Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 30 de noviembre de 2021
Actualización: 24/11/2021, hora: 17:01:59

Ejercicio resuelto 1. Según los parámetros a, b discutir y resolver en su caso el sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} x+ay+z & =a \\ -x+y+z & =b \end{array}\right.$$

Solución. La matriz de los coeficientes y ampliadas son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

El menor de A formado por las columnas 1 y 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

nos dice que el rango de A y de la ampliada es 2, luego el sistema es compatible indeterminado. Se toma como parámetro la incógnita que no está en el menor, es decir, $y=\lambda$, que pasa al término independiente,

$$\left\{\begin{array}{ll} x+z & =a-a\lambda \\ -x+z & =b-\lambda \end{array}\right.$$

y resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a-a\lambda & 1 \\ b-\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{a-b-a\lambda+\lambda}{2}, \quad y=\lambda, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a-a\lambda \\ -1 & b-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-\lambda-a\lambda+a+b}{2}.$$

Ejercicio resuelto 2. Según los parámetros a, b discutir y resolver en su caso el sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} x+ay+z & =a \\ -x+y+z & =b \\ 2x+y-z & =1 \end{array}\right.$$

Solución. La matriz de los coeficientes y ampliadas son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El menor de A de orden 2 abajo-izquierda es -3, luego el rango de A es al menos 2. Añadimos la primera fila y la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a-5.$$

1. Caso $a=5$. Entonces $r(A)=2$. Hallamos el de la ampliada, añadiendo la cuarta columna y la primera fila:
$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9+9b \quad -9+9b=0 \Rightarrow b=1.$$
   a) Si $b=1$, el rango de la ampliada es 2, sistema compatible indeterminado.
   b) Si $b\neq 1$, el rango de la ampliada es 3, sistema incompatible.
2. Caso $a\neq 5$. El rango de A es 3, y como la ampliada contiene a A, su rango es al menos 3 y al tener 3 filas, su rango es como mucho 3, entonces el rango es 3. Sistema compatible determinado.

Resolvemos en los dos casos que es posible.

1. Caso $a=5$, $b=1$. Tomamos las ecuaciones del menor de orden 2, es decir, las dos últimas; tomamos como incógnitas las del menor, es decir, x e y; y tomamos como parámetro $z=\lambda$, que pasamos al término independiente.
$$\begin{cases} -x+y &= 1-\lambda \\ 2x+y &= 1+\lambda \end{cases}$$
$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1+\lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2\lambda}{3}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 2 & 1+\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\lambda-3}{-3}, \quad z=\lambda\in\mathbb{R}.$$
2. Caso $a\neq 5$. Tomamos las tres ecuaciones y las tres incógnitas, y resolvemos por Cramer. El determinante de A es $a-5$. Por tanto,
$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{a-5}=\frac{-aba+b-1}{a-5}$$
$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & b & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{a-5}=\frac{-2+a-3b}{a-5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a-5} = \frac{2ab-2a-b+1}{a-5}.$$