Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 09 de noviembre de 2021
Actualización: 11/11/2021, hora: 19:50:49

Ejercicio resuelto 1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hallar AB, BA, AC, CA, A^2, B^2 y C^2.

Solución.

1. El producto AB no se puede realizar porque el número de columnas de A no es el de filas de B.

2. El producto BA sí se puede hacer quedando una matriz de orden 3 (filas de B) por 2 (columnas de A). Usando la definición,

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -5 & -10 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Para AC queda 3×2:

$$AC = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 9 & -9 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. No se puede hacer el producto CA porque el número de columnas de A no es el de filas de C.

5. El producto $A^2 = AA$ no se puede hacer.

6. $$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & -8 \\ -4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. $$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ejercicio resuelto 2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular $(A+B)^2$ y comparar con $A^2 + 2AB + B^2$ y explicar porqué no sale igual.

Solución.

1. $$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Por otro lado
$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -9 & 12 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$
Luego
$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

3. La explicación es que
$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2,$$
que no tiene porqué ser $A^2 + 2AB + B^2$, concretamente, en este caso, $AB + BA \neq 2AB$:
$$AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$2AB = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}.$$