Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 29 de octubre de 2021
Actualización: 31/10/2021, hora: 11:55:29

Consideramos ahora funciones racionales donde el denominador tiene raíces múltiples. Damos diferentes versiones de la misma idea.

Ejercicio resuelto 1 (versión 1)**.**

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\, dx.$$

Solución. Calculamos las raíces del denominador. Como es de segundo grado, esto es fácil, obteniendo $x = 1$ que es doble. Luego

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\, dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx.$$

Esta integral es inmediata con el cambio $t = x-1$ ($dt = dx$):

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}\, dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx = \int \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x+1} + c.$$

□

Ejercicio resuelto 2 (versión 2)**.** Hallar

$$\int \frac{x^3}{-x^3+2x^2+4x-8}\, dx.$$

Solución. Como el grado del polinomio del numerador es el mismo que el del denominador, dividimos primero:

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^3\right) \div \left(-x^3+2x^2+4x-8\right) = -1 + \dfrac{2x^2+4x-8}{-x^3+2x^2+4x-8} \\ \underline{-x^3+2x^2+4x-8} \\ \qquad\quad 2x^2+4x-8 \end{array}$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^3}{-x^3+2x^2+4x-8}\, dx = \int \left(-1+\frac{2x^2+4x-8}{-x^3+2x^2+4x-8}\right) dx = -x+2\int \frac{x^2+2x-4}{-x^3+2x^2+4x-8}\, dx.$$

Hacemos la integral. Para ello hallamos las raíces de $-x^3+2x^2+4x-8$. Como es de grado 3, usamos la regla de Ruffini. Si saliera una raíz, entonces nos quedaría luego un polinomio de segundo grado, donde tenemos una fórmula para hallar las raíces. Las raíces son $x = -2$ y $x = 2$, en este caso es doble.

Obsérvese que el coeficiente líder del polinomio es -1. Dicho de otra manera, una cosa es factorizar y otra es hallar las raíces. Para factorizar, hay que hallar las raíces. Pero en este caso, hay que multiplicar por -1 para factorizar.

Por tanto,

$$-x^3+2x^2+4x-8=-(x+2)(x-2)^2.$$

El signo $-$ lo sacamos ahora de la integral:

$$\int \frac{x^2+2x-4}{-x^3+2x^2+4x-8}\,dx=-\int \frac{x^2+2x-4}{x^3-2x^2-4x+8}\,dx$$

Hacemos la integral. Para ello, ponemos primero

$$\frac{x^2+2x-4}{x^3-2x^2-4x+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+B(x+2)(x-2)+C(x+2)}{x^3-2x^2-4x+8}.$$

Como los denominadores son iguales, también los numeradores:

$$x^2+2x-4=A(x-2)^2+B(x+2)(x-2)+C(x+2).$$

Hallamos A, B y C dando valores. Ya sabemos de teoría que $x=2$ y $x=-2$ no resuelve las tres incógnitas, y hay que dar un tercer valor:

$$x=-2\Rightarrow -4=16A\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$$
$$x=2\Rightarrow 4=4C\Rightarrow C=1$$
$$x=0\Rightarrow -4=4A-4B+2C\Rightarrow B=\frac{5}{4}$$

Por tanto, la integral que quedaba es igual a

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+2}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{x-2}\,dx+\int\frac{1}{(x-2)^2}\,dx=-\frac{1}{4}\ln(x+2)+\frac{5}{4}\ln(x-2)-\frac{1}{x-2}+c.$$

La integral que nos pedía es

$$-x+\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{5}{2}\ln(x-2)+\frac{2}{x-2}+c.$$

□

Hacemos varias integrales de funciones racionales donde el denominador tiene raíces complejas.

Ejercicio resuelto 3 (versión 1)**.**

$$\int\frac{5}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Solución. Calculamos las raíces del denominador y vemos que no tiene raíces reales. Entonces sabemos de teoría que una parte de la integral será de tipo logaritmo y otra de tipo arcotangente. Como el numerador es un polinomio de grado 0, simplemente es de tipo arcotangente.

Hacemos cuadrado perfecto:

$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4.$$

Entonces

$$\int \frac{5}{x^2+2x+5}\,dx=\int \frac{5}{(x+1)^2+4}\,dx=\left\{\begin{array}{c} t=x+1 \\ dt=dx \end{array}\right\}=\int \frac{5}{t^2+4}\,dt$$

$$=\int \frac{\frac{5}{4}}{(\frac{t}{2})^2+1}\,dt=\left\{\begin{array}{c} u=\frac{t}{2} \\ dt=2\,du \end{array}\right\}2\frac{5}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,dt$$

$$\frac{5}{2}\arctan u+c=\frac{5}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+c.$$

Se podía, antes de hacer $t=x+1$, dividir numerador y denominador por 4, y luego la sustitución.
□

Ejercicio resuelto 4 (versión 2)**.** Hallar

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}\,dx.$$

Solución. El denominador no tiene raíces reales. Ahora el numerador es de grado 1, luego ajustamos primero para que sea de tipo logaritmo. La derivada del denominador es $2x-6$, luego multiplicamos y dividimos por 2:

$$\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-6x+10}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}\,dx+\frac{1}{2}\int \frac{10}{x^2-6x+10}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10)+5\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx$$

y la integral que queda es como la del ejercicio anterior. Hacemos cuadrado perfectos:

$$x^2-6x+10=(x-3)^2+1$$

$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx=\int \frac{1}{(x-3)^2+1}\,dx=\left\{\begin{array}{c} t=x-3 \\ dt=dx \end{array}\right\}=\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$=\arctan(t)+c=\arctan(x-3)+c.$$

La integral final es

$$\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10)+5\arctan(x-3)+c.$$

□

Ejercicio resuelto 5 (versión 3)**.** Hallar

$$\int \frac{x}{x^3+3x^2+3x-7}\, dx.$$

Solución. Por el método de Ruffinit, vemos si el denominador tiene raíces, obteniendo que $x=1$ es una, quedando

$$x^3+3x^2+3x-7=(x-1)(x^2+4x+7)$$

y el polinomio de segundo grado tiene raíces complejas. El método nos dice:

$$\frac{x}{x^3+3x^2+3x-7}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+7}=\frac{A(x^2+4x+7)+(Bx+C)(x-1)}{x^3+3x^2+3x-7}.$$

Igualando los numeradores:

$$x=A(x^2+4x+7)+(Bx+C)(x-1).$$

Damos valores a x:

$$\begin{aligned} x=1 &\Rightarrow 1=12A\Rightarrow A=\frac{1}{12}\\ x=0 &\Rightarrow 0=7A-C\Rightarrow C=\frac{7}{12}\\ x=-1 &\Rightarrow -1=4A-2(C-B)\Rightarrow B=-\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Por tanto la integral inicial es

$$\frac{1}{12}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{1}{12}\int\frac{-x+7}{x^2+4x+7}\,dx=\frac{1}{12}\ln(x-1)+\frac{1}{12}\int\frac{-x+7}{x^2+4x+7}\,dx.$$

Para la integral (versión 2), hacemos la derivada del denominador, que es $2x+4$, luego multiplicamos y dividimos por -2 y ajustamos:

$$\begin{aligned}\int\frac{-x+7}{x^2+4x+7}\,dx &= -\frac{1}{2}\int\frac{2x-14}{x^2+4x+7}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+7}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{-18}{x^2+4x+7}\,dx\\ &=-\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+7)+9\int\frac{1}{x^2+4x+7}\,dx\end{aligned}$$

Ya sabemos que la integral es de tipo arcotangente (versión 1)

$$x^2+4x+7=(x+2)^2+3$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2+4x+7}\,dx &=\int\frac{1}{(x+2)^2+3}\,dx=\left\{\begin{array}{c} t=x+2\\ dt=dx\end{array}\right\}=\int\frac{1}{t^2+3}\,dt\\ &=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}\,dt=\left\{\begin{array}{c} u=\frac{t}{\sqrt{3}}\\ dt=\sqrt{3}\,du\end{array}\right\}=\sqrt{3}\frac{1}{3}\int\frac{1}{u^2+1}\,du\end{aligned}$$

$$= \sqrt{3}\frac{1}{3}\arctan u + c = \sqrt{3}\frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{3}} + c.$$

La integral pedida es

$$\frac{1}{12}\ln(x-1) - \frac{1}{24}\ln(x^2+4x+7) + \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{3}} + c.$$

$\square$