Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 10 de diciembre de 2021
Actualización: 13/12/2021, hora: 07:17:39

Ejercicio resuelto 1. Hallar una base y la dimensión del subespacio

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+y+z = 0.$$

Solución. Hallamos un sistema de generadores de U resolviendo el sistema. Dando parámetros $y=\lambda$, $z=\mu$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= \lambda+\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu. \end{aligned}$$

De aquí,

$$U = \{(\lambda+\mu,\lambda,\mu) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1,1,0)+\mu(1,0,1) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

Esto prueba que $U =< (1,1,0),(1,0,1) >$ y dichos vectores son un sistema de generadores. Como no son proporcionales, son linealmente independientes, luego también son base de U, concluyendo que la dimensión de U es 2.

Ejercicio resuelto 2 (continuación)**.** Ampliar la base de U a una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución. Ya que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, y ya tenemos dos vectores linealmente independientes, nos hace falta encontrar un tercero de manera que los tres sean linealmente independientes. Esto es equivalente a encontrar un tercer vector (a,b,c) de manera que los tres vectores, $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(a,b,c)\}$ colocados en una matriz 3×3 tenga rango 3 (o que su determinante no es 0). Si $v=(a,b,c)$, entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

Dicho determinante es $a-b-c=0$. Por tanto, todo vector que no satisface dicha ecuación hace que B sea base de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, basta tomar $(1,0,0)$.

Otra manera de hacer el ejercicio. Sólo hace falta que la matriz tenga rango 3 (o determinante no nulo). Si tomamos $(,b,c)$ un vector 'sencillo', las cuentas pueden ser más fáciles. Por ejemplo tomando $(0,0,1)$, el determinante de la matriz se hace 'fácil' desarrollando por la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

luego $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ también nos vale.

Observación importante: todo lo que se ha hecho es esperable, ya que U es un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$, luego todo vector que no esté en el plano forma, junto con una base de U tres vectores no coplanarios, luego linelmente independientes. El determinante de la matriz es justamente (salvo proporcionalidad), la ecuación de U, luego lo que no estaba diciendo es que cualquier vector que no satisfaciera la ecuación, es decir, que no estuviera en el plano, bastaba para hallar la base de $\mathbb{R}^3$ pedida.

Ejercicio resuelto 3. Hallar una base de $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0, x+y=0\}$ y ampliarla a una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución. La base se calcula resolviendo el sistema. La matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego tomamos el menor no nulo formado por las dos últimas columnas. Esto hace que tomemos como parámetro $x = \lambda$. Por tanto, $y = -\lambda$, $z = 0$. Entonces

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\lambda, -\lambda, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(1,-1,0) : \lambda \in \mathbb{R}\} =< (1,-1,0) > .$$

Por tanto una base de U es $\{(1,-1,0)\}$. Para ampliar a una base de $\mathbb{R}^3$, tomamos dos vectores más de manera que los tres formen una matriz de rango 3. Lo más fácil, sencillo y simple es encontrar dos para que la matriz sea escalonado con 3 pivotes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la base de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.