Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 1 de diciembre de 2021
Actualización: 04/12/2021, hora: 13:49:06

Ejercicio resuelto 1. Probar que $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y+3z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y hallar un sistema de generadores del mismo. Probar que $A = \{(1,1,-1),(1,-2,1)\}$ es un sistema de generadores de U.

Solución. El conjungo U es un subespacio vectorial porque es el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, a saber, $x+2y+3z=0$. Para hallar un sistema de generadores, resolvemos el sistema. Ya que la matriz de coeficientes tiene rango 1, tomamos como parámetros $y=\lambda$ y $z=\mu$, luego $x=-2\lambda-3\mu$. Por tanto,

$$U = \{(-2\lambda-3\mu,\lambda,\mu) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(-2,1,0)+\mu(-3,0,1) : \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$$

luego el sistema pedido es $\{(-2,1,0),(-3,1,0)\}$.

Para la segunda parte, en primer lugar comprobamos que los dos vectores pertenecen a U porque satisfacen la ecuación $x+2y+3z=0$. Veamos que todo vector de U es combinación lineal de A. Si (x,y,z) está en U, será combinación lineal de los vectores de A si existen $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda(1,1,-1)+\mu(1,-2,1) = (x,y,z).$$

Multiplicando por escalares, sumando los vectores e igualando, tenemos que ver si el sistema

$$\begin{aligned} \lambda+\mu &= x \\ \lambda-2\mu &= y \\ -\lambda+\mu &= z \end{aligned}$$

tiene solución, donde las incógnitas son λ y μ: ¡aquí (x,y,z) no es un vector *cualquiera de* $\mathbb{R}^3$, sino un vector *cualquiera de* U. El sistema tendrá solución si $r(A) = r(A|b)$. Como

$$A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix},$$

dice que el rango de A es 2, el de la ampliada será 2 *si y sólo si*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Hallando el determinante, tenemos que es 0 si y sólo si $-x-2y-3z=0$, es decir, la ecuación que satisface el vector (x,y,z). Ya que podemos resolver el sistema, entonces A es un sistema de generadores.

Ejercicio resuelto 2. Probar que $A = \{(1,1,-1),(1,-2,1)\}$ no es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

Solución. Sin saber lo que se ha hecho el ejercicio anterior, el conjunto A será un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$, si *cualquier vector de* $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores de A. Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, entonces hay que hallar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda(1,1,-1) + \mu(1,-2,1) = (x,y,z).$$

Planteamos el sistema de ecuaciones lineales correspondiente, y tendrá solución si y sólo si $r(A) = r(A|b)$, es decir, si y sólo si $-x-2y-3z = 0$. Por tanto, cualquier vector que no satisfaga dicha ecuación, como $(1,0,0)$, hace que no se pueda resolver el sistema: por tanto, A no es sistema de generadores de A,