Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 16 de noviembre de 2021
Actualización: 24/11/2021, hora: 16:49:21

Hallamos el rango de matrices por los dos métodos: por transformaciones elementales y por determinantes.

Ejercicio resuelto 1. Hallar el rango de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solución. Puede observarse que la segunda fila es el doble de la primera, luego se puede quitar para hallar el rango, y como las otras dos filas, es decir, la primera y la tercera no son proporcionales, el rango es 2. De todas formas, vamos a aplicar los dos métodos.

1. Por transformaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \overset{F_{21}(-2),F_{31}(-1)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{F_{23}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \underline{1} & -2 & 3 \\ 0 & \underline{5} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   que tiene dos pivotes, luego el rango es 2.

2. Por menores. Tomamos el menor 1×1 del lugar $(1,1)$: $|1| \neq 0$, luego el rango es al menos 1.

   Añadimos filas y columnas a éste. Para ello usamos la segunda fila y la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

   Esto no nos dice nada, pues hay que completar con todos los menores de orden 2. Añadimos la tercera fila y segunda columna (obsérvese que hay 4 menores de orden 2 de añadir filas y columnas al elemento $(1,1)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

   luego el rango es como mínimo 2.

   A este menor, le añadimos filas y columnas, pero sólo queda la segunda fila y la tercera columna, en definitiva, la matriz inicial:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

   Luego es rango es menor que 3. Por tanto el rango de la matriz es 2.

$\square$

Ejercicio resuelto 2. Hallar el rango de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Solución. La cuarta fila es el doble de la primera, luego se quita para hallar el rango. Como mucho el rango es 3.

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{F_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Como la tercera fila el múltiplo de la segunda, se quita, quedando dos pivote, luego el rango es 2.

2. Esta vez, y en comparación con el anterior ejercicio, empezamos por menores de orden máximo. En este caso, de orden 3, que es justo el determinante de la matriz: la calculamos, obteniendo
   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

   Por tanto el rango es ≤ 2. Tomamos el menor de orden 2 de la esquina arriaba izquierda:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

   luego el rango es como mínimo 2. Conclusión, el rango es 2.

Ejercicio resuelto 3. Hallar el rango de

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución. El rango es como mucho 3.

1. $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_{31}(2),F_{41}(-1)}{\overset{F_{21}(2)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \overset{F_{42}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   luego hay tres pivotes, y el rango es 3.

2. El menor de orden 2 de la esquina izquierda-arriba es -3, luego el rango es al menos 2. Añadimos filas y columnas: columna sólo es la tercera, y filas son la tercera y la cuarta:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

luego el rango es al menos 3. Como 3 era lo máximo, concluimos que el rango es 3.

$\square$

Ejercicio resuelto 4. Hallar el rango de

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Solución. El rango es como mucho 3.

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \overset{F_{12}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \overset{F_{21}(-2),F_{11}(-3)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\overset{F_{32}(2)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hay dos pivotes, luego el rango es 2.

2. El menor de orden 2 de la esquina izquierda-arriba es 1, luego el rango es al menos 2. Añadimos filas y columnas: columna están la tercera y la cuarta y filas sólo la tercera:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Cogemos ahora la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto el rango es 2.

$\square$