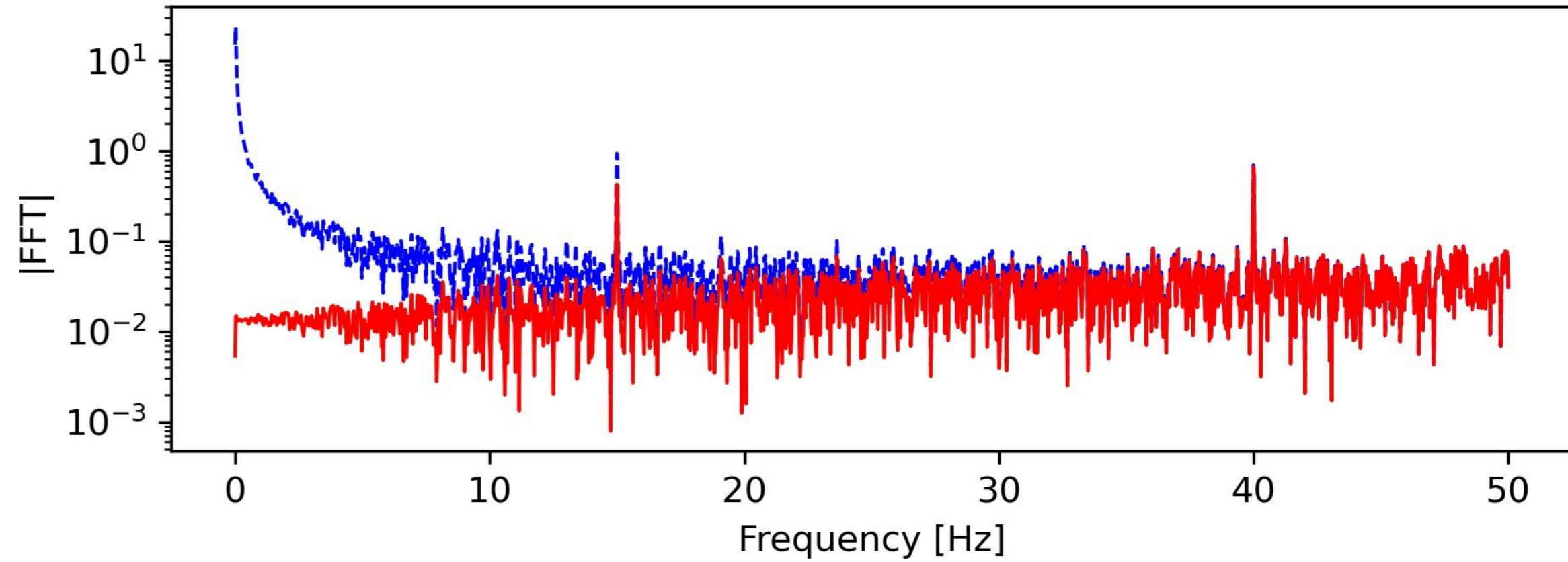
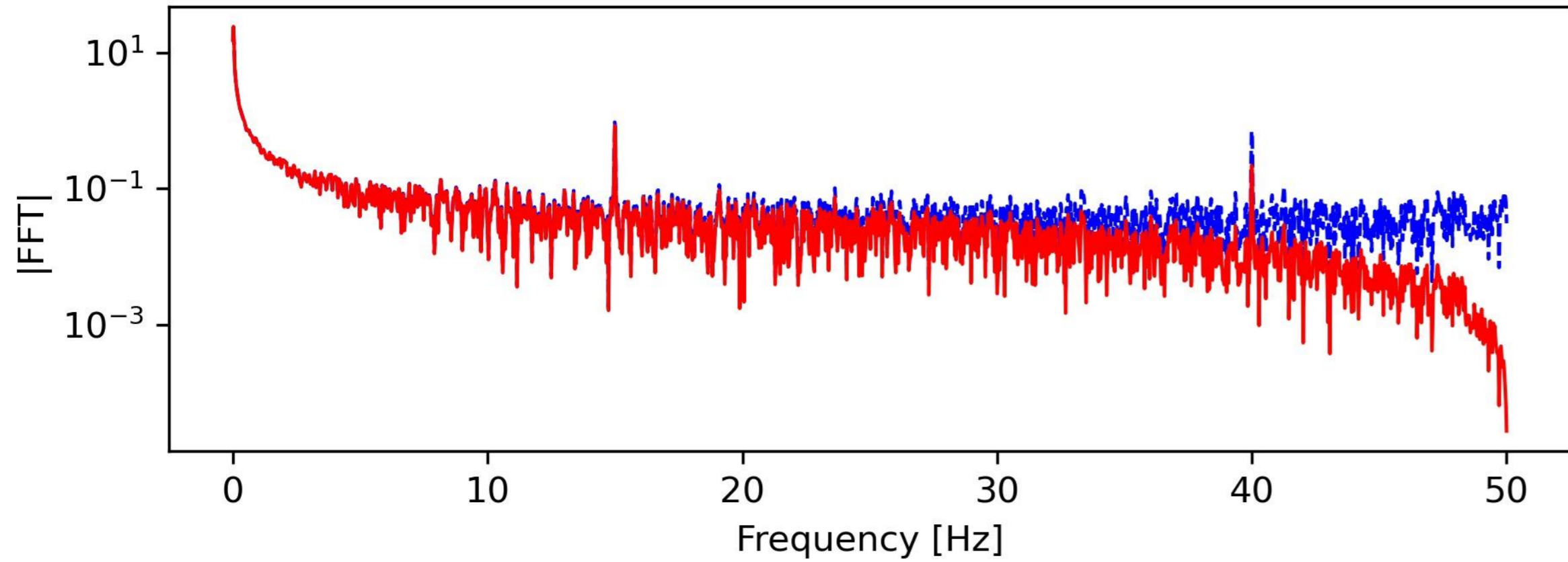
Butterworth



Low-pass filter



High-pass filter

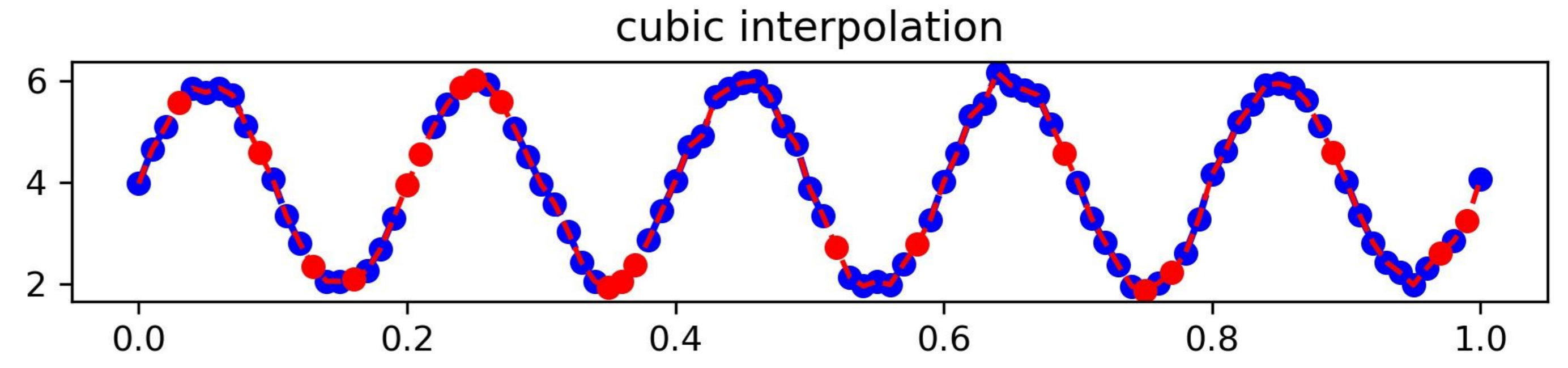
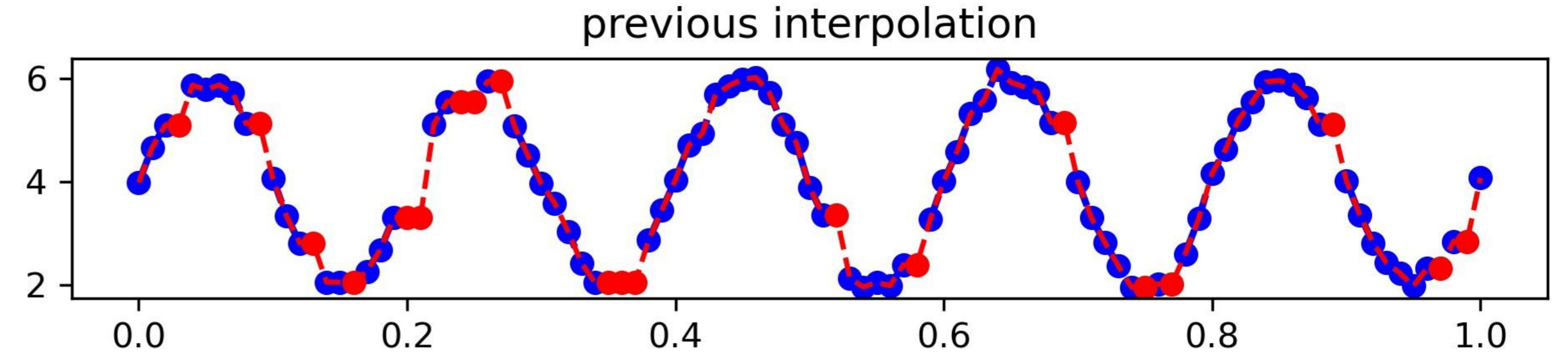
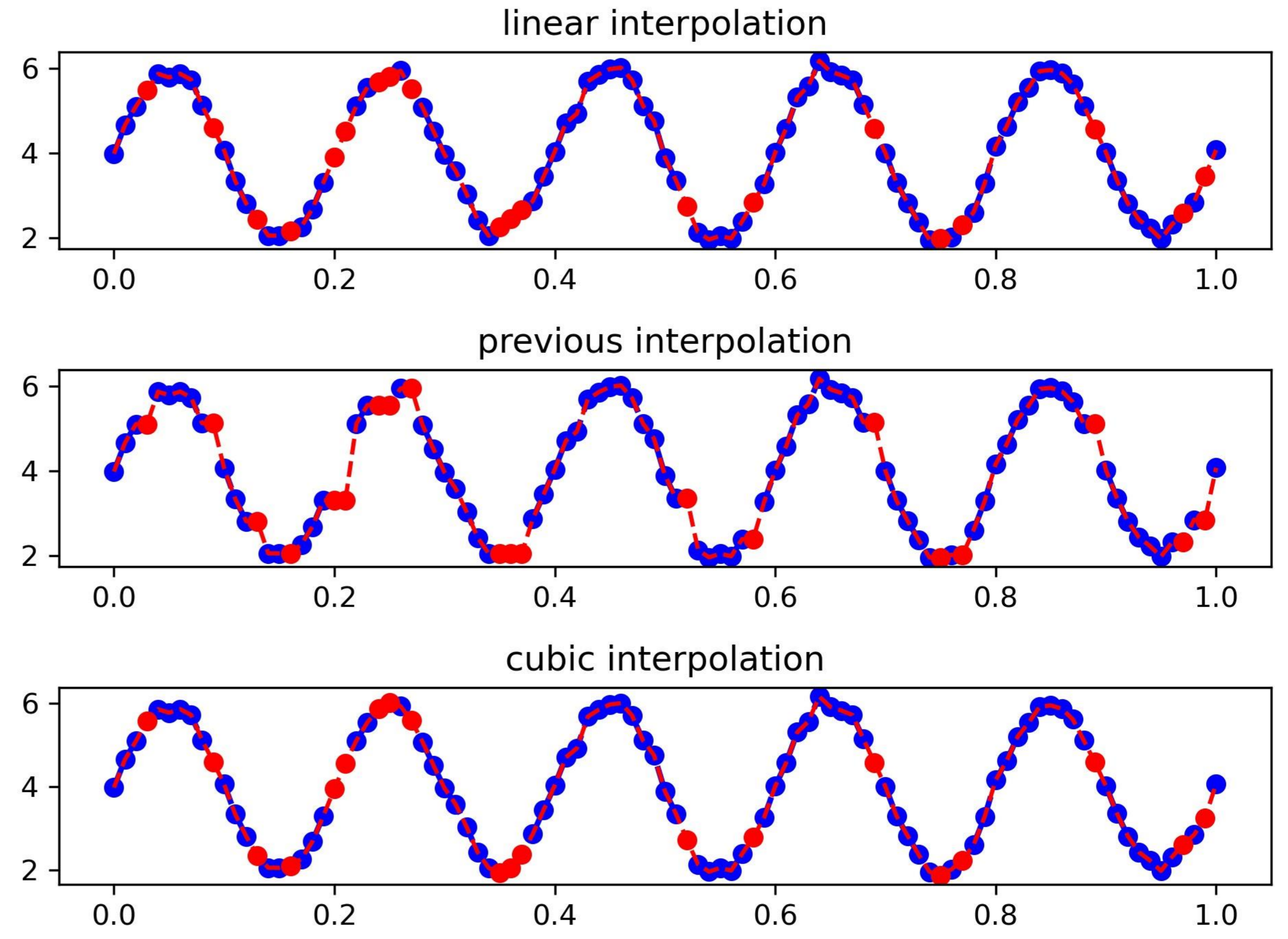
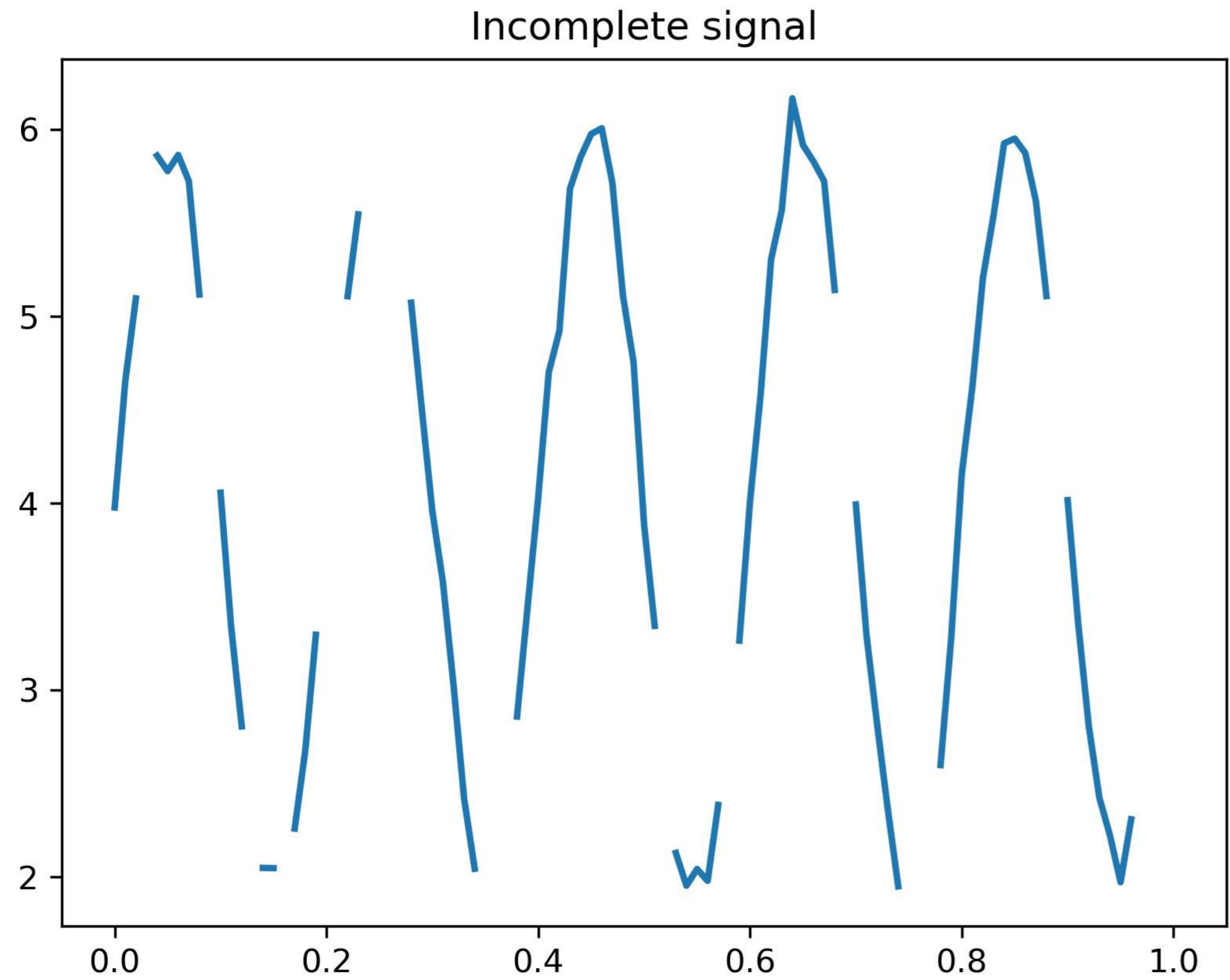




# Missing data



Missing data





# Power Spectral Density



# Densidad Espectral de Potencia (Power Spectral Density)

Dado: un registro finito de una señal.

Determina: la distribución de la frecuencia de la señal sobre la frecuencia.

Igualdad de Parseval

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega$$

Energy Spectral Density

$$S(\omega) = |Y(\omega)|^2$$

Power Spectral Density (PSD)

**Primera definición:**

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) e^{-i\omega k}; \quad r(k) = E\{y(t)y^*(t-k)\}$$

$$r(0) = E\{|y(t)|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega$$

Potencia de señal infinitesimal  
en la banda  $\omega + d\omega$





## Densidad Espectral de Potencia (Power Spectral Density)

Dado: un registro finito de una señal.

Determina: la distribución de la frecuencia de la señal sobre la frecuencia.

Igualdad de Parseval

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega$$

**Conservación de energía:**  
*La energía en el espacio temporal es igual a la energía en el espacio espectral.*

Power Spectral Density (PSD)

**Segunda definición:**

$$S(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} |Y_N(\omega)|^2 \right\}$$

## Power Spectral Density

PROBLEMA: Un registro finito de una señal  $y(x)$   
Encontrar una estimación de  $\hat{S}(\omega)$

Método no-paramétrico: **PERIODOGRAMA (PERIODOGRAM)**

$$S(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) e^{-i\omega t} \right|^2 \right\} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{N} |Y_N(\omega)|^2 \right\}$$

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N y(t) e^{-i\omega t} \right|^2$$

[L\\_Periodogram.py](#)

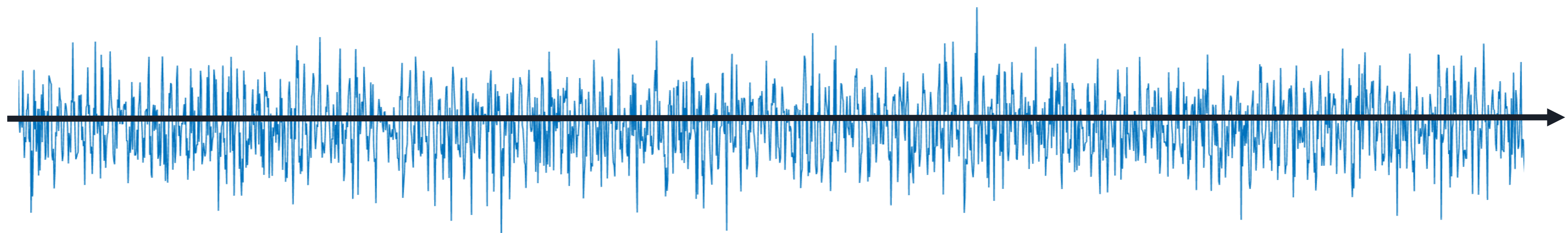
```
from scipy.signal import periodogram
```

```
fxx, pxx = periodogram(x, Fs, nfft=np.size(x), window=np.ones(np.size(x)), return_onesided=1, scaling='spectrum', detrend=False)
```



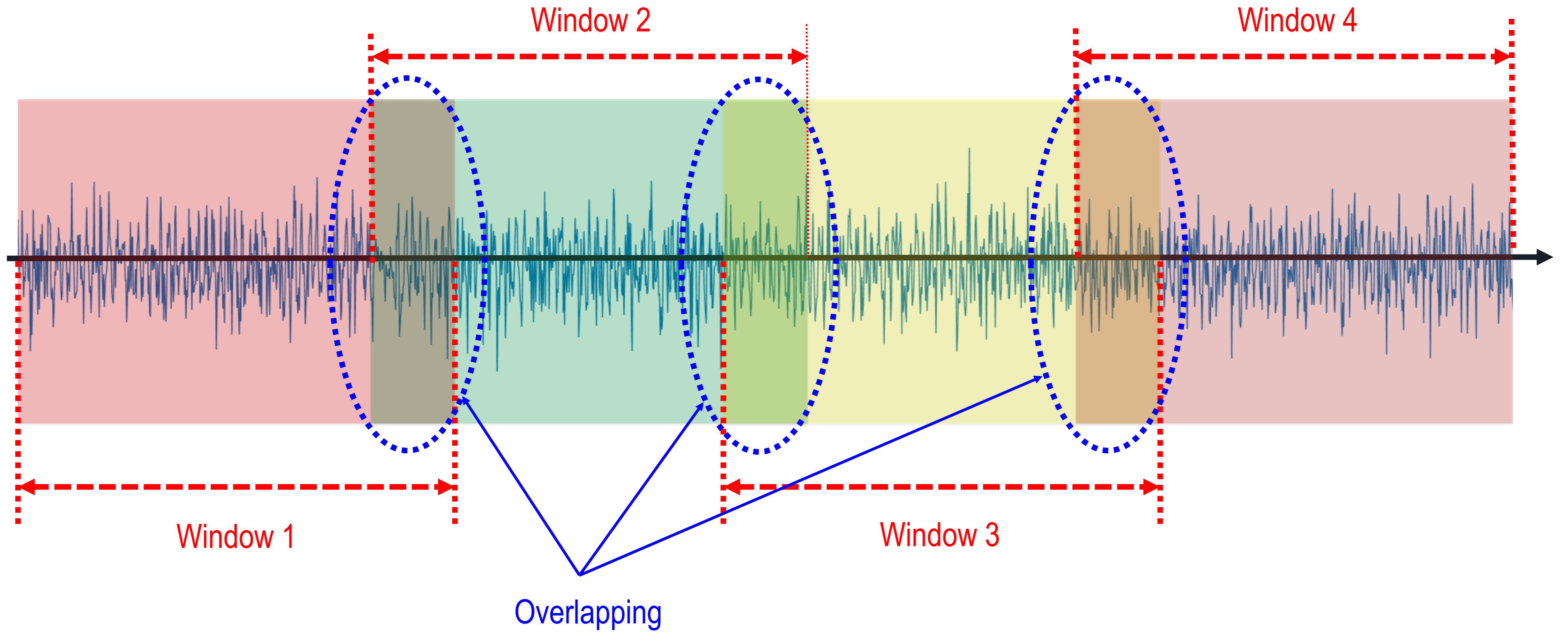
# Power Spectral Density

Método paramétrico – **Welch's method**



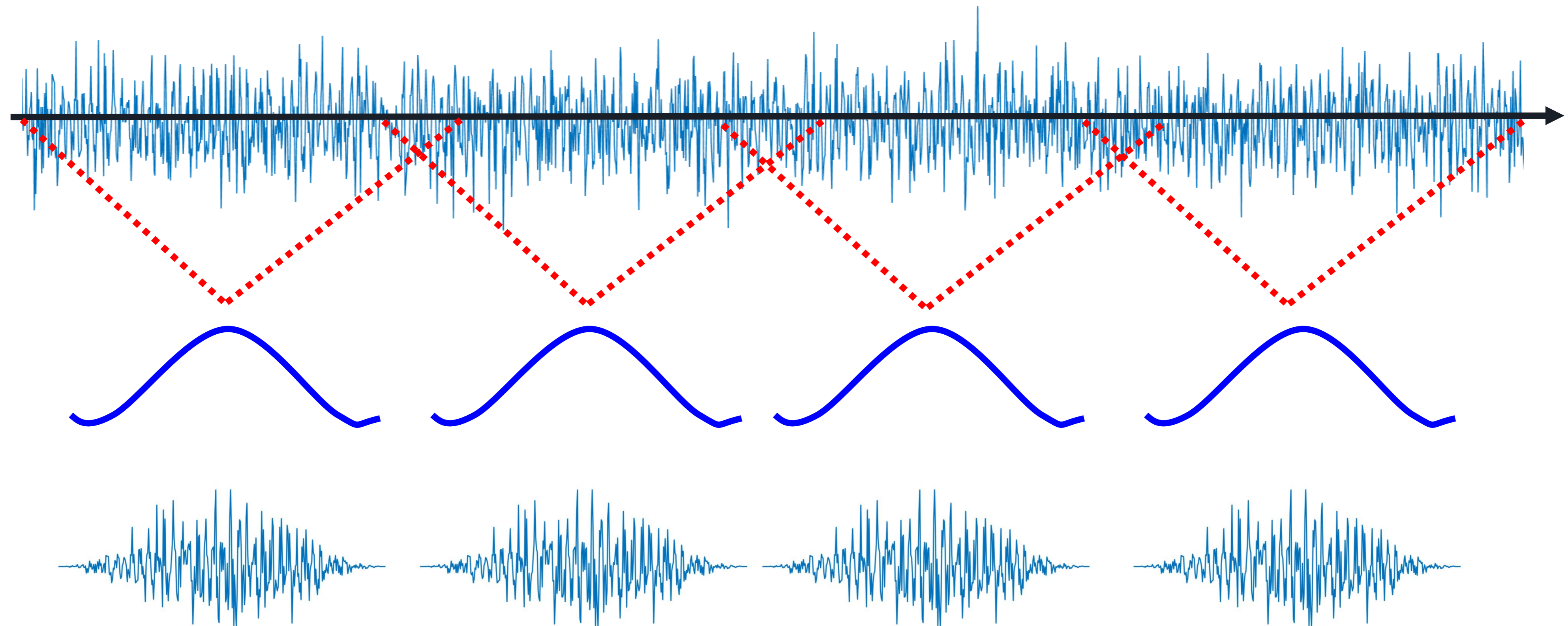
# Power Spectral Density

Método paramétrico – **Welch's method**



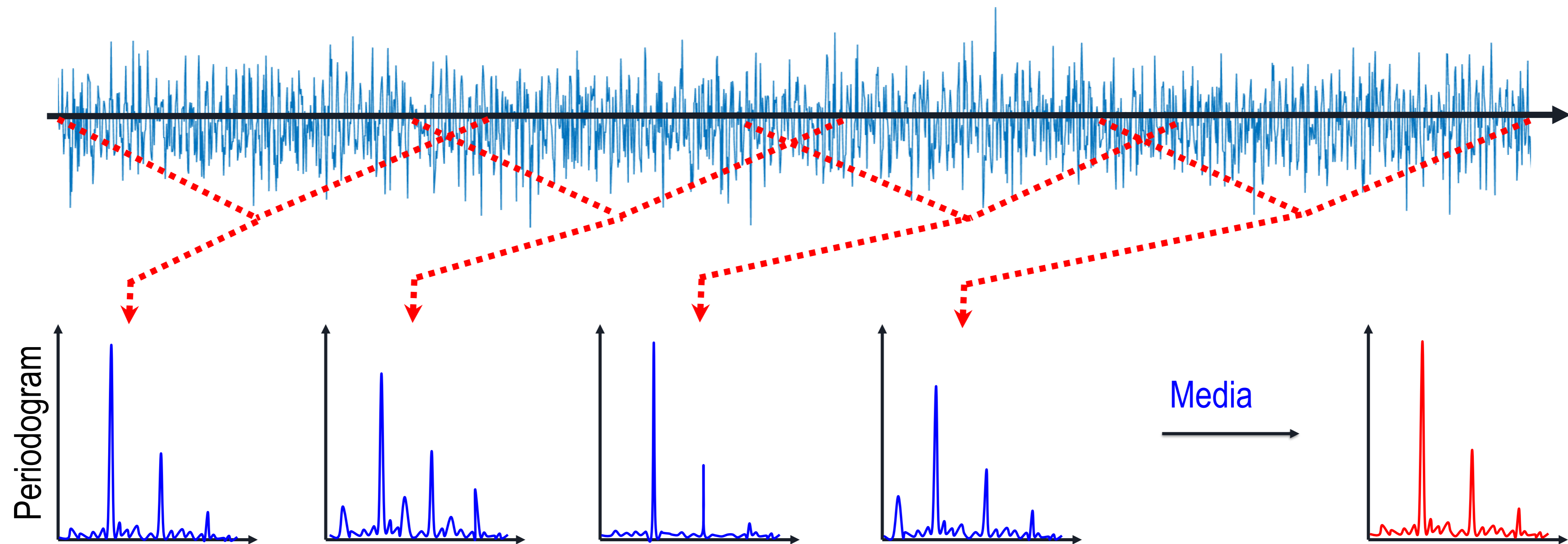
# Power Spectral Density

Método paramétrico – **Welch's method**



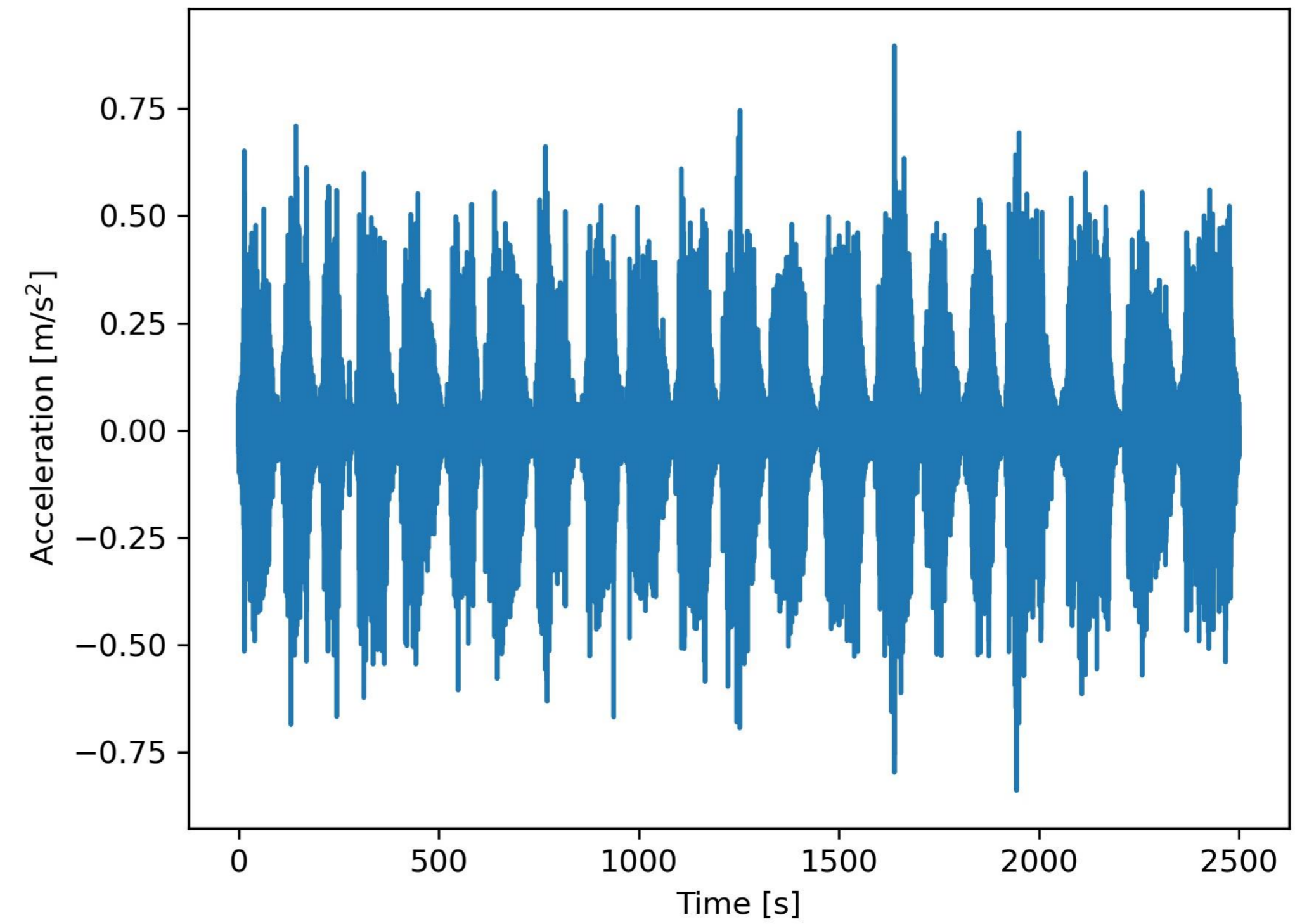
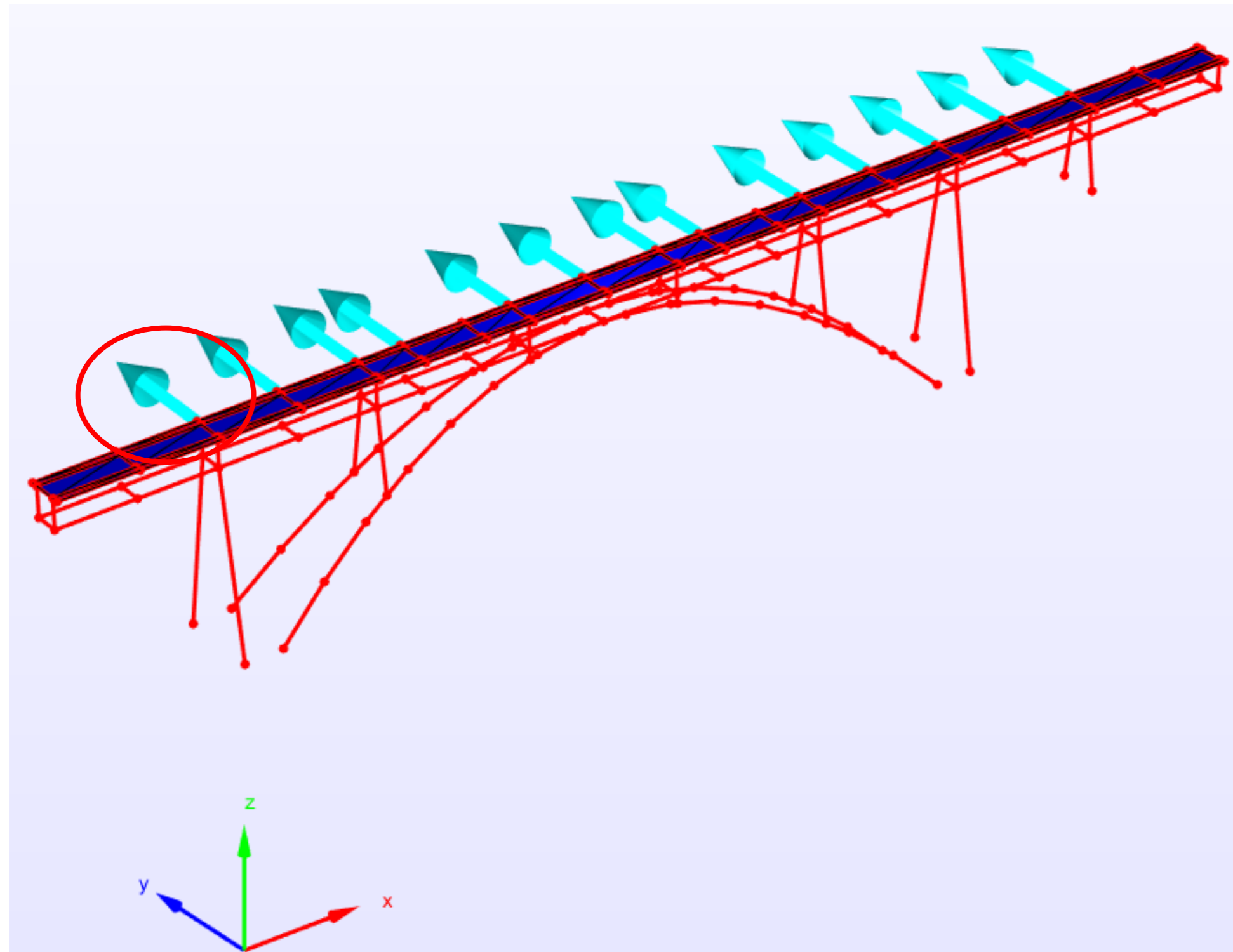
# Power Spectral Density

Método paramétrico – **Welch's method**

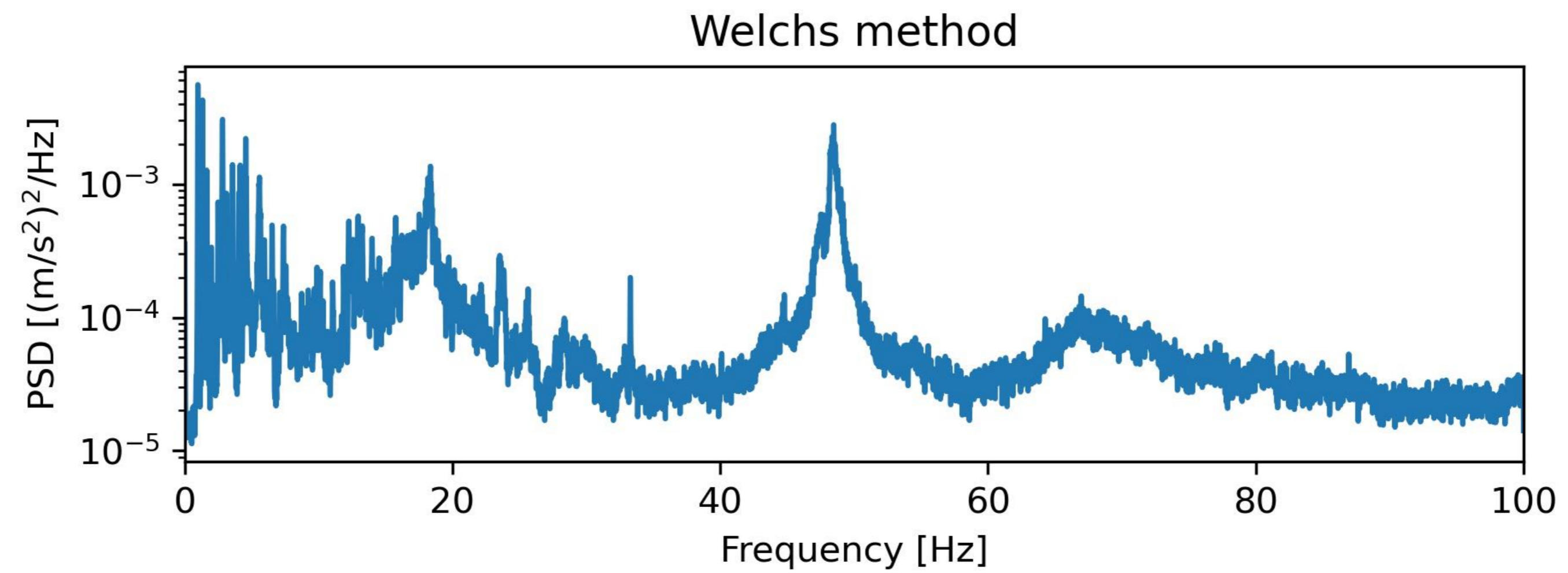
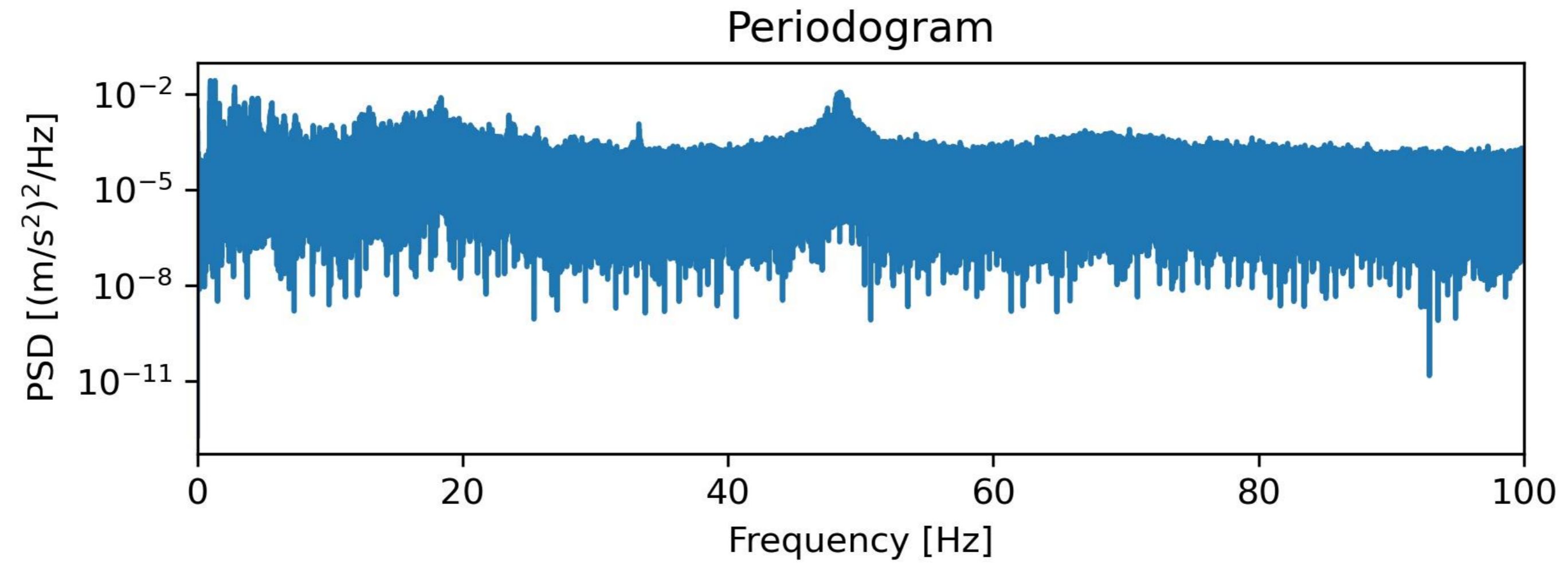


# Power Spectral Density

Ejemplo: medición real en Puente ferroviario

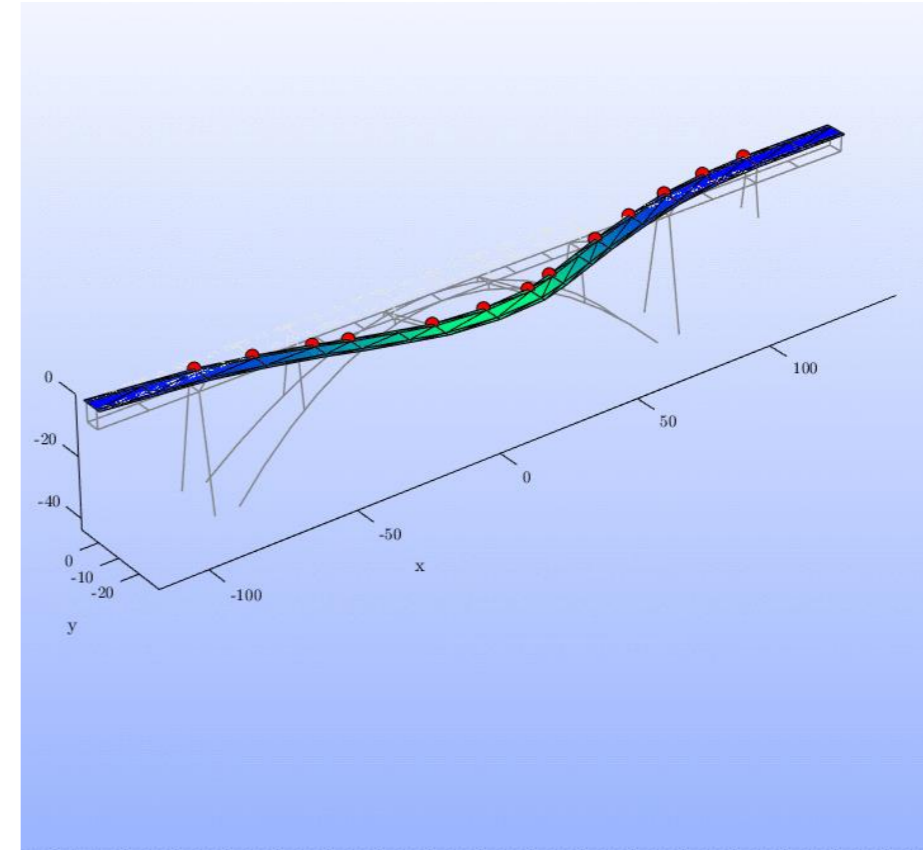
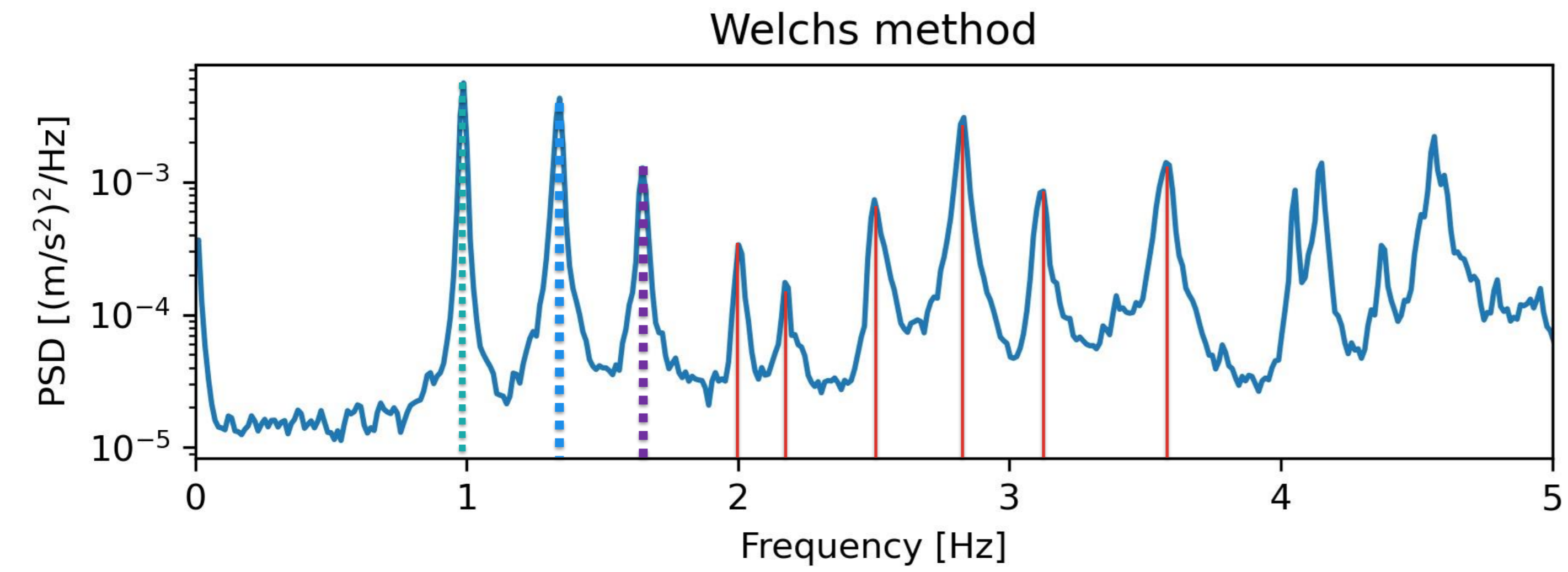
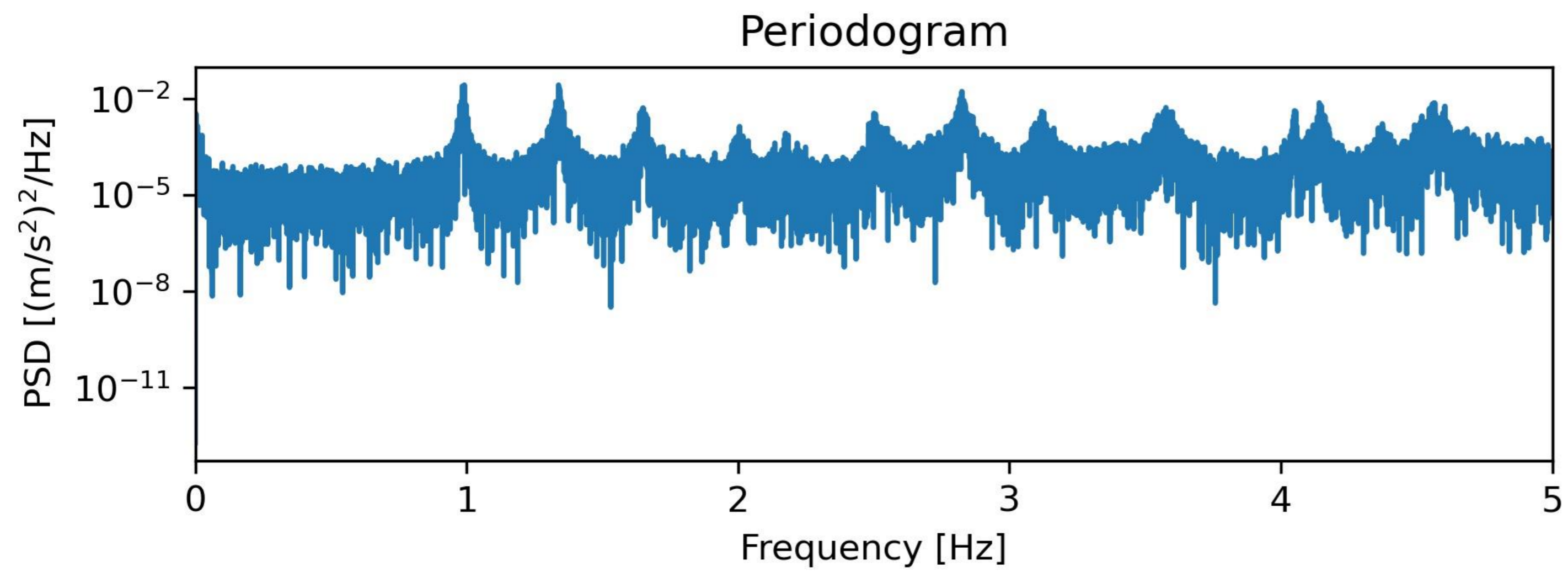


# Power Spectral Density

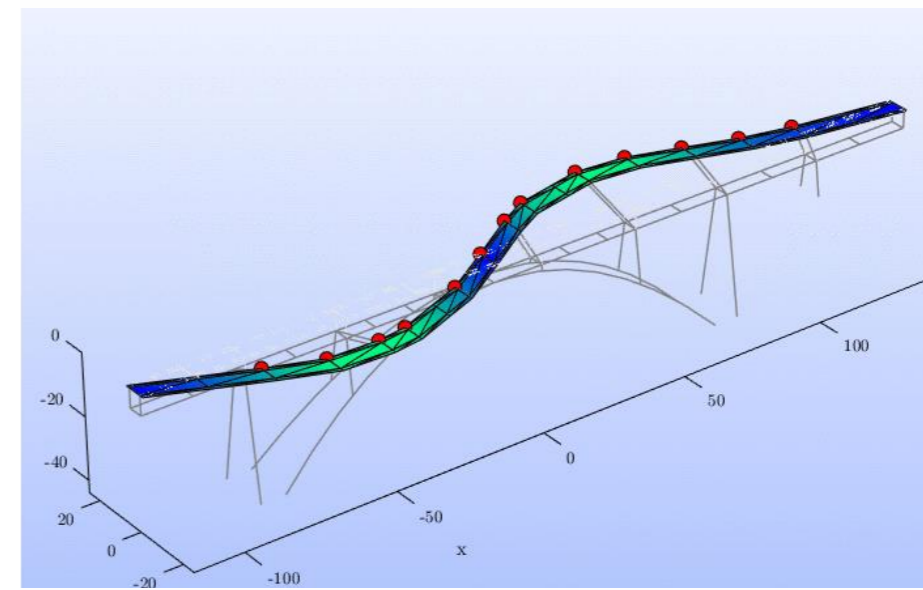




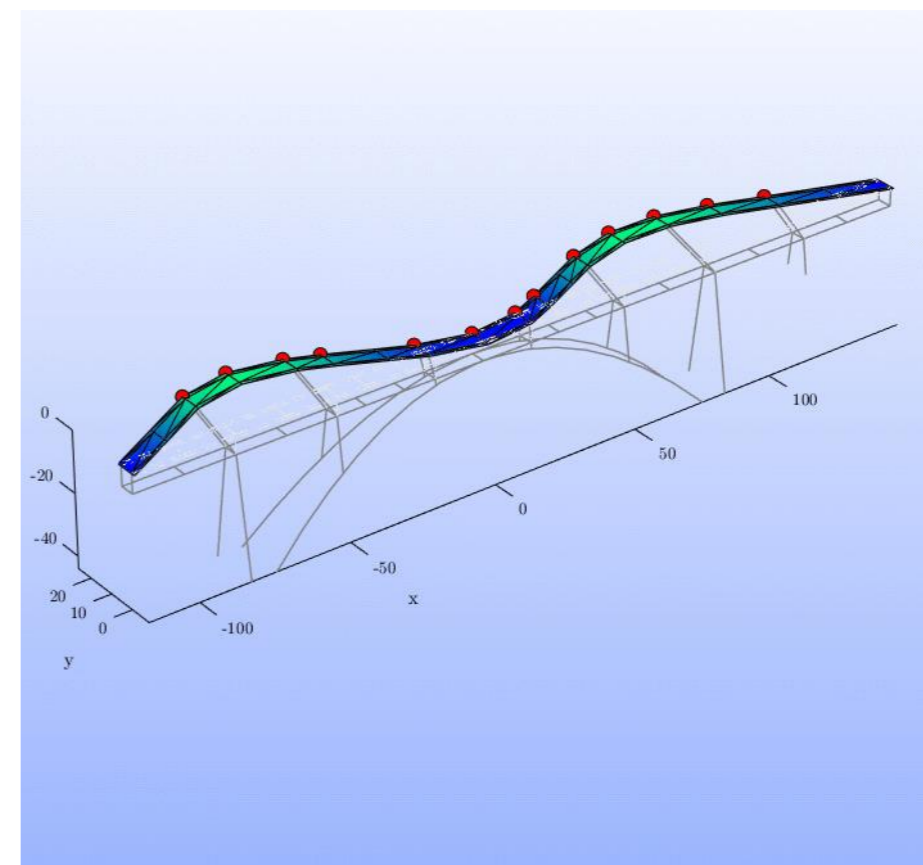
# Power Spectral Density



Modo 1



Modo 2



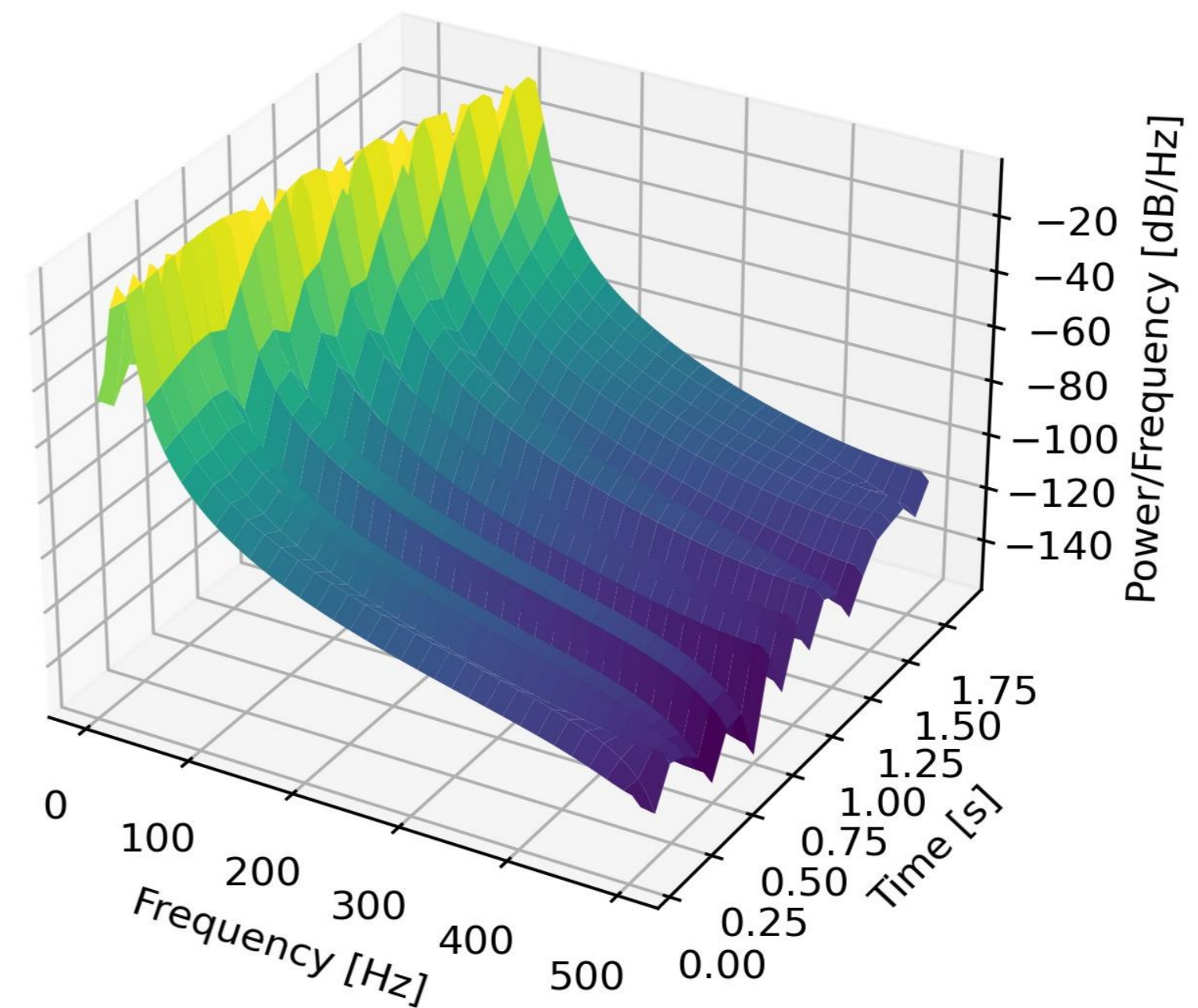
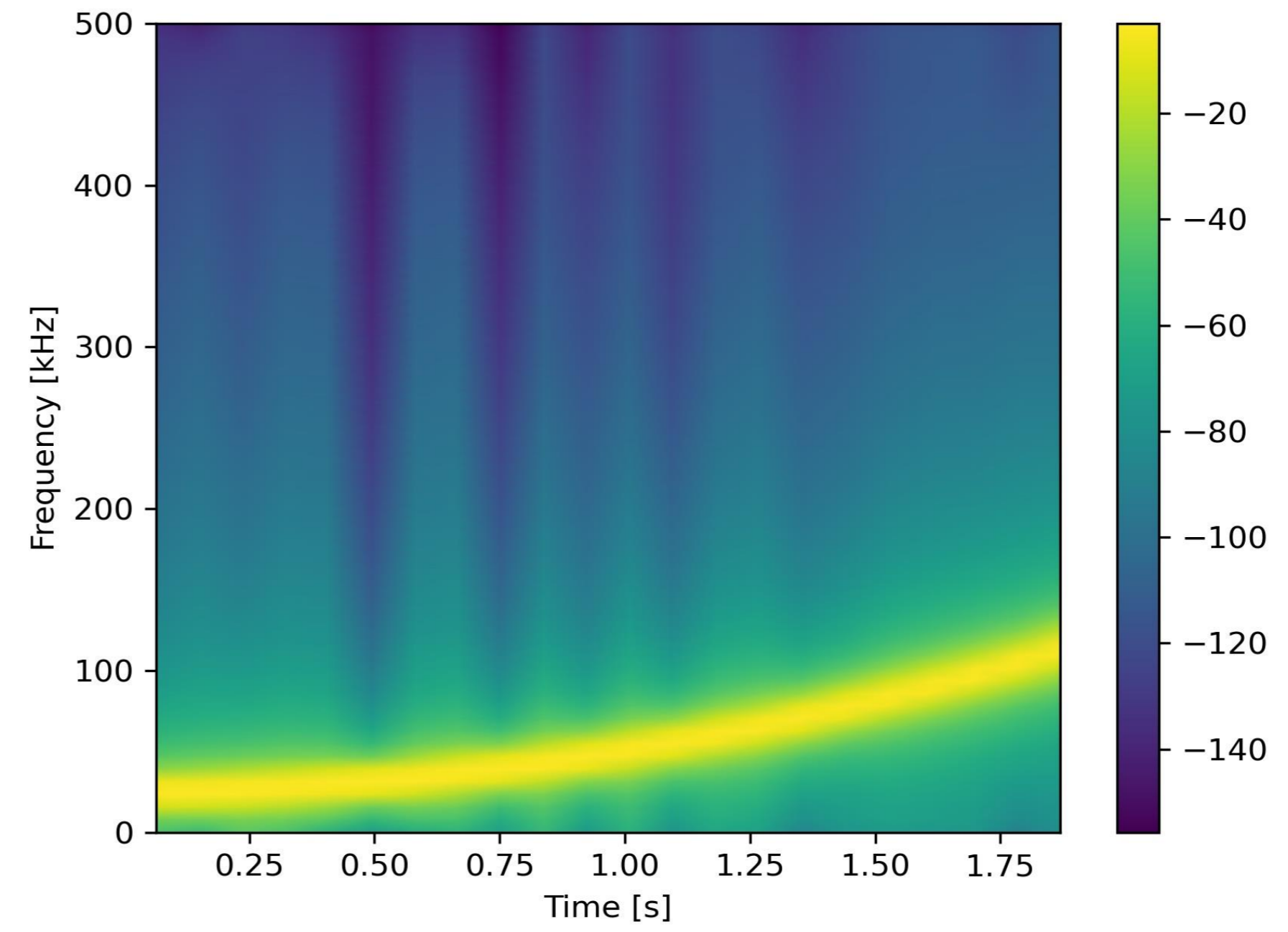
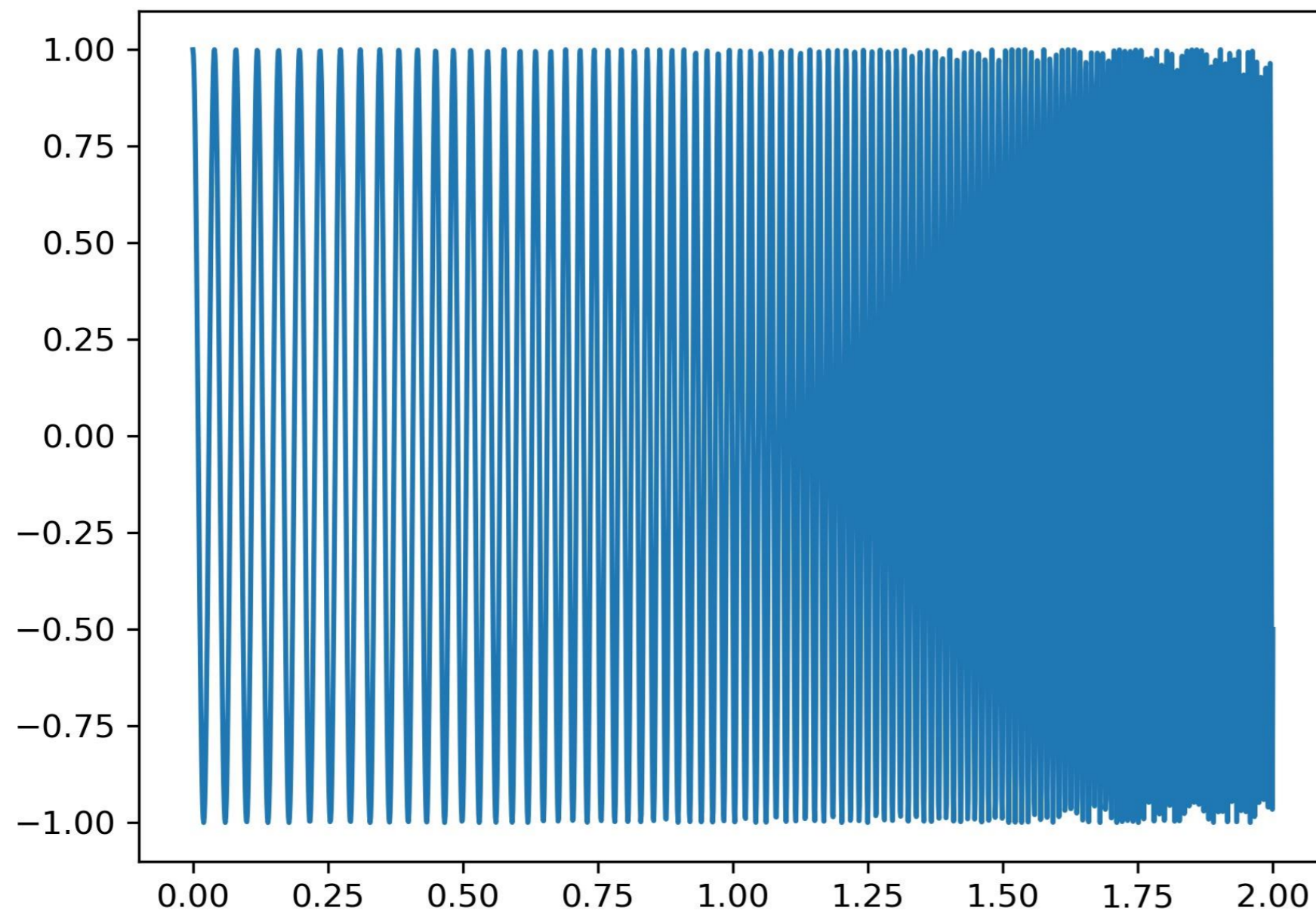
Modo 3



# Time-Frequency domain



# Time-Frequency domain



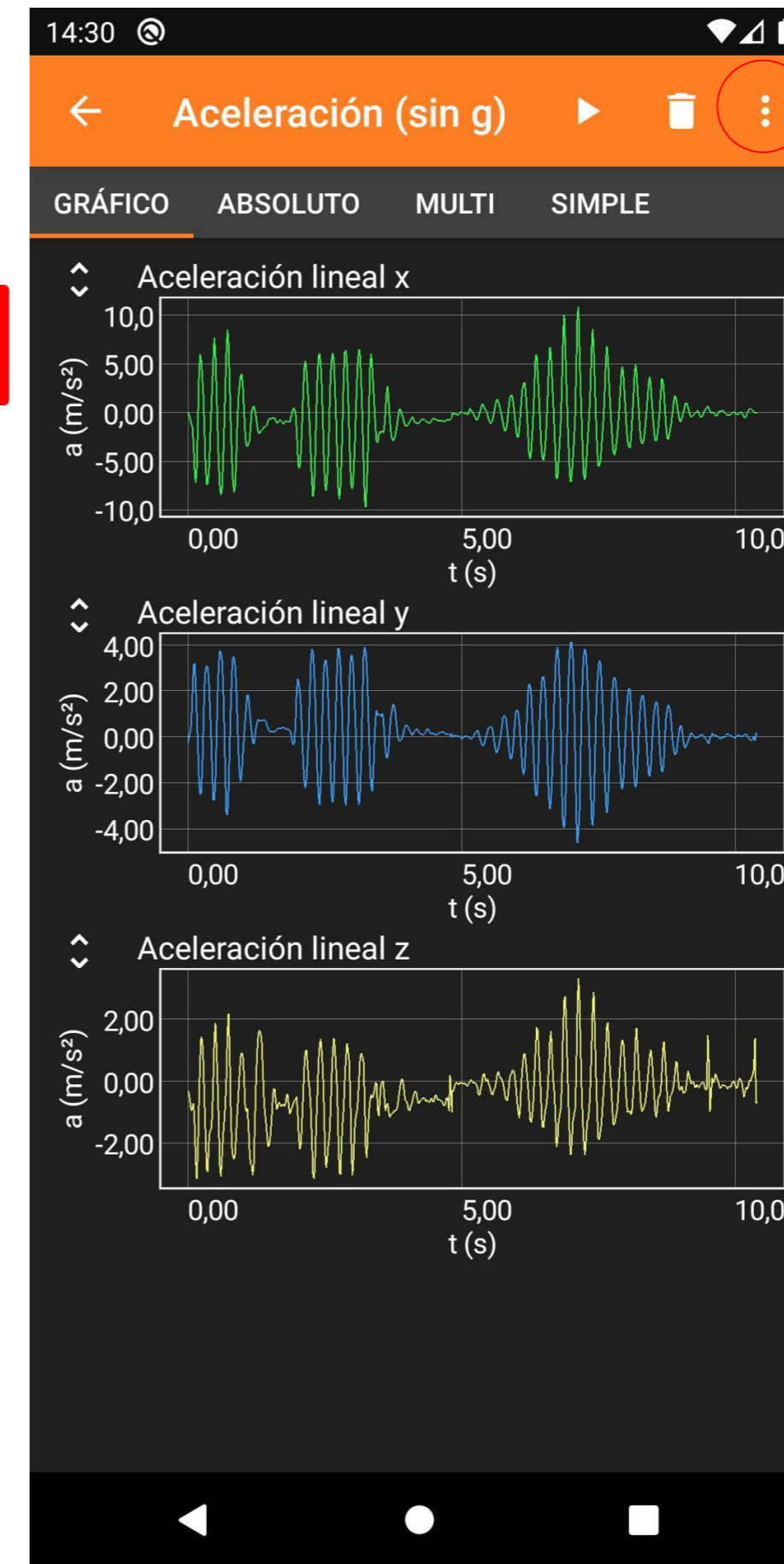


# Práctica MEMS



# Práctica MEMS

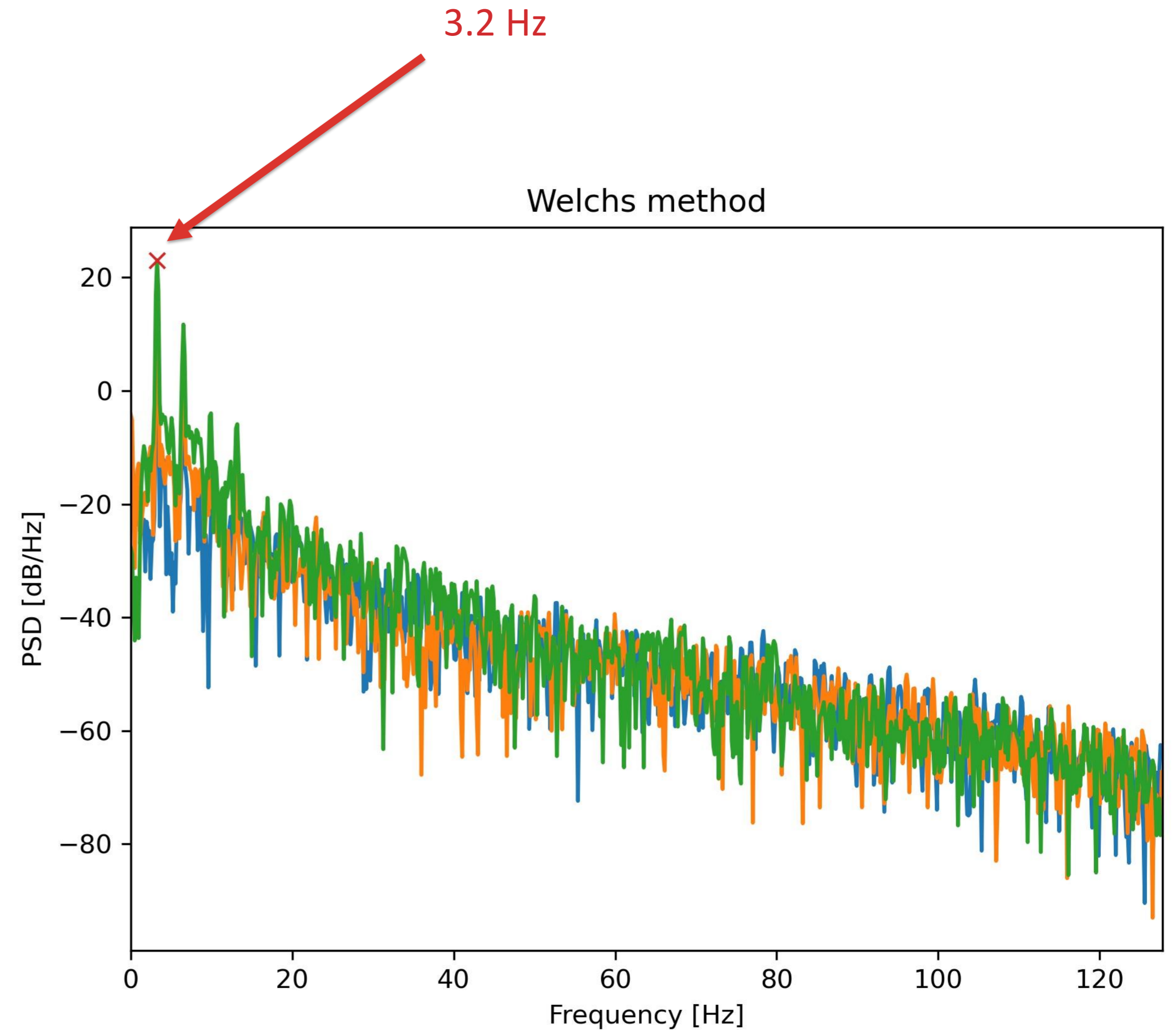
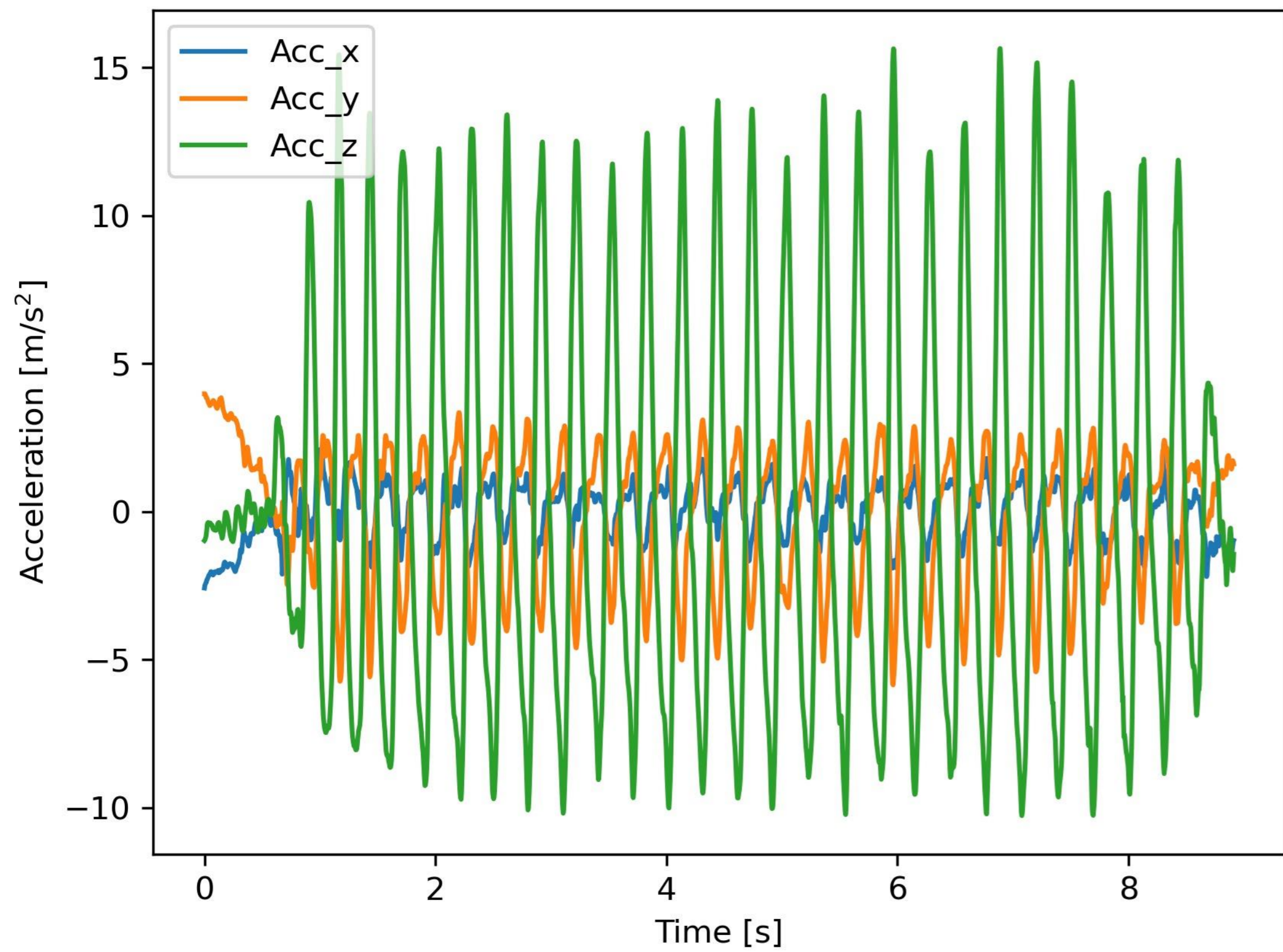
Phyphox – Aplicación móvil que permite monitorizar todos los sensores de nuestro dispositivo móvil.



Exportar datos

**Objetivo**  
Generar una señal armónica de frecuencia 3 Hz (3 ciclos por segundo)

# Práctica MEMS





UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Máster Universitario en Estructuras  
Curso 2020-2021

# Tema III: Experimental Modal Analysis

Módulo: MÓDULO FUNDAMENTAL: CALIDAD Y DAÑO  
Materia: **Análisis Modal y Detección de Defectos**

**Enrique García Macías**

[enriquegm@ugr.es](mailto:enriquegm@ugr.es)

**Departamento de Mecánica de Estructuras e  
Ingeniería Hidráulica**

# Desarrollo del curso

	FECHA		HORA	PROFESOR	TEMA	
Clase 1	Lunes	1 febrero	9:30-11:30	EGM	1	Introducción: Análisis modal dentro del marco del mantenimiento de la salud estructural.
Clase 2	Lunes	8 febrero	9:30-11:30	EGM	2	Fuentes de deterioro, patologías estructurales, y tecnologías de monitorización.
Clase 3	Lunes	15 febrero	9:30-11:30	EGM	3	Taller: procesamiento de señales.
Clase 4	Lunes	22 febrero	9:30-11:30	EGM	4	Análisis modal experimental.
Clase 5	Lunes	15 marzo	9:30-11:30	EGM	5	Análisis modal operacional.
Clase 6	Lunes	12 abril	9:30-11:30	EGM	6	Análisis modal operacional automatizado. Práctica de laboratorio I.
Clase 7	Lunes	19 abril	9:30-11:30	EGM	7	Taller: Identificación del daño estructural.
Clase 8	Lunes	26 abril	9:30-11:30	RCT	8	Técnicas de identificación dinámica basadas en análisis modal operacional.
Clase 9	Lunes	26 abril	12:00-14:00	RCT	9	Práctica de laboratorio II: Test de vibración ambiental.
Clase 10	Martes	27 abril	9:30-11:30	RCT	10	Casos de estudio.
Clase 11	Martes	27 abril	12:00-14:00	RCT		Presentación de trabajos.

ENTREGA DE TRABAJOS Y EVALUACIÓN

Del 3 al 28 de mayo



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA



# ÍNDICE

- Repaso fundamentos básicos de dinámica de estructuras.
- EMA vs OMA.
- Fundamentos teóricos de EMA.
- Práctica de identificación modal mediante EMA.



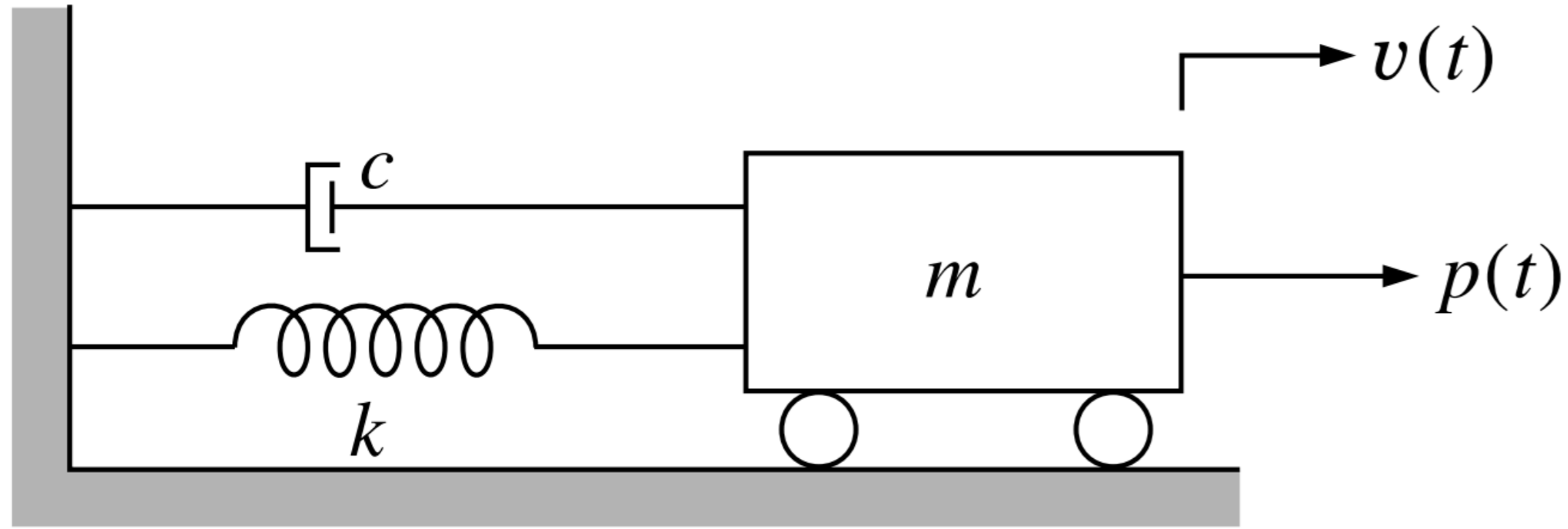
# Repaso fundamentos básicos de dinámica de estructuras.





$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_d = \omega\sqrt{1 - \xi^2}$$

### SDOF



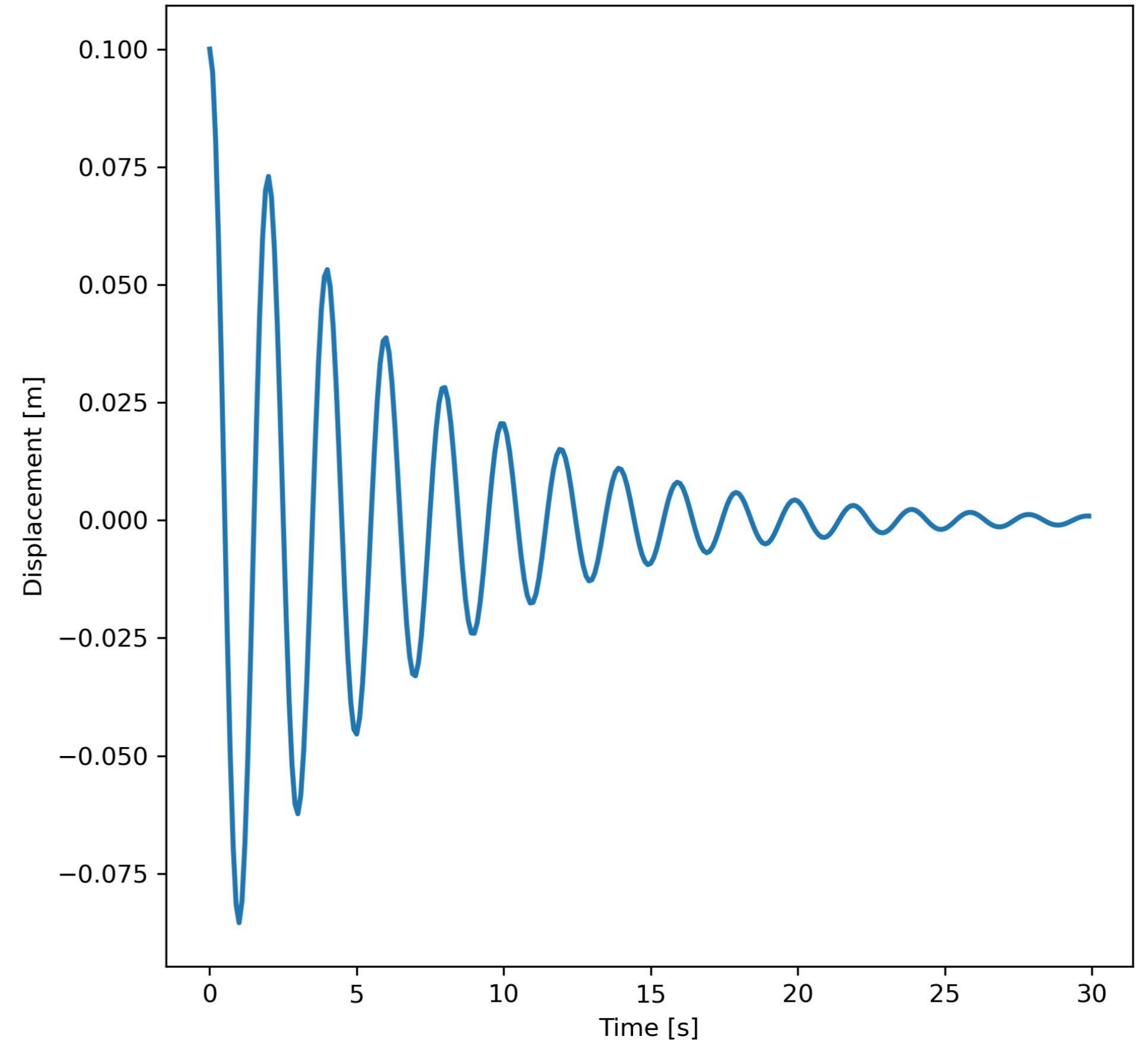
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Free vibrations

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)]$$

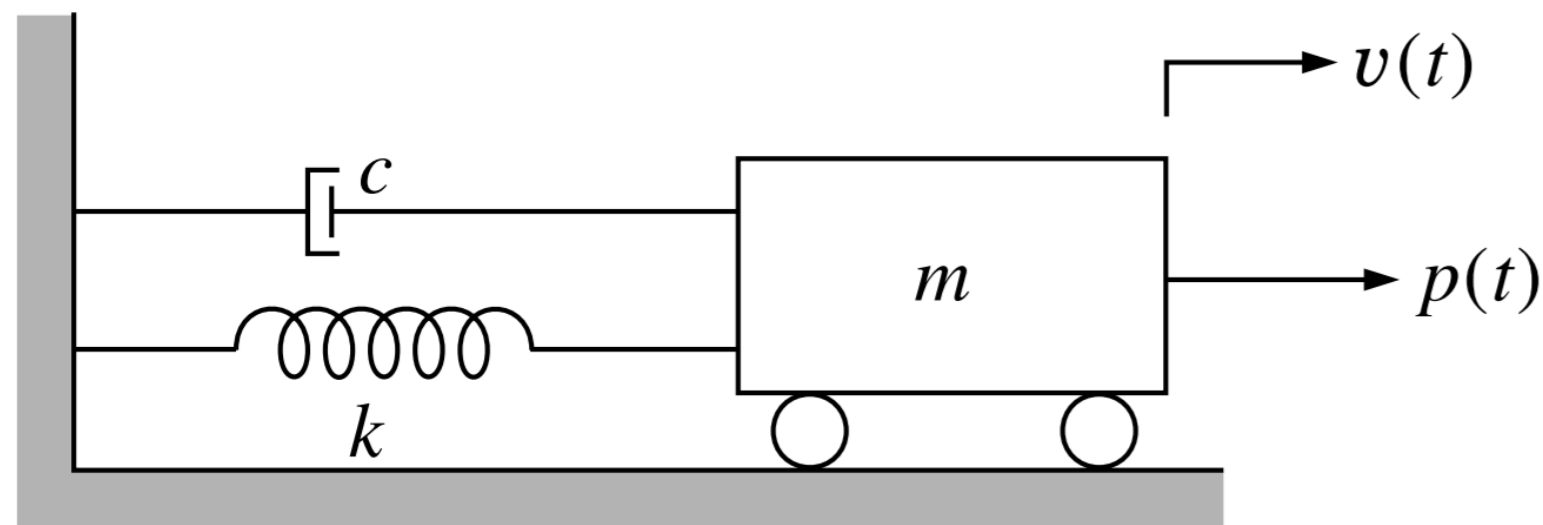
$$\text{BC} \quad \begin{aligned} A &= u_o \\ B &= \frac{v_o + \xi\omega A}{\omega_d} \end{aligned}$$



SDOF\_Dynamic\_system.py



## Harmonic vibrations



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_o \sin(\omega_f t)$$

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)]$$

$$x_p(t) = C_1 \sin(\omega_f t) + C_2 \cos(\omega_f t)$$

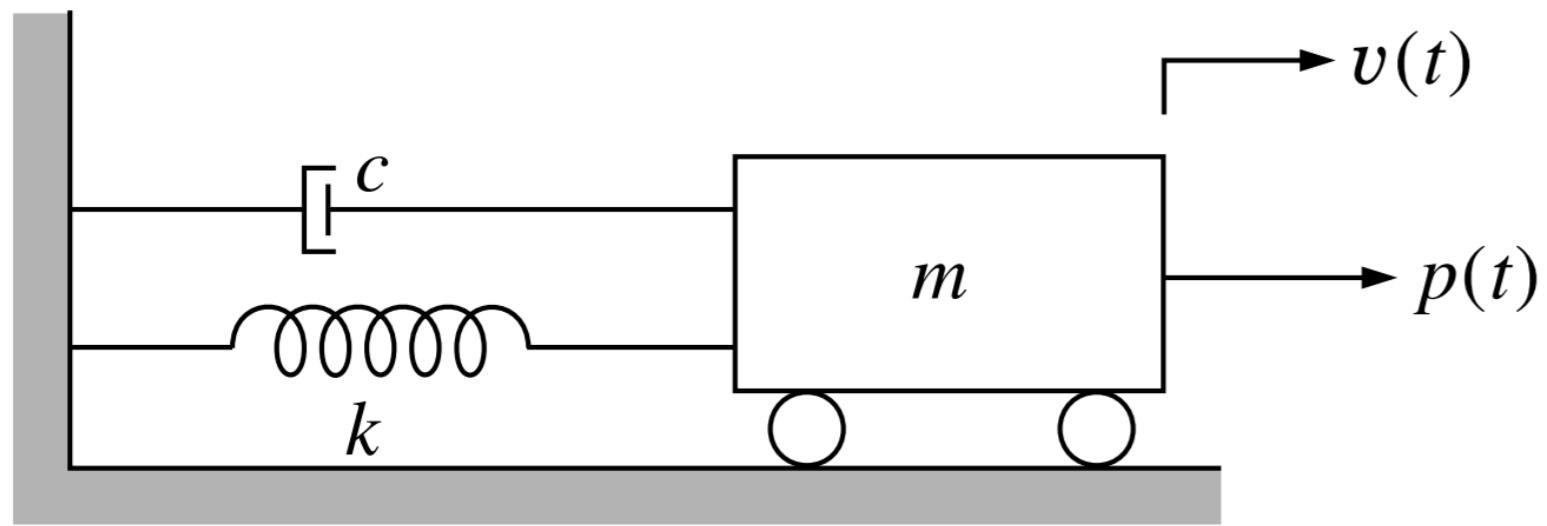
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$



$$\left[ -C_1 \omega_f^2 + C_2 \omega_f (2\xi\omega) + C_1 \omega^2 \right] \cos \omega_f t + \left[ -C_2 \omega_f^2 - C_1 \omega_f (2\xi\omega) + C_2 \omega^2 - \frac{p_o}{m} \right] \sin \omega_f t = 0$$

$$\left. \begin{aligned} -C_1 \omega_f^2 + C_2 \omega_f (2\xi\omega) + C_1 \omega^2 &= 0 \\ -C_2 \omega_f^2 - C_1 \omega_f (2\xi\omega) + C_2 \omega^2 - \frac{p_o}{m} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} C_1 &= \frac{p_o}{k} \left[ -\frac{2\xi\beta}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \right] \\ C_2 &= \frac{p_o}{k} \left[ -\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \right] \end{aligned} \quad \beta = \frac{\omega_f}{\omega}$$



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p_o \sin(\omega_f t)$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= e^{-\xi\omega t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)]$$

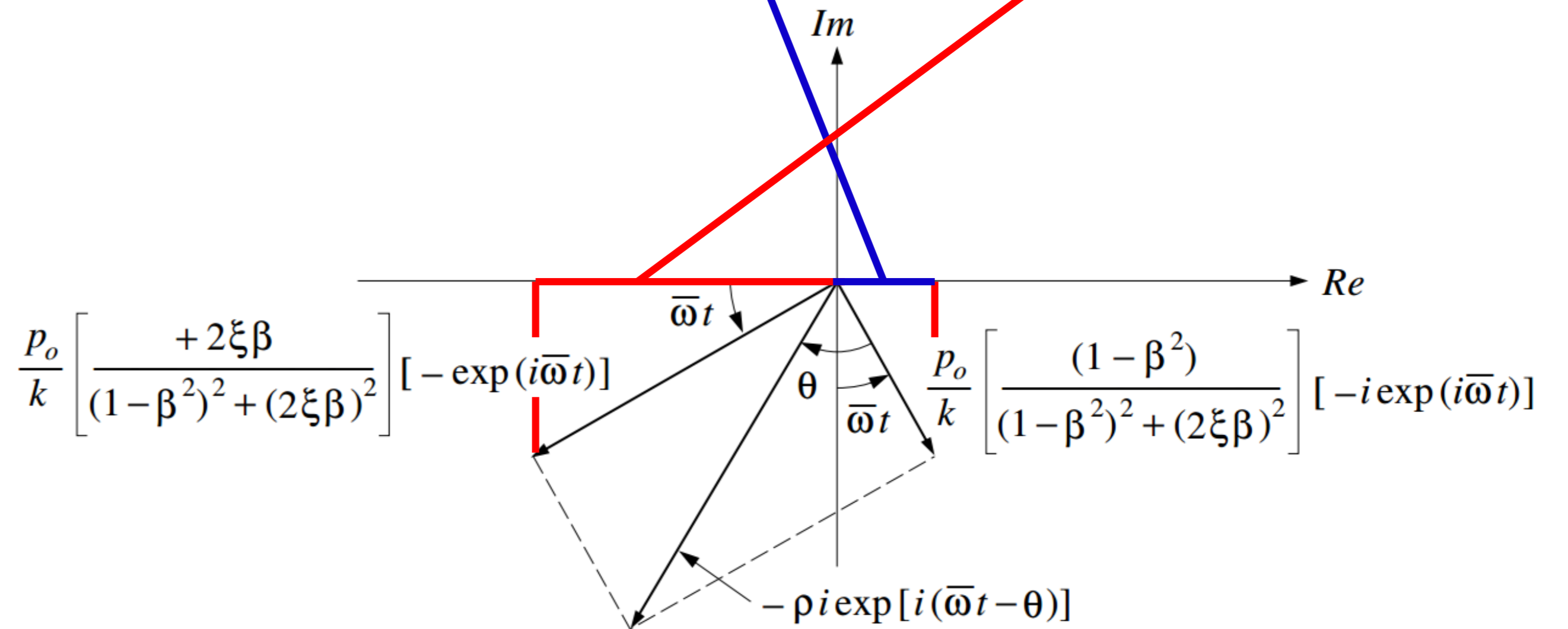
$$+ \frac{p_o}{k} \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \right] [(1 - \beta^2) \sin(\omega_f t) - 2\xi\beta \cos(\omega_f t)]$$

Steady-state  
harmonic  
response

$$x_p(t) = p \sin(\omega_f t + \theta) \rightarrow p = \frac{p_o}{k} [(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2]^{-1/2}$$

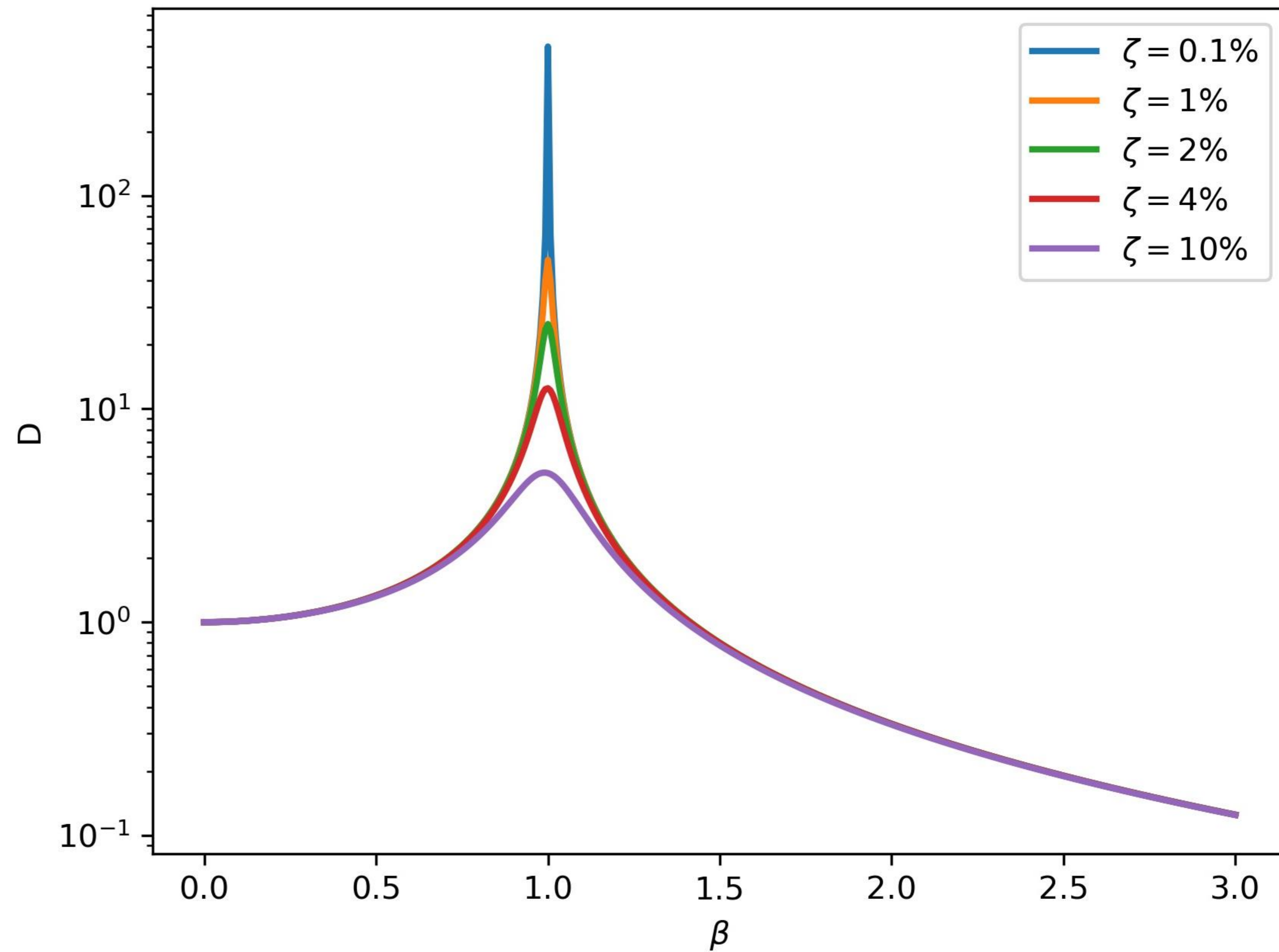
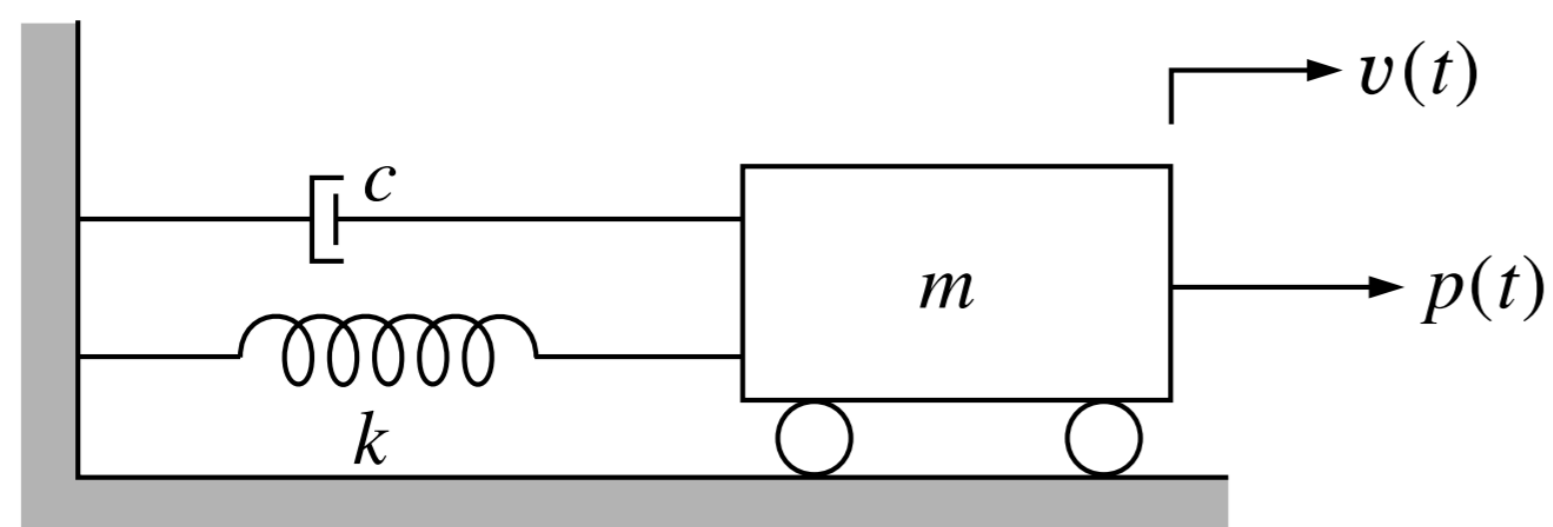
*D*

Dynamic amplification factor





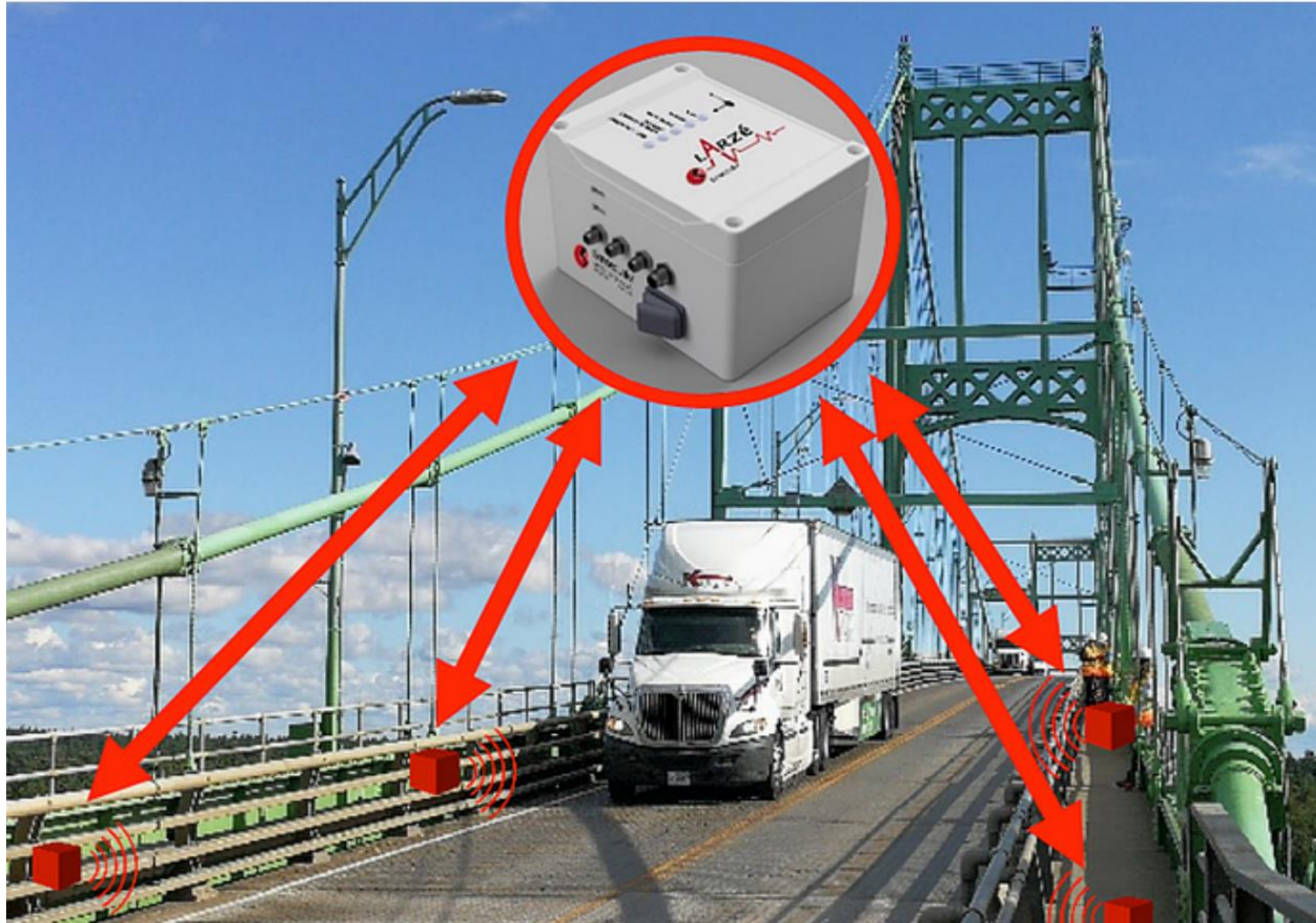
$$D = [(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2]^{-1/2}$$



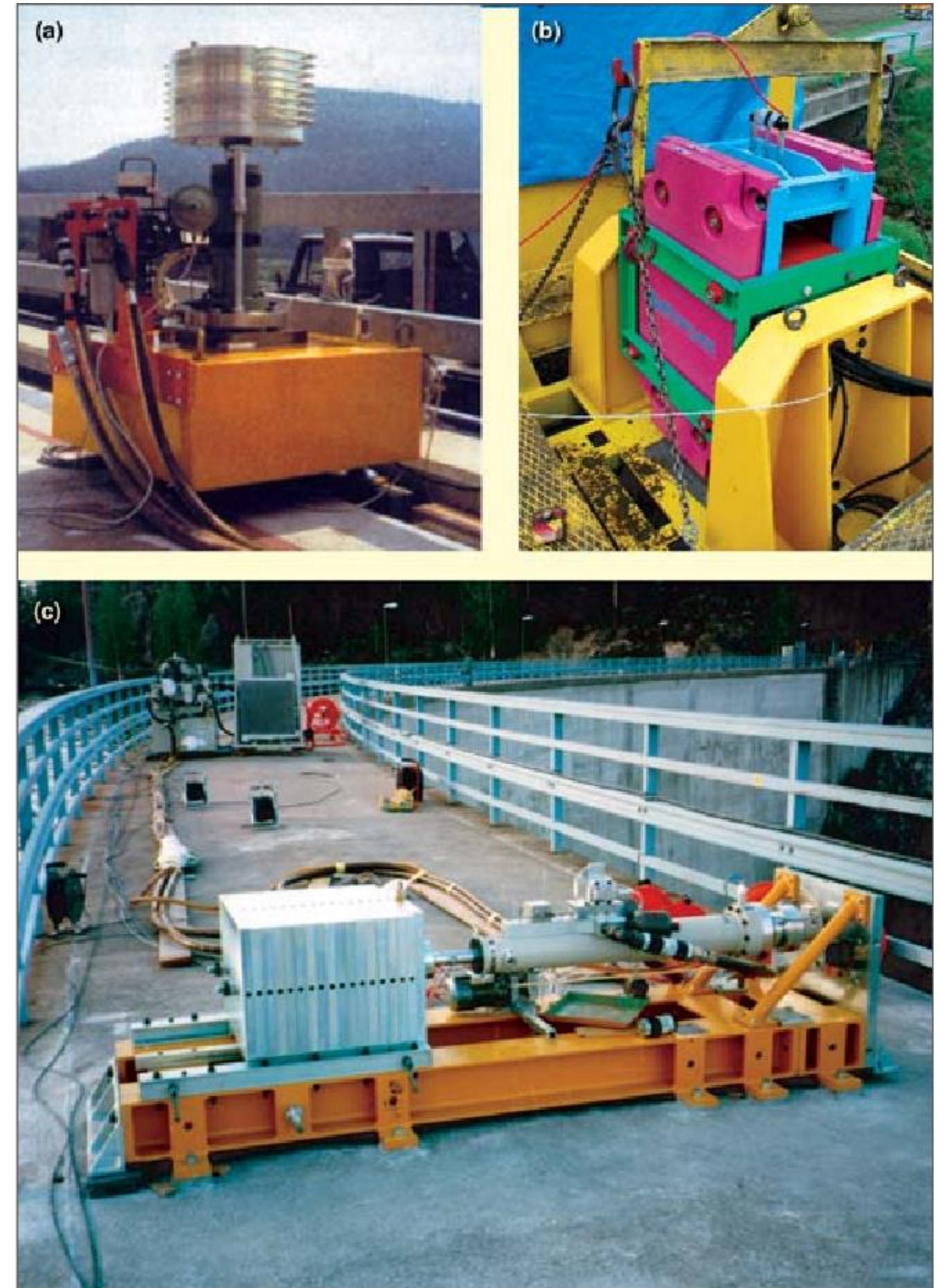


# EMA vs OMA.





<https://www.sensequake.com/blog-ambient-vibration-test>



Cunha, A., & Caetano, E. (2006). Experimental modal analysis of civil engineering structures. *Sound & Vibration* 40(6)





## Experimental Modal Analysis (EMA)

## Operational Modal Analysis (OMA)

### Mechanical Engineering

- Artificial excitation
- Impact hammer shaker
- Controlled blast
- Well defined measured input

- Artificial excitation
- Scratching device
- Air flow
- Acoustic emissions
- Unknown signal
- Random in time and space

### Civil Engineering

- Artificial excitation
- Hydraulic shaker
- Drop weights
- Pull back tests
- Eccentric shakers and exciters
- Well-defined measured, or un-measured input
- Controlled Blasts

- Natural Excitation
- Wind
- Waves
- Traffic
- Unknown signal
- Random in time and space with some spatial correlation



## Remarks

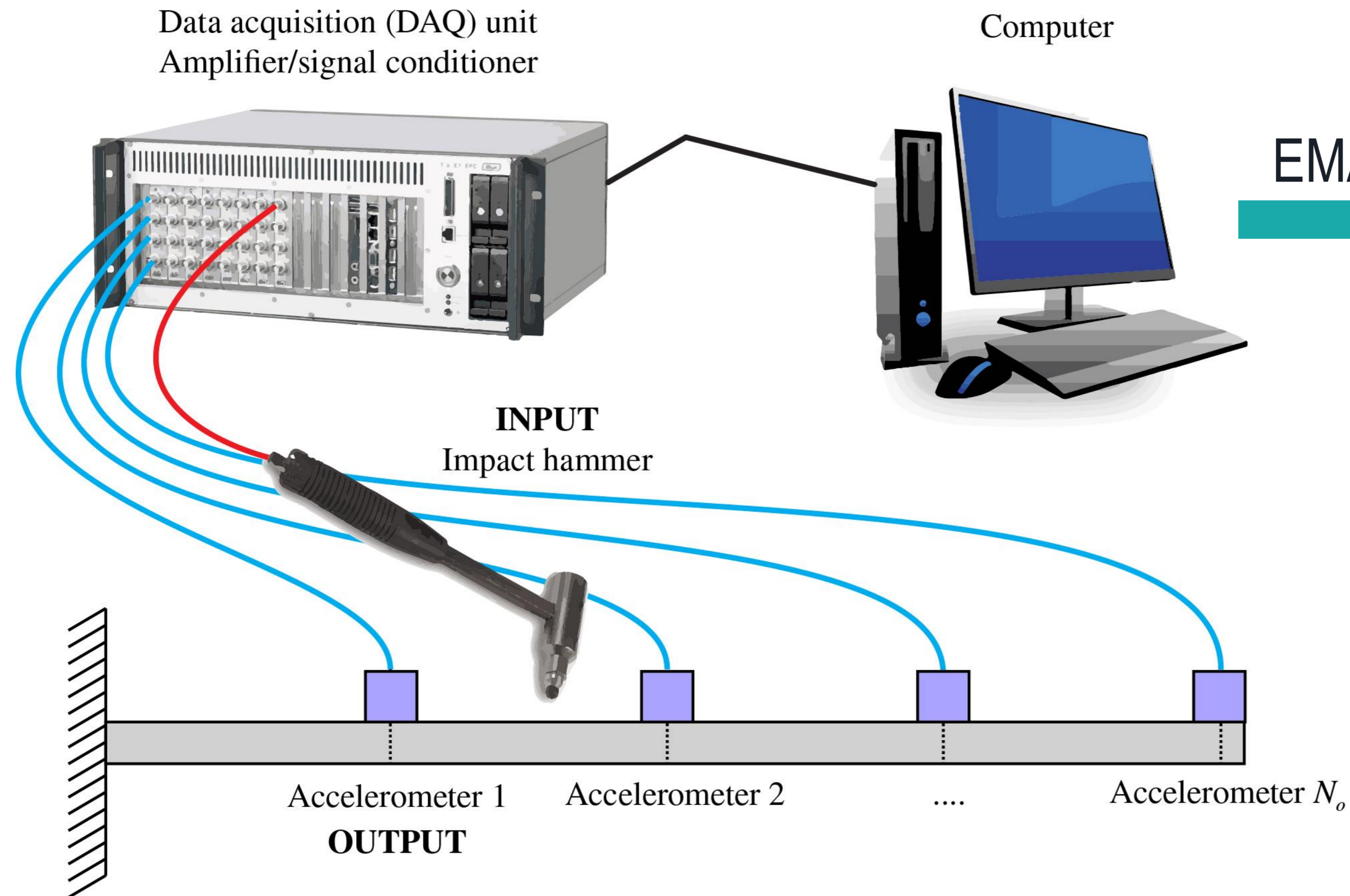
- Sensors (accelerometers, or velocity/displacement sensors) **cannot be located at nodes**.
- The ability of the system for detecting damage depends on its capacity for identifying high-frequency modes.

## Advantages/Disadvantages

- Global damage identification.
- Local structural pathologies with limited effect on the overall stiffness of structures may go unnoticed.
- Damping (energy dissipation mechanisms) is very sensitive to damage, however its identification is highly dependent on the level of modal excitation and it is usually subject to high levels of uncertainty.
- Non-Destructive.
- It is not necessary to access difficult locations.
- OMA – The normal operating conditions of the structure remain unaltered – Minimum intrusiveness.**
- OMA – Readily applicable for continuous monitoring of structures.**

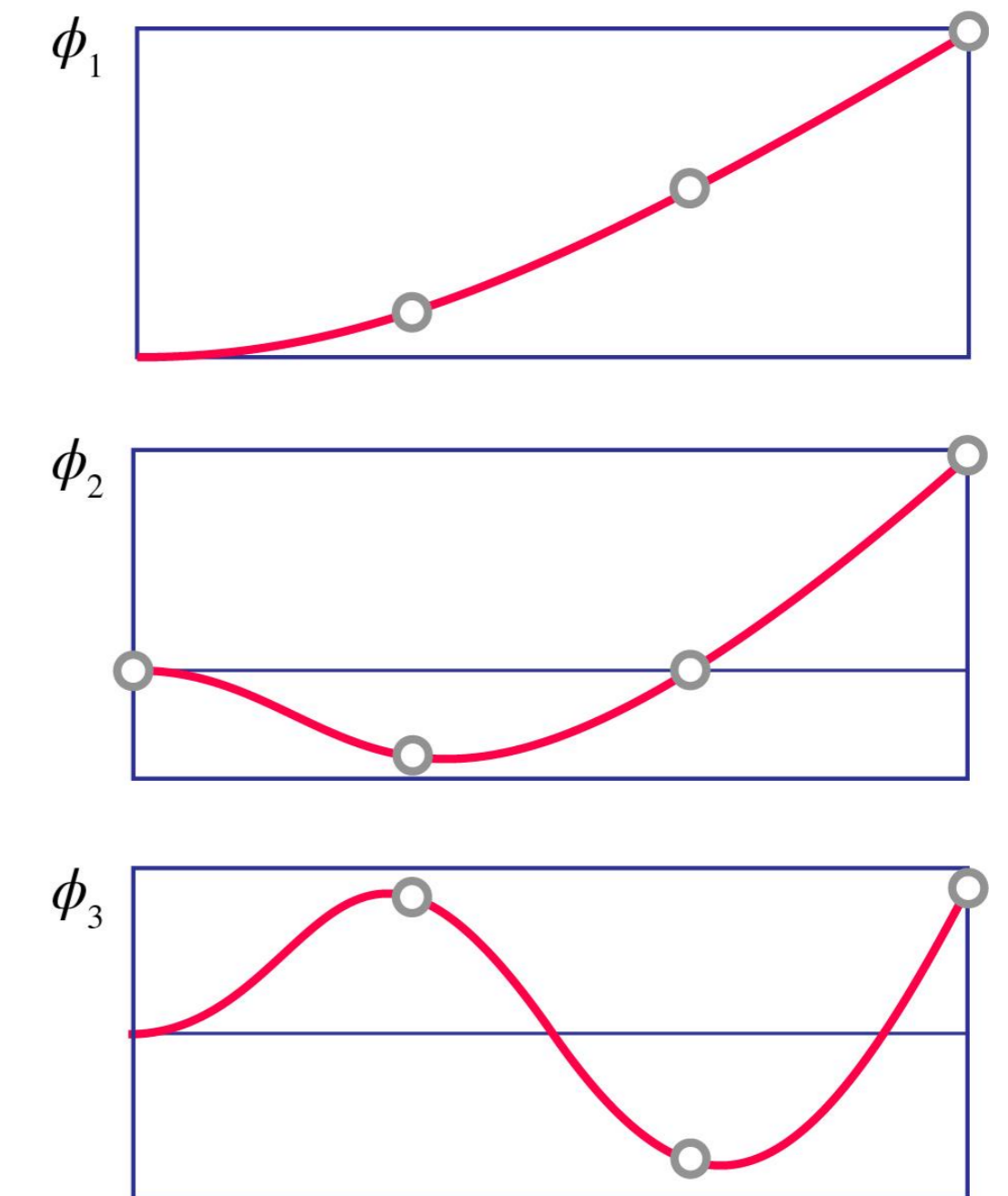


# Análisis Modal Experimental

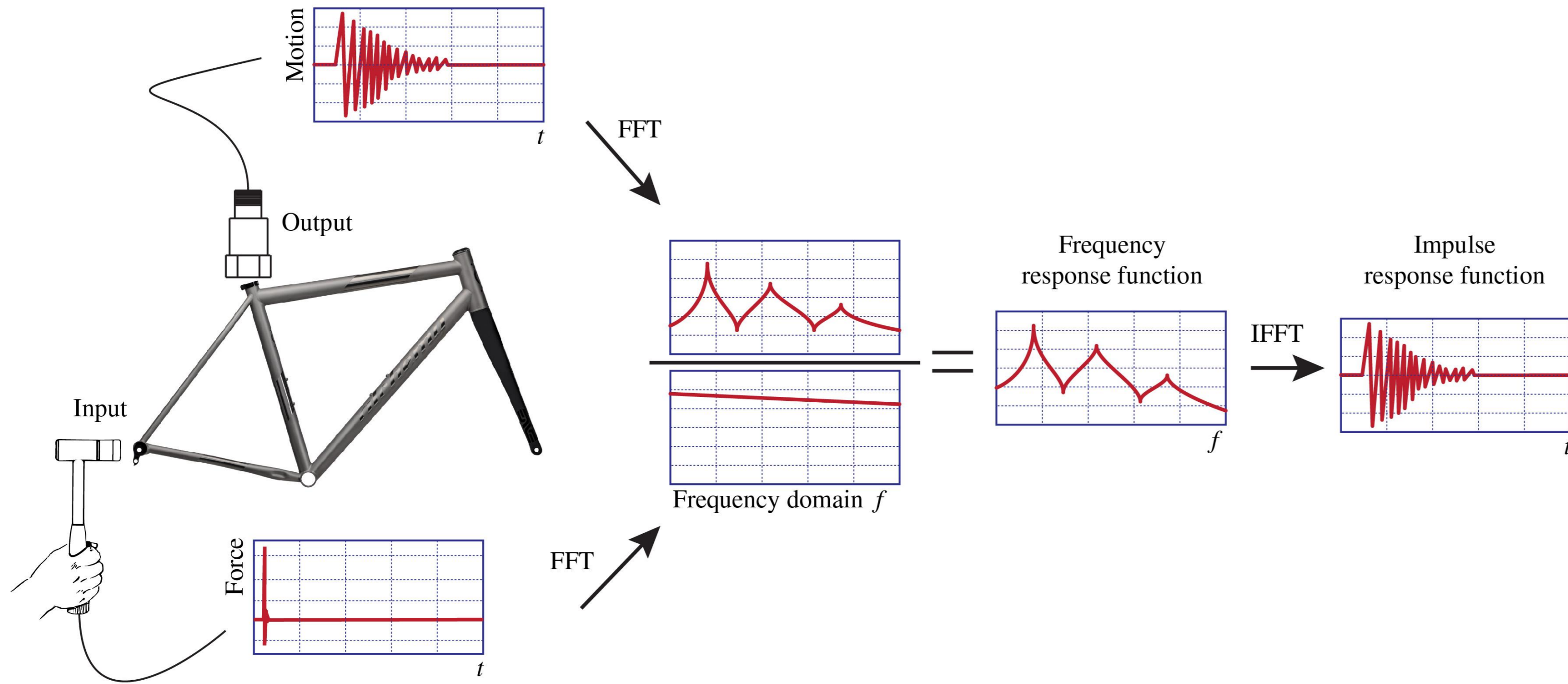


Procedimiento a través del cual se caracteriza el comportamiento dinámico de una estructura en términos de sus propiedades modales

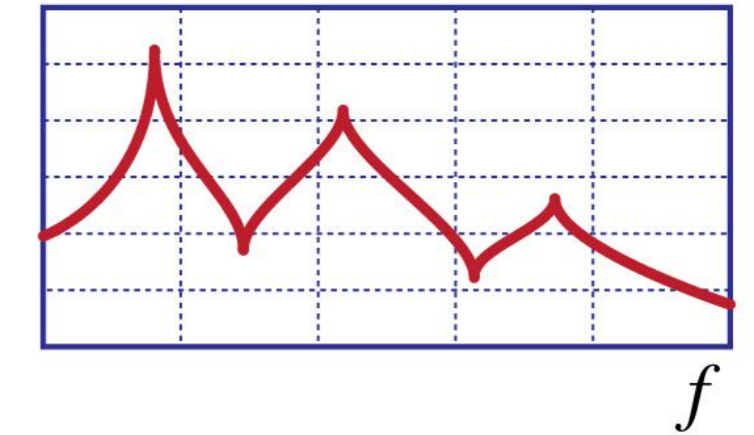
- ❖ Frecuencias de resonancia
- ❖ Tasas de amortiguamiento
- ❖ Modos de vibración



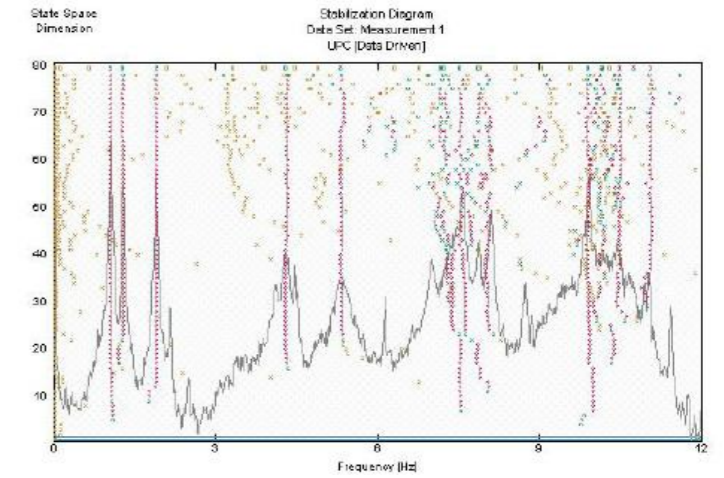
# Análisis Modal Experimental



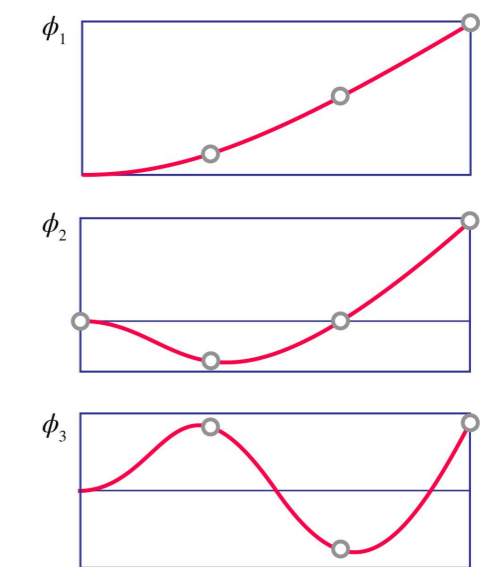
1. Medir FRFs



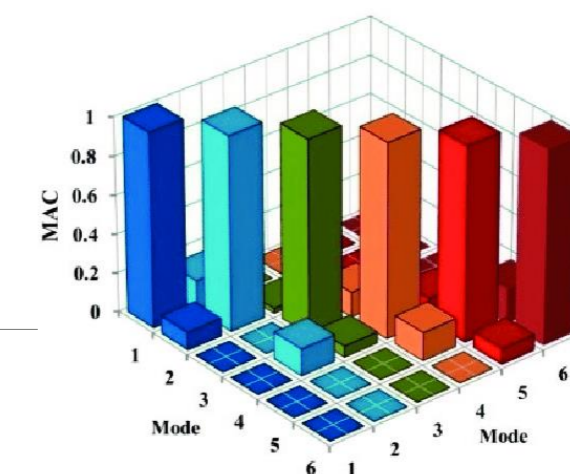
2. Estimar polos del sistema



3. Modos de vibración



4. Validación



# Métodos de excitación en EMA

## Impact hammer



## Shaker



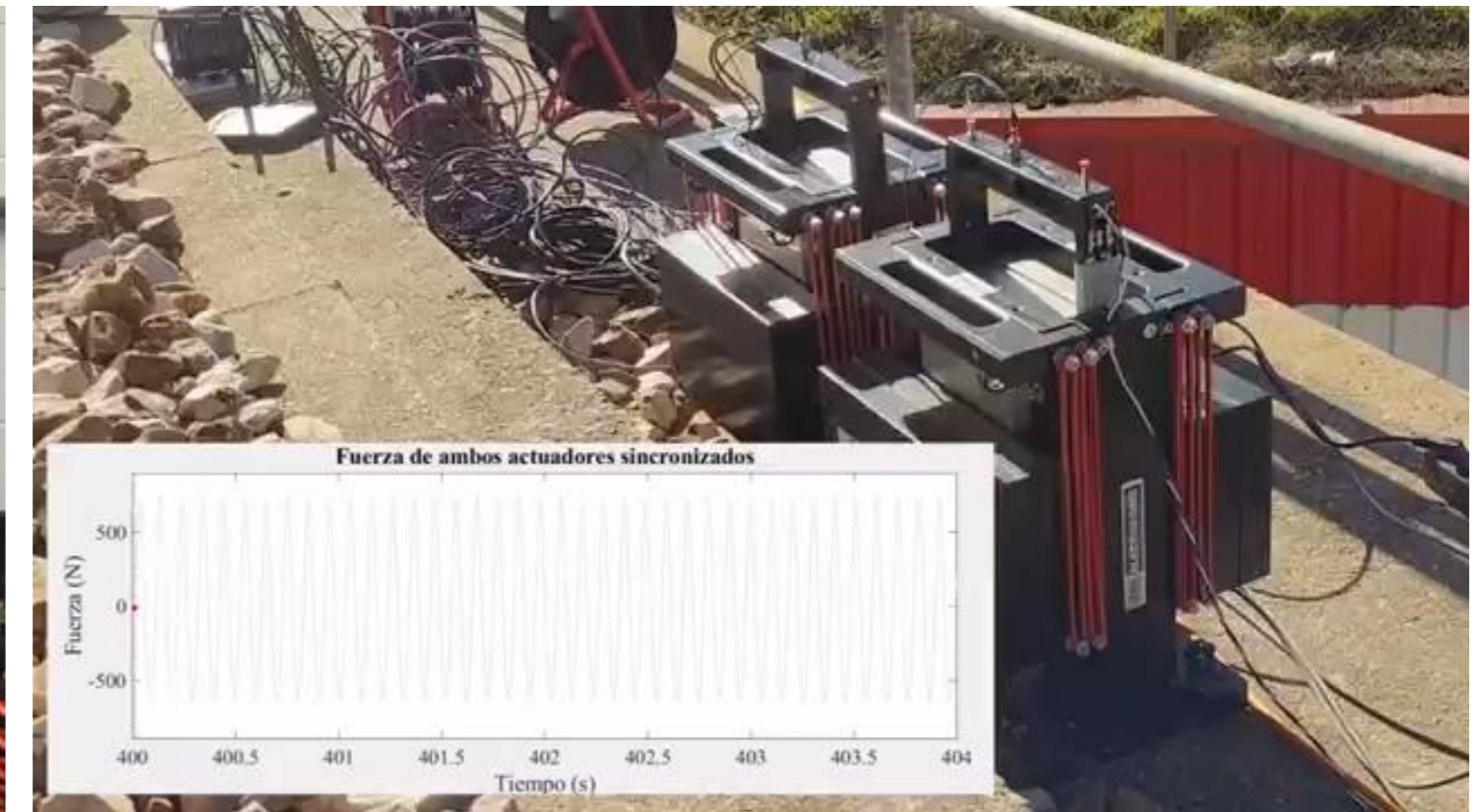
## Hydraulic actuator



<https://www.youtube.com/watch?v=tBRjPN8m6zE>



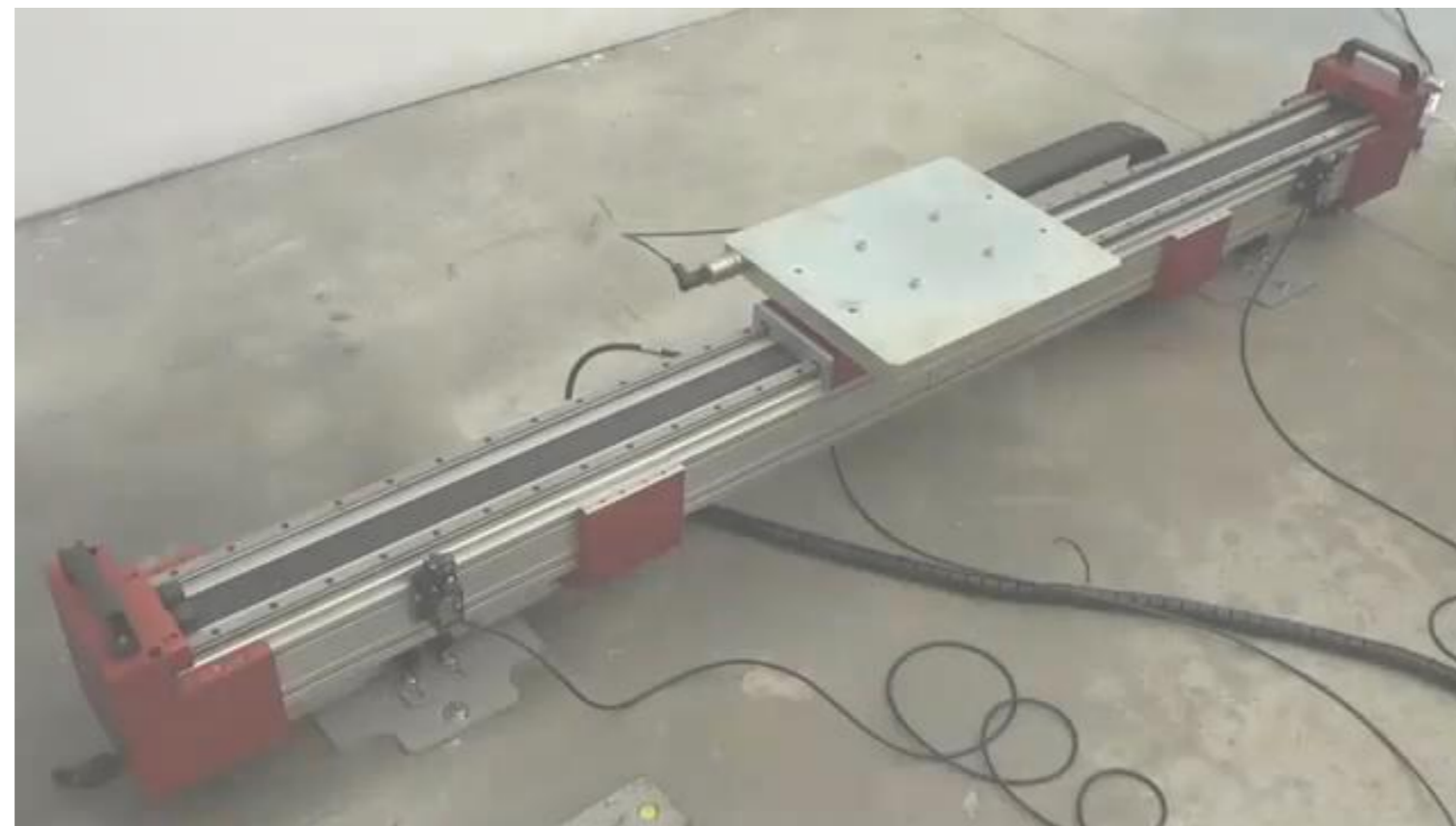
[https://www.youtube.com/watch?v=d3U\\_m-4XOtg](https://www.youtube.com/watch?v=d3U_m-4XOtg)



[https://www.youtube.com/watch?v=y2nG5uCGoRs&feature=share&fbclid=IwAR12W2yuyYOU7mr\\_P6XEKFWqVuNoV4eILbLSQ\\_Gii1QH9m34G83Cb4DftaY](https://www.youtube.com/watch?v=y2nG5uCGoRs&feature=share&fbclid=IwAR12W2yuyYOU7mr_P6XEKFWqVuNoV4eILbLSQ_Gii1QH9m34G83Cb4DftaY)



# Vibrodyne



[https://www.youtube.com/watch?v=gmWFK-vT6\\_Q&t=23s](https://www.youtube.com/watch?v=gmWFK-vT6_Q&t=23s)



<https://www.youtube.com/watch?v=ENO6gqO-Uu0&t=135s>

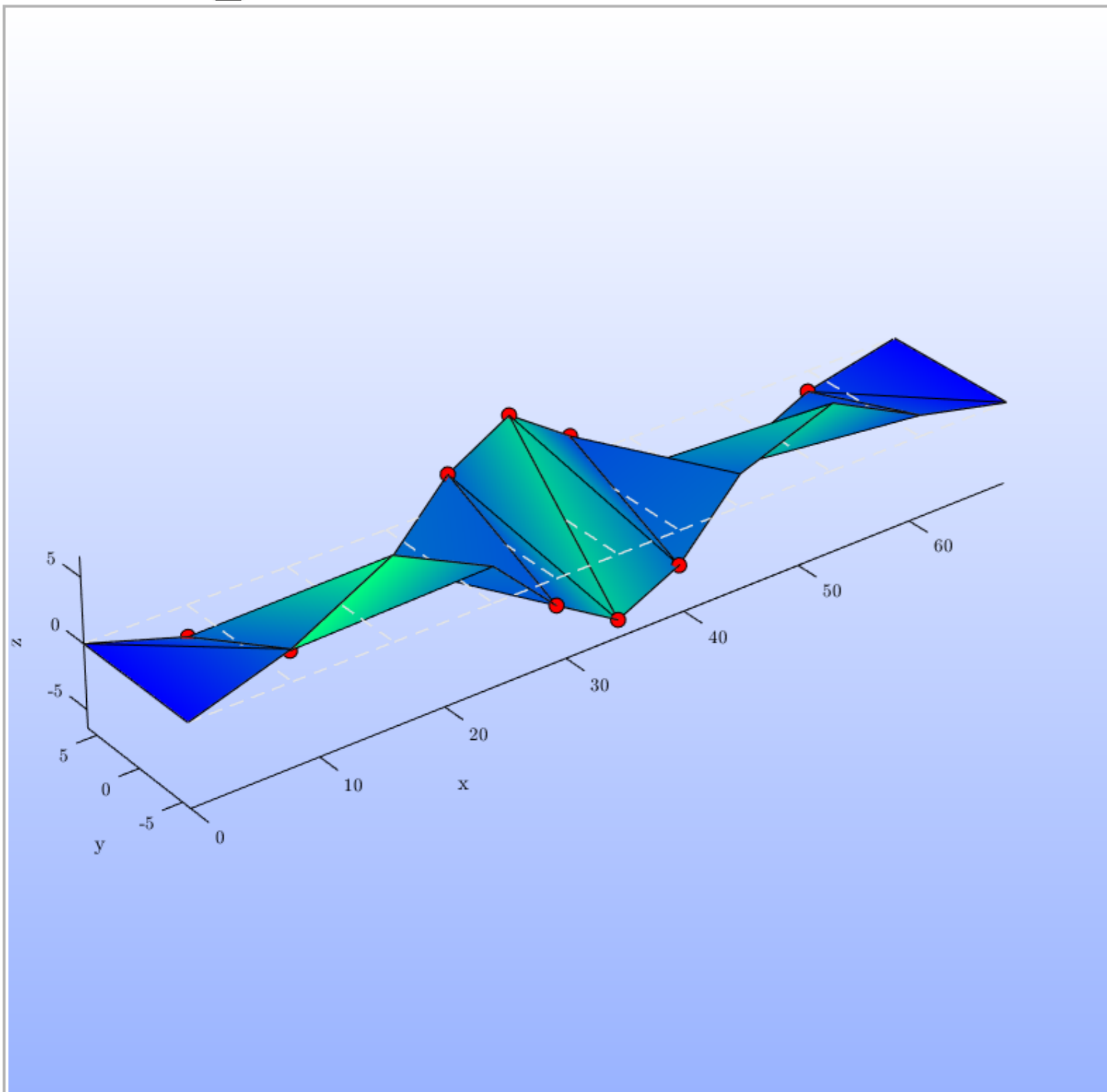




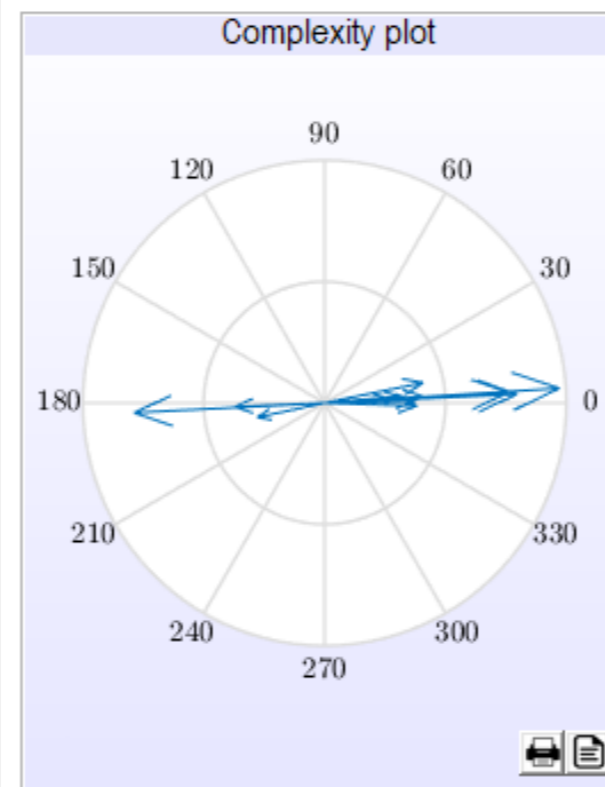
# Fundamentos teóricos de EMA (pdf)



# Modos complejos

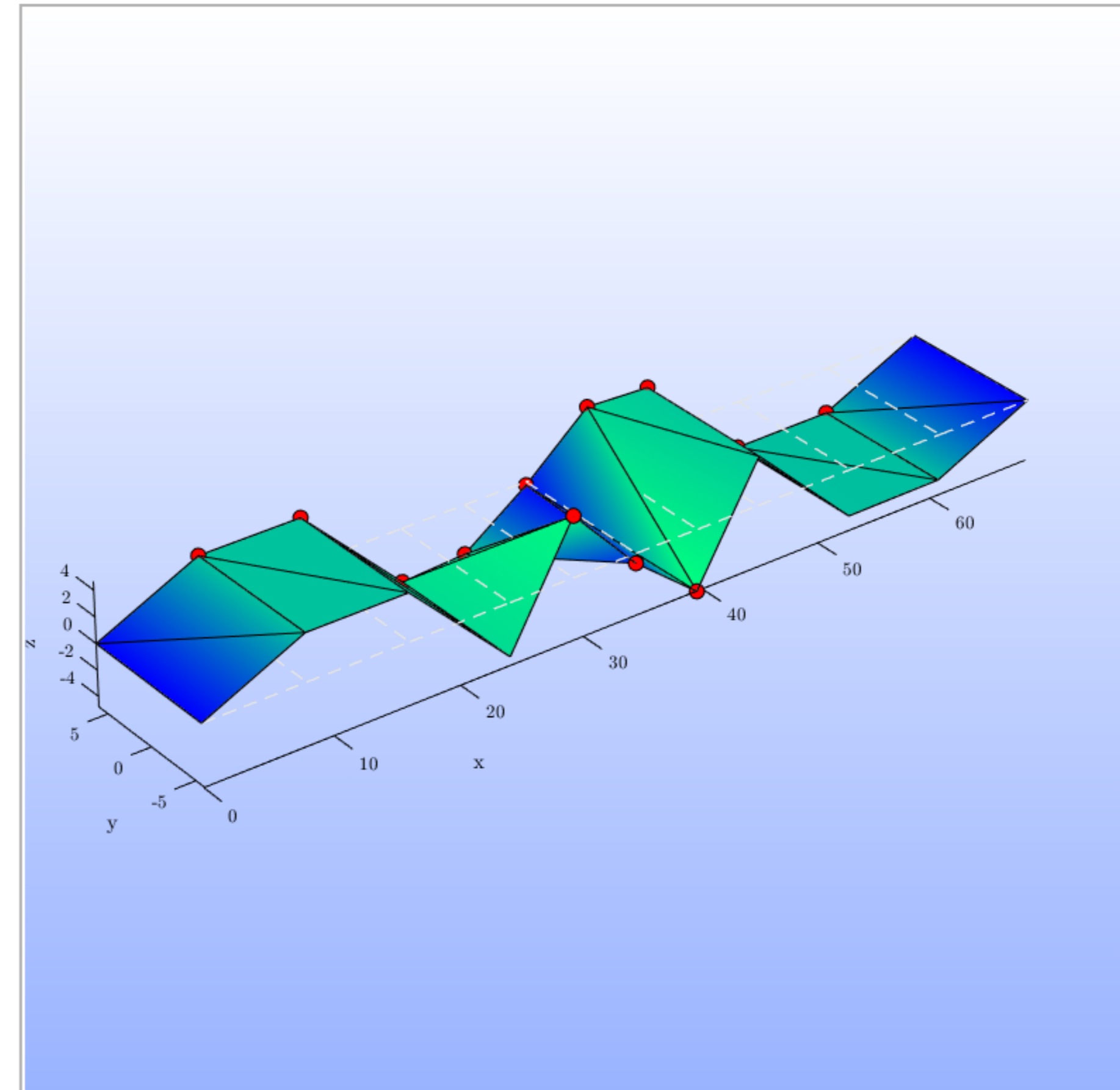


**Mode 7 (8.0602 Hz)**  
Damping: 0.7013 %  
Clustering: 273

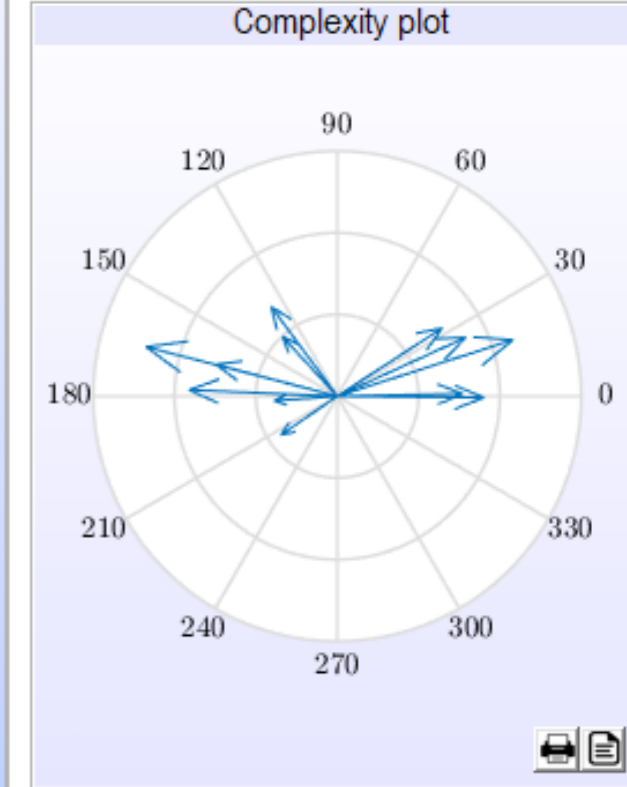


Quality indicators

Mode Complexity Factor (MCF)	0.7
Mode Phase Collinearity (MPC)	99
Mean Phase Deviation (MPD)	6.6



**Mode 9 (11.2045 Hz)**  
Damping: 1.527 %  
Clustering: 258



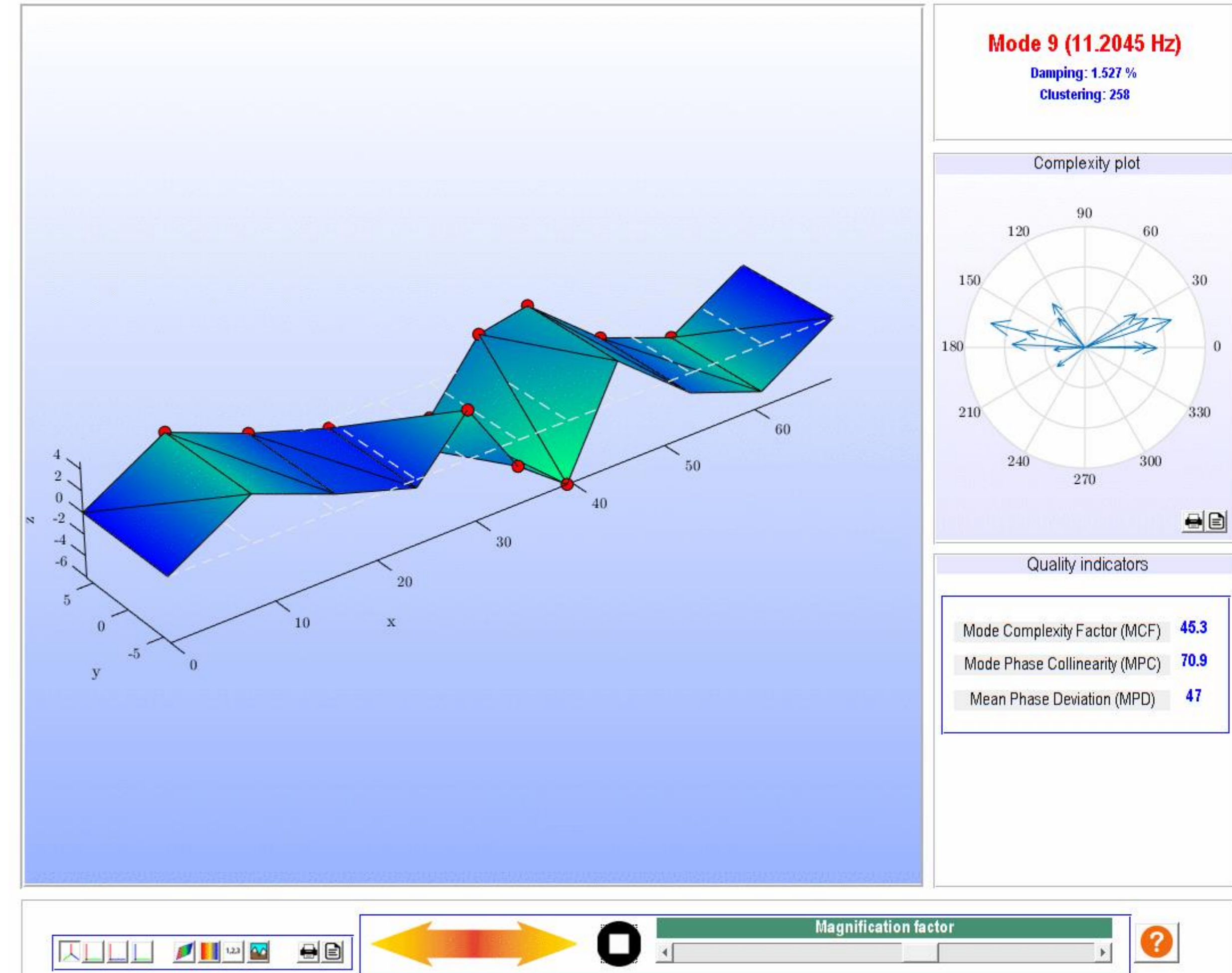
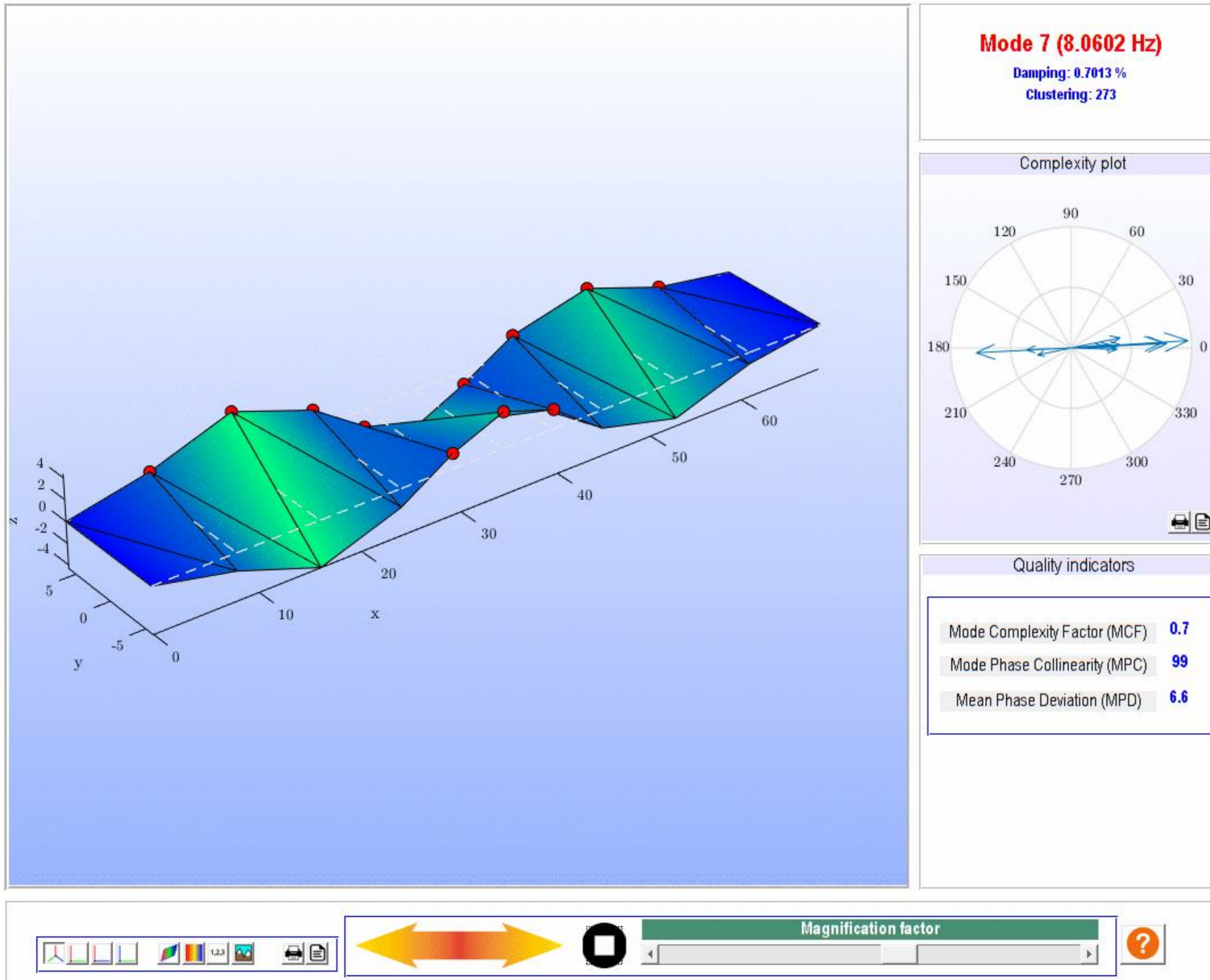
Quality indicators

Mode Complexity Factor (MCF)	45.3
Mode Phase Collinearity (MPC)	70.9
Mean Phase Deviation (MPD)	47





# Modos complejos

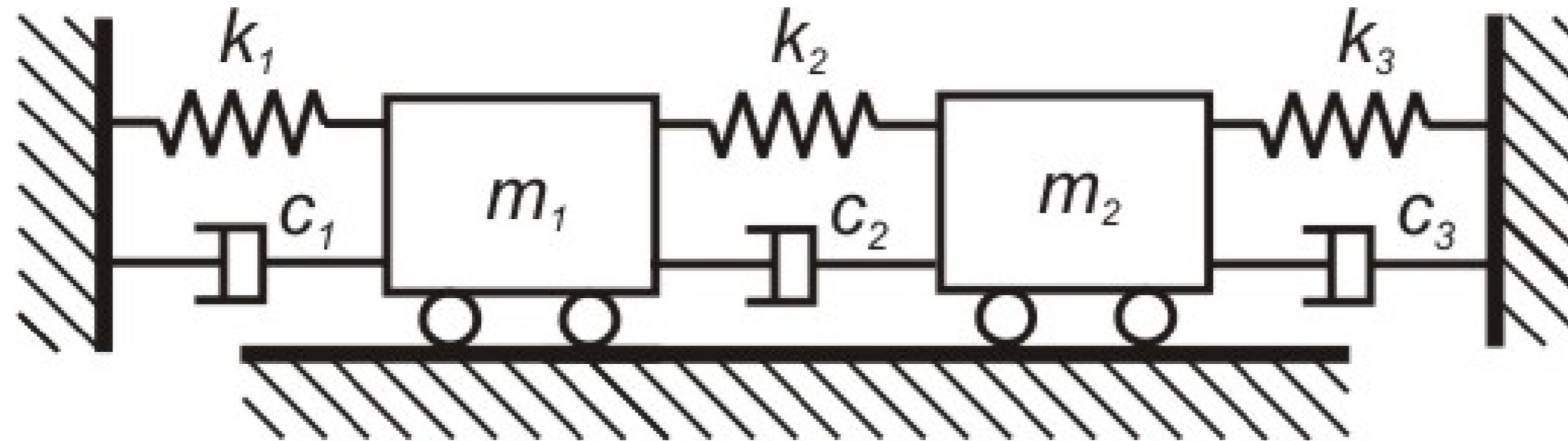




# Fundamentos teóricos de EMA - Ejercicios



## Sistema de 2 GDL con amortiguamiento general



$$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$c_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}, c_2 = 1 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}, c_3 = 4 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$$

$$k_1 = 4000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 = 2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_3 = 4000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Determinar:

- Polos del sistema
- Modos de vibración
- Matrices de residuos
- Factores de contribución modal

# Ecuaciones del movimiento

Dominio del tiempo

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6000 & -2000 \\ -2000 & 6000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = F$$

Dominio de Laplace

$$p^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X(p) + p \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} X(p) + \begin{bmatrix} 6000 & -2000 \\ -2000 & 6000 \end{bmatrix} X(p) = F(p)$$

Rigidez dinámica

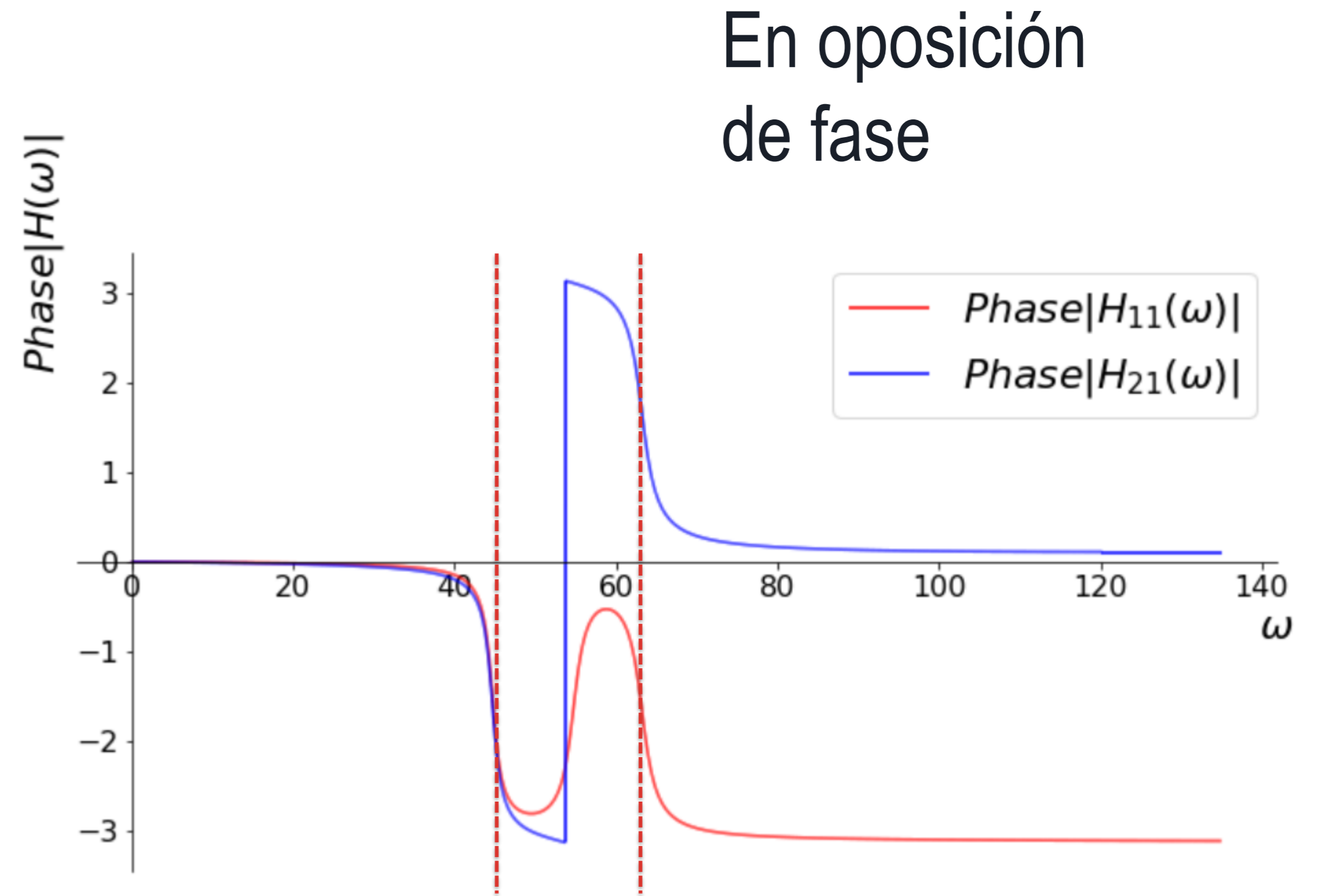
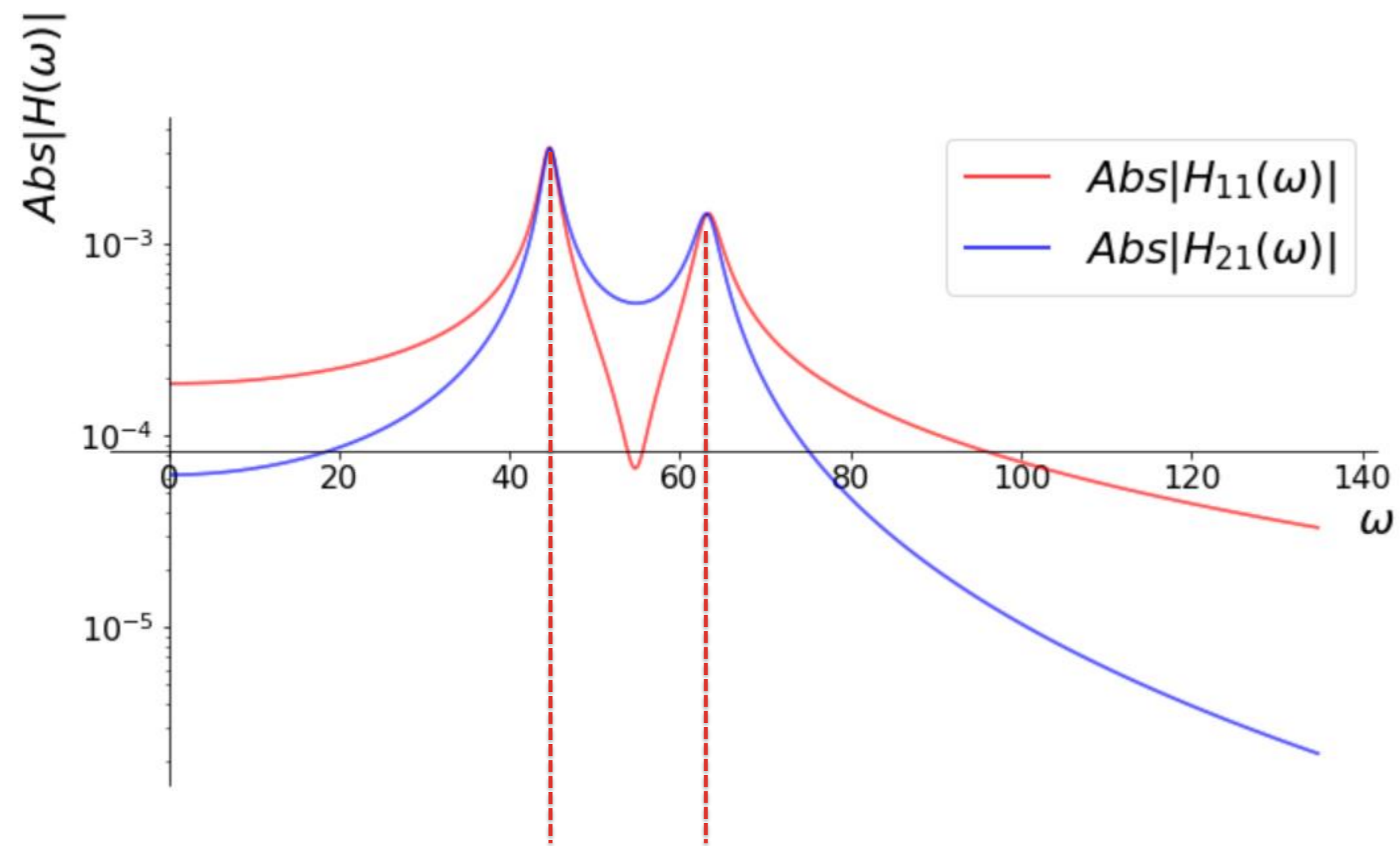
$$Z = \begin{bmatrix} 2p^2 + 4p + 6000 & -p - 2000 \\ -p - 2000 & 2p^2 + 5p + 6000 \end{bmatrix}$$

Función de transferencia

$$H(p) = \frac{\text{Adj}[Z(p)]}{\text{Det}[Z(p)]} = \begin{bmatrix} \frac{2p^2+5p+6000}{4p^4+18p^3+24019p^2+50000p+32000000} & \frac{p+2000}{4p^4+18p^3+24019p^2+50000p+32000000} \\ \frac{p+2000}{4p^4+18p^3+24019p^2+50000p+32000000} & \frac{2(p^2+2p+3000)}{4p^4+18p^3+24019p^2+50000p+32000000} \end{bmatrix}$$



# Ecuaciones del movimiento



En oposición  
de fase

En fase



## Transformada de Laplace de ecuación diferencial de primer orden

$$\left( p \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) Y(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(p) \end{bmatrix} \quad p \cdot A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2p & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2p \\ 2p & 0 & 4p + 6000 & -p - 2000 \\ 0 & 2p & -p - 2000 & 5p + 6000 \end{bmatrix}$$

### Autovalores

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1.37499 + 63.2296i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.37499 - 63.2296i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.875012 + 44.7135i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.875012 - 44.7135i \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = -1.37499 + 63.2296i \quad \lambda_1 = 63.2446 \angle 91.2457^\circ$$

$$\lambda_2 = -1.37499 - 63.2296i \quad \lambda_2 = 63.2446 \angle -91.2457^\circ$$

$$\lambda_3 = -0.875012 + 44.7135i \quad \lambda_3 = 44.7221 \angle 91.1211^\circ$$

$$\lambda_4 = -0.875012 - 44.7135i \quad \lambda_4 = 44.7221 \angle -91.1211^\circ$$



## Transformada de Laplace de ecuación diferencial de primer orden

$$\left( p \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) Y(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(p) \end{bmatrix} \quad p \cdot A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2p & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2p \\ 2p & 0 & 4p + 6000 & -p - 2000 \\ 0 & 2p & -p - 2000 & 5p + 6000 \end{bmatrix}$$

### Autovalores

$$\begin{array}{lll} \omega_1^d = 63.2296 \text{ rad/s} & \omega_1 = 63.2446 \text{ rad/s} & \zeta_1 = 0.0217408 \\ \omega_2^d = -63.2296 \text{ rad/s} & \omega_2 = 63.2446 \text{ rad/s} & \zeta_2 = 0.0217408 \\ \omega_3^d = 44.7135 \text{ rad/s} & \omega_3 = 44.7221 \text{ rad/s} & \zeta_3 = 0.0195655 \\ \omega_4^d = -44.7135 \text{ rad/s} & \omega_4 = 44.7221 \text{ rad/s} & \zeta_4 = 0.0195655 \end{array}$$

# Transformada de Laplace de ecuación diferencial de primer orden

$$\left( p \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) Y(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(p) \end{bmatrix} \quad p \cdot A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2p & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2p \\ 2p & 0 & 4p + 6000 & -p - 2000 \\ 0 & 2p & -p - 2000 & 5p + 6000 \end{bmatrix}$$

## Autovectores

$$\begin{bmatrix} -0.706874747861719 + 0.0111794444518016i & -0.706874747861719 - 0.0111794444518016i & 0.706941128535425 & 0.706941128535425 \\ 0.707073663439352 & 0.707073663439352 & 0.706874822414759 - 0.00790516995109802i & 0.706874822414759 + 0.00790516995109802i \\ 0.000419717239670559 + 0.0111703610548922i & 0.000419717239670559 - 0.0111703610548922i & -0.000309281218296151 - 0.015804411179221i & -0.000309281218296151 + 0.015804411179221i \\ -0.000243062098281271 - 0.0111773485135086i & -0.000243062098281271 + 0.0111773485135086i & -0.000485980584153942 - 0.0157994703862086i & -0.000485980584153942 + 0.0157994703862086i \end{bmatrix}$$





# Transformada de Laplace de ecuación diferencial de primer orden

$$\left( p \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) Y(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(p) \end{bmatrix} \quad p \cdot A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2p & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2p \\ 2p & 0 & 4p + 6000 & -p - 2000 \\ 0 & 2p & -p - 2000 & 5p + 6000 \end{bmatrix}$$

## Autovectores

$$\begin{bmatrix} -0.706874747861719 + 0.0111794444518016i & -0.706874747861719 - 0.0111794444518016i & 0.706941128535425 & 0.706941128535425 \\ 0.707073663439352 & 0.707073663439352 & 0.706874822414759 - 0.00790516995109802i & 0.706874822414759 + 0.00790516995109802i \\ 0.000419717239670559 + 0.0111703610548922i & 0.000419717239670559 - 0.0111703610548922i & -0.000309281218296151 - 0.015804411179221i & -0.000309281218296151 + 0.015804411179221i \\ -0.000243062098281271 - 0.0111773485135086i & -0.000243062098281271 + 0.0111773485135086i & -0.000485980584153942 - 0.0157994703862086i & -0.000485980584153942 + 0.0157994703862086i \end{bmatrix}$$



## Matrices de residuos

$$A_1 = (3.12661 \cdot 10^{-8} + 9.88245 \cdot 10^{-7}i) \begin{bmatrix} -1999.06 - 31.6119i & 1998.63 + 63.2296i \\ 1998.63 + 63.2296i & -1997.69 - 94.8415i \end{bmatrix}$$

$$A_2 = (3.12661 \cdot 10^{-8} - 9.88245 \cdot 10^{-7}i) \begin{bmatrix} -1999.06 + 31.6119i & 1998.63 - 63.2296i \\ 1998.63 - 63.2296i & -1997.69 + 94.8415i \end{bmatrix}$$

$$A_3 = (-3.12661 \cdot 10^{-8} - 1.39783 \cdot 10^{-6}i) \begin{bmatrix} 1998.56 + 67.0682i & 1999.13 + 44.7135i \\ 1999.13 + 44.7135i & 1999.44 + 22.3547i \end{bmatrix}$$

$$A_4 = (-3.12661 \cdot 10^{-8} + 1.39783 \cdot 10^{-6}i) \begin{bmatrix} 1998.56 - 67.0682i & 1999.13 - 44.7135i \\ 1999.13 - 44.7135i & 1999.44 - 22.3547i \end{bmatrix}$$

## Factores de contribución modal

$$Q_1 = -0.937557 + 15.7925i$$

$$Q_2 = -0.937557 - 15.7925i$$

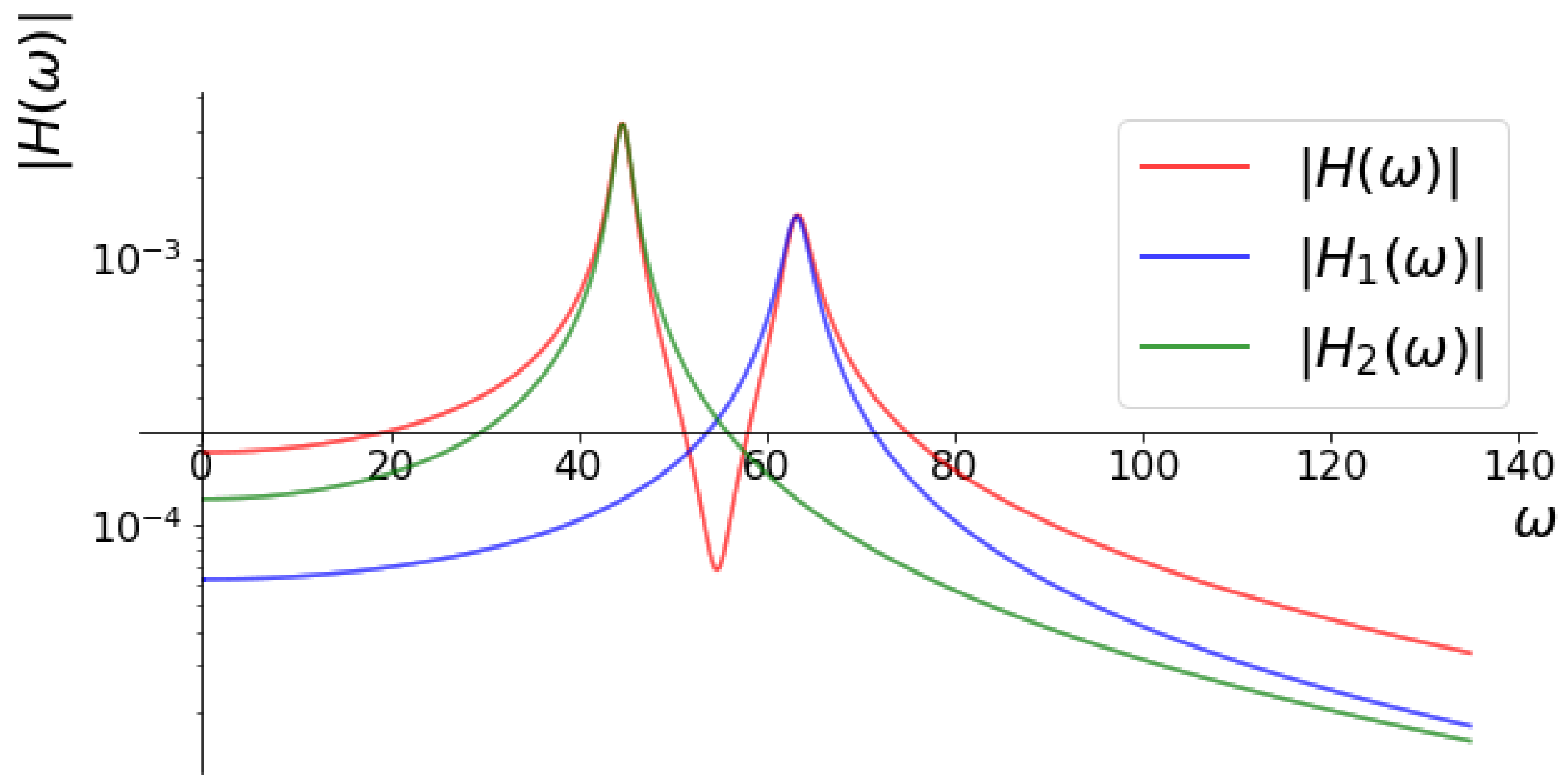
$$Q_3 = -0.562756 + 11.1751i$$

$$Q_4 = -0.562756 - 11.1751i$$

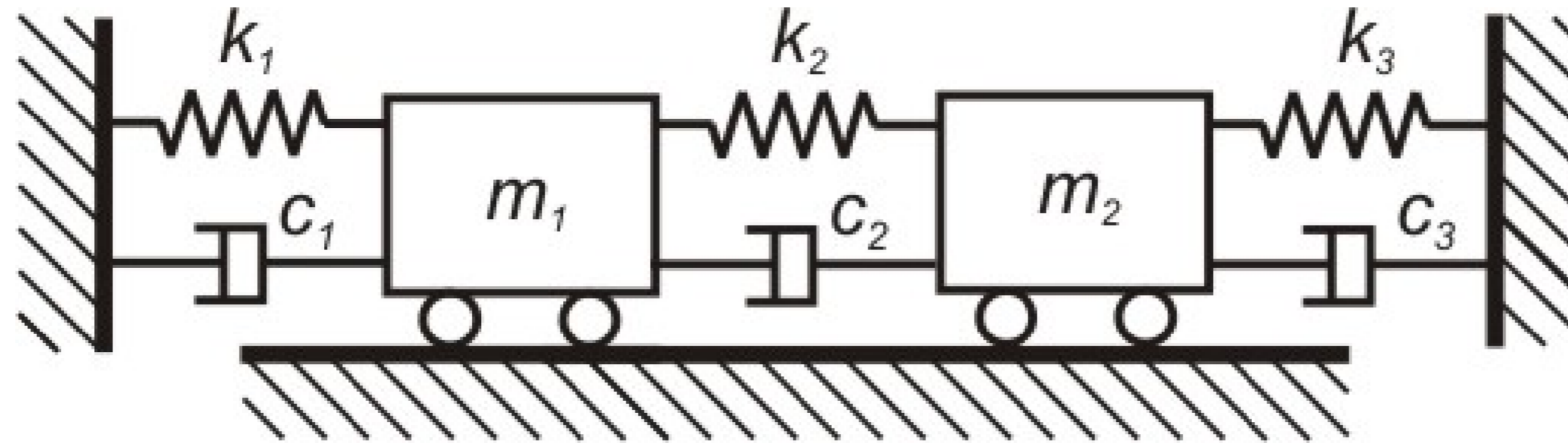
$$Q_2 \cdot \psi \cdot \psi^T = (-0.937557 + 15.7925i) \cdot \begin{bmatrix} -0.000124601 + 9.37679 \cdot 10^{-6}i & 0.000124753 - 7.40642 \cdot 10^{-6}i \\ 0.000124753 - 7.40642 \cdot 10^{-6}i & -0.000124874 + 5.43358 \cdot 10^{-6}i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3.12627 \cdot 10^{-5} - 0.00197655i & 2.92845 \cdot 10^{-9} + 0.00197711i \\ 2.92845 \cdot 10^{-9} + 0.00197711i & 3.12666 \cdot 10^{-5} - 0.00197717i \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.12627 \cdot 10^{-5} - 0.00197655i & 2.94571 \cdot 10^{-9} + 0.00197711i \\ 2.94571 \cdot 10^{-9} + 0.00197711i & 3.12666 \cdot 10^{-5} - 0.00197717i \end{bmatrix}$$



## Sistema de 2 GDL con amortiguamiento proporcional



$$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg}$$

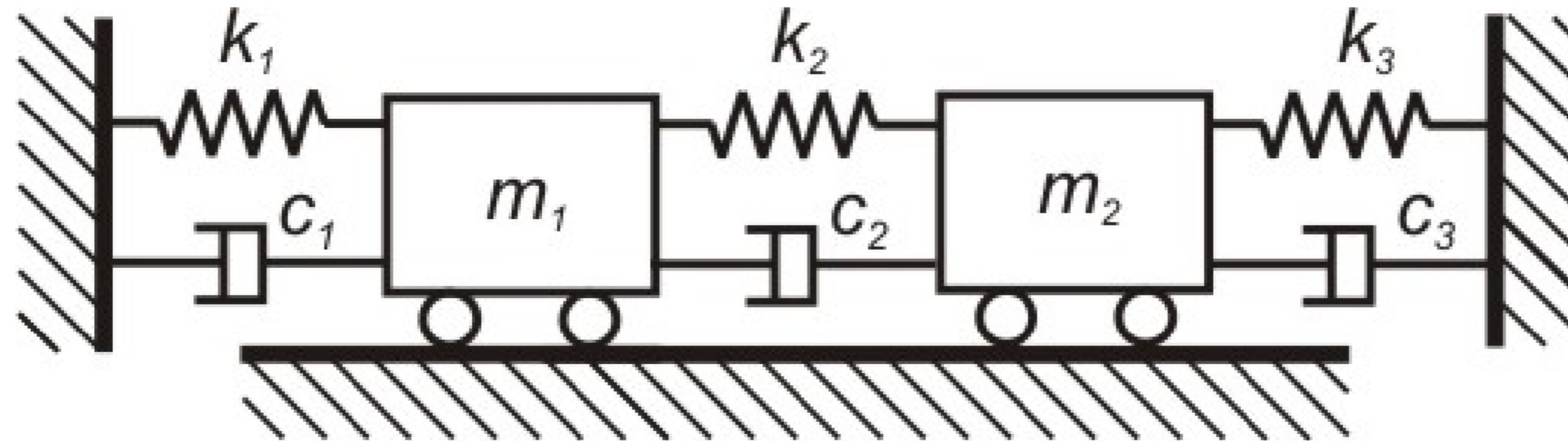
$$c_1 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}, c_2 = 2 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}, c_3 = 3 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$$

$$k_1 = 4000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 = 2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_3 = 4000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Determinar:

- Polos del sistema
- Modos de vibración
- Matrices de residuos
- Factores de contribución modal

## Sistema de 2 GDL con amortiguamiento proporcional



$$C = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 6000 & -2000 \\ -2000 & 6000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \text{ 1/s}$$

$$\beta = \frac{1}{1000} \text{ 1/s}$$

Determinar:

- Polos del sistema
- Modos de vibración
- Matrices de residuos
- Factores de contribución modal

# Sistema de 2 GDL con amortiguamiento proporcional

## Autovalores/Autovectores

$$\lambda_1 = -1.75 + 63.2213i = 63.2456 \angle 91.5856^\circ$$

$$\lambda_2 = -1.75 - 63.2213i = 63.2456 \angle -91.5856^\circ$$

$$\lambda_3 = -0.75 + 44.7151i = 44.7214 \angle 90.9609^\circ$$

$$\lambda_4 = -0.75 - 44.7151i = 44.7214 \angle -90.9609^\circ$$

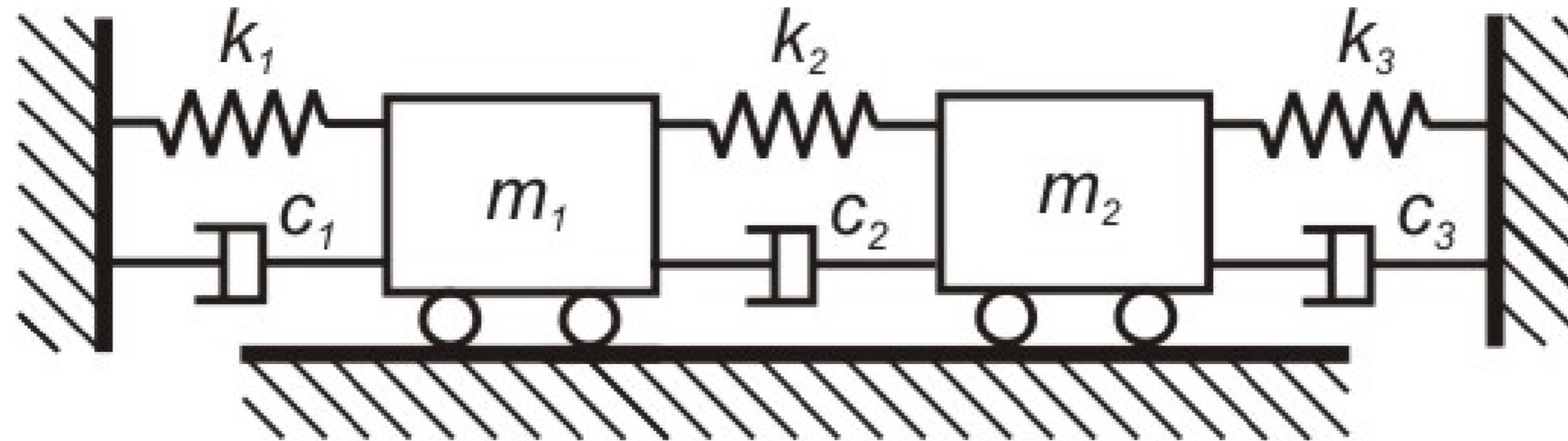
$$\text{Abs}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0.707018409408262 \\ 0.707018409408263 \\ 0.0111789426069976 \\ 0.0111789426069976 \end{bmatrix}, \text{Ang}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 180.0 \\ 0.0 \\ 88.4144274491374 \\ -91.5855725508626 \end{bmatrix} [^\circ]$$

$$\text{Abs}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 0.707018409408262 \\ 0.707018409408263 \\ 0.0111789426069976 \\ 0.0111789426069976 \end{bmatrix}, \text{Ang}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -180.0 \\ 0.0 \\ -88.4144274491374 \\ 91.5855725508626 \end{bmatrix} [^\circ]$$

$$\text{Abs}(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 0.706930070754903 \\ 0.706930070754902 \\ 0.015807436935467 \\ 0.015807436935467 \end{bmatrix}, \text{Ang}(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 3.97368448908243 \cdot 10^{-14} \\ -90.9609244805382 \\ -90.9609244805381 \end{bmatrix} [^\circ]$$

$$\text{Abs}(\lambda_4) = \begin{bmatrix} 0.706930070754903 \\ 0.706930070754902 \\ 0.015807436935467 \\ 0.015807436935467 \end{bmatrix}, \text{Ang}(\lambda_4) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -3.97368448908243 \cdot 10^{-14} \\ 90.9609244805382 \\ 90.9609244805381 \end{bmatrix} [^\circ]$$

## Sistema de 2 GDL sin amortiguamiento



$$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$c_1 = 0 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}, c_2 = 0 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}, c_3 = 0 \frac{\text{N}}{\text{m/s}}$$

$$k_1 = 4000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 = 2000 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_3 = 4000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Determinar:

- Polos del sistema
- Modos de vibración
- Matrices de residuos
- Factores de contribución modal

# Sistema de 2 GDL con amortiguamiento proporcional

## Autovalores/Autovectores

$$\lambda_1 = 63.2456i = 63.2456 \angle 90.0^\circ$$

$$\lambda_2 = -63.2456i = 63.2456 \angle -90.0^\circ$$

$$\lambda_3 = 4.71845 \cdot 10^{-15} + 44.7214i = 44.7214 \angle 90.0^\circ$$

$$\lambda_4 = 4.71845 \cdot 10^{-15} - 44.7214i = 44.7214 \angle -90.0^\circ$$

$$\text{Abs}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0.707018409408262 \\ 0.707018409408262 \\ 0.0111789426069976 \\ 0.0111789426069976 \end{bmatrix}, \text{Ang}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -180.0 \\ -89.99999999999999 \\ 90.0 \end{bmatrix} [^\circ]$$

$$\text{Abs}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 0.707018409408262 \\ 0.707018409408262 \\ 0.0111789426069976 \\ 0.0111789426069976 \end{bmatrix}, \text{Ang}(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 180.0 \\ 89.99999999999999 \\ -90.0 \end{bmatrix} [^\circ]$$

$$\text{Abs}(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 0.706930070754903 \\ 0.706930070754902 \\ 0.015807436935467 \\ 0.015807436935467 \end{bmatrix}, \text{Ang}(\lambda_3) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 9.70873569144084 \cdot 10^{-15} \\ -90.0 \\ -90.0 \end{bmatrix} [^\circ]$$

$$\text{Abs}(\lambda_4) = \begin{bmatrix} 0.706930070754903 \\ 0.706930070754902 \\ 0.015807436935467 \\ 0.015807436935467 \end{bmatrix}, \text{Ang}(\lambda_4) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -9.70873569144084 \cdot 10^{-15} \\ 90.0 \\ 90.0 \end{bmatrix} [^\circ]$$



# Fundamentos teóricos del Análisis Modal Experimental

Enrique García-Macías

Universidad de Granada

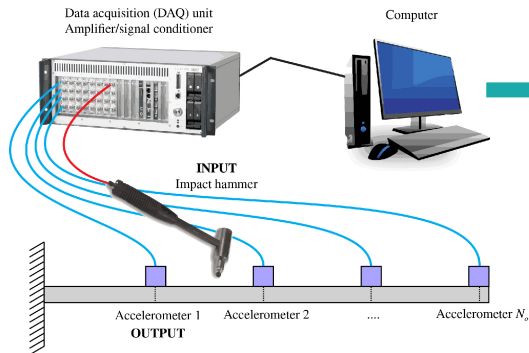
*enriquegm@ugr.es*

February 21, 2021

# Índice

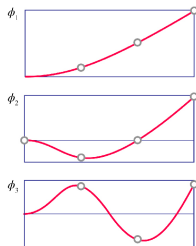
- 1 Introducción
- 2 Sistemas de 1 GDL
- 3 Sistemas de múltiples grados de libertad
- 4 Identificación modal
- 5 Métodos locales
- 6 Validación de formas modales
- 7 Métodos globales
  - Breve introducción al método LSCF

# Esquema general del EMA

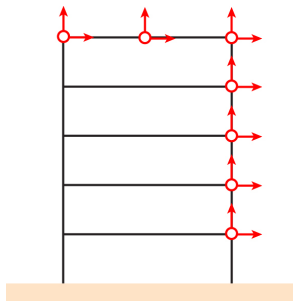


Procedimiento a través del cual se caracteriza el comportamiento dinámico de una estructura en términos de sus propiedades modales

- ❖ Frecuencias de resonancia
- ❖



# Características de los análisis experimentales



- Número de puntos de medida (grados de libertad):  $N_i$
- Número de puntos de excitación (input):  $N_o$
- Número de modos identificables:  $N_m \leq \max(N_i, N_o)$
- No se suelen incluir grados de libertad de giro por su dificultad práctica.

## Hipótesis fundamentales:

- Linealidad del sistema (Linear Time Invariant LTI).
  - Se puede aplicar superposición.
  - Sistema de ecuaciones lineales.
- Invarianza temporal (Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes).
- Observabilidad  $\rightarrow$  Importancia de una elección adecuada de puntos de medida.
- Se verifica el principio de reciprocidad.

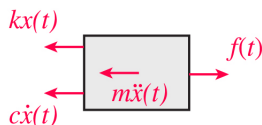
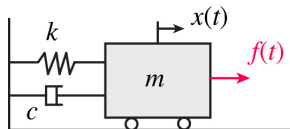
# Métodos de identificación dinámica mediante EMA

- Clasificación basada en el **número de inputs y outputs**:
  - SISO
  - SIMO
  - MIMO
  - MISO
- Clasificación basada en el **tipo de propiedades identificadas**:

Métodos directos	Métodos indirectos
Mecánico $k, m, c$	Modal $\omega_i, \zeta_i, \varphi_i$

# Sistemas de 1 GDL

## Función transferencia de sistemas de 1 GDL:



El equilibrio dinámico de un sistema de un grado de libertad (Single Degree Of Freedom SDOF) expresa el balance entre fuerzas exteriores, fuerzas inerciales, de amortiguamiento, y elásticas:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t), \quad (1)$$

- $m$ : masa
- $c$ : amortiguamiento
- $k$ : rigidez
- $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$ ,  $x$ : aceleración, velocidad, desplazamiento
- $f$ : fuerza externa
- $t$ : variable tiempo

Transformando la ecuación de equilibrio dinámico en el dominio del tiempo en el dominio de Laplace (variable  $p$ ) con condiciones de desplazamiento y velocidad inicial nulos:

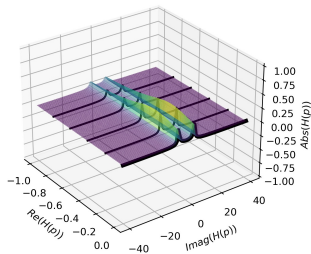
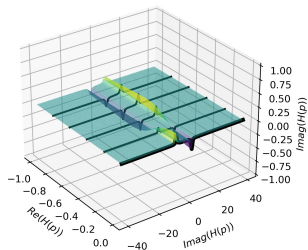
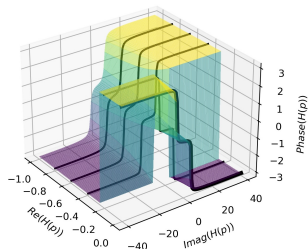
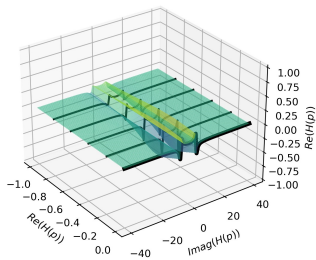
$$(mp^2 + cp + k)x(p) = F(p), \quad (2)$$

De la ecuación anterior el término  $Z(p) = (mp^2 + cp + k)$  se denomina rigidez dinámica. Invertiendo la ecuación (2) se llega a la definición de función de transferencia  $H(p) = Z^{-1}(p)$ :

$$H(p) = \frac{1/m}{p^2 + (c/m)p + (k/m)} \quad (3)$$

La función de transferencia es una función de variable compleja ( $p \in \mathbb{C}$ ).

Ejemplo:  $k=25$  N/m,  $c = 0.5$  Ns/m,  $m = 1$  kg





## Polos del sistema, frecuencias naturales y tasas de amortiguamiento:

El denominador de la ecuación (3) se denomina como *polinomio característico*.

Sus raíces definen los polos del sistema dinámico:

$$p^2 + pc/m + k/m = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (4)$$

Esta ecuación permite introducir algunos aspectos importantes. Si el sistema no presenta amortiguamiento (sistema conservativo  $c = 0$ ), la frecuencia natural sin amortiguamiento se define como:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

El amortiguamiento crítico,  $c_{cr}$ , es aquel para el cual se anula el término bajo la raíz cuadrada de la ecuación (4):

$$c_{cr} = 2\sqrt{km} \quad (6)$$

y, con ello, se define la tasa de amortiguamiento  $\zeta$  como:

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \quad (7)$$

La ecuación (4) proporciona la solución homogénea (fuerza externa nula) de la ecuación del movimiento:

$$x(t) = C_0 e^{\lambda_1 t} + C_1 e^{\lambda_2 t} \quad (8)$$

donde  $C_0$  y  $C_1$  son constantes de integración definidas por las condiciones iniciales del movimiento (desplazamiento y velocidad iniciales). Dependiendo del valor de la tasa de amortiguamiento  $\zeta$ , el sistema se clasifica como:

- Sistema sobreamortiguado ( $\zeta > 1$ ).
- Sistema subamortiguado ( $\zeta < 1$ ).
- Sistema críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ )

Los sistemas mecánicos reales normalmente presentan tasas de amortiguamiento en torno al 1-5%, por lo que únicamente consideraremos sistemas subamortiguados. En este caso, la ecuación (4) arroja dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1 = \sigma_1 + j\omega_d; \lambda_1^* = \sigma_1 - j\omega_d \quad (9)$$

**Residuos:**

Conocidas las raíces del polinomio característico, la función de transferencia en la ecuación (3) puede reescribirse como:

$$H(p) = \frac{1/m}{(p - \lambda_1)(p - \lambda_1^*)} \quad (10)$$

que a su vez podremos expandir en fracciones elementales como sigue:

$$H(p) = \frac{A_1}{(p - \lambda_1)} + \frac{A_1^*}{(p - \lambda_1^*)} \quad (11)$$

donde los términos  $A_1$  y  $A_1^*$  se denominan residuos.

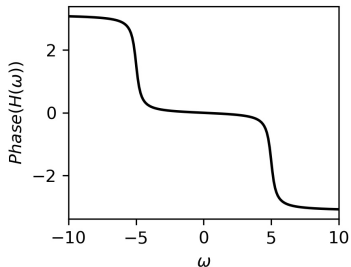
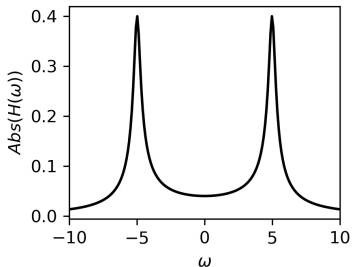
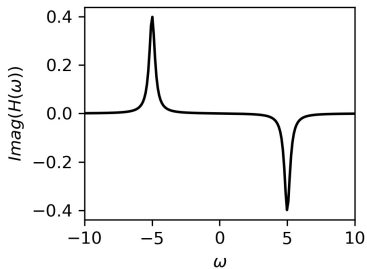
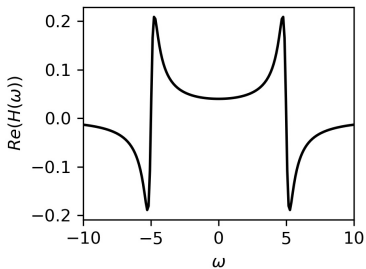
### **Función de respuesta en frecuencia y función de respuesta impulsiva:**

La función de transferencia previamente analizada en el dominio de Laplace, se puede analizar en dominio de la frecuencia o el tiempo. La función de transferencia evaluada en el dominio de la frecuencia ( $p \rightarrow j\omega$ ) se denomina función de respuesta en frecuencia (Frequency Response Function FRF):

$$H(p)|_{p=j\omega} = H(\omega) = \frac{1/m}{-\omega^2 + j\omega c/m + k/m} = \frac{A_1}{(j\omega - \lambda_1)} + \frac{A_1^*}{(j\omega - \lambda_1^*)} \quad (12)$$

La FRF es un caso particular de función de transferencia: es un corte a lo largo del eje de la frecuencia ( $j\omega$ ).

Para el ejemplo anterior ( $k=25$  N/m,  $c = 0.5$  Ns/m,  $m = 1$  kg):



Las raíces del polinomio característico  $p^2 + pc/m + k/m = 0$  en el dominio de la frecuencia se obtiene como:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \sigma_1 \pm j\omega_d \quad (13)$$

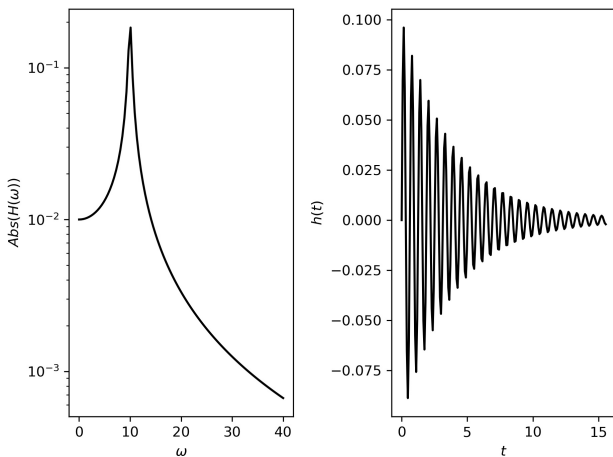
donde podemos extraer las siguientes relaciones útiles:

- Frecuencia amortiguada:  $\omega_d = \omega_o \sqrt{1 - \xi^2}$
- $\sigma_1 = -\xi\omega_o$
- Residuo: mutiplicando la ecuación (12) para el valor  $j\omega = \lambda_1$  por  $(\lambda_1 - \lambda_2)$  se obtiene:

$$A_1 = \frac{1}{2m\omega_d j} \quad (14)$$

La transformada inversa de Laplace de la ecuación (12) permite obtener su expresión en el dominio del tiempo: *función de respuesta impulsiva*  $h(t)$ :

$$h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_1^* e^{\lambda_1^* t} = e^{\sigma_1 t} (A_1 e^{j\omega_d t} + A_1^* e^{-j\omega_d t}) \quad (15)$$



Es interesante observar en la ecuación (15) el papel que juega el residuo  $A_1$  en la respuesta. Para ello, basta con aplicar las relaciones de Euler de las exponenciales complejas:

$$e^{j\omega_d t} = \cos \omega_d t + j \sin \omega_d t \quad (16)$$

con lo que se llega a:

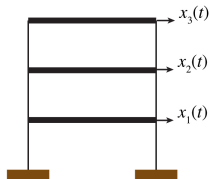
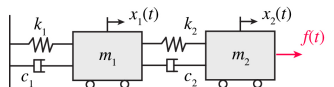
$$h(t) = \frac{e^{\sigma_1 t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = 2 |A_1| e^{\sigma_1 t} \sin \omega_d t \quad (17)$$

Es decir, el residuo  $A_1$  define la amplitud inicial de la IRF. Por otra parte, la parte real del polo  $\sigma_1$  determina la tasa de decaimiento de la respuesta, mientras la parte imaginaria  $\omega_d$  define la frecuencia de la oscilación.

La IRF define la respuesta del sistema dinámico a un fuerza impulsiva (delta de Dirac  $\delta(t)$ ) en el instante  $t = 0$ .



# Sistemas de múltiples grados de libertad



El equilibrio dinámico de un sistema de múltiples grados de libertad (Multiple Degrees Of Freedom MDOF) expresa matricialmente del siguiente modo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (18)$$

- **M**: Matriz de masa
- **C**: Matriz de amortiguamiento
- **K**: Matriz de rigidez
- $\ddot{\mathbf{X}}$ ,  $\dot{\mathbf{X}}$ ,  $\mathbf{X}$ : Vectores de aceleración, velocidad, desplazamiento
- **F**: Vector de fuerzas externas

Transformando la ecuación (18) en el dominio de Laplace ( $p$ ) considerando condiciones iniciales nulas:

$$(p^2\mathbf{M} + p\mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{X}(p) = \mathbf{F}(p), \quad (19)$$

o, de un modo más compacto:

$$\mathbf{Z}(p)\mathbf{X}(p) = \mathbf{F}(p), \quad (20)$$

se define la matrix de rigidez dinámica  $\mathbf{Z}(p)$ . Invirtiendo la ecuación (20) se llega a la definición de función de transferencia  $\mathbf{H}(p)$ :

$$\mathbf{X}(p) = \mathbf{H}(p)\mathbf{F}(p), \quad (21)$$

donde  $\mathbf{H}(p)$  se puede obtener a través de cálculo estándar como:

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{Z}(p)^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}(p))}{|\mathbf{Z}(p)|} \quad (22)$$

### Polos del sistema, frecuencias naturales, y tasas de amortiguamiento:

El denominador de la ecuación (22) representa la ecuación característica del sistema. Para obtener dichos polos, resulta conveniente transformar el sistema de ecuaciones (18) en su forma estado-espacio equivalente. Para ello, definimos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} &= \mathbf{F}, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{X}} - \mathbf{M}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (23)$$

Ahora, transformado la ecuación (23) al dominio de Laplace con CI nulas:

$$\begin{aligned} (p^2\mathbf{M} + p\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X}(p) &= \mathbf{F}(p), \\ p\mathbf{M} - p\mathbf{M} &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (24)$$

podemos reescribir el sistema de ecuaciones como un sistema acoplado:

$$\left( p \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{K} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p\mathbf{X}(p) \\ \mathbf{X}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(p) \end{bmatrix} \quad (25)$$

o de forma más compacta como:

$$(p\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{Y}(p) = \mathbf{F}'(p) \quad (26)$$

Los polos del sistema se pueden obtener resolviendo el problema de autovalores/autovectores asociados a:

$$|p\mathbf{A} + \mathbf{B}| = 0 \quad (27)$$

Trabajando esta expresión se puede observar fácilmente que las raíces de esta ecuación son las raíces de la ecuación característica ( $|\mathbf{Z}(p)| = 0$ ).



Los autovectores diagonalizan las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  de la ecuación (27):

$$\begin{aligned}\Phi^T \mathbf{A} \Phi &= \text{diag}(a_j) \\ \Phi^T \mathbf{B} \Phi &= \text{diag}(b_j)\end{aligned}\tag{30}$$

Además, los autovalores/autovectores verifican:

$$(\lambda_r^2 \mathbf{M} + \lambda_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \varphi_r = \mathbf{Z}(\lambda_r) \varphi_r = \mathbf{0}\tag{31}$$

con lo que se concluye que  $\lambda_r$  son las soluciones (polos) de la ecuación característica ( $|\mathbf{Z}(p)| = 0$ ).

Los modos de vibración son en general **vectores complejos**. Para entender su significado, tomemos la ecuación dinámica homogénea (sin forzamiento):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = 0, \quad (32)$$

En general, se puede asumir una solución del tipo  $\mathbf{X} = \mathbf{A}e^{rt}$ . Sustituyendo en la ecuación (32), llegamos a un problema de autovalores/autovectores como sigue:

$$(r^2\mathbf{M} + r\mathbf{C} + \mathbf{K})\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad (33)$$

donde  $r_j$  y  $\boldsymbol{\varphi}_j$  serán en general magnitudes complejas. Con ello, la solución final resultará de la forma:

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{2N} A_j \begin{bmatrix} \varphi_{1j} \\ \vdots \\ \varphi_{lj} \\ \vdots \\ \varphi_{Nj} \end{bmatrix} e^{(a_j+ib_j)t} = \quad (34)$$

$$= \sum_{j=1}^{2N} A_j \begin{bmatrix} |\varphi_{1j}| e^{i\alpha_{1j}} \\ \vdots \\ |\varphi_{lj}| e^{i\alpha_{lj}} \\ \vdots \\ |\varphi_{Nj}| e^{i\alpha_{Nj}} \end{bmatrix} e^{(a_j+ib_j)t} = \sum_{j=1}^{2N} A_j e^{a_j t} \begin{bmatrix} |\varphi_{1j}| e^{i(b_j t + \alpha_{1j})} \\ \vdots \\ |\varphi_{lj}| e^{i(b_j t + \alpha_{lj})} \\ \vdots \\ |\varphi_{Nj}| e^{i(b_j t + \alpha_{Nj})} \end{bmatrix} \quad (35)$$

lo que indica que existe un desfase  $\alpha_{lj}$  entre los movimientos de los distintos puntos  $l$ .

*NOTA: En la práctica, normalmente los modos en ingeniería civil suelen ser bastante reales (con componentes modales alineadas en el plano complejo). Modos complejos pueden aparecer cuando existen elementos disipadores en la estructura o por errores en la identificación.*



Conocidas las raíces del polinomio característico, podemos expandir la función de transferencia como sigue:

$$\mathbf{H}(p) = \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}(p))}{\prod_{r=1}^N E(p - \lambda_r)(p - \lambda_r^*)} \quad (36)$$

donde  $E$  es un valor constante, que se puede demostrar igual a  $\det(\mathbf{M})$ . Además, al igual que hicimos en el sistema de 1 GDL, podemos expandir la función de transferencia en fracciones elementales:

$$\mathbf{H}(p) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{\mathbf{A}_r}{p - \lambda_r} + \frac{\mathbf{A}_r^*}{p - \lambda_r^*} \right) \quad (37)$$

donde las matrices  $\mathbf{A}_r$  son ahora matrices de residuos. Las matrices  $\mathbf{A}_r$  se pueden obtener particularizando el valor de la función de transferencia en el polo correspondiente ( $\lambda_r$ ):

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{H}(\lambda_r)(\lambda_r - \lambda_r) = \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))}{\prod_{s=1, s \neq r}^{2N} E(\lambda_r - \lambda_s)} = P_r \text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) \quad (38)$$

## Expresión de los residuos en función de los modos:

Si analizamos con detalle el término  $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))$ , podemos observar que existe una relación entre la matriz de funciones de transferencia  $\mathbf{H}(p)$  y los vectores modales  $\Phi_r$ . Si premultiplicamos los términos de la ecuación (22) por  $\mathbf{Z}(p)$ :

$$\mathbf{Z}^{-1}(p) = \mathbf{H}(p) = \frac{\text{adj}(\mathbf{Z}(p))}{|\mathbf{Z}(p)|} \rightarrow \mathbf{Z}(p)\text{adj}(\mathbf{Z}(p)) = |\mathbf{Z}(p)| \mathbf{I} \quad (39)$$

Particularizando para los polos:

$$\mathbf{Z}(\lambda_r)\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) = \mathbf{0} \quad (40)$$

Siendo cierto para cualquier columna  $i$  de  $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))$ . Además hemos visto que los autovalores/autovectores cumplen:

$$(\lambda_r^2 \mathbf{M} + \lambda_r \mathbf{C} + \mathbf{K}) \varphi_r = \mathbf{Z}(\lambda_r) \varphi_r = \mathbf{0} \quad (41)$$

Por lo que podemos concluir que las columnas de  $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))$  son proporcionales a  $\varphi_r$ .

$$\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) = \varphi_r \mathbf{L}_r \quad (42)$$

con  $\mathbf{L}_r$  un vector de constantes de proporcionalidad.

Además, dado que las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento son simétricas (los sistemas mecánicos deben obedecer el principio de reciprocidad de Maxwell), la matriz de rigidez dinámica y su adjunta también serán simétricas ( $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) = \text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))^T \propto \varphi_r^T$ ). Por lo tanto, podemos concluir que las filas de  $\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r))$  también son proporcionales al vector modal  $\varphi_r$ , con lo que podemos escribir:

$$\text{adj}(\mathbf{Z}(\lambda_r)) = R_r \varphi_r \varphi_r^T = R_r \begin{bmatrix} \varphi_r^1 \varphi_r^1 & \varphi_r^1 \varphi_r^2 & \dots & \varphi_r^1 \varphi_r^N \\ \varphi_r^2 \varphi_r^1 & \varphi_r^2 \varphi_r^2 & \dots & \varphi_r^2 \varphi_r^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_r^N \varphi_r^1 & \varphi_r^N \varphi_r^2 & \dots & \varphi_r^N \varphi_r^N \end{bmatrix} \quad (43)$$

Incluyendo esta expresión en la ecuación (36), y combinando las constantes  $R_r$  y  $P_r$  como  $Q_r = R_r P_r$ , es posible escribir:

$$\mathbf{H}(p) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{Q_r \varphi_r \varphi_r^T}{(p - \lambda_r)} + \frac{Q_r^* \varphi_r^* \varphi_r^{*T}}{(p - \lambda_r^*)} \right) \quad (44)$$

de donde se extrae que los residuos quedan definidos como:

$$\mathbf{A}_r = Q_r \varphi_r \varphi_r^T \quad (45)$$

Dado que todas las columnas de  $\mathbf{A}_r$  son proporcionales entre sí, cada columna contiene suficiente información para construir esta matrix. Esto no ocurre así cuando alguno de los grados de libertad medidos coincide con un nodo de la estructura, para el que la columna y fila correspondientes serán nulas. Se debe de evitar esta situación mediante una selección adecuada de los puntos de excitación. La ecuación (37) muestra que los residuos  $\mathbf{A}_r$  son unidades absolutas. Junto con la ecuación (53), se observa que los vectores modales  $\varphi_r$  son vectores escalados con coeficiente de escala  $Q_r$ .

## Factores de participación modal:

Definiendo la matriz de modos como:

$$\mathbf{V} = [\varphi_1 \dots \varphi_N \varphi_1^* \dots \varphi_N^*] \quad (46)$$

podemos definir la matriz de factores de participación modal  $\mathbf{L}$  como:

$$\mathbf{L} = [Q_1 \varphi_1 \dots Q_N \varphi_N \ Q_1^* \varphi_1^* \dots Q_N^* \varphi_N^*]^T = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & Q_r & \\ & & \diagup \end{bmatrix} \mathbf{v}^T \quad (47)$$

Si además definimos la matriz de términos  $\frac{1}{(p-\lambda_r)}$  y  $\frac{1}{(p-\lambda_r^*)}$  como:

$$[p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \quad (48)$$

la ecuación (51) queda reducida a:

$$\mathbf{H}(p) = \mathbf{V} [p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \mathbf{L} = \mathbf{V} [p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & Q_r & \\ & & \diagup \end{bmatrix} \mathbf{v}^T \quad (49)$$

Finalmente, podemos expresar la relación entre las fuerzas de entrada  $\mathbf{F}(p)$  y los desplazamientos  $\mathbf{X}(p)$  como:

$$\mathbf{X}(p) = \mathbf{H}(p)\mathbf{F}(p) = \mathbf{V}[p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1}\mathbf{L}\mathbf{F}(p) = \mathbf{V}[p\mathbf{I} - \Lambda]^{-1} \begin{bmatrix} \diagdown \\ Q_r \\ \diagup \end{bmatrix} \mathbf{V}^T \mathbf{F}(p) \quad (50)$$

En este contexto, la matriz  $\mathbf{L}$  se relaciona con los inputs o fuerzas de entrada. Es una medida de la eficiencia de la excitación en cada grado de libertad y modo de vibración.

## Matriz de funciones de respuesta en frecuencia y matriz de función de respuesta impulsiva:

La matriz de funciones de transferencia se puede obtener fácilmente evaluando la ecuación (51) en el dominio de la frecuencia ( $p \rightarrow j\omega$ ):

$$\mathbf{H}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left( \frac{Q_r \varphi_r \varphi_r^T}{j\omega - \lambda_r} + \frac{Q_r^* \varphi_r^* \varphi_r^{*T}}{j\omega - \lambda_r^*} \right) \quad (51)$$

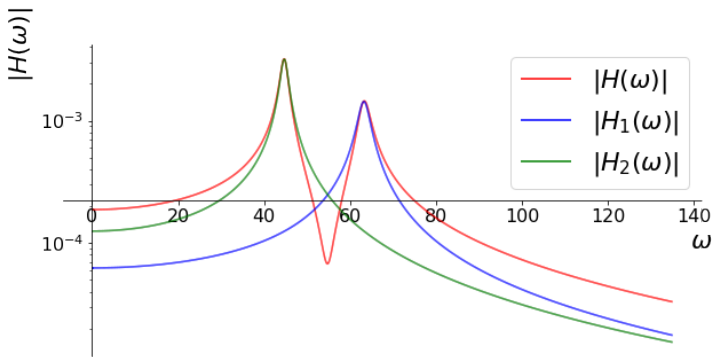
En análisis modal experimental, rara vez se mide la matriz completa  $\mathbf{H}(\omega)$  por limitaciones prácticas. El número de modos,  $N_m$ , será siempre menor que el número de puntos de medida,  $N_o < N$ . Asimismo, el número de inputs,  $N_i$ , suele ser considerablemente inferior al número de respuestas medidas. Con ello, las dimensiones de las matrices en la ecuación (51) resultan:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\omega)_{N_o \times 1} &= \mathbf{H}(\omega)_{N_o \times N_i} \mathbf{F}(\omega)_{N_o \times 1} \\ \mathbf{V}_{N_m \times 2N_m} [\rho \mathbf{I} - \Lambda]_{2N_m \times 2N_m}^{-1} \mathbf{L}_{2N_m \times 2N_i} \mathbf{F}(\omega)_{N_i \times 1} \end{aligned} \quad (52)$$





De acuerdo con la ecuación (51), las funciones de respuesta en frecuencia se pueden interpretar como la suma de un número de componentes, cada una equivalente a la respuesta de un sistema de un único grado de libertad.



# Identificación modal

En general, la identificación modal en EMA consiste en determinar las propiedades modales de la estructura (frecuencias resonantes, tasas de amortiguamiento, y modos de vibración) a partir de las funciones de respuesta en frecuencia determinadas experimentalmente. Para ello, en general se debe construir un modelo que reproduzca las FRFs vistas en la ecuación (51). En general, los métodos de identificación se pueden clasificar en:

- Métodos locales o basados en hipótesis de sistemas de 1 GDL.
- Métodos globales

## Métodos locales - Motivación a través del análisis modal de sistemas con amortiguamiento proporcional

Consideremos un sistema dinámico de  $N$  grados de libertad con amortiguamiento proporcional:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (56)$$

Dado que la matriz de amortiguamiento es proporcional, es posible desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales anterior mediante superposición modal. Para ello, definimos el vector desplazamientos  $\mathbf{X}$  a través de las coordenadas modales  $y_j$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^N \varphi_j y_j = \Phi \mathbf{Y} \quad (57)$$

Con ello, desacoplamos el sistema premultiplicando por la transpuesta de la matriz modal  $\Phi$ :

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{Y}} + \Phi^T \mathbf{C} \Phi \dot{\mathbf{Y}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{Y} = \Phi^T \mathbf{F} \quad (58)$$

Donde podemos identificar las siguientes matrices diagonales:

- Matriz de masa modal  $\mathbf{M}_d = \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \text{diag}(M_j)$ .
- Matriz de rigidez modal  $\mathbf{K}_d = \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(M_j)$ .
- Matriz de amortiguamiento modal  $\mathbf{C}_d = \Phi^T \mathbf{C} \Phi = \text{diag}(C_j)$ .

Esta descomposición nos permite desacoplar el sistema en  $N$  ecuaciones equivalentes a un sistema de 1 GDL (para  $j = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} M_j \ddot{y}_j + C_j \dot{y}_j + K_j y_j &= F_j^* \\ \ddot{y}_j + 2\zeta_j \omega_{o,j} \dot{y}_j + \omega_{o,j}^2 y_j &= F_j^* / M_j \end{aligned} \quad (59)$$

donde  $F_j^*$  es la proyección del vector fuerza sobre el modo de vibración  $j$ .

NOTA: si los modos de vibración se normalizan a la matriz de masa ( $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$ ),  $M_j = 1$ .

Pasando la ecuación (59) al dominio de la frecuencia mediante la transformada de Fourier, llegamos a:

$$(-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_{o,j} + \omega_{o,j}^2) Y_j(\omega) = F_j^*(\omega)/M_j \quad (60)$$

de donde podemos extraer la FRF del modo  $j$  como:

$$H_j(\omega) = \frac{1/M_j}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_{o,j} + \omega_{o,j}^2} = \frac{A_1}{j\omega - \lambda_{1,j}} + \frac{A_1^*}{j\omega - \lambda_{1,j}^*} \quad (61)$$

Organizando las FRFs de los modos en una matriz diagonal  $\mathbf{H}(\omega)$ , es posible relacionar los desplazamientos de la estructura con las coordenadas modales:

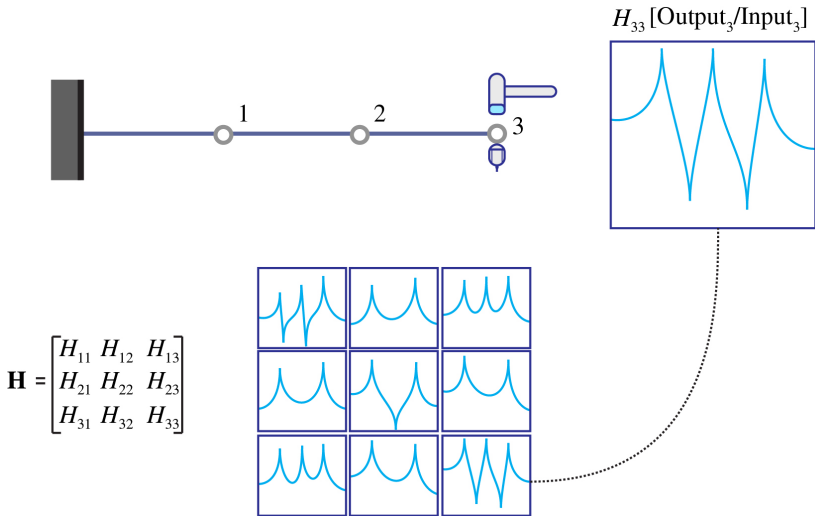
$$\mathbf{X}(\omega) = \Phi\mathbf{Y}(\omega) = \Phi\mathbf{H}(\omega)\Phi^T\mathbf{F}(\omega) = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{F}(\omega) \quad (62)$$

La matriz de funciones de transferencia  $\mathbf{G}(\omega)$  de la ecuación (61) presenta la siguiente forma:

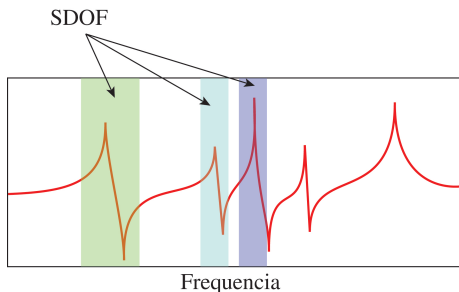
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \quad (63)$$

donde los términos  $H_{ik}(\omega)$  se pueden determinar como:

$$H_{ik}(\omega) = \sum_{j=1}^N H_j(\omega) \varphi_{ij} \varphi_{kj} \quad (64)$$



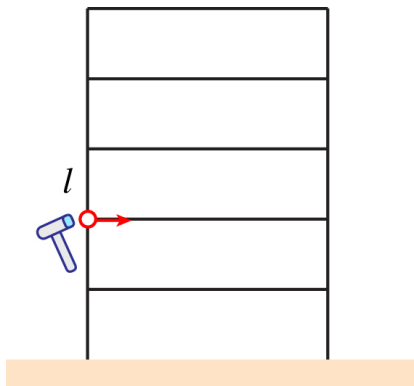
Esta base teórica nos permite explotar la evidencia de que, en la vecindad de los picos resonantes, las FRFs están dominadas por la contribución de un modo, siendo despreciable la contribución del resto.



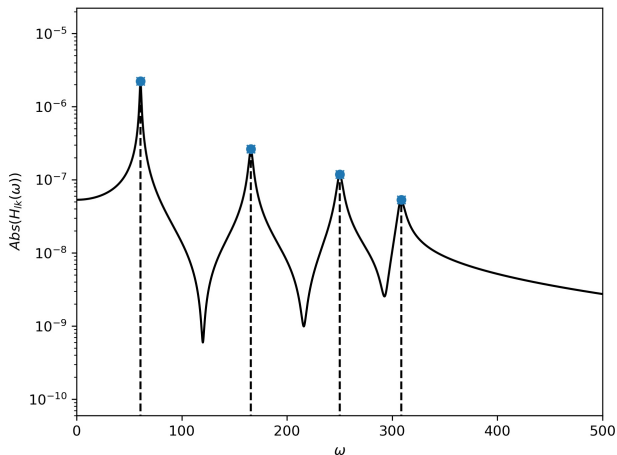


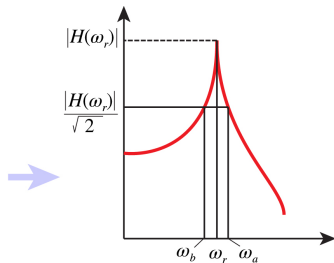
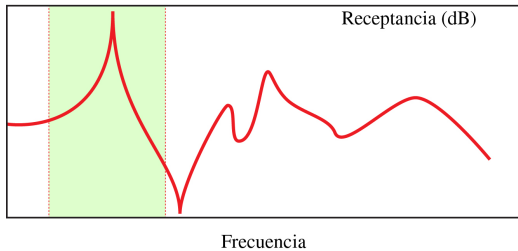
## Método de toma de picos o peak-picking: (Procedimiento MISO)

- 1 Dar un impulso en el grado de libertad  $l$  ( $F_l$ ).
- 2 Registro y cálculo de  $x_l(\omega)$ .
- 3 Cálculo de  $H_{ll}(\omega) = x_l(\omega)/F_l(\omega)$ .



- Identificar  $\omega_j$  en los picos de  $H_{II}(\omega)$ .
- Identificar  $\zeta_j$  en cada pico (e.j. método del ancho de banda, circle fit).

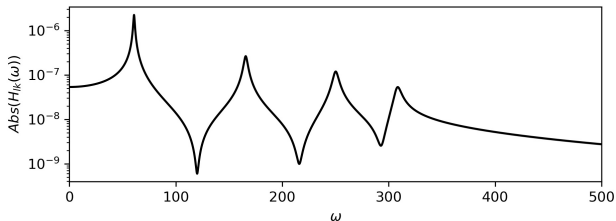
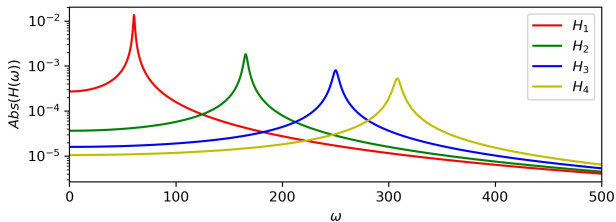




$$\zeta_r = \frac{\omega_a - \omega_b}{2\omega_r} \quad (65)$$

- 6 Calcular las funciones  $H_j(\omega)$  a partir de los datos anteriores

$$H_r(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_{o,r} + \omega_{o,r}^2} \quad (66)$$



- 7 Calcular  $\varphi_{lj}$  a partir de  $H_{ll}$  y  $H_j$ :

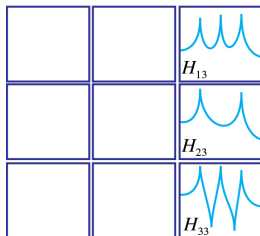
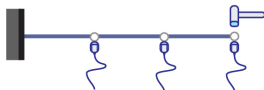
$$\begin{aligned}
 H_{ll}(\omega_1) &= H_1(\omega_1)\varphi_{l1}^2/M_1 + \dots + H_N(\omega_1)\varphi_{lN}^2/M_N \\
 &\dots = \dots \\
 H_{ll}(\omega_N) &= H_1(\omega_N)\varphi_{lN}^2/M_1 + \dots + H_N(\omega_N)\varphi_{lN}^2/M_N
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

Del sistema de ecuaciones anterior podremos determinar  $\varphi_{lj}^2/M_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Nótese que el término  $1/M_j$  actúa como un factor de escala que no afecta a la estimación del modo.

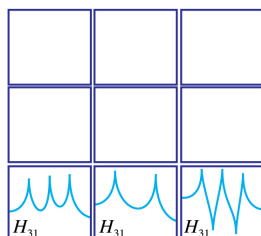
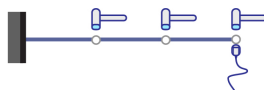
- 8 Aplicamos una nueva fuerza  $F_k$  y obtenemos  $x_l$  y  $H_{lk}$ .
- 9 Calculamos los valores de  $\varphi_{kj}$  a partir de  $H_{lk}$ ,  $H_j$  y  $\varphi_{lj}$ .
- 10 Se siguen aplicando fuerzas en cada punto hasta tener todas las componentes de todos los modos.

Se debe comenzar por un término de la diagonal y luego seguir con una columna completa fila completa.

SIMO



MISO



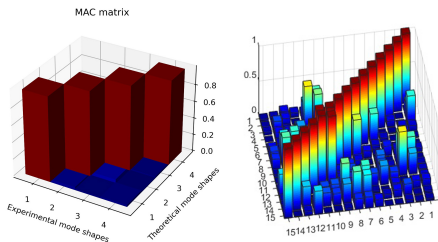
## Desventajas:

- El método de toma de picos se basa en el valor de los picos de las FRFs, los cuales son difíciles de medir con precisión.
- Como consecuencia de la anterior, el método de toma de picos no suele producir datos modales precisos.
- Para la estimación del amortiguamiento, se toman únicamente puntos discretos. Estos puntos se suelen obtener a través de interpolación la cual puede producir errores en la estimación.
- La presencia de ruido en las señales afecta las estimaciones modales.
- Cuando los modos no están bien separados, la premisa básica de descomposición de la respuesta en sistemas de 1 GDL deja de ser cierta.

# Validación de formas modales

**Modal Assurance Criterion (MAC):** métrica que mide la correlación entre modos de vibración. Se puede emplear para comparar mediciones experimentales con resultados teóricos, así como evaluar la similitud entre modos experimentales. El valor del MAC puede estar entre 0 (modos no correlacionados en absoluto) y 1 (modos perfectamente correlacionados). Se define entre dos modos de vibración  $\varphi_r$  y  $\varphi_q$  como:

$$MAC(\varphi_r, \varphi_q) = \frac{|\varphi_r^T \varphi_q^*|^2}{(\varphi_r^T \varphi_r^*) (\varphi_q^T \varphi_q^*)} \quad (68)$$





# Métodos globales

Para solventar las limitaciones del método anterior, surgen toda una familia de métodos paramétricos basados en el ajuste de ciertos modelos modales a las FRFs experimentales. En términos generales, los métodos paramétricos se pueden clasificar como:

- Métodos basados en el dominio del tiempo.
  - Least-squares time domain method.
  - Ibrahim time domain (ITD) method.
  - Random decrement method.
  - ARMA time series method.
  - Least-squares complex exponential (LSCE) method.
- Métodos basados en el dominio de la frecuencia.
  - Circle fit method.
  - Dobson's method.
  - Least-squares complex frequency (LSCF) method.
- Métodos multi-input multi-output.
  - Frequency domain poly-reference modal analysis method (polymax - p-LSCF).

La idea principal del método LSCF es la de reproducir las FRFs de la ecuación (51) a través de funciones racionales como sigue:

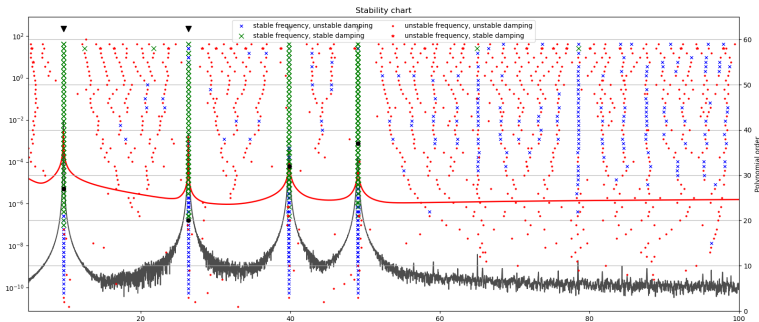
$$\hat{H}_k(\omega) = \frac{B_k(\omega, \theta)}{A(\omega, \theta)} \quad (69)$$

con:

$$\begin{aligned} B_k(\omega, \theta) &= \sum_{j=0}^n b_{kj}(\omega)^j, \quad k = 1, 2, \dots, N_o N_i \\ A(\omega, \theta) &= \sum_{j=0}^n a_j(\omega)^j \end{aligned} \quad (70)$$

siendo  $b_{kj}$  y  $a_j$  los parámetros del modelo a determinar. Dichos parámetros se pueden obtener mediante un ajuste de mínimos cuadrados de las FRFs experimentales.

La consideración de polinomios de orden creciente ( $n$ ), permite obtener la estabilidad de los polos obtenidos en términos de frecuencia resonante, amortiguamiento, y modos de vibración, dando como resultado un **diagrama de estabilización**. Los diagramas de estabilización son herramientas esenciales en las técnicas paramétricas de identificación modal para separar modos ficticios (modos espúreos) de los modos reales o físicos.



# References



Fu, Zhi-Fang and He, Jimin (2001)

Modal analysis

*Elsevier* 12(3), 45 – 678.



Avitabile, P. (2018)

Introduction to experimental modal analysis: A simple non-mathematical presentation.

Modal Testing: A Practitioner's Guide; The Society for Experimental Mechanics and John Wiley & Sons Ltd.: Chichester, UK, 6.



Heylen, W., & Sas, P. (2006).

Modal analysis theory and testing.

Katholieke Universteit Leuven, Departement Werktuigkunde; Leuven.



Craig Jr, R. R., & Kurdila, A. J. (2006).

Fundamentals of structural dynamics.

John Wiley & Sons.

# The End

# Fundamentos teóricos del Análisis Modal Operacional

Enrique García-Macías

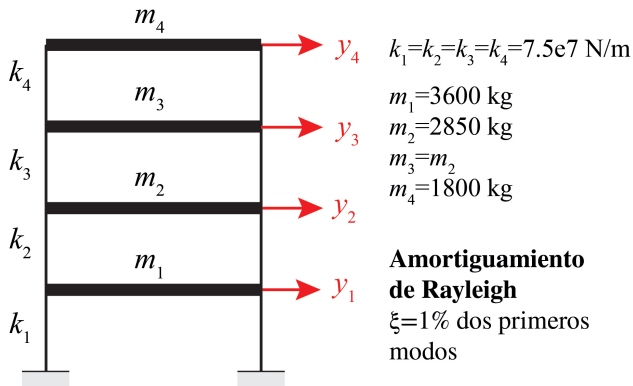
Universidad de Granada

*enriquegm@ugr.es*

March 15, 2021

- 1 Caso de estudio básico: shear building
- 2 OMA en el dominio del tiempo (time-based OMA)
  - Sistema no-amortiguado: vibraciones libres
  - Sistema con amortiguamiento proporcional
  - Sistema con amortiguamiento general
  - Continuous-Time State-Space Models
  - Discrete-Time State-Space Models
  - Stochastic State-Space Models
  - Covariance-based Stochastic Subspace Identification (COV-SSI)
- 3 OMA en el dominio de la frecuencia (frequency-based OMA)
  - Frequency Domain Decomposition (FDD)

## Caso de estudio básico: shear building





Descripción del sistema dinámico mediante elementos finitos (vibración libre):

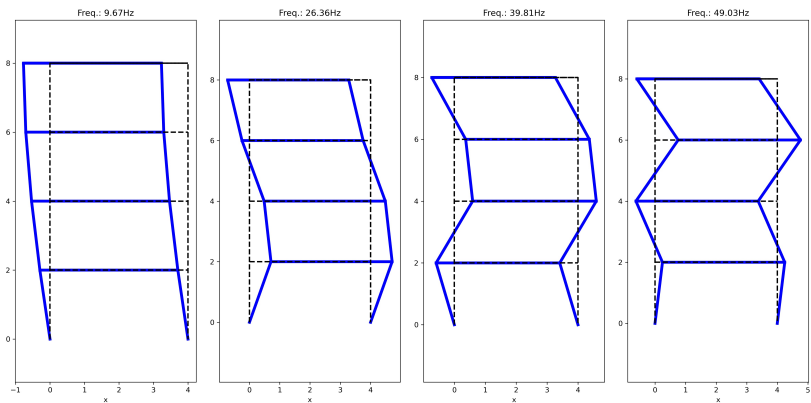
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Análisis modal: problema de autovalores/autovectores

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Theta = 0 \quad (3)$$

[Frame\\_structure\\_undamped\\_modal.py](#)



## Sistema no-amortiguado: vibraciones libres

Un sistema dinámico estructural genérico modelado mediante FEM ( $n_2$  grados de libertad) se define como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_2\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) = \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

donde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, y  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  es el vector de desplazamientos para un instante de tiempo  $t$ . El vector  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$  es el vector que contiene las fuerzas exteriores actuando sobre el sistema. Este último se puede factorizar mediante la matriz  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$  especificando las localizaciones discretas de un conjunto de  $m$  inputs (fuerzas) incluidas en un vector  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ .

En el caso de sistemas no amortiguados en vibración libre:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (5)$$

Podemos encontrar soluciones a la ecuación (5) de la forma  $q(t) = \varphi_i e^{\lambda_i t}$ .  
Sustituyendo en (5):

$$\mathbf{K}\varphi_i = \mathbf{M}\varphi_i (-\lambda_i^2) \quad (6)$$

donde los autovalores  $\varphi_i \in \mathbb{R}^{n_2}$  y autovectores  $\lambda_i = j\omega_i$  son magnitudes reales. Podemos reorganizar la ecuación (6) de forma matricial compacta:

$$\mathbf{K}\Theta = \mathbf{M}\Theta\Omega^2 \quad (7)$$

siendo  $\Theta \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  la matriz modal conteniendo los autovectores por columnas, y  $\Omega = \text{diag}(\omega_i) \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  una matriz diagonal conteniendo los autovalores  $\omega_i$ .

Se verifican las condiciones de ortogonalidad:

$$\Theta^T \mathbf{M} \Theta = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & m_i \\ & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\Theta^T \mathbf{K} \Theta = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & k_i \\ & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde los términos  $m_i$  y  $k_i$  son las masas y rigideces modales, cumpliendo  $\omega_i^2 = k_i/m_i$ .

## Sistema con amortiguamiento proporcional

Realizando el cambio de coordenadas  $\mathbf{q}(t) = \Theta \mathbf{q}_m(t)$  ( $\mathbf{q}_m(t)$  desplazamientos modales), podemos desacoplar las ecuaciones del movimiento como:

$$\Theta^T \mathbf{M} \Theta \ddot{\mathbf{q}}_m(t) + \Theta^T \mathbf{C}_2 \Theta \dot{\mathbf{q}}_m(t) + \Theta^T \mathbf{K} \Theta \mathbf{q}_m(t) = \Theta^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (10)$$

Al tratarse de un amortiguamiento proporcional diagonalizable, la matriz  $\Theta^T \mathbf{C}_2 \Theta$  puede escribirse como:

$$\Theta^T \mathbf{C}_2 \Theta = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & c_i & \\ & & \diagup \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & 2\zeta_i \omega_i m_i & \\ & & \diagup \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & m_i & \\ & & \diagup \end{bmatrix} \quad (11)$$

con

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(2\zeta_i \omega_i) \quad (12)$$

Premultiplicando la ecuación (10) por  $(\Theta^T \mathbf{M} \Theta)^{-1}$

$$\mathbf{l} \ddot{\mathbf{q}}_m(t) + \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{q}}_m(t) + \mathbf{\Omega} \mathbf{q}_m(t) = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & 1/m_i & \\ & & \diagup \end{bmatrix} \Theta^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \quad (13)$$

Al igual que en el caso no-amortiguado, podemos encontrar soluciones a la parte homogénea de la ecuación (13) de la forma  $q_m(t) = \varphi_i e^{\lambda_i t}$ , llegando al polinomio característico:

$$\lambda_i^2 + 2\zeta_i \omega_i \lambda_i + \omega_i^2 = 0 \quad (14)$$

de soluciones:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\zeta_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}. \quad (15)$$

## Sistema con amortiguamiento general

Los métodos experimentales de identificación modal se basan en la asunción de un modelo de amortiguamiento viscoso general. Con el fin de encontrar los autovalores de una estructura con amortiguamiento general, es necesario reformular la ecuación del movimiento de segundo orden (4) en una ecuación equivalente de primer orden. Para ello, sencillamente añadimos la identidad  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t)$ . Si además, definimos un nuevo vector  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  ( $n = 2n_2$ ) que llamaremos vector de estado:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

y las matrices:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (17)$$



Con ello, podemos reescribir la ecuación (4) como:

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (18)$$

De aquí, el problema de autovalores/autovectores asociado resulta:

$$\mathbf{P}\Psi\Lambda_c + \mathbf{Q}\Psi = \mathbf{0} \quad (19)$$

donde  $\Psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$  contiene los  $n = 2n_2$  autovectores complejos en sus columnas y  $\Lambda_c = \text{diag}(\lambda_j) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es una matriz diagonal conteniendo los  $n$  autovalores complejos  $\lambda_o$ . Se puede demostrar que  $\Lambda_c$  y  $\Psi$  adquieren la siguiente estructura:

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta\Lambda & \Theta^*\Lambda^* \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_j), \quad \Theta = [\dots \varphi_k \dots], \quad k = 1, \dots, n_2$$

Los autovalores complejos  $\lambda_i$  los podemos escribir como:

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\zeta_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (21)$$

Además, es fácil demostrar que se verifican las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\Psi^T \mathbf{P} \Psi = \begin{bmatrix} & & \\ & a_i & \\ & & \end{bmatrix}; \quad \Psi^T \mathbf{Q} \Psi = \begin{bmatrix} & & \\ & b_i & \\ & & \end{bmatrix} \quad (22)$$

Introduciendo la ecuación (22) en (19) se obtiene que:

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} & & \\ & \lambda_i & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & 1/a_i & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & b_i & \\ & & \end{bmatrix}. \quad (23)$$

## Continuous-Time State-Space Models

### Ecuación de estado

Premultiplicando la forma de primer orden de la ecuación (19) por  $\mathbf{P}^{-1}$ , podemos escribir la ecuación del movimiento de segundo orden como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (24)$$

donde  $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la llamada **matriz de estado - state matrix** y  $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Usando la descomposición modal de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  (22),  $\mathbf{A}_c$  se puede escribir como:

$$\mathbf{A}_c = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = -\Psi \begin{bmatrix} 1/a_i \end{bmatrix} \Psi^T \Psi^{-T} \begin{bmatrix} b_i \end{bmatrix} \Psi^{-1} = \Psi \Lambda_c \Psi^{-1} \quad (25)$$

Lo que muestra que  $\Lambda_c$  y  $\Psi$  contienen los autovalores y autovectores de  $\mathbf{A}_c$ .

Operando algebraicamente,  $\mathbf{A}_c$  y  $\mathbf{B}_c$  pueden escribirse como:

$$\mathbf{A}_c = -\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Ejemplo: `Frame _structure _Modal _State _space.py`

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -41666.7 & 20833.3 & -0 & -0 & -0.46 & 0.18 & -0 & -0 \\ 26315.8 & -52631.6 & 26315.8 & -0 & 0.23 & -0.55 & 0.23 & -0 \\ -0 & 26315.8 & -52631.6 & 26315.8 & -0 & 0.23 & -0.55 & 0.23 \\ -0 & -0 & 41666.7 & -41666.7 & -0 & -0 & 0.37 & -0.46 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Haciendo la descomposición en autovalores/autovectores de  $\mathbf{A}_c$ :

- **Autovalores:**

$(-4.63+308.05j)$ ,  $(-4.63-308.05j)$ ,  $(-3.21+250.14j)$ ,  $(-3.21-250.14j)$ ,  $(-1.66+165.65j)$ ,  $(-1.66-165.65j)$ ,  $(-0.61+60.74j)$ ,  $(-0.61-60.74j)$

- **Frecuencias resonantes (Hz):**  $f_i = |\lambda_i| / 2\pi$

9.67, 9.67, 26.36, 26.36, 39.81, 39.81, 49.03, 49.03

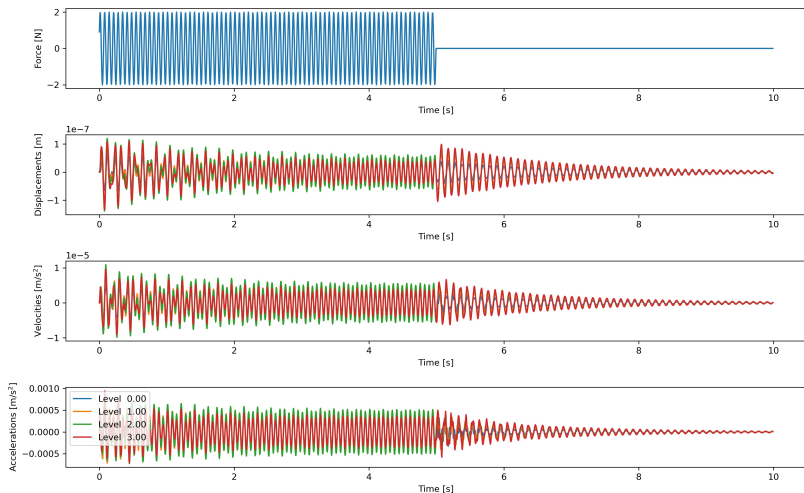
- **Tasas de amortiguamiento (%):**  $\zeta_i = -\text{Re}(\lambda_i) / \omega_i$

0.15, 0.15, 0.13, 0.13, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10

Se comprueba que las frecuencias resonantes, tasas de amortiguamiento, y modos de vibración coinciden con los valores teóricos (en el modelo estado-espacio aparecen en pares conjugados).

Ejemplo: [Example\\_solve\\_EDO.py](#)

Ejemplo: [Frame\\_structure\\_Modal\\_proportional\\_damping\\_general.py](#)



## Ecuación de observación

En un ensayo real, nunca es posible monitorizar los  $n_2$  grados de libertad de la estructura, sino un conjunto limitado de puntos. Si se asume que las mediciones se toman en  $l$  localizaciones y que los sensores pueden ser tanto acelerómetros, como velocímetros o transductores de desplazamiento, la ecuación de observación se define como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{q}(t) \quad (29)$$

donde  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$  son las mediciones registradas (outputs);  $\mathbf{C}_a$ ,  $\mathbf{C}_v$ ,  $\mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{l \times n_2}$  se denominan matrices de localización de salida (output location matrices) para aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente.

Usando la ecuación del movimiento (4) para eliminar  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ , la ecuación (29) se puede escribir de manera más compacta usando la definición del vector de estado (16) como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (30)$$

donde  $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{l \times n}$  y  $\mathbf{D}_c \in \mathbb{R}^{l \times m}$  se denominan matriz de salida (output matrix) y matriz de transmisión directa (direct transmission matrix). Estas matrices se pueden relacionar fácilmente con las matrices del sistema FEM:

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}], \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2 \quad (31)$$



## Modelo Estado-Espacio (State-Space Model)

Juntando las ecuaciones de estado y observación, se obtiene el denominado modelo de estado-espacio continuo (continuous-time state-space model):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{32}$$

El orden del modelo  $n$  se define como la dimensión del vector de estado. El modelo estado-espacio se puede escribir en una nueva coordenada  $\mathbf{z}(t)$  definida a partir de una transformación de similaridad (similarity transformation)  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{z}(t)$ , donde  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es una matrix compleja cuadrada no singular.

Introduciendo esta transformación de coordenadas en (32) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_c\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c\mathbf{T}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}_c\mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{33}$$

Es importante observar que las matrices transformadas ( $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_c\mathbf{T}$  y  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_c$ ) describen la misma relación input-output de las matrices originales.

Se puede emplear una transformación de similaridad espacial para relacionar el modelo estado-espacio con las propiedades modales del sistema. Dicha transformación relaciona el vector de estado con los desplazamientos modales  $\mathbf{x}_m \in \mathbb{C}^n$ :  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}\mathbf{x}_m(t)$ . Substituyendo  $\mathbf{T}$  por  $\mathbf{\Psi}$  en la ecuación (33) e insertando la descomposición modal de  $\mathbf{A}_c$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_m(t) &= \mathbf{\Lambda}_c\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{L}_c^T\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{V}_c\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{D}_c\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (34)$$

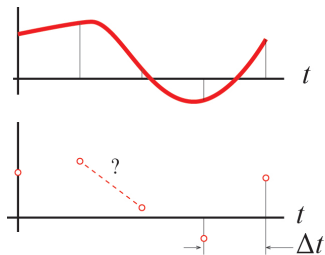
con

$$\mathbf{L}_c^T = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{B}_c; \quad \mathbf{V}_c = \mathbf{C}_c\mathbf{\Psi} \quad (35)$$

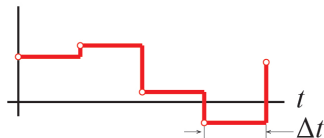
Nótese que la matriz de autovectores  $\mathbf{\Psi}$  y autovalores  $\mathbf{\Lambda}_c$  son las mismas vistas previamente en la ecuación (20). También es importante observar el papel de la matriz  $\mathbf{V}_c$ , la cual define la parte de los modos que podemos observar dados los sensores empleados en la monitorización.

## Discrete-Time State-Space Models

Hasta el momento, todas las ecuaciones se han expresado en el dominio continuo del tiempo. No obstante, en la práctica real, únicamente podremos tomar medidas en instantes discretos de tiempo. Por lo tanto, debemos convertir el modelo anterior a su versión de tiempo discreto. En concreto, fijaremos cierto paso de tiempo  $\Delta t$  [s] o frecuencia de muestreo  $f_s = 1/\Delta t$  [Hz]. Es decir, únicamente tendremos la respuesta del sistema para instantes de tiempo  $t = k\Delta t$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .



### Zero-Order Hold (ZOH)



Dado que desconocemos el comportamiento del sistema entre dos instantes de tiempo  $k\Delta t$  y  $(k+1)\Delta t$ , será necesario establecer una hipótesis de comportamiento. Entre las distintas opciones posibles, es común asumir que las señales de medida se definen constantes a trozos como se muestra en la figura anterior (Zero-Order Hold ZOH). Con esta hipótesis, el modelo estado-espacio continuo en el tiempo (32) se convierte en el modelo estado-espacio discreto en el tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{k+1}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t) \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_k(t)\end{aligned}\quad (36)$$

donde  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t) = (\mathbf{q}_k^T, \dot{\mathbf{q}}_k^T)^T$ . Las matrices de estado-espacio discretas se relacionan con sus versiones en tiempo continuo como (demostración en Ljung L. (1999)):

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c\Delta t}; \quad \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c; \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_c; \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_c \quad (37)$$

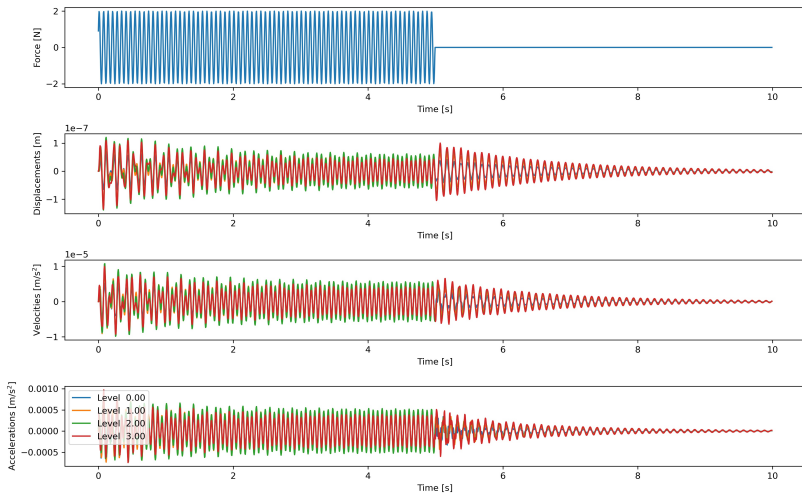
Los parámetros modales en el modelo estado-espacio discreto se puede obtener fácilmente introduciendo la descomposición en autovalores/autovectores de  $\mathbf{A}_c$  (25) en la ecuación (37):

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} = \mathbf{\Psi} e^{\mathbf{\Lambda} \Delta t} \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{\Psi} \begin{bmatrix} \mu_i \end{bmatrix} \mathbf{\Psi}^{-1} \quad (38)$$

donde  $\mu_i$  se puede obtener como:

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (39)$$

Ejemplo ( $F_s = 200$  Hz): *Frame \_structure \_Modal \_proportional \_damping \_general \_discrete.py*



$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.21 & 0.01 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.26 & 0.45 & 0.26 & 0.02 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.02 & 0.26 & 0.46 & 0.27 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.03 & 0.42 & 0.55 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -162.16 & 65.73 & 9.72 & 0.39 & 0.52 & 0.21 & 0.01 & 0.00 \\ 83.02 & -184.48 & 78.68 & 12.27 & 0.27 & 0.43 & 0.26 & 0.02 \\ 12.27 & 78.68 & -174.77 & 83.41 & 0.02 & 0.26 & 0.44 & 0.27 \\ 0.77 & 19.43 & 132.07 & -152.29 & 0.00 & 0.03 & 0.43 & 0.54 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Haciendo la descomposición en autovalores/autovectores de  $\mathbf{A}$ :

- **Autovalores:**  $(\mu_i)$

$(0.03+0.98j)$ ,  $(0.03-0.98j)$ ,  $(0.31+0.93j)$ ,  $(0.31-0.93j)$ ,  $(0.67+0.73j)$ ,  $(0.67-0.73j)$ ,  $(0.95+0.30j)$ ,  $(0.95-0.30j)$

- **Autovalores:**  $(\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t})$

$(-4.63+308.05j)$ ,  $(-4.63-308.05j)$ ,  $(-3.21+250.14j)$ ,  $(-3.21-250.14j)$ ,  $(-1.66+165.65j)$ ,  $(-1.66-165.65j)$ ,  $(-0.61+60.74j)$ ,  $(-0.61-60.74j)$

- **Frecuencias resonantes (Hz):**  $f_i = |\lambda_i| / 2\pi$

9.67, 9.67, 26.36, 26.36, 39.81, 39.81, 49.03, 49.03

- **Tasas de amortiguamiento (%):**  $\zeta_i = -\text{Re}(\lambda_i) / \omega_i$

0.15, 0.15, 0.13, 0.13, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10

Se comprueba que las frecuencias resonantes, tasas de amortiguamiento, y modos de vibración coinciden con los valores teóricos (en el modelo estado-espacio aparecen en pares conjugados).



# Stochastic State-Space Models

El paso final para la adaptación de los modelos anteriores a la realidad experimental refiere a la consideración del ruido. En concreto, definimos dos fuentes de ruido distintas: ruido en la excitación de la estructura ( $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ ) y ruido en las mediciones ( $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^l$ ). Con ello, podemos adaptar el caso discreto para obtener las ecuaciones estado-espacio estocástico:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{k+1}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}_k(t) + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{41}$$

Las fuentes de ruido se asumen como ruido blanco con las siguientes propiedades:

$$E[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0}; \quad E[\mathbf{v}_k] \quad (42)$$

$$E \left( \begin{bmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_p^T & \mathbf{v}_p^T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$E \left( \begin{bmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_q^T & \mathbf{v}_q^T \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0}, \quad p \neq q$$

En el contexto de OMA en ingeniería civil, la única información con la que contamos es la respuesta de la estructura solicitada por un sistema de fuerzas desconocidas (viento, tráfico, etc.). Dado que desconocemos el input del sistema  $\mathbf{u}(t)$ , será imposible distinguirlo de los términos de ruido  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  de la ecuación (41). Si asumimos que la sollicitación de la estructura también se puede describir como un ruido blanco, podemos fusionar los términos de sollicitación y ruido en la ecuación (41) a través de dos procesos estocásticos  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{k+1}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{44}$$

Los términos de ruido  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  deben cumplir las propiedades de ruido blanco definidas en (42) y (43). Además, el vector de estado debe ser un proceso estocástico estacionario de media cero:

$$E [\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T] = \Sigma, \quad E [\mathbf{x}_k] = 0 \quad (45)$$

donde la matriz de covarianza de estado  $\Sigma$  es independiente del instante de tiempo  $k$ . Asimismo, dado que  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  tiene media cero y son independientes del estado, también se cumplirá:

$$E [\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T] = E [\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T] = 0 \quad (46)$$

Las matrices de covarianza del output del sistema  $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$  se definen como:

$$\mathbf{R}_i = E [\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \quad (47)$$

donde  $i$  es un desfase de tiempo (time lag) arbitrario. La matriz de covarianza del vector estado y el vector de observación (next state-output) a su vez se define como  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ :

$$\mathbf{G} = E [\mathbf{x}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \quad (48)$$

Dadas las propiedades de estacionaridad del vector de estado y del ruido, las siguientes relaciones se pueden deducir fácilmente:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \\ \mathbf{R}_0 &= \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{R} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{A}\Sigma\mathbf{C}^T + \mathbf{S}\end{aligned}\tag{49}$$

y para desfases de tiempo (time lags) mayores  $i = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_i &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{R}_{-i} &= \mathbf{G}^T (\mathbf{A}^{i-1})^T \mathbf{C}^T\end{aligned}\tag{50}$$

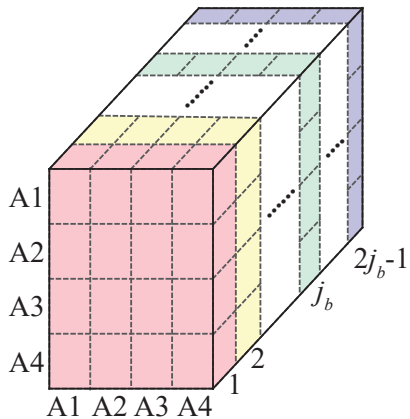
Esta última propiedad es enormemente importante. La covarianza de las señales de salida se pueden estimar a partir de las mediciones, por lo que podremos identificar la matriz de estado  $\mathbf{A}$ . Ésta es, de hecho, la base fundamental del método de identificación COV-SSI que veremos a continuación.

## COV-SSI

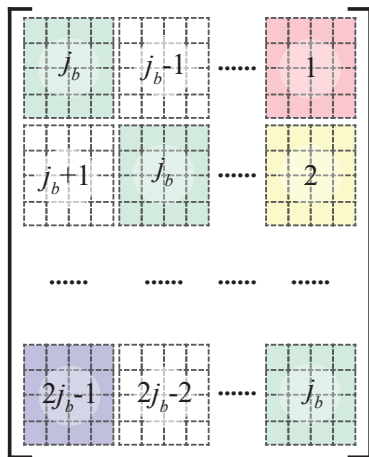
El método SSI-COV method identifica el modelo estado-espacio discreto a partir de la matriz de covarianza de las medidas. El método comienza por calcular la matriz de correlación de las mediciones para desfases de tiempo (time-lags) positivos variando desde  $\Delta t$  a  $(2j_b - 1)\Delta t$ , notando las correspondientes matrices desde  $\mathbf{R}_1$  hasta  $\mathbf{R}_{2j_b-1}$ . A continuación, la matriz de covarianza se organiza en una matriz de Toeplitz formada por bloques de dimensiones  $l_{j_b}$ -por- $l_{j_b}$  tal y como se muestra en la figura de la siguiente diapositiva.

$$\mathbf{T}_{1|l_{j_b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{j_b} & \mathbf{R}_{j_b-1} & \dots & \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_{j_b+1} & \mathbf{R}_{j_b} & \dots & \mathbf{R}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{2j_b-1} & \mathbf{R}_{2j_b-2} & \dots & \mathbf{R}_{j_b} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

## Correlation matrix



## Toeplitz matrix





Aprovechando la propiedad de la ecuación (50)  $\mathbf{R}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{G}$ , la matriz de correlación  $\mathbf{T}_{1|j_b}$  la podemos factorizar como sigue:

$$\mathbf{T}_{1|j_b} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{j_b} & \mathbf{R}_{j_b-1} & \dots & \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_{j_b+1} & \mathbf{R}_{j_b} & \dots & \mathbf{R}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{R}_{2j_b-1} & \mathbf{R}_{2j_b-2} & \dots & \mathbf{R}_{j_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{j_b-1} \end{bmatrix} [\mathbf{A}^{j_b-1}\mathbf{G} \quad \dots \quad \mathbf{A}\mathbf{G} \quad \mathbf{G}] = \mathbf{O}\mathbf{\Gamma}. \quad (52)$$

donde  $\mathbf{O}$  se denomina la matriz de observabilidad extendida (extended observability matrix), y  $\mathbf{\Gamma}$  la matriz de controlabilidad (reversed extended stochastic controllability matrix). La matriz de observabilidad está formada  $j_b$  bloques de dimensiones  $l$ -by- $n$ . La matriz de controlabilidad está formada por  $j_b$   $n$ -por- $l$  matrices organizadas en una fila.

Por otra parte, la descomposición en valores singulares (Singular Value Decomposition SVD) de la matriz de Toeplitz:

$$\mathbf{T}_{1|j_b} = \mathbf{USV}^T = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T. \quad (53)$$

Si comparamos las ecuaciones (52) y (53) nos damos cuenta de que las matrices de observabilidad y controlabilidad se pueden obtener a partir de la descomposición SVD como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{O} &= \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2}, \\ \mathbf{\Gamma} &= \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{V}_1^T \end{aligned} \quad (54)$$

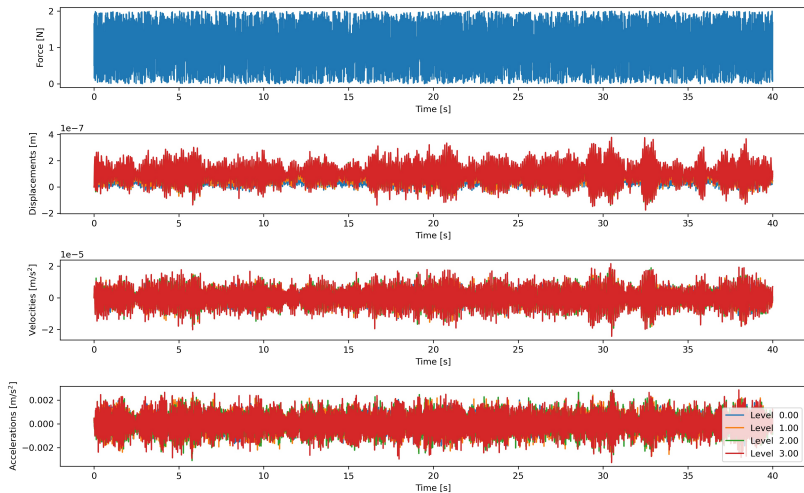
Una vez tenemos calculadas las matrices de observabilidad y controlabilidad, la identificación de las matrices del sistema estado-espacio  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{C}$  es directa.

Por un lado, la matriz  $\mathbf{C}$  se puede obtener a partir de las  $l$  primeras filas de la matriz de observabilidad. Por otra parte, la matriz de estado  $\mathbf{A}$  se puede obtener de diversas maneras. Una manera es aprovechar la estructura recursiva de la matriz de observabilidad:

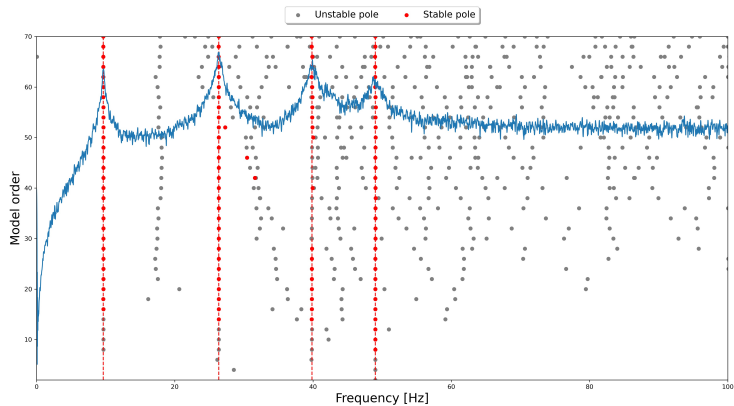
$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-2} \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-2} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \dots \\ \mathbf{CA}^{j_b-1} \end{bmatrix} = \mathbf{O}^{to\dagger} \mathbf{O}^{bo}, \quad (55)$$

donde  $\mathbf{O}^{to}$  contiene las primeras  $l(j_b - 1)$  líneas de  $\mathbf{O}$ , y  $\mathbf{O}^{bo}$  contiene las últimas  $l(j_b - 1)$  líneas de  $\mathbf{O}_{j_b}$ . El símbolo  $\dagger$  representa la pseudo-inversa de Moore-Penrose.

Ejemplo ( $F_s = 200$  Hz): [Generate \\_measurements.py](#)



## OMA\_COV\_SSI.py



# FDD

El método de identificación FDD se basa en el análisis de las matrices de densidad espectral (Power Spectral Density PSD matrices) calculadas a través de mediciones de vibración ambiental. Para el estudio de las ecuaciones de estado-espacio en el dominio de la frecuencia, comenzamos aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales a la ecuación (32):

$$\begin{aligned} s\mathbf{x}(s) &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(s) \\ \mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}_c\mathbf{u}(s) \end{aligned} \quad (56)$$

Eliminando  $\mathbf{x}(s)$  de la primera ecuación:

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c\mathbf{u}(s) \quad (57)$$

Y substituyendo el resultado de (57) en la segunda ecuación de (56):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= \mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(s) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(s) = \\ &= \underbrace{\left[ \mathbf{C}_c (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \right]}_{\mathbf{H}_c(s)} \mathbf{u}(s) \end{aligned} \quad (58)$$

donde identificamos la función de transferencia  $\mathbf{H}_c(s)$ . Podemos obtener la función de respuesta en frecuencia (Frequency Response Function FRF) a través de  $s \leftarrow j\omega$ .

En OMA ya hemos visto que el input del sistema  $\mathbf{u}(t)$  se asume como un ruido blanco de media cero, i.e.  $E[\mathbf{u}(t)] = 0$ . La función de covarianza  $\mathbf{R}_u(\tau)$  se puede determinar como:

$$\mathbf{R}_u(\tau) = E[\mathbf{u}(t + \tau)\mathbf{u}^T(t)] = \mathbf{R}_u\delta(\tau) \quad (59)$$

donde  $\mathbf{R}_u \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz constante, y  $\delta(\tau)$  es la función delta de Dirac. Con ello, el espectro  $\mathbf{S}_u(s)$  del proceso estocástico estacionario  $\mathbf{u}(t)$  se define como:

$$\mathbf{S}_u(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_u\delta(\tau)e^{-st} dt = \mathbf{R}_u \quad (60)$$

el cual se denomina espectro plano (flat spectrum). Los elementos de la diagonal de la matriz  $\mathbf{S}_u(s)$  se denominan espectros de potencia (power spectra) y los miembros fuera de la diagonal se denominan espectros cruzados (cross spectra).



En vista de la relación de los procesos  $\mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  a través de la función de transferencia  $\mathbf{H}_c(s)$  según la ecuación (58), se puede demostrar que sus espectros están relacionados a través de la siguiente expresión:

$$\mathbf{S}_y(s) = \mathbf{H}_c(s)\mathbf{S}_u(s)\mathbf{H}_c(s^*)^T \quad (61)$$

o, en el caso específico de inputs definidos como ruido blanco:

$$\mathbf{S}_y(s) = \mathbf{H}_c(s)\mathbf{R}_u\mathbf{H}_c(s^*)^T \quad (62)$$

Ya vimos en el tema de EMA que la función de transferencia puede escribirse en base a los polos del sistema y matrices de residuos como:

$$\mathbf{H}_c(\omega) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\mathbf{A}_n}{j\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{A}_n^*}{j\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (63)$$

El método FDD asume la descomposición modal de los outputs del sistema como  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Psi}\mathbf{q}_m(t)$ . Con ello, la función de correlación de  $\mathbf{y}(t)$  se obtiene como:

$$\mathbf{R}_y(\tau) = E [\mathbf{y}(t + \tau)\mathbf{y}^T(t)] = \mathbf{\Psi}E [\mathbf{q}(t + \tau)\mathbf{q}^T(t)] \mathbf{\Psi}^T = \mathbf{\Psi}\mathbf{R}_q(\tau)\mathbf{\Psi}^T \quad (64)$$

Dado que las componentes de desplazamiento modal no están correlacionadas, la matriz  $\mathbf{R}_q(\tau)$  será diagonal. Con ello, la matriz de densidad espectral  $\mathbf{S}_y(\omega)$  se obtiene aplicando la transformada de Fourier a la ecuación (64):

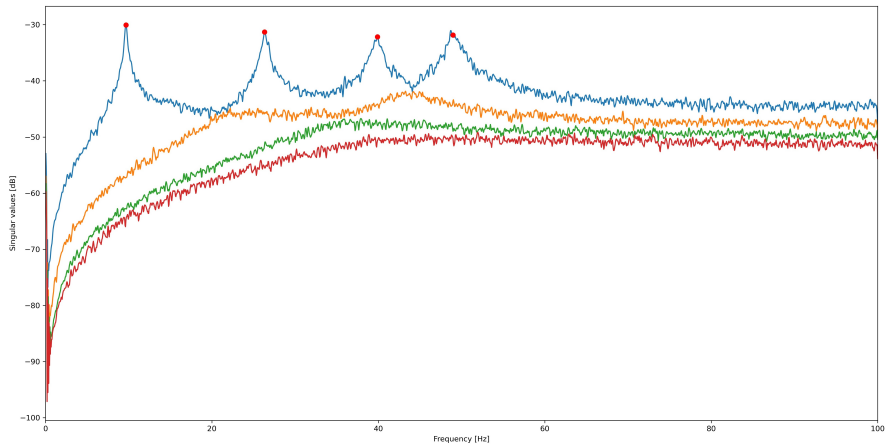
$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{\Psi}\mathbf{S}_q(\omega)\mathbf{\Psi}^T. \quad (65)$$

donde la matriz  $\mathbf{S}_q(\omega)$  (spectrum matrix of the modal coordinates) será también una matriz diagonal.

El método FDD se basa en la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz de densidad espectral como:

$$\mathbf{S}_y(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{G}_{uu}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^H \quad (66)$$

Comparando la ecuación (66) con (65) observamos que ambas tienen la misma forma. Por tanto, podemos entender que los valores singulares presentan estimaciones de los modos naturales de vibración y los valores singulares correspondientes representan la respuesta de cada modo. Si realizamos la descomposición en (66) para cada frecuencia y ordenamos los valores y vectores singulares en orden decreciente, las frecuencias resonantes las podemos determinar a través de la toma de picos en el primer valor singular, mientras que los modos de vibración los obtenemos evaluando el primer vector singular en las frecuencias determinadas en el paso previo.

*OMA\_FDD.py*

# References I



Magalhães, Filipe and Cunha, Alvaro (2011)

Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge.  
*Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 (5), 1431–1450.



García-Macías, E., and Ubertini, F. (2020)

MOVA/MOSS: Two integrated software solutions for comprehensive Structural Health Monitoring of structures.  
*Mechanical Systems and Signal Processing*, 143, 106830.



Magalhães, Filipe and Cunha, Alvaro (2011)

Explaining operational modal analysis with data from an arch bridge.  
*Mechanical systems and signal processing* 25 (5), 1431–1450.



Rainieri, Carlo and Fabbrocino, Giovanni (2014)




Operational modal analysis of civil engineering structures.  
Springer, New York.



Peeters, B. (2000)

PHD - System identification and damage detection in civil engineering.  
KU Leuven.

# References II

-  **Ljung L. (1999)**  
System Identification: Theory for the User.  
Second edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
-  **Juang J. N. (1994)**  
Applied System Identification.  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
-  **Brincker, R., and Ventura, C. (2015).**  
Introduction to operational modal analysis.  
John Wiley & Sons.

# The End



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Máster Universitario en Estructuras  
Curso 2020-2021

# Práctica de laboratorio: Identificación Modal Operacional de marco experimental

Módulo: MÓDULO FUNDAMENTAL: CALIDAD Y DAÑO

Materia: **Análisis Modal y Detección de Defectos**

**Enrique García Macías**

[enriquegm@ugr.es](mailto:enriquegm@ugr.es)

**Departamento de Mecánica de Estructuras e  
Ingeniería Hidráulica**



# Desarrollo del curso

		FECHA		HORA	PROFESOR	TEMA	
Clase 1	Lunes	1	febrero	9:30-11:30	EGM	1	Introducción: Análisis modal dentro del marco del mantenimiento de la salud estructural.
Clase 2	Lunes	8	febrero	9:30-11:30	EGM	2	Fuentes de deterioro, patologías estructurales, y tecnologías de monitorización.
Clase 3	Lunes	15	febrero	9:30-11:30	EGM	3	Taller: procesamiento de señales.
Clase 4	Lunes	22	febrero	9:30-11:30	EGM	4	Análisis modal experimental.
Clase 5	Lunes	15	marzo	9:30-11:30	EGM	5	Análisis modal operacional.
Clase 6	Lunes	12	abril	9:30-11:30	EGM	6	Análisis modal operacional automatizado.
<b>Clase 7</b>	<b>Lunes</b>	<b>19</b>	<b>abril</b>	<b>9:30-11:30</b>	<b>EGM</b>	<b>7</b>	<b>Práctica de laboratorio I.</b> <b>Taller: Identificación del daño estructural.</b>
Clase 8	Lunes	26	abril	9:30-11:30	RCT	8	Técnicas de identificación dinámica basadas en análisis modal operacional.
Clase 9	Lunes	26	abril	12:00-14:00	RCT	9	Práctica de laboratorio II: Test de vibración ambiental.
Clase 10	Martes	27	abril	9:30-11:30	RCT	10	Casos de estudio.
Clase 11	Martes	27	abril	12:00-14:00	RCT		Presentación de trabajos.

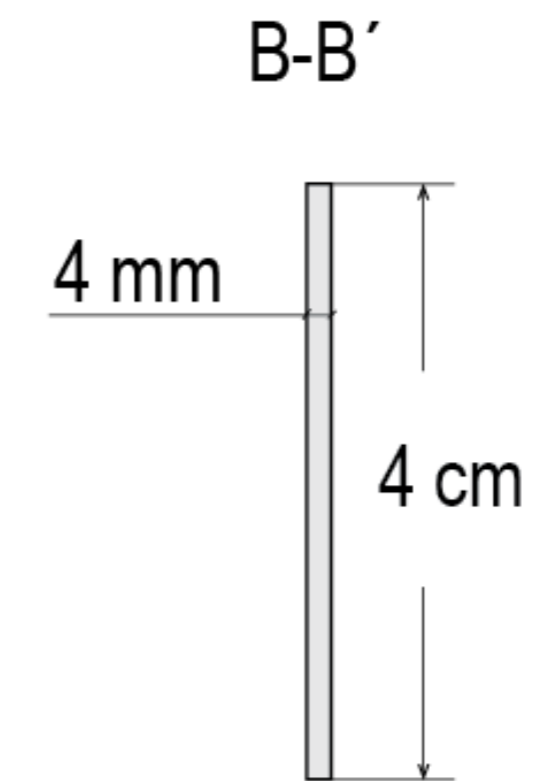
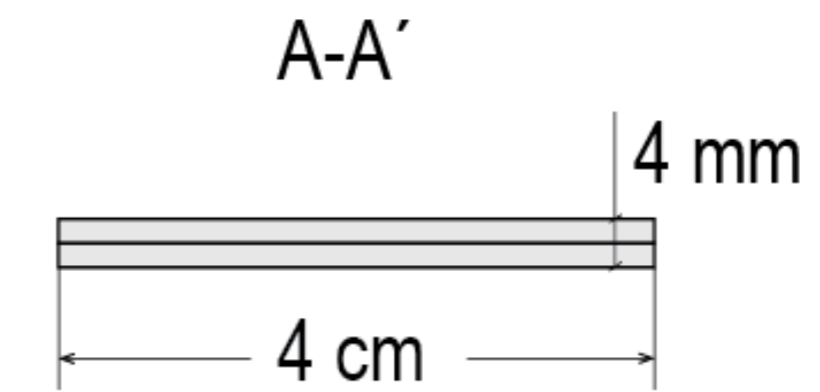
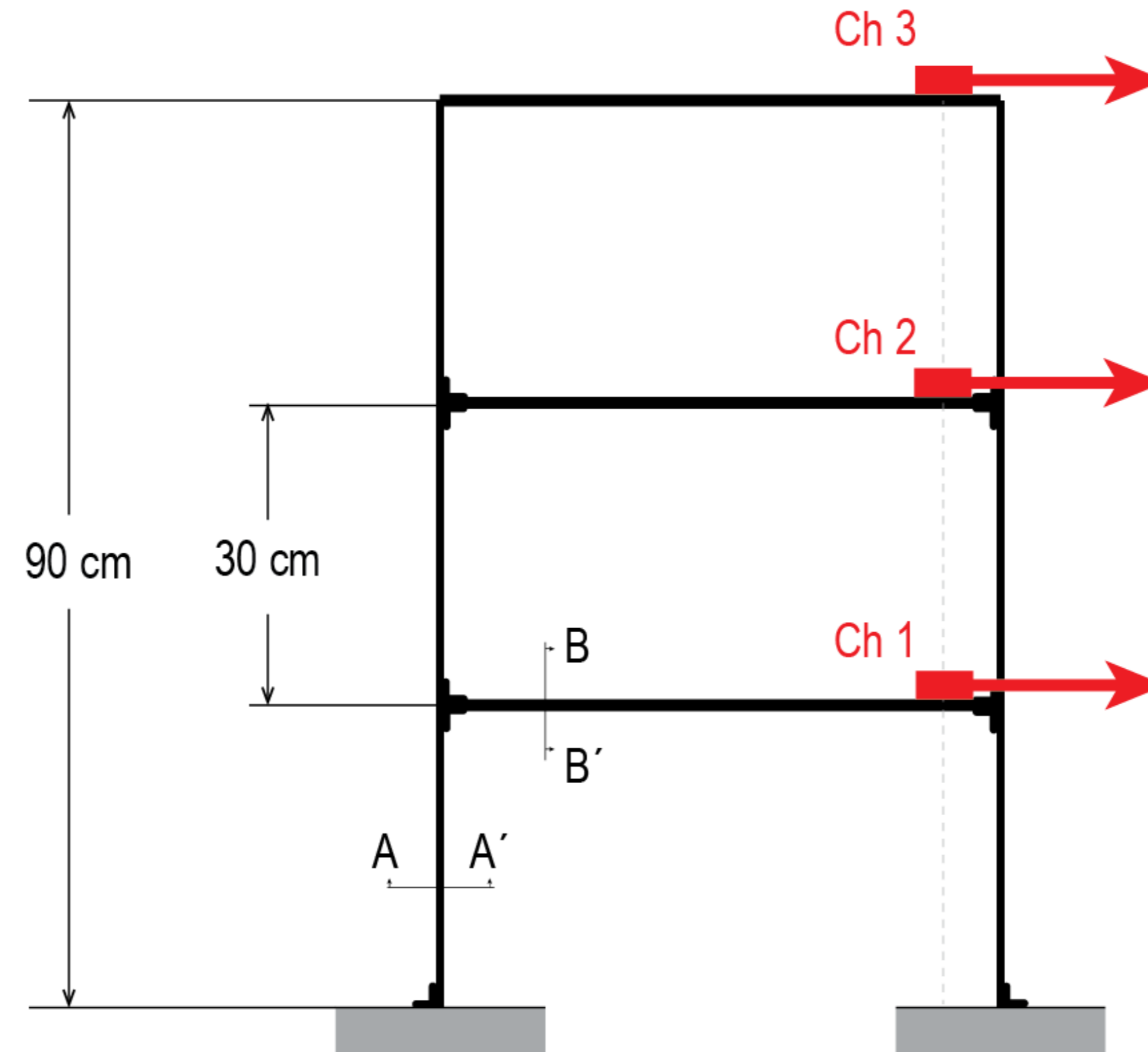
ENTREGA DE TRABAJOS Y EVALUACIÓN

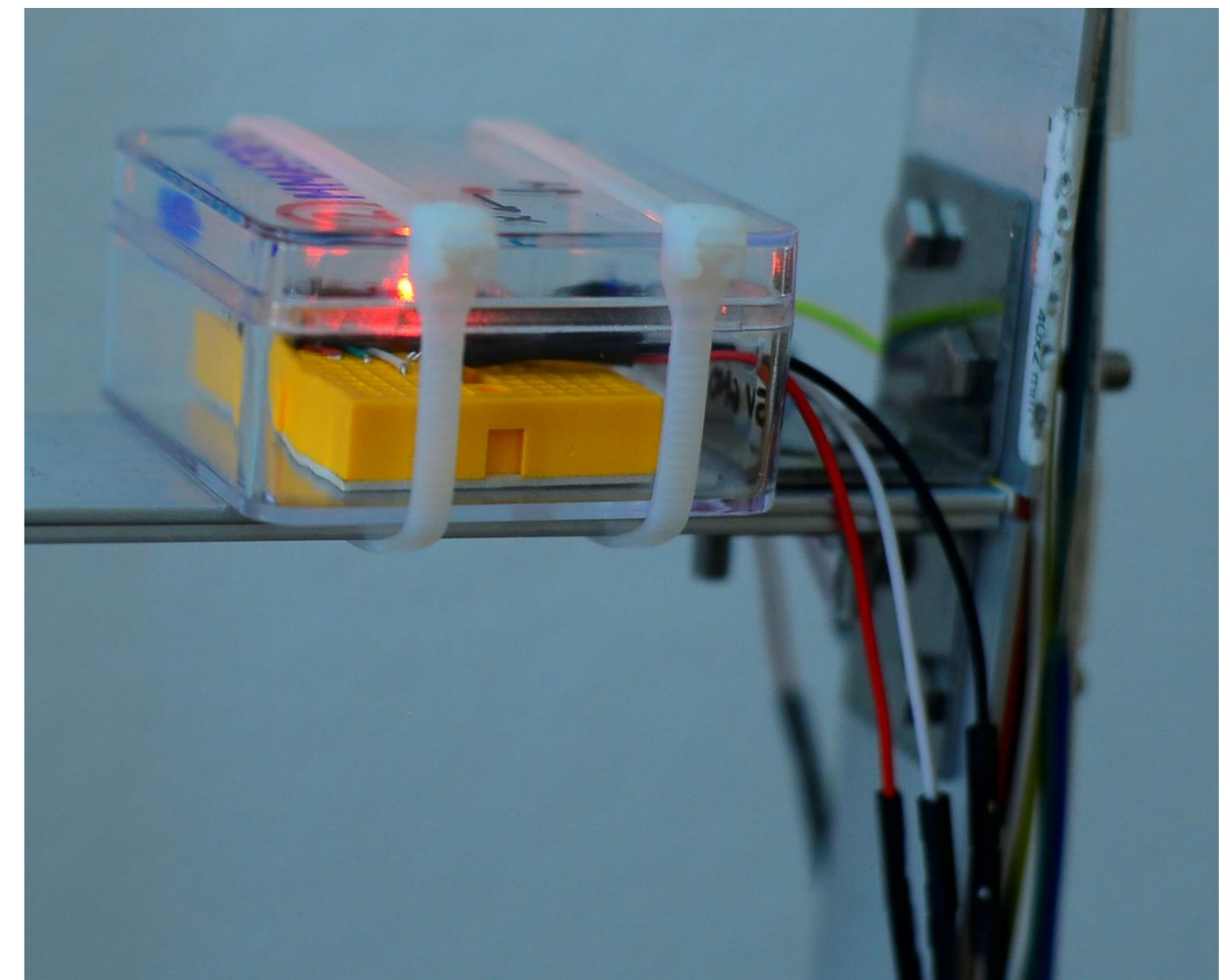
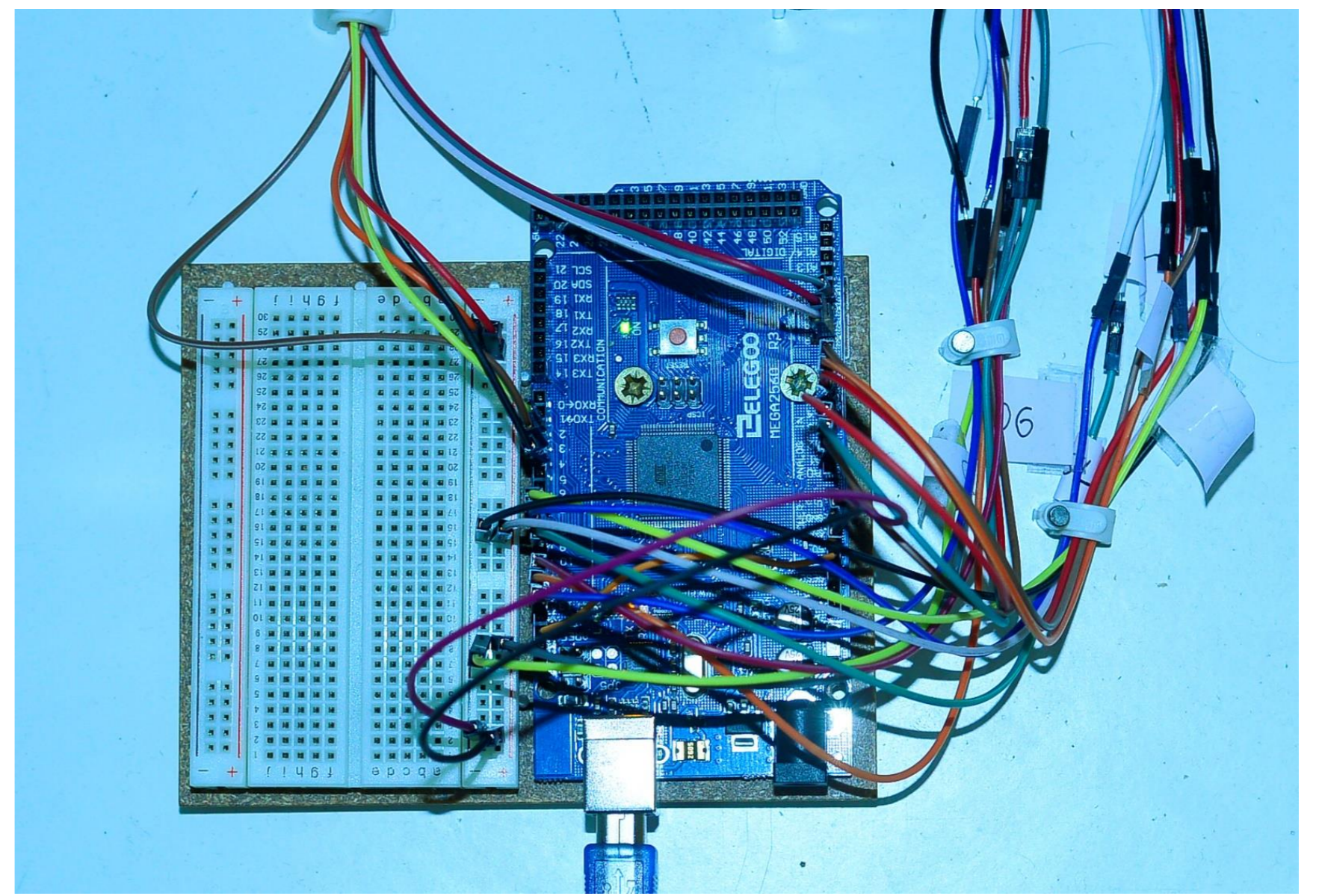
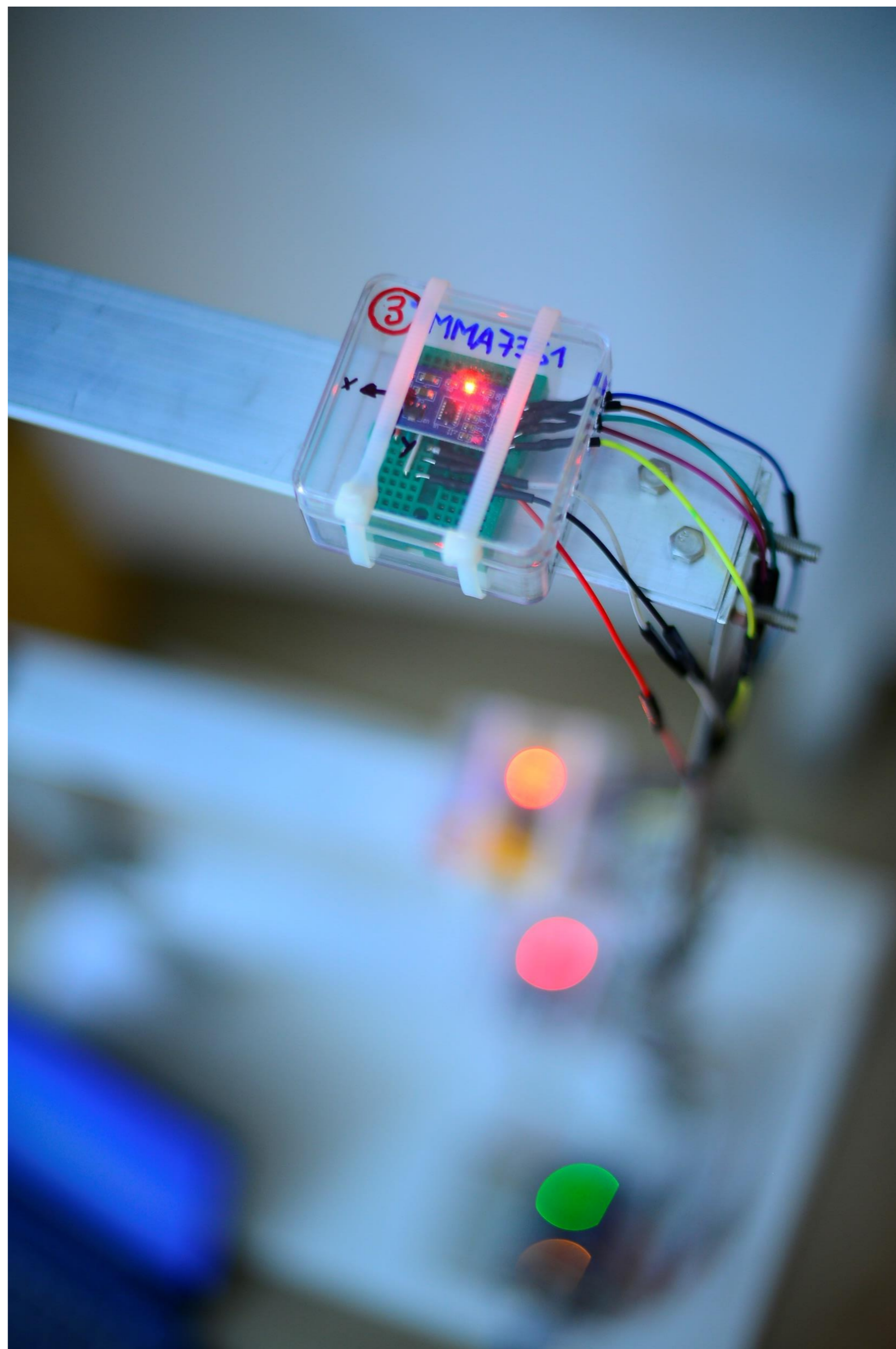
Del 3 al 28 de mayo



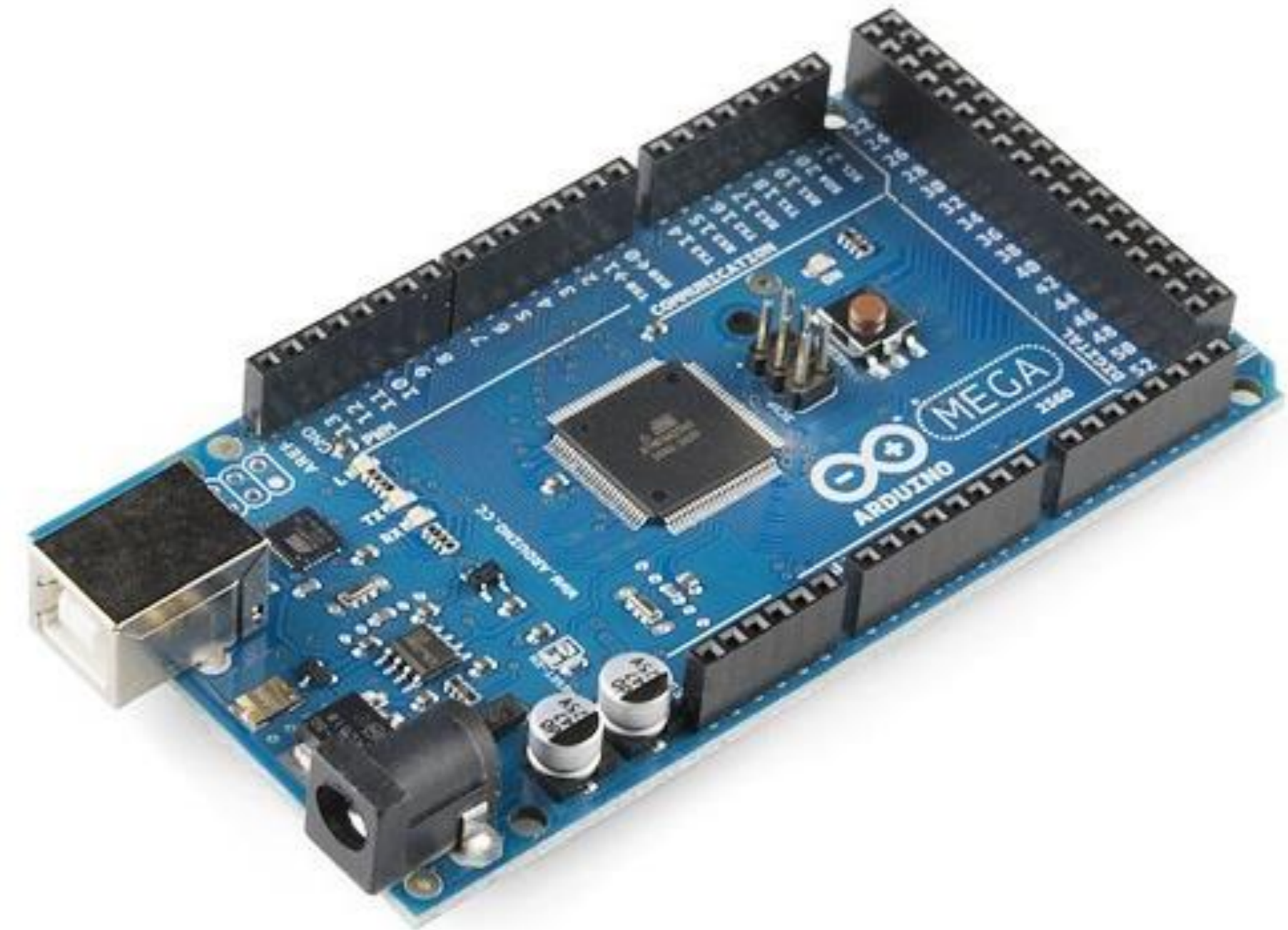
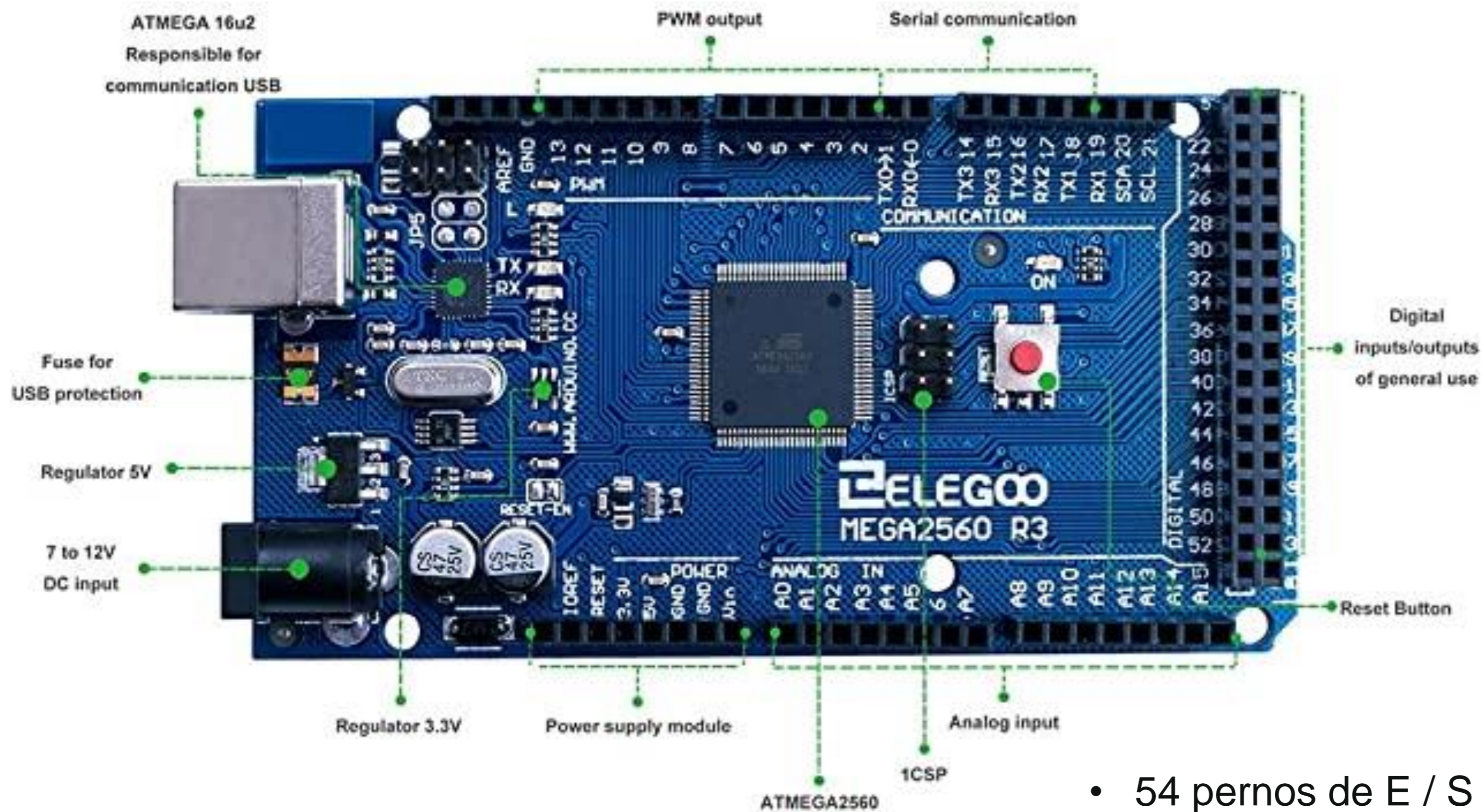
UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Geometría y set-up experimental





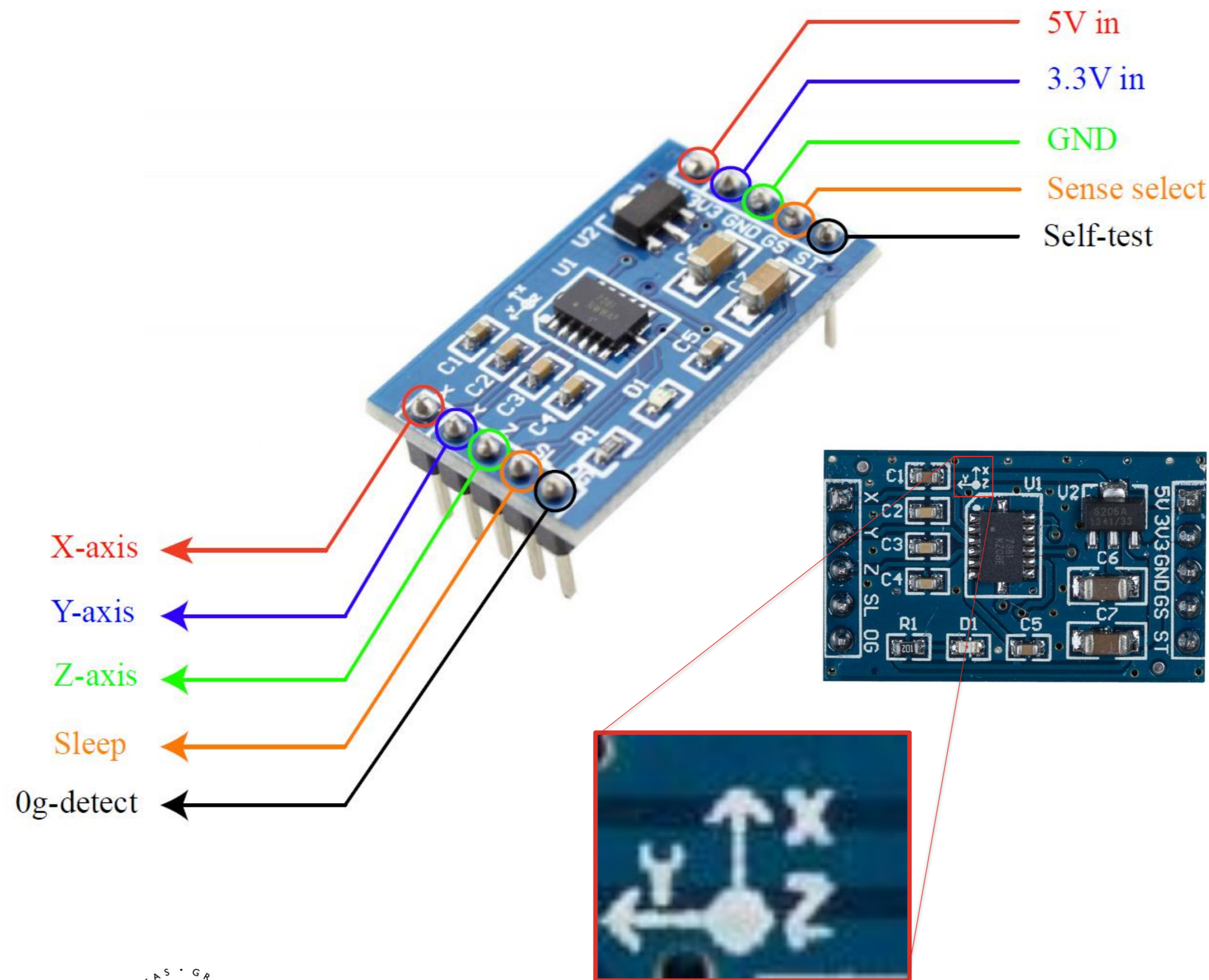
# Micro-controlador Arduino MEGA



- 54 pines de E / S digitales y 16 entradas analógicas
- 256 KB de memoria flash para almacenar código
- 10-bits resolution

# Acelerómetro

## Accelerometer MMA7361



Freescale Semiconductor  
Technical Data

### ±1.5g, ±6g Three Axis Low-g Micromachined Accelerometer

The MMA7361L is a low power, low profile capacitive micromachined accelerometer featuring signal conditioning, a 1-pole low pass filter, temperature compensation, self test, 0g-Detect which detects linear freefall, and g-Select which allows for the selection between 2 sensitivities. Zero-g offset and sensitivity are factory set and require no external devices. The MMA7361L includes a Sleep Mode that makes it ideal for handheld battery powered electronics.

#### Features

- 3mm x 5mm x 1.0mm LGA-14 Package
- Low Current Consumption: 400  $\mu$ A
- Sleep Mode: 3  $\mu$ A
- Low Voltage Operation: 2.2 V – 3.6 V
- High Sensitivity (800 mV/g @ 1.5g)
- Selectable Sensitivity ( $\pm 1.5g$ ,  $\pm 6g$ )
- Fast Turn On Time (0.5 ms Enable Response Time)
- Self Test for Freefall Detect Diagnosis
- 0g-Detect for Freefall Protection
- Signal Conditioning with Low Pass Filter
- Robust Design, High Shocks Survivability
- RoHS Compliant
- Environmentally Preferred Product
- Low Cost

Datasheet

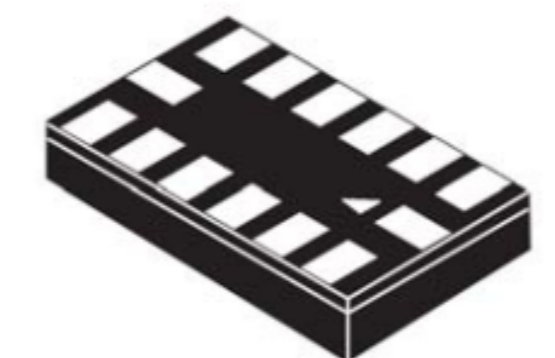
Document Number: MMA7361L  
Rev 0, 04/2008



MMA7361L

MMA7361L: XYZ AXIS  
ACCELEROMETER  
 $\pm 1.5g$ ,  $\pm 6g$

Bottom View



14 LEAD  
LGA  
CASE 1977-01



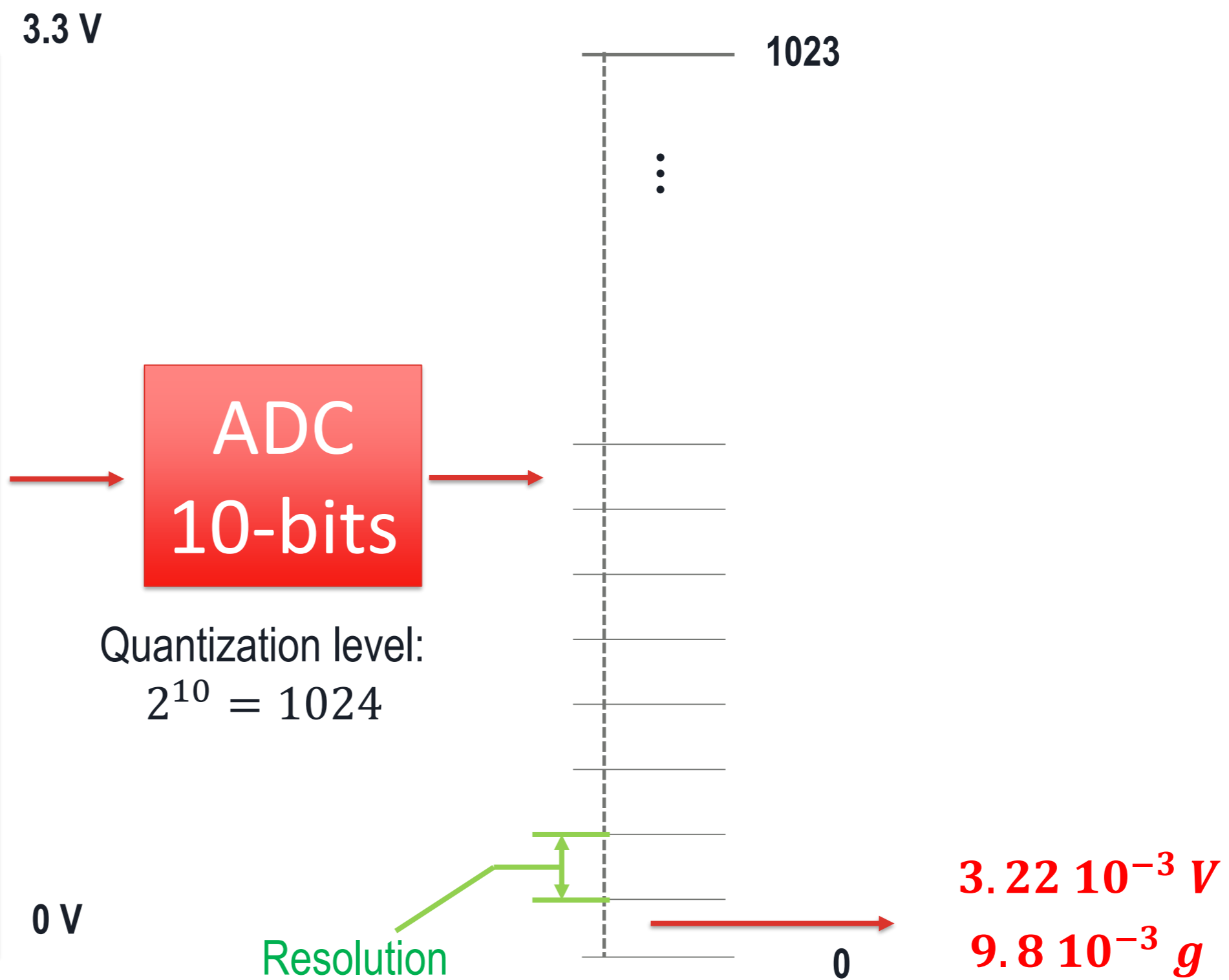
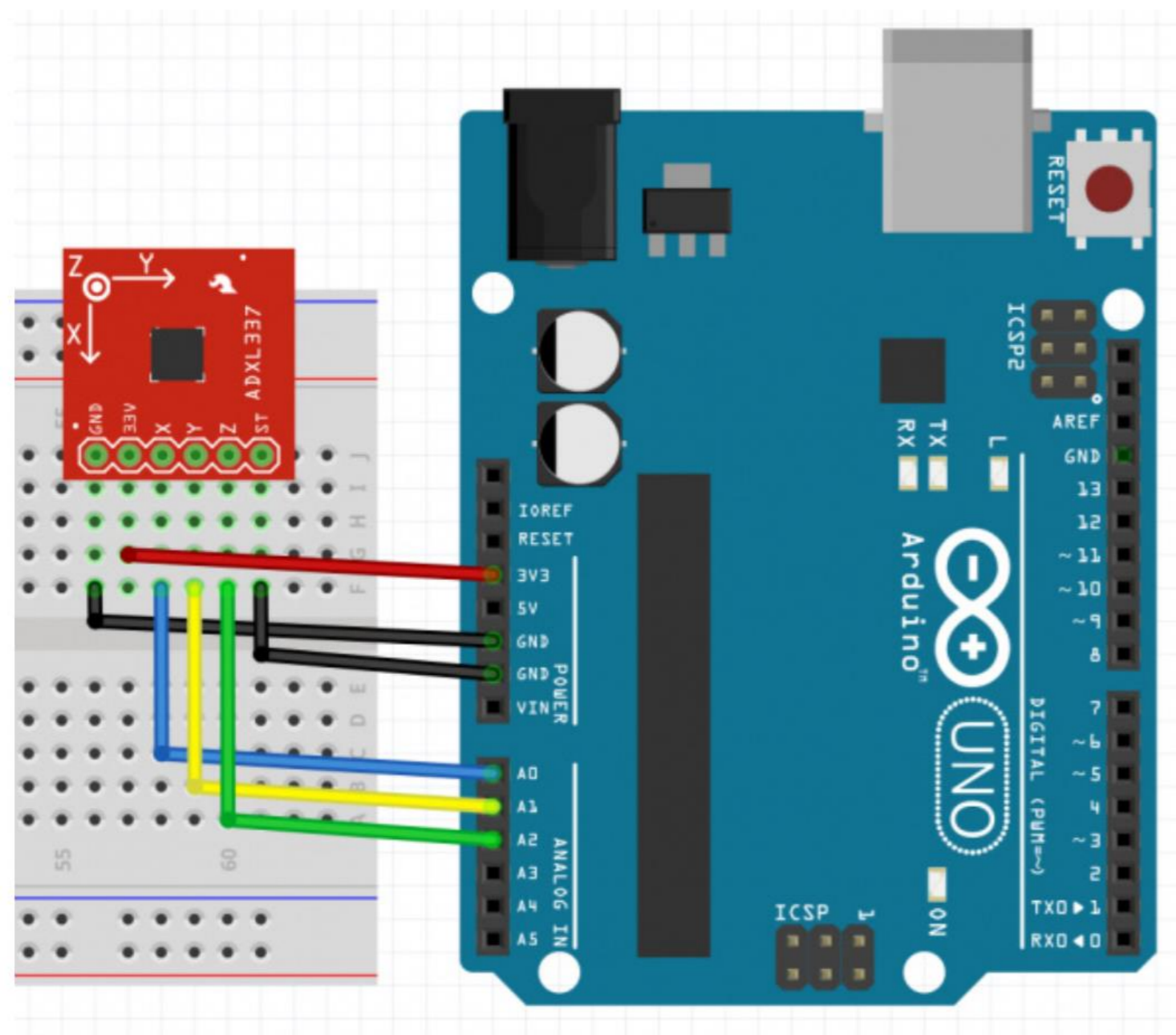
UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# Acelerómetro

## Accelerometer MMA7361

Sensitivity  
800 mV/g (3,3 V)

$$s_g = \pm 1 \cdot \frac{R}{sens_{sensor}} = \pm 4.025 \cdot 10^{-3} g$$



$$R = \frac{V_{ref}}{N_q - 1} = \frac{3.3}{1024 - 1} V = 3.22 \cdot 10^{-3} V$$

# Acelerómetro

## Programación acelerómetros

```
#include <AcceleroMMA7361.h>
```

```
// EXPERIMENTAL FRAME – 3  
ACCELEROMETERS
```

```
#include <AcceleroMMA7361.h>
```

```
AcceleroMMA7361 acceleroA;  
AcceleroMMA7361 acceleroB;  
AcceleroMMA7361 acceleroC;
```

```
int x; // x axis variable  
int y; // y axis variable  
int z; // z axis variable  
int xb; // x axis variable  
int yb; // y axis variable  
int zb; // z axis variable  
int xc; // x axis variable  
int yc; // y axis variable  
int zc; // z axis variable  
unsigned long time;
```

```
void setup() {
```

```
  Serial.begin(115200); // frequency of the measure
```

```
  acceleroA.begin(11, 12, 13, 10, A1, A2, A3);  
  acceleroA.setARefVoltage(3.3); //sets the AREF voltage to 3.3V  
  acceleroA.setSensitivity(HIGH); //sets the sensitivity to +/-1.5G  
  analogReference(EXTERNAL);
```

```
  acceleroB.begin(7, 8, 9, 10, A5, A6, A7);  
  acceleroB.setARefVoltage(3.3); //sets the AREF voltage to 3.3V  
  acceleroB.setSensitivity(HIGH); //sets the sensitivity to +/-1.5G  
  analogReference(EXTERNAL);
```

```
  acceleroC.begin(2, 3, 4, 10, A8, A9, A10);  
  acceleroC.setARefVoltage(3.3); //sets the AREF voltage to 3.3V  
  acceleroC.setSensitivity(HIGH); //sets the sensitivity to +/-1.5G  
  analogReference(EXTERNAL);  
}
```

```
void loop() {
```

```
  time = micros();Serial.print(time);  
  Serial.print(" ");
```

```
  y = acceleroA.getYAccel();  
  yb = acceleroB.getYAccel();  
  yc = acceleroC.getYAccel();
```

```
  Serial.print(y); // LEVEL 1  
  Serial.print(" ");  
  Serial.print(yb); // LEVEL 2  
  Serial.print(" ");  
  Serial.println(yc); // LEVEL 3  
}
```



# Acelerómetro

## Programación acelerómetros

accelerometer\_termometer | Arduino 1.8.13

File Edit Sketch Tools Help

```
accelerometer_termometer $
#include <AcceleroMMA7361.h>

// ACCELEROMETER AND TEMPERATURE SENSOR

#include <AcceleroMMA7361.h>

AcceleroMMA7361 acceleroA;
AcceleroMMA7361 acceleroB;
AcceleroMMA7361 acceleroC;

int x; // x axis variable
int y; // y axis variable
int z; // z axis variable
int xb; // x axis variable
int yb; // y axis variable
int zb; // z axis variable
int xc; // x axis variable
int yc; // y axis variable
int zc; // z axis variable
unsigned long time;

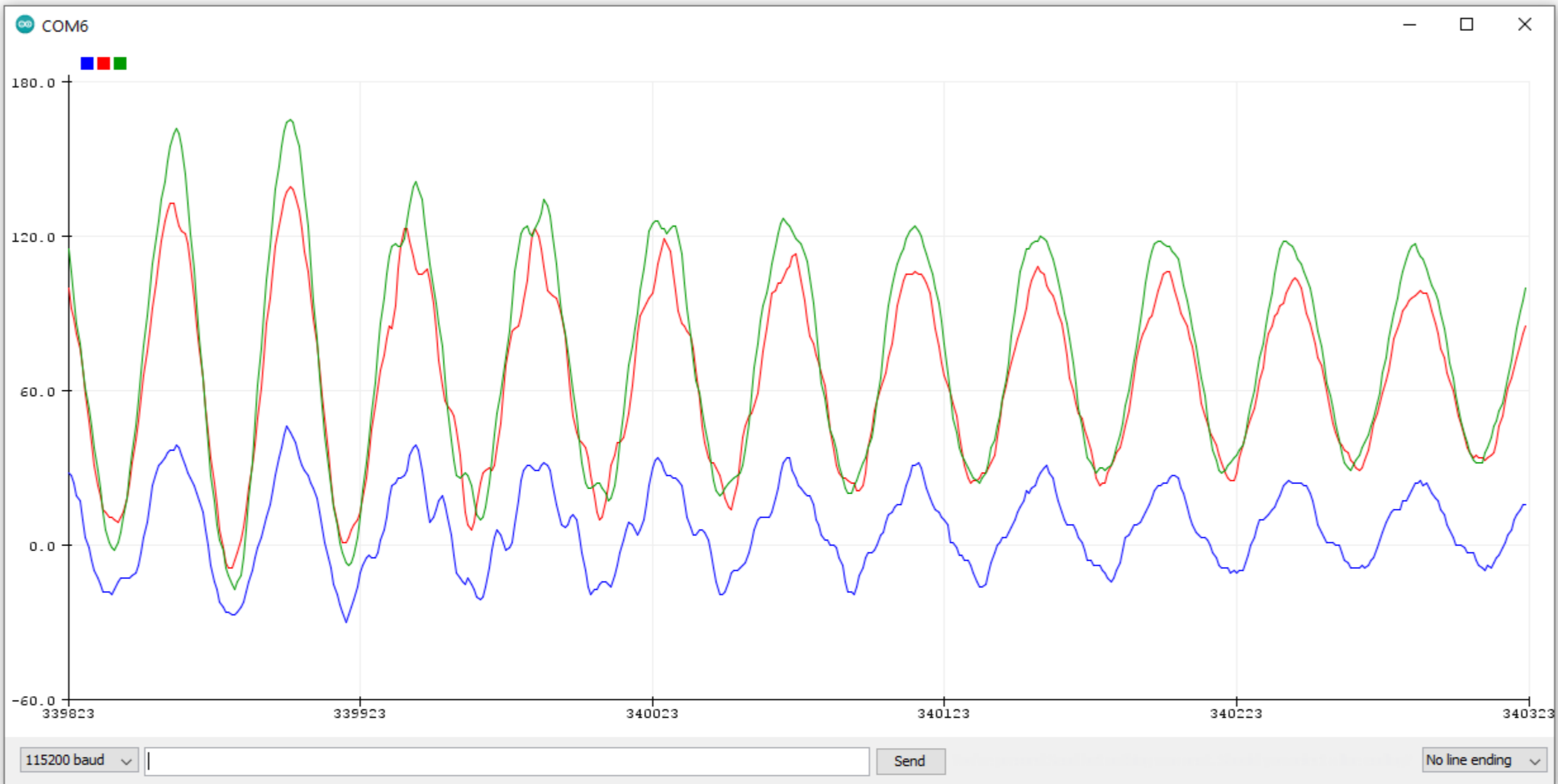
//sleepPin = 13,
//selfTestPin = 12,
//zeroGPin = 11,
//gSelectPin = 10,
//xPin = A3,
//yPin = A4,
//zPin = A5.

void setup() {

  Serial.begin(115200); // 9600 is the frequency of the measure

  acceleroA.begin(11, 12, 13, 10, A1, A2, A3);
  acceleroA.setAREFVoltage(3.3); //sets the AREF voltage to 3.3V
}
```

Sketch uses 4258 bytes (1%) of program storage space. Maximum is 253952 bytes.  
Global variables use 298 bytes (3%) of dynamic memory, leaving 7894 bytes for local variables. Maximum is 8192 bytes.



COM6

180.0

120.0

60.0

0.0

-60.0

339823 339923 340023 340123 340223 340323

115200 baud | Send No line ending



# Toma de medidas



PuTTY

accelerometer\_termometer | Arduino 1.8.13

File Edit Sketch Tools Help

accelerometer

```
//x = accelero
y = acceleroA
//z = accelero

//xb = accelero
yb = accelero
//zb = accelero

//xc = accelero
yc = accelero
//zc = accelero

//x = accelero
//y = accelero
//z = accelero.getZRaw();

//x = map(x, 0, 1023, -500, 500);
//y = map(y, 0, 1023, -500, 500);
//z = map(z, 0, 1023, -500, 500);

//Serial.print(x); // ln creates a blank line
//Serial.print(" ");
Serial.print(y); // LEVEL 1
Serial.print(" ");
//Serial.print(z); // ln creates a blank line
//Serial.print(" ");
//Serial.print(xb); // ln creates a blank line
//Serial.print(" ");
Serial.print(yb); // LEVEL 2
Serial.print(" ");
//Serial.print(zb); // ln creates a blank line
//Serial.print(" ");
//Serial.print(xc); // ln creates a blank line
//Serial.print(" ");
Serial.println(yc); // LEVEL 3
//Serial.print(" ");
//Serial.println(zc); // ln creates a blank line
}
```

Done uploading.

Sketch uses 4296 bytes (1%) of program storage space. Maximum is 253952 bytes.  
Global variables use 298 bytes (3%) of dynamic memory, leaving 7894 bytes for local variables. Maximum is 8192 bytes.

PuTTY Configuration

Category:

- Session
- Logging
- Terminal
  - Keyboard
  - Bell
  - Features
- Window
  - Appearance
  - Behaviour
  - Translation
  - Selection
  - Colours
- Connection
  - Data
  - Proxy
  - Telnet
  - Rlogin
  - SSH
  - Serial

Basic options for your PuTTY session

Specify the destination you want to connect to

Serial line: COM6 Speed: 115200

Connection type:  
 Raw  Telnet  Rlogin  SSH  Serial

Load, save or delete a stored session

Saved Sessions

Default Settings	Load
UNIPG	Save
	Delete

Close window on exit:  
 Always  Never  Only on clean exit

About Help Open Cancel

PuTTY Configuration

Category:

- Session
- Logging
- Terminal
  - Keyboard
  - Bell
  - Features
- Window
  - Appearance
  - Behaviour
  - Translation
  - Selection
  - Colours
- Connection
  - Data
  - Proxy
  - Telnet
  - Rlogin
  - SSH
  - Serial

Options controlling session logging

Session logging:  
 None  Printable output  
 All session output  SSH packets  
 SSH packets and raw data

Log file name:  
E:\DISCO DURO\2020\_2021\_UGR\Doi Browse...

(Log file name can contain &Y, &M, &D for date, &T for time, &H for host name, and &P for port number)

What to do if the log file already exists:  
 Always overwrite it  
 Always append to the end of it  
 Ask the user every time  
 Flush log file frequently  
 Include header

Options specific to SSH packet logging  
 Omit known password fields  
 Omit session data

About Help Open Cancel

Puerto de conexión



UNIVERSIDAD DE GRANADA

# Toma de medidas

///`getXAccel()`: Returns the acceleration of the X-axis as a int (1 G = 100.00)

COM6 - PuTTY

```
6732448 -4 41 46
6738064 -1 45 52
6743664 -1 50 58
6749268 3 55 66
6754852 4 59 73
6760420 6 66 80
6766004 8 71 87
6771572 10 77 93
6777212 12 82 99
6782828 16 85 104
6788512 19 90 110
6794184 21 93 113
6799872 23 95 115
6805568 24 98 118
6811248 26 100 118
6816988 25 102 117
6822700 25 101 117
6828420 24 99 116
6834080 22 95 115
6839768 21 91 112
6845464 18 88 106
6851144 16 84 100
6856832 14 81 94
6862460
```

			Delta t [s]	Time	Acceleration level 1	Acceleration level 2	Acceleration level 3
			#iVALOR!	[s]	[g]	[g]	[g]
406849008	4	64	74	0.000	0.040	0.640	0.740
406854676				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406860332				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406866004				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406871660				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406877332				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406882988	7 6849008	7 66 73		#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406854676				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406860332				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406866004				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406871660				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406877332				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
406882988	7 6204 42 65 77			#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
5684 10 65 77				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
11132 8 66 77				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
16612 9 65 76				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
22080 9 65 77				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
27548 8 65 77				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
33028 8 65 77				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
38504 9 65 76				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
43980 8 65 77				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
49460 8 65 76				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
54928 7 65 76				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
60388 8 65 77				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000
65868 8 66 76				#iVALOR!	0.000	0.000	0.000

Asistente para convertir texto en columnas - paso 2 de 3

Esta pantalla le permite establecer los separadores contenidos en los datos. Se puede ver cómo cambia el texto en la vista previa.

Separadores

- Tabulación
- Punto y coma
- Coma
- Espacio
- Otro:

Considerar separadores consecutivos como uno solo

Calificador de texto:

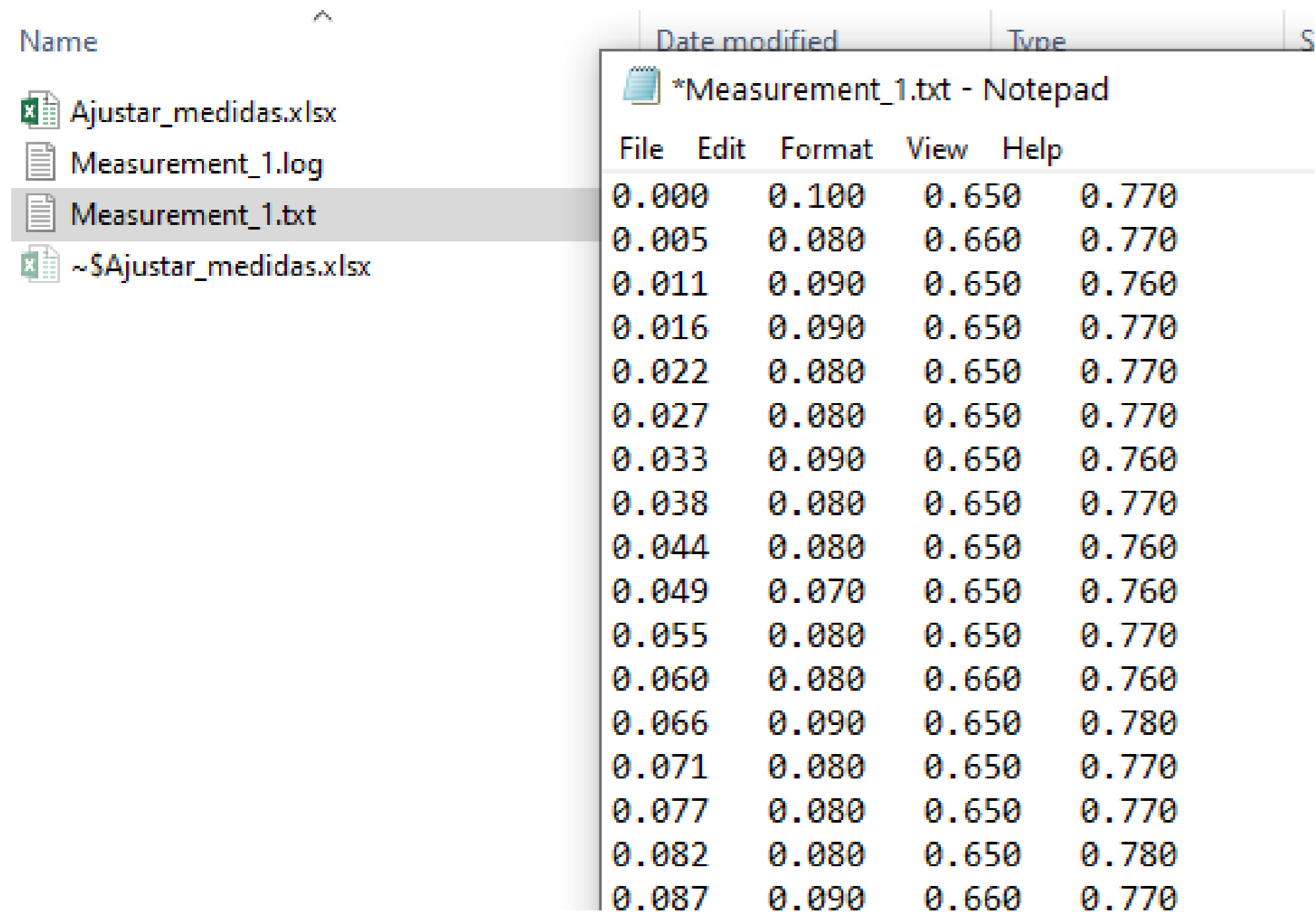
Vista previa de los datos

```
406849008 7 66 73
406854676 7 65 73
406860332 6 65 74
406866004 7 64 73
406871660 7 65 74
```

Cancelar < Atrás **Siguiente >** Finalizar

Ajustar\_medidas.xlsx

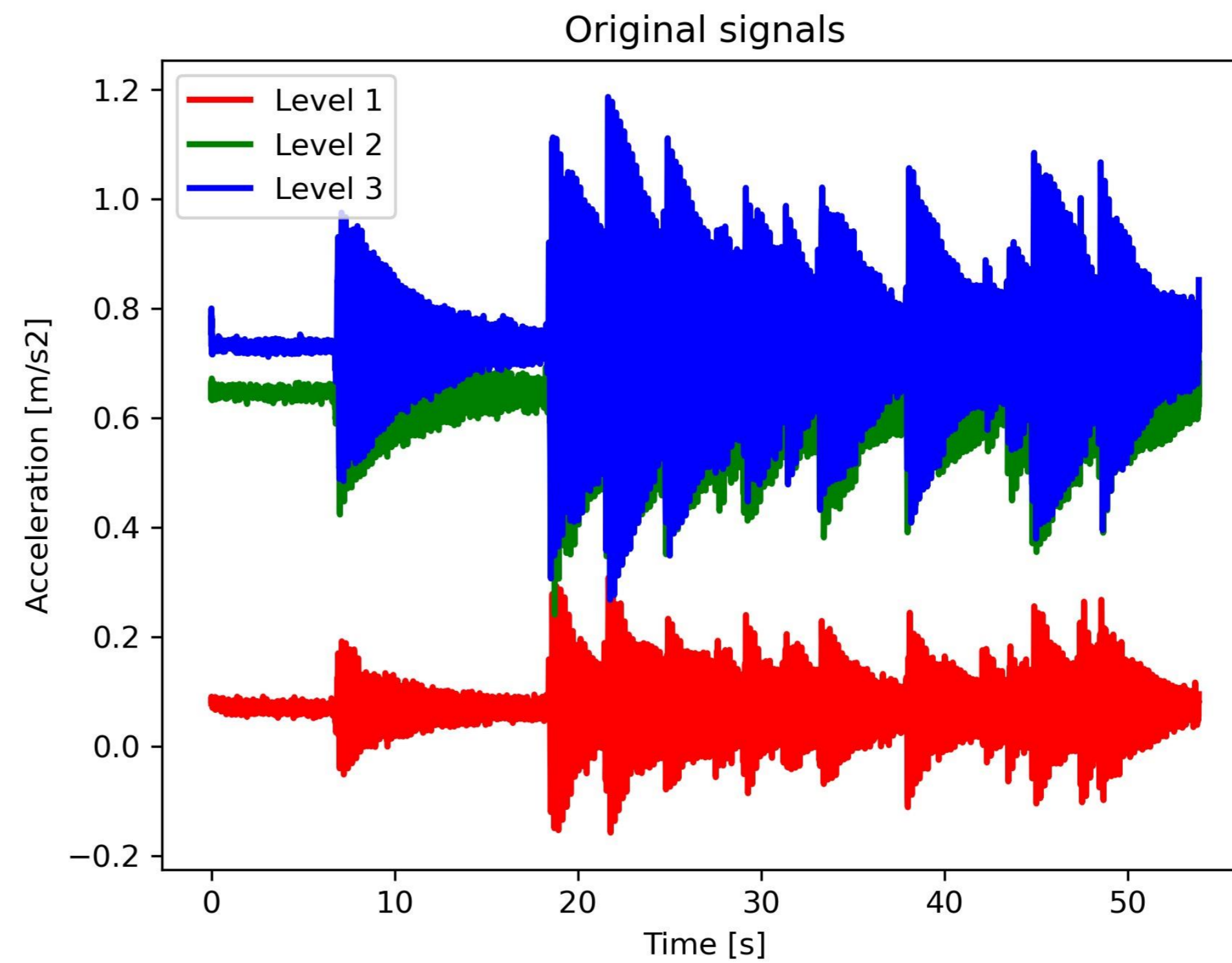
# Toma de medidas



The image shows a file explorer window on the left with files: Ajustar\_medidas.xlsx, Measurement\_1.log, Measurement\_1.txt, and ~\$Ajustar\_medidas.xlsx. The Measurement\_1.txt file is selected. To the right, a Notepad window titled '\*Measurement\_1.txt - Notepad' displays a table of data with columns for time, and three numerical values.

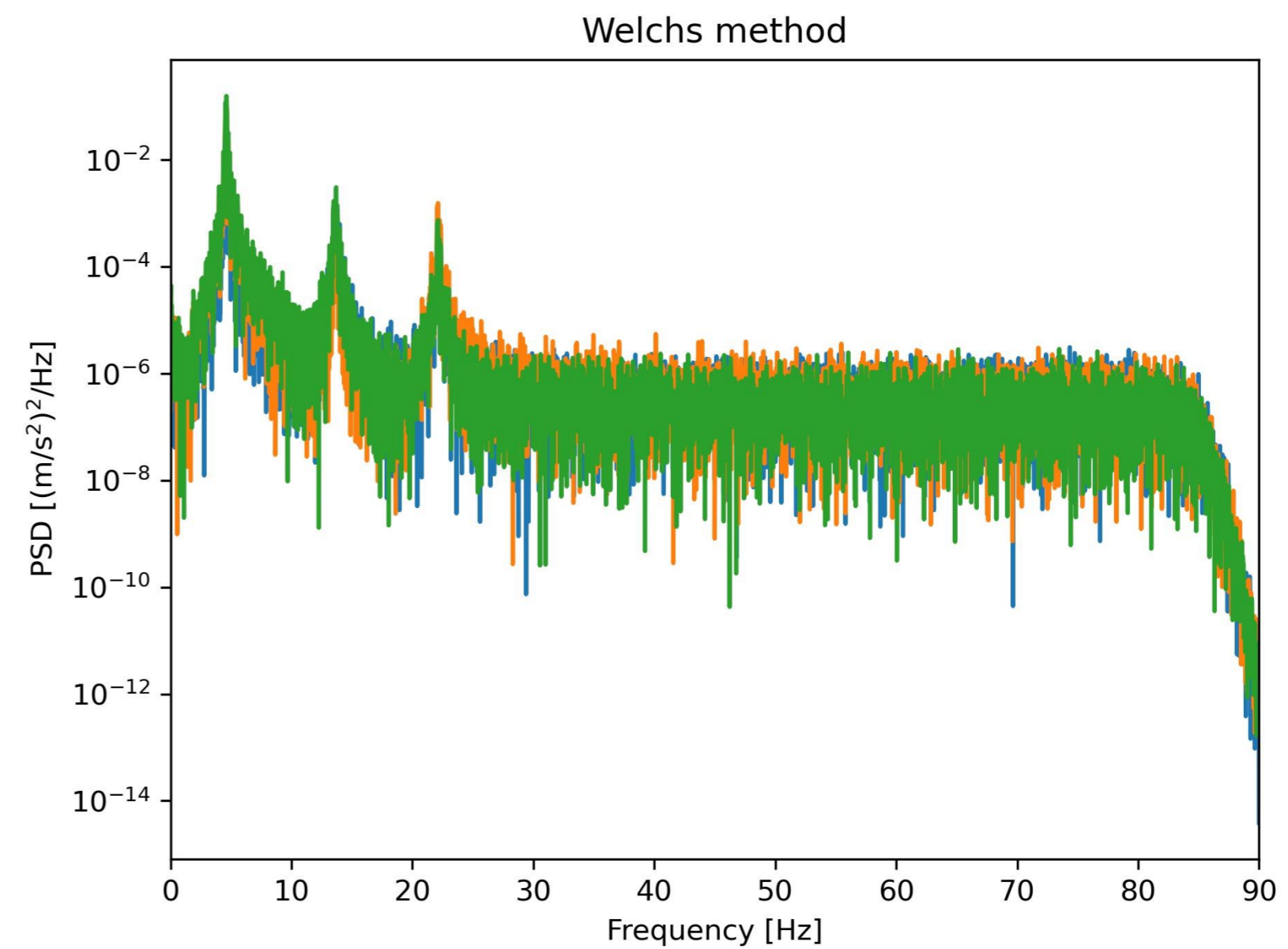
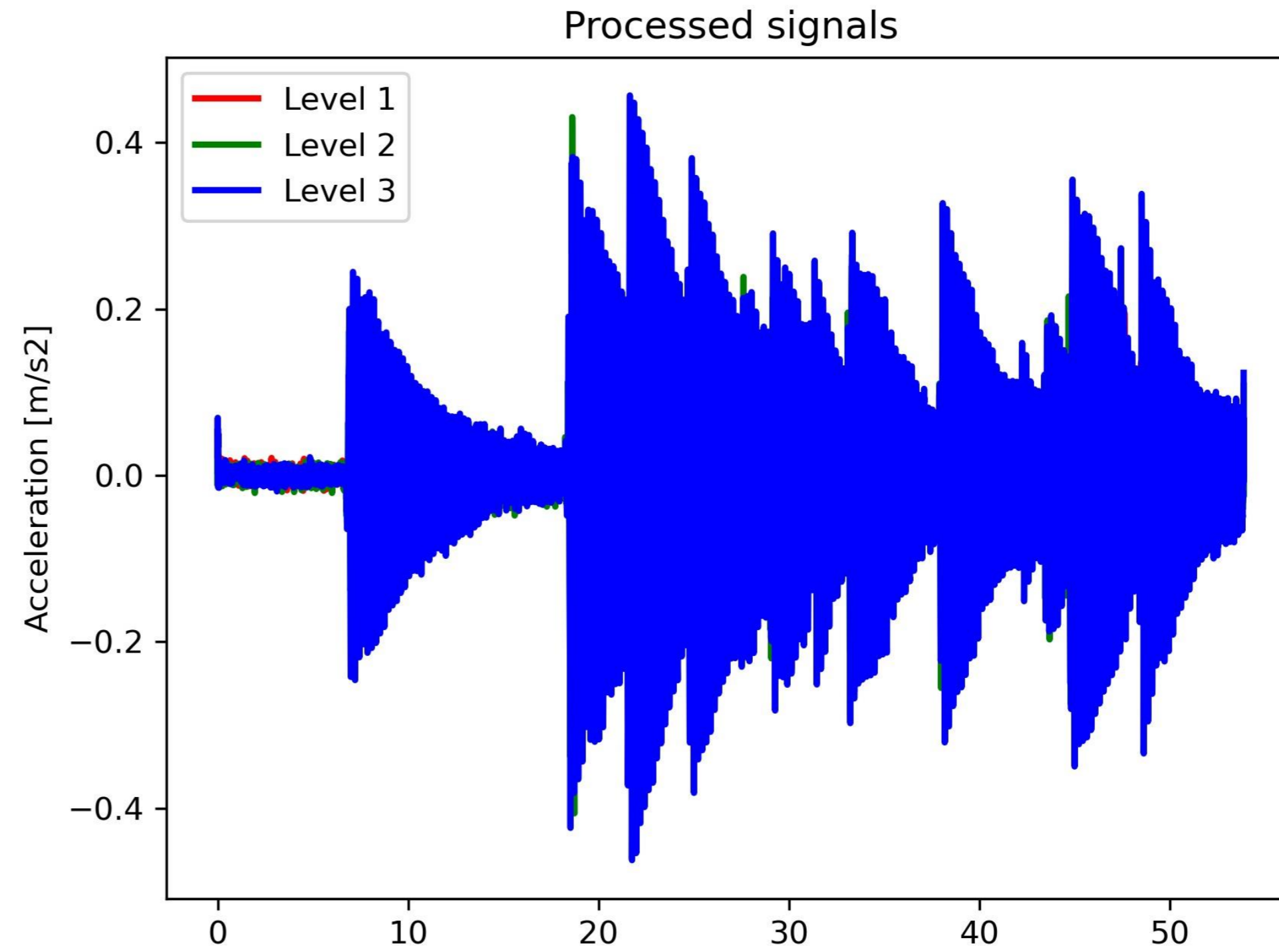
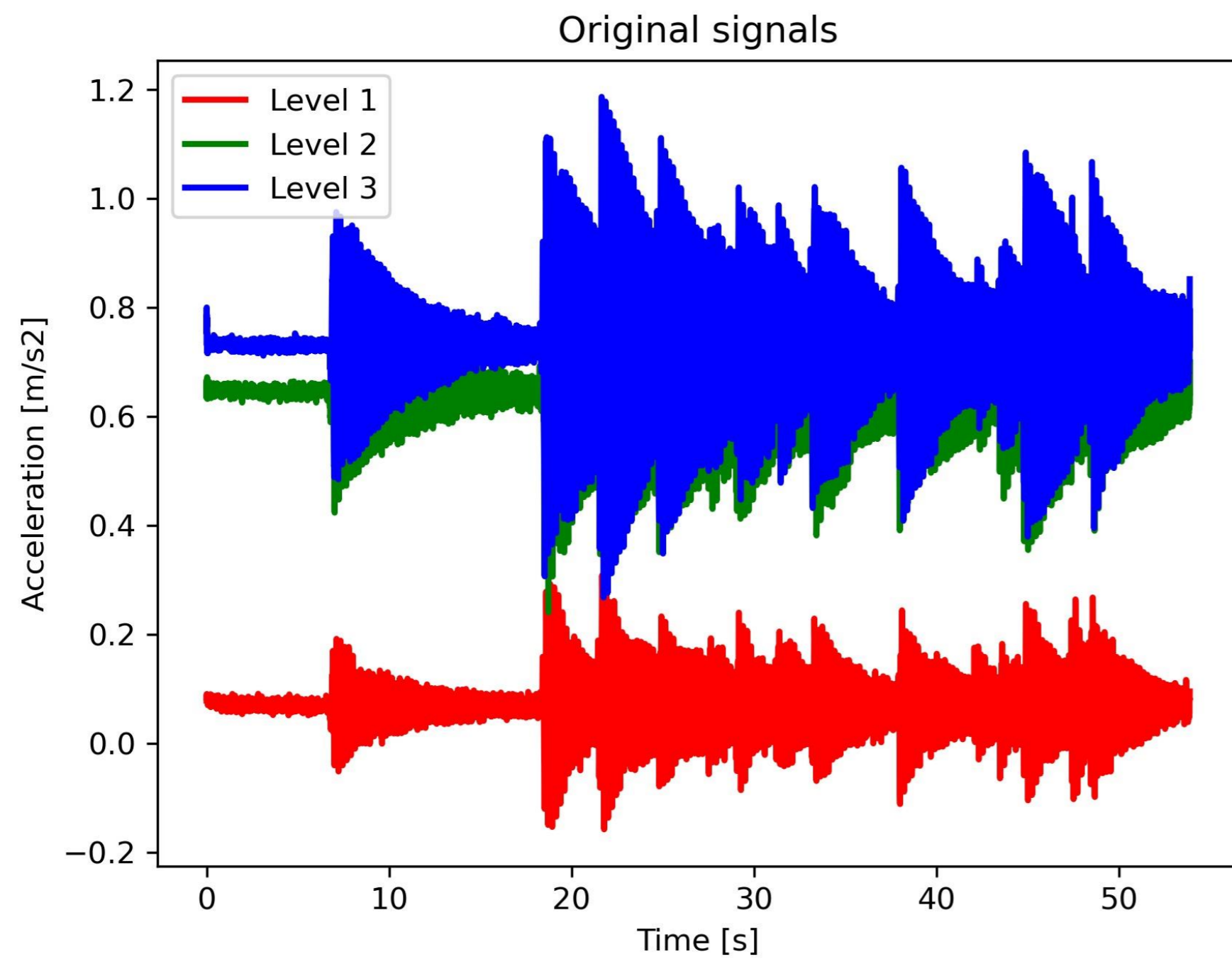
File	Edit	Format	View	Help
0.000	0.100	0.650	0.770	
0.005	0.080	0.660	0.770	
0.011	0.090	0.650	0.760	
0.016	0.090	0.650	0.770	
0.022	0.080	0.650	0.770	
0.027	0.080	0.650	0.770	
0.033	0.090	0.650	0.760	
0.038	0.080	0.650	0.770	
0.044	0.080	0.650	0.760	
0.049	0.070	0.650	0.760	
0.055	0.080	0.650	0.770	
0.060	0.080	0.660	0.760	
0.066	0.090	0.650	0.780	
0.071	0.080	0.650	0.770	
0.077	0.080	0.650	0.770	
0.082	0.080	0.650	0.780	
0.087	0.090	0.660	0.770	

Generate\_measurements.py



# Toma de medidas

[Generate\\_measurements.py](#)

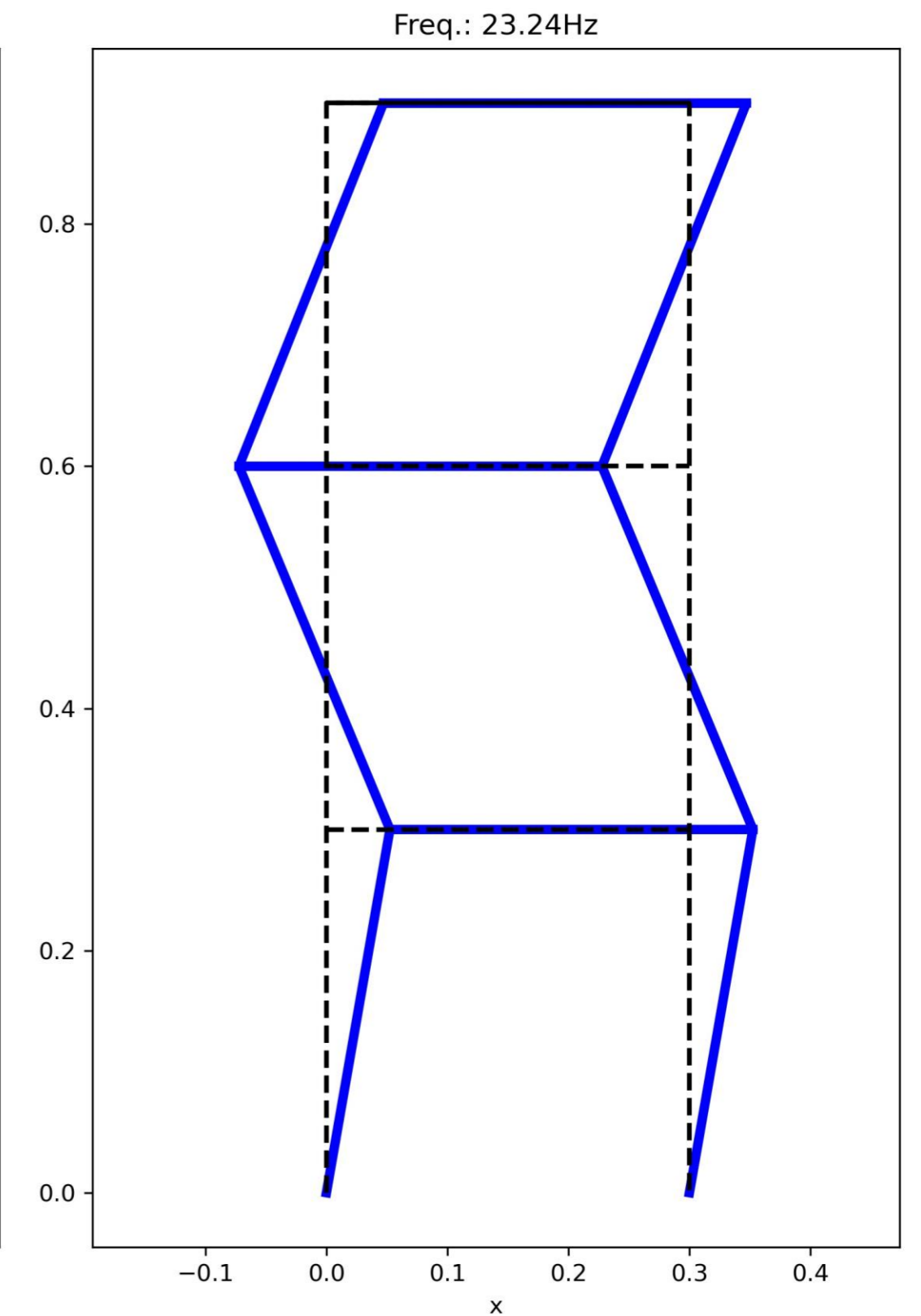
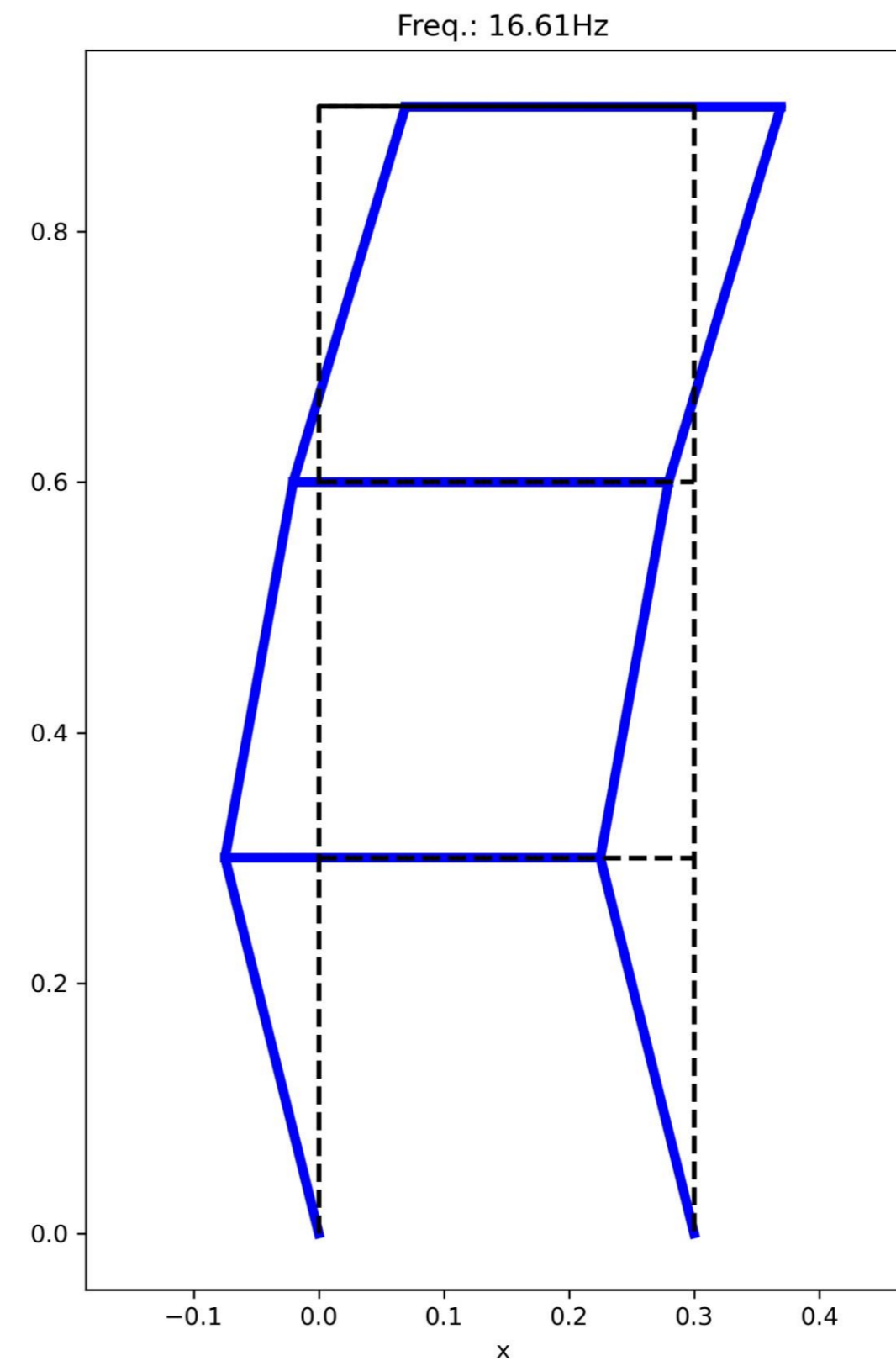
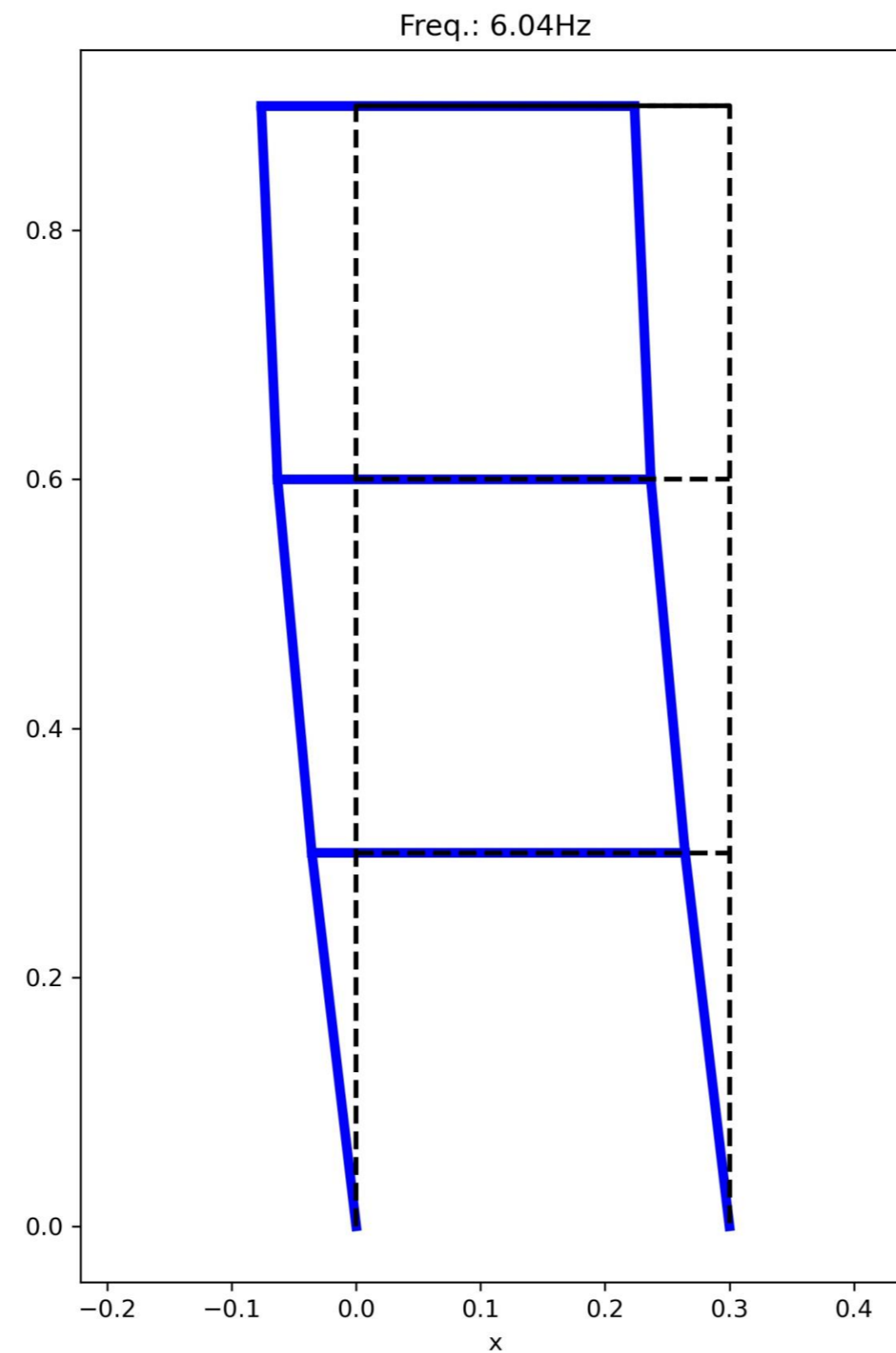


# Identificación Modal

$E_{yo} = 69 \cdot 10^9$ ; # N/m<sup>2</sup>  
 $\text{dens} = 2700$ ; # kg/m<sup>3</sup>  
 $A_r = 0.04 \cdot 0.002$ ;  
 $I_{ne} = (1/12) \cdot 0.04 \cdot 0.002^3$ ; # m<sup>4</sup>  
 $h = 0.3$ ; # m  
 $L_e = 0.3$ ; # m

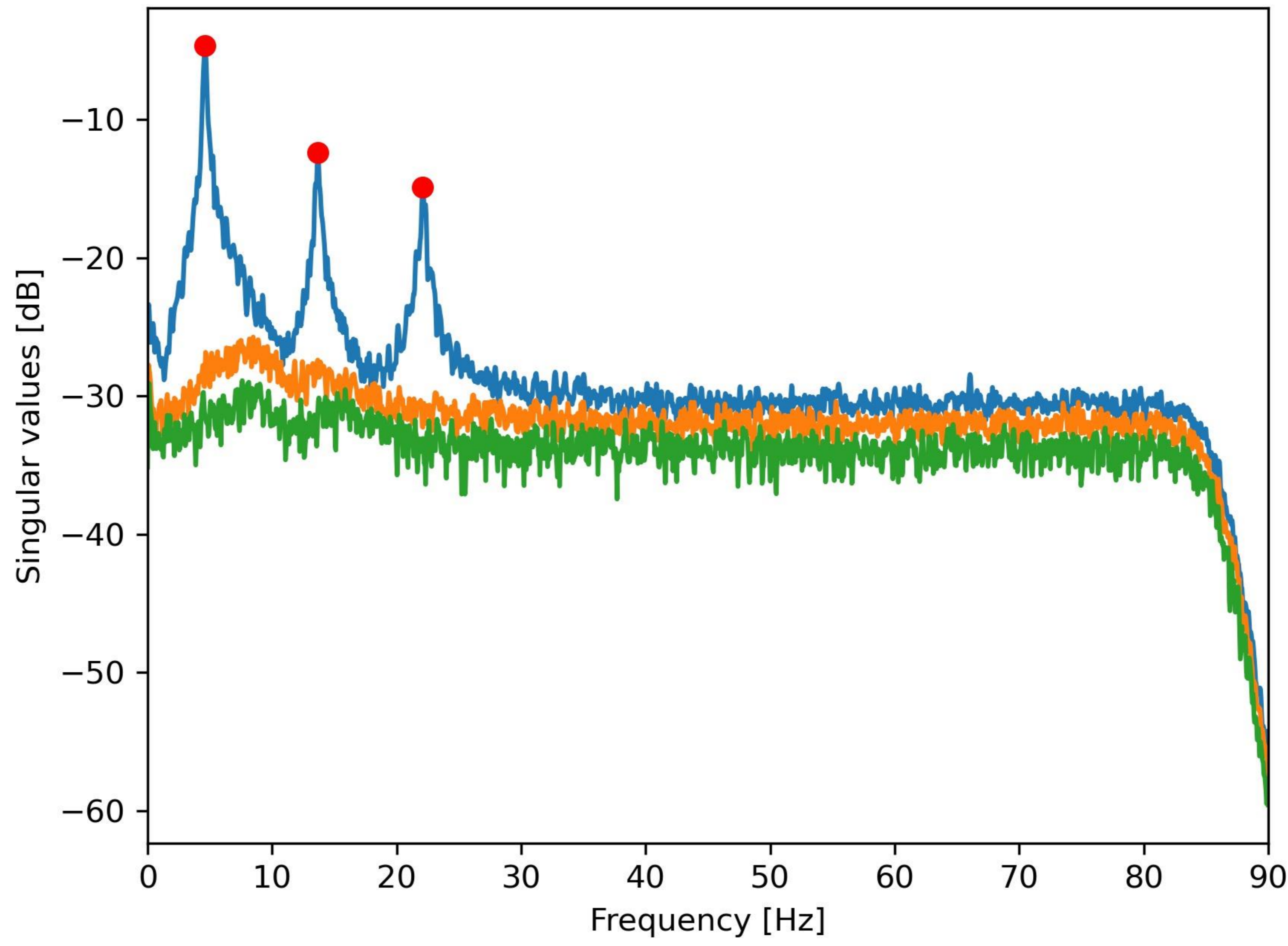
$k_1 = 2 \cdot 12 \cdot E_{yo} \cdot I_{ne} / h^3$ ;  
 $k_2 = k_1$ ;  
 $k_3 = k_1$ ;  
 $m_1 = 2 \cdot h \cdot A_r \cdot \text{dens} + 2 \cdot A_r \cdot L_e \cdot \text{dens}$ ;  
 $m_2 = m_1$ ;  
 $m_3 = h \cdot A_r \cdot \text{dens} + 2 \cdot A_r \cdot L_e \cdot \text{dens}$ ;

$M = \text{np.array}([[m_1, 0, 0], [0, m_2, 0], [0, 0, m_3]])$   
 $K = \text{np.array}([[k_1 + k_2, -k_2, 0], [-k_2, k_2 + k_3, -k_3], [0, -k_3, k_3]])$



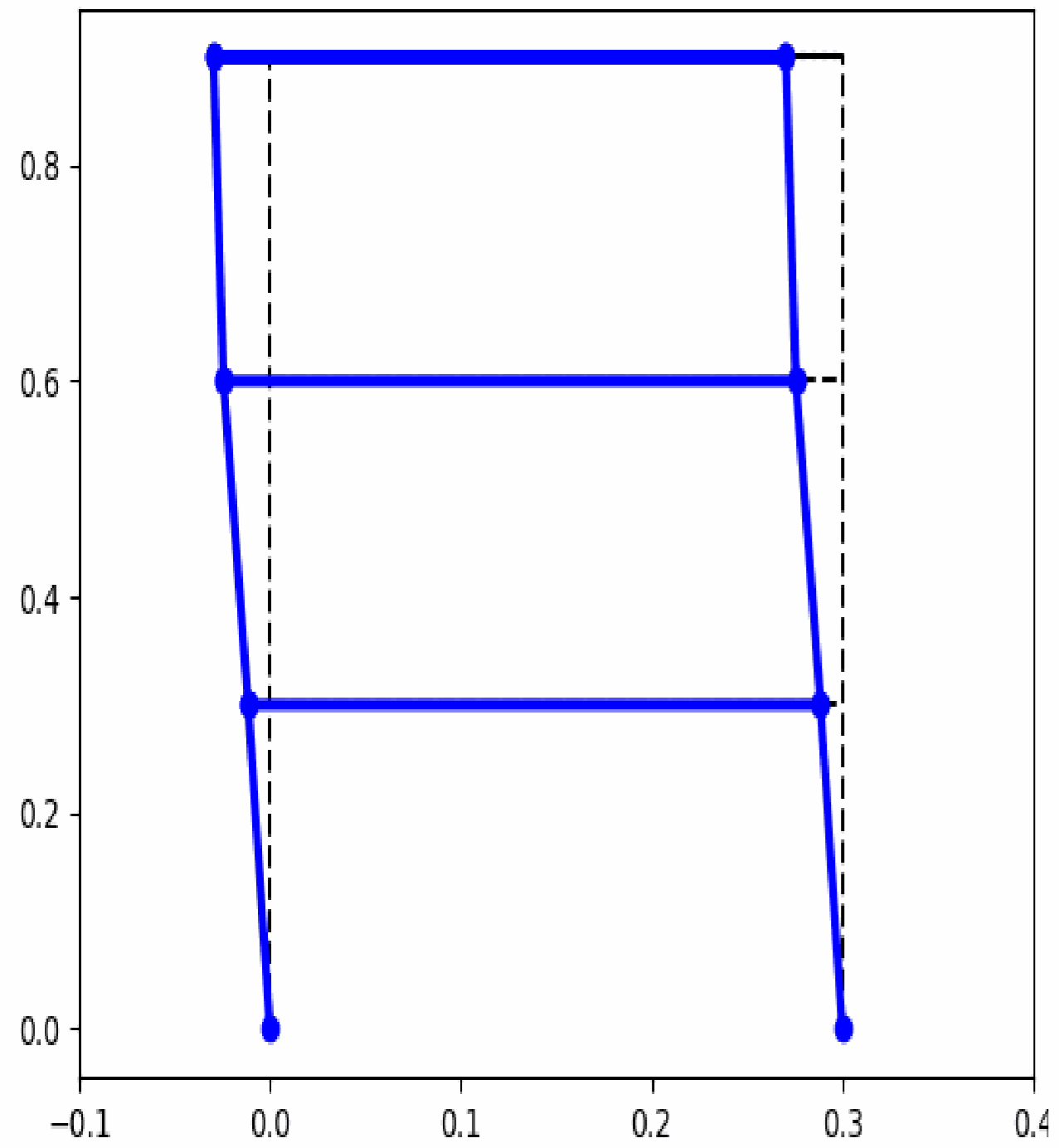
# FDD

OMA\_FDD.py

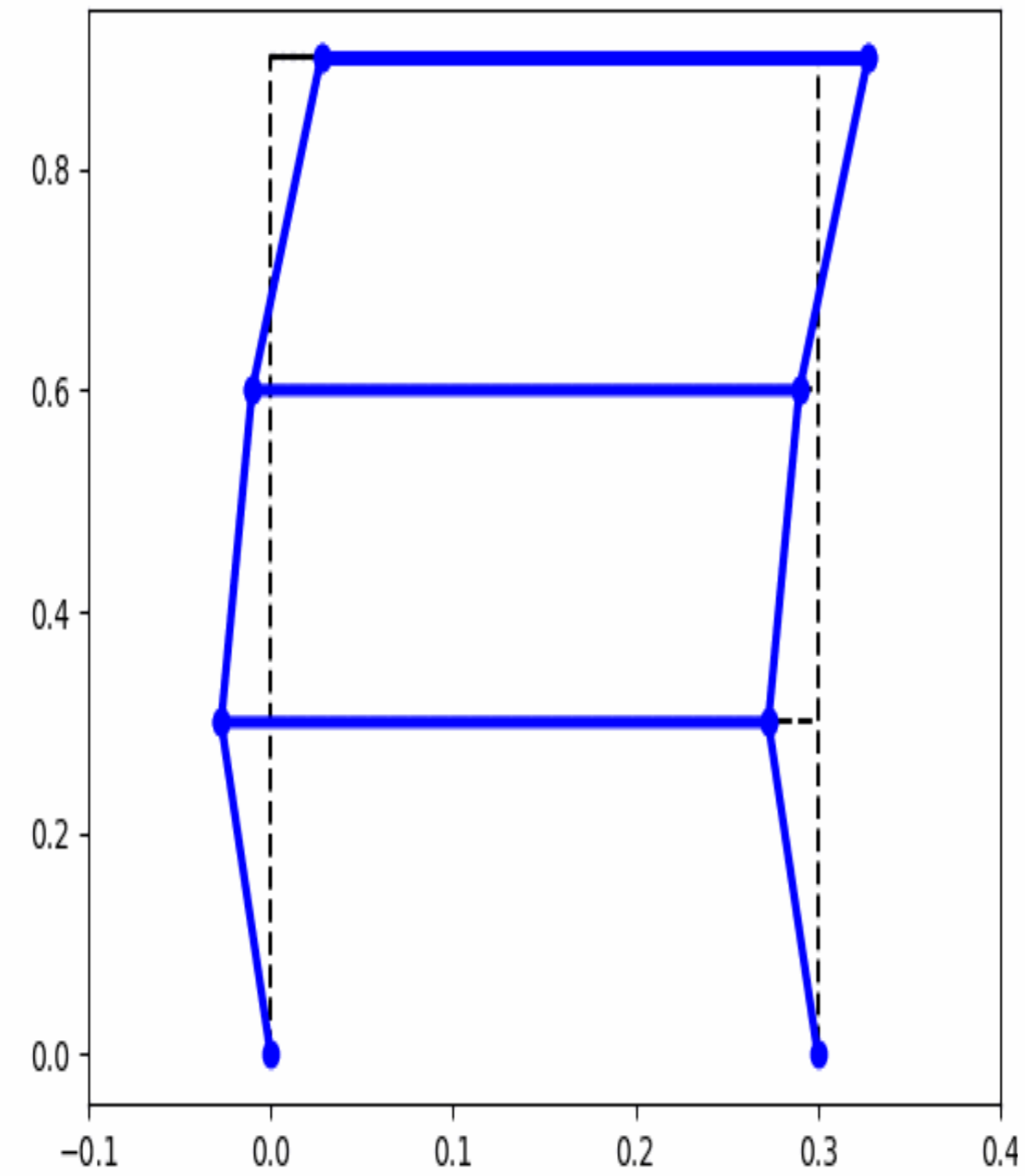


# FDD

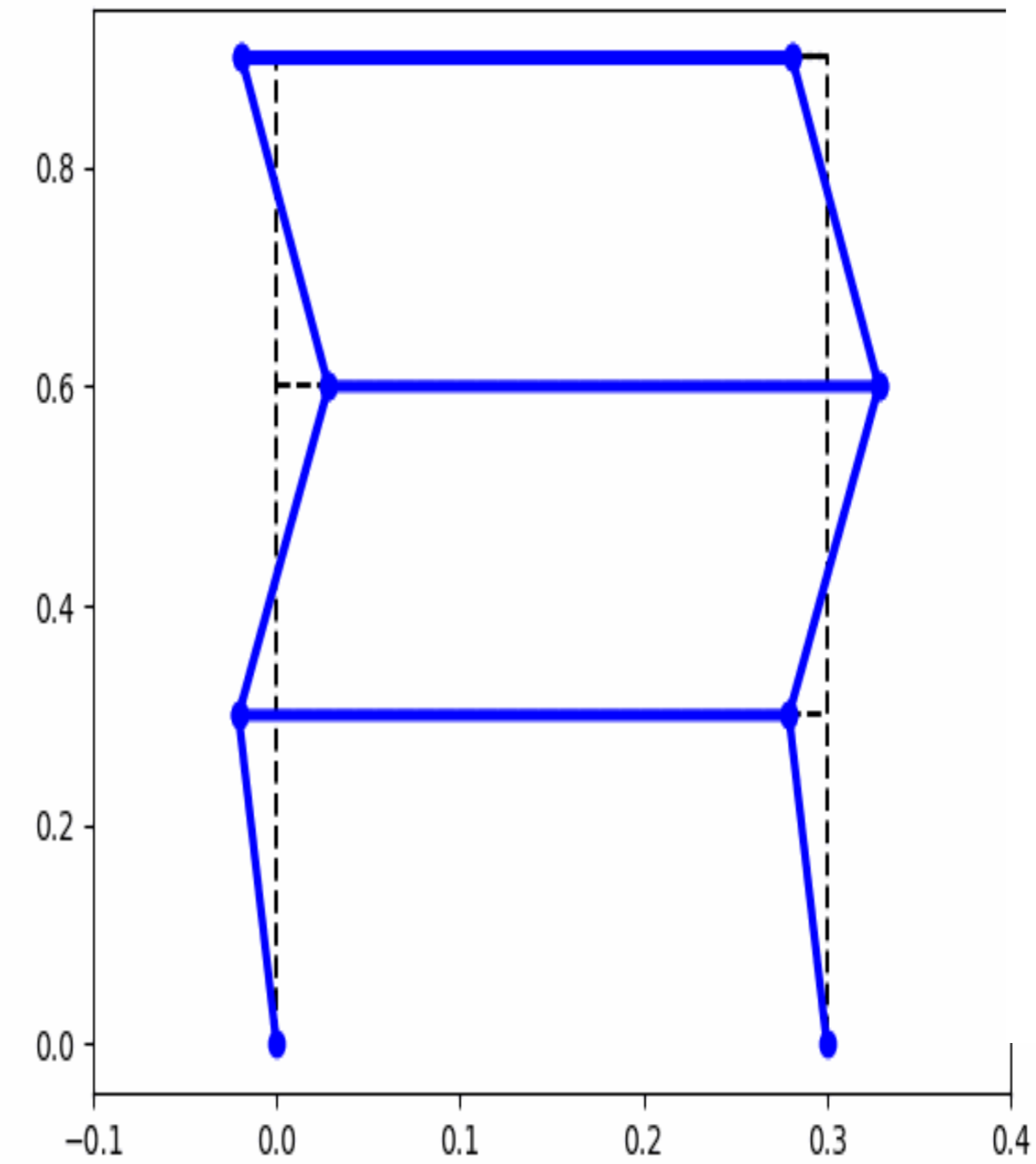
Modo 1 - Frequency : 4.61 Hz



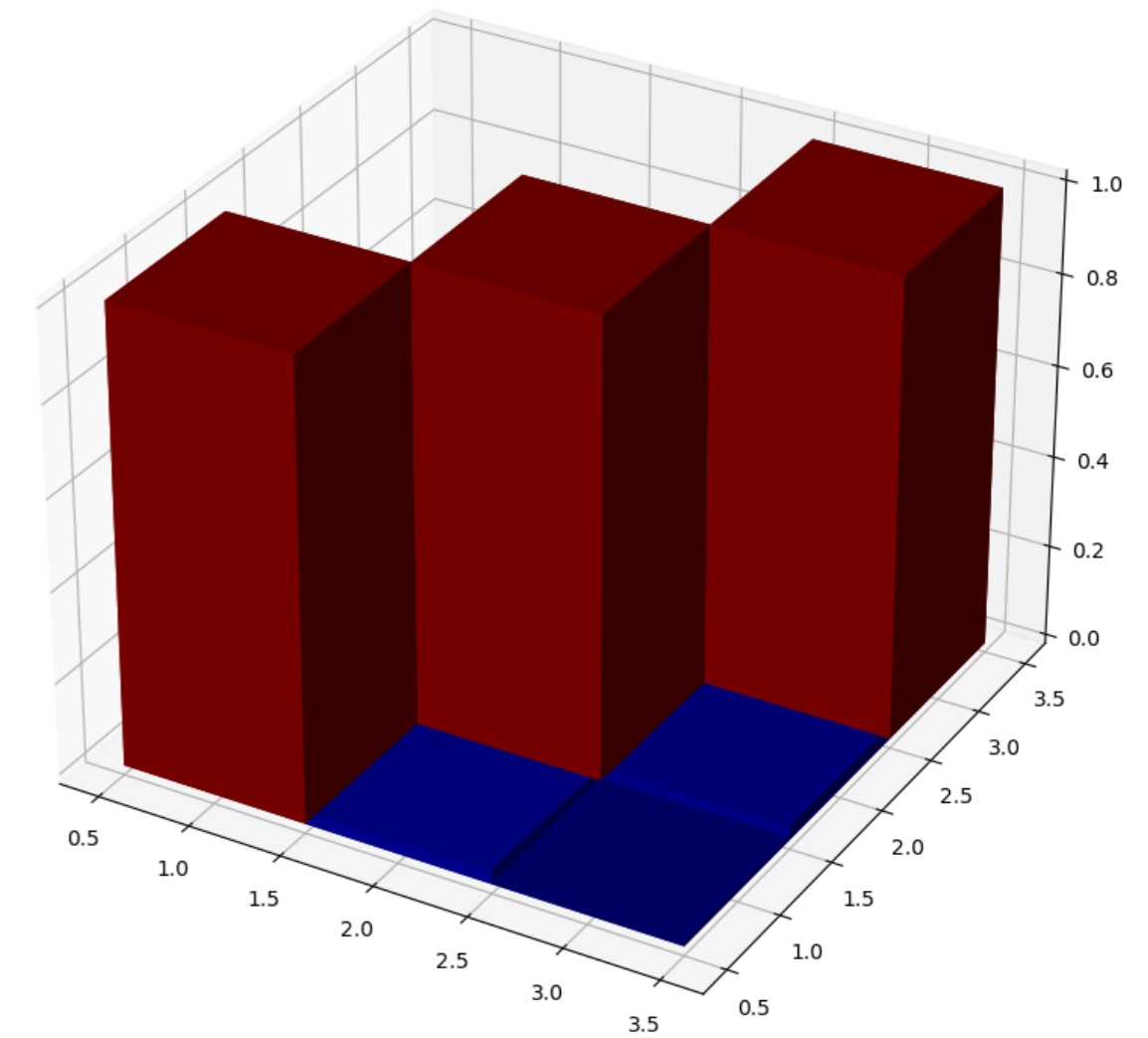
Modo 2 - Frequency : 13.67 Hz



Modo 3 - Frequency : 22.1 Hz

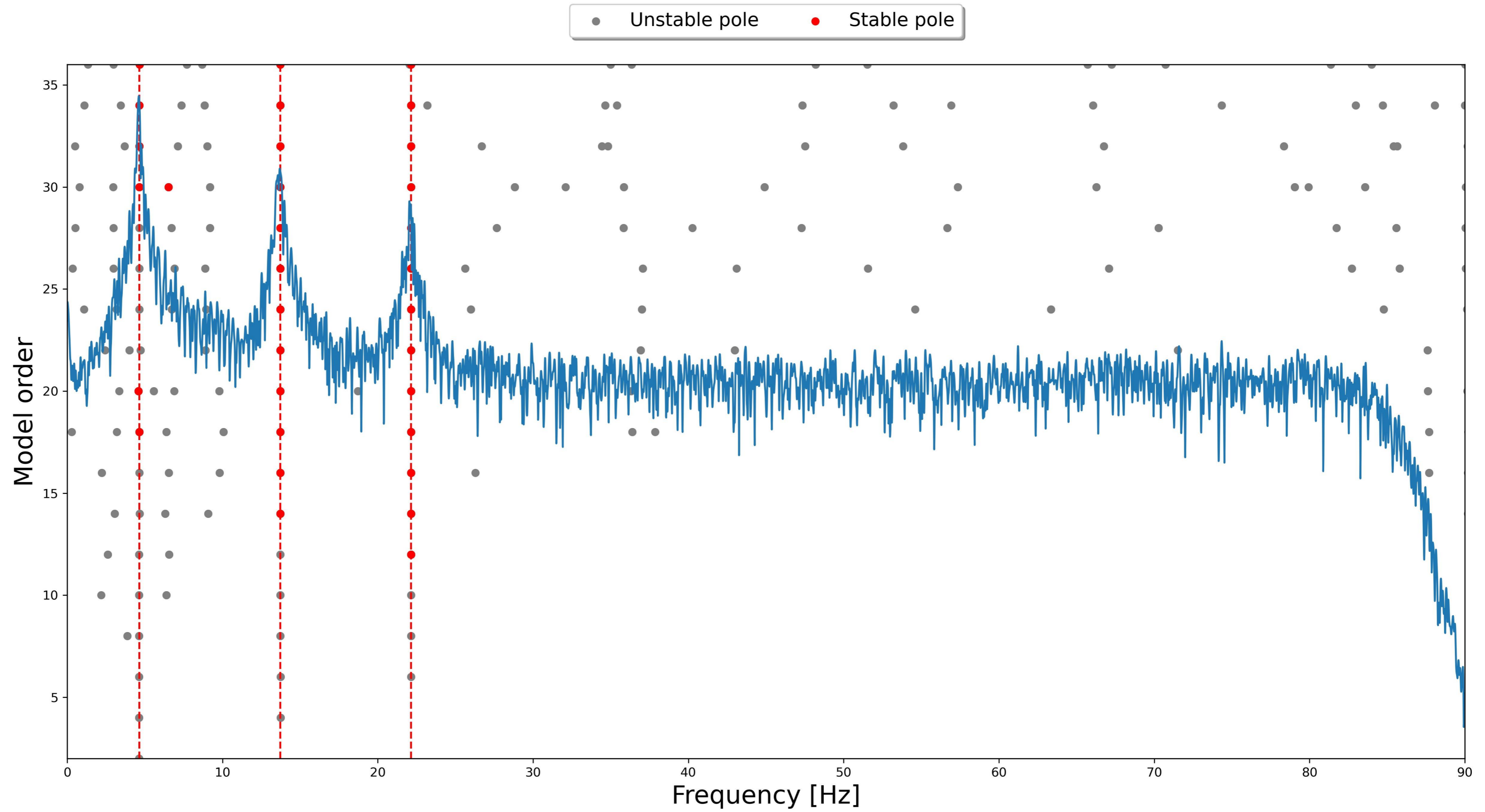


MAC matrix



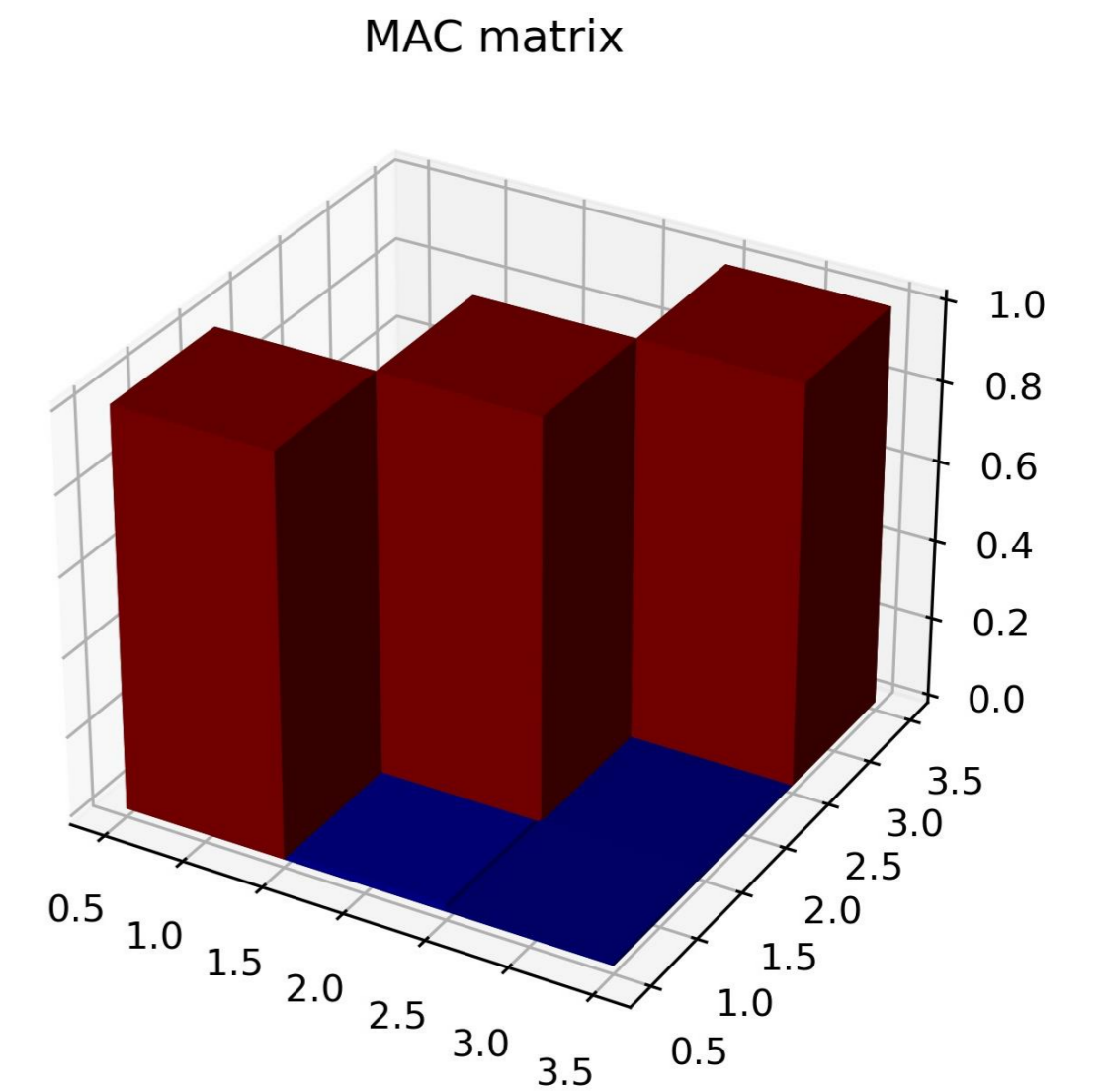
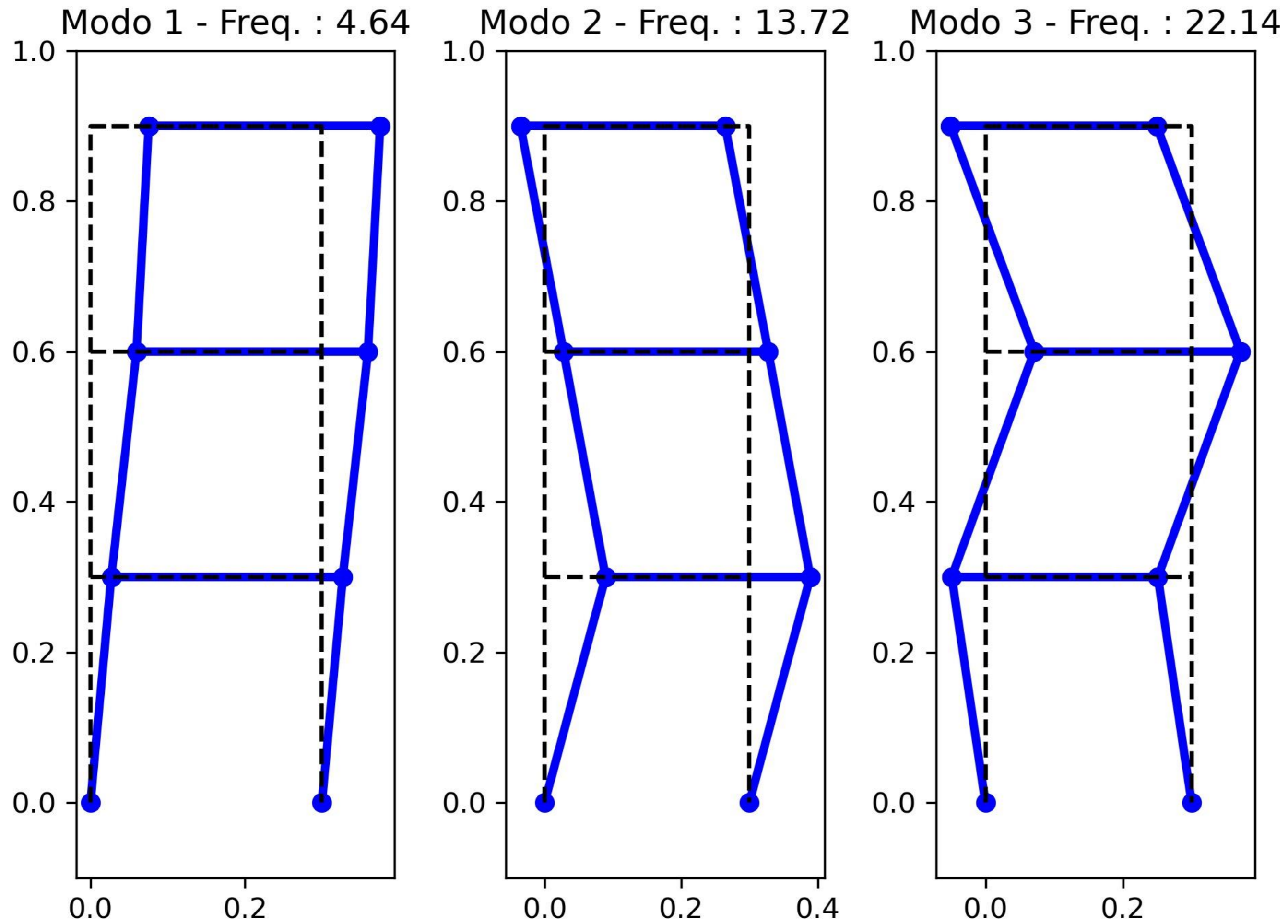
# COV-SSI

OMA\_COV\_SSI.py





# COV-SSI



# COMPARISON RESULTS

Mode N.	FDD		COV-SSI	
	$f_i$ [Hz]	$\xi_i$ [%]	$f_i$ [Hz]	$\xi_i$ [%]
1				
2				
3				

# COV-SSI





UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Máster Universitario en Estructuras  
Curso 2020-2021

# Taller: Identificación del daño estructural

Módulo: MÓDULO FUNDAMENTAL: CALIDAD Y DAÑO

Materia: **Análisis Modal y Detección de Defectos**

**Enrique García Macías**

[enriquegm@ugr.es](mailto:enriquegm@ugr.es)

**Departamento de Mecánica de Estructuras e  
Ingeniería Hidráulica**

# Desarrollo del curso

		FECHA		HORA	PROFESOR	TEMA	
Clase 1	Lunes	1	febrero	9:30-11:30	EGM	1	Introducción: Análisis modal dentro del marco del mantenimiento de la salud estructural.
Clase 2	Lunes	8	febrero	9:30-11:30	EGM	2	Fuentes de deterioro, patologías estructurales, y tecnologías de monitorización.
Clase 3	Lunes	15	febrero	9:30-11:30	EGM	3	Taller: procesamiento de señales.
Clase 4	Lunes	22	febrero	9:30-11:30	EGM	4	Análisis modal experimental.
Clase 5	Lunes	15	marzo	9:30-11:30	EGM	5	Análisis modal operacional.
Clase 6	Lunes	12	abril	9:30-11:30	EGM	6	Análisis modal operacional automatizado. Práctica de laboratorio I.
Clase 7	Lunes	19	abril	9:30-11:30	EGM	7	Taller: Identificación del daño estructural.
Clase 8	Lunes	26	abril	9:30-11:30	RCT	8	Técnicas de identificación dinámica basadas en análisis modal operacional.
Clase 9	Lunes	26	abril	12:00-14:00	RCT	9	Práctica de laboratorio II: Test de vibración ambiental.
Clase 10	Martes	27	abril	9:30-11:30	RCT	10	Casos de estudio.
Clase 11	Martes	27	abril	12:00-14:00	RCT		Presentación de trabajos.

ENTREGA DE TRABAJOS Y EVALUACIÓN

Del 3 al 28 de mayo



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

# ÍNDICE

- Motivación
- Detección de daños a través del paradigma del SHM como un problema de statistical pattern recognition.
  - Axiomas del SHM
  - Feature Extraction
  - Pattern Recognition
  - Pattern Classification



# Motivación.



# Motivación



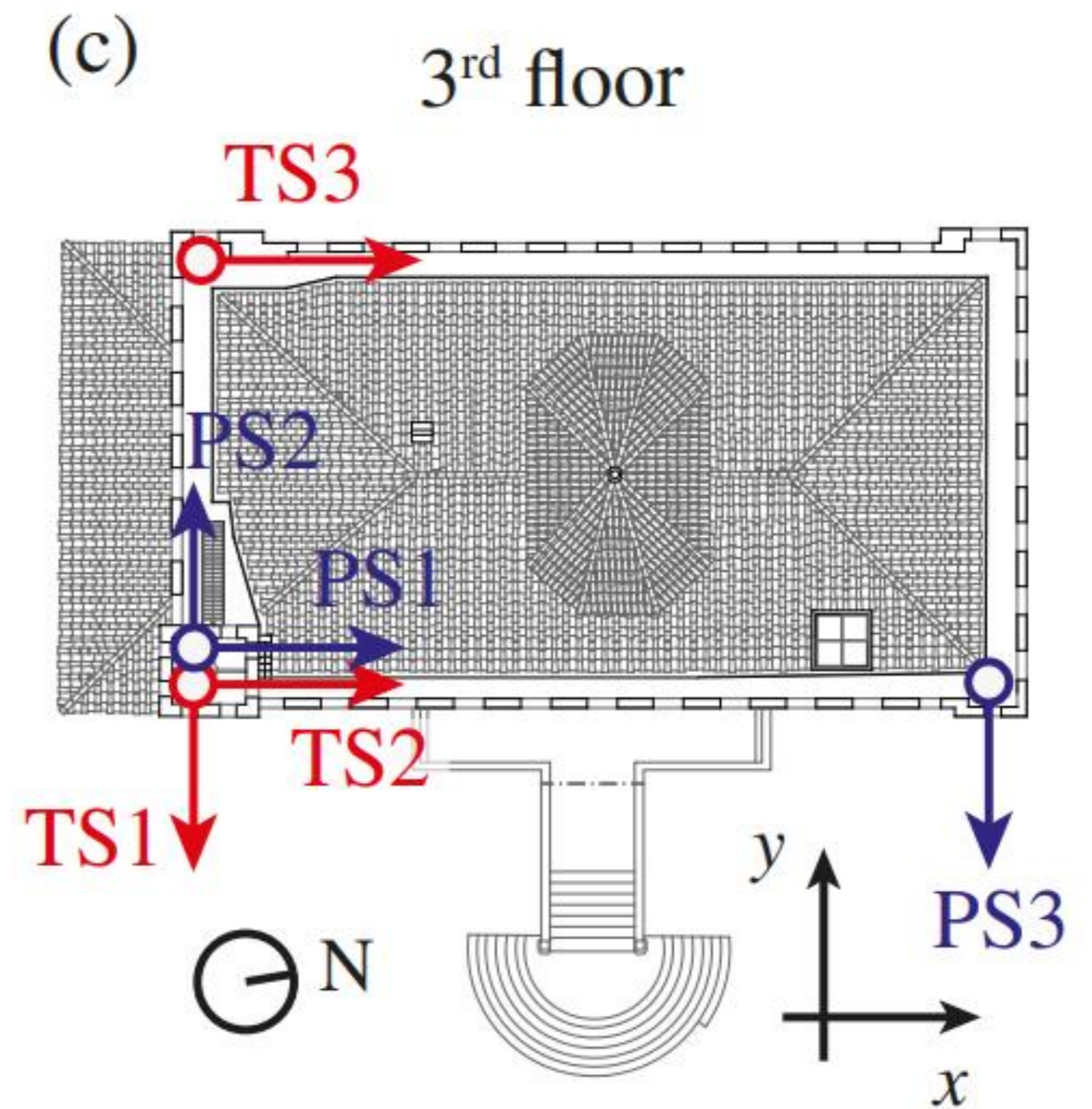
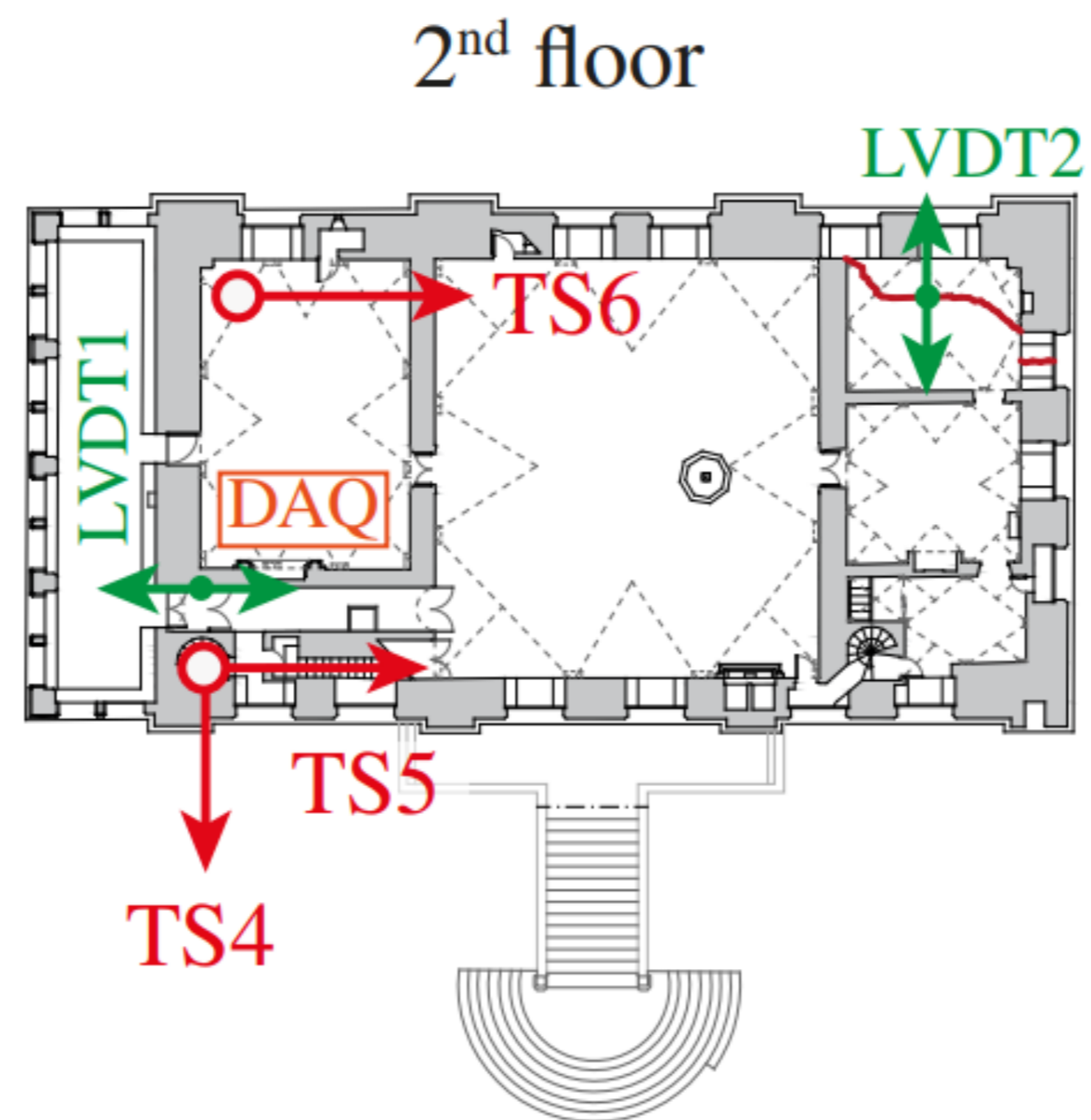
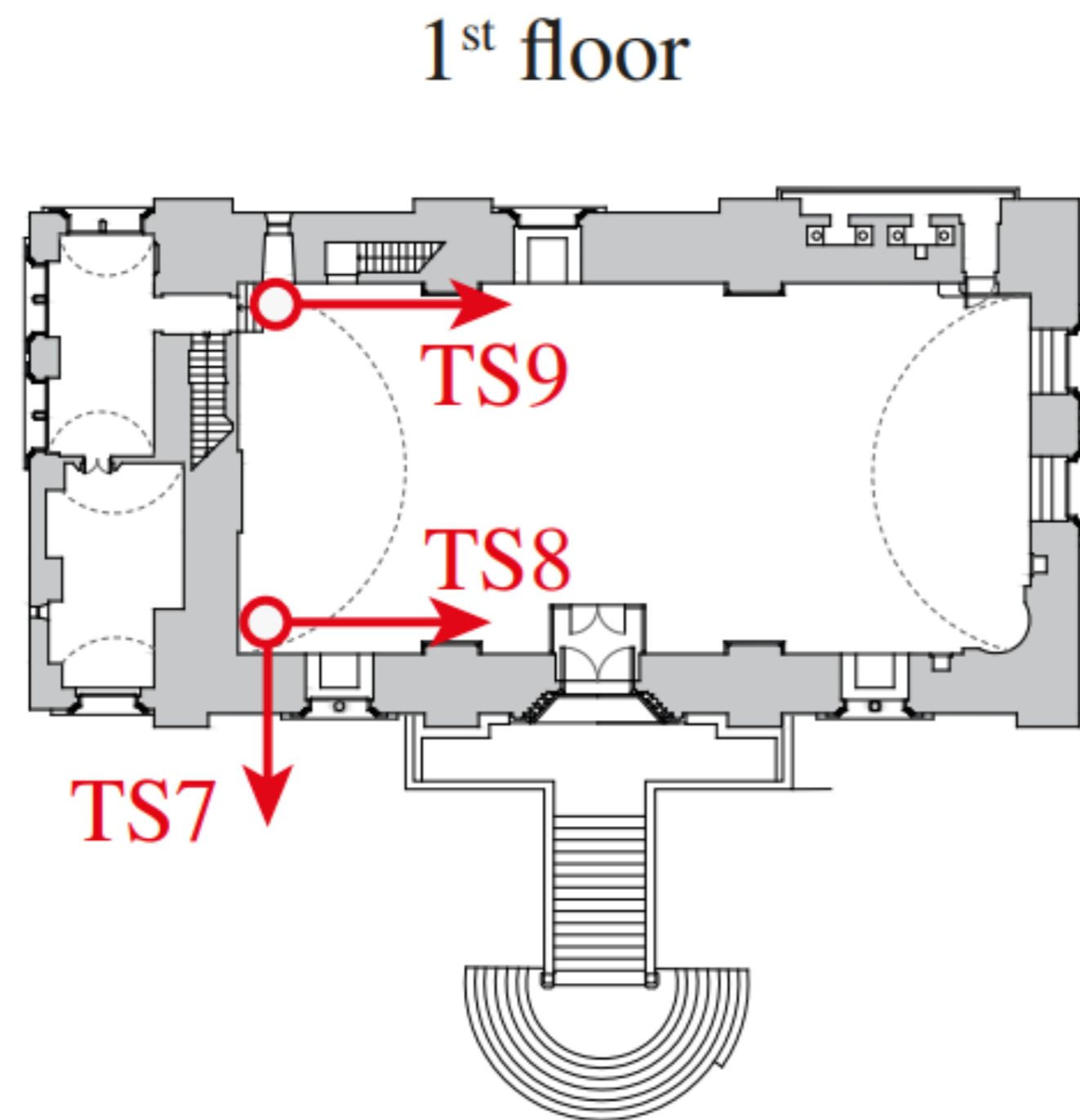
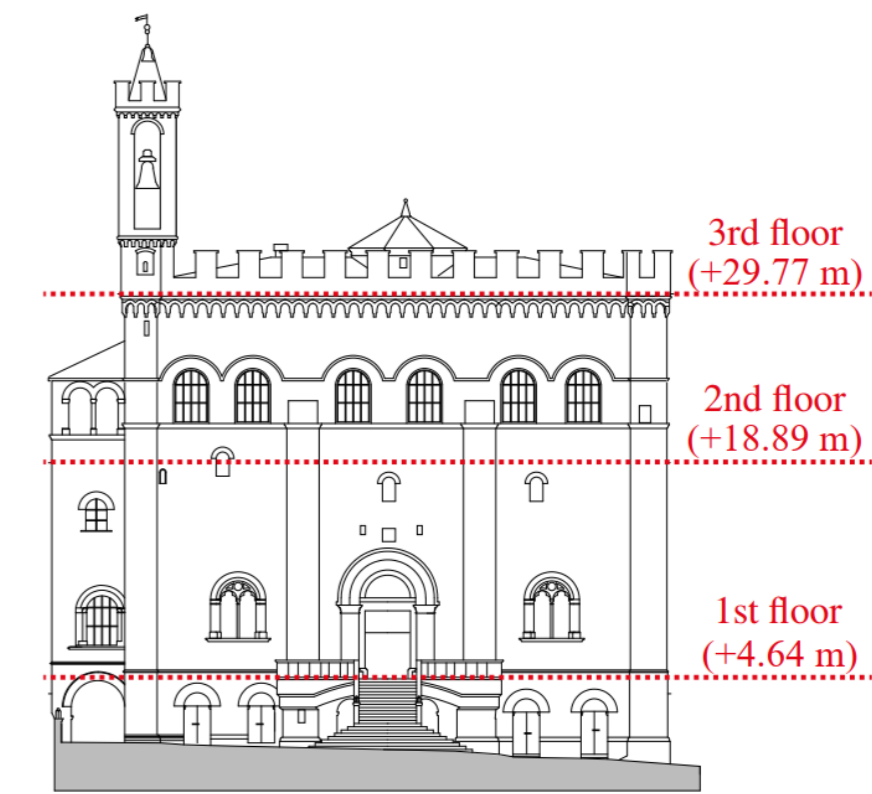
Motivation – Consoli Palace in Gubbio (Italy)



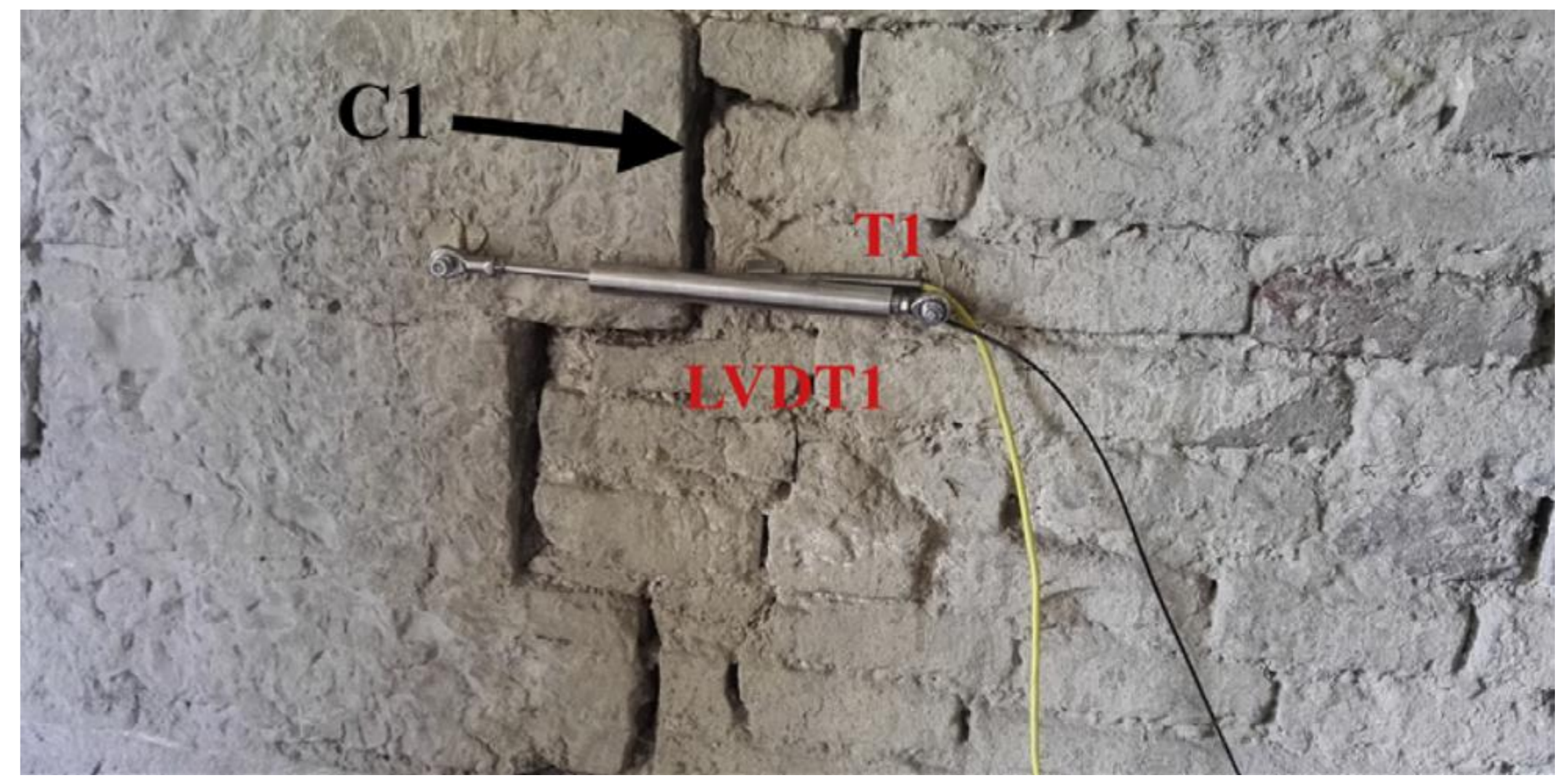
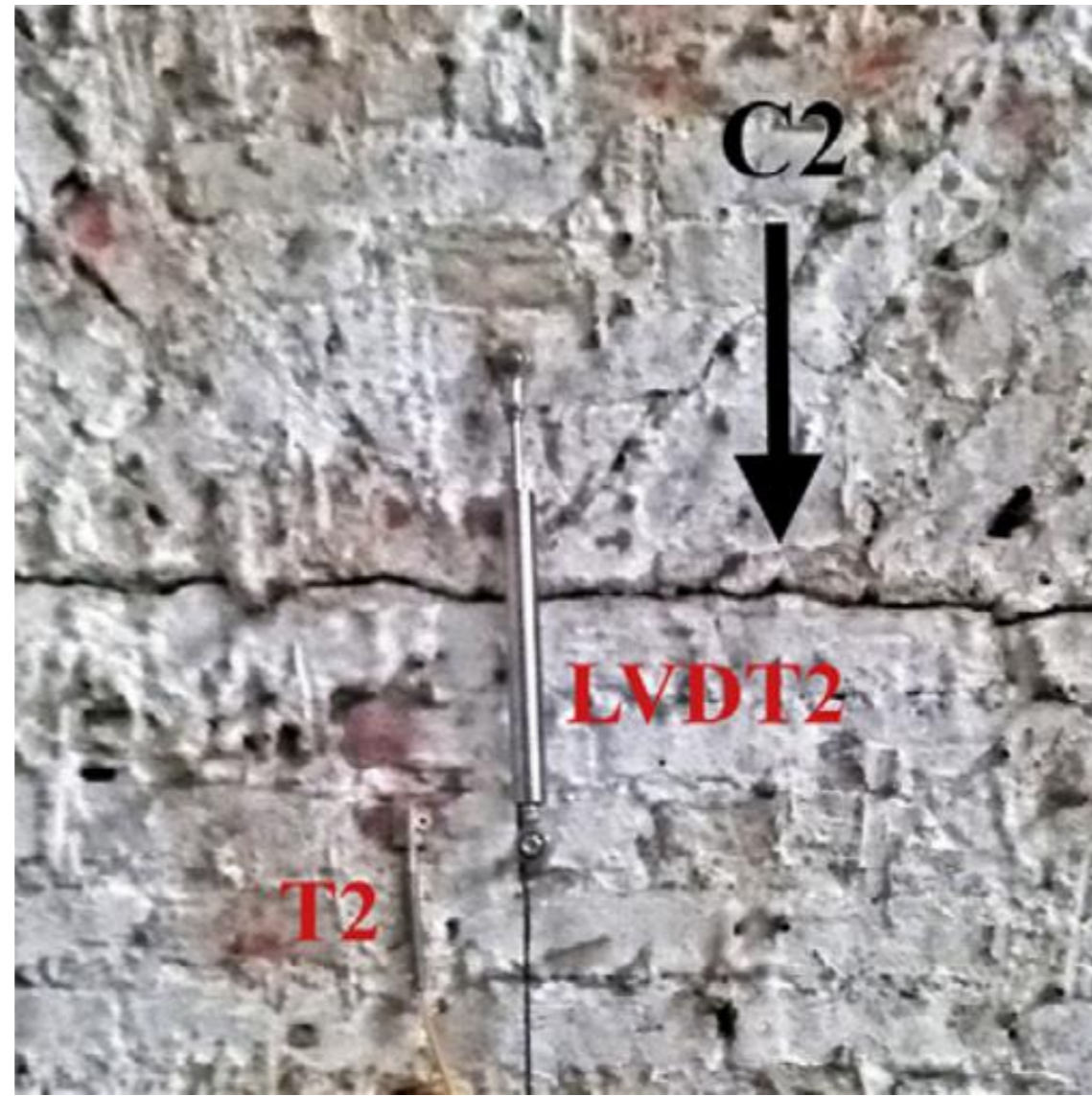


# Motivación

## Permanent SHM system

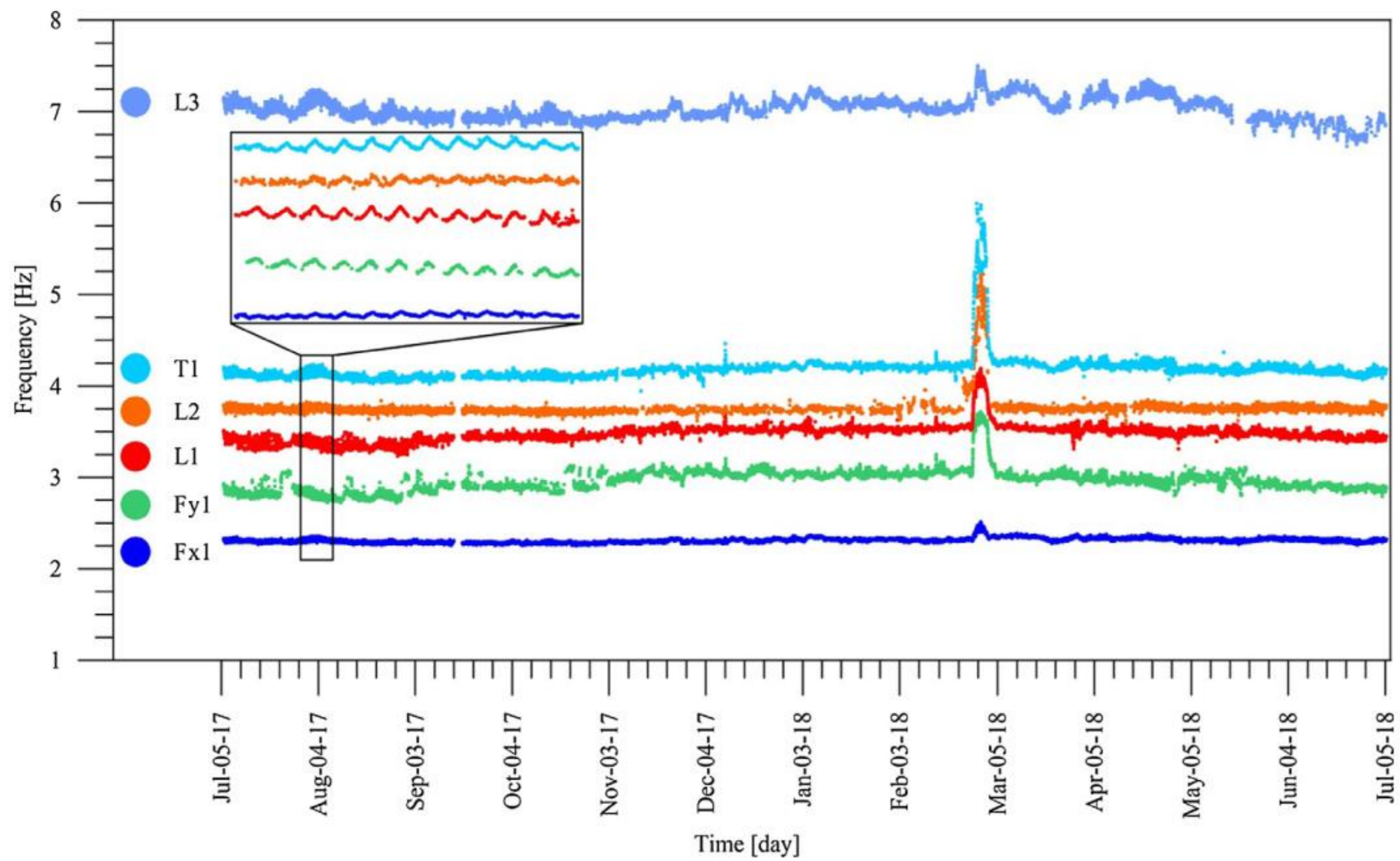


# Motivación

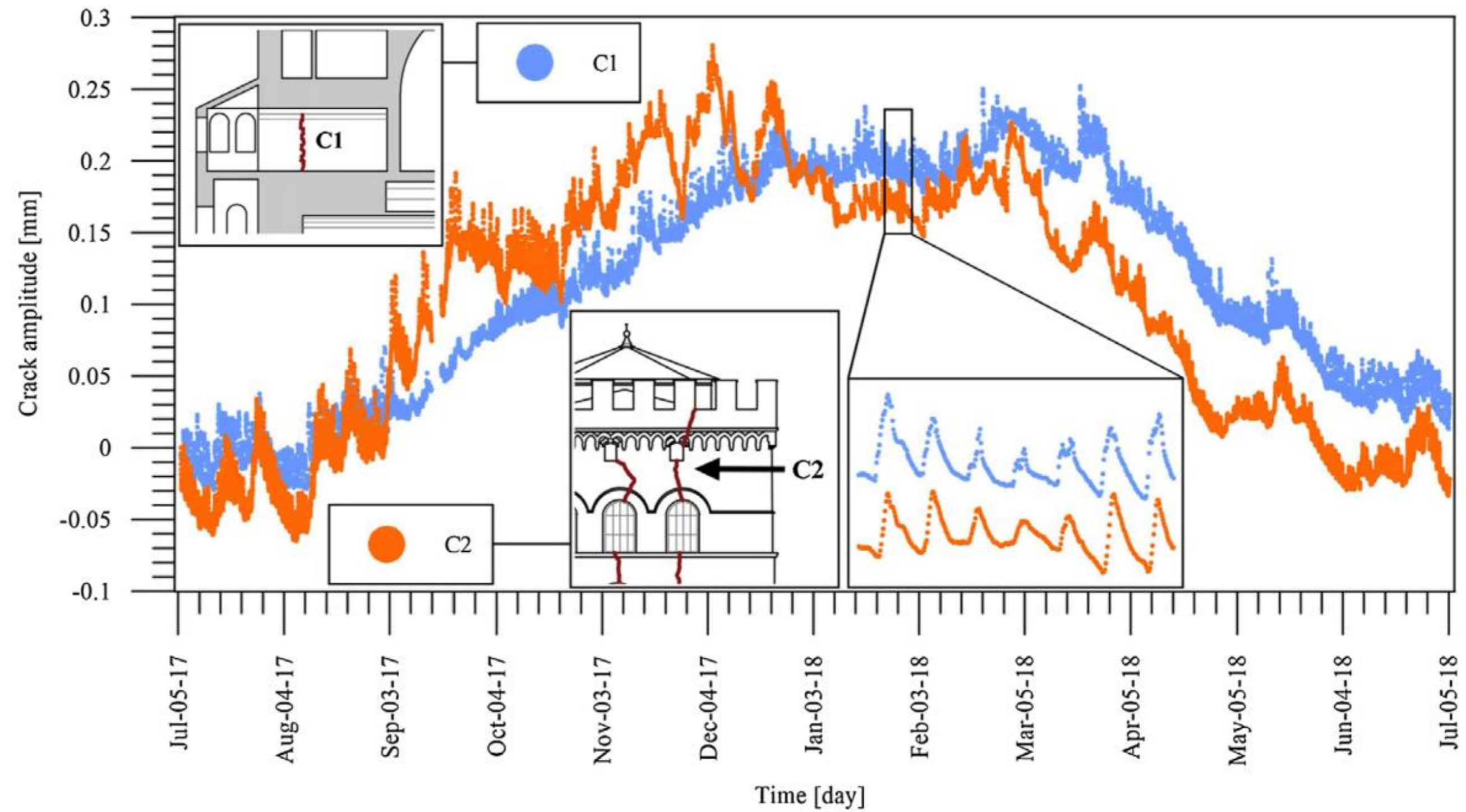


# Motivación

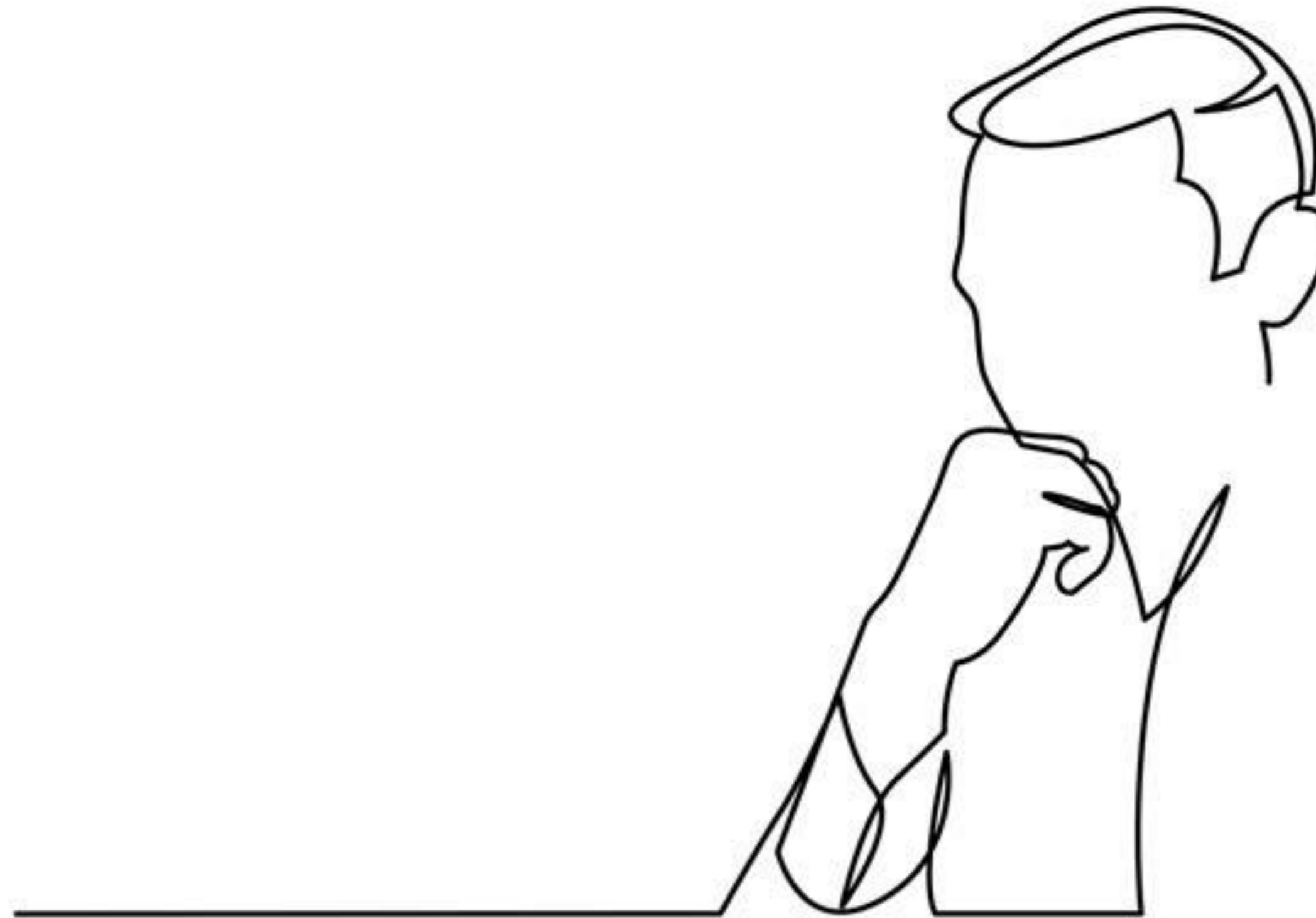
## Resonant frequencies



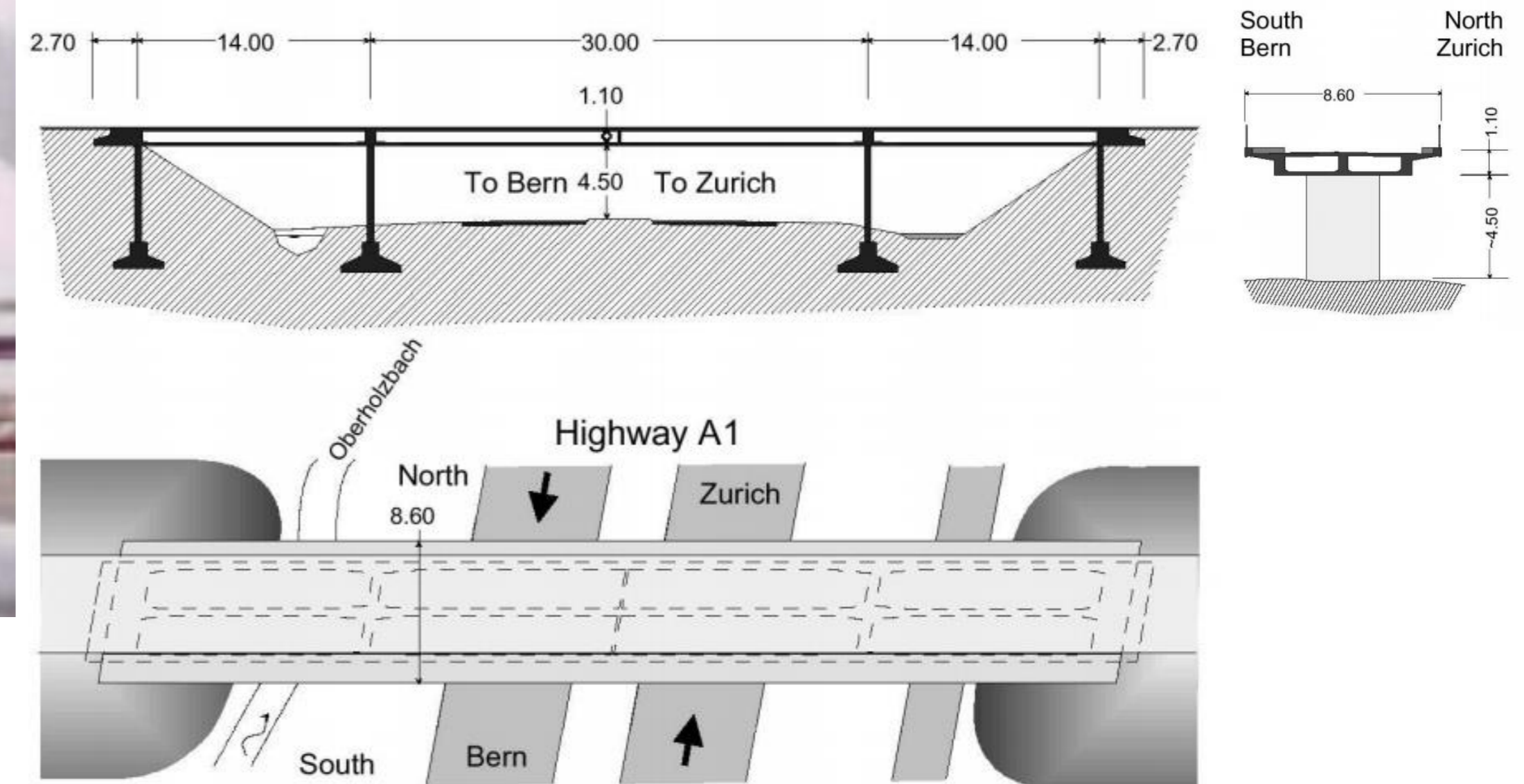
## Crack amplitudes



Is it safe?

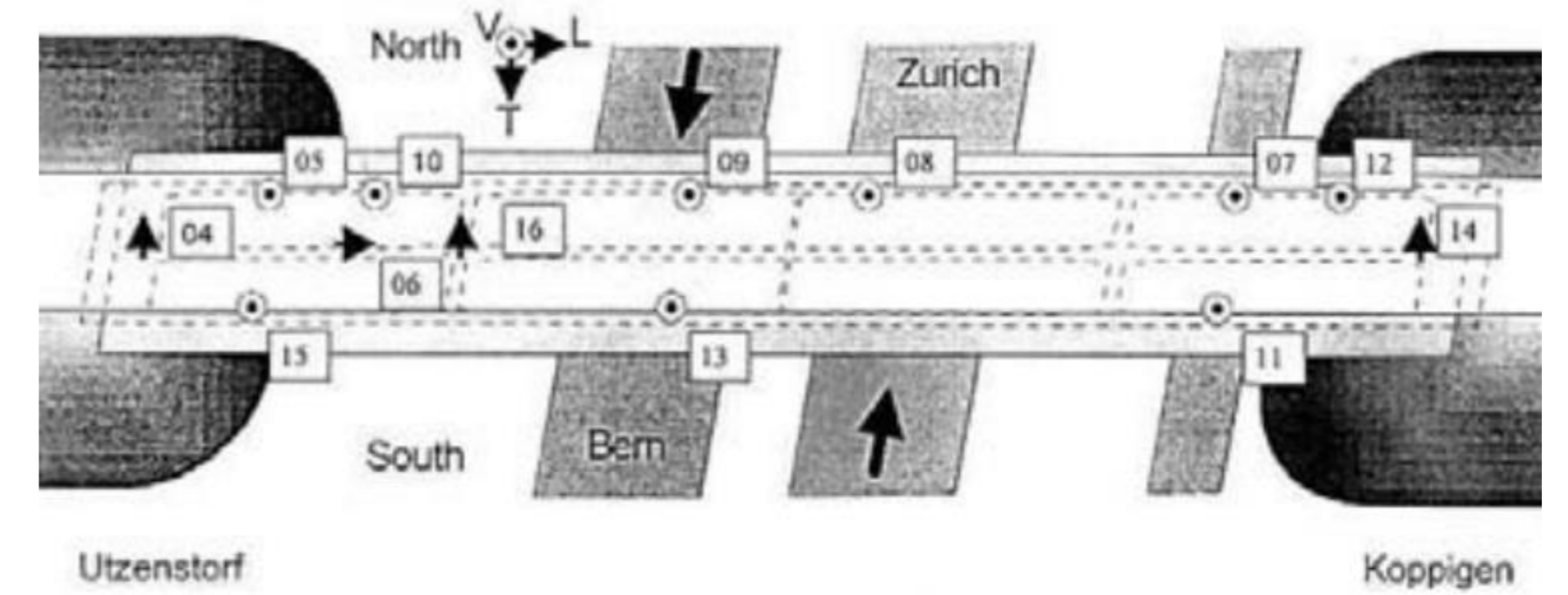


# Motivación

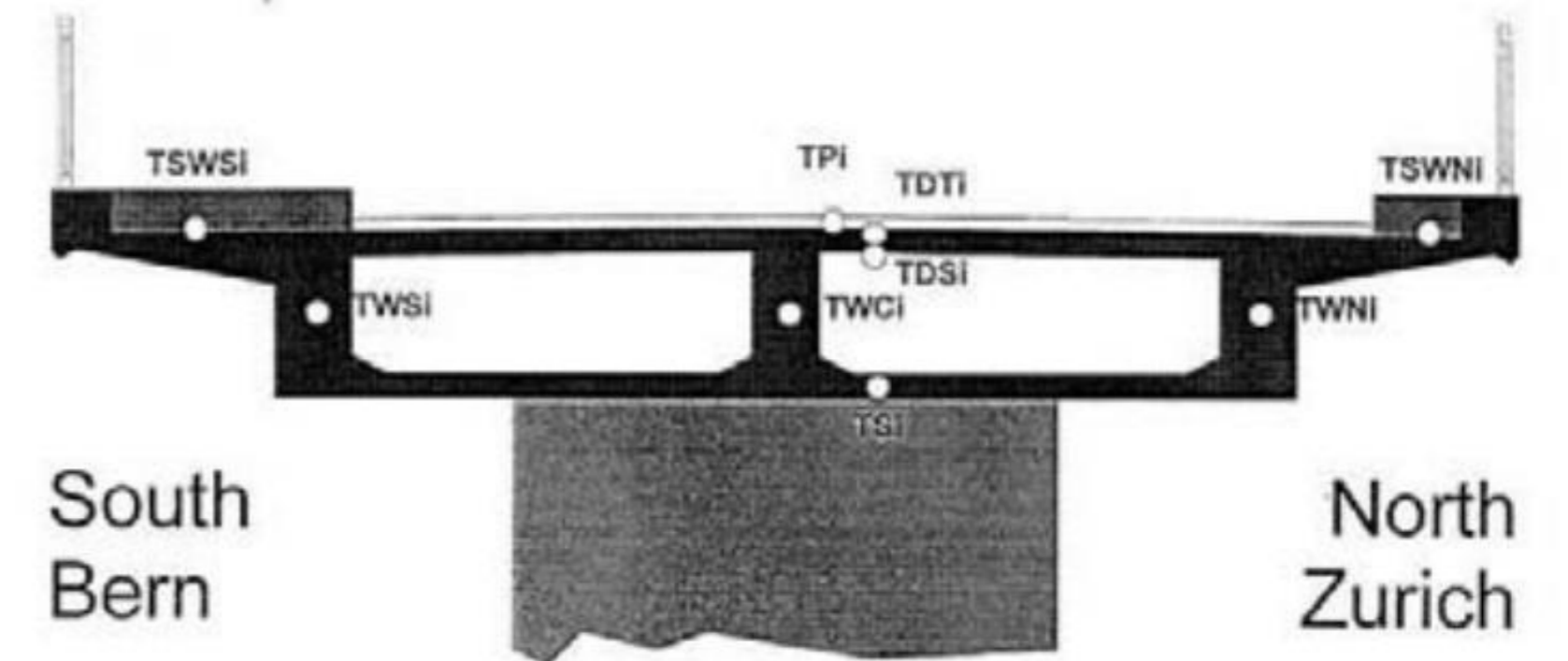


Motivation – Z-24 bridge (Switzerland)

# Motivación

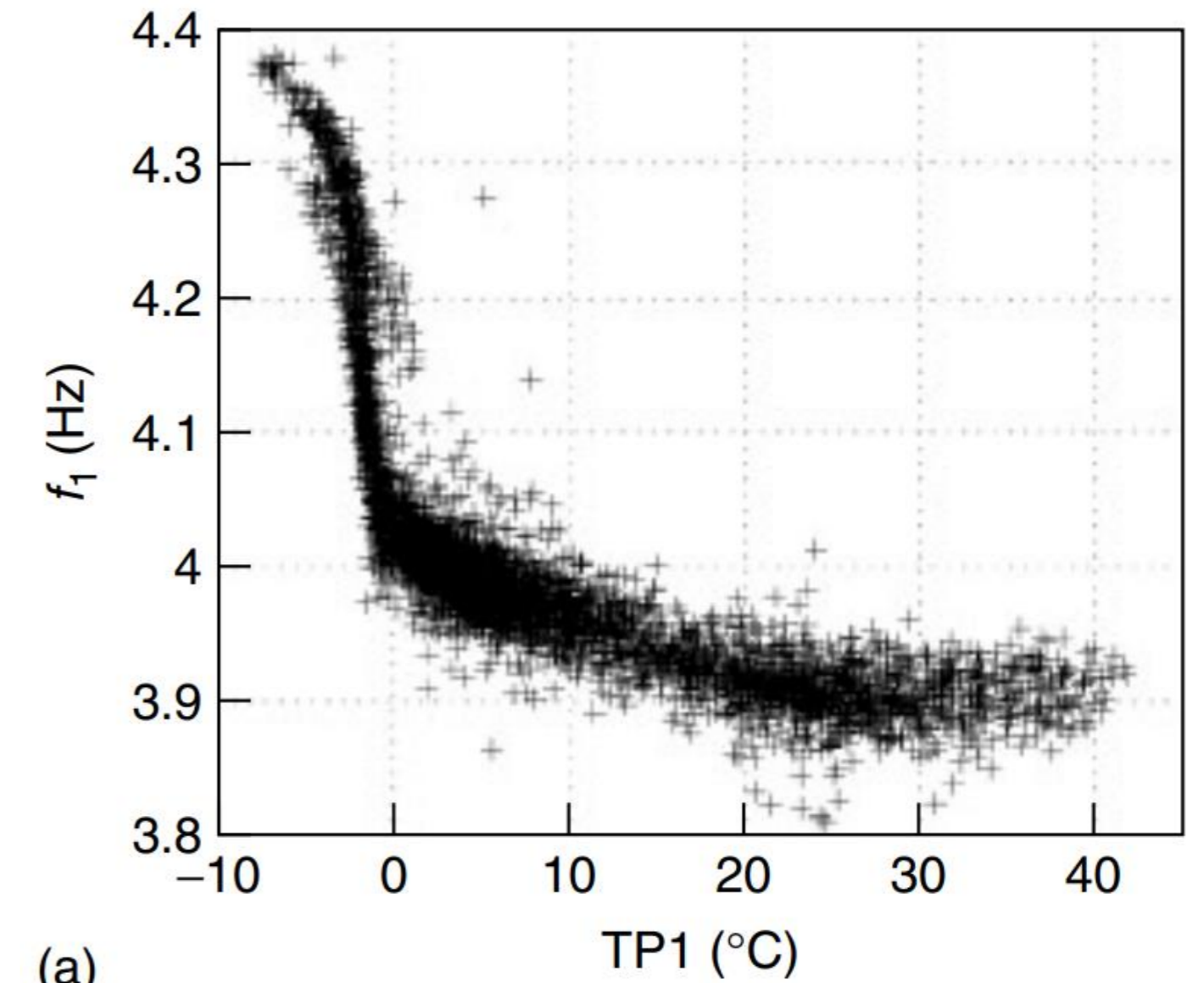
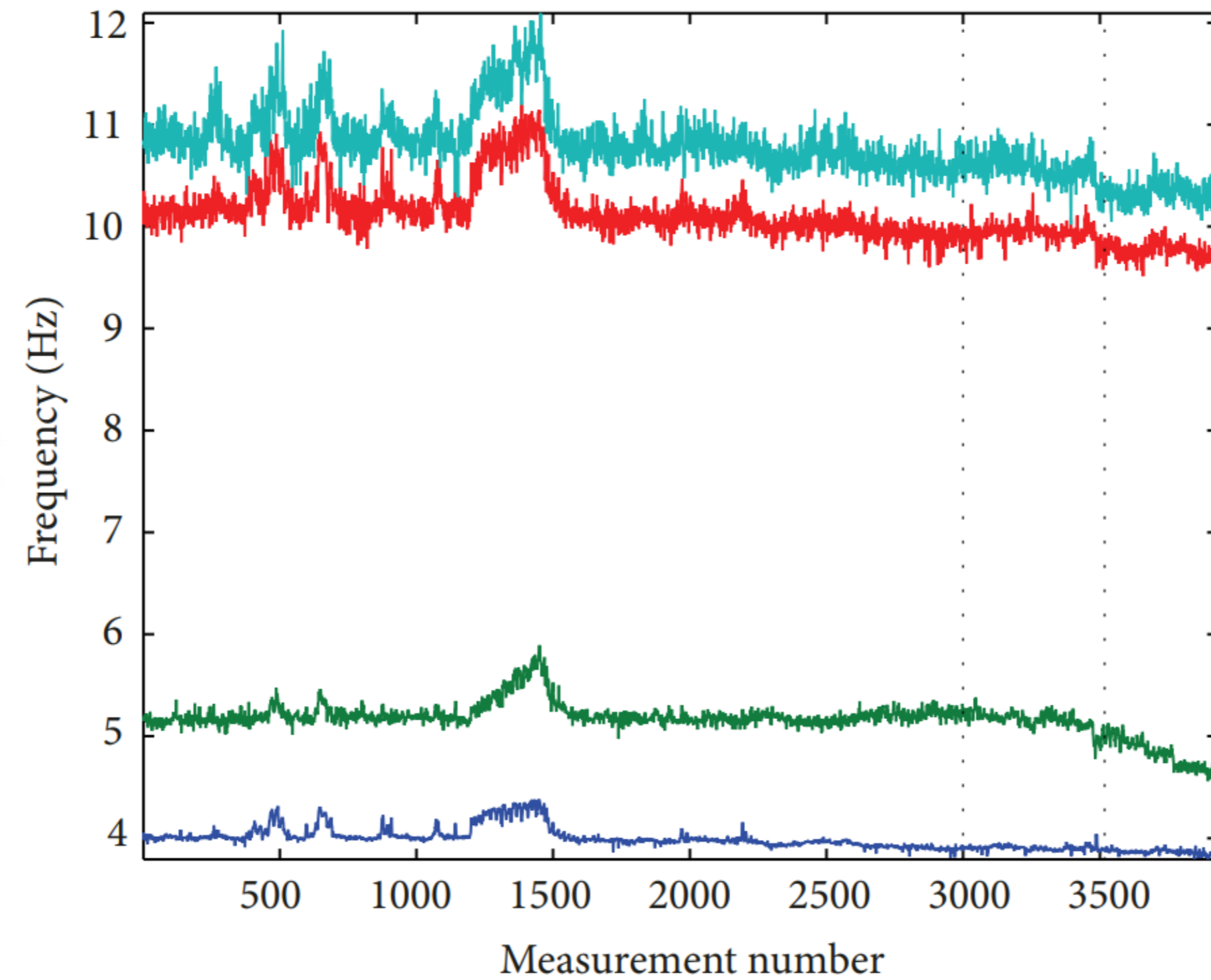
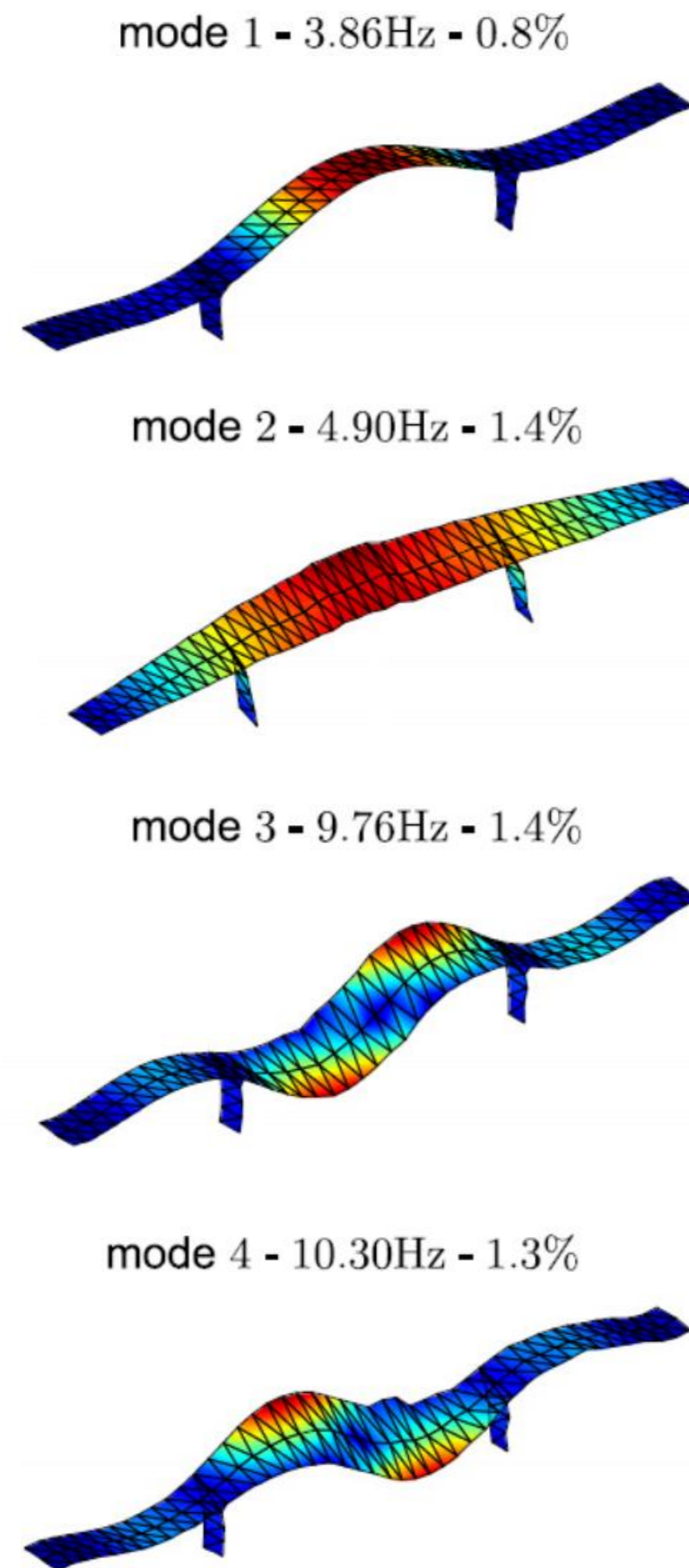


(a) position and direction of accelerometers

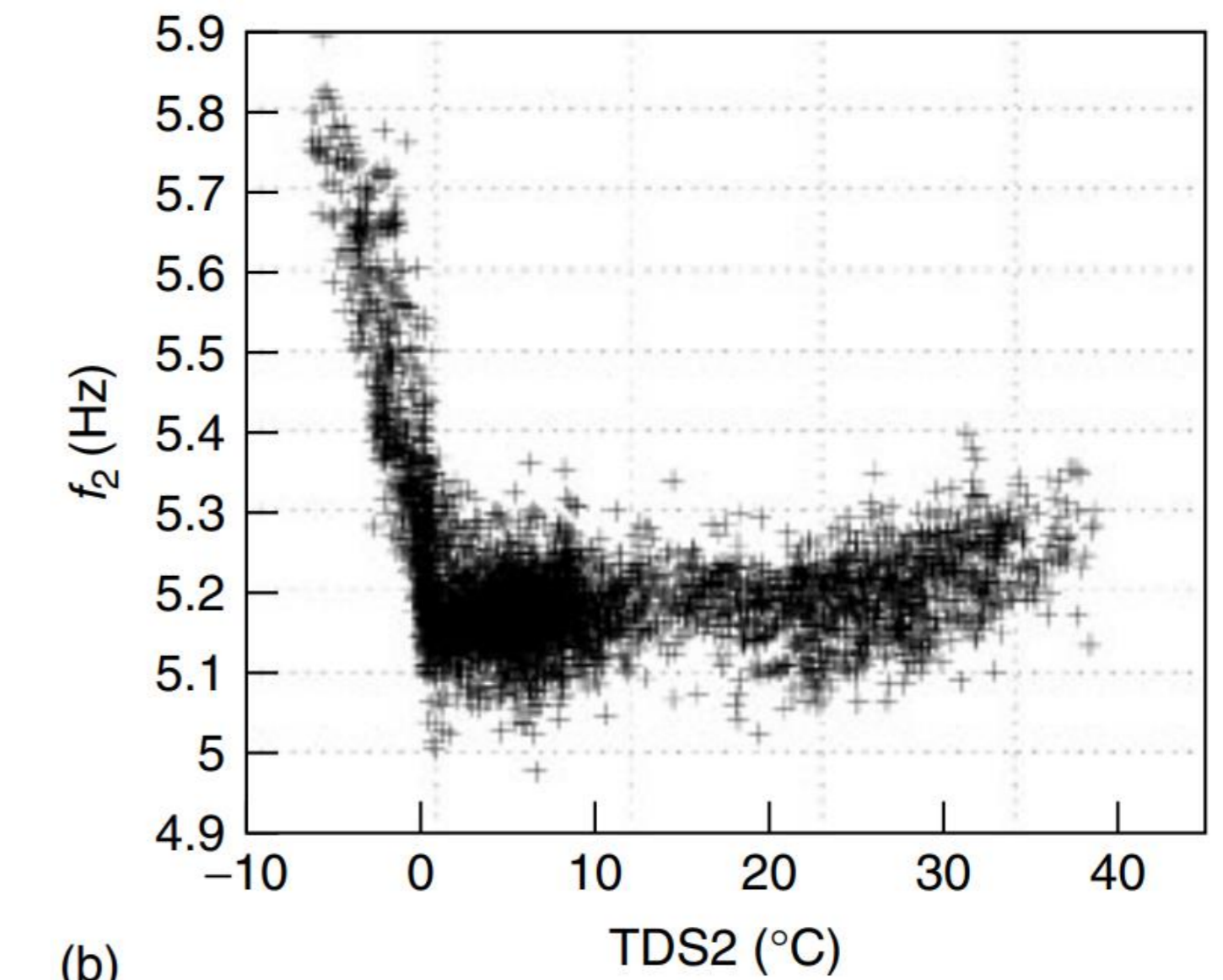


(b) position of temperature sensors

# Motivación



(a)

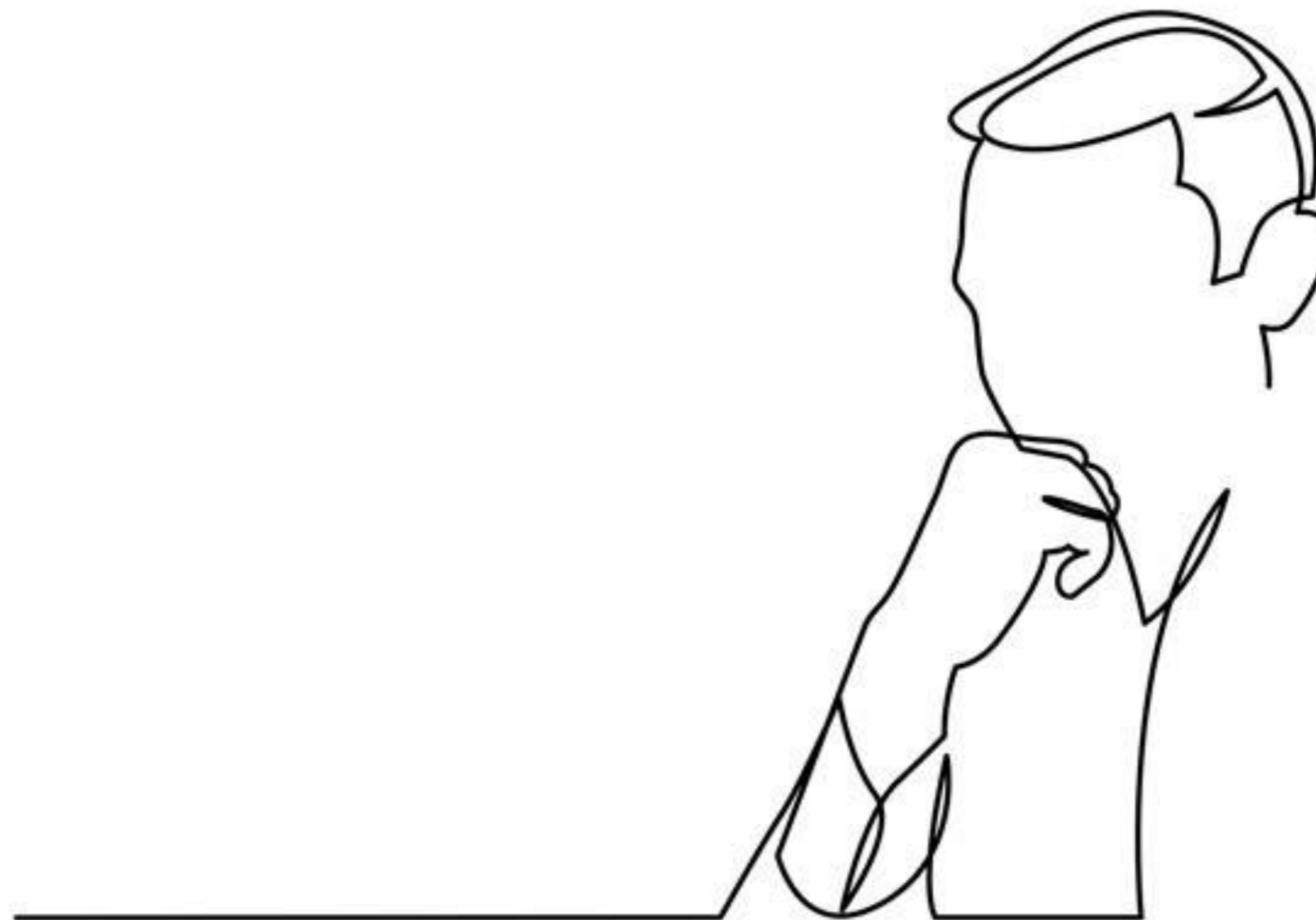


(b)



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

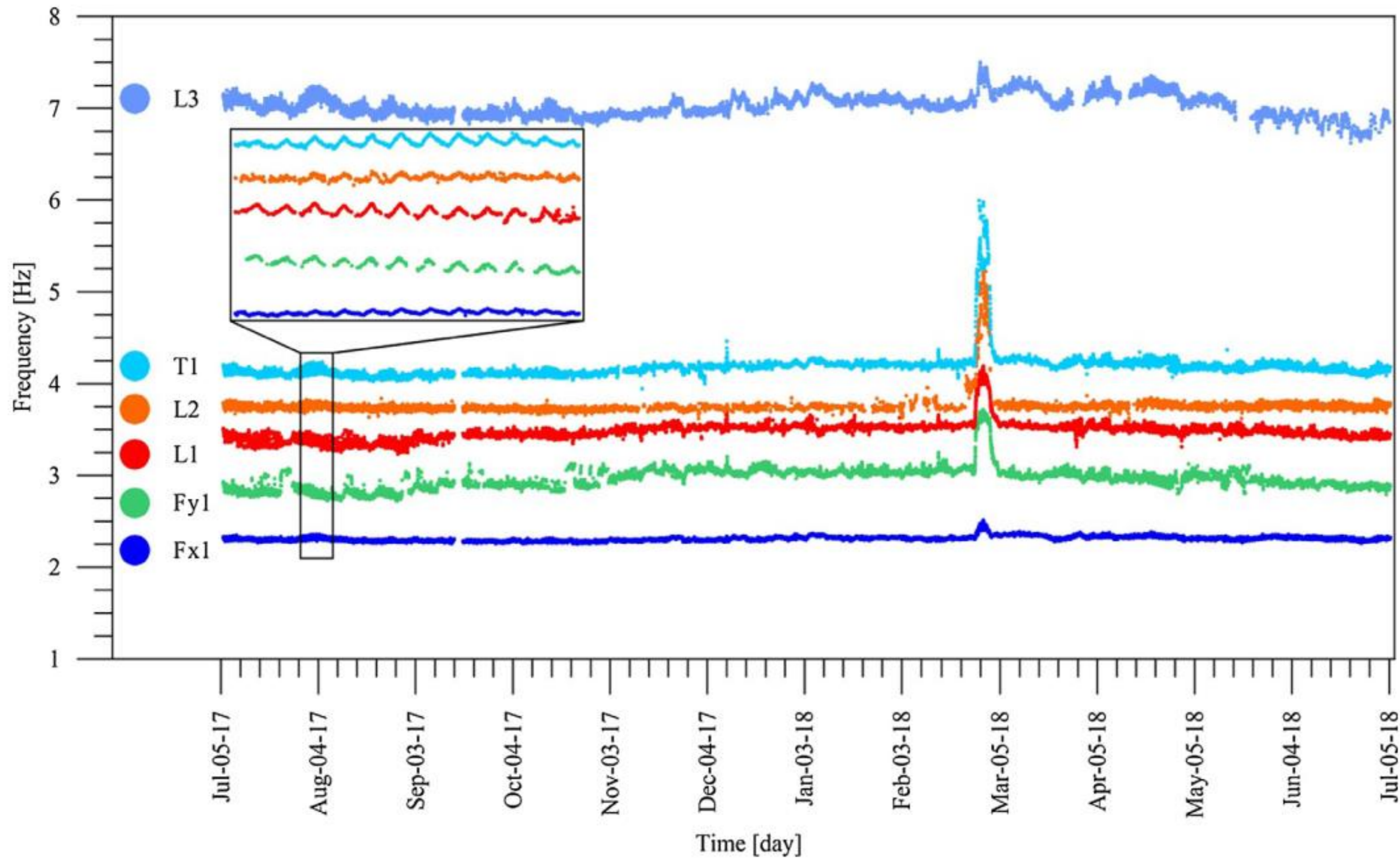
Is it safe?





# Motivación

## Masking effect of environmental factors



Environmental factors (e.g. temperature, humidity, traffic, wind, ...,etc) mask the effects of early-stage damage. To have a proper damage sensitive features, we typically need to filter out environmental effects, that is, perform **pattern recognition**.



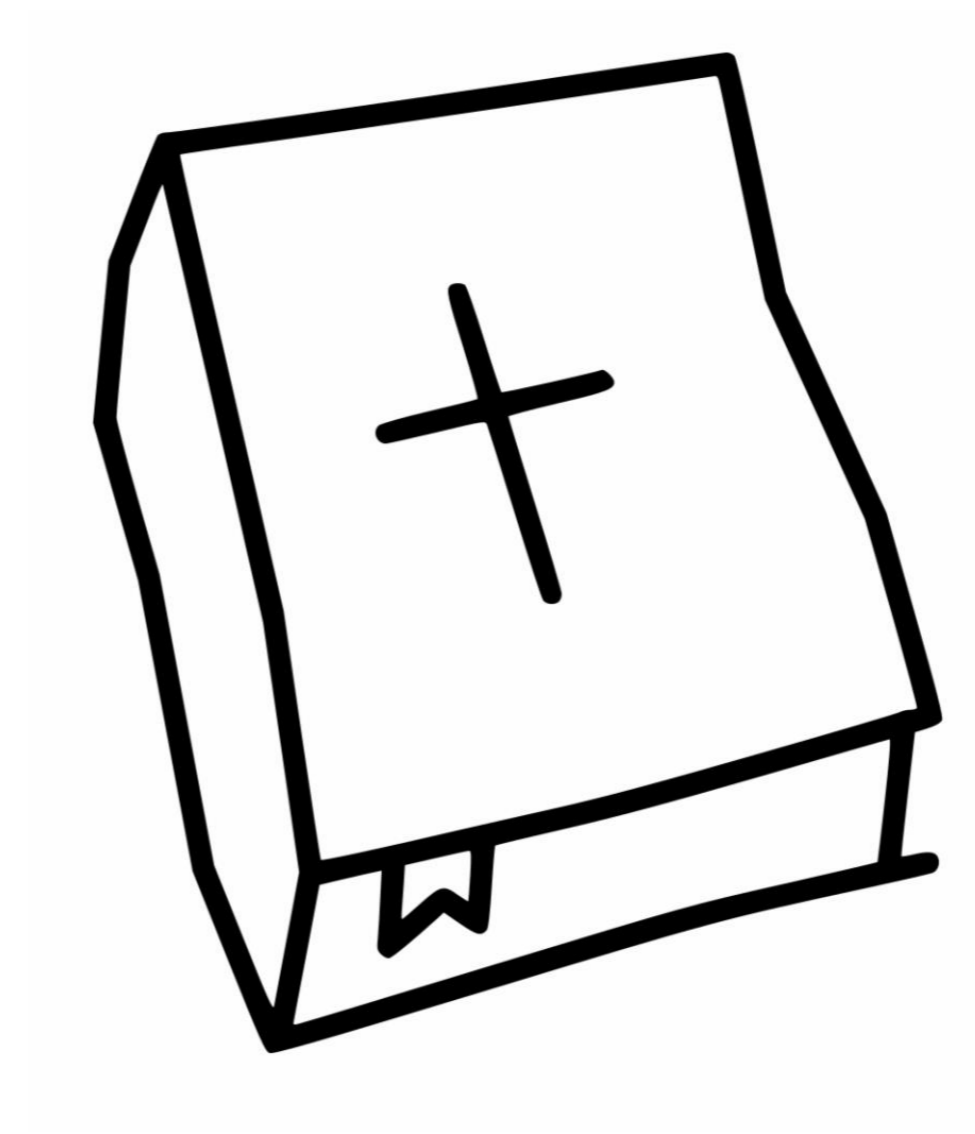


SHM como problema de statistical pattern recognition.



# SHM como problema de statistical pattern recognition

## Axioms of SHM



## Axiomas del SHM

- All materials have inherent flaws and defects
- The assessment of damage requires a comparison between two system states
- Identifying the existence and location of damage can be done in an unsupervised learning mode, but identifying the type of damage present and the damage severity can generally only be done in a supervised learning mode.
- Sensors cannot measure damage. Feature extraction through signal processing and statistical classification is necessary to convert sensor data into damage information.
- Without intelligent feature extraction, the more sensitive a measurement is to damage, the more sensitive it is to changing operational and environmental conditions.
- The length- and time-scales associated with damage initiation and evolution dictate the required properties of the SHM sensing system.
- There is a trade-off between the sensitivity to damage of an algorithm and its noise rejection capability.
- The size of damage that can be detected from changes in system dynamics is inversely proportional to the frequency range of the excitation.



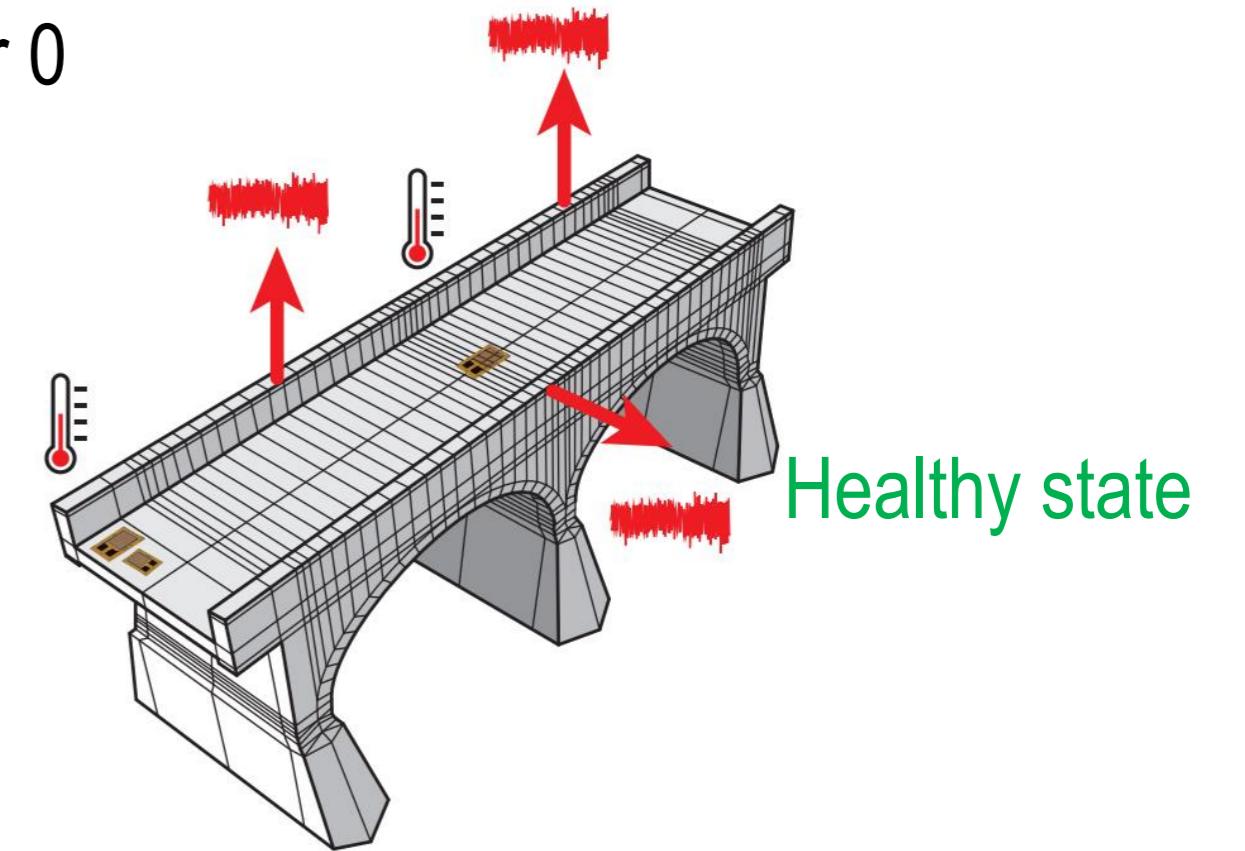
Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G., & Park, G. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2082), 1639-1664.

## Axiomas del SHM

- All materials have inherent flaws and defects
- **The assessment of damage requires a comparison between two system states**
- Identifying the existence and location of damage can be done in an unsupervised learning mode, but identifying the type of damage present and the damage severity can generally only be done in a supervised learning mode.
- Sensors cannot measure damage. Feature extraction through signal processing and statistical classification is necessary to convert sensor data into damage information.
- Without intelligent feature extraction, the more sensitive a measurement is to damage, the more sensitive it is to changing operational and environmental conditions.
- The length- and time-scales associated with damage initiation and evolution dictate the required properties of the SHM sensing system.
- There is a trade-off between the sensitivity to damage of an algorithm and its noise rejection capability.
- The size of damage that can be detected from changes in system dynamics is inversely proportional to the frequency range of the excitation.

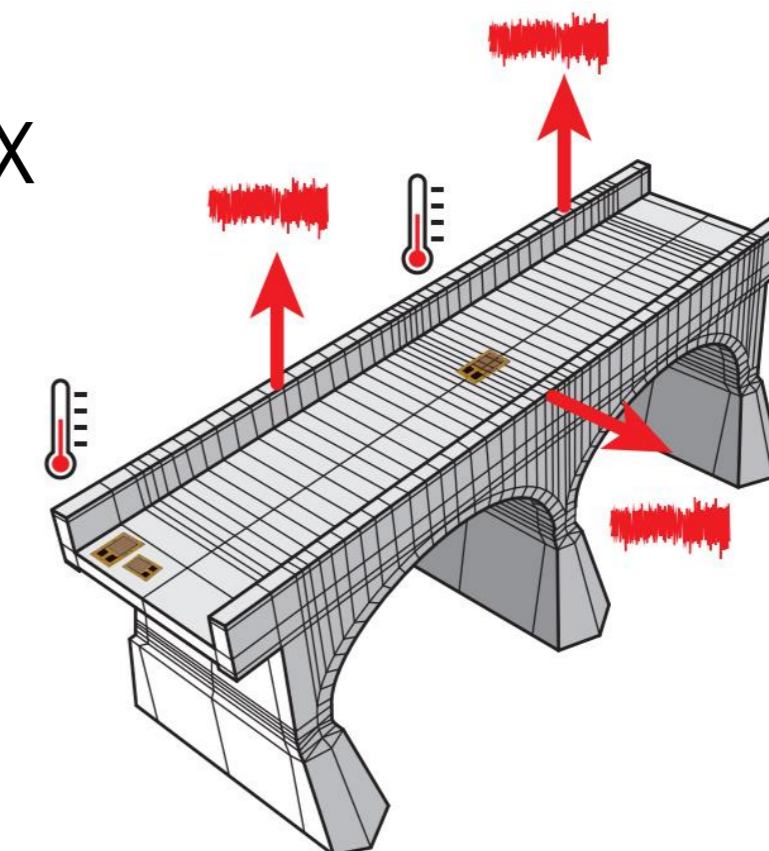
### Reference or baseline state

Year 0



### Current condition

Year X

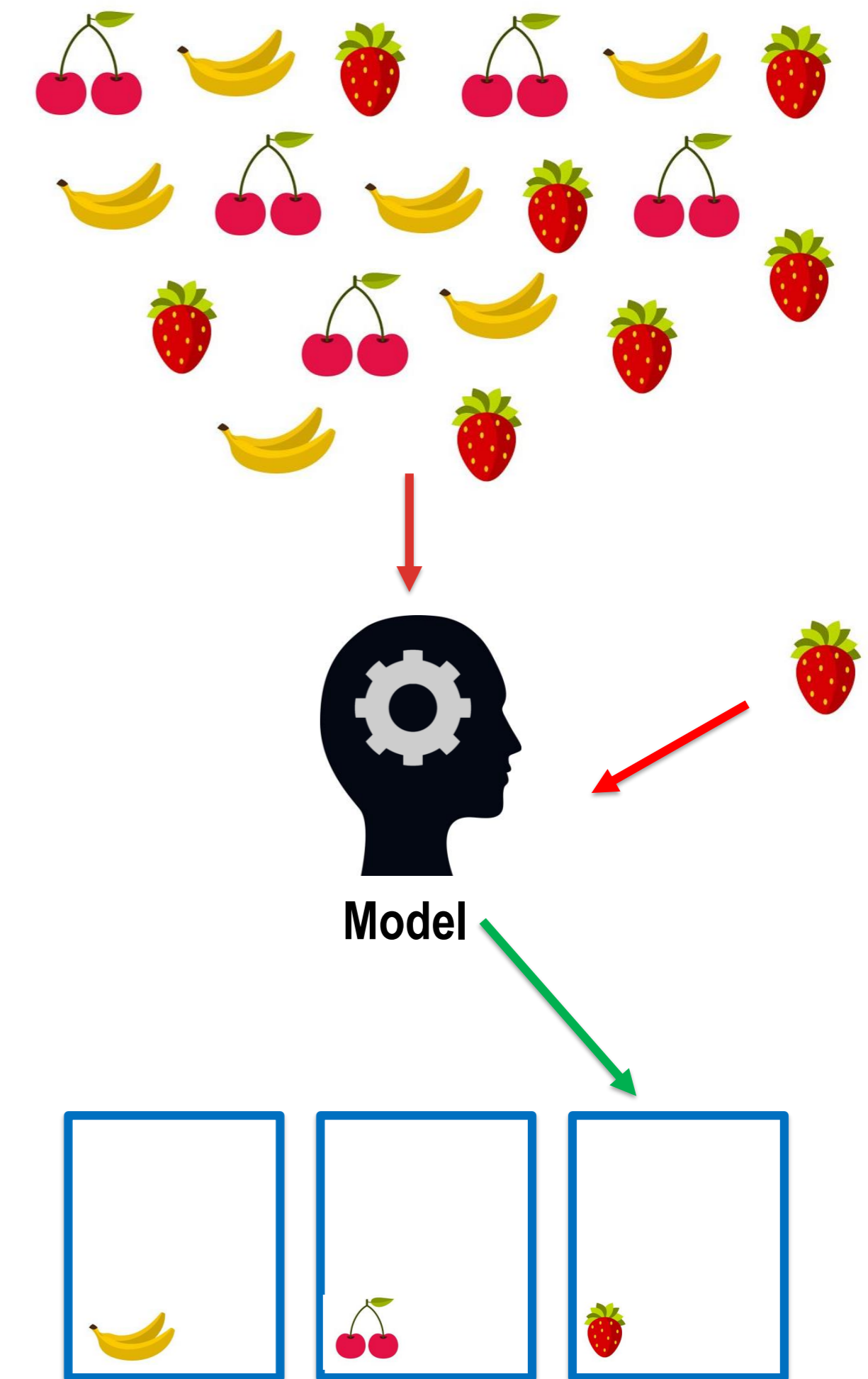


Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G., & Park, G. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 463(2082), 1639-1664.



## Axiomas del SHM

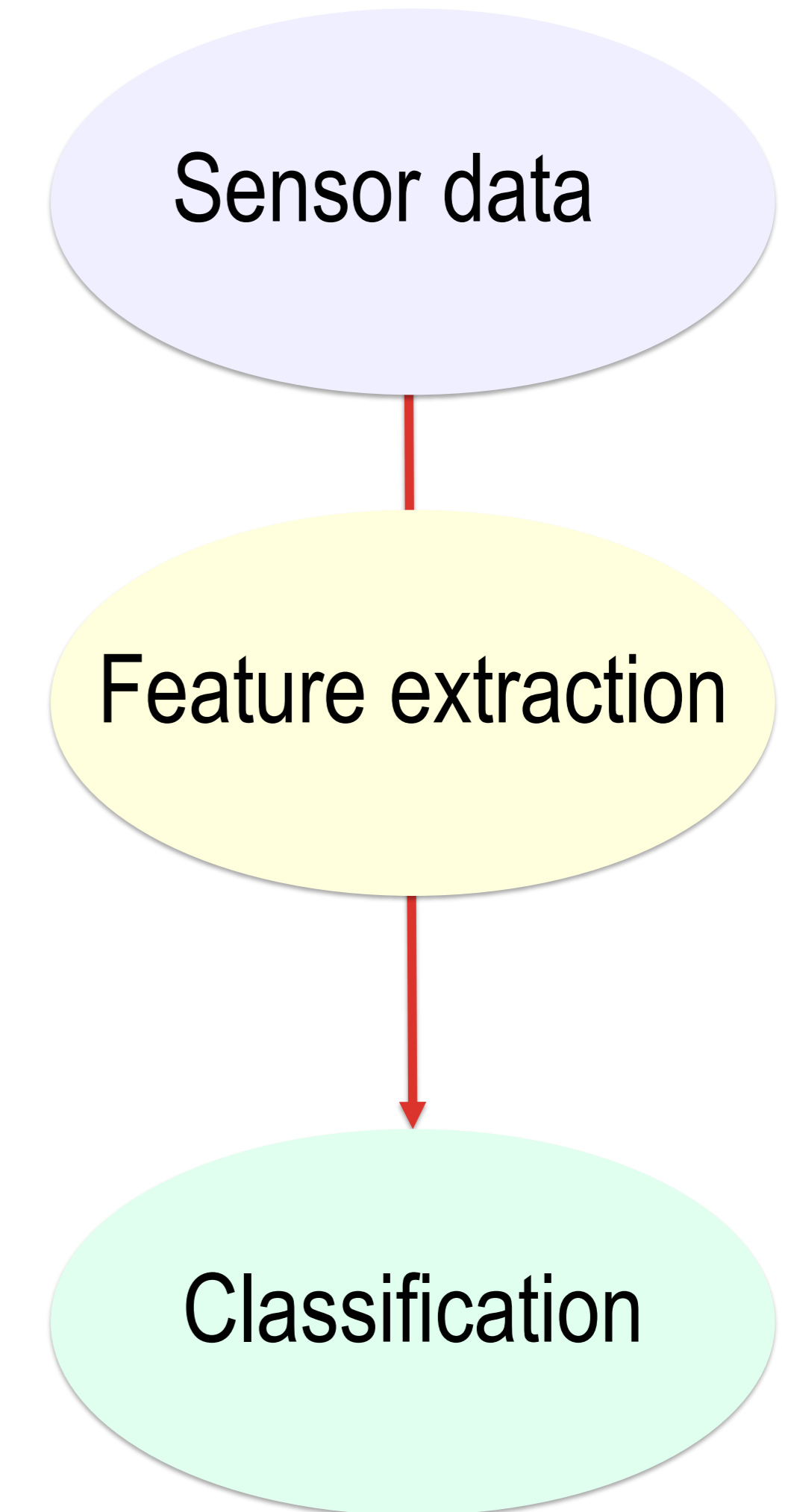
- All materials have inherent flaws and defects
- The assessment of damage requires a comparison between two system states
- Identifying the existence and location of damage can be done in an unsupervised learning mode, but identifying the type of damage present and the damage severity can generally only be done in a supervised learning mode.
- Sensors cannot measure damage. Feature extraction through signal processing and statistical classification is necessary to convert sensor data into damage information.
- Without intelligent feature extraction, the more sensitive a measurement is to damage, the more sensitive it is to changing operational and environmental conditions.
- The length- and time-scales associated with damage initiation and evolution dictate the required properties of the SHM sensing system.
- There is a trade-off between the sensitivity to damage of an algorithm and its noise rejection capability.
- The size of damage that can be detected from changes in system dynamics is inversely proportional to the frequency range of the excitation.



Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G., & Park, G. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2082), 1639-1664.

## Axiomas del SHM

- All materials have inherent flaws and defects
- The assessment of damage requires a comparison between two system states
- Identifying the existence and location of damage can be done in an unsupervised learning mode, but identifying the type of damage present and the damage severity can generally only be done in a supervised learning mode.
- **Sensors cannot measure damage. Feature extraction through signal processing and statistical classification is necessary to convert sensor data into damage information.**
- Without intelligent feature extraction, the more sensitive a measurement is to damage, the more sensitive it is to changing operational and environmental conditions.
- The length- and time-scales associated with damage initiation and evolution dictate the required properties of the SHM sensing system.
- There is a trade-off between the sensitivity to damage of an algorithm and its noise rejection capability.
- The size of damage that can be detected from changes in system dynamics is inversely proportional to the frequency range of the excitation.



Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G., & Park, G. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 463(2082), 1639-1664.



## Axiomas del SHM

- All materials have inherent flaws and defects
- The assessment of damage requires a comparison between two system states
- Identifying the existence and location of damage can be done in an unsupervised learning mode, but identifying the type of damage present and the damage severity can generally only be done in a supervised learning mode.
- Sensors cannot measure damage. Feature extraction through signal processing and statistical classification is necessary to convert sensor data into damage information.
- Without intelligent feature extraction, the more sensitive a measurement is to damage, the more sensitive it is to changing operational and environmental conditions.
- The length- and time-scales associated with damage initiation and evolution dictate the required properties of the SHM sensing system.
- There is a trade-off between the sensitivity to damage of an algorithm and its noise rejection capability.
- The size of damage that can be detected from changes in system dynamics is inversely proportional to the frequency range of the excitation.

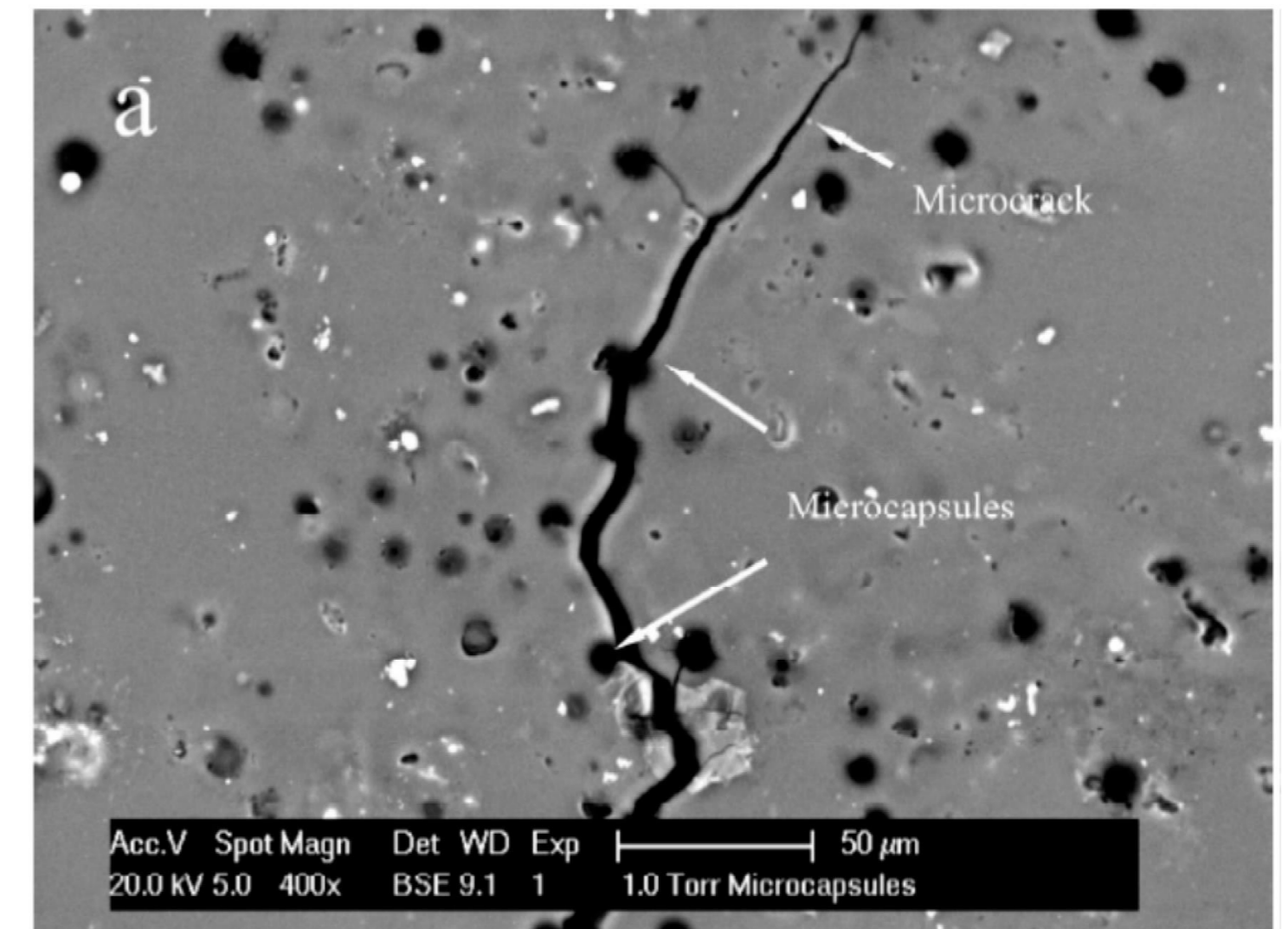
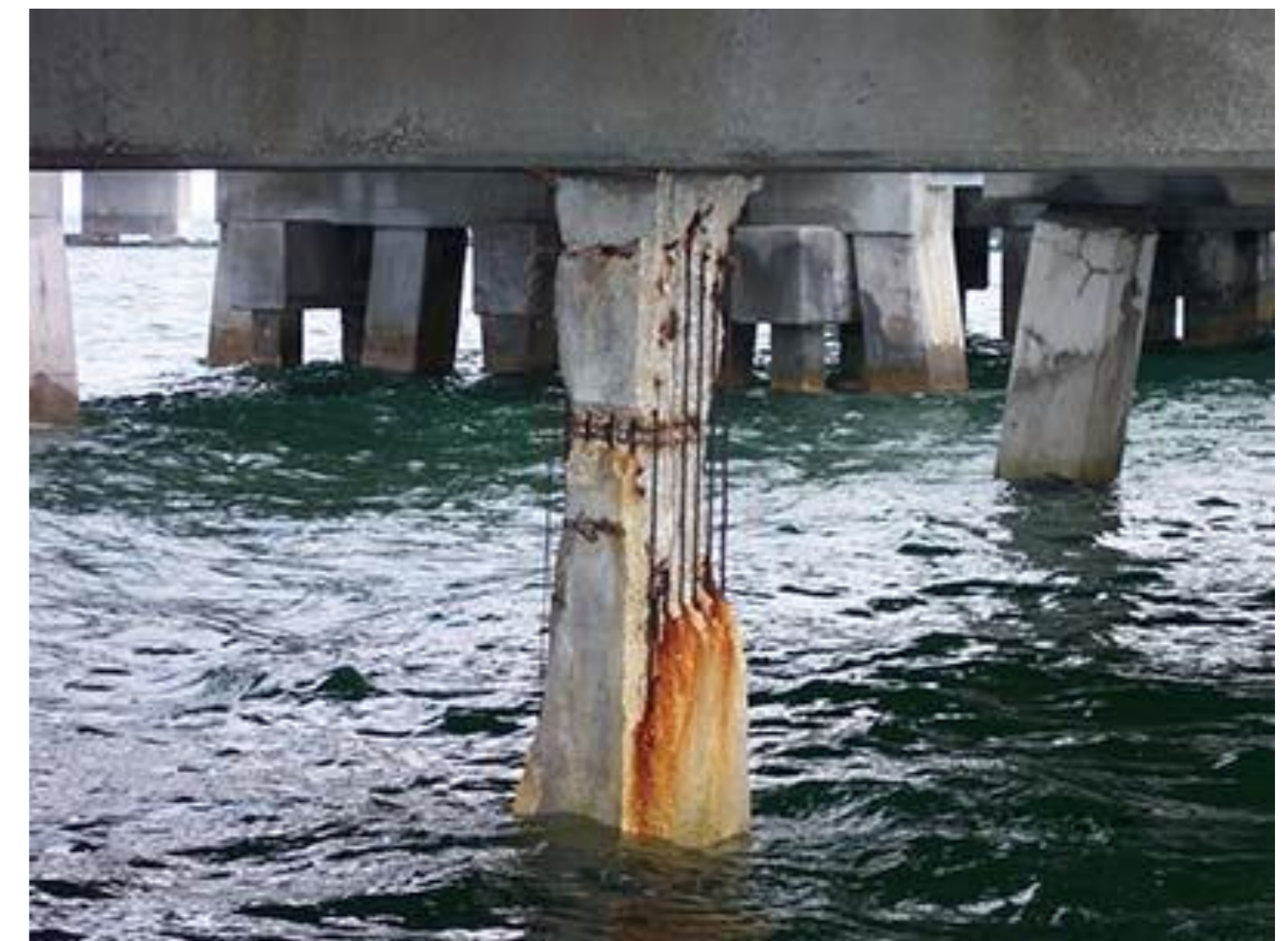
Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G., & Park, G. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2082), 1639-1664.





## Axiomas del SHM

- All materials have inherent flaws and defects
- The assessment of damage requires a comparison between two system states
- Identifying the existence and location of damage can be done in an unsupervised learning mode, but identifying the type of damage present and the damage severity can generally only be done in a supervised learning mode.
- Sensors cannot measure damage. Feature extraction through signal processing and statistical classification is necessary to convert sensor data into damage information.
- Without intelligent feature extraction, the more sensitive a measurement is to damage, the more sensitive it is to changing operational and environmental conditions.
- **The length- and time-scales associated with damage initiation and evolution dictate the required properties of the SHM sensing system.**
- There is a trade-off between the sensitivity to damage of an algorithm and its noise rejection capability.
- The size of damage that can be detected from changes in system dynamics is inversely proportional to the frequency range of the excitation.



Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G., & Park, G. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2082), 1639-1664.



## Axiomas del SHM

- All materials have inherent flaws and defects
- The assessment of damage requires a comparison between two system states
- Identifying the existence and location of damage can be done in an unsupervised learning mode, but identifying the type of damage present and the damage severity can generally only be done in a supervised learning mode.
- Sensors cannot measure damage. Feature extraction through signal processing and statistical classification is necessary to convert sensor data into damage information.
- Without intelligent feature extraction, the more sensitive a measurement is to damage, the more sensitive it is to changing operational and environmental conditions.
- The length- and time-scales associated with damage initiation and evolution dictate the required properties of the SHM sensing system.
- There is a trade-off between the sensitivity to damage of an algorithm and its noise rejection capability.
- The size of damage that can be detected from changes in system dynamics is inversely proportional to the frequency range of the excitation.

Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G., & Park, G. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2082), 1639-1664.



## Axiomas del SHM

- All materials have inherent flaws and defects
- The assessment of damage requires a comparison between two system states
- Identifying the existence and location of damage can be done in an unsupervised learning mode, but identifying the type of damage present and the damage severity can generally only be done in a supervised learning mode.
- Sensors cannot measure damage. Feature extraction through signal processing and statistical classification is necessary to convert sensor data into damage information.
- Without intelligent feature extraction, the more sensitive a measurement is to damage, the more sensitive it is to changing operational and environmental conditions.
- The length- and time-scales associated with damage initiation and evolution dictate the required properties of the SHM sensing system.
- There is a trade-off between the sensitivity to damage of an algorithm and its noise rejection capability.
- The size of damage that can be detected from changes in system dynamics is inversely proportional to the frequency range of the excitation.

Worden, K., Farrar, C. R., Manson, G., & Park, G. (2007). The fundamental axioms of structural health monitoring. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 463(2082), 1639-1664.

## Signal Processing (SP) – A fundamental challenge in SHM...

- **Model-Based SP**

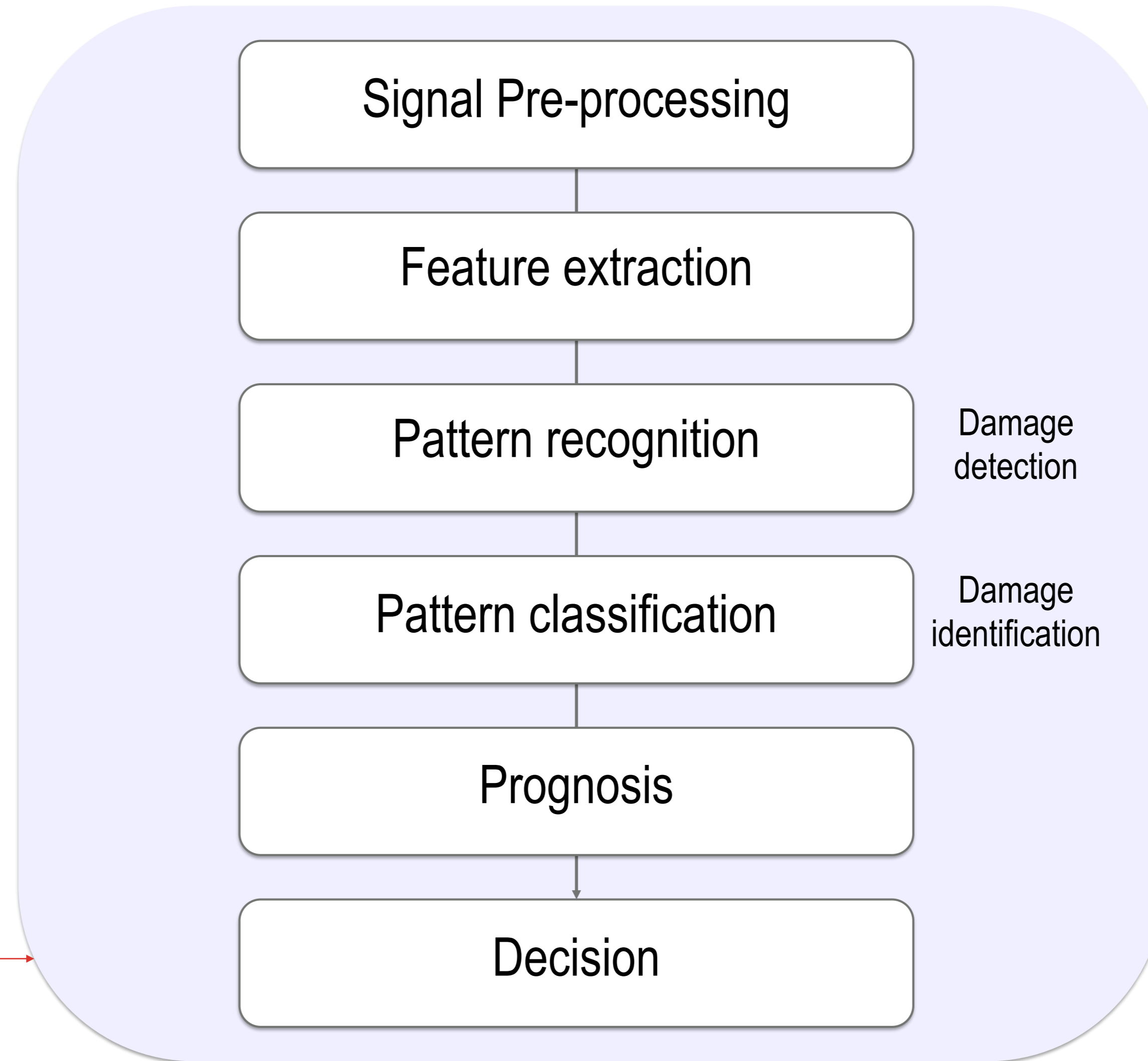
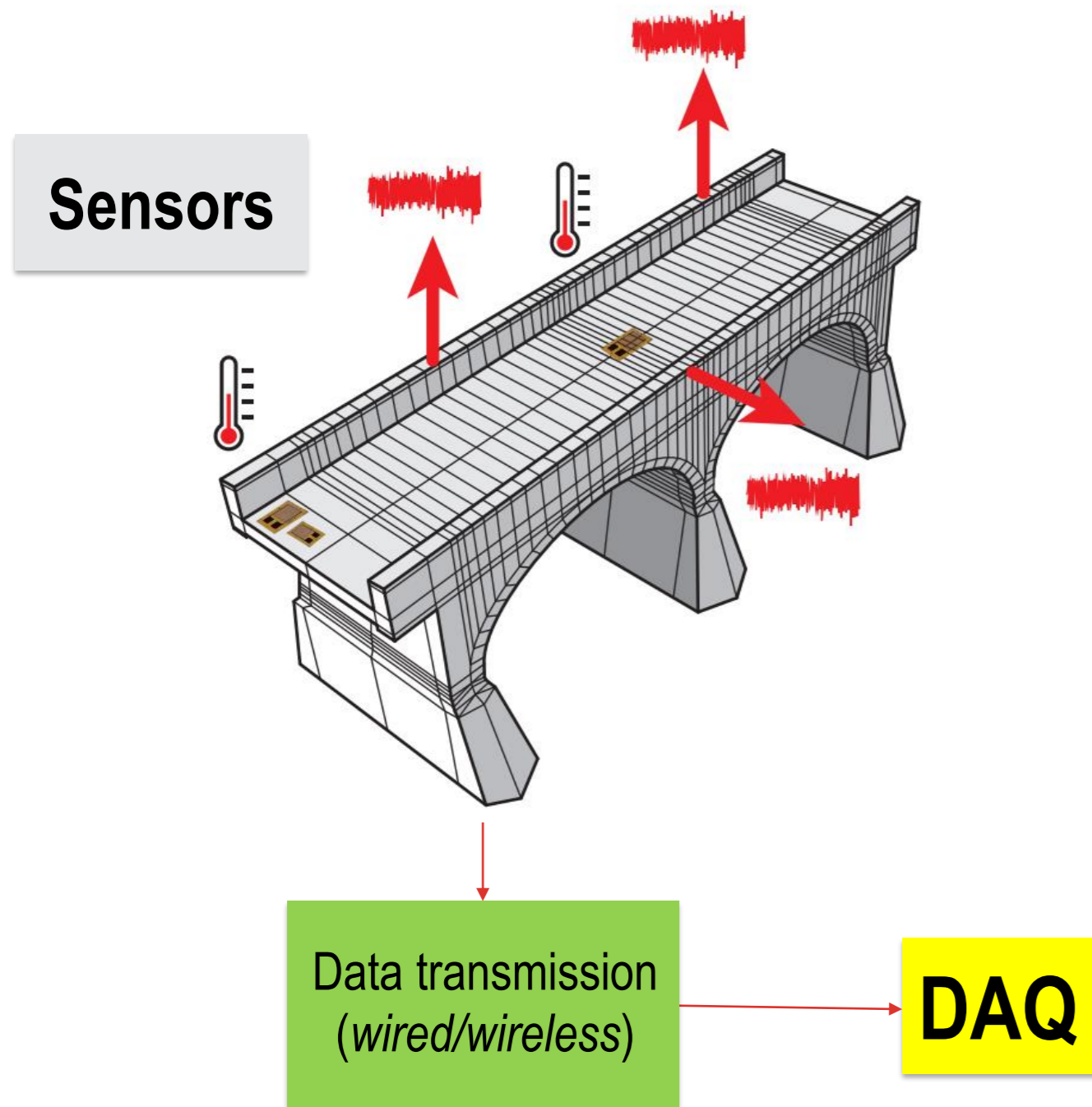
Compara las respuestas físicas con las respuestas del modelo (requiere un modelo o representación precisos)

- **Data-Based SP**

Compara datos temporal y espacialmente, a menudo utilizando algoritmos de aprendizaje automático (redes neuronales, máquinas de vectores de soporte, etc.)

# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

Monitored physical phenomenon

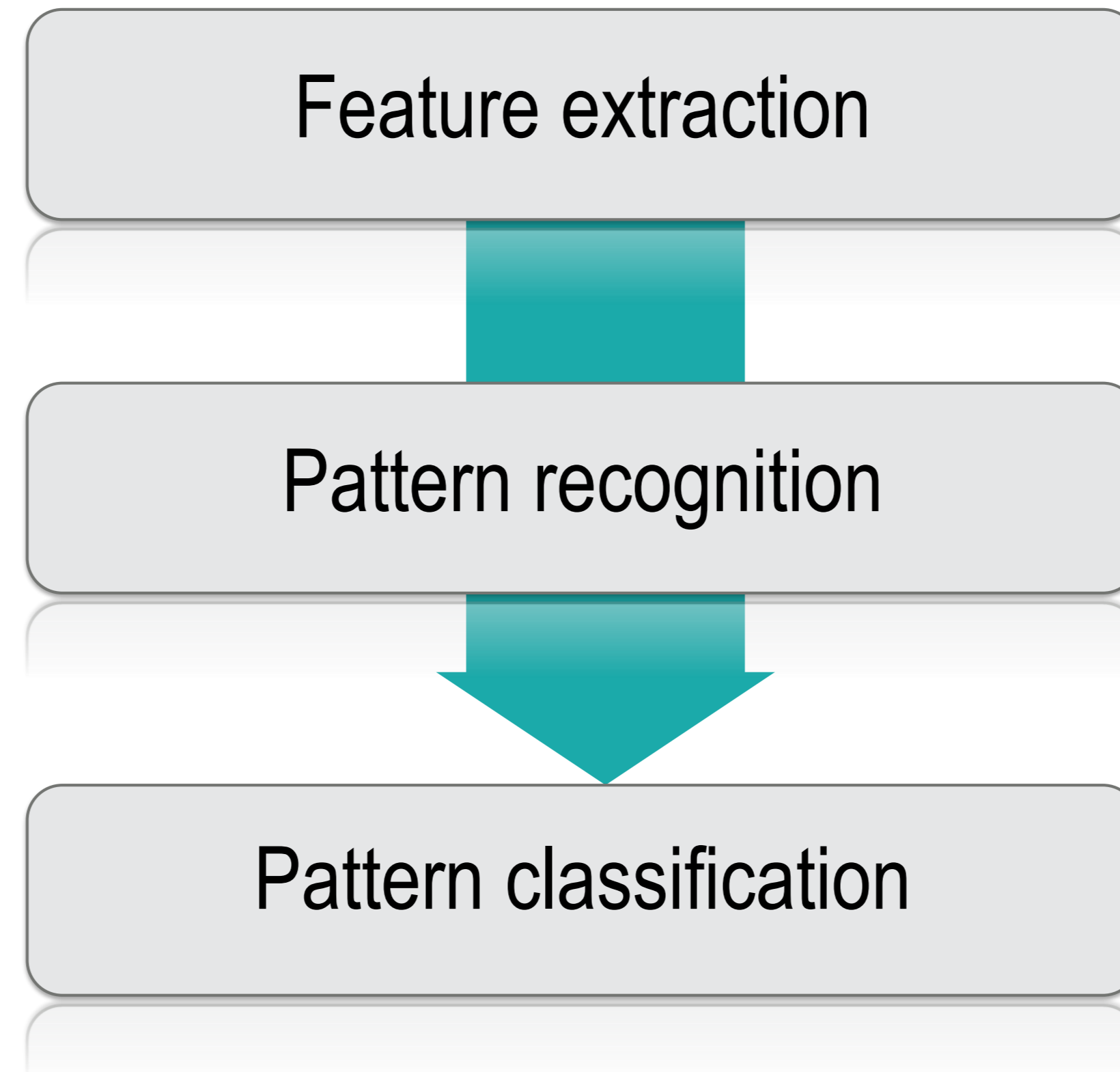




Detección de daños a través del paradigma del SHM como un problema de statistical pattern recognition.



# Detección de daños a través del paradigma del SHM como un problema de statistical pattern recognition





# Feature extraction

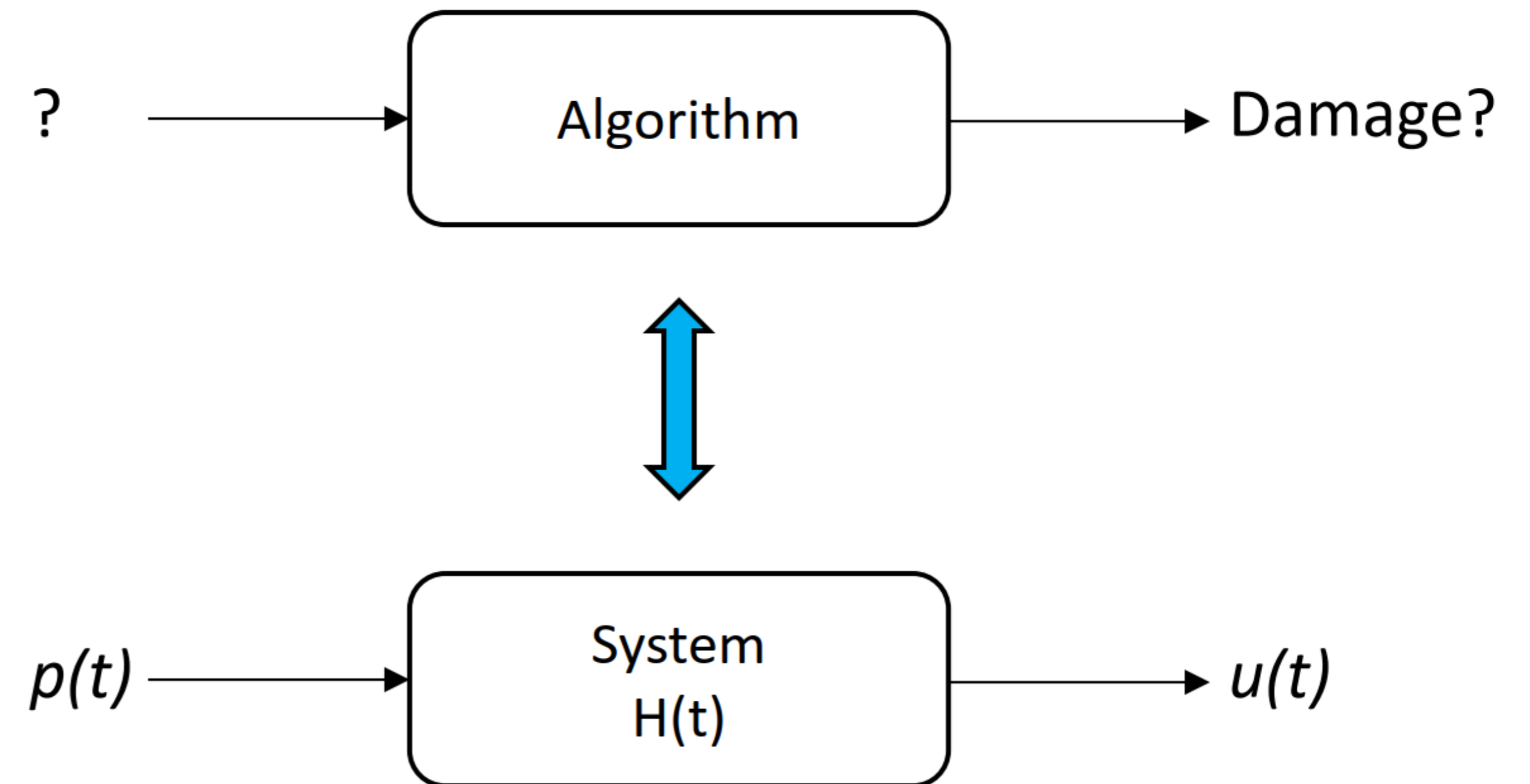




# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

Feature extraction

En SHM, una característica de la señal que podemos estudiar para identificar daños (damage-sensitive feature)

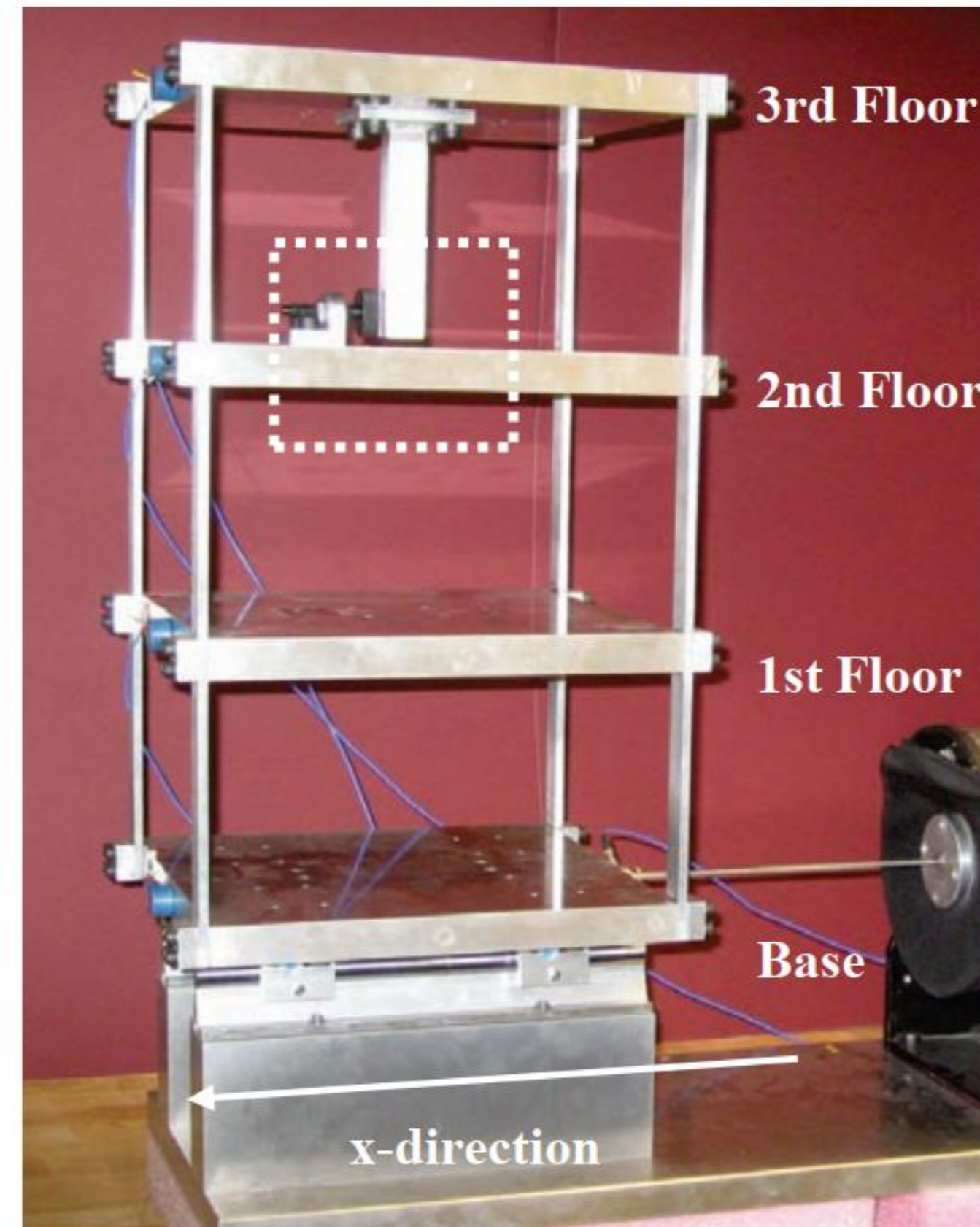


# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

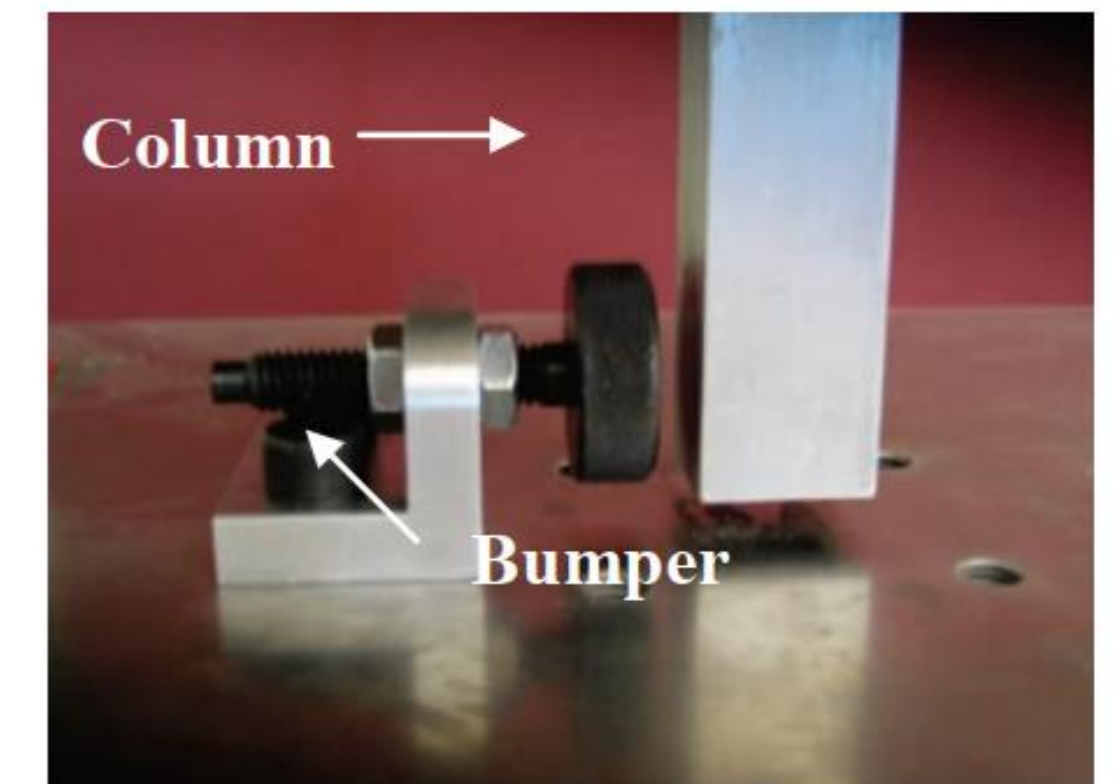
Feature extraction

Las features pueden ser muy variadas:

- Probabilistic-based
- Time domain-based
- Frequency domain-based
- Time-frequency domain-based



(a) Three-story building structure and shaker



(b) The adjustable bumper and the suspended column





# Pattern Recognition



# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

Pattern recognition

## How face recognition works?

Initial Training Samples



Feature Extraction

ROLS based RBF  
Neural Network

Output

Updated Training Samples



New Class Training Samples



Feature Extraction

Incremental ROLS based  
RBF Neural Network

Output



# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

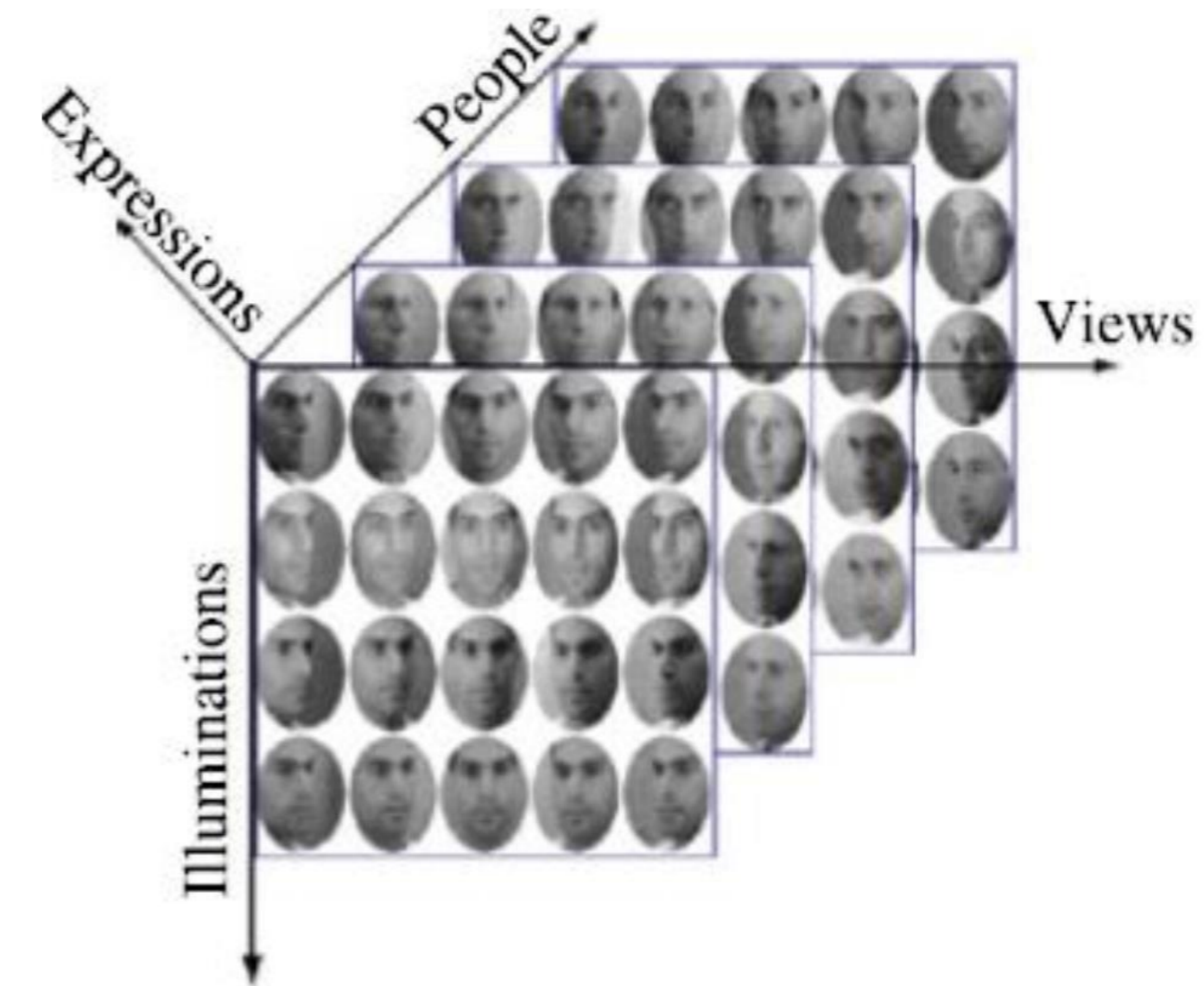
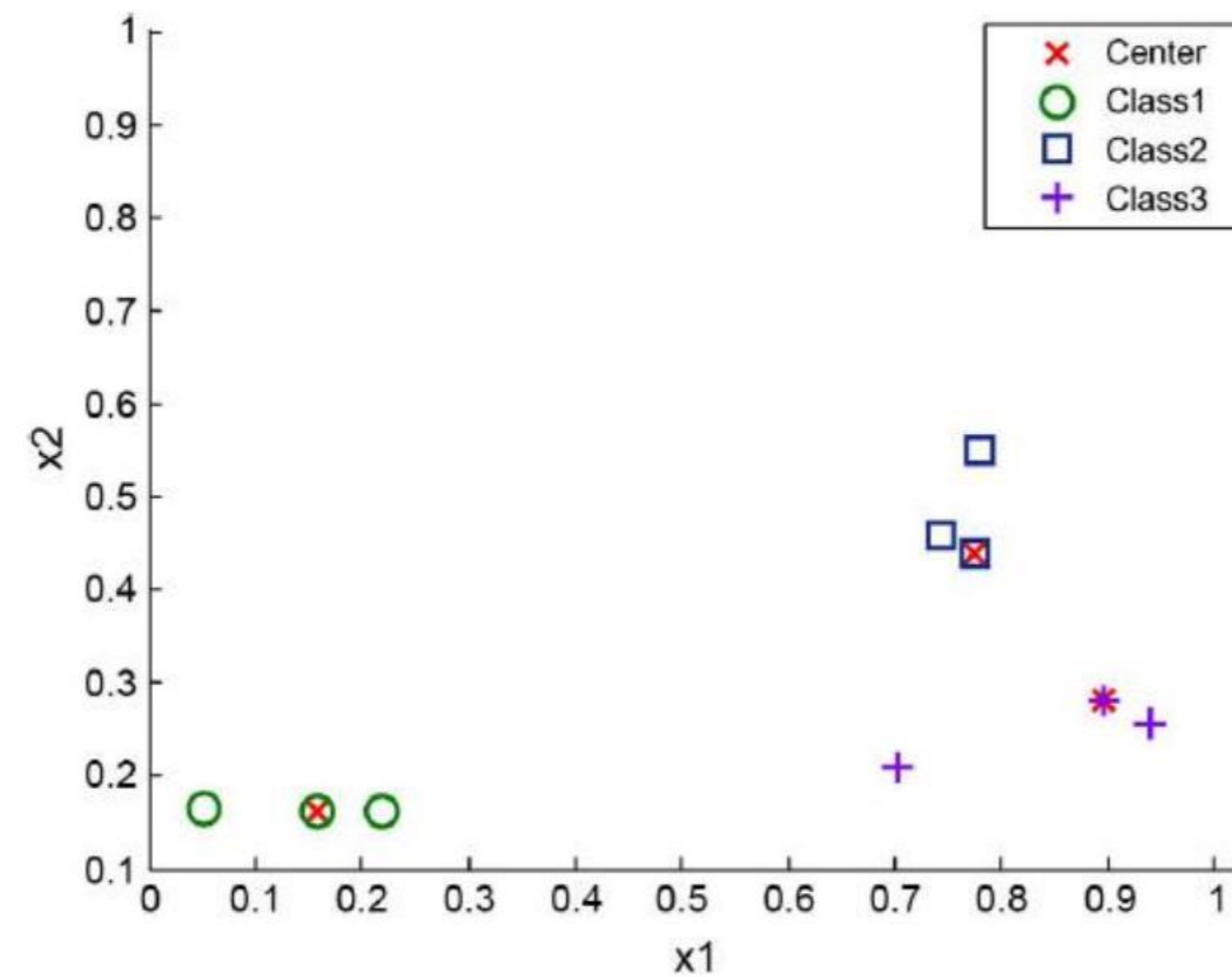
Pattern recognition

Shakhnarovich, G., & Moghaddam, B., *Face Recognition in Subspaces*, Handbook of Face Recognition, Springer London, Chapt. 2, 2011.

Eigenfaces



Tensorfaces



UNIVERSIDAD DE GRANADA

# Introducción al paradigma del mantenimiento de la salud estructural

## Pattern recognition

Shakhnarovich, G., & Moghaddam, B., *Face Recognition in Subspaces*, Handbook of Face Recognition, Springer London, Chapt. 2, 2011.



## Data normalization: Taller Parte 1

Pattern recognition

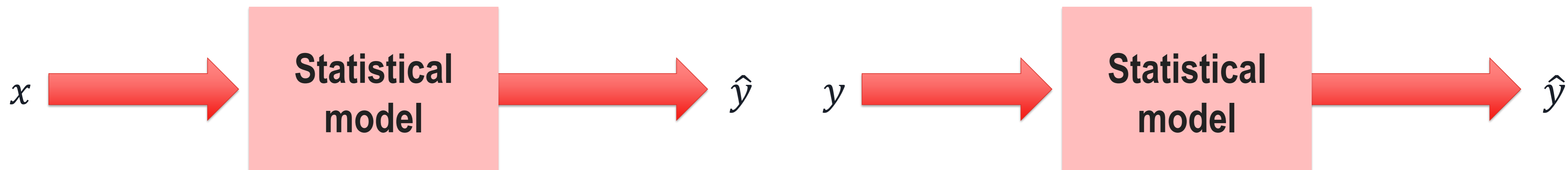
### Data normalization: Eliminación de efectos ambientales

Input-Output models

- Multiple Linear Regression (MLR)

Output only models

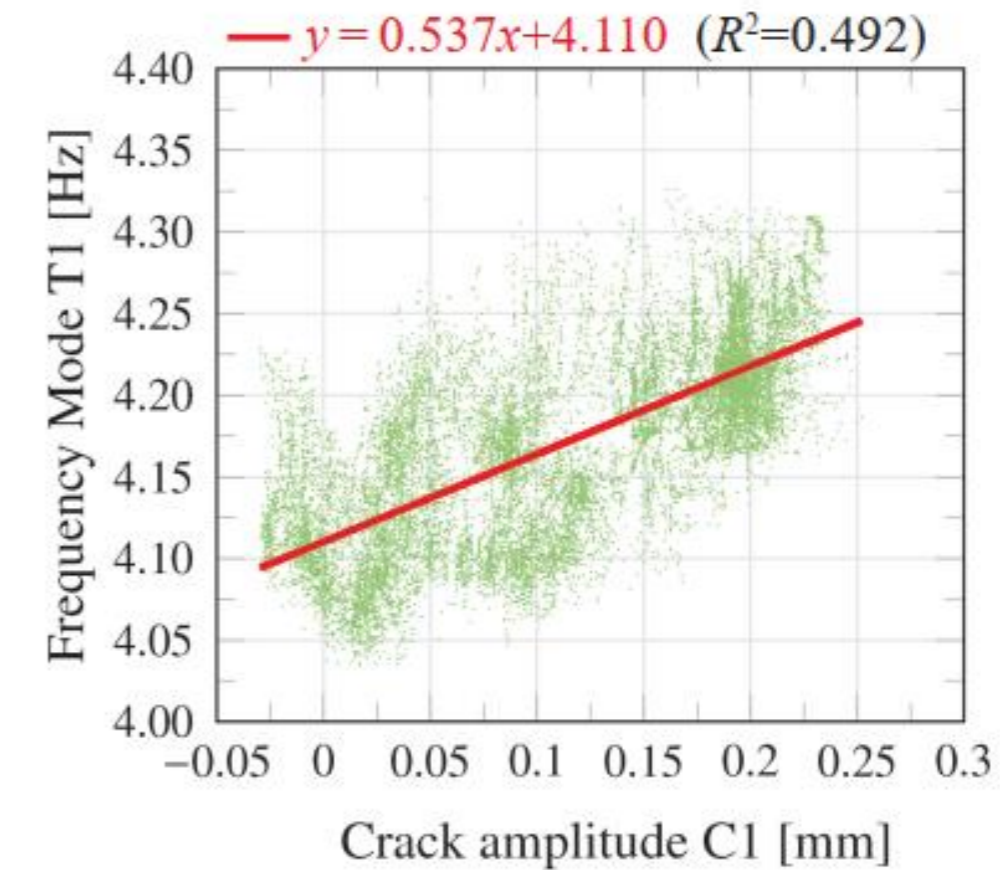
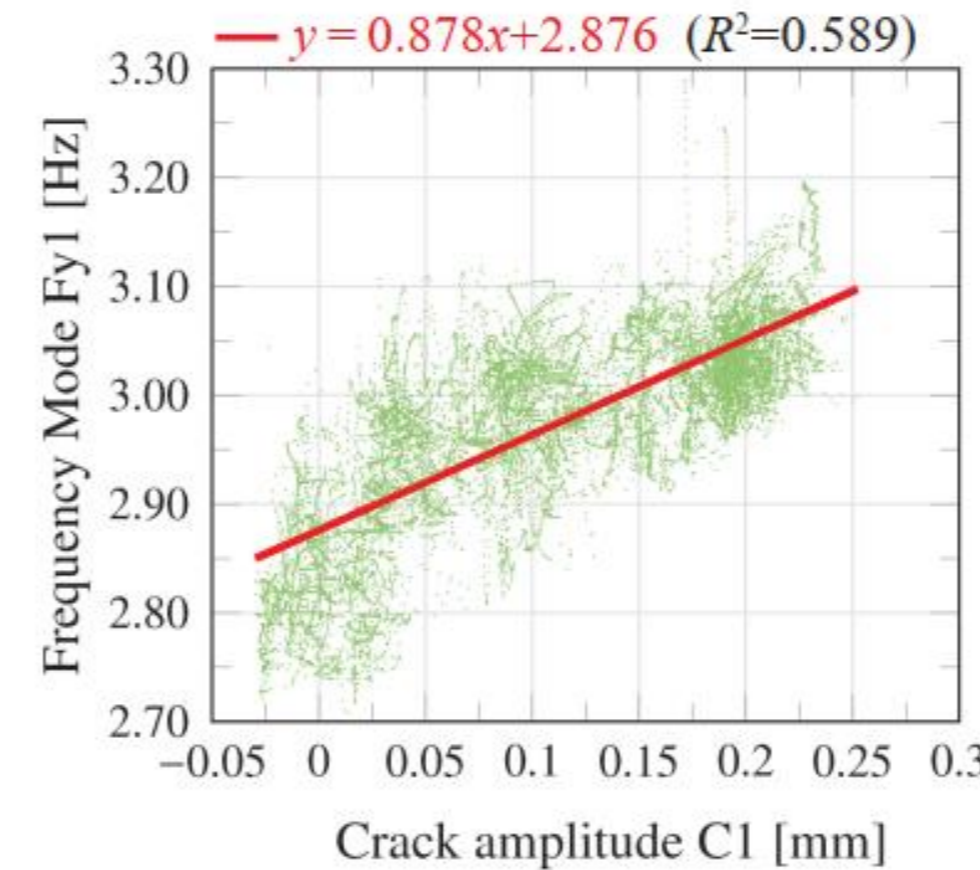
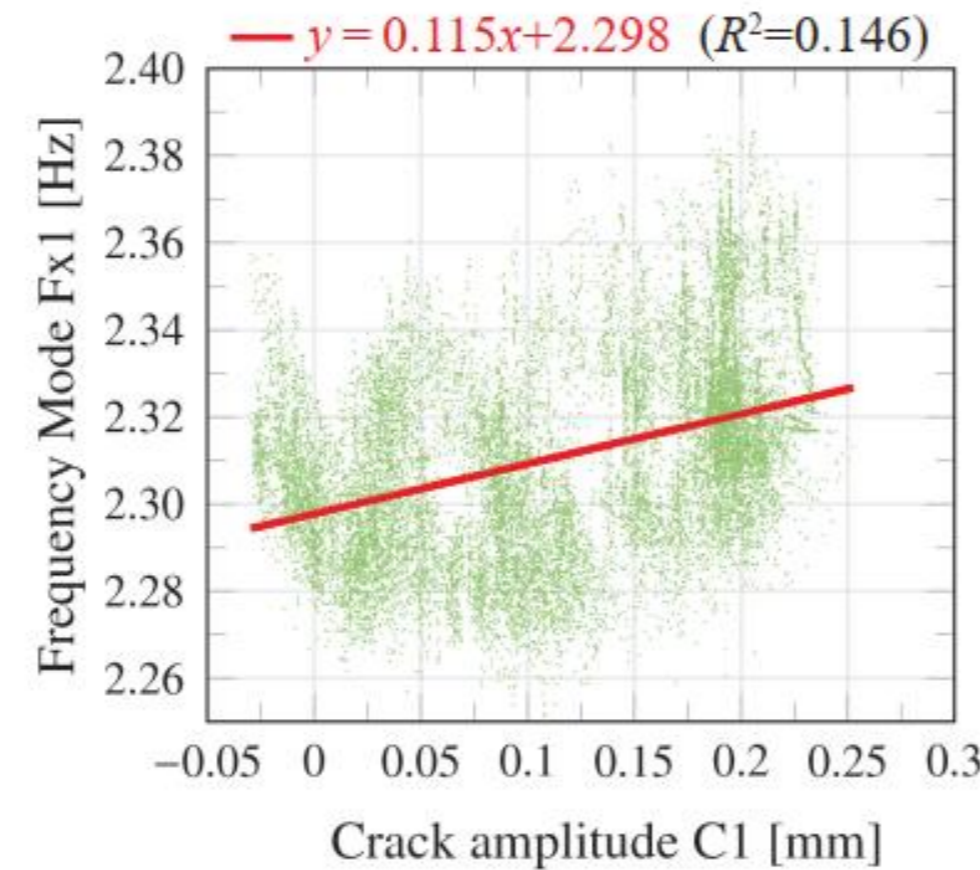
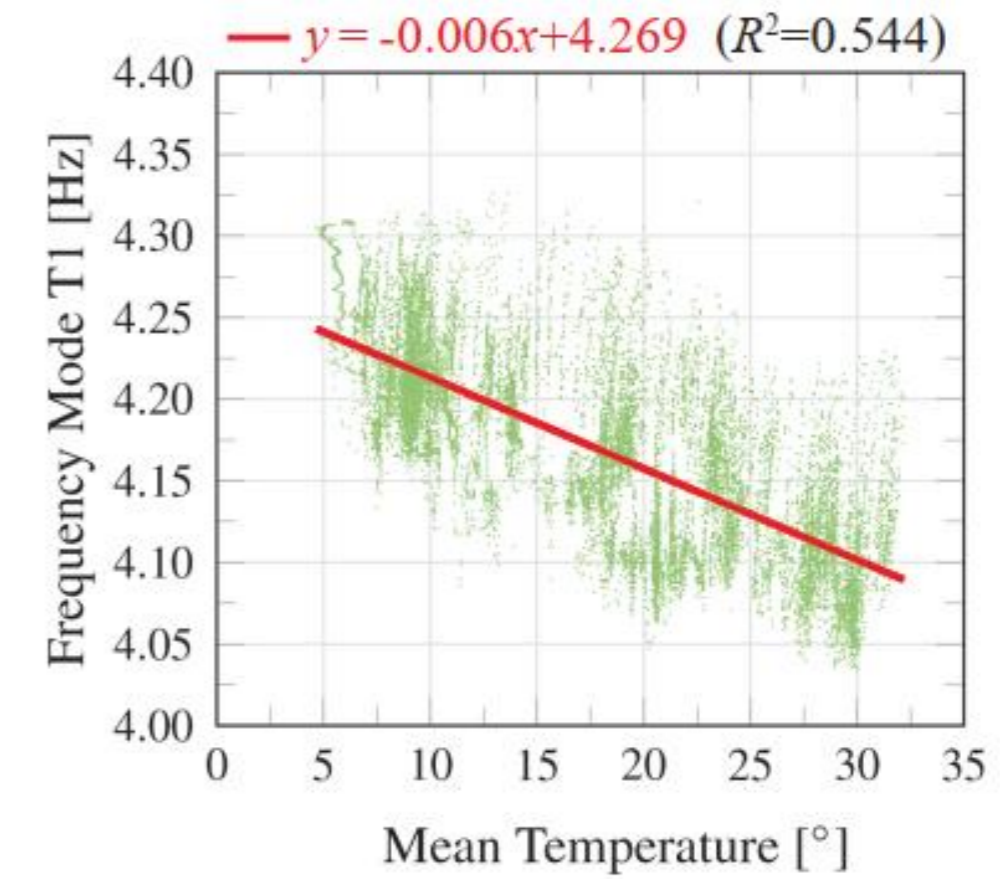
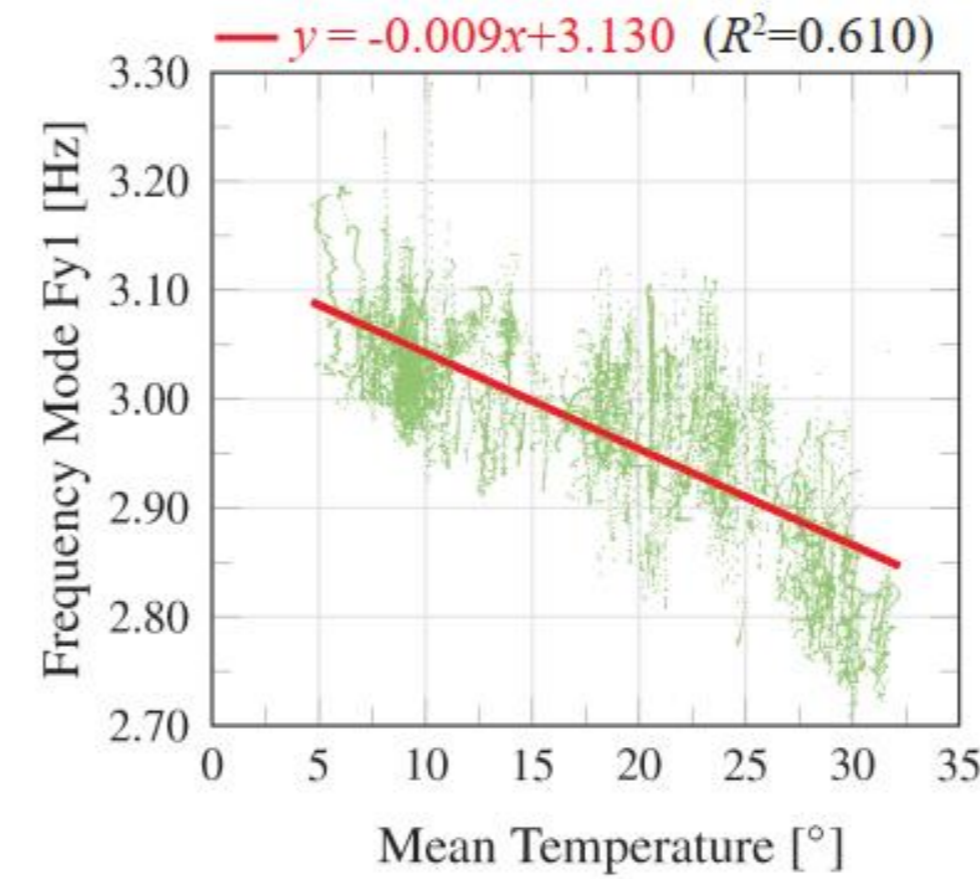
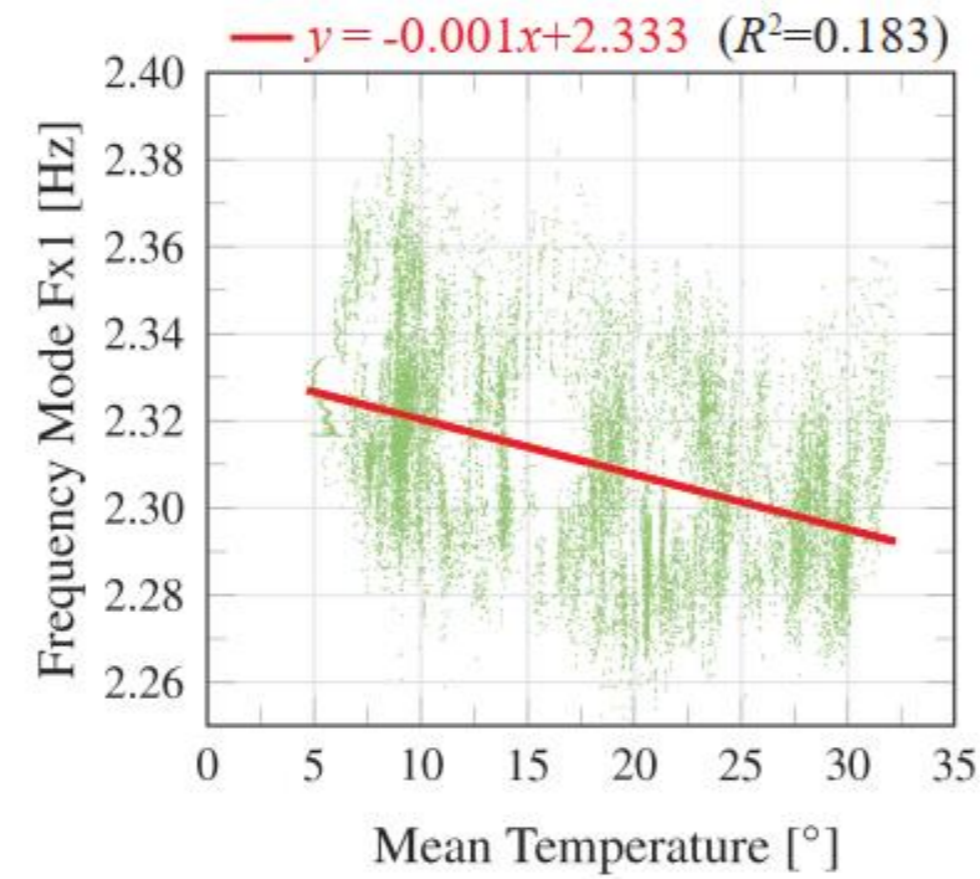
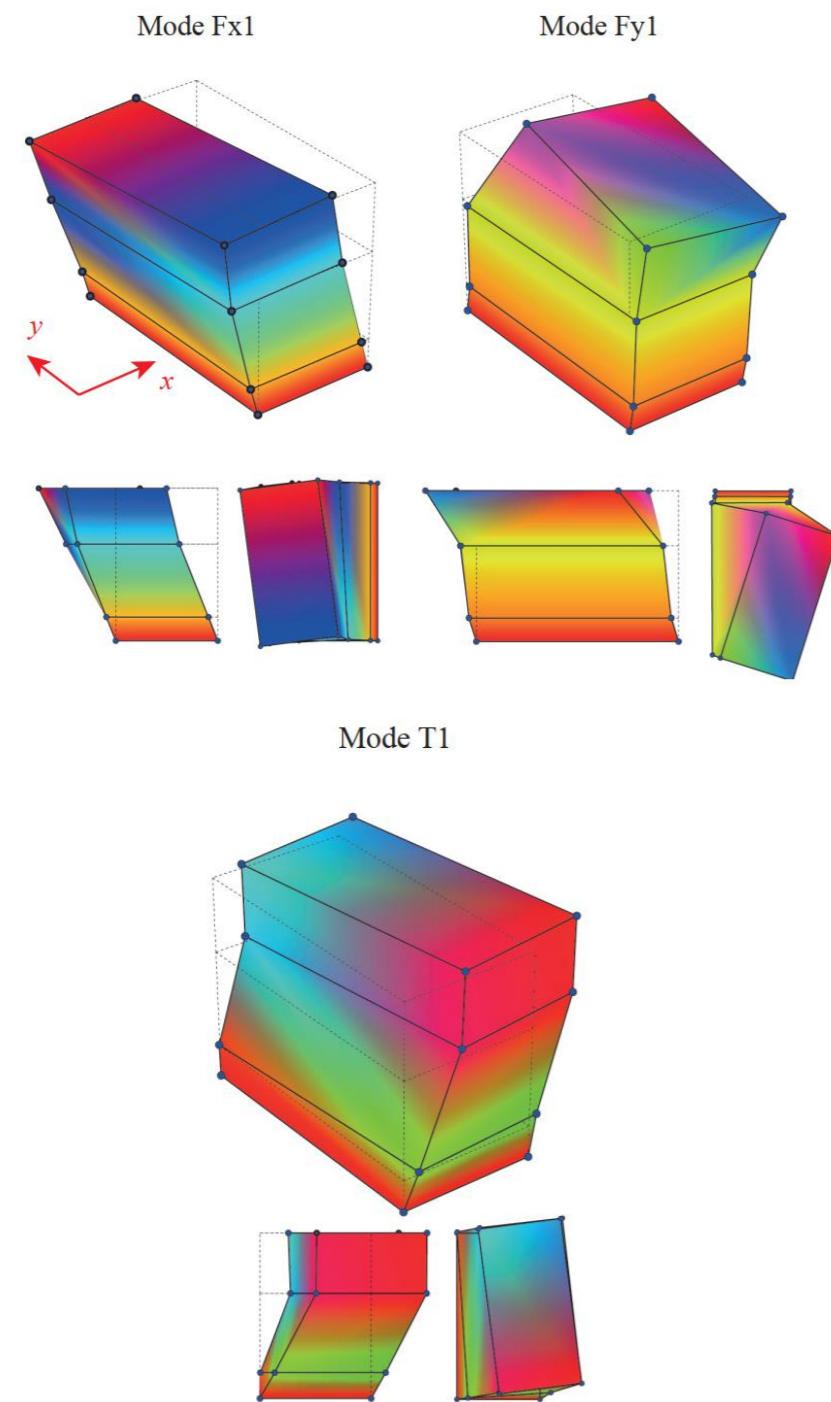
- Principal Components Analysis (PCA)



# Data normalization: Taller Parte 1

Input-Output --- MLR

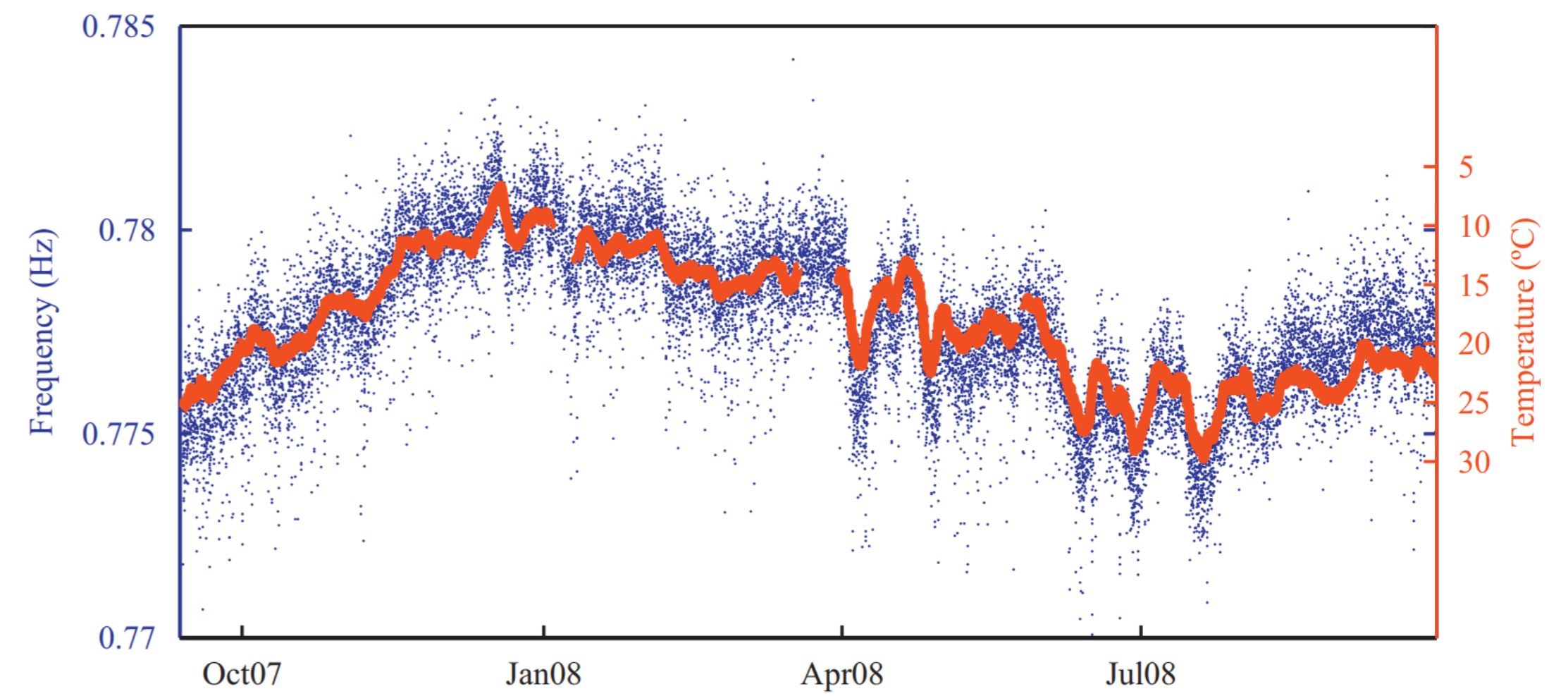
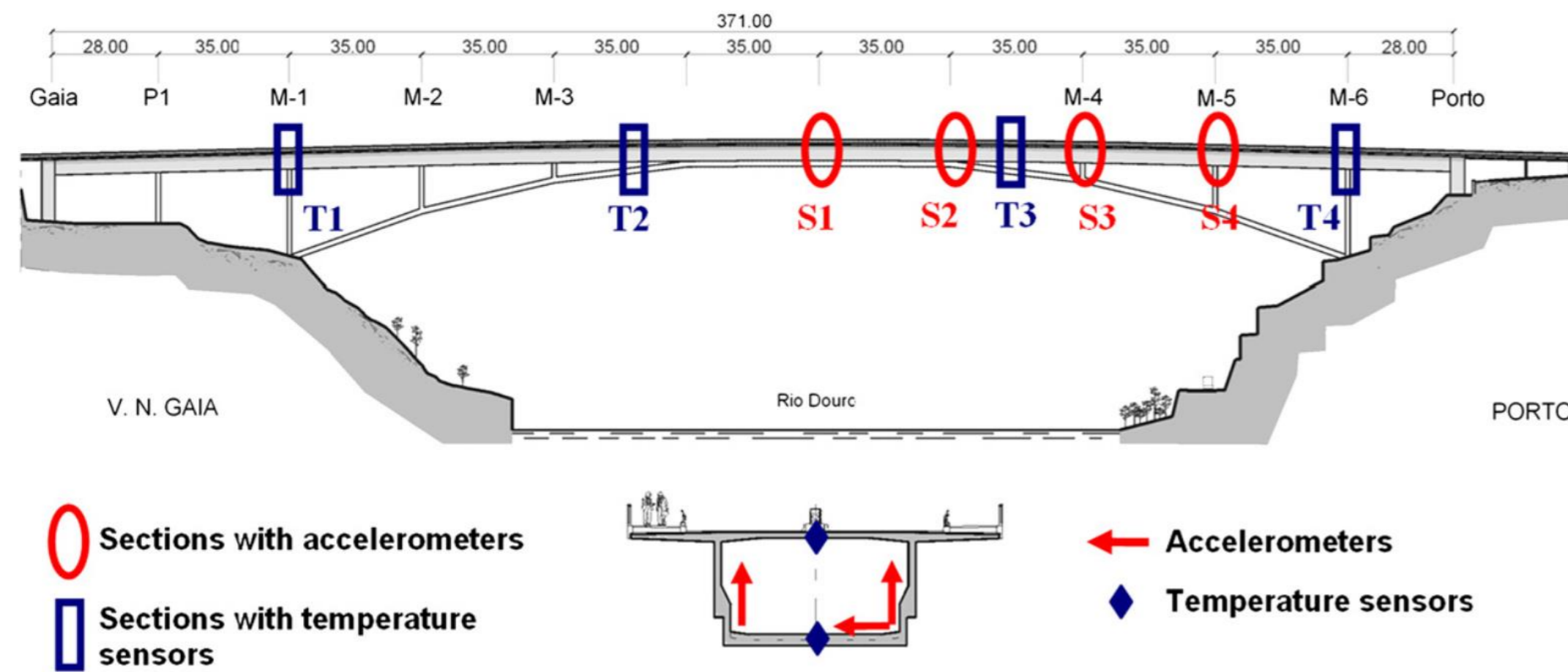
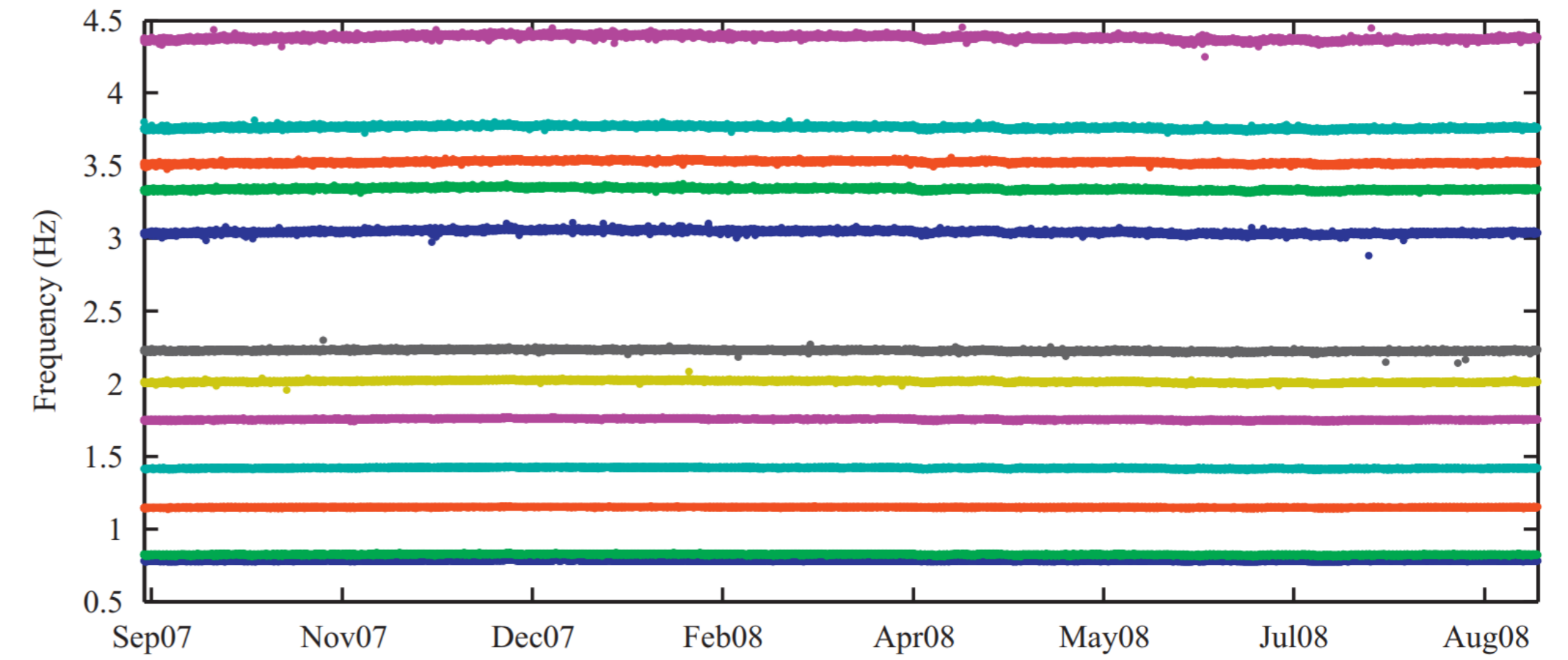
## Multilinear Regression - Motivation





# Data normalization: Taller Parte 1

MLR



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Magalhães, F., Cunha, A., & Caetano, E. (2012). Vibration based structural health monitoring of an arch bridge: from automated OMA to damage detection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 28, 212-228.

## Data normalization: Taller Parte 1

We consider the problem of regression when study different variables that depend on more than one explanatory or independent variables. This model generalizes the simple linear regression in two ways. It allows the mean function  $E(y)$  to depend on more than one explanatory variable and to have shapes other than straight lines.

### The linear model:

Let  $y$  denote the dependent variable that is linearly related to  $k$  independent variables  $x_1, x_2, \dots, x_k$  through parameters  $\beta_1, \dots, \beta_k$

$$y = x_1\beta_1 + \dots + x_k\beta_k + \varepsilon$$

- $\beta_1, \dots, \beta_k \rightarrow$  Regression coefficients
- $\varepsilon$  random error component reflecting the difference between the observed and fitted variables (joint effect of those variables not included in the model, random factors which cannot be accounted in the model, etc...)

## Data normalization: Taller Parte 1

Note that the  $j^{\text{th}}$  regression coefficient  $\beta_j$  represents the expected change in  $y$  per unit change in  $x_j$ . Assuming  $E(\varepsilon) = 0$

$$\beta_j = \frac{\partial E(y)}{\partial x_j}$$

In general, we can write the MLR model in matrix notation as  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$

Assumptions in the MLR:

- I.  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$
- II.  $E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2\mathbf{I}$
- III.  $\text{Rank}(\mathbf{X}) = k$
- IV.  $\mathbf{X}$  is a non-stochastic matrix
- V.  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$

## Data normalization: Taller Parte 1

### PRINCIPLE OF ORDINARY LEAST SQUARES (OLS)

Let  $\mathbf{B}$  be the set of all possible vectors  $\boldsymbol{\beta}$ . The objective is to find a vector  $\boldsymbol{\beta}$  that minimizes the sum of squared deviations of  $\varepsilon_i$ 's

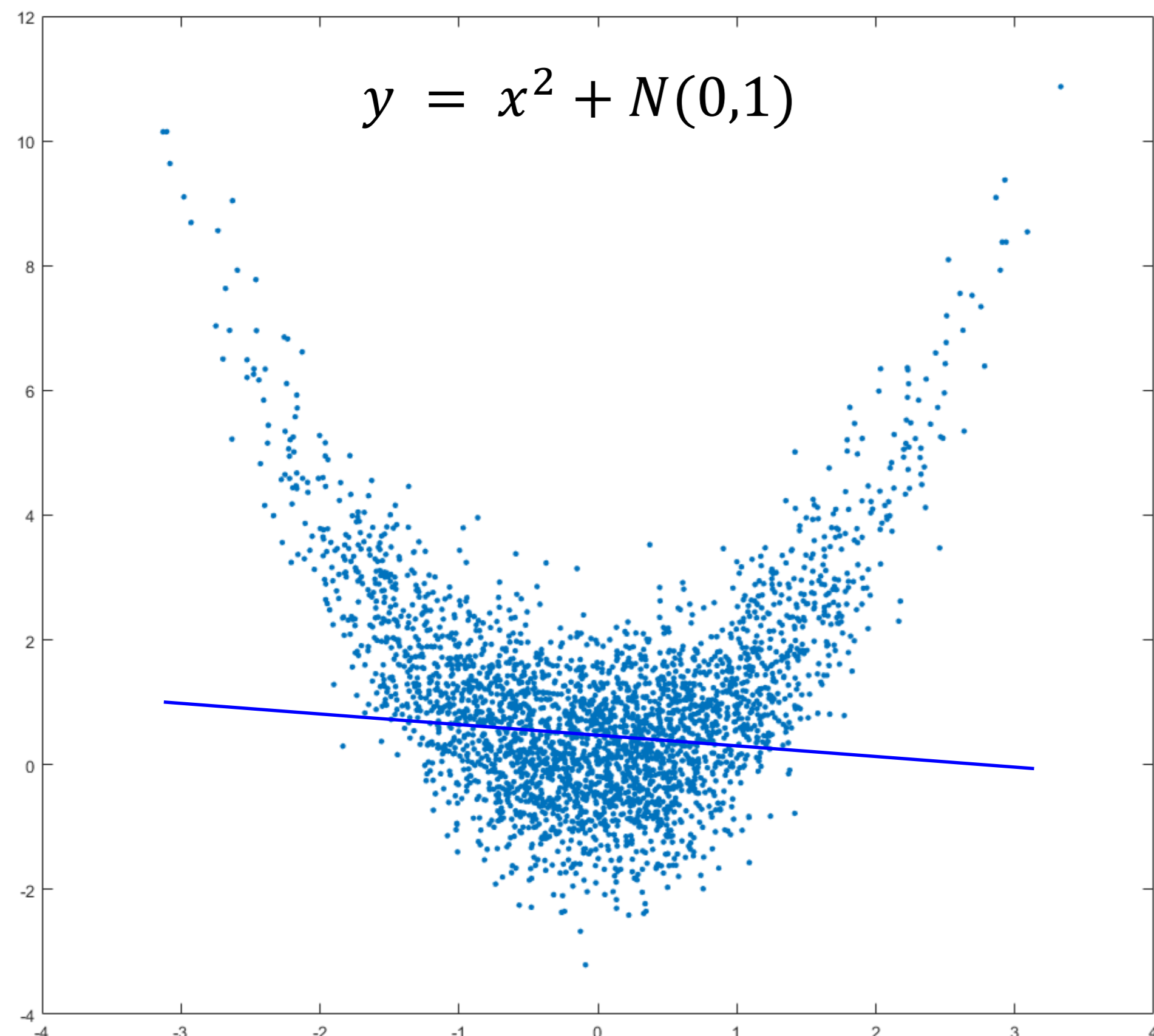
$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}' = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y} \rightarrow (\text{Rank}(\mathbf{X}) = k) \quad \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

### FITTED VALUES

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}] = \mathbf{H}\mathbf{Y}$$

## Data normalization: Taller Parte 1



$$\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_N]^T$$

$$\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_N]^T$$

1<sup>st</sup> order:

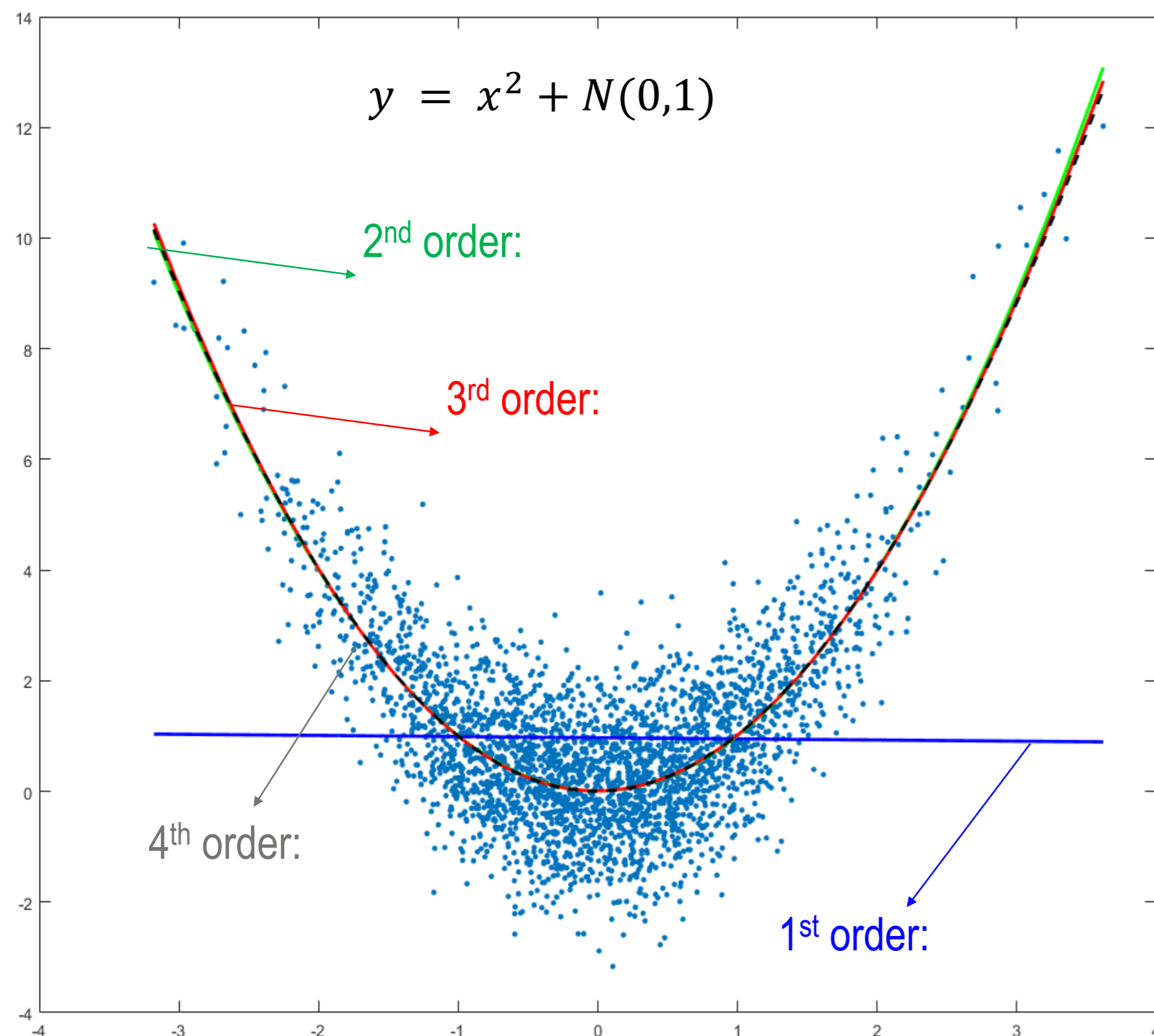
$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{X}$$

$$[y_1, \dots, y_N]^T = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_{N-1} \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Intercept

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \longrightarrow \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0272 \\ -0.0097 \end{bmatrix}$$

## Data normalization: Taller Parte 1

2<sup>st</sup> order:

$$[y_1, \dots, y_N]^T = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{N-1} & (x_{N-1})^2 \\ 1 & x_N & (x_N)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

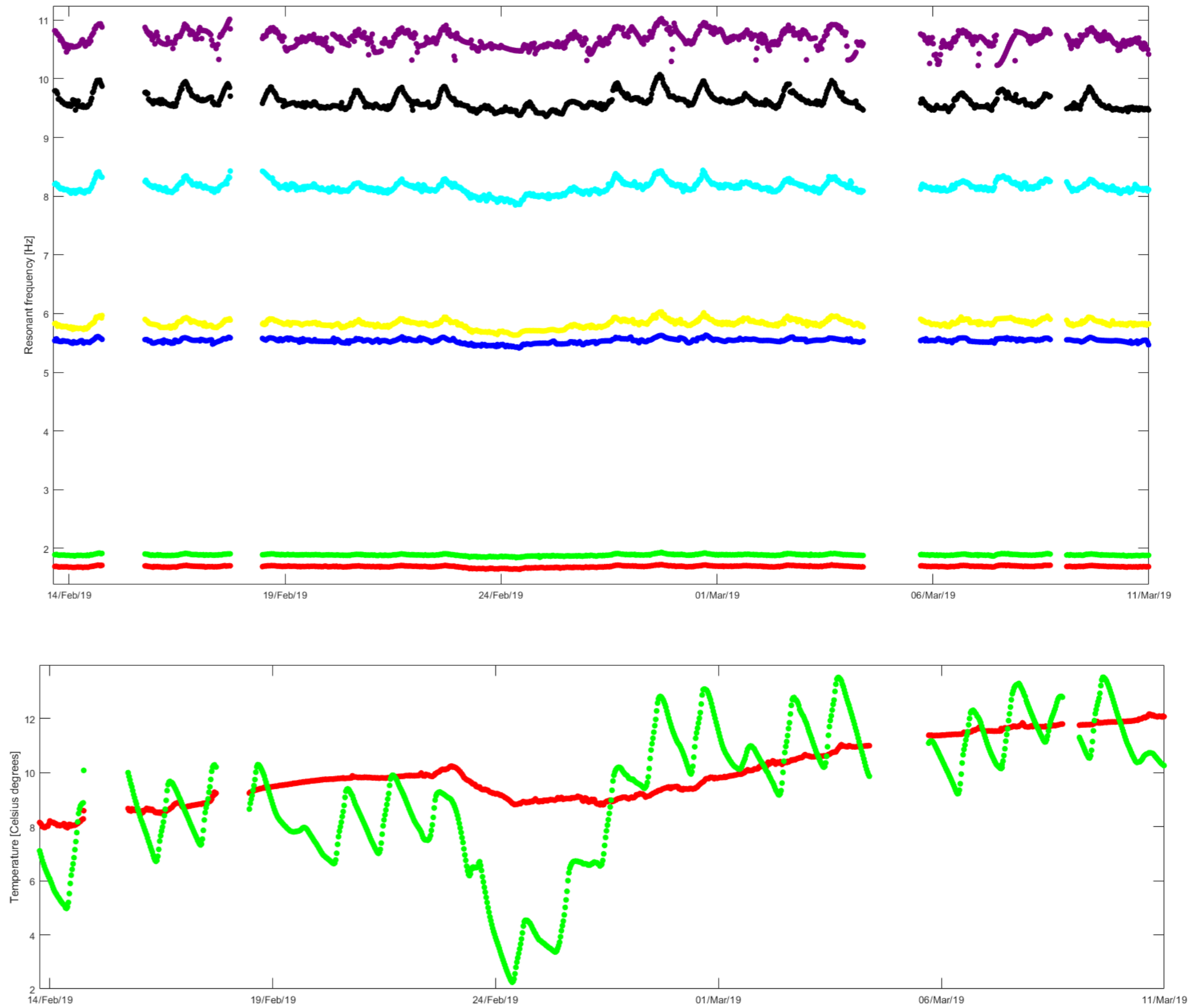
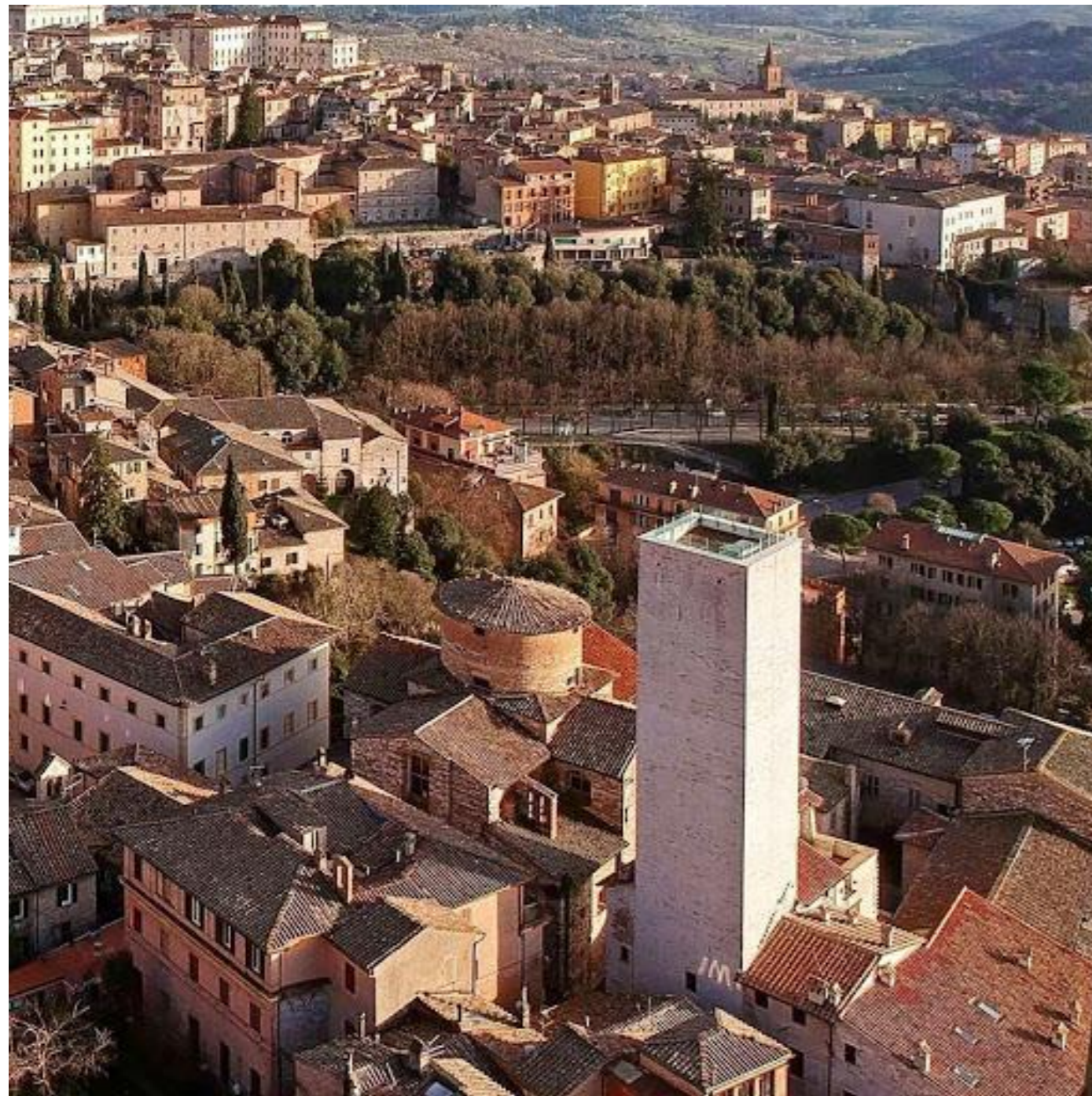
3<sup>rd</sup> order:

$$[y_1, \dots, y_N]^T = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & (x_2)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{N-1} & (x_{N-1})^2 & (x_{N-1})^3 \\ 1 & x_N & (x_N)^2 & (x_N)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

4<sup>th</sup> order:

$$[y_1, \dots, y_N]^T = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & (x_1)^3 & (x_1)^4 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & (x_2)^3 & (x_2)^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{N-1} & (x_{N-1})^2 & (x_{N-1})^3 & (x_{N-1})^4 \\ 1 & x_N & (x_N)^2 & (x_N)^3 & (x_N)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix}$$

# Data normalization: Taller Parte 1



## Data normalization: Taller Parte 1

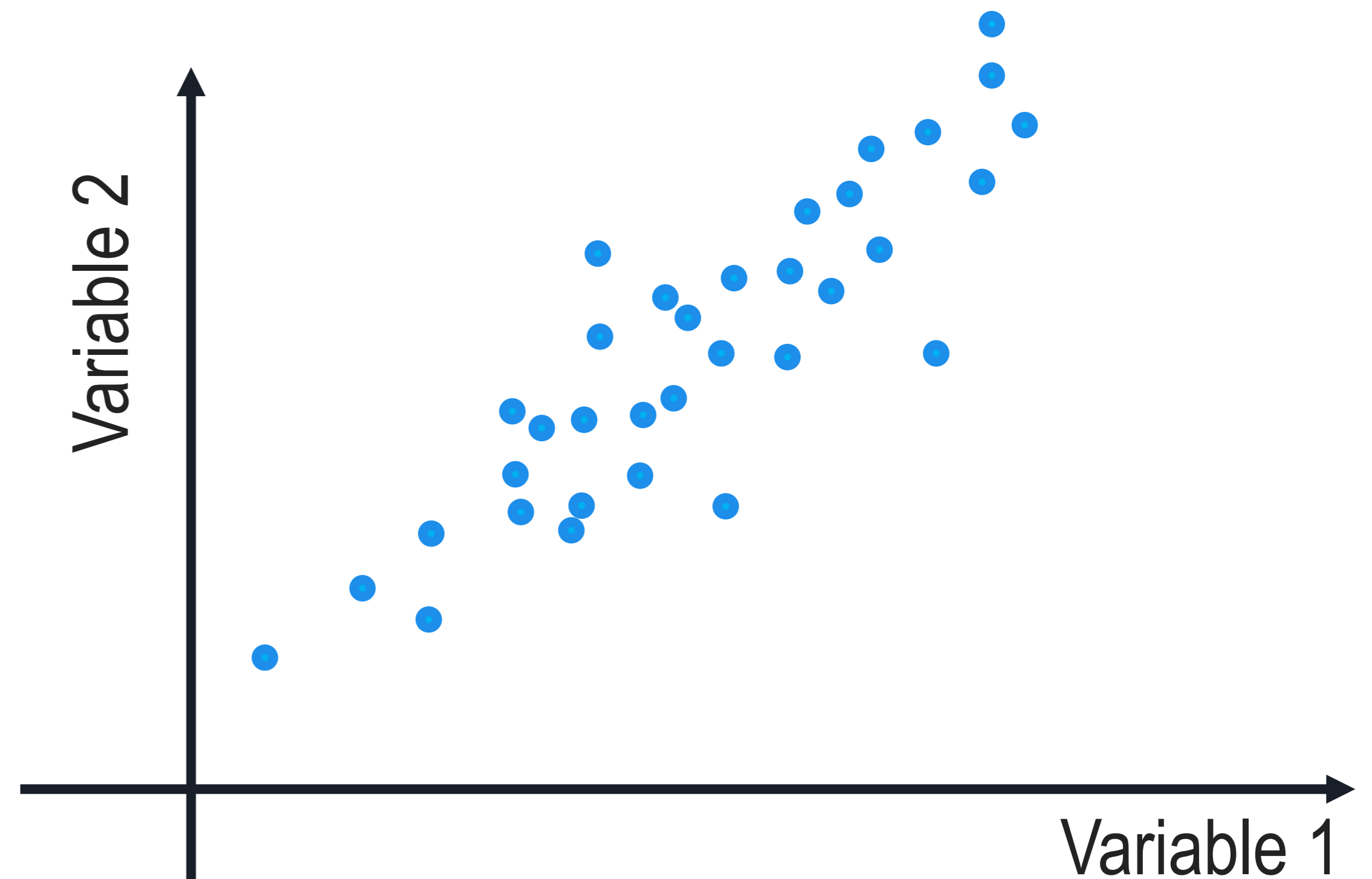
Output only --- PCA

### Principal Components Analysis (PCA)

PCA converts a set of observations  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m]$ ,  $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^N$  of possibly correlated variables into a set of values of linearly uncorrelated variables called principal components.

The first step of the PCA algorithm consists of normalizing the variables' mean and variance:

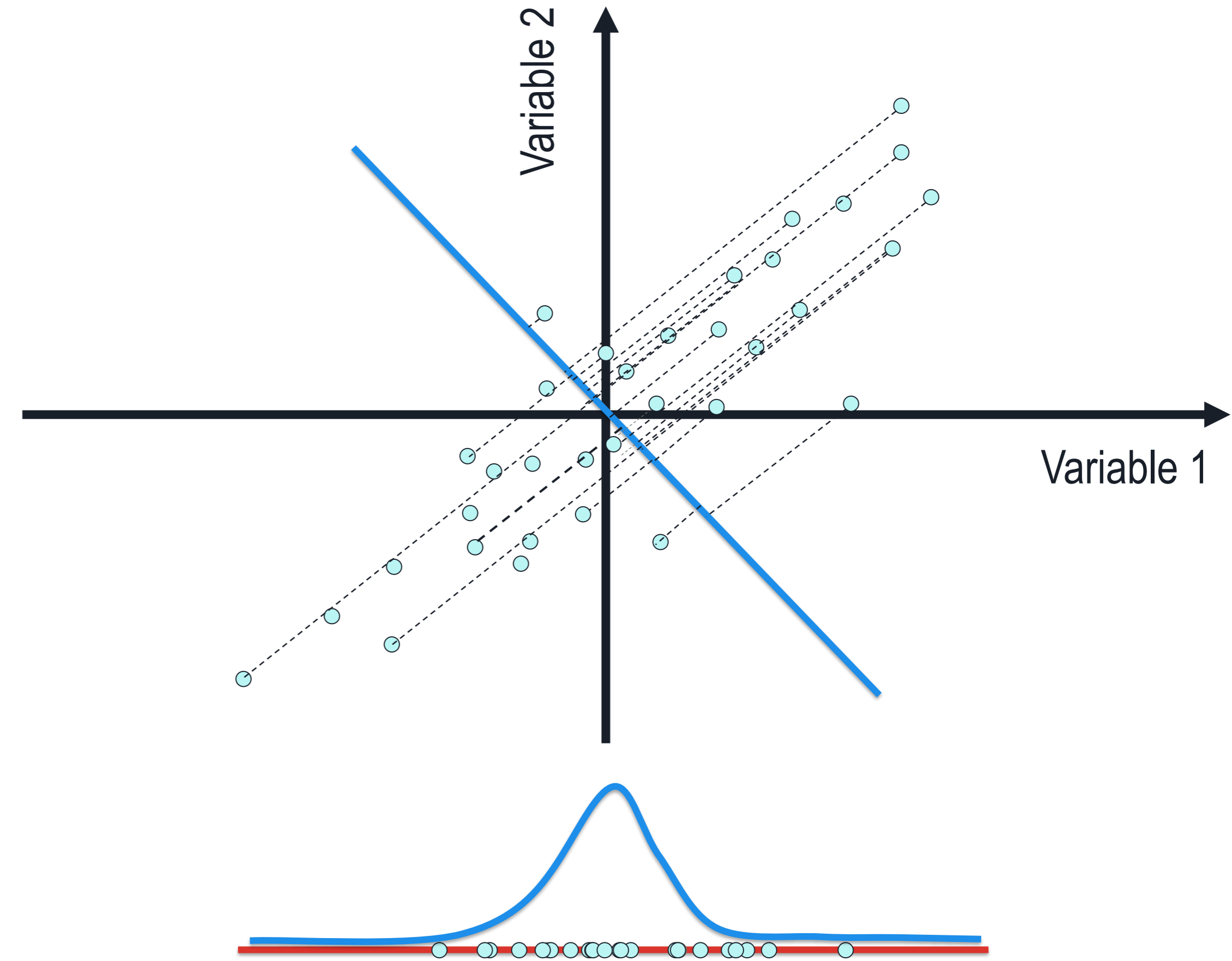
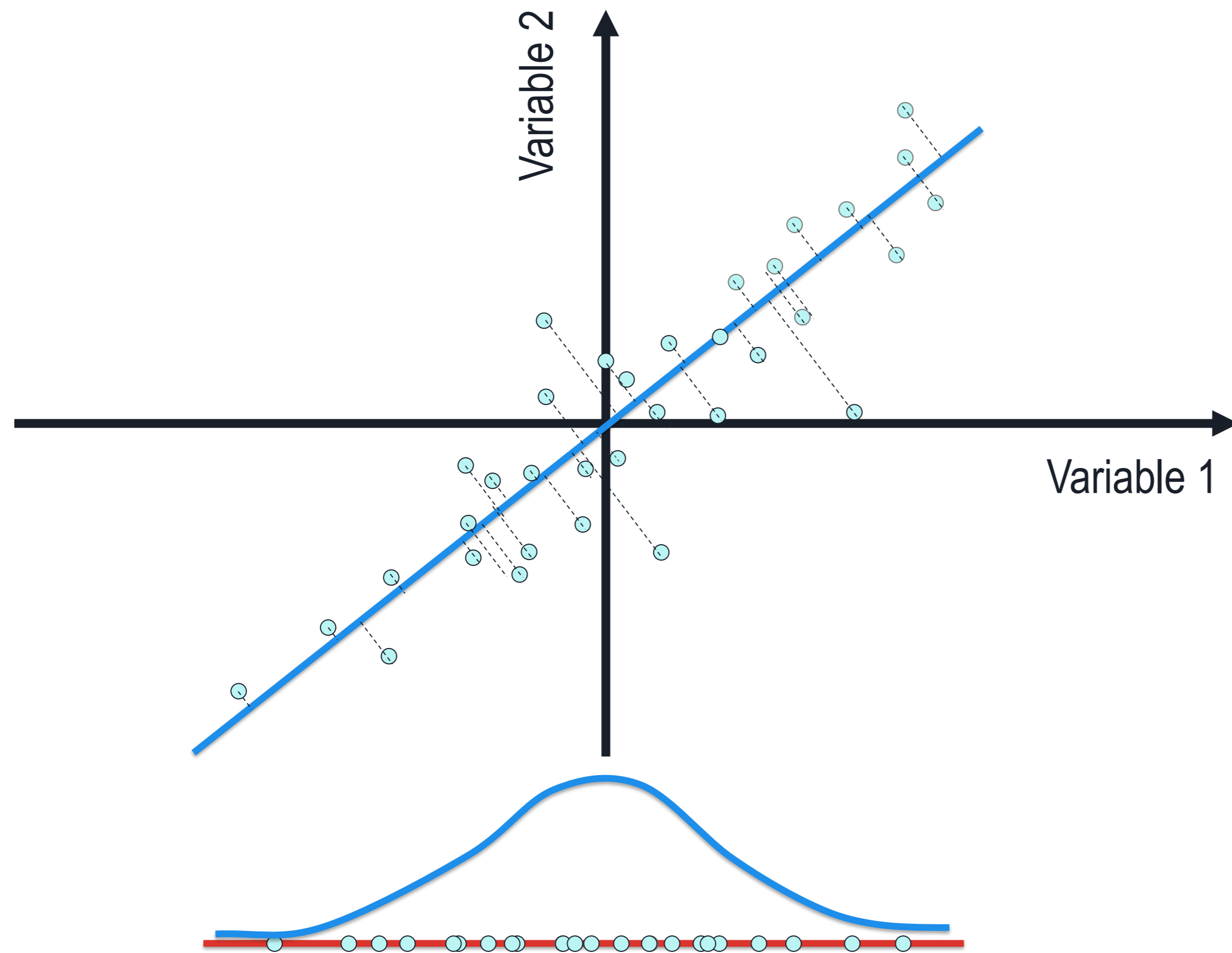
- $\mu_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_{i,j}$
- Replace  $\mathbf{X}_i$  by  $\mathbf{X}_i - \mu_i$
- $\sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_{i,j})^2$
- Replace  $\mathbf{X}_i$  by  $\frac{\mathbf{X}_i}{\sigma_i}$





## Data normalization: Taller Parte 1

Now, we look for the major axis of variation. One may pose this problem as finding the unit vector  $\phi$  so that when the data is projected onto  $\phi$ , the variance of the projected data is maximized.



## Data normalization: Taller Parte 1

We want to maximize the variance:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N} \sum_i (\mathbf{X}_i \mathbf{u})^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{X}\mathbf{u})^T (\mathbf{X}\mathbf{u}) = \frac{1}{N} \mathbf{u}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \frac{\mathbf{X}^T \mathbf{X}}{N} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u}$$

We can perform the maximization problem using Lagrange multipliers:

$$L(\mathbf{u}, \lambda) = \sigma_u^2 - \lambda (\mathbf{u}^T \mathbf{u} - 1) \longrightarrow \text{Normalization condition}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{u}^T \mathbf{u} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} = 2\Sigma \mathbf{u} - 2\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0} \longrightarrow (\Sigma - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \longrightarrow \text{Eigenvalue/Eigenvect or problem}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$$

$$U = [\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m]$$

## Data normalization: Taller Parte 1

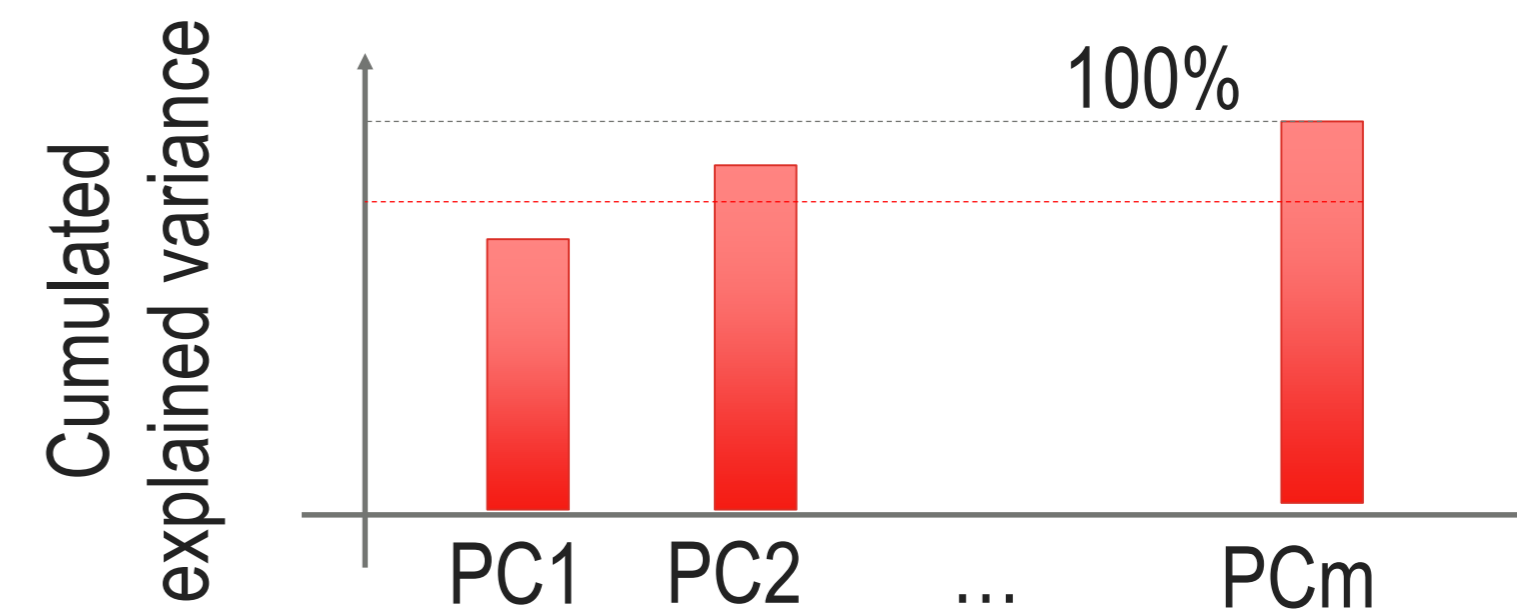
$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$$

$$U = [\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m]$$

Total variance:  $\sum_i \lambda_i$

Relative variance explained by the PCs:  $\frac{100\lambda_i}{\sum_i \lambda_i}$



We retain  $l$  PCs – Dimension reduction!

Change of coordinates:  $\mathbf{Z} = \mathbf{XU}, \mathbf{Z} \in R^{N \times m}$

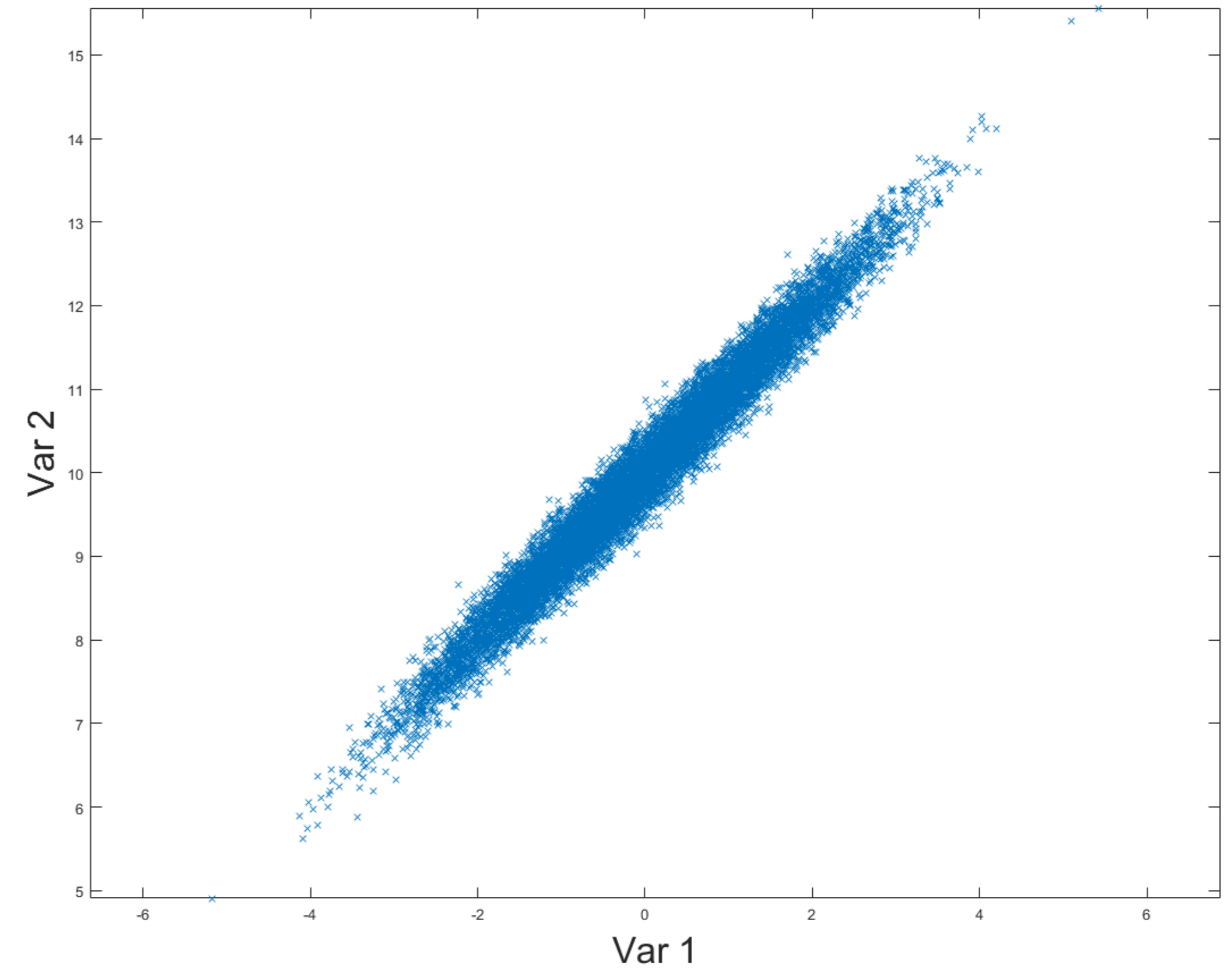
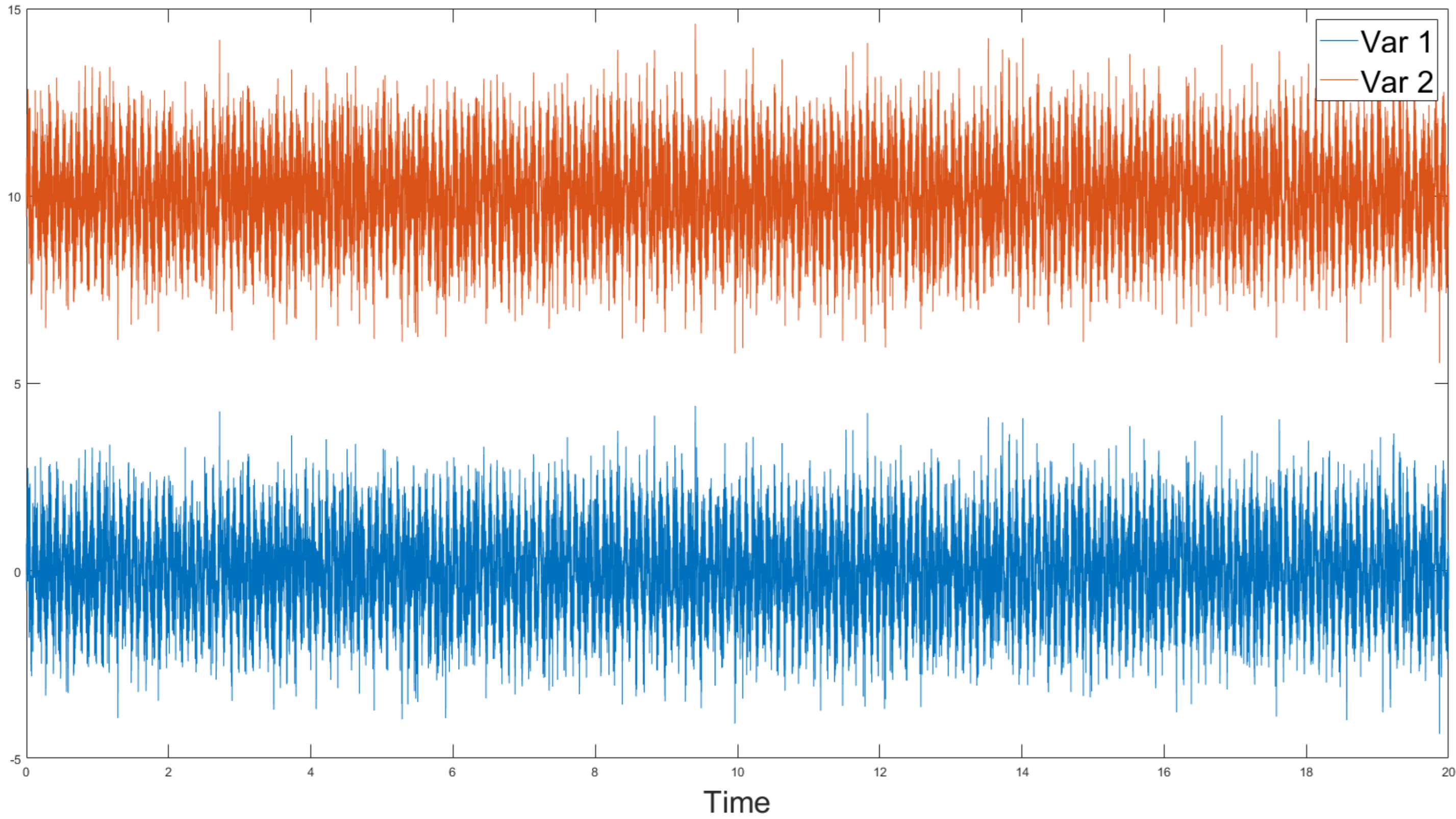
Dimensionality reduction:  $\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}(:, 1:l)$

Reconstruction in the original coordinates system:

$$\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{Z}}\mathbf{U}(:, 1:l)^T$$

# Data normalization: Taller Parte 1

PCA



# Data normalization: Taller Parte 1

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.60 & 1.57 \\ 1.57 & 1.60 \end{bmatrix} \cdot 10^4$$

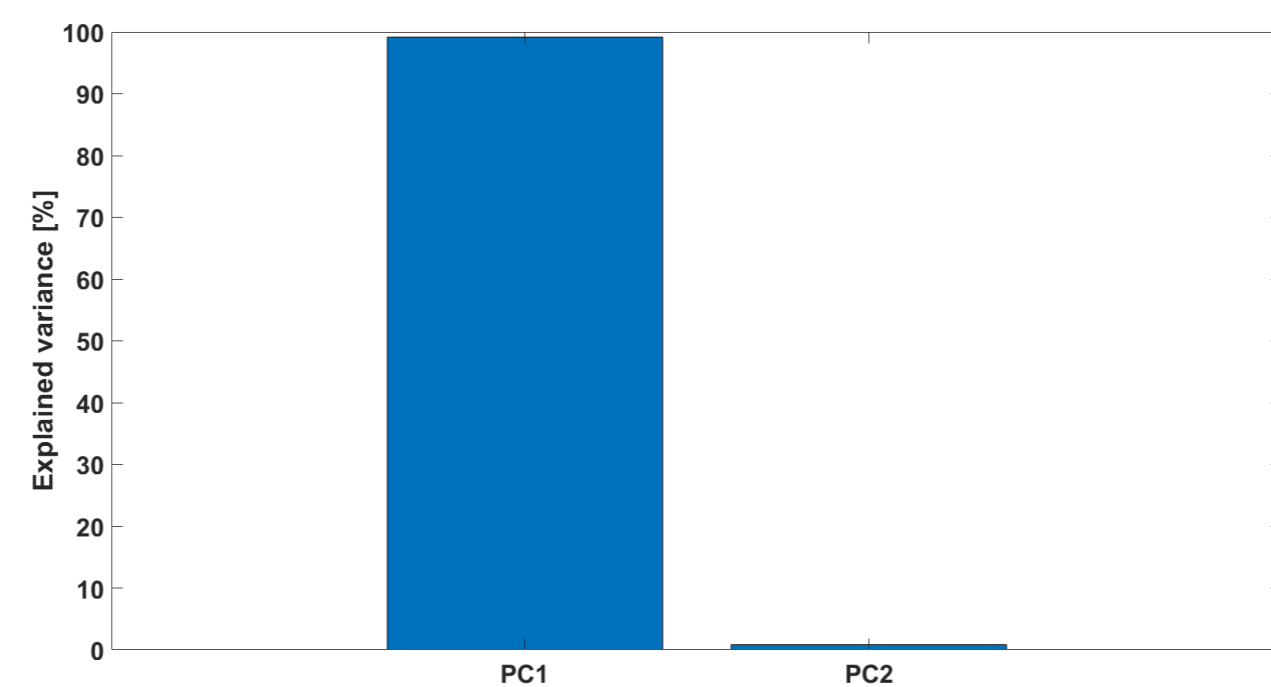
Eigenvalues/vectors

$$\lambda_1 = 3.1739 \cdot 10^4$$

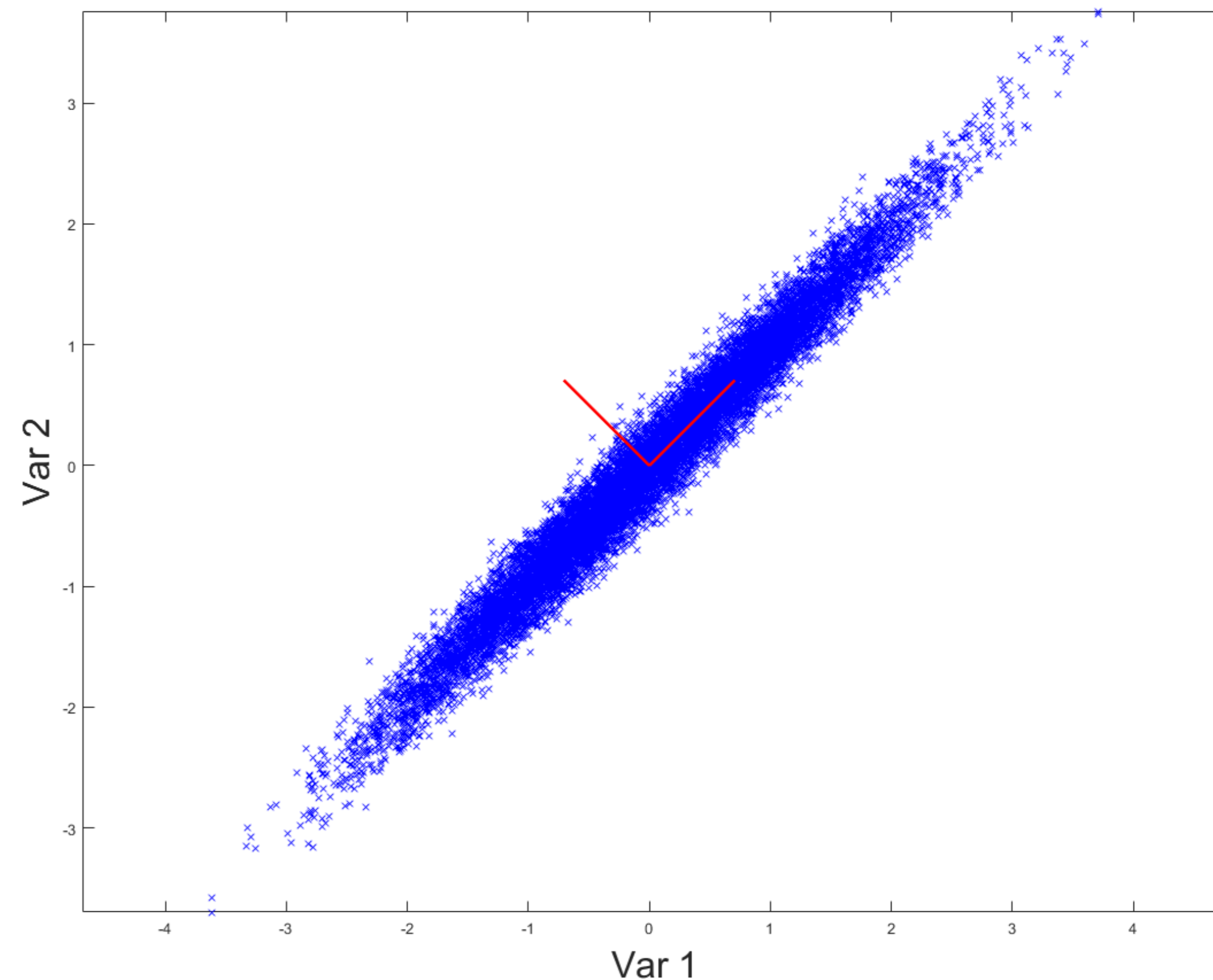
$$\lambda_2 = 0.0261 \cdot 10^4$$

$$\phi_1 = [-0.71 \quad 0.71]$$

$$\phi_2 = [0.71 \quad 0.71]$$

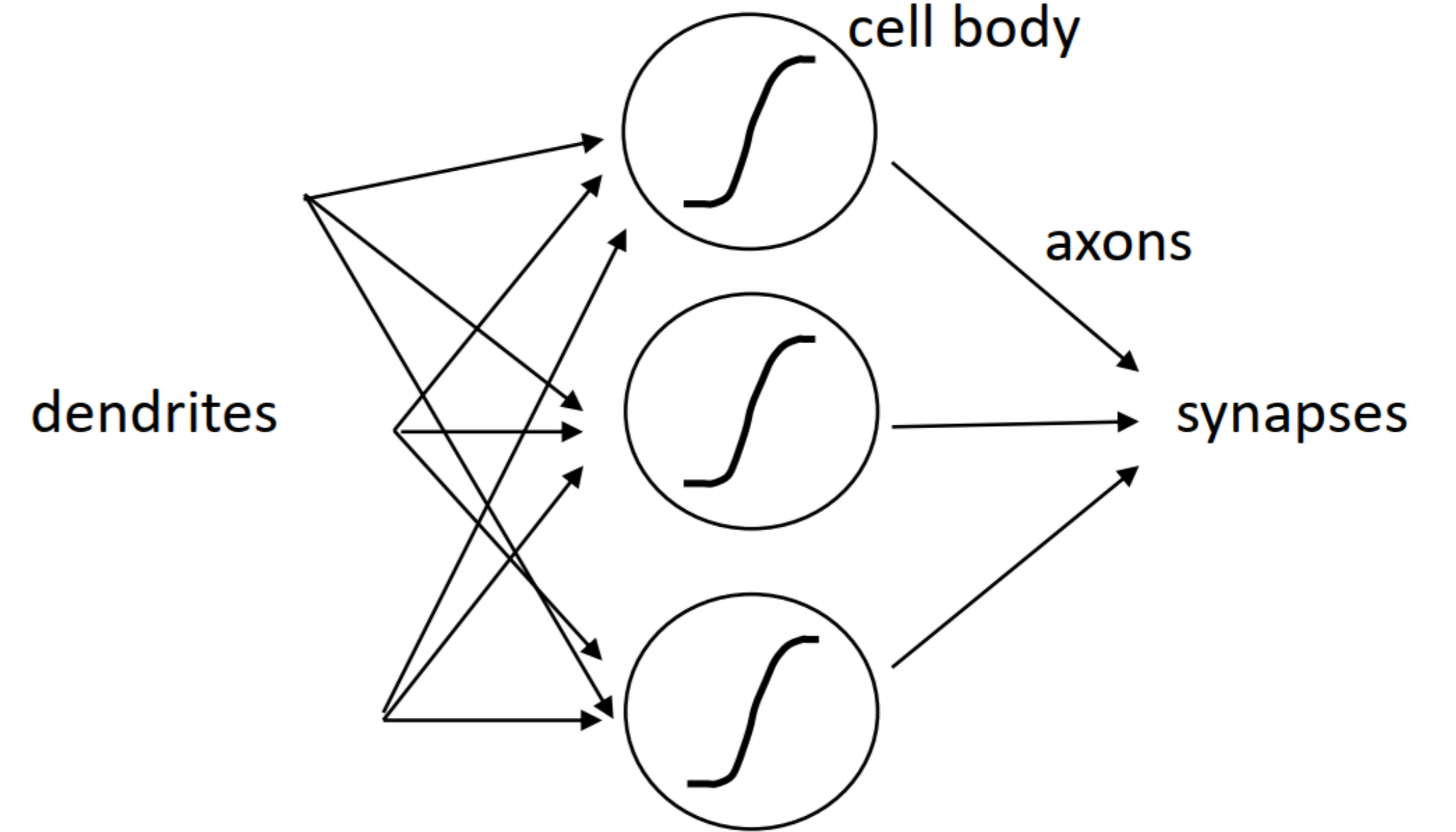
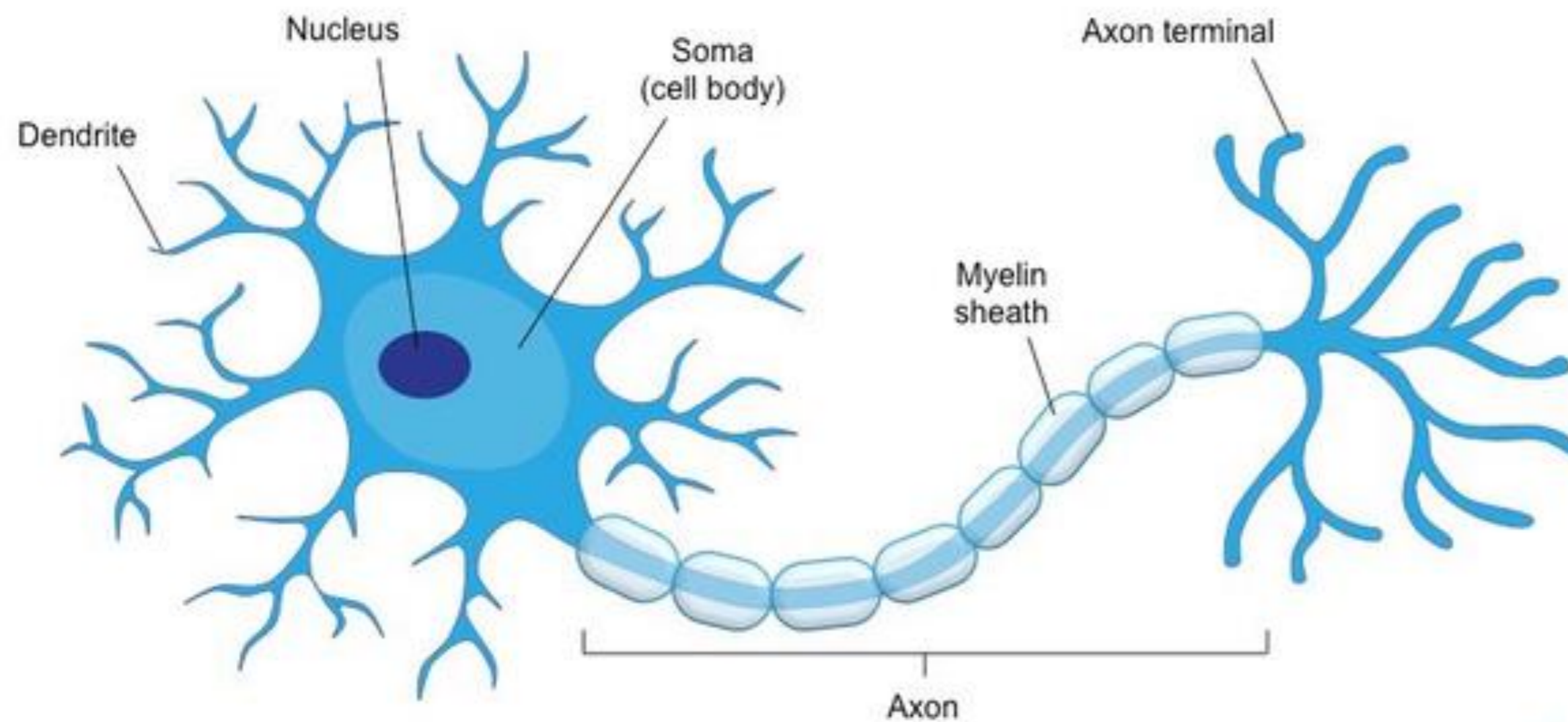


We retain one single PC

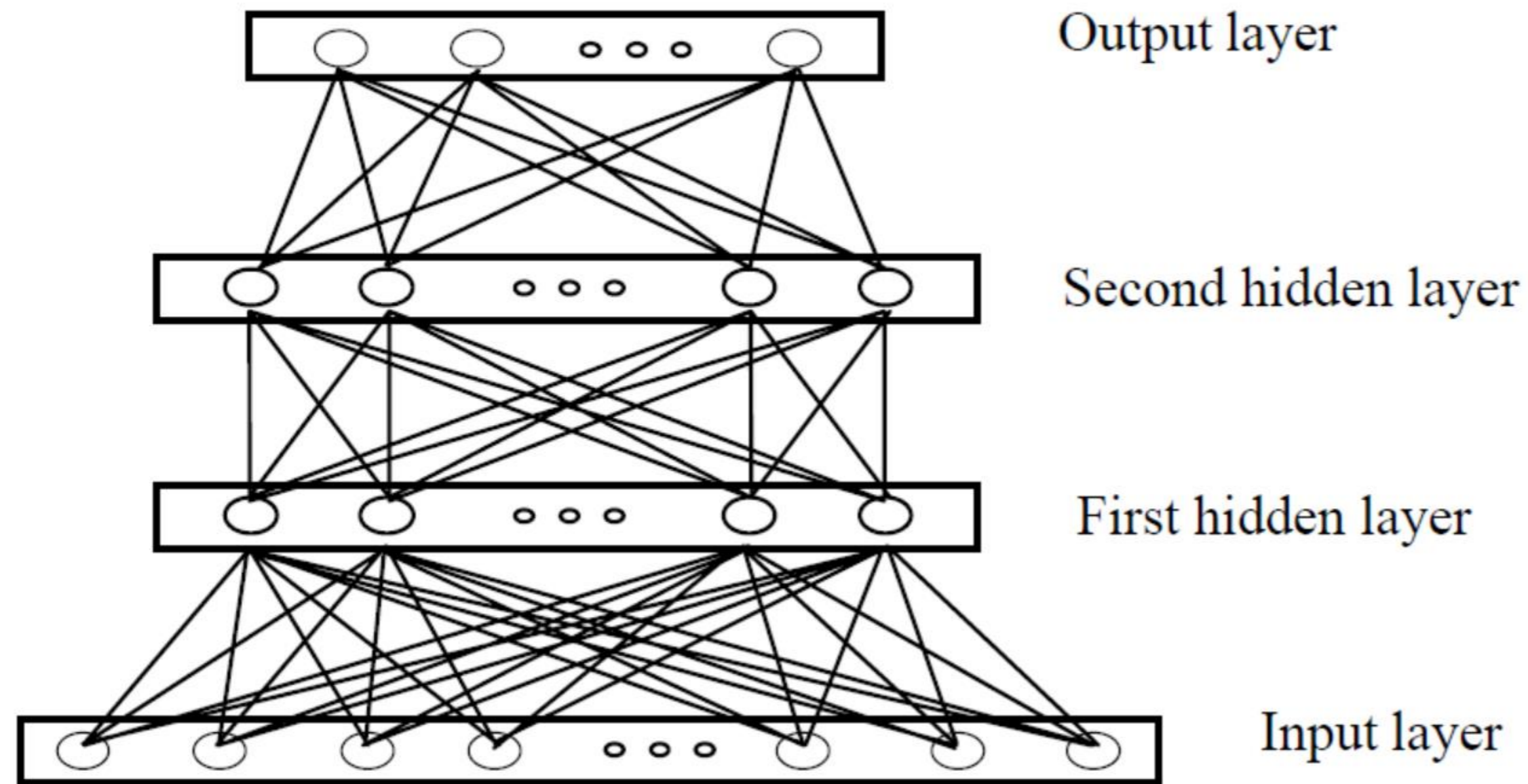


# Data normalization:

## Neural Networks (NN)



Data normalization:



Simply put... a linear summation of nonlinear equations

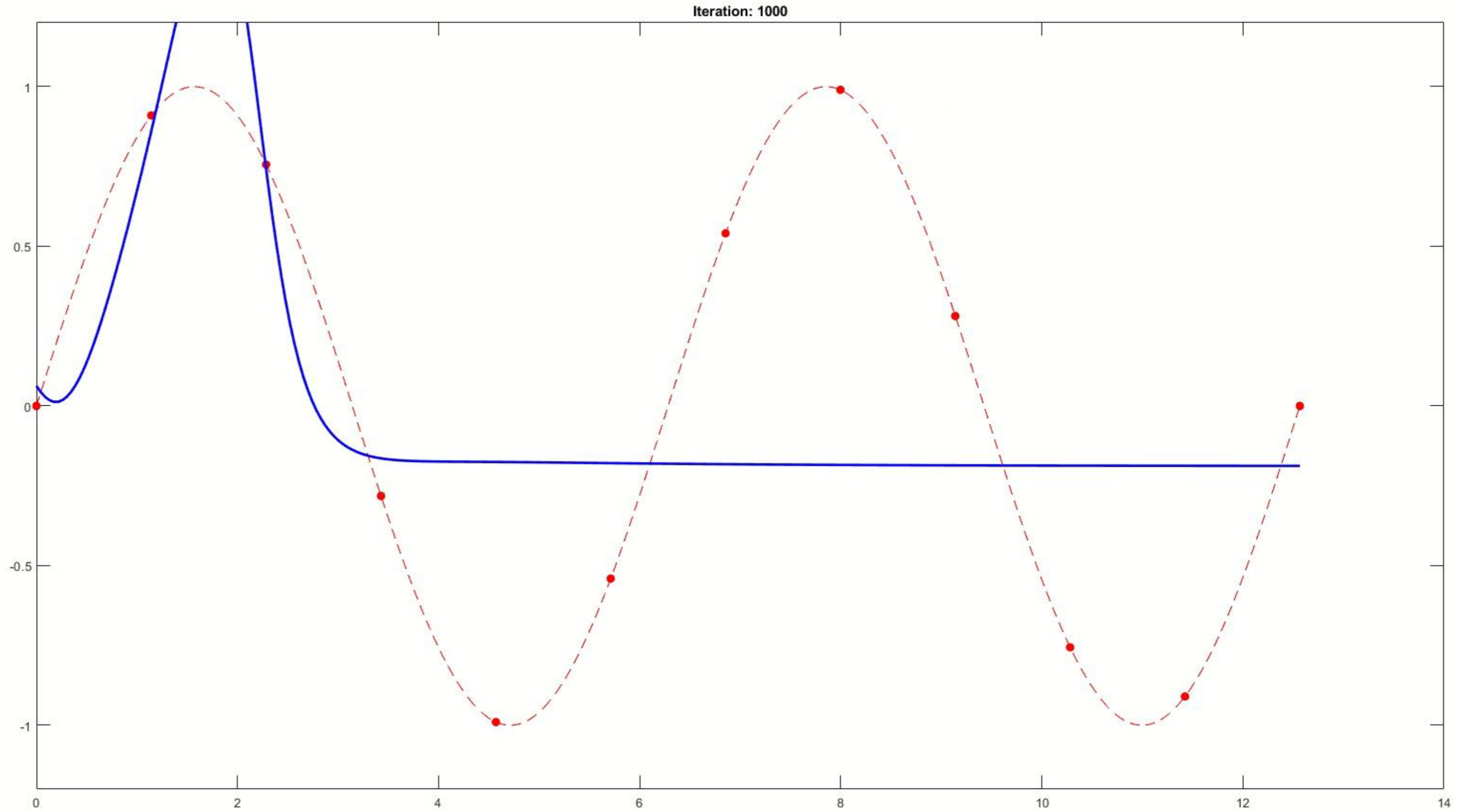
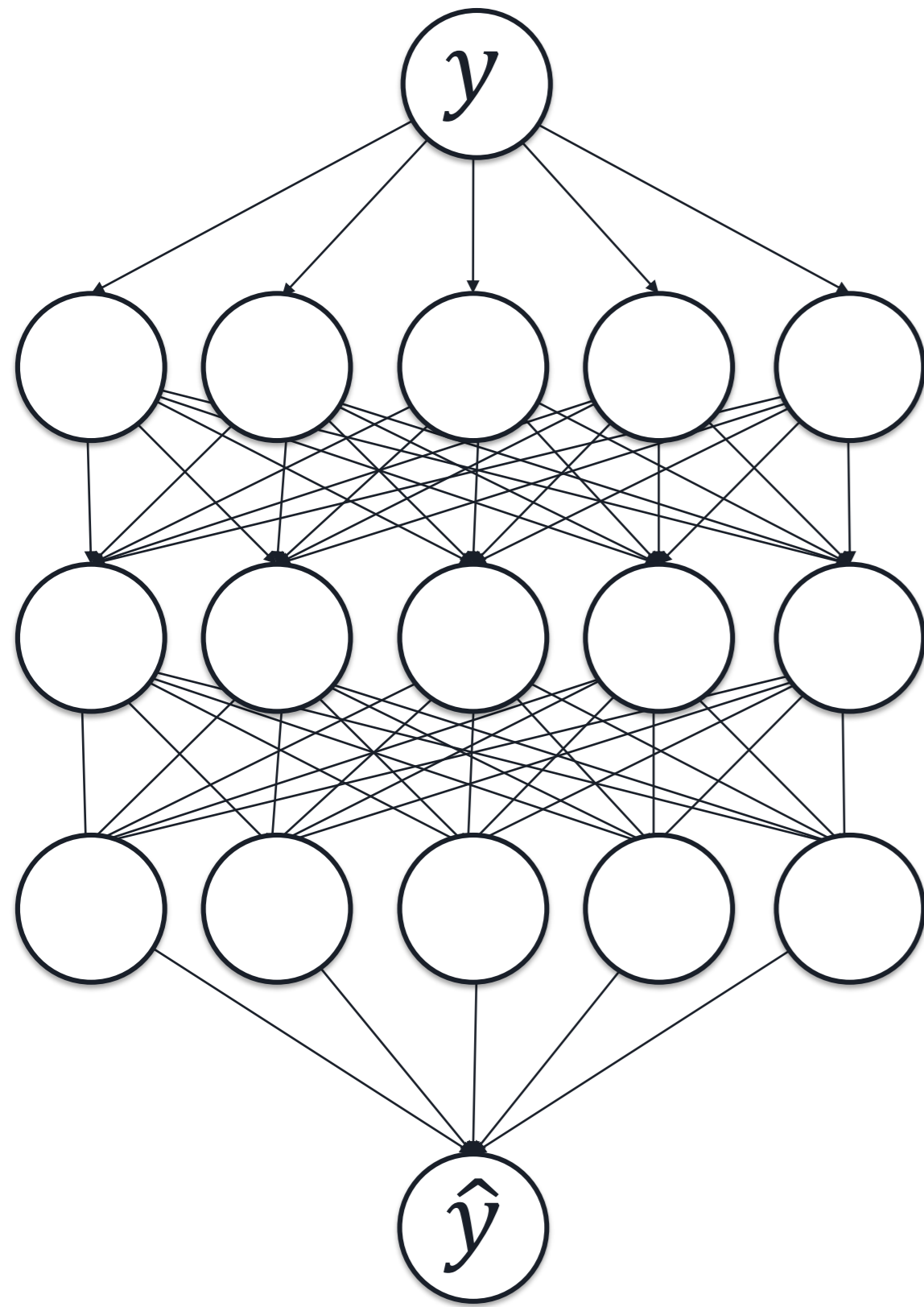
For a single hidden layer:

But how many hidden layers do I need ?

It depends on the NN functions...

- Linear
- Sigmoid
- Gaussian
- Wavelet
- ...

Data normalization:



Autoassociative Neural Network (ANN)





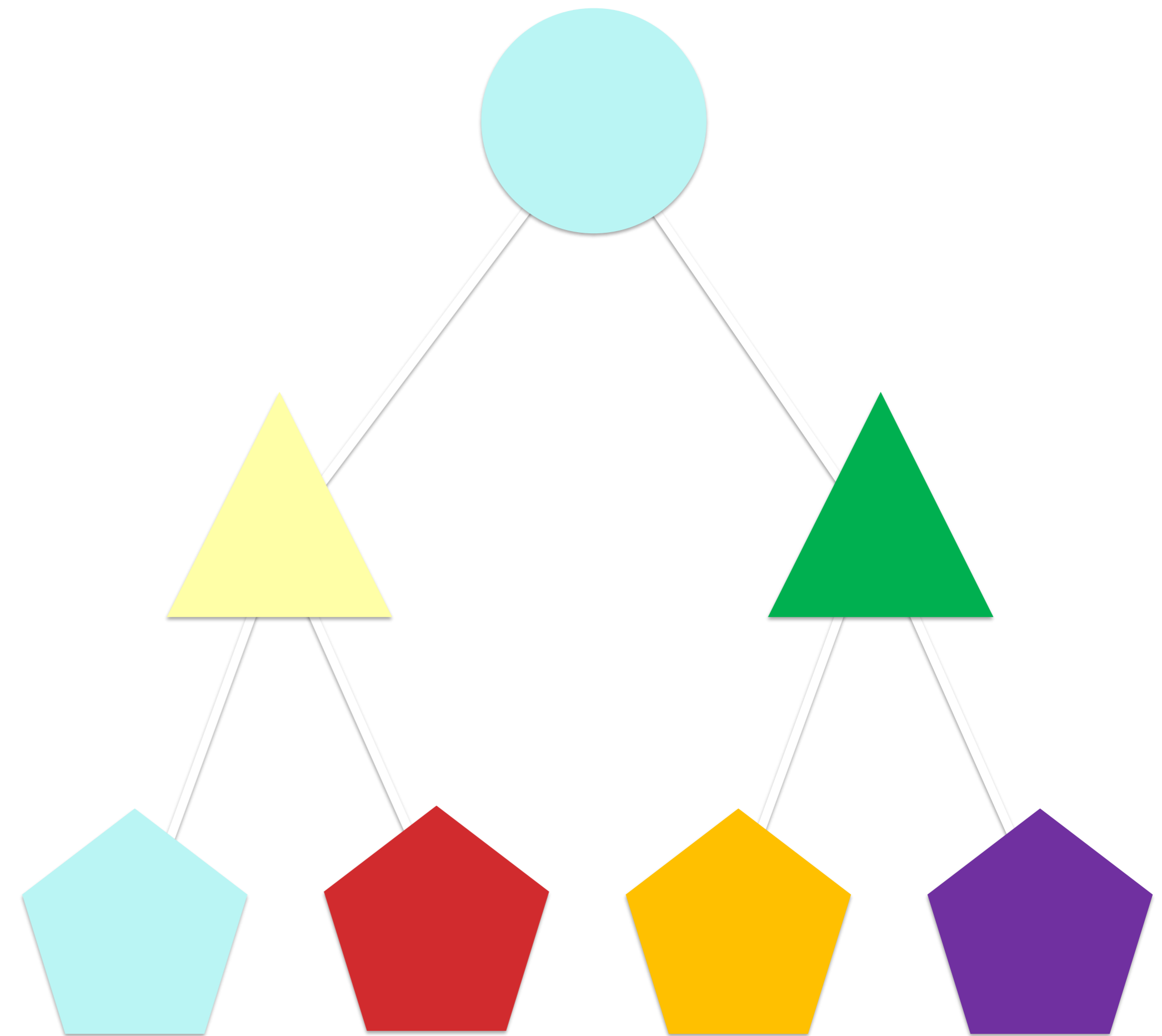
# Pattern Clasification



# Pattern classification:

## Pattern classification

- Supervised classification
- Semi-supervised two-class classification
  - ❖ Control charts
- Unsupervised classification

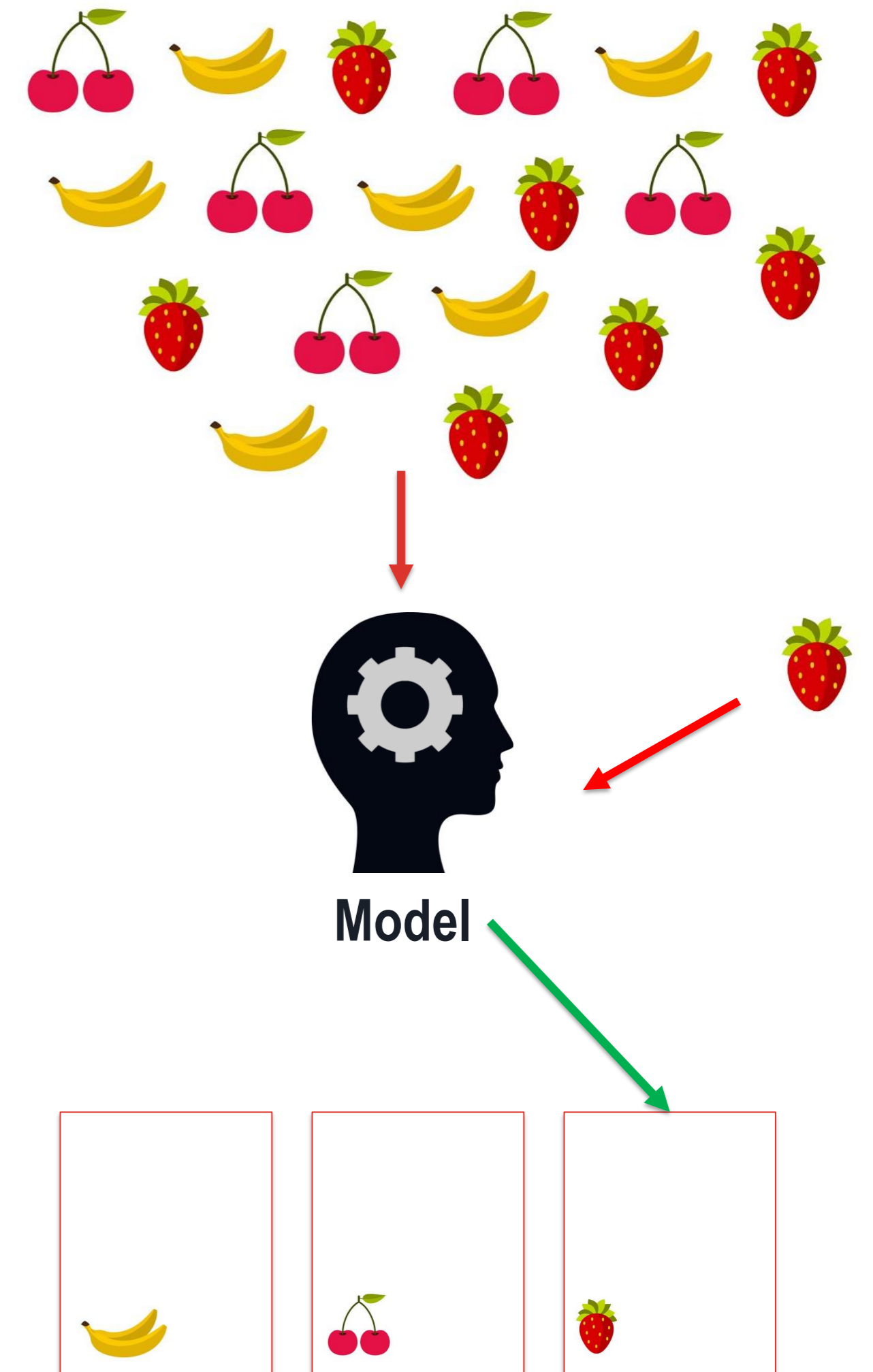
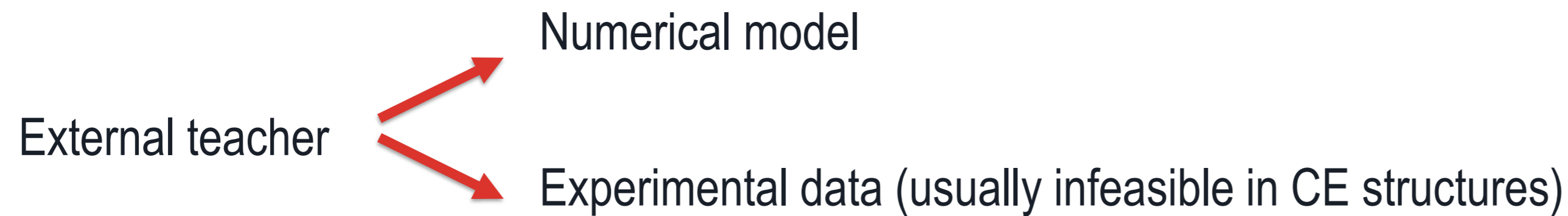


# Pattern classification:

## Supervised classification

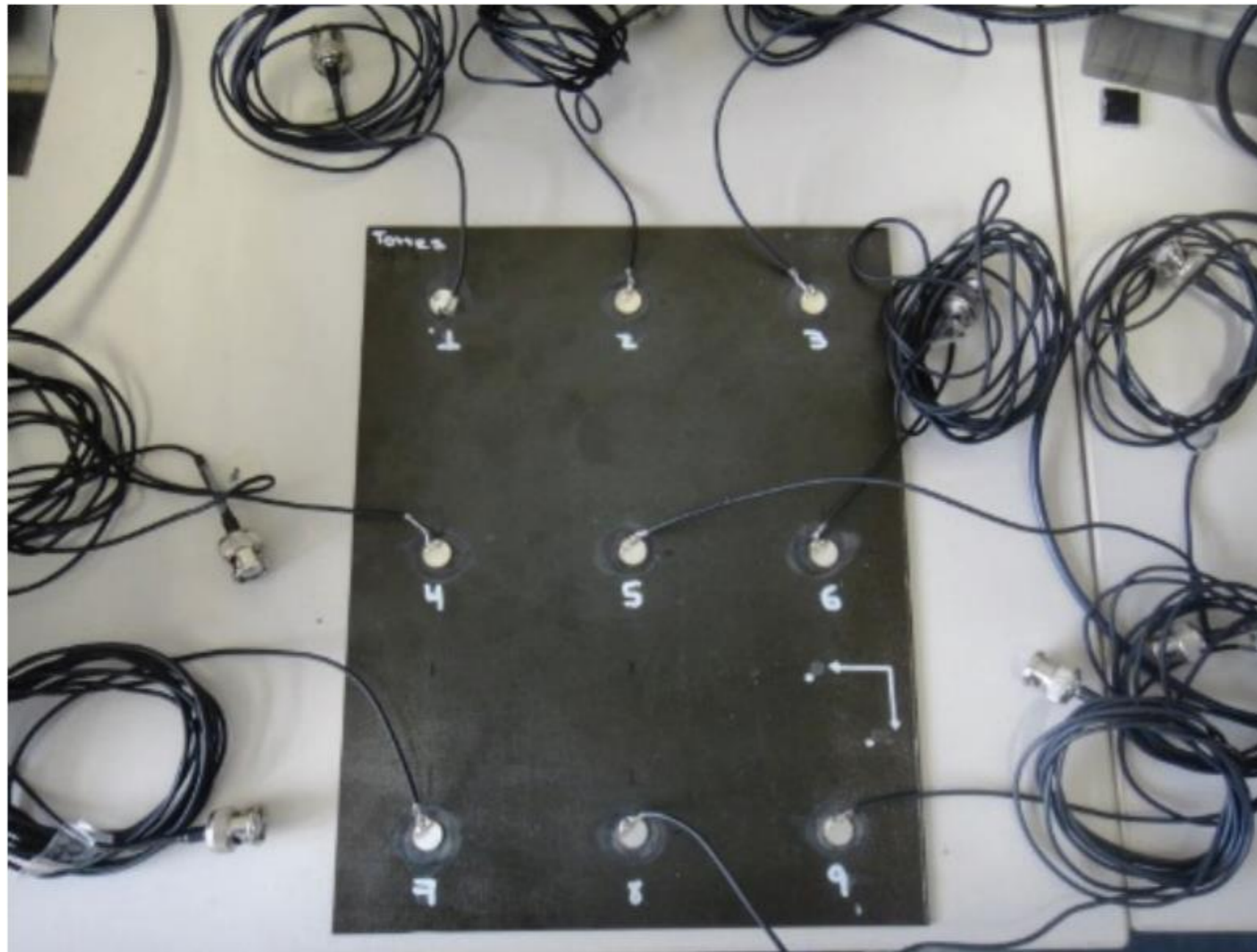
Supervised learning requires an “external teacher” to provide the network information about the cause-effect relation of damage and change in behavior. This involves characterizing a set of input and output data for an assumed relationship, so that associations might be learnt by a machine learning tool.

- ❑ **Classification Problems:** The output variable is typically a category such as Yes or No, or Fraudulent or Not Fraudulent.
- ❑ **Regression Problems:** the output variable is a real value, such as Revenues or Volumes



# Pattern classification: Classification using experimental data

Piezoelectric transducers



Carbon fiber-reinforced composite plate

Tibaduiza, D., Torres-Arredondo, M. Á., Vitola, J., Anaya, M., & Pozo, F. (2018). A damage classification approach for structural health monitoring using machine learning. *Complexity*, 2018.

TABLE 1: Damage description.

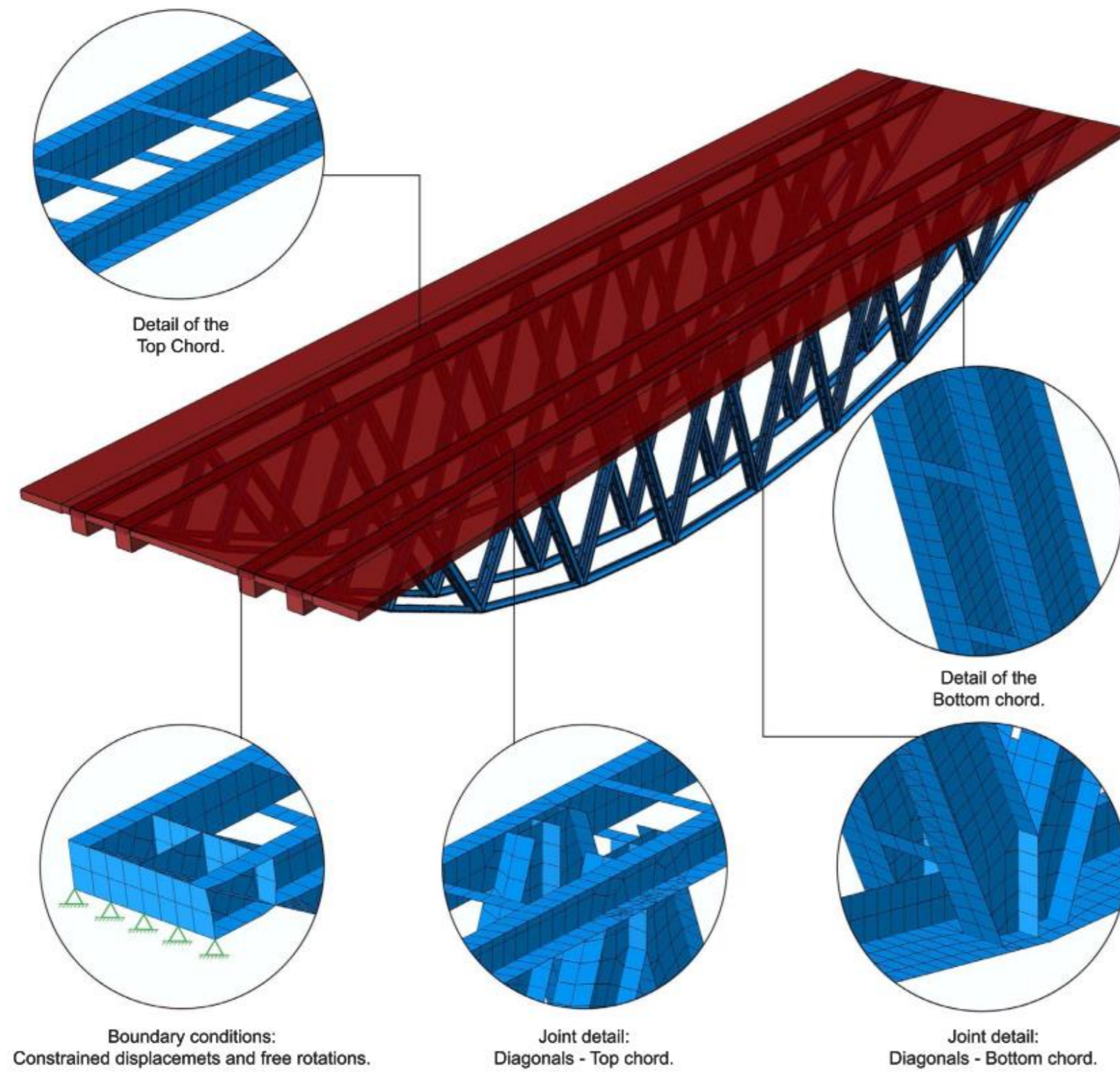
Damage Number	Description
1	Delamination: started symmetrically from the right side of the sample at its middle position along the y-axis. Its width along the y-axis is 16 mm and its depth along the x-axis is 10 mm
2	Extended the previous damage to a width of 33 mm and depth of 42 mm
3	A crack of 25 mm length initiated at the middle position along the vertical y-axis and in the parallel direction to the x-axis
4	Extended the previous crack to a length of 30 mm
5	Extended the previous crack to a length of 45 mm
6	Extended the previous crack to a length of 70 mm

Confusion Matrix - Weighted KNN

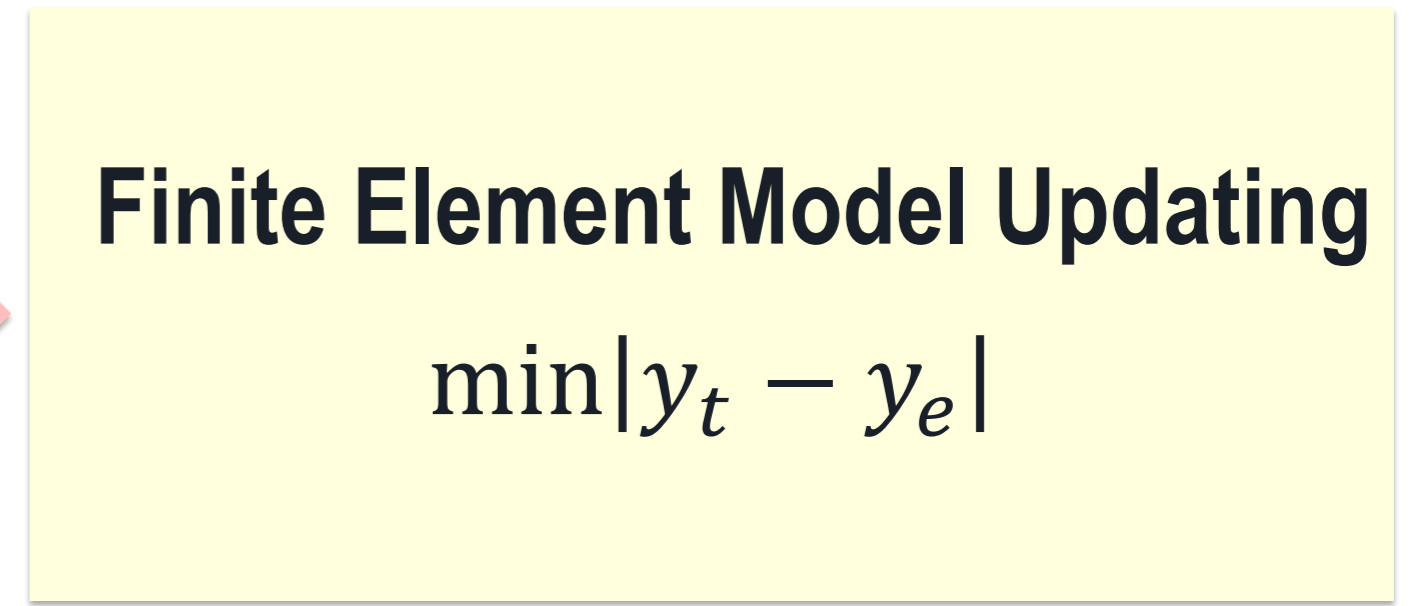
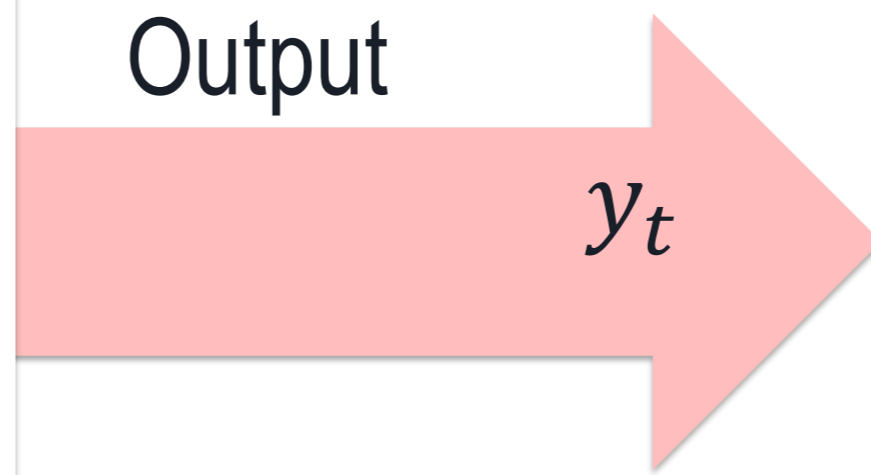
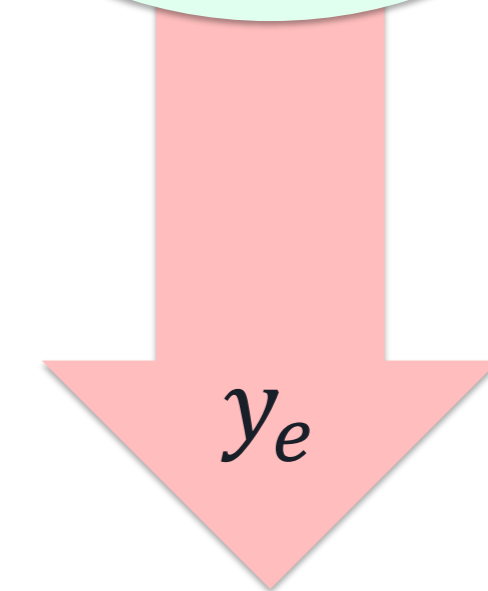
True class ->	UND	96.00% (48)	4.00% (2)	0	0	0	0	0	96.00% (48)	4.00% (2)
	DMG1	0	100.00% (50)	0	0	0	0	0	100.00% (50)	0.00% (0)
	DMG2	0	0	100.00% (50)	0	0	0	0	100.00% (50)	0.00% (0)
	DMG3	0	0	0	100.00% (50)	0	0	0	100.00% (50)	0.00% (0)
	DMG4	0	0	0	0	100.00% (50)	0	0	100.00% (50)	0.00% (0)
	DMG5	0	0	0	0	0	100.00% (50)	0	100.00% (50)	0.00% (0)
	DMG6	0	0	0	0	0	0	100.00% (50)	100.00% (50)	0.00% (0)
	Predicted class ->	UND	DMG1	DMG2	DMG3	DMG4	DMG5	DMG6	TPR/FNR	

# Pattern classification: Classification using numerical models

## Numerical Model - FEM



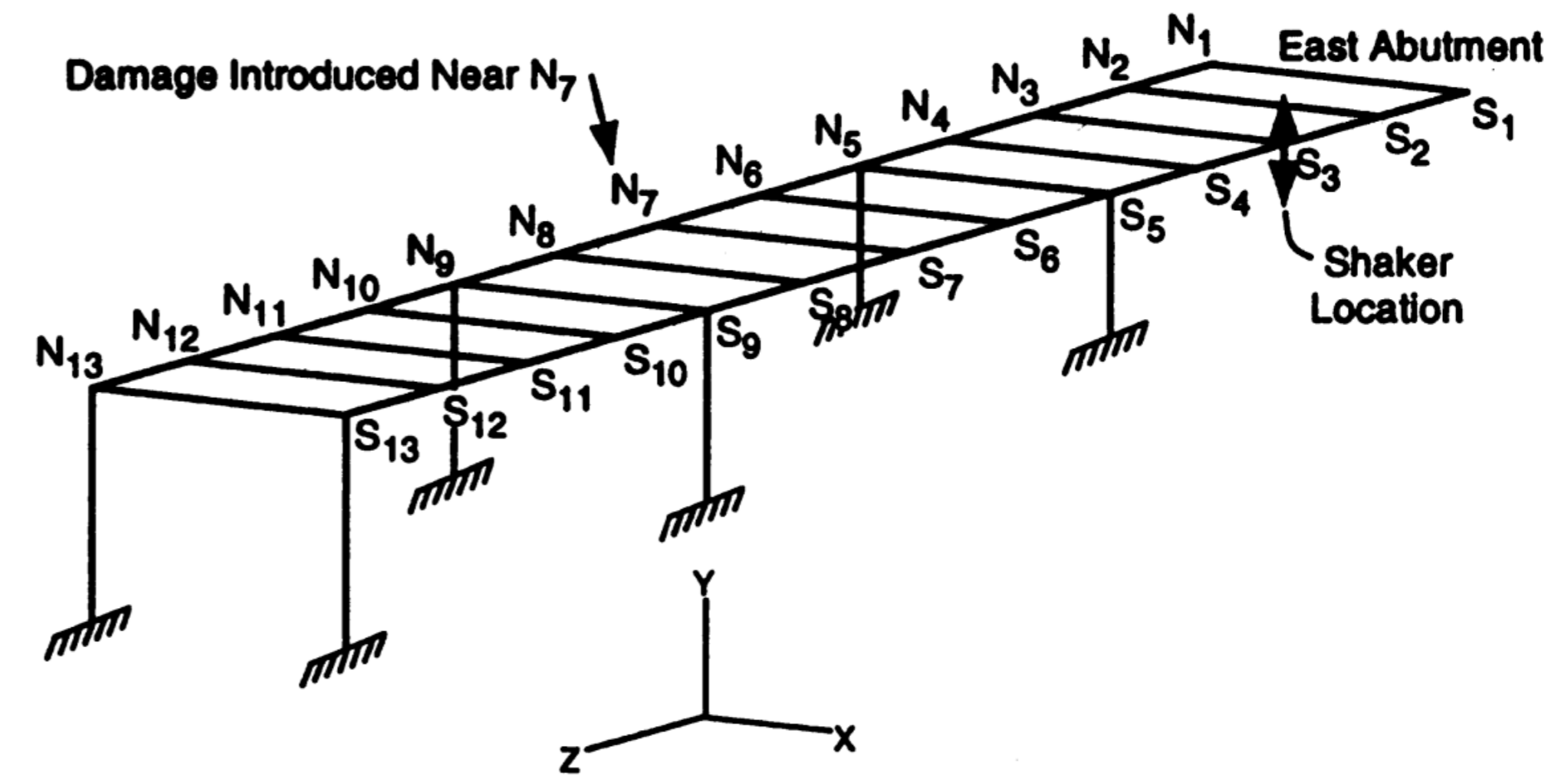
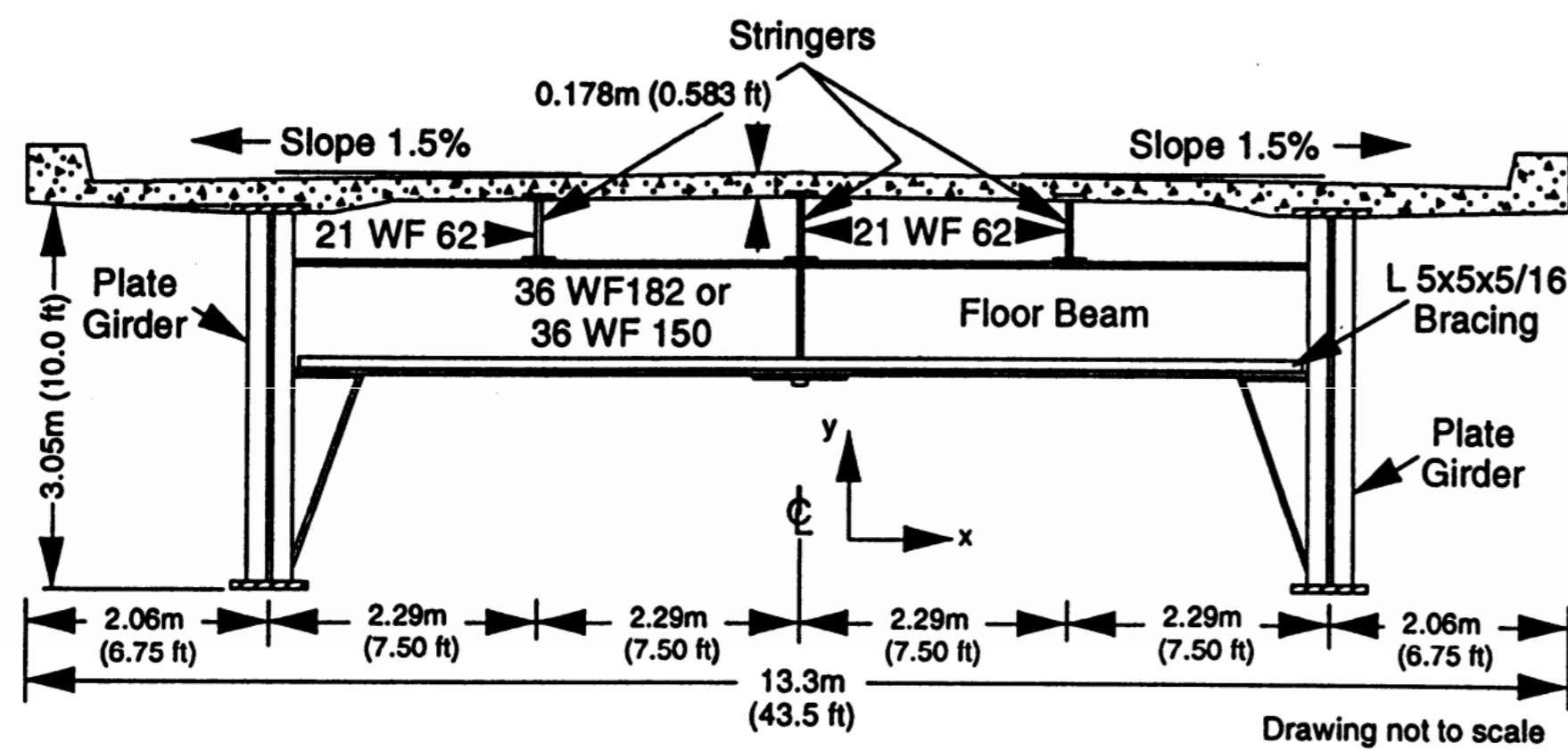
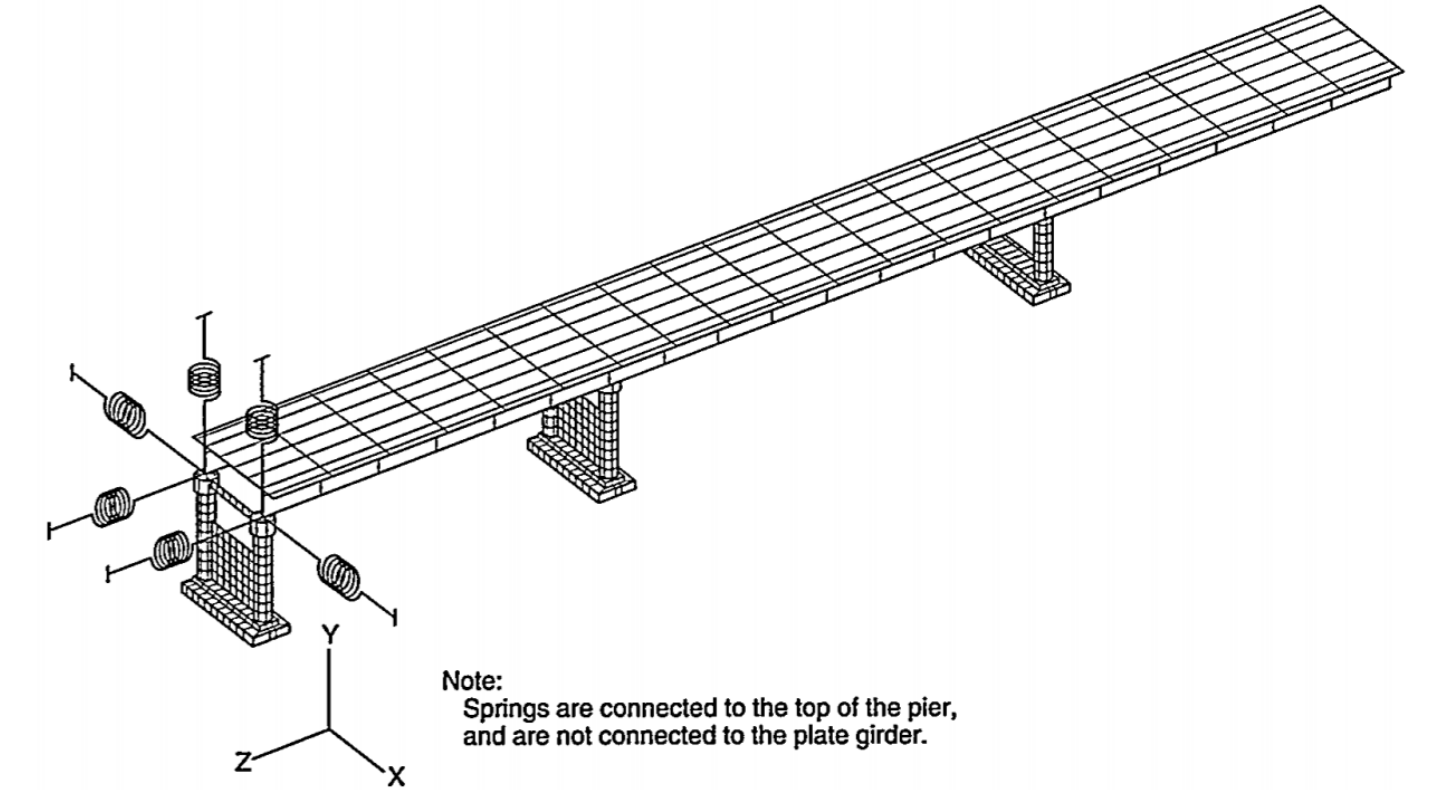
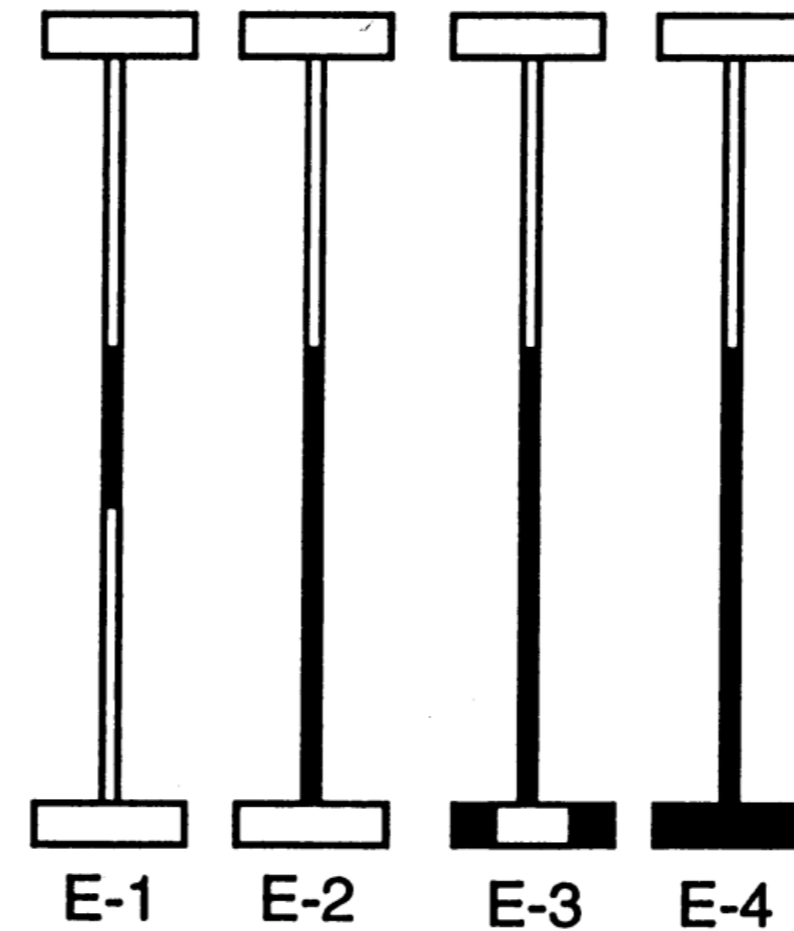
**Model parameters:** Mechanical properties, boundary conditions, connectivity,...etc



# Pattern classification: Classification using numerical models

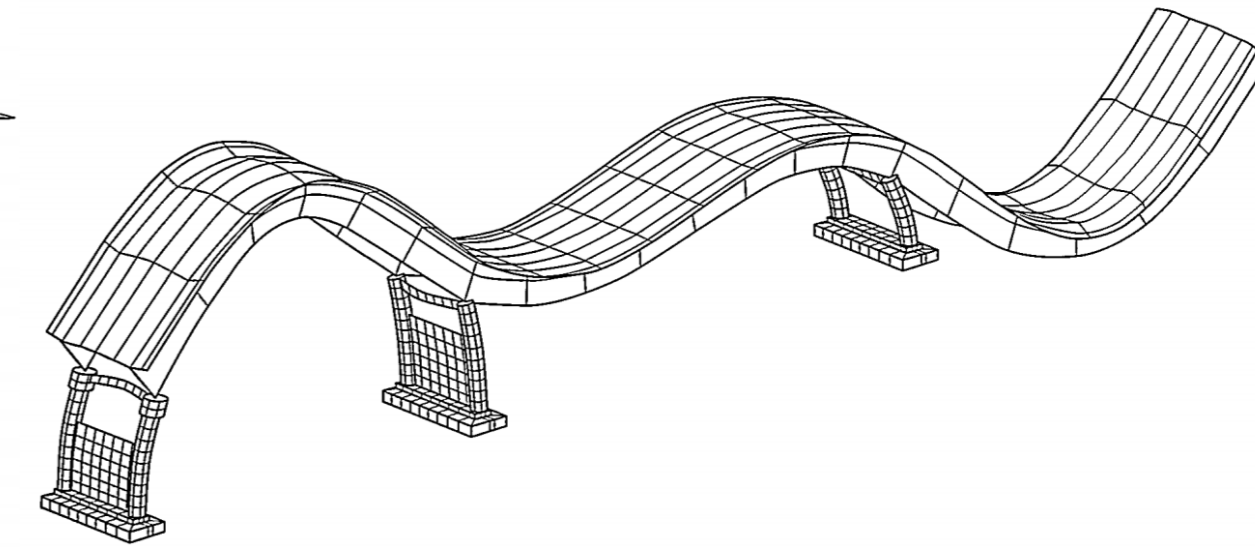
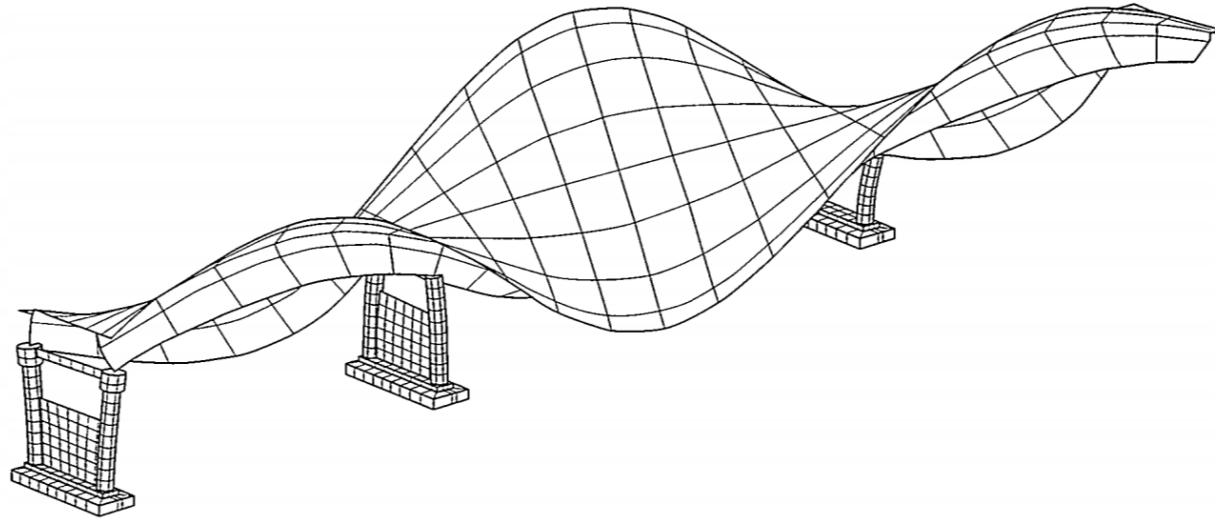
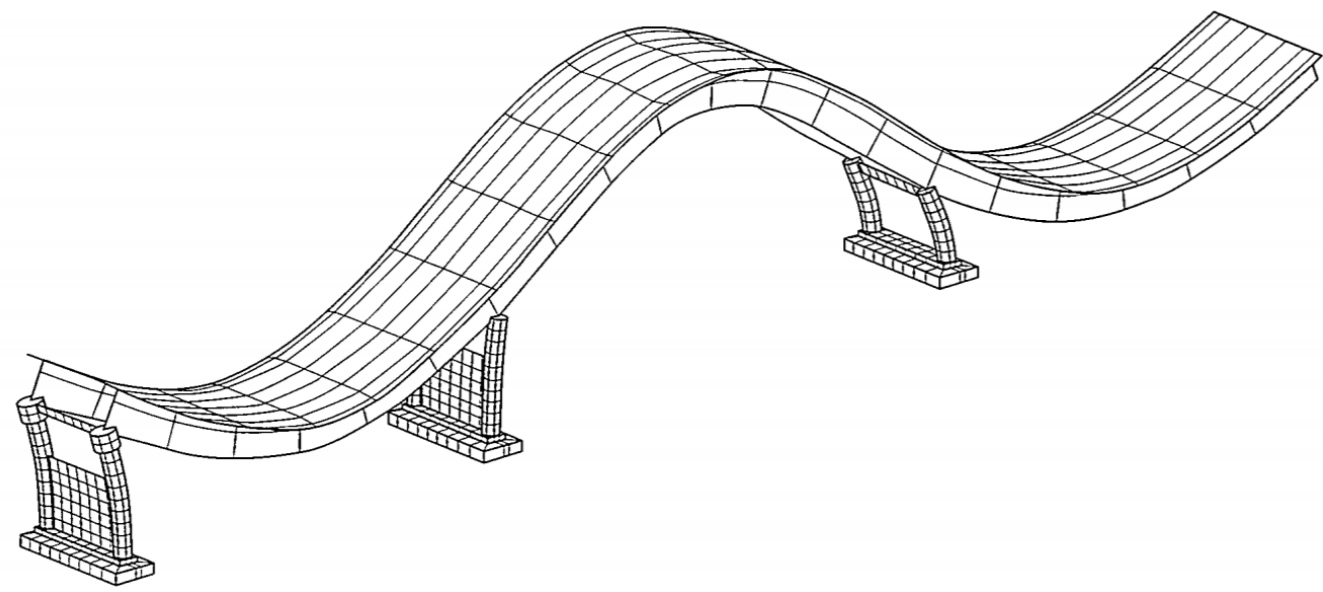


## Damage scenarios



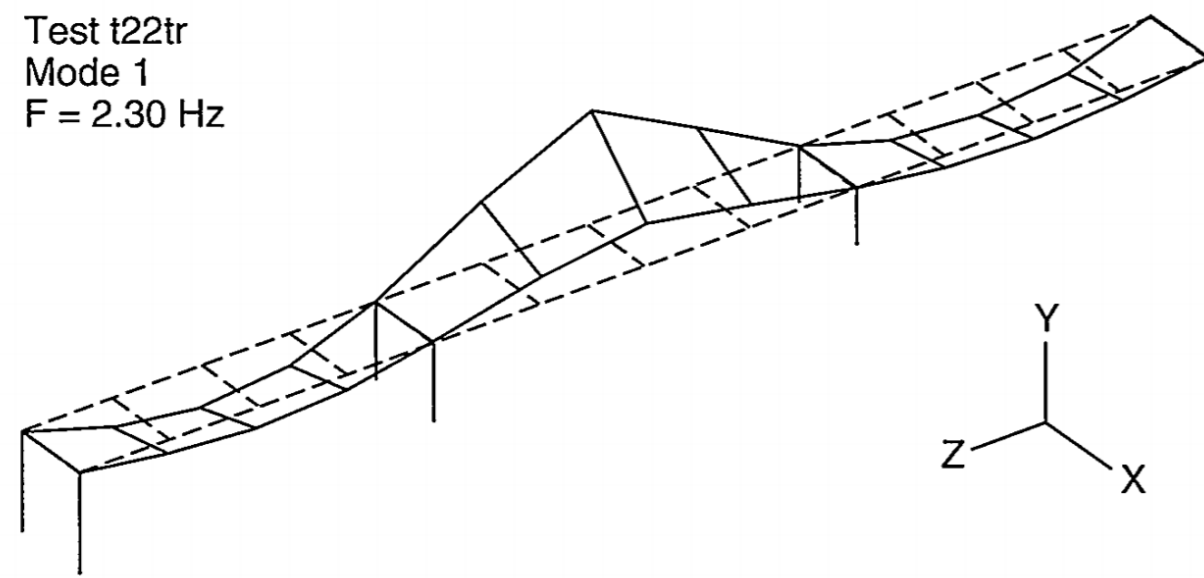
# Pattern classification: Classification using numerical models

Numerical

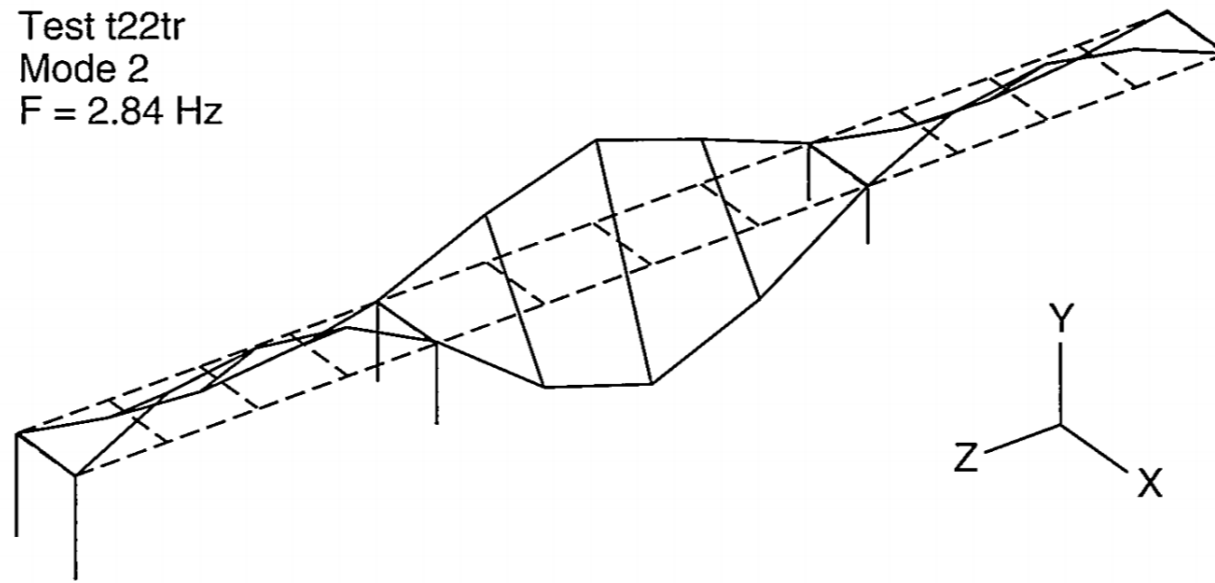


Experimental

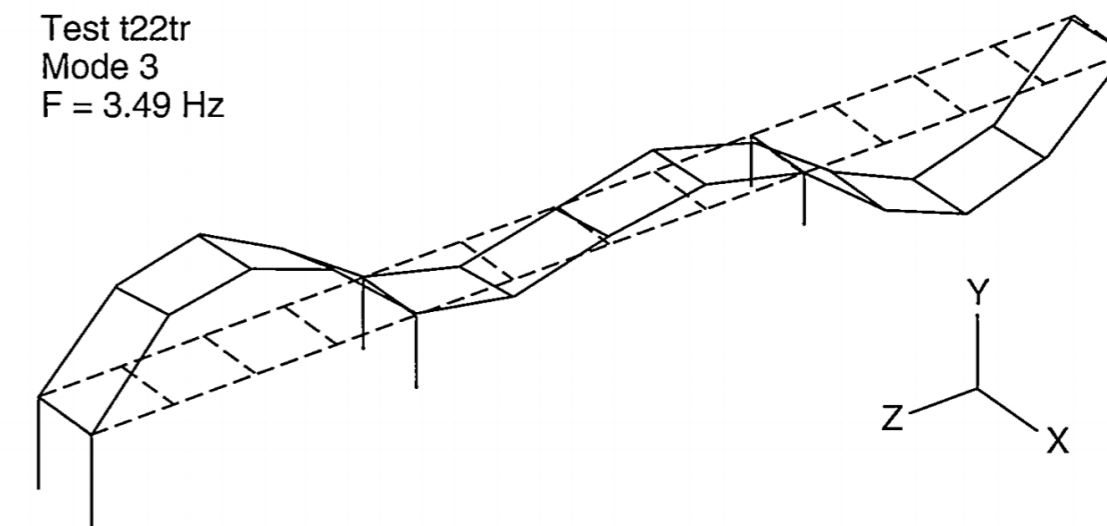
Test t22tr  
Mode 1  
F = 2.30 Hz



Test t22tr  
Mode 2  
F = 2.84 Hz



Test t22tr  
Mode 3  
F = 3.49 Hz



Comparison of Analytical and Experimental Modal Analysis Results

	Resonant Frequency (Hz)						
	Experiment	BR3W	BR3WB	BR3WC	BR3WD	BR3WDSP	BR3WEQ
Mode 1	2.48	2.59	2.59	2.59	2.59	2.63	2.58
Mode 2	2.96	2.78	2.87	2.79	2.88	2.90	2.88
Mode 3	3.50	3.71	3.47	3.71	3.47	3.50	3.44
Mode 4	4.08	4.32	4.11	4.00	4.11	4.23	4.12
Mode 5	4.17	3.96	4.20	4.33	4.21	4.25	4.21
Mode 6	4.63	4.50	4.70	4.56	4.94	4.94	4.77
Ave. % Diff.	--	5.08	1.88	6.39	2.77	3.39	2.24

Farrar, C. R., Duffey, T. A., Goldman, P. A., Jauregui, D. V., & Vigil, J. S. (1996). *Finite element analysis of the I-40 bridge over the Rio Grande* (No. LA-12979-MS). Los Alamos National Lab., NM (United States).



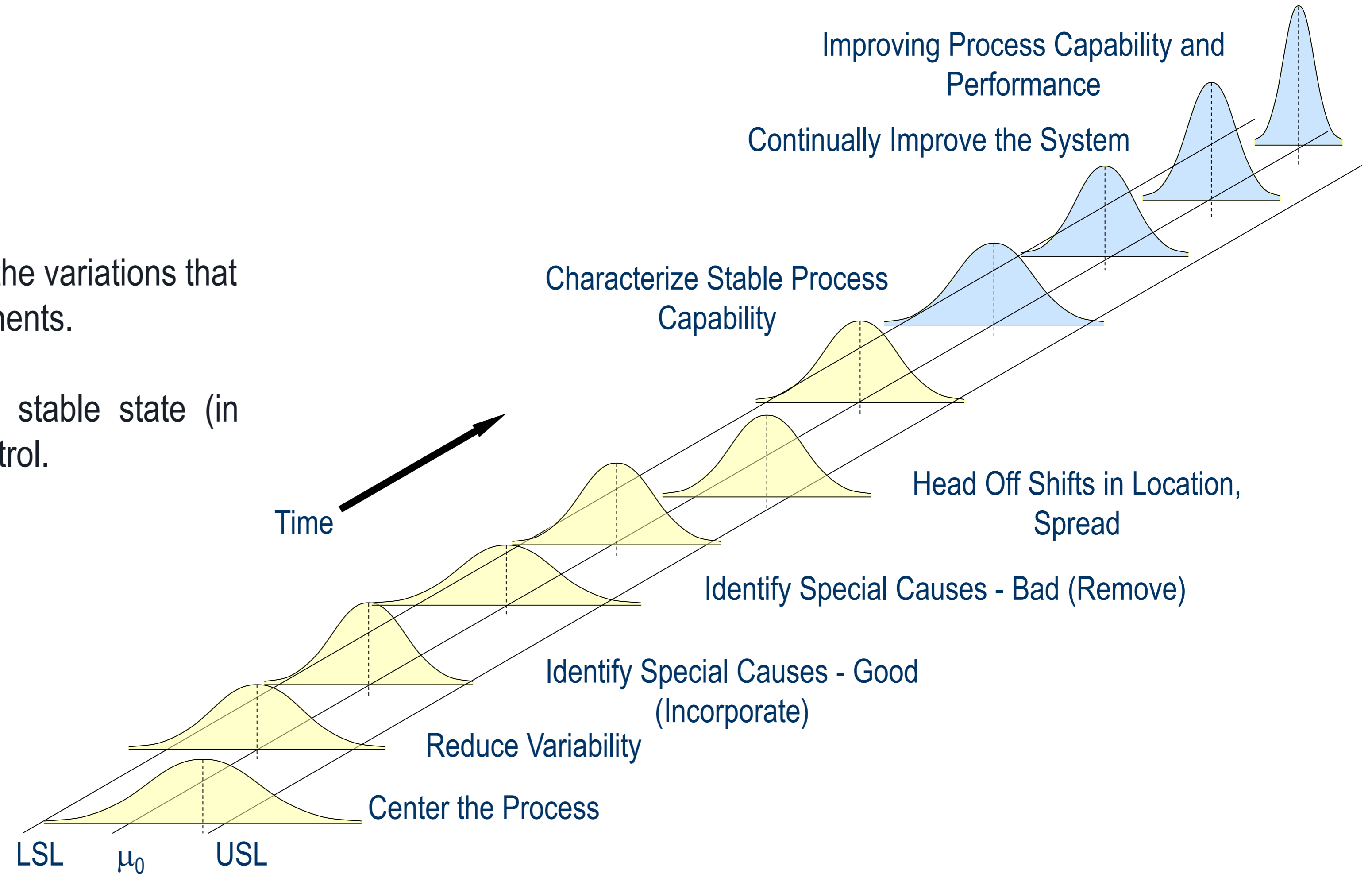
# Pattern classification:

## Semi-supervised classification

## Control charts

A control chart is a means of visualizing the variations that occur in the process data and its components.

It shows whether the process is in a stable state (in statistical control) or out of statistical control.

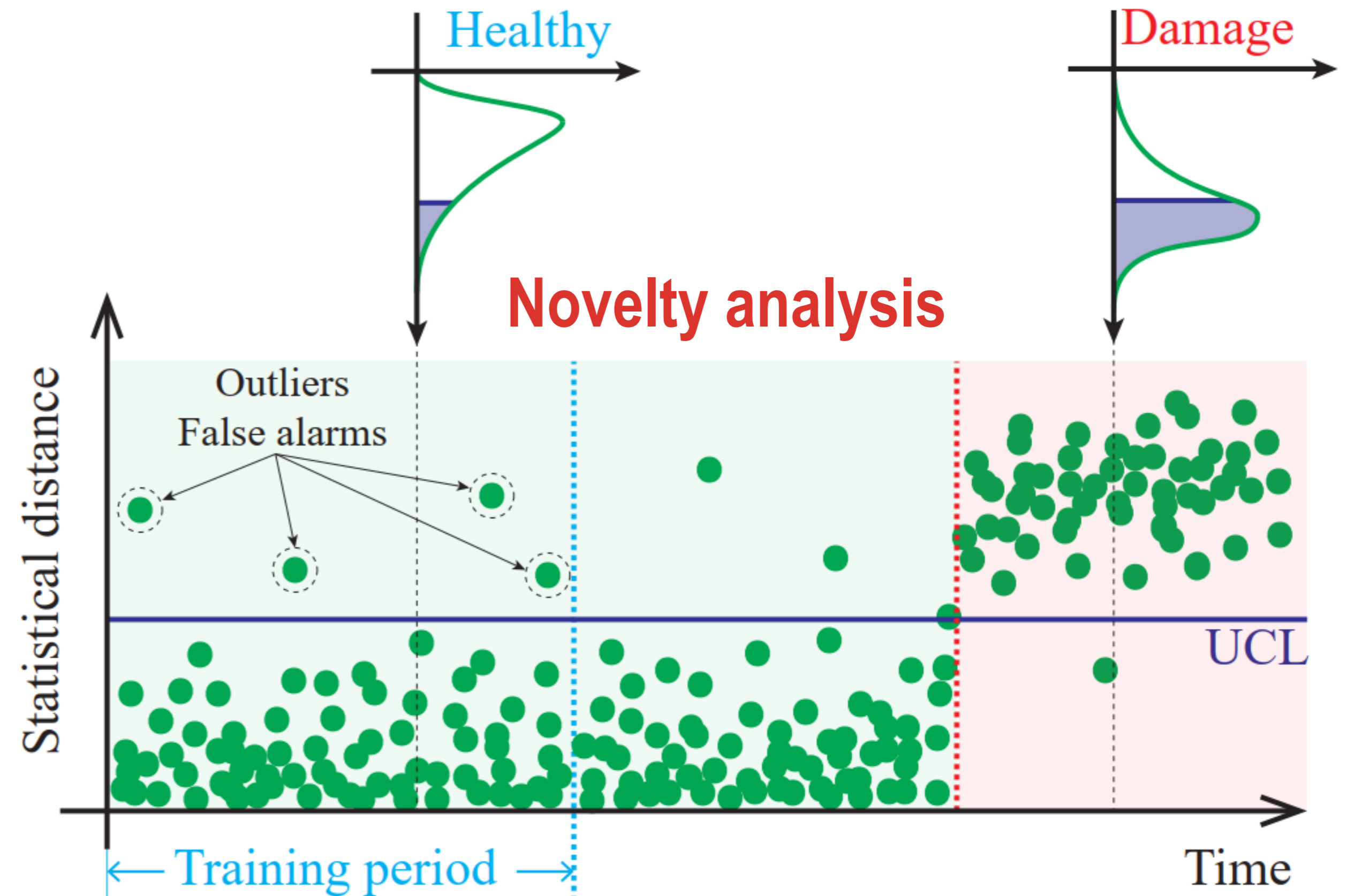




## Pattern classification:

Given the masking effects of environmental/operational factors, the monitored variables contained in matrix  $\mathbf{Y}$  cannot be directly used as damage-sensitive features. Instead, the residual error matrix  $\mathbf{E}$  can be used instead, that is  $\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}$ , with  $\hat{\mathbf{Y}}$  being the predictions computed from a baseline in-control population (training period).

Under the assumption that  $\hat{\mathbf{Y}}$  reproduces the part of the variance of the resonant frequencies corresponding to changes in environmental/operational conditions,  $\mathbf{E}$  only contains the residual variance stemming from identification errors and un-modelled environmental/operational conditions. If certain damage develops, this only affects the data contained in  $\mathbf{Y}$ , while  $\hat{\mathbf{Y}}$  remains unaltered. Therefore,  $\mathbf{E}$  concentrates the damage-induced variance apt for being used for damage detection purposes.



The structure is assumed to be in a healthy state  
It must be long enough to capture all the environmental and operational conditions in the structure (typically 1 year)

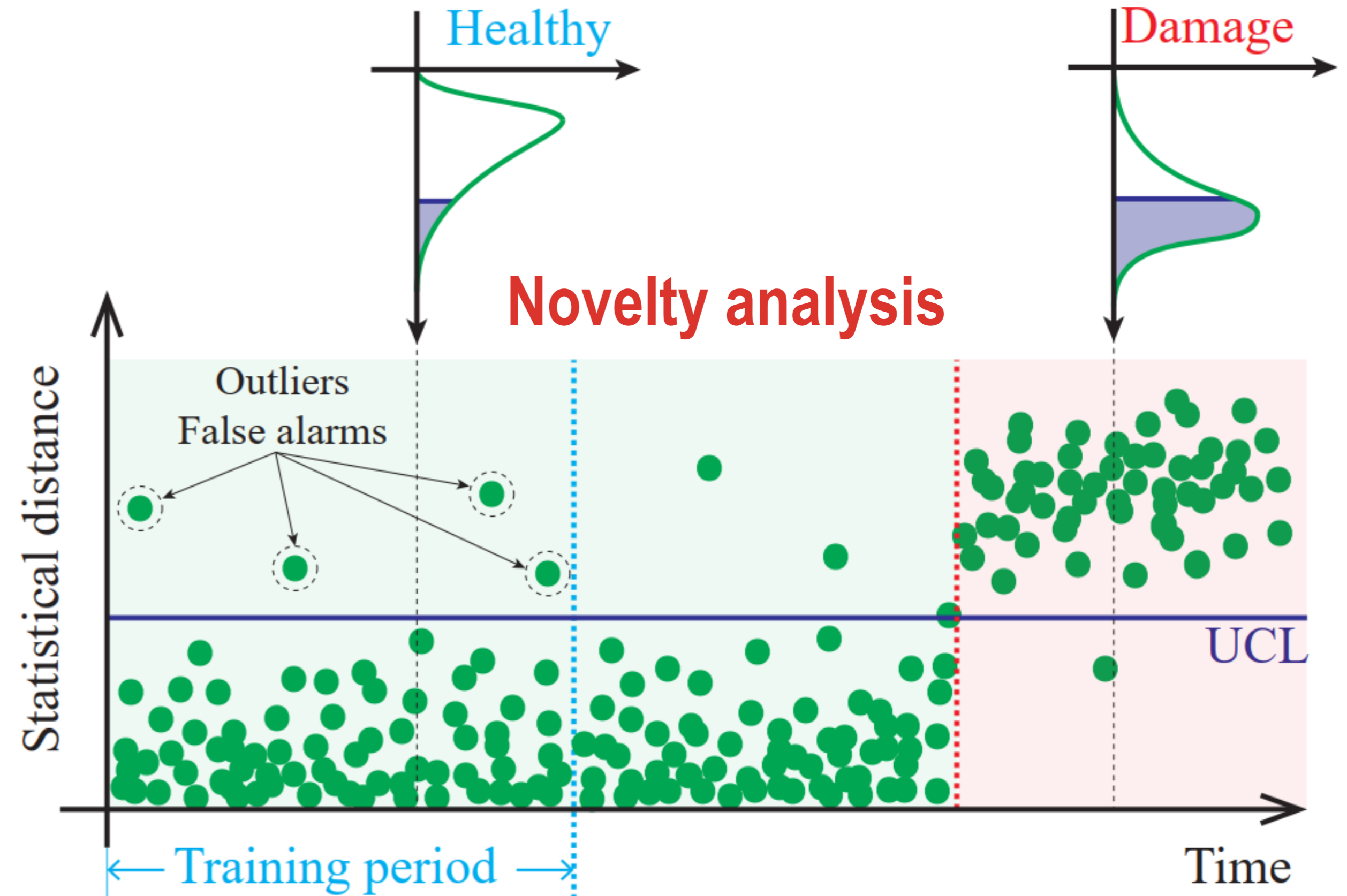
## Pattern classification:

Once the residual error matrix  $\mathbf{E}$  is computed, the presence of damage is investigated using control charts. These furnish in time a certain statistical distance accounting for disturbances in the distribution of the residuals contained in  $\mathbf{E}$ . By defining an in-control region, the appearance of out-of-control processes, possibly associated to damage, is detected in the shape of data points violating the in-control region.

### Hotelling's $T^2$ control chart:

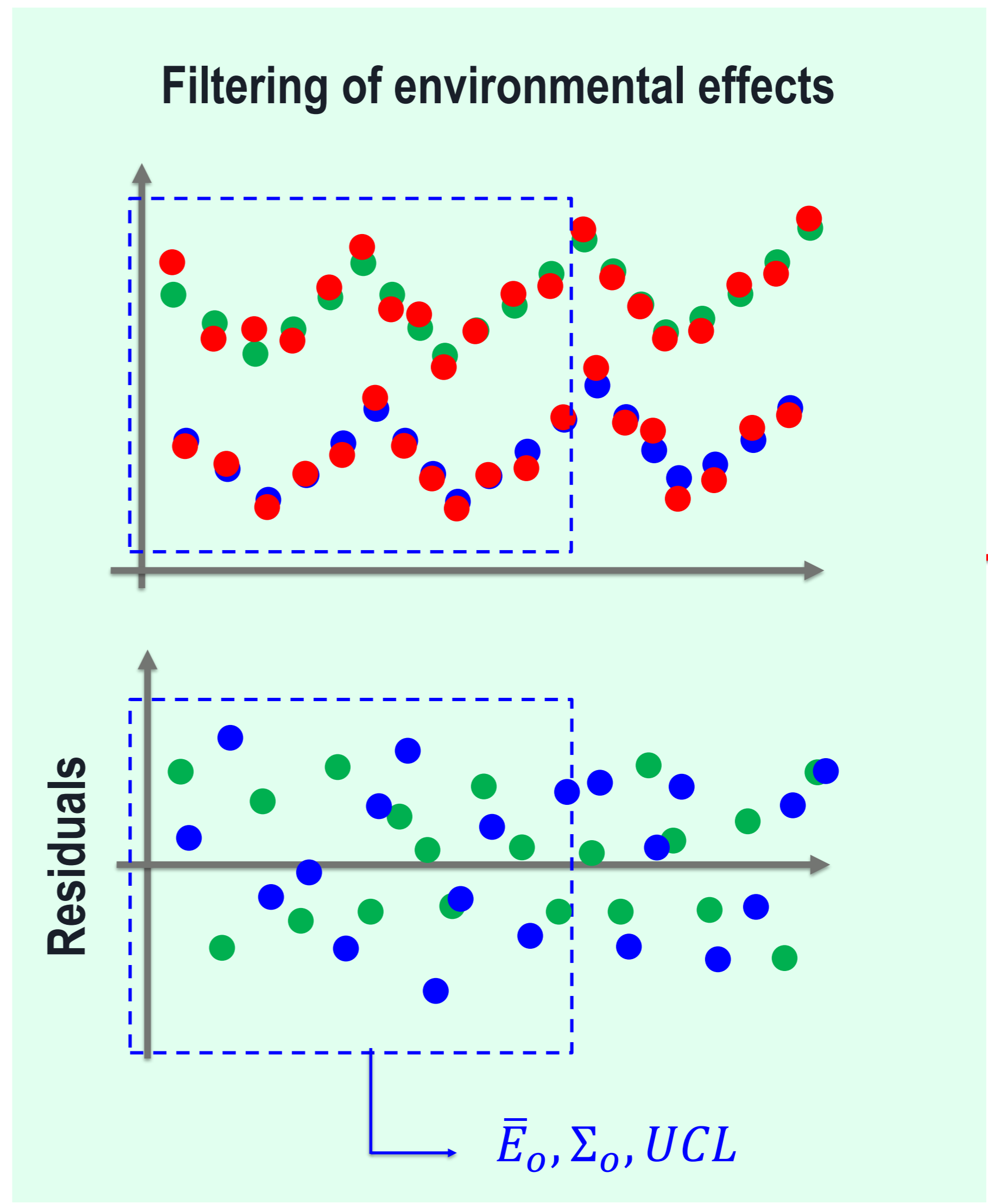
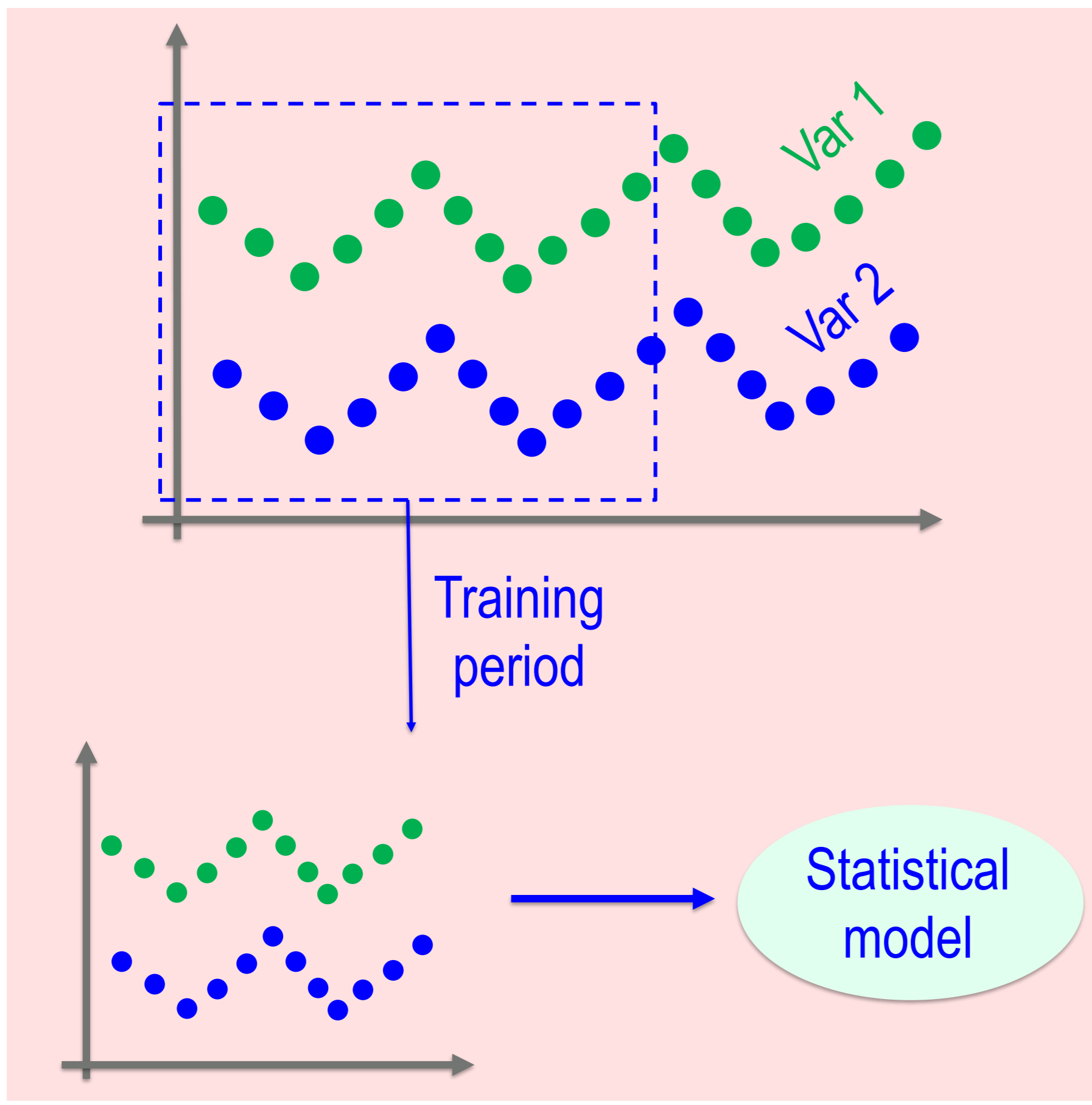
$$T_i^2 = r(\bar{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_o)^T \boldsymbol{\Sigma}_o^{-1} (\bar{\mathbf{E}} - \mathbf{E}_o)$$

- $r$  – Subgroup size (integer)
- $\bar{\mathbf{E}}$  mean of the residuals in the subgroup of the last  $r$  observations
- $\mathbf{E}_o$  and  $\boldsymbol{\Sigma}_o$  are the mean values and the covariance matrix of the residuals statistically estimated in the training period.



The structures is assumed to be in a healthy state  
It must be long enough to capture all the environmental and operational conditions in the structure (typically 1 year)

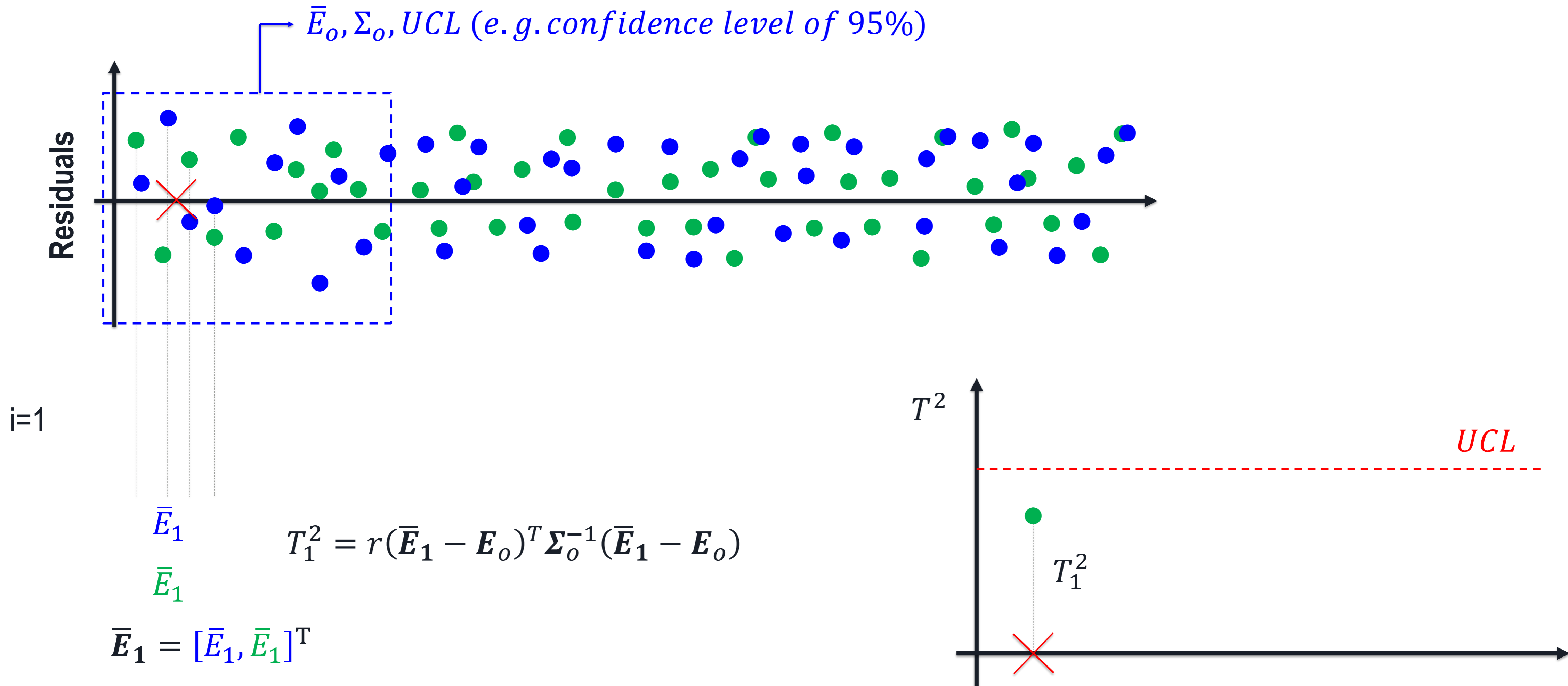
# Pattern classification:



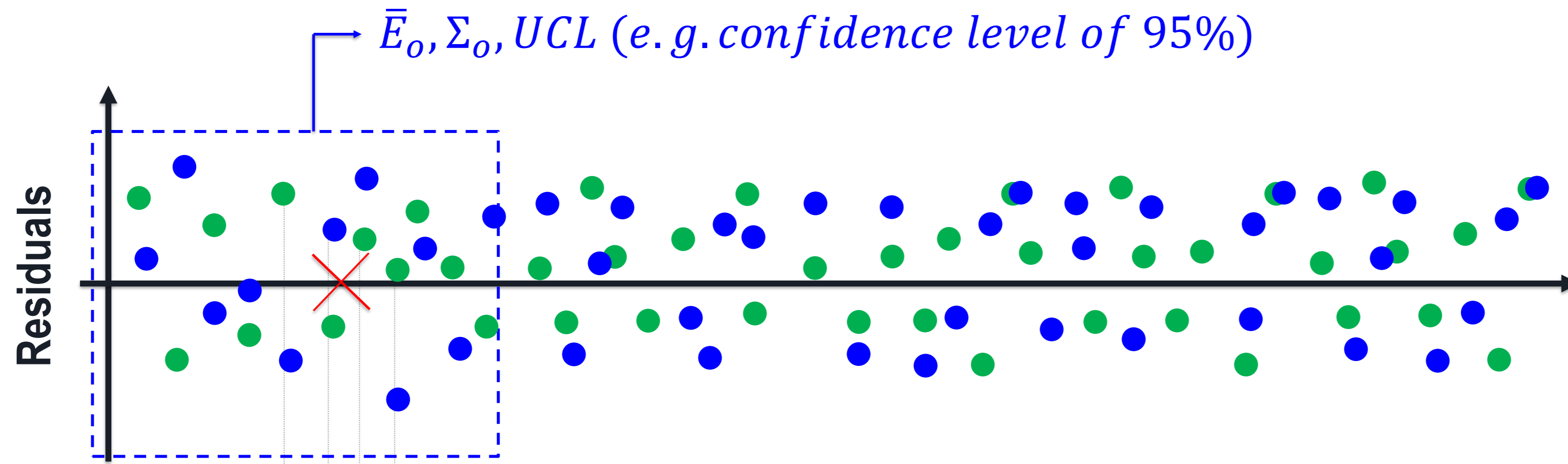
Control chart



# Pattern classification:



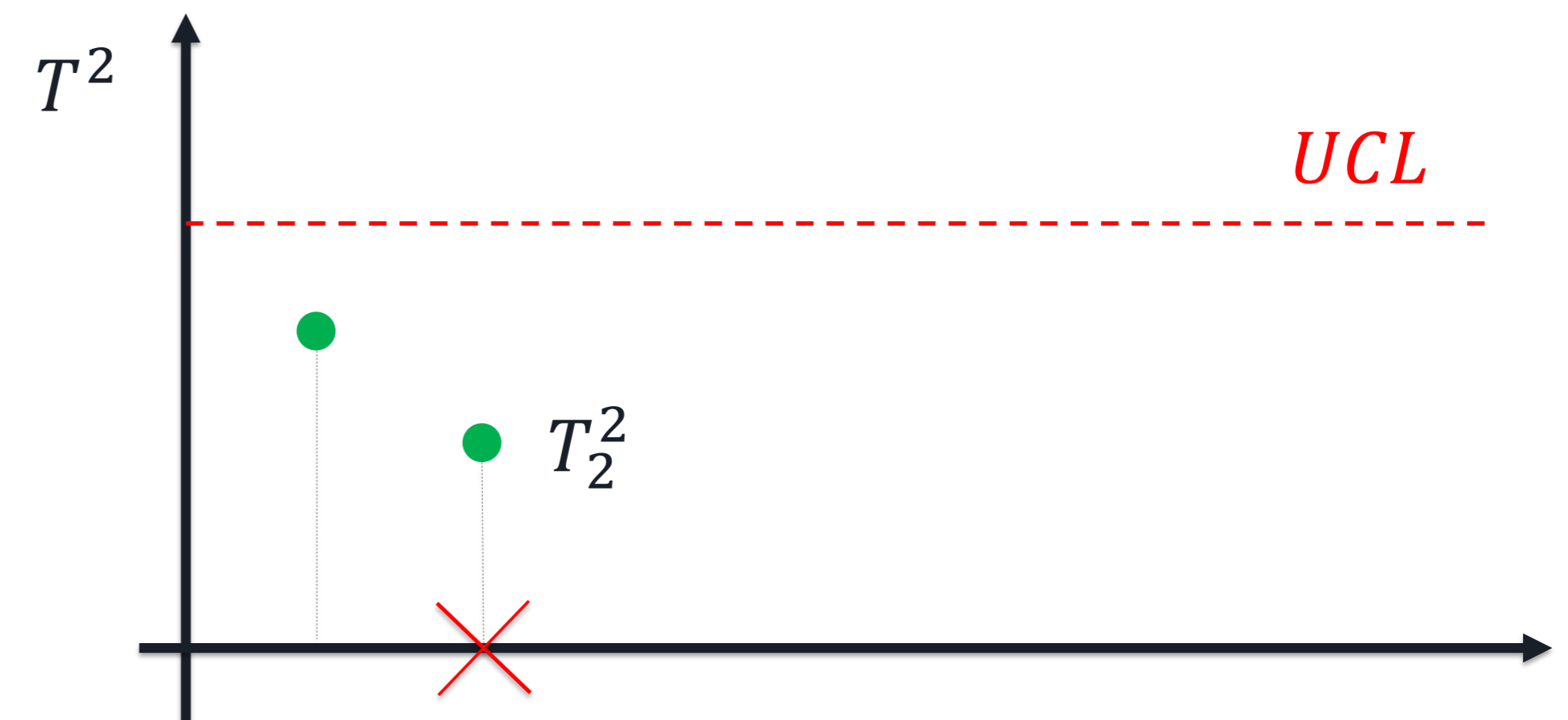
# Pattern classification:



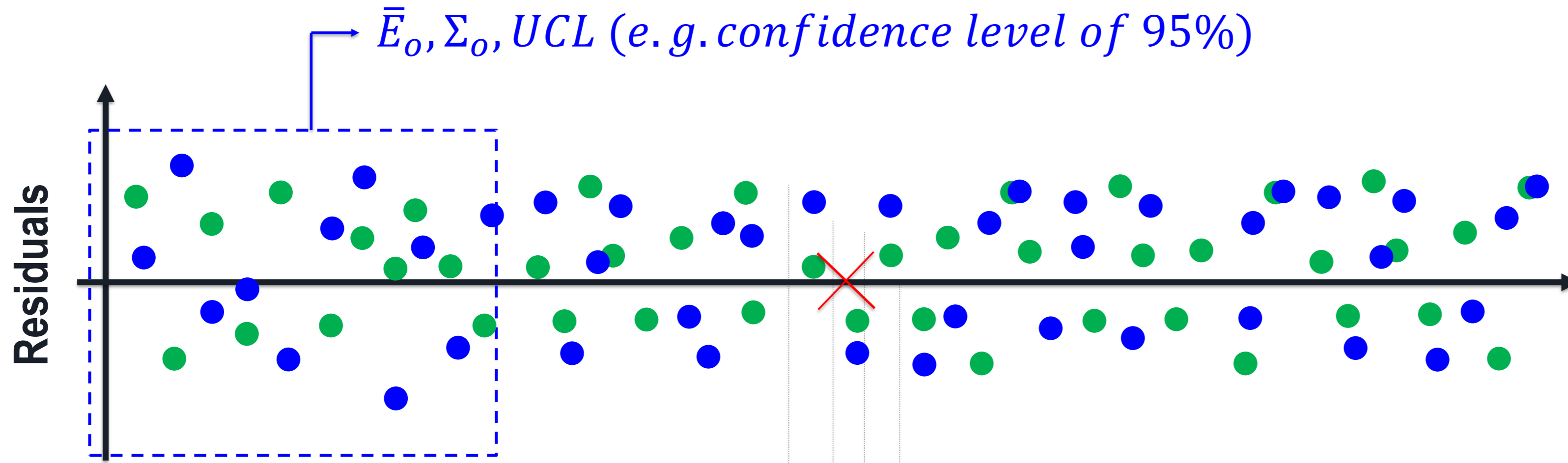
i=2

$$T_2^2 = r(\bar{E}_2 - E_o)^T \Sigma_o^{-1} (\bar{E}_2 - E_o)$$

$\bar{E}_2$   
 $\bar{E}_2$   
 $\bar{E}_2 = [\bar{E}_2, \bar{E}_2]^T$



# Pattern classification:

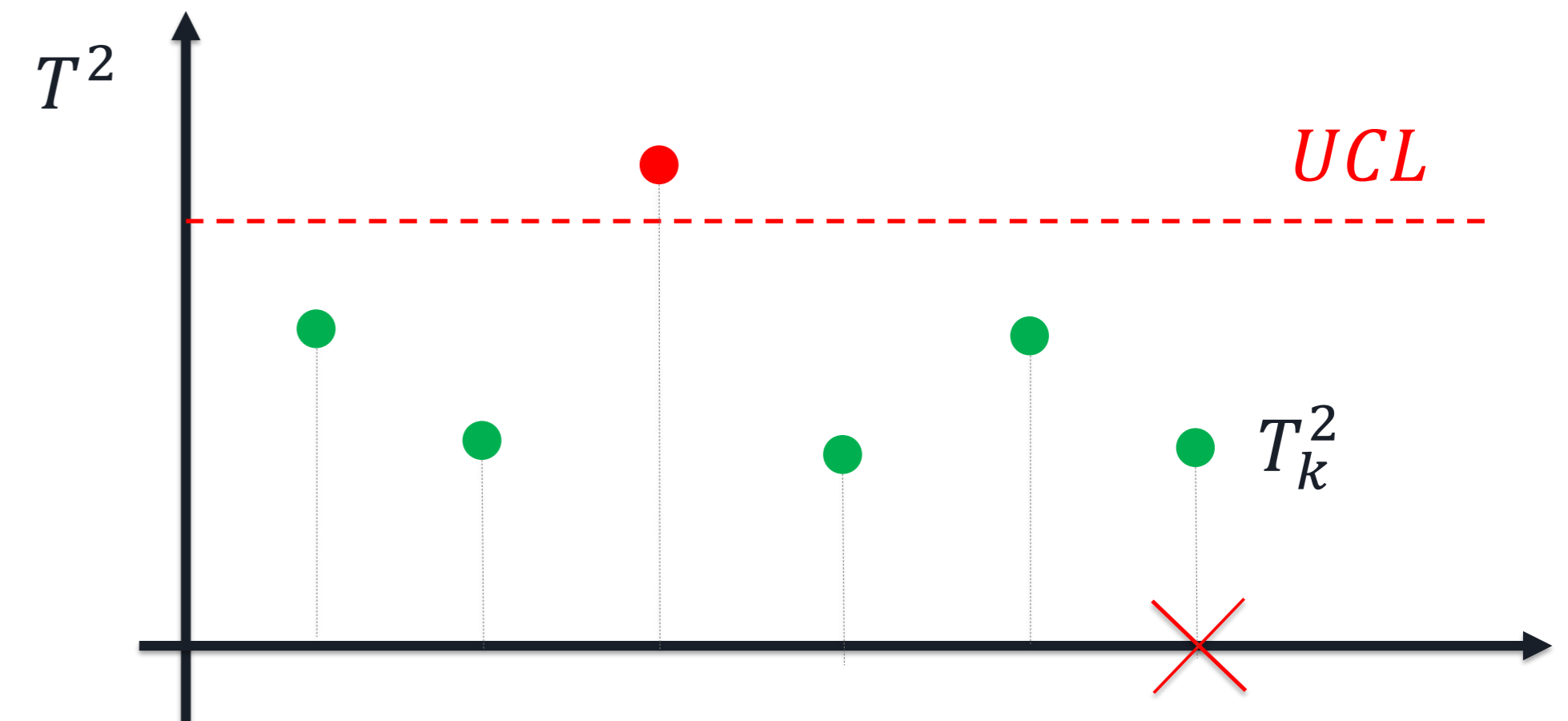


$i=k$

$$T_k^2 = r(\bar{E}_k - E_o)^T \Sigma_o^{-1} (\bar{E}_k - E_o)$$

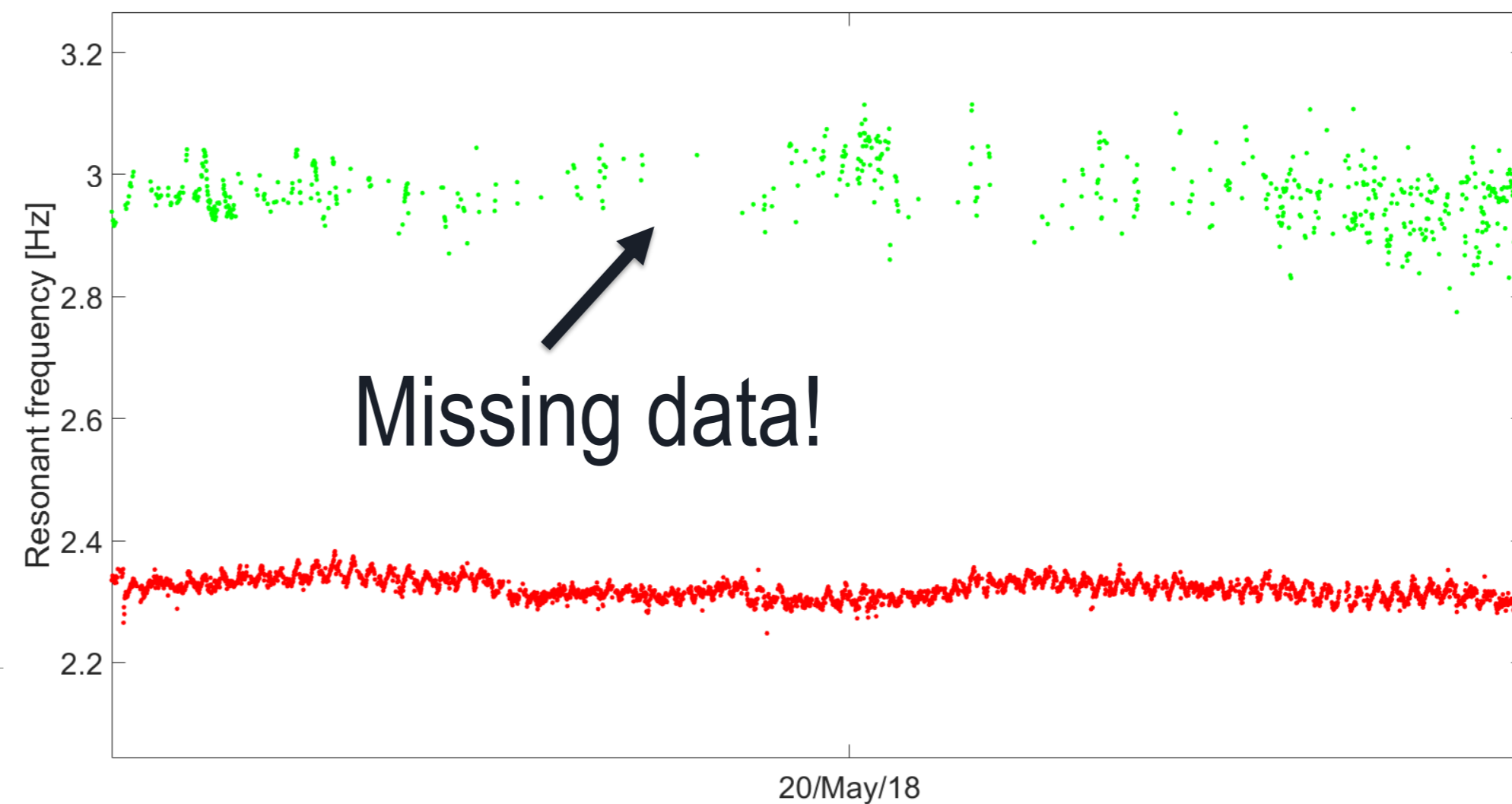
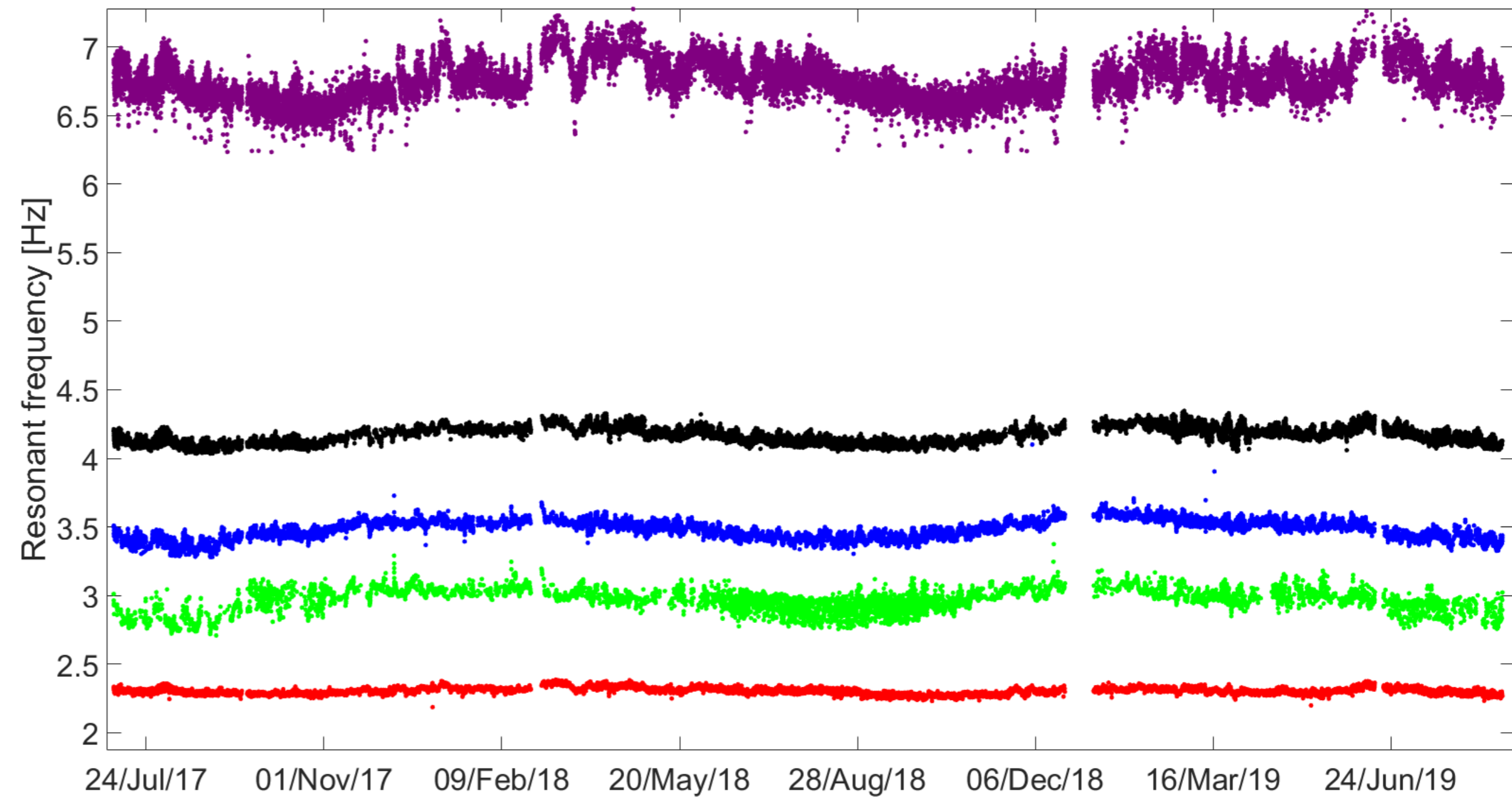
$\bar{E}_k$   
 $\bar{E}_k$

$$\bar{E}_k = [\bar{E}_k, \bar{E}_k]^T$$



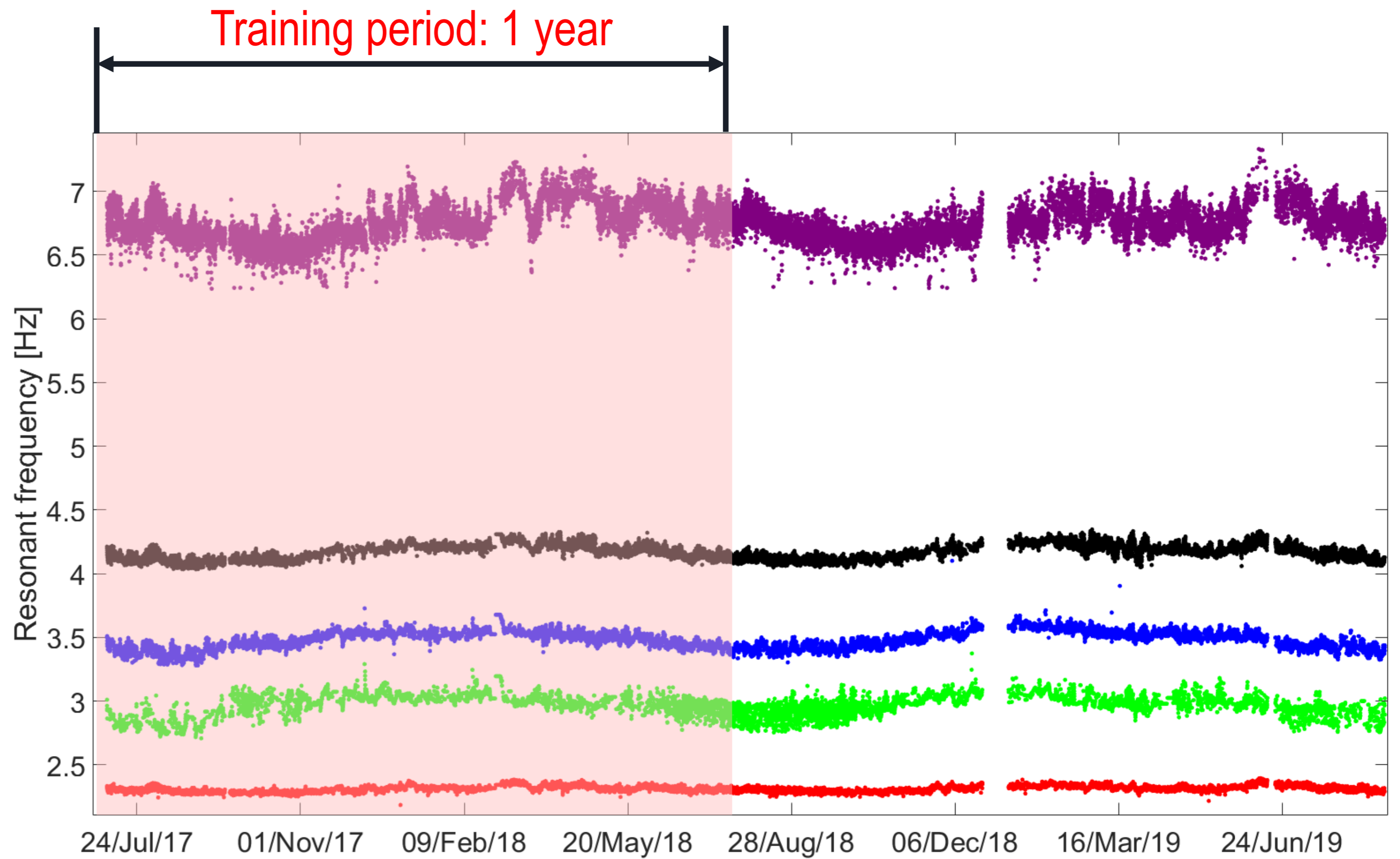
# Taller Parte 2

## Example: Consoli Palace



## Taller Parte 2

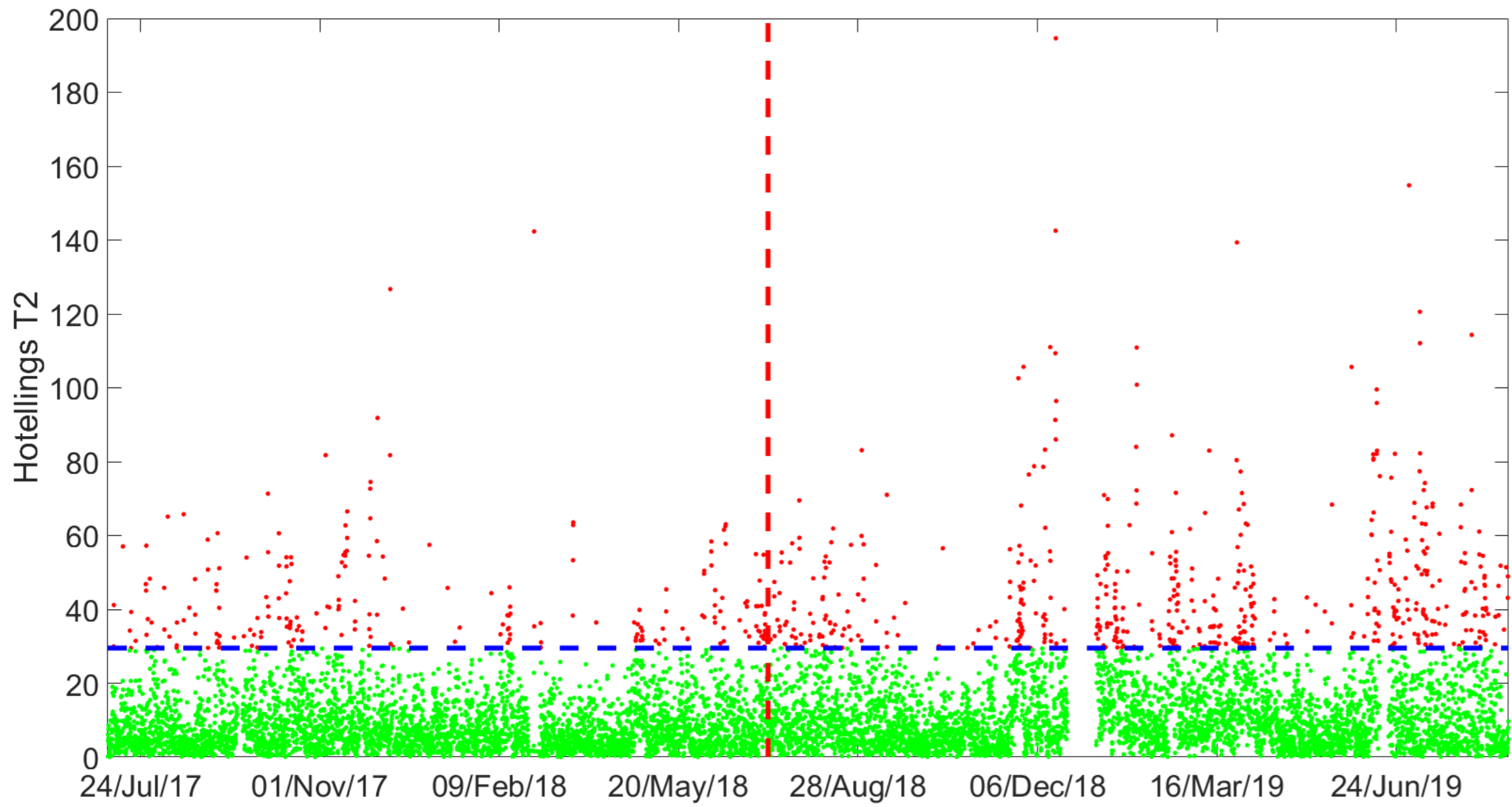
Example: Consoli Palace





# Taller Parte 2

## Undamaged



## Damaged

