Óptica y Optometría: curso 1^0-A,
Asignatura: Matemáticas I
Fecha: 26 de octubre de 2021
Actualización: 28/10/2021, hora: 22:40:56

Ejercicio resuelto 1.

$$\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx.$$

Solución. Como el grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (2), dividimos, obteniendo:

$$\begin{array}{l} (\quad x^3) \div \left(x^2-5x+6\right) = x+5+\dfrac{19x-30}{x^2-5x+6} \\ \underline{-x^3+5x^2\quad -6x} \\ \qquad 5x^2 \quad -6x \\ \quad\ \underline{-5x^2+25x-30} \\ \qquad\qquad 19x-30 \end{array}$$

El cociente es $x+5$, el resto $19x-30$, luego

$$\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx = \int (x+5)\,dx + \int \frac{19x-30}{x^2-5x+6}\,dx = \frac{x^2}{2}+5x+\int \frac{19x-30}{x^2-5x+6}\,dx.$$

Hacemos la integral que queda. Factorizamos el denominador. Como es un polinomio de grado 2, usamos la fórmula habitual obteniendo que $x=2$ y $x=3$ son raíces simples. El método de integración nos dice que hay que poner

$$\int \frac{19x-30}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{19x-30}{(x-2)(x-3)}\,dx = \int \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\,dx.$$

Hallamos A y B, sumando:

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}.$$

Igualamos los numeradores porque los denominadores son iguales:

$$A(x-3)+B(x-2) = 19x-30.$$

Para hallar A y B, damos valores $x=3$ y $x=2$, obteniendo $A=27$ y $B=-8$. Luego

$$\int \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}\,dx = 27\int \frac{1}{x-2}\,dx - 8\int \frac{1}{x-3}\,dx = 27\ln(x-3)-8\ln(x-3)+c$$

y la integral final es

$$\frac{x^2}{2}+5x+27\ln(x-3)-8\ln(x-3)+c.$$

$\square$

Ejercicio resuelto 2. Hallar
$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx.$$

Solución. El numerador tiene grado menor que el denominador, luego el siguiente paso es factorizar el denominador. Observemos que es un polinomio de grado 3, pero sin término independiente, luego podemos sacar factor común x:

$$x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2,$$

donde en la segunda igualdad hemos factorizando el polinomio de grado 2. Ahora tenemos una raíz múltiple, luego la integral se pone

$$\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\,dx.$$

Hallamos A, B y C, sumando las tres fracciones:

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}.$$

Como los denominadores son iguales, igualamos los numeradores:

$$5x^2+20x+6 = A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx.$$

Antes de hallar de sustituir, recordemos que como hay raíces múltiples, dando los valores de las raíces, esto es, $x=0$ y $x=-1$, hallaremos dos de las incógnitas. Para la otra, hay que dar otro valor. Para $x=0$, $6=A$; para $x=-1$, $-9=-C$. De aquí sacamos $A=6$ y $C=9$. Damos ahora otro valor, por ejemplo, $x=1$, $31=6\cdot 4+2B+9$, luego $B=-1$. Entonces:

$$\int \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}\,dx. = 6\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx + 9\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$
$$= 6\ln x - \ln x + 1 - \frac{1}{x+1} + c.$$

□

Ejercicio resuelto 3. Hallar
$$\int \frac{2x^3-4x-8}{x^2-x}\,dx.$$

Solución. Como el grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (2), dividimos, obteniendo:

$$\begin{array}{l}
\big(\ 2x^3 \qquad\quad -4x-8\big) \div \big(x^2-x\big) = 2x+2+\dfrac{-2x-8}{x^2-x} \\
\underline{-2x^3+2x^2} \\
\qquad\quad 2x^2-4x \\
\qquad\ \underline{-2x^2+2x} \\
\qquad\qquad\ -2x
\end{array}$$

El cociente es $2x+2$, el resto $-2x-8$, luego

$$\int \frac{2x^3-4x-8}{x^2-x}\,dx = \int (2x+2)\,dx + \int \frac{-2x-8}{x^2-x}\,dx = x^2+2x+\int \frac{-2x-8}{x^2-x}\,dx.$$

Hacemos la integral que queda. Factorizamos el denominador. Como es un polinomio de grado 2, usamos la fórmula habitual, pero aquí es más fácil: $x^2-x = x(x-1)$. Son dos raíces simples, luego el método de integración nos dice que hay que poner

$$\int \frac{-2x-8}{x^2-x}\,dx == \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}\,dx.$$

Hallamos A y B, sumando:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}.$$

Igualamos los numeradores porque los denominadores son iguales:

$$A(x-1)+Bx = -2x-8.$$

Para hallar A y B, damos valores $x=0$ y $x=1$, obteniendo $-A=-8$ y $B=-10$. Luego

$$\int \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}\,dx = 8\int \frac{1}{x}\,dx - 10\int \frac{1}{x-1}\,dx = 8\ln(x) - 10\ln(x-1) + c$$

y la integral final es

$$x^2+2x+8\ln(x)-10\ln(x-1)+c$$

□