Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 3 de diciembre de 2021
Actualización: 04/12/2021, hora: 13:46:58

Ejercicio resuelto 1. Hallar a para que el vector $v=(a,2,3)$ pertenezca al subespacio $U=<(2,0,1),(1,1,1)>$.

Solución. El vector v estará en U si y sólo si es combinación lineal de $\{(2,0,1),(1,1,0)\}$, es decir, si existen $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tal que
$$v=\lambda(2,0,1)+\mu(1,1,1).$$
Igualando, tenemos el sistema
$$\begin{aligned} 2\lambda+\mu&=a\\ \mu&=2\\ \lambda+\mu&=3. \end{aligned}$$
El sistema tendrá solución si $r(A)=r(A|b)$. Tenemos
$$A|b=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Como el rango de A es 2, el sistema tiene solución si y sólo si $r(A|b)=2$, es decir,
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & a\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0.$$
El determinante es $-a-1+6$, luego $a=5$.

Ejercicio resuelto 2 (variación del anterior)**.** Hallar a para que el vector $v=(a,2,3)$ pertenezca al subespacio $\{(2,0,1),(1,1,1),v\}$ sea un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

Solución. El conjunto será un sistema de generadores si y sólo si todo vector de $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de $A=\{(2,0,1),(1,1,0),(a,2,3)\}$, es decir, si para $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, existen $\lambda,\mu,\delta\in\mathbb{R}$ tal que
$$(x,y,z)=\lambda(2,0,1)+\mu(1,1,1)+\delta(a,2,3).$$
Igualando, tenemos el sistema
$$\begin{aligned} 2\lambda+\mu+\delta a&=x\\ \mu+2\delta&=y\\ \lambda+\mu+3\delta&=z. \end{aligned}$$

El sistema tendrá solución si $r(A) = r(A|b)$. Tenemos

$$A|b = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \end{pmatrix}.$$

Si el rango de A es 2, los vectores de A son generadores de un plano de $\mathbb{R}^3$ y por tanto, no daríán todo $\mathbb{R}^3$. Por tanto, hace falta que el rango sea 3. En tal caso, ya se tendría que $r(A|b) = 3$ pues dicha matriz tiene como mucho rango 3 al tener 3 filas. Concluimos pues que A es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ si y sólo $r(A) = 3$, es decir $|A| \neq 0$. Dicho determinante es

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -a+5.$$

Por tanto, A es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$ si y sólo si $a \neq 5$.

Observación: es de esperar este resultado si uno ya ha hecho el ejercicio anterior. Del ejercicio 1, para el valor $a = 5$, el vector v está en el plano determinado por los otros dos vectores; en caso contrario, no está en el plano. En esta última situación, los tres vectores no son coplanarios luego las combinaciones lineales de ellos determinan todos los vectores de $\mathbb{R}^3$.