Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 05 de noviembre de 2021
Actualización: 11/11/2021, hora: 19:48:00

Ejercicio resuelto 1. Se considera las funciones $f(x) = 3 - x^2$ y $g(x) = -x^2/4$. Calcular el área de la región limitada por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráfica de f y g.

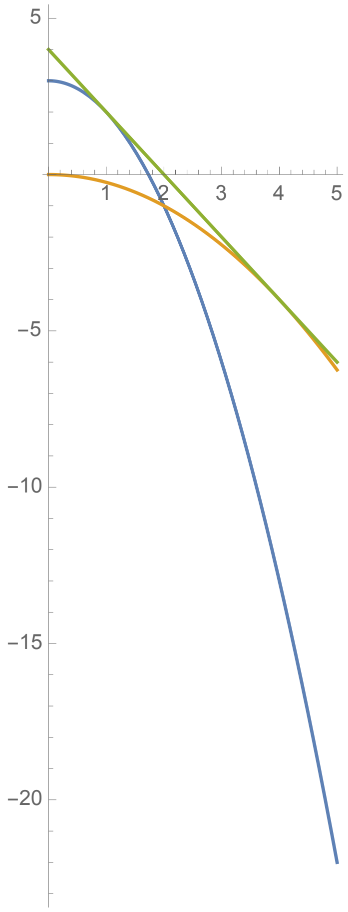

Figura 1: En azúl la recta $y = x$ y en naranja la parábola $y = x^2 - 2$

Solución. Calculamos los puntos de corte de la recta con las dos parábolas, y entre las dos parábolas:

$$3 - x^2 = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$-\frac{x^2}{4} = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

$$3 - x^2 = -\frac{x^2}{4} \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

Como la recta corta sólo una vez a las parábolas es porque es tangente. Para f y la recta, damos el valor $x = 0$, y la recta es 4 y la parábola 3; para g, el valor es 0. Por tanto, en ambos casos la recta está por encima. Luego el recinto es entre los puntos $x = 1$ y $x = 4$. Pero en primer lugar, entre $x = 1$ y $x = 2$, el el área entre la recta y la primera parábola, y luego, entre $x = 2$ y $x = 4$, es entre la recta y la segunda parábola:

$$\text{área} = \int_1^2 ((4-2x) - (3-x^2))\,dx + \int_2^4 ((4-2x) - (-\frac{x^2}{4}))\,dx =$$

Por un lado tenemos

$$\int ((4-2x) - (3-x^2))\,dx = 4x - x^2 - 3x + \frac{x^3}{3}$$

y por otro

$$\int ((4-2x) - (-\frac{x^2}{4}))\,dx = 4x - x^2 + \frac{x^3}{12}.$$

Evaluando en los extremos, tenemos que el área es 1.

Ejercicio resuelto 2. Hallar el área de la región limita por la función $f(x) = \ln(2x+e)$ para $x > -e/2$ y los ejes coordenados.

Solución. Obsérvese que f tiene una asínto en $x = -e/2 \sim -1{,}3$.

Hallamos los puntos de corte entre f y los ejes coordenados.

$$\ln(2x+e) = 0 \Rightarrow 2x + e = 1 \Rightarrow x = \frac{1-e}{2}.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \ln(e) = 1.$$

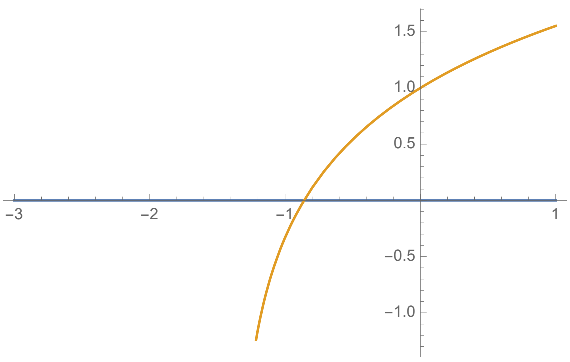

Figura 2: En azúl la recta $y = 0$ y en naranja la función $f(x)$

Vemos si f está por encima del eje de abscisas en el intervalo $[\frac{1-e}{2}, 0]$. Como en $x = 0$, $f(0) > 1$, entonces está por encima. Por tanto, el área es

$$\text{área} = \int_{\frac{1-e}{2}}^{0} \ln(2x+e)\, dx.$$

Con el cambio $t = 2x + e$ se ve que es por partes: la integral ya se ha hecho.

$$t = 2x + e \rightsquigarrow dt = 2dx$$

$$\int \ln(2x+e)\, dx = \frac{1}{2}\int \ln(t)\, dt = \frac{1}{2}(-t + t\ln(t)) = \frac{1}{2}(-(2x+e) + (2x+e)\ln(2x+e)).$$

$$\text{área} = \frac{1}{2}(-(2x+e) + (2x+e)\ln(2x+e))\Big|_{\frac{1-e}{2}}^{0} = \frac{1}{2}.$$

□