Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 26 de noviembre de 2021
Actualización: 24/11/2021, hora: 16:59:07

Ejercicio resuelto 1. Según los parámetros a, b discutir y resolver en su caso el sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y+z & =a \\ -x+y+z & =b \end{array}\right.$$

Solución. La matriz de los coeficientes y ampliadas son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad A|b=\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \end{array}\right).$$

Escalonamos.

$$A|b=\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \stackrel{F_{21}(1)}{\to} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \end{array}\right)$$

La matriz A tiene dos pivotes, luego el rango es 2. Como la ampliada tiene como mucho 2 porque tiene dos filas y contiene a una submatriz de rango 2, entonces su rango es 2: sistema compatible indeterminado.

Tomamos como ecuaciones las que contienen a los pivotes, es decir, las dos que tenemos; como incógnitas las que tienen los pivotes, es decir, x y z y tomamos como parámetros las que no tienen pivotes, $y=\lambda$, que pasamos al término independiente.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & | & a+\lambda \\ 0 & 2 & | & a+b \end{array}\right)$$

$$z=\frac{a+b}{2}, \rightsquigarrow x=a+\lambda-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}+\lambda.$$

Las soluciones son

$$\left\{\begin{array}{ll} x & =\frac{a-b}{2}+\lambda \\ y & =\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R} \\ z & =\frac{a+b}{2}. \end{array}\right.$$

Ejercicio resuelto 2. Según los parámetros a, b y c, discutir y resolver en su caso el sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} x-y+z & =a \\ -x+y+z & =b \\ 2x+y+z & =c \end{array}\right.$$

Solución. La matriz de los coeficientes y ampliadas son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad A|b=\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \end{array}\right).$$

Escalonamos.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \end{pmatrix} \overset{F_{21}(1),F_{31}(-2)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 3 & -1 & c-2a \end{pmatrix} \overset{F_{23}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & -1 & c-2a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \end{pmatrix}$$

Hay tres pivotes tanto para A como para la ampliada, luego el rango es 3, y el sistema es compatible determinando. Resolvemos desde abajo:

$$z = \frac{a+b}{2}, \rightsquigarrow y = \frac{c-2a+\frac{a+b}{2}}{3} = \frac{2c-3a+b}{6}, \rightsquigarrow x = a - \frac{a+b}{2} + \frac{2c-3a+b}{6} = \frac{-6a-2b+2c}{6}.$$

Ejercicio resuelto 3. Según los parámetros a, b , c y d, discutir y resolver en su caso el sistema

$$\begin{cases} x-y+z & = a \\ -x+y+z & = b \\ 2x+y+z & = c \\ x+y+z & = d \end{cases}$$

Solución. La matriz de los coeficientes y ampliadas son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A|b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

Escalonamos.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 2 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{pmatrix} \overset{F_{21}(1),F_{31}(-2),F_{41}(-1)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 3 & -1 & c-2a \\ 0 & 2 & 0 & d-a \end{pmatrix} \overset{F_{23}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & -1 & c-2a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 2 & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{42}(-\frac{2}{3})}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & -1 & c-2a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & d-a-\frac{2}{3}(c-2a) \end{pmatrix} \overset{F_{4}(-3)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & -1 & c-2a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & -2 & -3d-a+2c \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{43}(1}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & -1 & c-2a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & -3d+2c+b \end{pmatrix}$$

El número de pivotes de A es 3 y el de la ampliada depende si $-3d+2c+b$ es 0 (y sería 3) o no es 0 (y sería 4). Por tanto, el sistema es compatible si y sólo si $-3d+2c+b=0$, y en tal caso, es compatible.

Resolvemos en esta situación. Las ecuaciones son donde están los pivotes, es decir, las tres primera, las incógnitas son las de los pivotes, es decir, las tres. Como nos queda las mismas ecuaciones que en el ejercicio anterior, concluimos

$$z=\frac{a+b}{2}, \rightsquigarrow y=\frac{c-2a+\frac{a+b}{2}}{3}=\frac{2c-3a+b}{6}, \rightsquigarrow x=a-\frac{a+b}{2}+\frac{2c-3a+b}{6}=\frac{-6a-2b+2c}{6}.$$