Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 02 de noviembre de 2021
Actualización: 03/11/2021, hora: 08:47:54

Hacemos varias integrales de funciones trigonométricas.

Ejercicio resuelto 1. Hallar
$$\int \frac{1}{\cos x - \sin x}\, dx.$$

Solución. ya que es una función racional de funciones trigonométricas, y los grados son pequeños (1), hacemos el cambio de tangente de $x/2$:
$$t = \tan \frac{x}{2},$$
donde sabemos
$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Entonces
$$\int \frac{1}{\cos x - \sin x}\, dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2\int \frac{1}{-t^2-2t+1} dt.$$
Queda ahora una función racional, que ya sabemos hacerlos. Hallamos las raíces del polinomio y vemos que son $-1 \pm \sqrt{2}$, luego
$$\frac{1}{t^2+2t-1} = \frac{A}{t+1+\sqrt{2}} + \frac{B}{t+1-\sqrt{2}} = \frac{A(1-\sqrt{2})+B(1+\sqrt{2})}{t^2+2t-1}.$$
Igualando numeradores:
$$A(t+1-\sqrt{2}) + B(t+1+\sqrt{2}) = 1.$$
$$t = -1+\sqrt{2} \Rightarrow B = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$t = -1-\sqrt{2} \Rightarrow A = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$
La integral es ahora
$$= -2\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}} \int \frac{A}{t+1+\sqrt{2}}\, dt + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{t+1-\sqrt{2}}\, dt\right)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\tan \frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\tan(\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}) + c.$$
$\square$

Ejercicio resuelto 2. Hallar
$$\int \frac{\tan x}{1+\sin x}\, dx$$

Solución. Hacemos de nuevo $t = \tan x/2$

$$= \int \frac{\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{2t+1+t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{4t}{(1-t^2)(t^2+2t+1)}\, dt.$$

$$= \int \frac{4t}{(1-t)(1+t)(t+1)^2}\, dt.$$

$$\frac{4t}{(1-t)(1+t)(t+1)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{(t+1)^3}.$$

$$A(t+1)^3 + B(1-t)(t+1)^2 + C(1-t)(t+1) + D(1-t) = 4t.$$

Damos valores

$$t = -1 \Rightarrow -4 = 2D \Rightarrow D = -2.$$

$$t = 1 \Rightarrow 4 = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$t = 0 \Rightarrow A+B+C+D = 0 \Rightarrow B+C = \frac{3}{2}.$$

$$t = -2 \Rightarrow -8 = -A+3B-3C+3D \Rightarrow B = \frac{1}{2}, C = 1.$$

Por tanto, la integral es

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - 2\frac{1}{(t+1)^3}\, dt$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(1-\tan\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}\ln(1+\tan\frac{x}{2}) - \frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}} + \frac{1}{(1+\tan\frac{x}{2})^2} + c.$$

$\square$

Ejercicio resuelto 3. Hallar
$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + 2\cos x \sin^2 x} dx.$$

Solución. Como es impar en seno o en cosenos, tenemos dos posibilidades.

$$t = \cos x \rightsquigarrow dx = -\frac{1}{\sin x} dt.$$

La integral es

$$-\frac{1}{t^3+2t(1-t^2)}\, dt = \int \frac{1}{t(t^2-2)}\, dt.$$

Es una integral racional:

$$\frac{1}{t(t^2-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-\sqrt{2}} + \frac{C}{t+\sqrt{2}}.$$

$$A(t^2-2) + Bt(t+\sqrt{2}) + Ct(t-\sqrt{2}).$$

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{4}, C = \frac{1}{4}.$$

La integral es

$$-\frac{1}{2}\ln(\cos x) + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{2}+\cos x) + \frac{1}{4}\ln(-\sqrt{2}+\cos x) + c$$

$\square$