Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 23 de noviembre de 2021
Actualización: 24/11/2021, hora: 16:57:26

Resolvemos un sistema de ecuaciones sin "parámetros".

Ejercicio resuelto 1. Discutir y resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+3z &= 5 \end{cases}$$

Solución. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema por dos métodos, aunque se pueden "mezclar".

1. Método por menores/determinantes. El rango de A es como mínimo 1 cogiendo el menor del lugar $(1,1)$. Añadimos la segunda fila (la única) y la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto no nos dice nada, luego tenemos que seguir cogiendo el otro menor con la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Por tanto el rango es 2. Como $A|b$ es una matriz con 2 filas, su rango es como mucho 2, y tiene dentro A que es de rango 2, entonces $r(A|b) = 2$. El sistema es compatible indeterminado con $3-2=1$ parámetros. Cogemos las ecuaciones donde está el menor, es decir, las dos que teníamos, cogemos como incógnitas las del menor, es decir, y y z y tomamos como parámetros las incógnitas que no están en el menor, $x = \lambda$, que pasamos al término independiente y resolvemos por Cramer:

$$\begin{cases} y+z &= 1-\lambda \\ y+3z &= 5-\lambda \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-2\lambda-2}{2} = -1-\lambda, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} x &= \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ y &= -1-\lambda \\ z &= -1. \end{cases}$$

2. Por el método de Gauss. Hacemos matriz escalonada a la matriz ampliada,

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \stackrel{F_{21}(-1)}{\rightarrow} A|b = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

   Ya está escalonada A y la matriz $A|b$. Ambas tienen dos pivotes, luego el rango en ambas es 2: sistema compatible indeterminado.

   Tomamos como ecuaciones las ecuaciones donde están los pivotes (las dos que teníamos desde el principio), tomamos como incógnitas, las de los pivotes, es decir, x y z, y tomamos como parámetros las incógnitas que no están en los pivotes que pasan al término independiente. Aquí $y = \lambda$, luego

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 2 & | & 4 \end{array}\right).$$

   Resolvemos desde abajo hacia arriba:

$$z = \frac{4}{2} = 2, \rightsquigarrow x = (1-\lambda) - 2 = -1 - \lambda$$

   y acabamos

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = -1-\lambda \\ y & = \lambda, \ , \lambda \in \mathbb{R} \\ z & = -1. \end{array}\right.$$

$\square$

Ejercicio resuelto 2. Según el parámetro a, discutir y resolver el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{cl} x-y & = a \\ x+y & = a \\ ax+y & = 0 \end{array}\right.$$

Solución. La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ a & 1 \end{array}\right), \quad A|b = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Resolvemos el sistema por dos métodos, aunque se pueden "mezclar".

1. Método por menores/determinantes. El rango de A es como mínimo 1 cogiendo el menor del lugar $(1,1)$. Añadimos la segunda fila y la segunda columna (la única):

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 2 \neq 0.$$

   Por tanto el rango de A es 2 (es una matriz con 2 columnas).

Como $A|b$ es una matriz de orden 3 tiene como mucho rango 3. Dentro tiene A que tiene rango 2, luego seguimos añadiendo filas y columnas al menor de orden 2 anterior. Añadimos la tercera fila (la única) y la tercera columna (la única), quedándonos el determinante de $A|b$. Dicho determinante es $-2a^2$. Si $-2a^2 = 0$, entonces el rango es 2, y si no, es 3. Esto ocurre para $a = 0$. Por tanto, para que el sistema sea compatible, hace falta que el rango sea 2, es decir, que $a = 0$. En tal caso el sistema es compatible determinado.

Cogemos las ecuaciones donde está el menor, es decir, las dos primera (ahora no hay parámetros) y resolvemos por Cramer:

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0.$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

2. Por el método de Gauss. Hacemos matriz escalonada a la matriz ampliada,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{21}(-1),F_{31}(-1)}{\rightarrow} A|b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1+a & -a^2 \end{pmatrix} \overset{F_{32}(\frac{1+a}{-2})}{\rightarrow} A|b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}.$$

Ya están escalonada A y la matriz $A|b$. La matriz A tiene dos pivotes, luego su rango es 2. La matriz ampliada tiene tres pivotes si $-a^2 \neq 0$ y tiene 2 si $-a^2 = 0$. Por tanto el sistema es compatible si y sólo si $a = 0$, y en tal caso, es determinado.

Tomamos como ecuaciones las ecuaciones donde están los pivotes, es decir, las dos primera. Ahora no hay parámetros, luego

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos desde abajo hacia arriba:

$$2z = 0 \Rightarrow z = 0, \rightsquigarrow y = z = 0$$

y acabamos como antes. $\square$

Ejercicio resuelto 3. Según el parámetro a, discutir y resolver en su caso el sistema

$$\begin{cases} ax - y + z &= 0 \\ -x + ay + z &= 1 \\ 2x + ay = 0 \end{cases}$$

Solución. La matriz de los coeficientes y ampliadas son:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallamos el rango de A por menores en empezamos por el menor de orden 1 del lugar $(1,3)$: $|1| = 1 \neq 0$, luego $r(A) \geq 1$. Añadimos la fila 2 y columna 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1-a.$$

1. Caso $-1-a=0$, es decir, $a=-1$. No nos dice nada y tenemos que seguir con otros menores. Antes de ellos, sustituimos por $a=-1$. Añadimos al menor de orden 1 la fila 3 y la segunda columna:

   $$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

   luego $r(A) \geq 2$. Añadimos filas (la segunda) y columnas (la primera), y hallamos el menor:

   $$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

   Por tanto, el rango de A es 2.

   Hallamos el rango de la matriz ampliada. Al menor de orden 2 que nos da el rango de A, añadimos filas (sólo hay una, la segunda) y columnas (sólo hay una, la cuarta), obteniendo:

   $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

   Por tanto el rango de la matriz ampliada es 3, luego el sistema es incompatible.

2. Caso $a \neq -1$. Entonces el rango de A es al menos 2. Añadimos filas (sólo hay una, la tercera) y columnas (sólo hay una, la primera), obteniendo:

   $$\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix} = -a^2-3a-2.$$

   Igualamos a 0, sabiendo que en tal caso, el rango de A es 2 y en caso contrario, es 3. La solución de $-a^2-3a-2=0$ es $a=-2$ y $a=-1$. Éste último caso no es posible porque se está descartando. Por tanto, *a*) Caso $a = -2$. El rango de A es 2. Sustituimos y hallamos el rango de la ampliada. Al menor de orden 2 le añadimos la única fila que queda, la tercera, y la única columna que queda, la cuarta, quedando

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

luego el rango de $A|b$ es 3: sistema incompatible.

b) Caso $a \neq -2$. El rango de A es 3. Como la matriz ampliada contiene a A, su rango es al menos 3, pero como es una matriz de 3 filas, su rango es como mucho 3. Definitivamente, el rango es 3 y el sistema es compatible determinado. Resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a}{-a^2-3a-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-a^2-3a-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2-2}{-a^2-3a-2}.$$