Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 17 de noviembre de 2021
Actualización: 24/11/2021, hora: 16:56:02

Seguimos hallando rango de matrices con parámetros usando menores. Hacemos variaciones para una misma matriz.

Ejercicio resuelto 1. Según el parámetro a, hallar el rango, usando la matriz escalonada (o por filas, o por columnas), de

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Lo mejor es evitar los parámetros al principio. Empezamos por el menor de derecha-abajo: $|-1| = -1 \neq 0$, luego $r(A) \geq 1$. Añadimos la segunda fila y segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

luego $r(A) \geq 2$. Añadimos la primera fila (la queda) y la primera columna (la que queda), luego

$$\begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Por tanto, $r(A) \geq 3$, luego es 3.

♣ A la vista del resultado, es claro que si hubiéramos hallado en primer lugar el determinante de A nos hubiera dado distinto de 0, luego habríamos acabado el ejercicio inmediatamente. El problema hubiera sido que fuera 0.

Ejercicio resuelto 2. Según el parámetro a, hallar el rango, usando la matriz escalonada (o por filas, o por columnas), de

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ a & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Empezamos por el menor de derecha-abajo: $|1| = 1 \neq 0$, luego $r(A) \geq 1$. Obsérvese que el rango es como mucho 2. Añadimos la segunda fila y segunda columna:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2.$$

Hacemos $a - 2 = 0$, es decir, $a = 2$ y distinguimos casos[1]

[1] Ya que se está haciendo de manera "ordenada", no cogemos otro menor porque ha sido ahora donde ha aparecido una disyuntiva.

1. Caso $a \neq 2$. Entonces el menor es distinto de 0, luego el rango es 2.

2. Caso $a = 2$. Sustituimos para ver las cosas claras. La matriz es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   Efectivamente, vemos el menor de antes de orden 2 que es cero. Añadimos ahora la primera fila (la que faltaba) y la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

   luego el rango es 2 de nuevo.

Por tanto, para cualquier valor de a el rango es 2.

Otra manera de hacerlo. Una vez cogido el menor de orden 1, hallamos *todos* los menores de orden 2 que resultan de añadir filas y columnas:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a - 2, \quad \begin{vmatrix} a & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = a + 2.$$

Si alguno es distinto de 0, el rango es 2; si todos son 0, el rango es 1. Por tanto estudiamos cuando *todos los menores de orden* 2 *se anulan*, es decir, cuando $a+2=0$ *y* $a-2=0$. O lo que es lo mismo, a debería satisfacer $a=-2$ y $a=2$, cosa que no es posible. Concluyendo que el rango es 2.

Ejercicio resuelto 3. Según el parámetro a, hallar el rango, usando la matriz escalonada (o por filas, o por columnas), de

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 3 \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Para variar, empezamos por el menor $|3| = 3 \neq 0$, luego $r(A) \geq 1$. Añadimos filas (sólo la segunda) y columnas (la primera y la segunda). Los dos menores de orden 2 son:

$$\begin{vmatrix} a & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -2a, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3a.$$

El primero se anula para $a = 0$, el segundo para $a = -1/3$. Por tanto no hay un valor de a que anule a los dos menores, luego al menos uno no es cero. Esto concluye que el rango es 2.